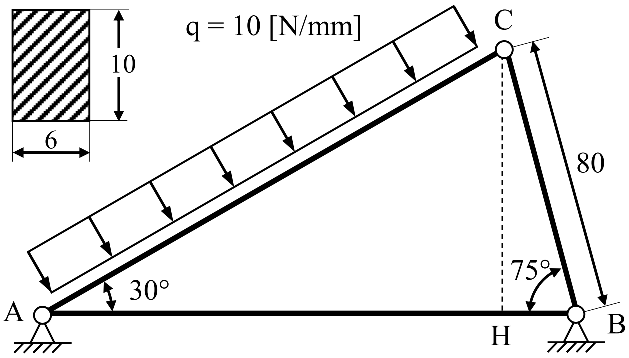
Fondamenti di Costruzioni Meccaniche

Esame scritto 14 febbraio 2017

1) Per la struttura piana indicata in figura, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciarne il diagramma. Determinare la sezione più sollecitata.
Il materiale è acciaio (E = 200 GPa).



Alcuni calcoli preliminari:

$$L_{CH} = 80 \times sin(75) = 77.274\ [mm]$$

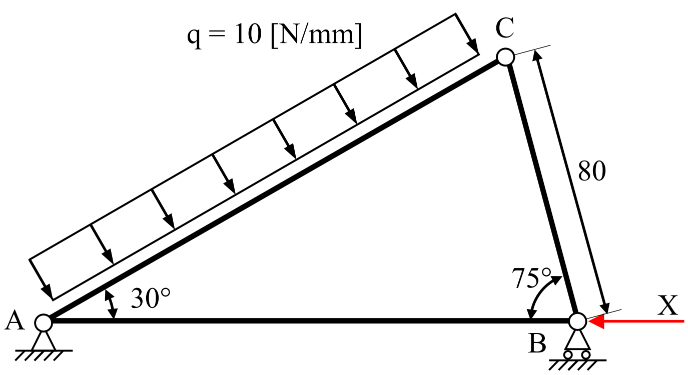
$$L_{AC} \times sin(30) = L_{CH} = 80 \times sin(75) \text{ da cui: } L_{AC} = 80 \times \frac{sin(75)}{sin(30)} = 154.548\ [mm]$$

L'angolo nel vertice C vale: 180 - 30 – 75 = 75 quindi il triangolo è isoscele ed il lato AB è lungo quanto il lato AC.

La struttura è una volta iperstatica: per renderla isostatica è possibile sostituire una delle due cerniere a terra con un carrello ed aggiungere la reazione iperstatica eliminata, che chiameremo X.

Per risolvere l'esercizio ci sono almeno tre modi. Vediamo di descriverli e di metterne in evidenza i pregi ed i difetti.

1° METODO



La struttura viene caricata sia dai carichi esterni (in questo caso q), sia dall'iperstatica X.

1) Si calcolano le reazioni vincolari
2) Si calcolano le azioni interne:

$$N_{tot}(x) = N_0(x) + X \times N_1(x)$$

$$T_{tot}(x) = T_0(x) + X \times T_1(x)$$

$$M_{tot}(x) = M_0(x) + X \times M_1(x)$$

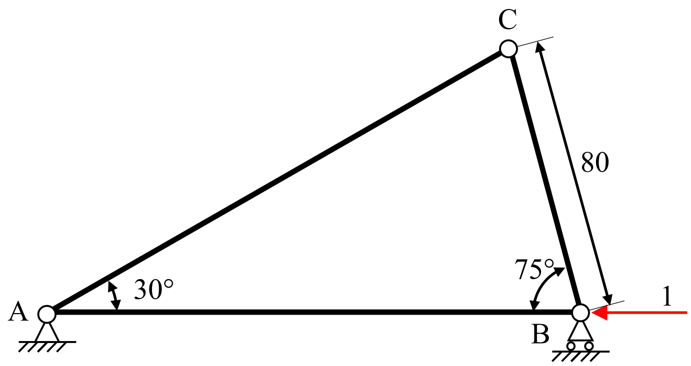
Si separano i contributi dei carichi $N_0(x)$, $T_0(x)$, $M_0(x)$ da quelli dell'iperstatica $N_1(x)$, $T_1(x)$, $M_1(x)$. I secondi sono facilmente riconoscibili perché moltiplicano l'iperstatica X.

Si applica il Principio dei Lavori Virtuali:

$$X = -\frac{\int_{Struttura} \frac{M_0(x) M_1(x)}{EI} dx + \int_{struttura}^{0} \frac{N_0(x) N_1(x)}{EA} dx + \int_{struttura} \frac{\chi T_0(x) T_1(x)}{GA} dx}{\int_{Struttura} \frac{M_1^2(x)}{EI} dx + \int_{struttura}^{0} \frac{N_1^2(x)}{EA} dx + \int_{struttura} \frac{\chi T_1^2(x)}{GA} dx}$$

Il vantaggio di questa procedura è evidente: è necessario calcolare le azioni interne solo una volta. La separazione dei due contributi non richiede molto tempo, ma solo un po' di attenzione.

2° METODO

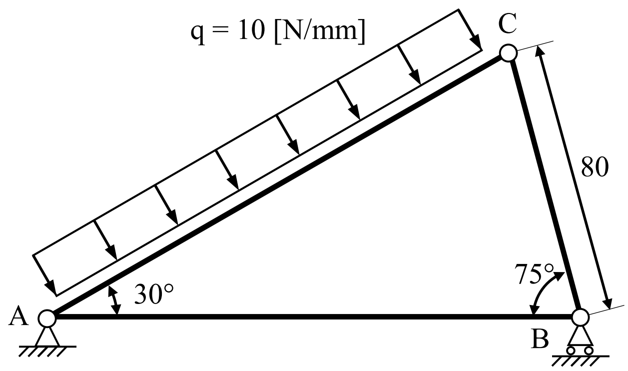


SISTEMA DELLE FORZE

La struttura viene caricata solo dall'iperstatica di valore unitario.

1) Si calcolano le reazioni vincolari
2) Si calcolano le azioni interne:

$$N_1(x),\ T_1(x),\ M_1(x)$$



SISTEMA DEGLI SPOSTAMENTI

La struttura viene caricata solo dai carichi esterni.

3) Si calcolano le reazioni vincolari
4) Si calcolano le azioni interne:

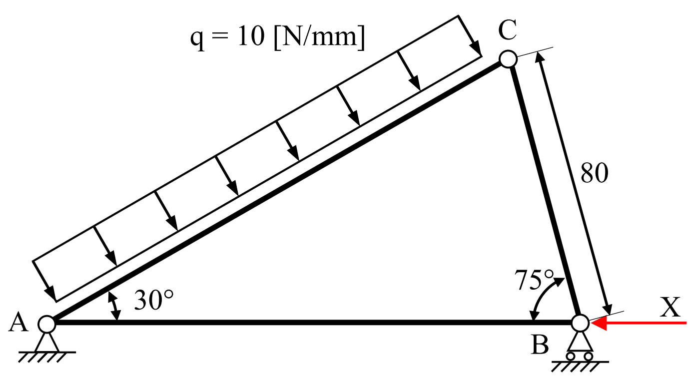
$$N_0(x),\ T_0(x),\ M_0(x)$$

Si applica il Principio dei Lavori Virtuali:

$$X = -\frac{\int_{Struttura} \frac{M_0(x)M_1(x)}{EI}dx + \int_{struttura}^{0} \frac{N_0(x)N_1(x)}{EA}dx + \int_{struttura} \frac{\chi T_0(x)T_1(x)}{GA}dx}{\int_{Struttura} \frac{M_1^2(x)}{EI}dx + \int_{struttura}^{0} \frac{N_1^2(x)}{EA}dx + \int_{struttura} \frac{\chi T_1^2(x)}{GA}dx}$$

Lo svantaggio di questa procedura consiste nel fatto che è necessario calcolare le azioni interne due volte, una prima volta con i carichi esterni e la seconda con la sola iperstatica resa unitaria. Normalmente quest'ultimo calcolo è però molto semplice.

3° METODO



SISTEMA DEGLI SPOSTAMENTI

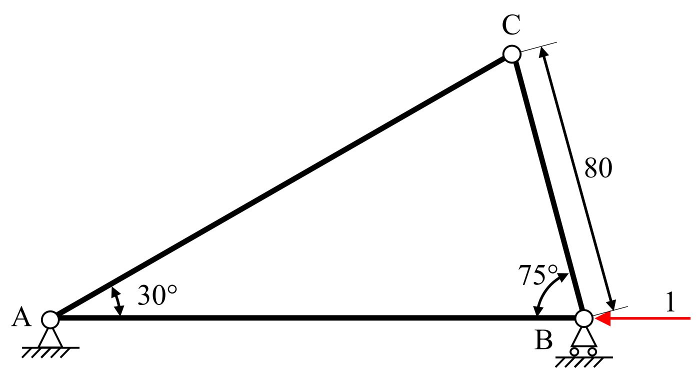
La struttura viene caricata sia dai carichi esterni (in questo caso q), sia dall'iperstatica X.

1) Si calcolano le reazioni vincolari
2) Si calcolano le azioni interne:

$$N_{tot}(x) = N_0(x) + X \times N_1(x)$$

$$T_{tot}(x) = T_0(x) + X \times T_1(x)$$

$$M_{tot}(x) = M_0(x) + X \times M_1(x)$$



SISTEMA DELLE FORZE

La struttura viene caricata solo dall'iperstatica di valore unitario.

1) Si calcolano le reazioni vincolari
2) Si calcolano le azioni interne:

$$N_1(x),\ T_1(x),\ M_1(x)$$

Si applica il Principio dei Lavori Virtuali:

$$\mathcal{L}_{Ext} = 1 \times u_B = \mathcal{L}_{Int} = \delta_A = \int_{Struttura} \frac{M_{tot}(x)M_1(x)}{EI}dx + \int_{struttura}^{0} \frac{N_{tot}(x)N_1(x)}{EA}dx + \int_{struttura} \frac{\chi T_{tot}(x)T_1(x)}{GA}dx$$

dove $\mathcal{L}_{Ext}$ indica il lavoro delle forze estere e $\mathcal{L}_{Int}$ quello delle forze interne. Poiché lo spostamento orizzontale u_B della cerniera a terra B è impedito dal vincolo, allora $\mathcal{L}_{Ext} = 0$. Sostituendo la definizione delle azioni interne totali abbiamo:

$$\int_{Struttura} \frac{[M_0(x) + X \times M_1(x)]M_1(x)}{EI}dx + \int_{struttura}^{0} \frac{[N_0(x) + X \times N_1(x)]N_1(x)}{EA}dx + \int_{struttura} \frac{\chi[T_0(x) + X \times T_1(x)]T_1(x)}{GA}dx = 0$$

Poiché l'iperstatica X è costante, il suo valore può essere portato fuori dagli integrali e si può ottenere la seguente equazione:

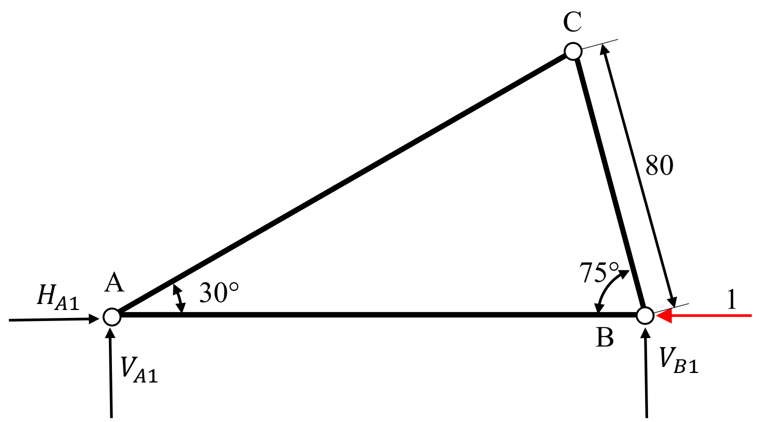
$$X = -\frac{\int_{Struttura} \frac{M_0(x)M_1(x)}{EI}dx + \int_{struttura}^{0} \frac{N_0(x)N_1(x)}{EA}dx + \int_{struttura} \frac{\chi T_0(x)T_1(x)}{GA}dx}{\int_{Struttura} \frac{M_1^2(x)}{EI}dx + \int_{struttura}^{0} \frac{N_1^2(x)}{EA}dx + \int_{struttura} \frac{\chi T_1^2(x)}{GA}dx}$$

Lo svantaggio di questa procedura consiste nel fatto che è necessario calcolare le azioni interne due volte, una volta con tutti i carichi e la seconda con la sola iperstatica resa unitaria. Ciò richiede molto tempo, specialmente quando sono presenti numerose iperstatiche. In ogni caso, per il calcolo degli integrali, è necessario disporre separatamente delle equazioni delle azioni interne $N_0(x)$, $T_0(x)$, $M_0(x)$ e delle equazioni $N_1(x)$, $T_1(x)$, $M_1(x)$. Per questo motivo non consiglio questa procedura.

Nel seguito adotteremo il secondo metodo.

SISTEMA DELLE FORZE.

Sostituiamo i vincoli con le rispettive reazioni: nella cerniera a terra, nel punto A, inseriamo la reazione orizzontale H_{A1} e verticale V_{A1} esercitate dal terreno sulla struttura; nel carrello, nel punto B, inseriamo la reazione verticale V_{B1} esercitata dal terreno sulla struttura. Le incognite sono solo tre e possono essere facilmente calcolate utilizzando le equazioni cardinali della statica su tutta la struttura:



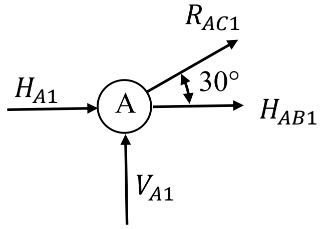
1) $\sum F_x = H_{A1} - 1 = 0$ da cui $H_{A1} = 1$

2) $\sum M_A = V_{B1} \times L_{AB} = 0$ da cui $V_{B1} = 0$

3) $\sum F_y = V_{A1} + V_{B1} = 0$ da cui $V_{A1} = 0$

Le tre aste sono rettilinee, caricate solo sui nodi ed ognuna congiunge due cerniere: si tratta quindi di tre bielle scariche le cui azioni interne si riducono alla sola azione normale N.
Isoliamo le tre cerniere e calcoliamo le condizioni del loro equilibrio.

1) Nodo A



Azioni sul nodo A.

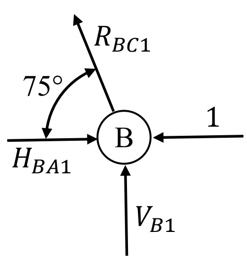
Equazioni di equilibrio del nodo A:

1) $\sum F_x = H_{A1} + H_{AB1} + R_{AC1} \times cos(30) = 0$
2) $\sum F_y = V_{A1} + R_{AC1} \times sin(30) = 0$

Ricordando che $V_{A1} = 0$ risulta che $R_{AC1} = 0$.
Inoltre: $H_{AB1} = -H_{A1} = -1$ $[N]$.

Di conseguenza l'asta AC è completamente scarica e l'asta AB risulta compressa da una forza unitaria. Infatti la forza H_{AB1} risulta diretta verso il nodo, quindi la reazione sull'asta risulta verso destra.

2) Nodo B



Azioni sul nodo B.

Equazioni di equilibrio del nodo B:

1) $\sum F_x = H_{BA1} - 1 - R_{BC1} \times cos(75) = 0$
2) $\sum F_y = V_{B1} + R_{BC1} \times sin(75) = 0$

Ricordando che $V_{B1} = 0$ risulta che $R_{BC1} = 0$.
Inoltre: $H_{BA1} = 1$ $[N]$.

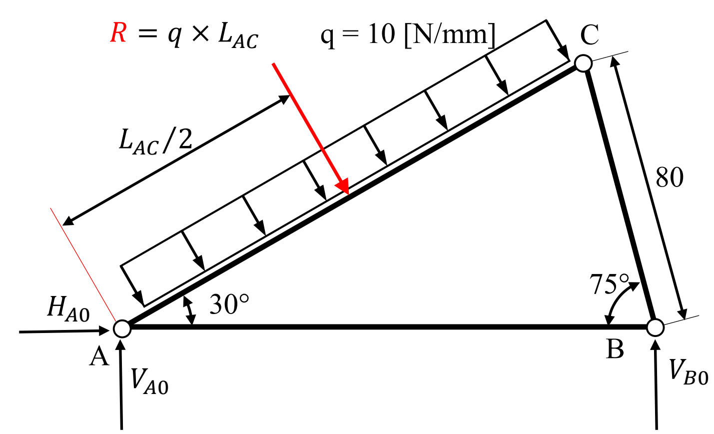
Di conseguenza l'asta BC è completamente scarica e l'asta AB risulta compressa da una forza unitaria.

E' inutile esaminare le equazioni dell'equilibrio del nodo C, visto che su di esso non agisce alcuna forza, né esterna né interna.

In sintesi le azioni interne sulla struttura fittizia sono le seguenti:

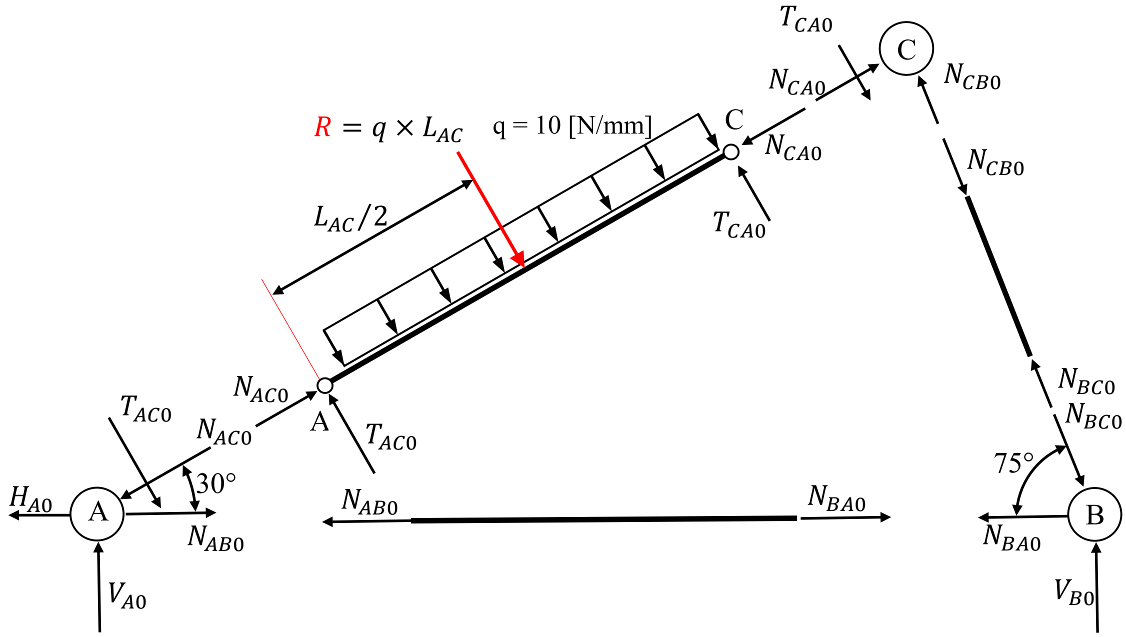
1) Asta AB: $N_{AB1}(x) = -1$ $[N]$; $T_{AB1}(x) = M_{AB1}(x) = 0$
2) Asta AC: $N_{AC1}(x) = T_{AC1}(x) = M_{AC1}(x) = 0$
3) Asta BC: $N_{BC1}(x) = T_{BC1}(x) = M_{BC1}(x) = 0$

SISTEMA DEGLI SPOSTAMENTI: iniziamo calcolando le reazioni a terra.

Sostituiamo i vincoli con le rispettive reazioni: nella cerniera a terra, nel punto A, inseriamo la reazione orizzontale H_{A0} e verticale V_{A0} esercitate dal terreno sulla struttura; nel carrello, nel punto B, inseriamo la reazione verticale V_{B0} esercitata dal terreno sulla struttura. Le incognite sono solo tre e possono essere facilmente calcolate utilizzando le equazioni cardinali della statica su tutta la struttura:	

1) $\sum M_A = V_{B0} \times L_{AB} - R \times \frac{L_{AC}}{2} = 0$ Ricordando che $L_{AB} = L_{AC}$ risulta: $V_{B0} = \frac{R}{2} = \frac{q \times L_{AC}}{2} = 772.741$
2) $\sum F_x = H_{A0} + R \times sin(30) = 0$ da cui $H_{A0} = -R \times sin(30) = -\frac{q \times L_{AC}}{2} = -772.741$
3) $\sum F_y = V_{A0} + V_{B0} - R \times cos(30) = 0$ da cui $V_{A0} = R \times cos(30) - V_{B0} = 565.685$

A questo punto cambiamo il verso della reazione H_{A0} ed apriamo la struttura sostituendo le reazioni vincolari.

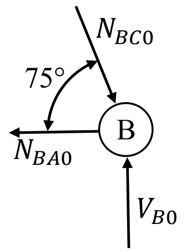


Le aste AB e BC sono rettilinee, caricate solo sui nodi ed ognuna congiunge due cerniere: si tratta quindi di due bielle scariche le cui azioni interne si riducono alla sola azione normale N. Per il loro equilibrio abbiamo:

1) Asta AB: $N_{AB0} = N_{BA0}$
2) Asta BC: $N_{BC0} = N_{CB0}$

Iniziamo col calcolare le condizioni di equilibrio del nodo B dove sono presenti solo due incognite, cioè le azioni normali trasmesse sul nodo dalle aste AB e BC.

1) Nodo B



Azioni sul nodo B.

Equazioni di equilibrio del nodo B:

1) $\sum F_x = N_{BA0} - N_{BC0} \times cos(75) = 0$
2) $\sum F_y = V_{B0} - N_{BC0} \times sin(75) = 0$

Dalla seconda equazione abbiamo:

$$N_{BC0} = \frac{V_{B0}}{sin(75)} = \frac{772.741}{sin(75)} = 800\ [N]$$

Dalla prima equazione abbiamo:

$$N_{BA0} = N_{BC0} \times cos(75) = 207.055\ [N]$$

Calcoliamo le condizioni di equilibrio alla rotazione intorno al nodo C dell'asta AC:

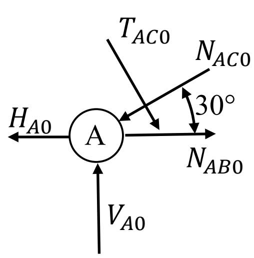
3) $\sum M_C(asta\ AC) = T_{AC0} \times L_{AC} - R \times \frac{L_{AC}}{2} = 0$ da cui risulta: $T_{AC0} = \frac{R}{2} = \frac{q \times L_{AC}}{2} = 772.741$

Per l'equilibrio delle forze normali all'asta AC possiamo scrivere:

4) $\sum F_{\perp}(asta\ AC) = T_{AC0} + T_{CA0} - R = 0$ da cui risulta: $T_{CA0} = R - T_{CA0} = R - \frac{R}{2} = 772.741$

A questo punto possiamo calcolare le condizioni di equilibrio del nodo A.

2) Nodo A



L'unica incognita è la reazione N_{AC0}. Proiettiamo le restanti forze nella sua direzione:

$$N_{AC0} + (H_{A0} - N_{AB0}) \times cos(30) - V_{A0} \times sin(30) = 0$$

da cui:

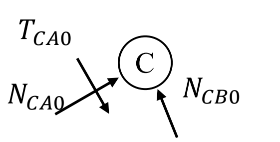
$$N_{AC0} = V_{A0} \times sin(30) - (H_{A0} - N_{AB0}) \times cos(30)$$

$$N_{AC0} = 565.685 \times sin(30) - (772.741 - 207.055) \times cos(30)$$

$$N_{AC0} = 565.685 \times [sin(30) - cos(30)] = -207.055\ [\mathrm{N}]$$

E' necessario cambiare il verso all'azione N_{AC0} e quindi l'asta AC risulterà sottoposta a trazione. Arrivati a questo punto le azioni sul nodo C sono tutte note. Possiamo verificare che i risultati siano corretti imponendo le sue condizioni di equilibrio.

3) Nodo C



Attenzione: T_{CA0} e N_{CB0} non sono parallele.

$$\sum F_x = N_{CA0} \times cos(30) + T_{CA0} \times sin(30) - N_{CB0} \times cos(75) = 0$$

$$\sum F_y = N_{CA0} \times sin(30) - T_{CA0} \times cos(30) + N_{CB0} \times sin(75) = 0$$

Sostituendo i valori già calcolati abbiamo:

$$-207.055 \times cos(30) + 772.741 \times sin(30) - 800 \times cos(75) = 0$$

$$-207.055 \times sin(30) - 772.741 \times cos(30) + 800 \times sin(75) = 0$$

Eseguendo i calcoli, a meno degli inevitabili errori di arrotondamento, si può constatare che il nodo risulta in equilibrio.

In sintesi:

1) Asta AB: $N_0(x) = 207.055\ [N]$; $T_0(x) = M_0(x) = 0$; $N_1(x) = -1\ [N]$; $T_1(x) = M_1(x) = 0$
2) Asta BC: $N_0(x) = -800\ [N]$; $T_0(x) = M_0(x) = 0$; $N_1(x) = T_1(x) = M_1(x) = 0$
3) Asta AC: $N_0(x) = 207.055\ [\mathrm{N}]$; ; $N_1(x) = T_1(x) = M_1(x) = 0$
$T_0(x) = T_{AC0} - qx = 772.741 - 10x$;
$M_0(x) = T_{AC0}x - \frac{qx^2}{2} = 772.741x - 5x^2$ dove l'asse x ha origine nel nodo A

Applichiamo il Principio dei Lavori Virtuali per il calcolo dell'iperstatica:

$$X = -\frac{\int_A^B \frac{N_0(x)N_1(x)}{EA}dx}{\int_A^B \frac{N_1^2(x)}{EA}dx} = -\frac{\int_A^B N_0(x)N_1(x)dx}{\int_A^B N_1^2(x)dx} = \frac{207.055 \times L_{AB}}{L_{AB}} = 207.055\ [N]$$

Le azioni interne risultano quindi le seguenti:

1) Asta AB:

$$N_{tot}(x) = N_0(x) + X \times N_1(x) = 207.055\ + 207.055\ \times (-1) = 0$$
$$T_{tot}(x) = T_0(x) + X \times T_1(x) = 0$$
$$M_{tot}(x) = M_0(x) + X \times M_1(x) = 0$$

2) Asta BC:

poiché $N_1(x) = T_1(x) = M_1(x) = 0$ le azioni interne coincidono con le $N_0(x) = T_0(x) = M_0(x) = 0$

$$N_{tot}(x) = N_0(x) + X \times N_1(x) = N_0(x) = -800\ [N]$$
$$T_{tot}(x) = T_0(x) + X \times T_1(x) = T_0(x) = 0$$
$$M_{tot}(x) = M_0(x) + X \times M_1(x) = M_0(x) = 0$$

3) Asta AC:

poiché $N_1(x) = T_1(x) = M_1(x) = 0$ le azioni interne coincidono con le $N_0(x) = T_0(x) = M_0(x) = 0$

$$N_{tot}(x) = N_0(x) + X \times N_1(x) = N_0(x) = 207.055\ [N]$$
$$T_{tot}(x) = T_0(x) + X \times T_1(x) = T_0(x) = 772.741 - 10x$$
$$M_{tot}(x) = M_0(x) + X \times M_1(x) = M_0(x) = 772.741x - 5x^2$$

L'asta AB unisce due cerniere a terra che quindi impediscono la deformazione assiale della trave; inoltre l'asta non è direttamente caricata da forze esterne, di conseguenza è completamente scarica e non contribuisce a sostenere il carico esterno e potrebbe essere eliminata senza pregiudicare l'equilibrio della struttura. In sostanza la struttura è un arco a tre cerniere, isostatica, in cui due travi sono vincolate a terra con due cerniere (in A e B) e sono collegate per mezzo di una terza cerniere (in C).

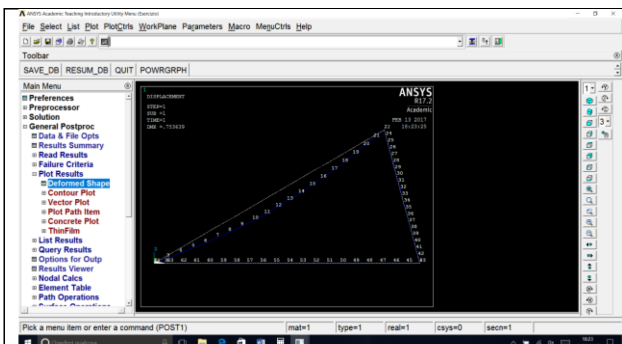


Fig. 1 – Deformata

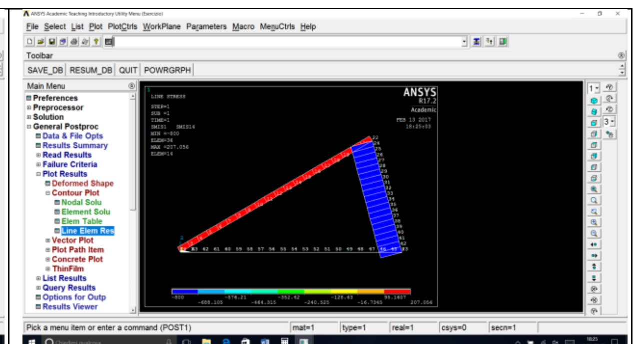


Fig.2 – Azione Normale

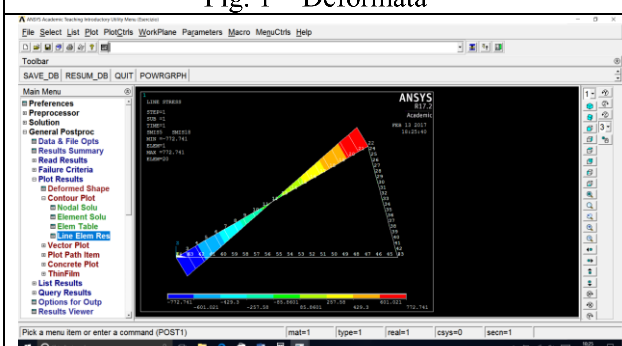


Fig.3 – Azione di Taglio

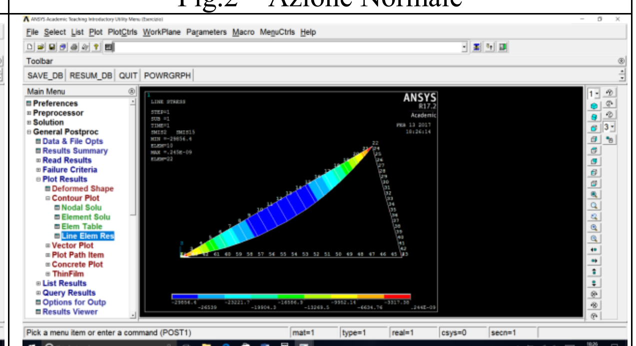


Fig.4 – Momento flettente