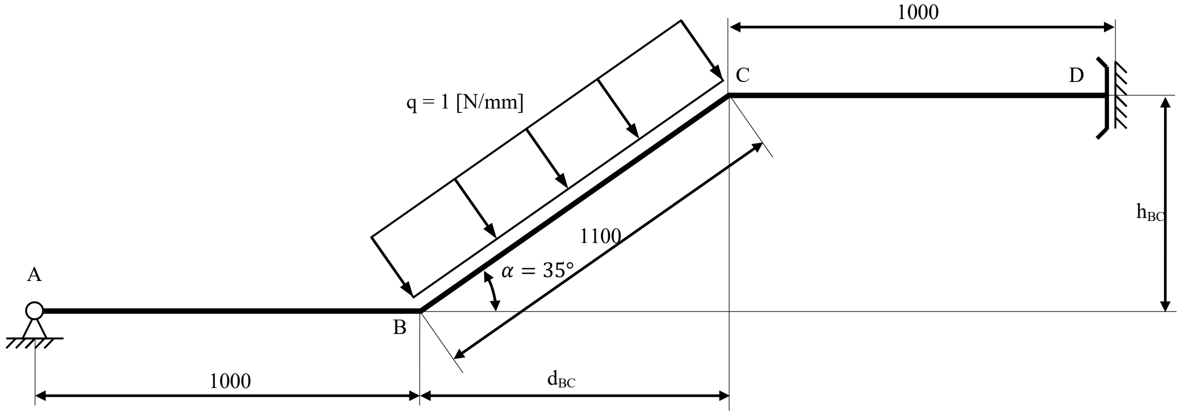
**Fondamenti di Costruzioni Meccaniche**
Esame scritto 17 luglio 2017

Per il caso iperstatico di figura risolvere la struttura, **tracciare** i diagrammi delle azioni interne e calcolare gli sforzi nella sezione più sollecitata. Dati: Sezione circolare di diametro d = 60 [mm]; E = 200 [GPa], G = 80 [GPa].



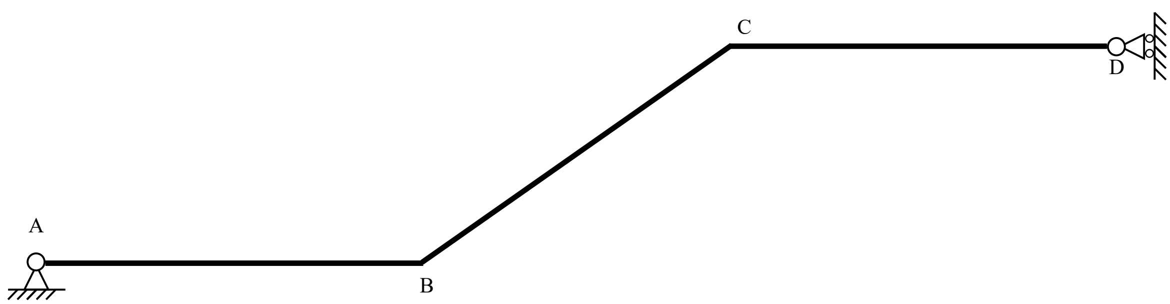

Alcuni calcoli preliminari:

$d_{BC} = 1100 \times cos(35) = 901.067\ [mm]$ ; $h_{BC} = 1100 \times sen(35) = 630.934\ [mm]$;

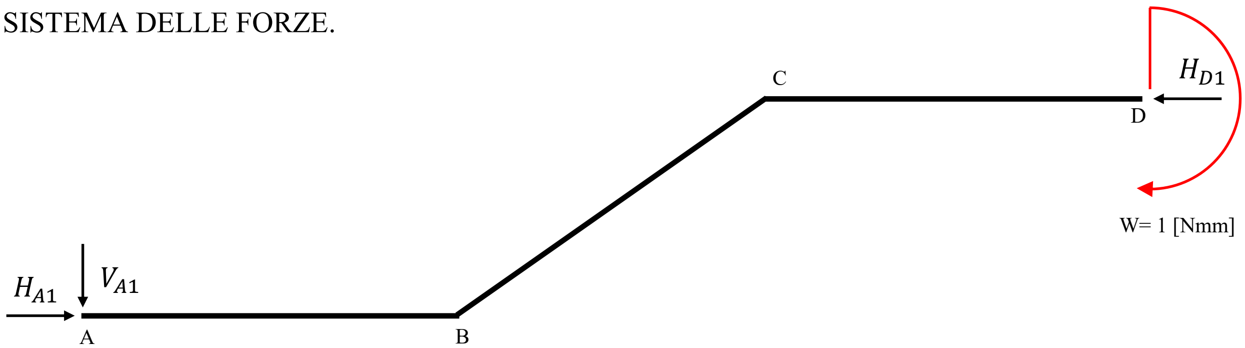
$A = \pi R^2 = \pi 30^2 = 2827.43\ [mm^2]$ ; $I = \frac{\pi D^4}{64} = 636172.5\ [mm^4]$

$\chi = \frac{10}{9}$ Fattore di taglio della sezione circolare piena

La struttura è formata da una sola asta (3 GDL) mentre i vincoli sono 4 (una cerniera a terra e un pattino). Per renderla isostatica è necessario eliminare un vincolo senza rendere la struttura labile. Per rendere la struttura isostatica esistono diverse possibilità: scegliamo di sostituire il pattino con un carrello. La reazione iperstatica sarà quindi il momento flettente (incognito) $M_D$, la cui presenza garantisce che il nodo D non ruoti



SISTEMA DELLE FORZE.




Sostituiamo i vincoli con le rispettive reazioni: nella cerniera a terra (nel punto A) inseriamo due forze, una orizzontale $H_{A1}$ e una verticale $V_{A1}$ che impediscono che il nodo possa spostarsi; nel carrello a terra (nel punto D) inseriamo la reazione del terreno $H_{D1}$.

Le incognite sono solo tre: $H_{A1}, V_{A1}, H_{D1}$. Il pedice "1" indica che si tratta delle reazioni che agiscono sulla struttura fittizia nel sistema delle forze.

1) Equilibrio delle forze verticali:

$$\sum F_y = V_{A1} = 0$$

2) Equilibrio alla rotazione, per esempio intorno al punto A:

$$\sum M_A = W - H_{D1} \times h_{BC} = 0 \quad \text{da cui:} \quad H_{D1} = \frac{W}{h_{BC}} = \frac{1}{630.934}\ [N]$$

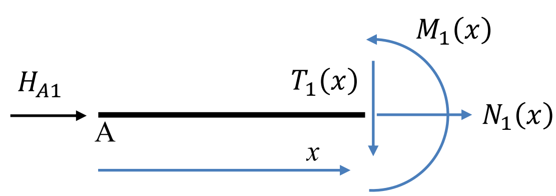
3) Equilibrio delle forze orizzontale:

$$\sum F_x = H_{A1} - H_{D1} = 0 \quad \text{da cui:} \quad H_{A1} = H_{D1} = \frac{1}{630.934}\ [N]$$

EQUAZIONI DELLE AZIONI INTERNE NELLA STRUTTURA FITTIZIA

1) Tratto AB $(0 \leq x \leq 1000)$:

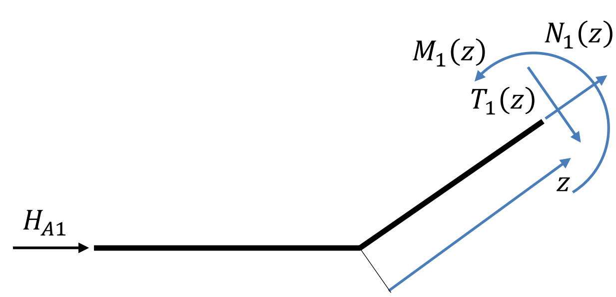
$$\begin{cases} \sum F_x = N_1(x) + H_{A1} = 0 \\ \sum F_y = T_1(x) = 0 \\ \sum M_A = M_1(x) = 0 \end{cases}$$




Dalla prima: $N_1(x) = -H_{A1} = -\frac{1}{1100 \cdot sen(35)} = -\frac{1}{630.934}\ [N]$

2) Tratto BC $(0 \leq z \leq 1100)$:

$$\begin{cases} \sum F_{\parallel} = N_1(z) + H_{A1} \cdot cos(\alpha) = 0 \\ \sum F_{\perp} = T_1(z) + H_{A1} \cdot sen(\alpha) = 0 \\ \sum M_z = M_1(z) + H_{A1} \cdot [z \cdot sen(\alpha)] = 0 \end{cases}$$



Dalla prima: $N_1(z) = -H_{A1} \cdot cos(\alpha) = -\frac{W}{h_{BC}} \cdot cos(\alpha) = -\frac{1 \cdot cos(35°)}{1100 \cdot sen(35°)} = -\frac{1}{770.23} [N]$

Dalla seconda: $T_1(z) = -H_{A1} \cdot sen(\alpha) = -\frac{W}{h_{BC}} \cdot sen(\alpha) = -\frac{1 \cdot sen(35°)}{1100 \cdot sen(35°)} = -\frac{1}{1100} [N]$

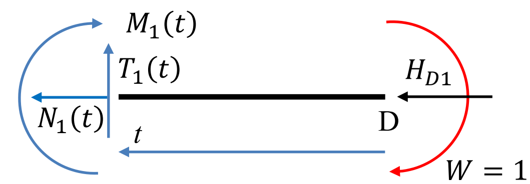
Dalla terza: $M_1(z) = -H_{A1} \cdot sen(\alpha) \cdot z = -\frac{z}{1100} [Nmm]$

Quando $z = 1100$ [mm], cioè nel punto C, il momento vale:

$$M_1(z = 1100) = -1 [Nmm]$$

3) Tratto DC ($0 \leq t \leq 1000$):

$$\begin{cases} \sum F_x = N_1(t) + H_{D1} = 0 \\ \sum F_y = T_1(t) = 0 \\ \sum M_D = M_1(t) + W = 0 \end{cases}$$

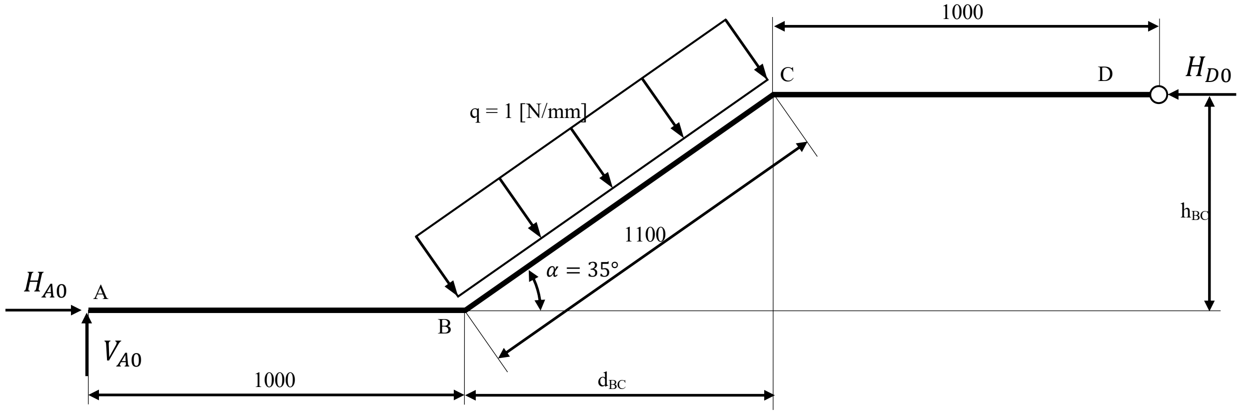



Dalla prima: $N_1(t) = -H_{D1} = -\frac{W}{h_{BC}} = -\frac{1}{1100 \cdot sen(35)} [N]$

Dalla seconda: $T_1(t) = 0 [N]$

Dalla terza: $M_1(t) = -W = -1 [Nmm]$

SISTEMA DEGLI SPOSTAMENTI.




Il pedice "0" indica che si tratta delle reazioni che agiscono sulla struttura fittizia (resa isostatica) nel sistema degli spostamenti.

1) Equilibrio delle forze verticali:

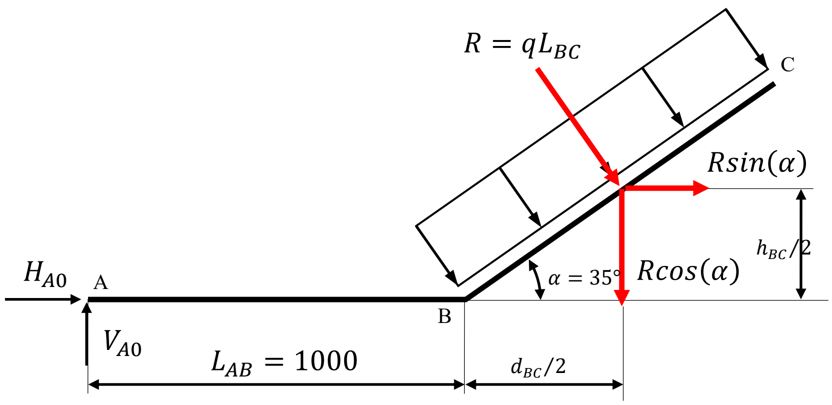
$\sum F_y = V_{A0} - q \times L_{BC} \times cos(\alpha) = 0$ da cui $V_{A0} = q \times L_{BC} \times cos(\alpha)$

2) Equilibrio delle forze orizzontali:

$\sum F_x = H_{A0} + q \times L_{BC} \times sen(\alpha) - H_{D0} = 0$ (Ho due incognite: la risolvo dopo)

3) Equilibrio alla rotazione intorno al punto A (ho una sola incognita):

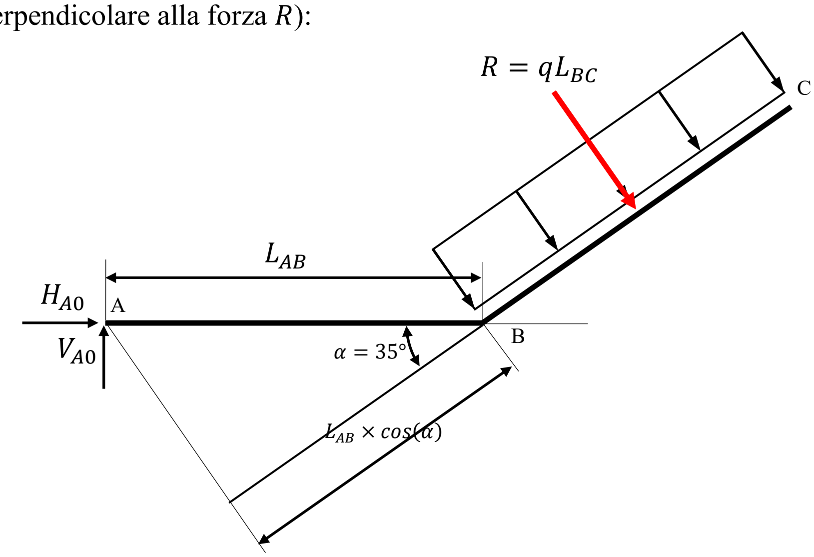
a) 1° Metodo: proietto la risultante $R = qL_{BC}$ in direzione orizzontale e verticale:




$\sum M_A = R\cos(\alpha)\left(L_{AB} + \frac{d_{BC}}{2}\right) + R\,\mathrm{sen}(\alpha)\left(\frac{h_{BC}}{2}\right) - H_{D0} \cdot h_{BC} = 0$ da cui:

$$H_{D0} = R\left[\cos(\alpha)\left(\frac{2L_{AB}+d_{BC}}{2h_{BC}}\right) + \frac{\mathrm{sen}(\alpha)}{2}\right] \quad (1)$$

b) 2° Metodo: proietto l'asta AB nella direzione dell'asta BC (cioè in direzione perpendicolare alla forza $R$):




$\sum M_A = R\left(L_{AB}cos(\alpha) + \frac{L_{BC}}{2}\right) - H_{D0} \cdot h_{BC} = 0$ da cui:

$$H_{D0} = R\frac{2L_{AB}cos(\alpha)+L_{BC}}{2h_{BC}} \quad (2)$$

Le equazioni (1) e (2) devono naturalmente essere uguali. Uguagliando abbiamo infatti:

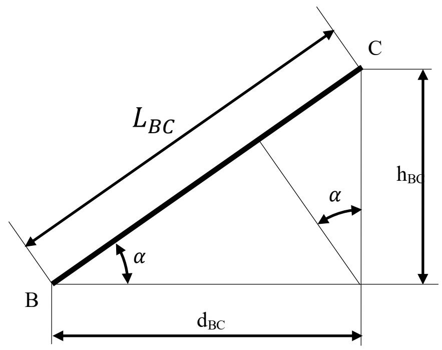
$$R\left[\cos(\alpha)\left(\frac{2L_{AB}+d_{BC}}{2h_{BC}}\right) + \frac{\mathrm{sen}(\alpha)}{2}\right] = R\frac{2L_{AB}cos(\alpha)+L_{BC}}{2h_{BC}}$$

Dividendo entrambe i membri per $R$ e moltiplicando per $2h_{BC}$ abbiamo:

$$(2L_{AB} + d_{BC})cos(\alpha) + h_{BC}sen(\alpha) = 2L_{AB}cos(\alpha) + L_{BC}$$

da cui:

$$d_{BC}cos(\alpha) + h_{BC}sen(\alpha) = L_{BC}$$




Trovato il valore della reazione $H_{D0}$ posso calcolare la reazione $H_{A0}$:

$$H_{A0} = H_{D0} - q \times L_{BC} \times sen(\alpha)$$

Ricordando l'eq.(1), abbiamo:

$$H_{A0} = R\left[\cos(\alpha)\left(\frac{2L_{AB} + d_{BC}}{2h_{BC}}\right) + \frac{\text{sen}(\alpha)}{2}\right] - Rsen(\alpha) = R\left[\cos(\alpha)\left(\frac{2L_{AB} + d_{BC}}{2h_{BC}}\right) - \frac{\text{sen}(\alpha)}{2}\right]$$

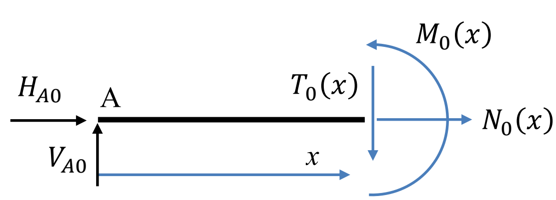
Si tratta adesso di sostituire i valori numerici:

$$\begin{cases} V_{A0} = q \times L_{BC} \times cos(\alpha) = 1 \times 1100 \times cos(35°) = 901\ [N] \\ H_{D0} = R\dfrac{2L_{AB}cos(\alpha) + L_{BC}}{2h_{BC}} = 1 \times 1100 \times \dfrac{2 \times 1000 \times cos(35°) + 1100}{2 \times 1100 \times sen(35°)} = 2387\ [N] \\ H_{A0} = R\left[\cos(\alpha)\left(\dfrac{2L_{AB} + d_{BC}}{2h_{BC}}\right) - \dfrac{\text{sen}(\alpha)}{2}\right] = 1 \times 1100 \times \left[\cos(35°)\left(\dfrac{2 \times 1000 + 1100 \times cos(35°)}{2 \times 1100 \times sen(35°)}\right) - \dfrac{\text{sen}(35°)}{2}\right] = 1756.11\ [N] \end{cases}$$

EQUAZIONI DELLE AZIONI INTERNE NELLA STRUTTURA REALE

1) Tratto AB $(0 \le x \le 1000)$:

$$\begin{cases} \sum F_x = N_0(x) + H_{A0} = 0 \\ \sum F_y = T_0(x) - V_{A0} = 0 \\ \sum M_A = M_0(x) - T_0(x) \cdot x = 0 \end{cases}$$



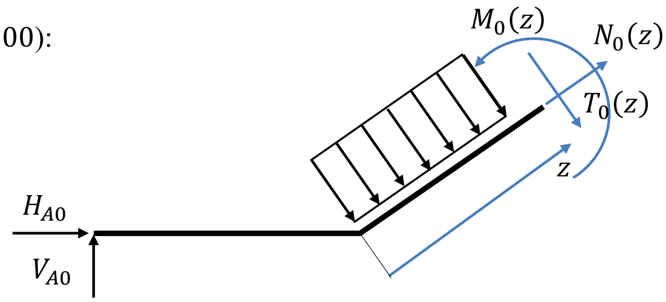

L'azione normale $N_0(x)$ è costante: $N_0(x) = -H_{A0} = -1756.11\ [N]$ [Compressione]

L'azione di taglio $T_0(x)$ è costante: $T_0(x) = V_{A0} = 901\ [N]$

Il momento flettente ha andamento lineare: $M_0(x) = T_0(x) \cdot x = 901 \cdot x$

$$\begin{cases} M_0(x = 0) = 0\ [Nmm] \\ M_0(x = 1000) = 901\ [Nm] \end{cases}$$

2) Tratto BC ($0 \leq z \leq 1100$):




$$\begin{cases} \sum F_{\parallel} = N_0(z) + H_{A0} \cdot cos(\alpha) + V_{A0} \cdot sen(\alpha) = 0 \\ \sum F_{\perp} = T_0(z) + q \cdot z + H_{A0} \cdot sen(\alpha) - V_{A0} \cdot cos(\alpha) = 0 \\ \sum M_z = M_0(z) + q\dfrac{z^2}{2} + H_{A0} \cdot [z \cdot sen(\alpha)] - V_{A0} \cdot [L_{AB} + z \cdot cos(\alpha)] = 0 \end{cases}$$

Dalla prima:

$$N_0(z) = -H_{A0} \cdot cos(\alpha) - V_{A0} \cdot sen(\alpha) = -1756.11 \cdot cos(35°) - 901 \cdot sen(35°)$$

da cui: $N_0(z) = -1955.3\ [N]$

Dalla seconda:

$$T_0(z) = V_{A0} \cdot cos(\alpha) - H_{A0} \cdot sen(\alpha) - q \cdot z = 901 \cdot cos(35°) - 1756.11 \cdot sen(35°) - z$$

da cui: $T_0(z) = -269.207 - z\ \ [N]$

$$\begin{cases} T_0(z=0) = -269.207\ [N] \\ T_0(z=1100) = -1369.207\ [N] \end{cases}$$

Dalla terza:

$$M_0(z) = V_{A0} \cdot [L_{AB} + z \cdot cos(\alpha)] - H_{A0} \cdot [z \cdot sen(\alpha)] - q\frac{z^2}{2} = 901 \cdot [1000 + z \cdot cos(35°)] - 1756.11 \cdot [z \cdot sen(35°)] = 901000 + [901 \cdot cos(35°) - 1756.11 \cdot sen(35°)]z - 1\frac{z^2}{2}$$

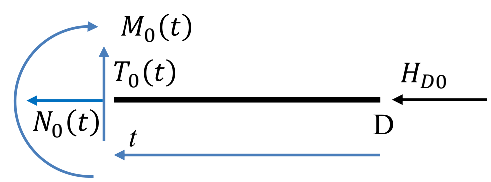
Da cui: $M_0(z) = 901000 - 269.207 \cdot z\ - \frac{z^2}{2}\ \ [Nmm]$

$$\begin{cases} M_0(z=0) = 901000\ [Nmm] \\ M_0(z=1100) = -127.7 \cong 0\ [Nmm] \end{cases}$$

A causa degli errori di arrotondamento, nella cerniera il momento flettente non si annulla esattamente: il valore è comunque molto prossimo a zero. Poiché nel tratto BC il taglio non si annulla mai, il momento flettente non è mai stazionario ($\frac{dM}{dx} = T \neq 0$) e il suo valore massimo è pari al valore raggiunto all'estremità dell'intervallo, cioè 901000 [Nmm].

3) Tratto DC ($0 \leq t \leq 1000$):

$$\begin{cases} N_0(t) = -H_{D0} = -2387\ [N] \\ T_0(t) = 0 \\ M_0(t) = 0 \end{cases}$$



Le azioni interne $M_{TOT}, N_{TOT}, T_{TOT}$ che agiscono sulla struttura reale sono la somma dei contributi delle azioni interne $M_0, N_0, T_0$ causate dai carichi esterni sulla struttura fittizia, più il contributo delle azioni interne $M_1, N_1, T_1$ causate dall'iperstatica di valore unitario moltiplicate per un coefficiente moltiplicativo $X$ da determinare per mezzo del Principio dei Lavori Virtuali. Tale coefficiente deve assumere un valore tale da ripristinare il vincolo eliminato per rendere la struttura isostatica.

$$\begin{cases} N_{TOT} = N_0 + X \cdot N_1 \\ T_{TOT} = T_0 + X \cdot T_1 \\ M_{TOT} = M_0 + X \cdot M_1 \end{cases}$$

CALCOLO DELL'IPERSTATICA PER MEZZO DEL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

$$\alpha_D = \int \frac{M_{TOT}M_1}{EI}dx + \int \frac{N_{TOT}N_1}{EA}dx + \int \frac{\chi T_{TOT}T_1}{GA}dx = 0$$

$$\int \frac{(M_0 + X \cdot M_1)M_1}{EI}dx + \int \frac{(N_0 + X \cdot N_1)N_1}{EA}dx + \int \frac{\chi(T_0 + X \cdot T_1)T_1}{GA}dx = 0$$

Sviluppando il precedente integrale abbiamo:

$$X = -\frac{\int \frac{M_0M_1}{EI}dx + \int \frac{N_0N_1}{EA}dx + \int \frac{\chi T_0T_1}{GA}dx}{\int \frac{M_1^2}{EI}dx + \int \frac{N_1^2}{EA}dx + \int \frac{\chi T_1^2}{GA}dx}$$

Gli integrali vanno calcolati su tutta la struttura. Vediamo di calcolare i singoli contributi. Poiché il materiale e la sezione trasversale della trave non cambiano nei diversi tratti, è possibile portare fuori dagli integrali sia le costanti del materiale che le caratteristiche geometriche della sezione trasversale.

Prima riassumo in una tabella le equazioni delle azioni interne:

| Tratto | Sistema delle Forze | Sistema degli spostamenti |
|---|---|---|
| $0 \le x \le 1000$ | $\begin{cases} N_1(x) = -\frac{1}{630.934} \\ T_1(x) = 0 \\ M_1(x) = 0 \end{cases}$ | $\begin{cases} N_0(x) = -1756.11 \\ T_0(x) = 901 \\ M_0(x) = 901 \cdot x \end{cases}$ |
| $0 \le z \le 1100$ | $\begin{cases} N_1(z) = -\frac{1}{770.23} \\ T_1(z) = -\frac{1}{1100} \\ M_1(z) = -\frac{z}{1100} \end{cases}$ | $\begin{cases} N_0(z) = -1955.3 \\ T_0(z) = -269.207 - z \\ M_0(z) = 901000 - 269.207 \cdot z - \frac{z^2}{2} \end{cases}$ |
| $0 \le t \le 1000$ | $\begin{cases} N_1(t) = -\frac{1}{630.934} \\ T_1(t) = 0 \\ M_1(t) = -1 \end{cases}$ | $\begin{cases} N_0(t) = -2387 \\ T_0(t) = 0 \\ M_0(t) = 0 \end{cases}$ |

Per il momento flettente abbiamo:

$$\int \frac{M_0 M_1}{EI} dx = \int_A^B \frac{M_0 M_1}{EI} dx + \int_B^C \frac{M_0 M_1}{EI} dz + \int_D^C \frac{M_0 M_1}{EI} dt$$

Poiché nel tratto AB il momento $M_1(x)$ è nullo e nel tratto DC il momento $M_0(t)$ è nullo, il precedente integrale diventa:

$$\int \frac{M_0 M_1}{EI} dx = \int_B^C \frac{M_0 M_1}{EI} dz = \frac{1}{EI} \int_0^{1100} \left[ 901000 - 269.207 \cdot z \ - \frac{z^2}{2} \right] \left[ -\frac{z}{1100} \right] dz$$

da cui:

$$\int \frac{M_0 M_1}{EI} dx = \frac{1}{1100 EI} \left| -901000 \frac{z^2}{2} + 269.207 \cdot \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{8} \right|_0^{1100} = -\frac{220594843{,}3}{EI}$$

mentre l'integrale:

$$\int \frac{M_1^2}{EI} dx = \int_A^B \frac{M_1^2}{EI} dx + \int_B^C \frac{M_1^2}{EI} dz + \int_D^C \frac{M_1^2}{EI} dt$$

diventa:

$$\int \frac{M_1^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{1100} \left[ -\frac{z}{1100} \right]^2 dz + \int_0^{1000} dt \right] = \frac{1}{EI} \left[ \left| \frac{z^3}{3 \times 1100^2} \right|_0^{1100} + 1000 \right] = \frac{1366.7}{EI}$$

Per il taglio abbiamo:

$$\int \frac{\chi T_0 T_1}{GA} dx = \int_A^B \frac{\chi T_0 T_1}{GA} dx + \int_B^C \frac{\chi T_0 T_1}{GA} dz + \int_D^C \frac{\chi T_0 T_1}{GA} dt$$

Poiché nei tratti AB e CD il taglio $T_1$ è nullo, il precedente integrale diventa:

$$\int \frac{\chi T_0 T_1}{GA} dx = \int_B^C \frac{\chi T_0 T_1}{GA} dz = \frac{\chi}{GA} \int_0^{1100} T_0 T_1 dz = \frac{\chi}{GA} \int_0^{1100} [-269.207 - z] \left[ -\frac{1}{1100} \right] dz$$

da cui:

$$\int \frac{\chi T_0 T_1}{GA} dx = \frac{\chi}{1100 GA} \left| 269.207 z + \frac{z^2}{2} \right|_0^{1100} = \frac{\chi \cdot 819{,}207}{GA}$$

mentre l'integrale:

$$\int \frac{\chi T_1^2}{GA} dx = \int_A^B \frac{\chi T_1^2}{GA} dx + \int_B^C \frac{\chi T_1^2}{GA} dz + \int_D^C \frac{\chi T_1^2}{GA} dt$$

diventa:

$$\int \frac{\chi T_1^2}{GA} dx = \int_B^C \frac{\chi T_1^2}{GA} dz = \frac{\chi}{GA} \int_0^{1100} \left[ -\frac{1}{1100} \right]^2 dz = \frac{\chi}{1100 \cdot GA}$$

Per l'azione normale abbiamo:

$$\int \frac{N_0 N_1}{EA} dx = \int_A^B \frac{N_0 N_1}{EA} dx + \int_B^C \frac{N_0 N_1}{EA} dz + \int_D^C \frac{N_0 N_1}{EA} dt$$

Sostituendo i valori abbiamo:

$$\int \frac{N_0 N_1}{EA} dx = \frac{1}{EA}\left[\int_0^{1000} [-1756.11]\left[-\frac{1}{630.934}\right] dx + \int_0^{1100} [-1955.3]\left[-\frac{1}{770.23}\right] dz + \int_0^{1000} [-2387]\left[-\frac{1}{630.934}\right] dt\right] = \frac{1}{EA}(2783,35 + 2792,45 + 3783,28) = \frac{9359}{EA}$$

mentre l'integrale:

$$\int \frac{N_1^2}{EA} dx = \int_A^B \frac{N_1^2}{EA} dx + \int_B^C \frac{N_1^2}{EA} dz + \int_D^C \frac{N_1^2}{EA} dt$$

diventa:

$$\int \frac{N_1^2}{EA} dx = \frac{1}{EA}\left[\int_0^{1000} \left[-\frac{1}{630.934}\right]^2 dx + \int_0^{1100} \left[-\frac{1}{770.23}\right]^2 dz + \int_0^{1000} \left[-\frac{1}{630.934}\right]^2 dt\right]$$

da cui:

$$\int \frac{N_1^2}{EA} dx = \frac{1}{EA}\left[\frac{1000}{630.934^2} + \frac{1100}{770.23^2} + \frac{1000}{630.934^2}\right] = \frac{1}{1335,5 \cdot EA}$$

Sommando i diversi contributo abbiamo:

$$X = -\frac{-\frac{220594843,3}{EI} + \frac{9359}{EA} + \frac{\chi \cdot 819,207}{GA}}{\frac{1366.7}{EI} + \frac{1}{1335,5 \cdot EA} + \frac{\chi}{1100 \cdot GA}}$$

Se dovessimo trascurare sia il taglio che l'azione normale avremo:

$$X = -\frac{-\frac{220594843,3}{EI}}{\frac{1366.7}{EI}} = \frac{220594843,3}{1366.7} = 161406.9$$

Considerando anche il contributo dell'azione normale abbiamo

$$X = -\frac{-\frac{220594843,3}{EI} + \frac{9359}{EA}}{\frac{1366.7}{EI} + \frac{1}{1335,5 \cdot EA}}$$

Poiché: $A = \frac{\pi D^2}{4}$ e $I = \frac{\pi D^4}{64}$ allora $I = A\frac{D^2}{16}$ possiamo semplificare l'espressione e abbiamo:

$$X = -\frac{-\frac{16 \times 220594843,3}{D^2} + \frac{9359}{1}}{\frac{16 \times 1366.7}{D^2} + \frac{1}{1335,5}} = \frac{16 \times 220594843,3 - 9359 \times D^2}{16 \times 1366.7 \times 1335,5 + D^2} \times 1335,5 = 159846.4$$

Considerando anche il contributo del taglio abbiamo:

$$X = \frac{\frac{220594843,3}{EI} - \frac{9359}{EA} - \frac{\chi \cdot 819,207}{GA}}{\frac{1366.7}{EI} + \frac{1}{1335,5 \cdot EA} + \frac{\chi}{1100 \cdot GA}} = \frac{0,001713}{1.0747 \times 10^{-8}} = 159405.6$$

Osserviamo che la soluzione ottenuta trascurando sia il contributo del taglio che quello dell'azione interna è superiore al valore esatto solo dell'1.26%; mentre la soluzione ottenuta trascurando solo il contributo del taglio e superiore al valore esatto dello 0.28%.

Per concludere, le azioni interne della struttura reale sono le seguenti:

$$\begin{cases} N_{TOT} = N_0 + X \cdot N_1 \\ T_{TOT} = T_0 + X \cdot T_1 \\ M_{TOT} = M_0 + X \cdot M_1 \end{cases}$$

| Tratto | Struttura reale |
|---|---|
| $0 \leq x \leq 1000$ | $\begin{cases} N_{TOT}(x) = -1756.11 - \dfrac{159405.6}{630.934} = -2008.8\ [N] \\ T_{TOT}(x) = 901 \\ M_{TOT}(x) = 901 \cdot x \end{cases}$ |
| $0 \leq z \leq 1100$ | $\begin{cases} N_{TOT}(z) = -1955.3 - \dfrac{159405.6}{770.23} = -2162.3\ [N] \\ T_{TOT}(z) = -269.207 - z - \dfrac{159405.6}{1100} = -414.1 - z\ [N] \\ M_{TOT}(z) = 901000 - 269.207 \cdot z - \dfrac{z^2}{2} - \dfrac{159405.6 \cdot z}{1100} = -\dfrac{z^2}{2} - 414.1 \cdot z + 901000\ [Nmm] \end{cases}$ Osserviamo che: $M_{TOT}(z = 1100) = -159510\ [Nmm]$ è praticamente lo stesso valore che il momento flettente assume nel nodo C provenendo dal tratto DC. |
| $0 \leq t \leq 1000$ | $\begin{cases} N_{TOT}(t) = -2387 - \dfrac{159405.6}{630.934} = -2639.7\ [N] \\ T_{TOT}(t) = 0 \\ M_{TOT}(t) = -159405.6\ [Nmm] \end{cases}$ |

La sezione maggiormente sollecitata è quella in corrispondenza del nodo B, nel tratto BC. Abbiamo infatti:

$$\begin{cases} N(z = 0) = -2162.3\ [N] \\ T(z = 0) = -414.1\ [N] \\ M(z = 0) = 901000\ [Nmm] \end{cases}$$

Gli sforzi massimi valgono:

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{My}{I}$$

Il momento flettente è positivo: in base alla convenzione sui segni che è stata adottata, ciò significa che le fibre tese sono quelle inferiori, mentre quelle compresse sono le superiori. Essendo lo sforzo normale di compressione, le fibre superiori saranno sottoposte a degli sforzi, in valore assoluto, maggiori di quelli che agiscono sulle fibre inferiori.

Fibre superiori: $\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M(D/2)}{I} = \frac{-2162.3}{2827.43} - \frac{901000 \times 30}{636172.5} = -0.76 - 42.5 = -43{,}3\ [MPa]$ (Compressione)

Fibre inferiori: $\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M(D/2)}{I} = \frac{-2162.3}{2827.43} + \frac{901000 \times 30}{636172.5} = -0.76 + 42.5 = +41.7\ [MPa]$ (Trazione)

Per quanto riguarda gli sforzi di taglio, la formula di Jouraski fornisce:

$$\tau(y) = \frac{TS(y)}{b(y)I}$$

Quando $y = 0$, cioè lungo l'asse baricentrico passante per il centro della sezione circolare, il momento statico vale: $S(y) = \frac{D^3}{12}$, mentre la corda $b(y)$ è pari al diametro della sezione. Di conseguenza:

$$\tau(y) = \frac{TS(y)}{b(y)I} = \frac{T\dfrac{D^3}{12}}{D\dfrac{\pi D^4}{64}} = \frac{16}{3\pi}\frac{T}{D^2} = \frac{16}{3\pi}\frac{414.1}{60^2} = 0.2\ [MPa]$$

DISEGNO DEI DIAGRAMMI DELLE AZIONI INTERNE

Per il disegno dei diagrammi delle azioni interne non ho a disposizione un software che mi consenta di realizzarli in modo agevole. Avrei potuto digitalizzare i disegni fatti a mano libera, ma lo spazio di memoria necessario per contenere i file digitalizzati su computer è molto grande ed ho quindi preferito utilizzare un programma di calcolo strutturale (ANSYS) che però rappresenta i diagrammi dei momenti flettenti seguendo una convenzione dei segni diversa da quella abituale che consiste nel disegnarli dalla parte delle fibre tese. Per questo motivo, quando sarà necessario, indicherò se i diagrammi sono stati disegnati come ci si attenderebbe secondo le convenzioni abituali.

Fatta questa premessa, ecco i diagrammi delle azioni interne della struttura proposta nel compito.

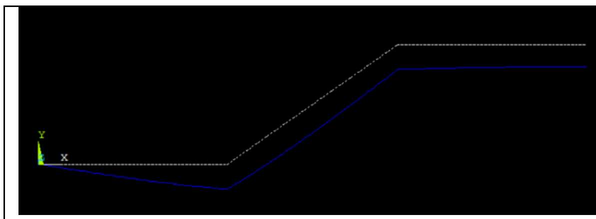



Fig. 1 – Deformata: il pattino ha subito uno spostamento verticale pari a -4.59 [mm]; il punto B ha subito uno spostamento verticale pari a -5.20 [mm]; il punto C ha subito uno spostamento verticale pari a -5.22 [mm];
il punto che ha subito lo spostamento verticale massimo (-5.71 [mm]) si trova nel tratto BC a circa 460 [mm] dal nodo B.

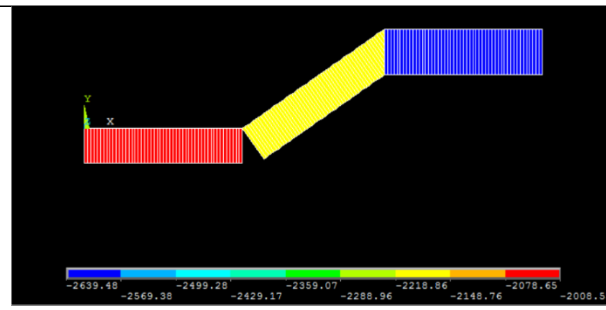



Fig.2 – Azione Normale

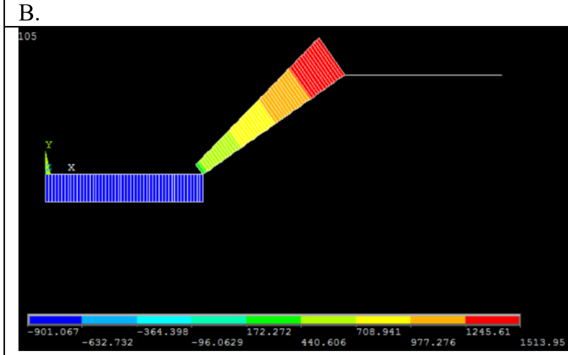



Fig.3 – Azione di Taglio

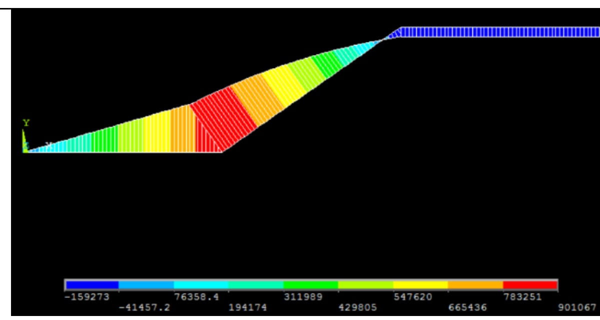



Fig.4 – Momento flettente

Come si può osservare nella Fig.4, ANSYS ha disegnato i diagrammi dalla parte delle fibre compresse. A parte questo particolare grafico, i valori calcolati sono molto prossimi a quelli trovati precedentemente.