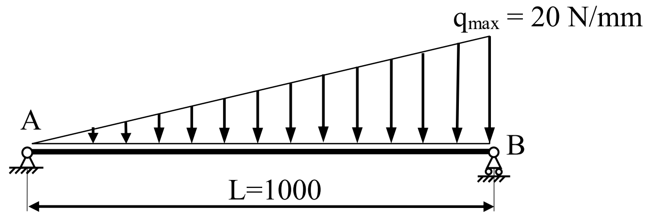
Fondamenti di Costruzioni Meccaniche

Esame scritto 14 febbraio 2017

3) Per l'asta in acciaio (E = 200 GPa) indicata in figura, con sezione circolare di diametro pari a 60 mm, determinare:
   a) l'equazione della linea elastica.
   b) Lo sforzo di trazione σ massimo
   c) Lo sforzo di taglio τ massimo
   d) La freccia massima

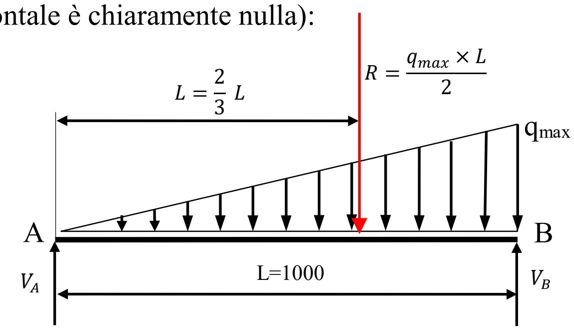


Il carico distribuito non è costante, ma il valore che assume alla coordinata x (misurata dal nodo A) si ottiene con una semplice proporzione:

$$q_{max}: L = q(x) = x \qquad \text{da cui} \quad q(x) = \frac{x}{L} q_{max}$$

Calcoliamo le reazioni vincolari verticali (quella orizzontale è chiaramente nulla):

1) $\sum M_A = V_B \times L - R \times \frac{2}{3} L = 0$
2) $\sum F_y = V_A + V_B - R = 0$



dove: $R = \frac{q_{max} \times L}{2} = \frac{20 \times 1000}{2} = 10000\ [N]$

è la risultante del carico distribuito.

Dalla prima equazione abbiamo:

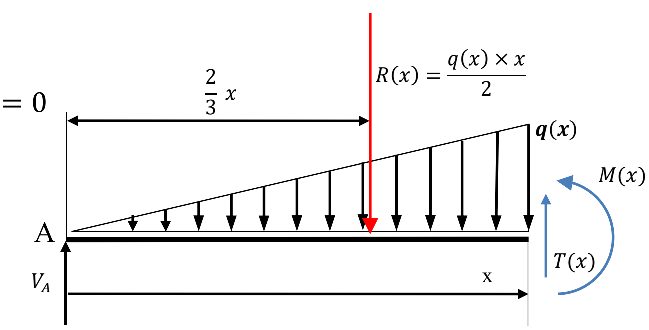
$$V_B = \frac{2}{3} R = \frac{2}{3} \times \frac{q_{max} \times L}{2} = \frac{q_{max} \times L}{3} = \frac{20 \times 1000}{3} = 6666.67\ [N]$$

Dalla seconda:

$$V_A = R - V_B = 10000 - 6666.67 = 3333.\bar{3}\ [N]$$

Calcoliamo l'equazione dei momenti flettenti:

$$\sum M_x = M(x) - V_A \times x + R(x) \times \frac{1}{3} x = 0$$



dove: $R(x) = \frac{q(x) \times x}{2} = \frac{q_{max} \times x^2}{2L}$

da cui:

$$M(x) = V_A \times x - R(x) \times \frac{x}{3} = 3333.\bar{3} \times x - \frac{q_{max} \times x^2}{2L} \times \frac{x}{3} = 3333.\bar{3} \times x - \frac{q_{max} \times x^3}{6L}$$

L'equazione della linea elastica è quindi la seguente:

$$EI \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = -M(x) = \frac{q_{max} \times x^3}{6 \times L} - 3333.\bar{3} \times x$$

Integrando la prima volta abbiamo:

$$EI \frac{dv(x)}{dx} = EI\vartheta(x) = \frac{q_{max} \times x^4}{24 \times L} - 3333.\bar{3} \times \frac{x^2}{2} + C_1$$

Integrando la seconda volta abbiamo:

$$EIv(x) = \frac{q_{max} \times x^5}{120 \times L} - 3333.\overline{3} \times \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$$

CONDIZIONI AL CONTORNO

Per x = 0 $\quad v(x=0) = 0$ da cui $C_2 = 0$

Per x = L $\quad v(x=L) = 0$ da cui $\frac{q_{max} \times L^5}{120L} - 3333.\overline{3} \times \frac{L^3}{6} + C_1 L = 0$

da cui $C_1 = 3333.\overline{3} \times \frac{L^2}{6} - \frac{q_{max} \times L^3}{120} = 3333.\overline{3} \times \frac{10^6}{6} - \frac{20 \times 10^9}{120} = 3.\overline{8} \times 10^8$

L'equazione della linea elastica risulta quindi:

$$v(x) = \frac{1}{EI}\left[\frac{q_{max} \times x^5}{120 \times L} - 3333.\overline{3} \times \frac{x^3}{6} + 3.\overline{8} \times 10^8 \times x\right]$$

Il momento d'inerzia della sezione circolare di raggio R = 30 mm vale:

$I = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi 30^4}{4} = 636172.5\ mm^4$ da cui otteniamo:

$$v(x) = \frac{1}{127234502470}\left[\frac{x^5}{6000} - 555.\overline{5} \times x^3 + 3.\overline{8} \times 10^8 \times x\right]$$

<u>b) Lo sforzo di trazione σ massimo si ha nel punto i cui il momento raggiunge il valore massimo.</u>

$$M(x) = 3333.\overline{3} \times x - \frac{q_{max} \times x^3}{6L}$$

Il punto di stazionarietà si trova dove la derivata si annulla: $\frac{dM(x)}{dx} = 3333.\overline{3} - \frac{q_{max} \times x^2}{2L} = 0$

Ciò capita in due punti:

$$x = \pm\sqrt{\frac{3333.\overline{3} \times 2L}{q_{max}}} = \pm\sqrt{\frac{3333.\overline{3} \times 2L}{q_{max}}} = \pm 577.35\ [mm]$$

Un valore negativo non ha alcuna importanza perché si trova fuori dalla trave; il momento massimo vale quindi:

$$M(577.35) = 3333.\overline{3} \times 577.35 - \frac{q_{max} \times 577.35^3}{6L} = 1283000.6\ [Nmm]$$

Lo sforzo massimo vale dunque:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max} R}{I} = 60.5\ [MPa]$$

c) Lo sforzo di taglio τ massimo si ha nella sezione dove il taglio raggiunge il massimo assoluto. L'equazione del taglio è la seguente:

$$T(x) = \frac{dM(x)}{dx} = 3333.\overline{3} - \frac{q_{max} \times x^2}{2L}$$

Si tratta dell'equazione di una parabola a concavità negativa con il punto di massimo in $x = 0$. Per cui il taglio massimo vale: $T(x) = 3333.\overline{3}\ [N]$.

Invece nel punto $x = 1000$ si ottiene il valore del taglio minimo: $T(x) - 6666.\overline{6}\ [N]$ che corrisponde al massimo in valore assoluto. Lo sforzo di taglio massimo τ si ha nella sezione trasversale B, in prossimità del carrello, sui punti giacenti sull'asse neutro della sezione e vale:

$$\tau_{max} = \frac{T_{max} S_{xx}}{b I_{xx}}$$

Il momento statico S vale:

$$S_{xx} = \frac{D^3}{12} = \frac{60^3}{12} = 18000\ [mm^3]$$

da cui risulta

$$\tau_{max} = \frac{T_{max} S}{bI} = \frac{6666.\overline{6} \times 18000}{60 \times 636172.5} = 3.14\ [MPa]$$

d) La freccia massima è più difficile da trovare perché si tratta di trovare gli zeri di un polinomio di quarto grado. Si manifesta dove la rotazione $\vartheta(x)$ si annulla:

$$\vartheta(x) = \frac{1}{EI}\left[\frac{q_{max} \times x^4}{24L} - 3333.\overline{3} \times \frac{x^2}{2} + 3.\overline{8} \times 10^8\right] = 0$$

Da cui:

$$\frac{q_{max} \times x^4}{24L} - 3333.\overline{3} \times \frac{x^2}{2} + 3.\overline{8} \times 10^8 = 0$$

Per trovare gli zeri del polinomio bisognerebbe disporre di un software adatto: in mancanza di tale strumento, ai fini dell'esame, ci si può fermare a questo punto, dopo avere spiegato la procedura necessaria. Disponendo di un computer e, per esempio, del software MATLAB, si ottengono le seguenti soluzioni:

$$x_1 = -1315.4\ [mm] \quad ; \quad x_2 = -519.3\ [mm] \quad ; \quad x_3 = 519.3\ [mm] \quad ; \quad x_4 = 1315.4\ [mm]$$

Evidentemente le soluzioni negative e la quarta non hanno alcun interesse perché si trovano fuori dalla trave. L'unica soluzione è quindi la terza:

$$x_3 = 519.33\ [mm]$$

Lo spostamento massimo vale quindi:

$$v(x_3) = \frac{1}{127234502470}\left[\frac{x_3^5}{6000} - 555.\overline{5} \times x_3^3 + 3.\overline{8} \times 10^8 \times x_3\right]$$

Sostituendo il valori numerici si ottiene: $v(x_3) = 1.025$ [mm].

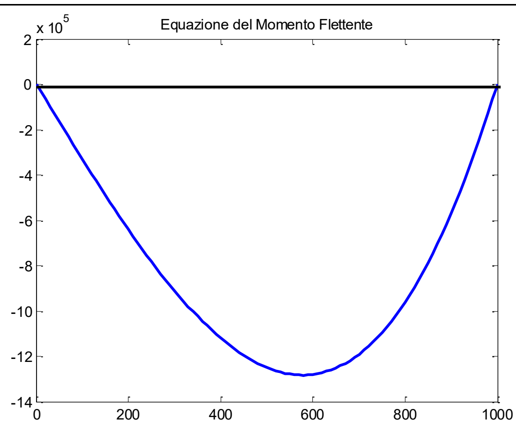


Fig.1 – Equazione del momento flettente

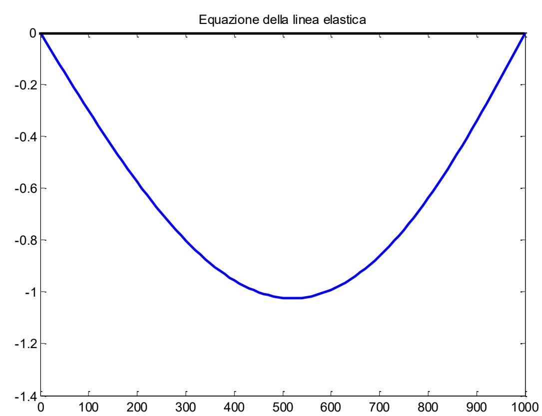


Fig.2 – Equazione della linea elastica