Esercitazione Guidata Matematica 1

16 e 17 /12/2013

Nome e Cognome ....
Matricola ....
Corso di laurea...
Docente del corso.......................................

Svolgere il compito **solo** in questo foglio. Utilizzare altri fogli solamente se necessari e comunque dopo averli chiesti al docente.

1. Integrare la seguente equazione differenziale $y''' - y = x^2 e^x$.
2. Definizione e proprietà di serie potenze. Trovare gli x per i quali converge la serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty}(x-2x^2)^n$ e calcolare la somma.
3. Illustrare il metodo delle variazioni delle costanti arbitrarie. Calcolare l'integrale generale della seguente equazione differenziale $y''-2y'+y=e^{-x}$, utilizzando il metodo illustrato.
4. Calcolare $\int \frac{1}{x^3+x^2+2x+2}dx$
5. Calcolare l'area della regione piana delimitata dalla funzione $f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$ e dalle rette verticali $x=-1$ e $x=2$.

Es. 1

Risolvere l'equazione differenziale $y''' - y = x^2 e^x$

-Equazione omogenea associata $P(\lambda) = 0$

$\lambda^3 - 1 = 0 \qquad (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$ — $\lambda = 1$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$

$y_1(x) = e^x \qquad y_2(x) = e^{-1/2\, x} \cdot \cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} x\right) \qquad y_3 = e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} x\right)$

Risoluzione dell'omogenea

$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} x\right) + C_3 e^{-\frac{x}{2}} \operatorname{sen}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} x\right)$

Calcolo la soluzione particolare. [ricordando che 1 risolve $P(\lambda)$]

$y_p(x) = x \cdot e^x (ax^2 + bx + c) = e^x (ax^3 + bx^2 + cx)$

OSS: $f(x) = e^x x^2$ cioè del tipo $e^{\lambda x} P_m(x)$ $\quad m = 2$

$\lambda = 1$ e risolve $\lambda^3 - 1 = 0 \implies y_p(x) = x^{1} e^{1 x} P_2(x)$

Molteplicità!!!

Valore di λ!!!

$$y_p(x) = e^x(ax^3+bx^2+cx)$$

$$y_p'(x) = e^x(ax^3+bx^2+cx+3ax^2+2bx+c) = e^x(ax^3+(3a+b)x^2+(2b+c)x+c)$$

$$y_p''(x) = e^x\left(ax^3+(3a+b)x^2+(2b+c)x+c+\left[3ax^2+2(3a+b)x+(2b+c)\right]\right) =$$

$$= e^x\left(ax^3+(6a+b)x^2+(6a+4b+c)x+2b+2c\right)$$

$$y_p'''(x) = e^x\left(ax^3+(6a+b)x^2+(6a+4b+c)x+2b+2c+\left[3ax^2+2(6a+b)x+(6a+4b+c)\right]\right)$$

$$= e^x\left(ax^3+(9a+b)x^2+(18a+6b+c)x+6a+6b+2c\right)$$

$y'''(x) - y(x) = x^2e^x$ sostituisco per determinare a, b, c

$$e^x\left(ax^3+(9a+b)x^2+(18a+6b+c)x+6a+6b+2c\right) - e^x(ax^3+bx^2+cx) = x^2e^x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9a = 1 \\ 18a+6b = 0 \\ 6a+6b+2c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{9} \\ b = -\frac{1}{3} \\ c = \frac{4}{9} \end{cases}$$

La soluzione sarà dunque

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + C_3 e^{-\frac{x}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + e^{x}\left(\frac{1}{9} x^3 - \frac{1}{3} x^2 + \frac{4}{9} x\right)$$

Segue ./.

Es 2

Si tratta di una serie di funzioni che può essere vista come una serie di potenze ponendo $x-2x^2=y$: $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{1}_{a_n}\cdot y^n$, $\quad y^n = (y-y_0)^n$, $y_0 = 0$

Il centro è $y_0=0$ e il raggio di convergenza vale 1. Infatti $\ell = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

La serie converge totalmente $\forall\, y \in I=(-1,1)$ e diverge $\forall\, y>1$ e $y<-1$.

Se $y=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty$ (diverge)

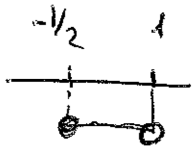
Se $y=(-1) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ Indeterminata.

In termini di x, si ha:

$-1 < y < \iff -1 < x-2x^2 < 1$, ovvero

$2x^2-x-1<0 \longrightarrow x_{1,2} = \frac{1\mp 3}{4} \begin{cases} 1 \\ -1/2 \end{cases}$

$2x^2-x+1>0 \rightarrow$ sempre $(\Delta<0)$



Se $x\in\left(-\frac{1}{2},1\right) \Rightarrow$ la serie converge totalmente

Se $x=1$ La serie è indeterminata

Se $x=-\frac{1}{2}$ La serie è indeterminata

Per quanto riguarda la somma, é possibile osservare che si tratta di una serie geometrica.

Per $x \in (-\frac{1}{2}, 1)$ $\sum_{n=1}^{\infty} (x-2x^2)^n = \frac{1}{1-(x-2x^2)} (x-2x^2)$.

OSSERVAZIONE: Serie geometrica:

$$\sum_{n=k}^{\infty} A q^n = A \frac{1}{1-q} q^k \quad -1 < q < 1.$$

Es 3

$$y'' - 2y' + y = e^{-x}$$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ $(\lambda - 1)^2 = 0$ $\lambda = 1$ 2 Volte

$y_1(x) = e^x$; $y_2(x) = x e^x$

$y_p(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$ c_1, c_2 Funzioni di x!!!

$y_1'(x) = e^x$; $y_2'(x) = e^x(x+1)$

$$\begin{cases} c_1' e^x + c_2' x e^x = 0 \\ c_1' e^x + c_2' e^x (x+1) = e^{-x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1' + x c_2' = 0 \\ c_1' + c_2'(x+1) = e^{-2x} \end{cases} \longrightarrow c_2' = e^{-2x} \quad c_2(x) = \frac{e^{-2x}}{-2}$$

$c_1' = -x c_2' = -x e^{-2x} \Rightarrow c_1(x) = \int x \, D \frac{e^{-2x}}{2} dx = \frac{x}{2} e^{-2x} - \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx$

$c_1(x) = x \frac{e^{-2x}}{2} + \frac{e^{-2x}}{4}$

$$y_p(x) = -\frac{x e^{-x}}{2} + \frac{e^{-x}}{4} - \frac{1}{2} x e^{-x} = \frac{e^{-x}}{4}$$

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{e^{-x}}{4}$$

Es 4

$$* \int \frac{1}{x^3+x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{1}{x^2(x+1)+2(x+1)}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)(x^2+2)}\,dx$$

$$\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2} = \frac{1}{(x+1)(x^2+2)}$$

$$\frac{Ax^2+2A+Bx^2+Cx+Bx+C}{(x+1)(x^2+2)} = \frac{1}{\cancel{(x+1)}(x^2+2)}$$

$$(A+B)x^2+(B+C)x+C+2A = 1$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B+C=0 \\ C+2A=1 \end{cases} \rightarrow A = +C$$

$A = 1/3$

$C = +1/3$

$B = -1/3$

Allora: $$* = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{3}\left(\int \frac{x}{x^2+2}\,dx - \int \frac{1}{x^2+2}\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,d(x+1) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+2}\,d(x^2+2) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,d(x+1) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+2}\,d(x^2+2) - \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\,d\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right) =$$

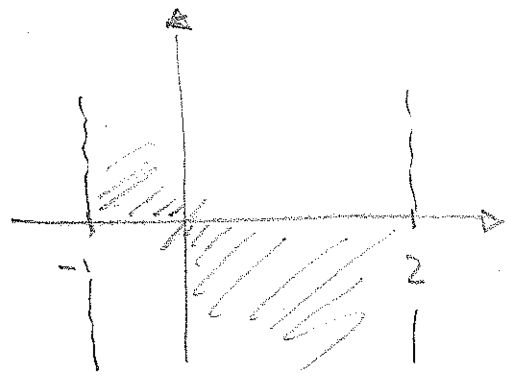
$$= \frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{6} \ln|x^2+2| + C$$

Es 5 Indipendentemente dal grafico di $y(x)$ per il calcolo di un'area dobbiamo studiare il segno della funzione in $[-1, 2]$

$$f(x) = x\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$e^{-\frac{x^2}{2}} \to$ positiva

$x \to$ dipende da x



$x \geq 0$ & $x \in [0, 2]$

$$A = -\int_{-1}^{0} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_{0}^{2} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} e^{-\frac{x^2}{2}} d\left(-\frac{x^2}{2}\right) - \int_{0}^{2} e^{-\frac{x^2}{2}} d\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$= e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{-1}^{0} - e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{0}^{2} = (1 - e^{-\frac{1}{2}}) - (e^{-2} - 1) =$$

$$= 1 - e^{-1/2} - e^{-2} + 1 = 2 - e^{-1/2} - e^{-2}.$$