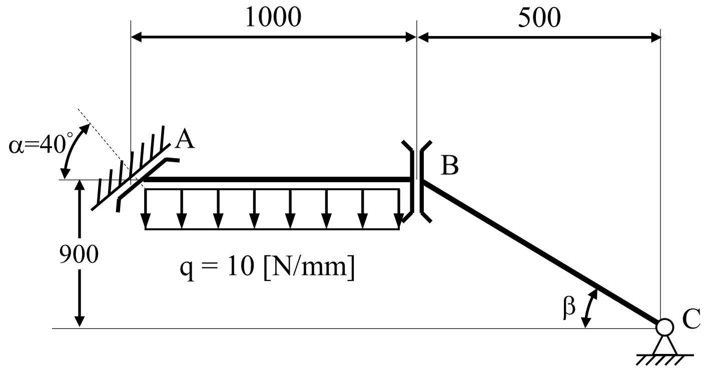
Fondamenti di Costruzioni Meccaniche
Esame scritto 14 febbraio 2017

1) Data la struttura di figura, si chiede:
   a) il disegno dei diagrammi delle azioni interne (M, N e T);
   b) il calcolo dello spostamento parallelo al terreno del pattino A;
   c) il calcolo del massimo sforzo σ nella struttura.

Il materiale è acciaio (E = 200 GPa). Tutte le aste hanno la stessa sezione trasversale circolare di raggio R = 30 mm.



Alcuni calcoli preliminari:

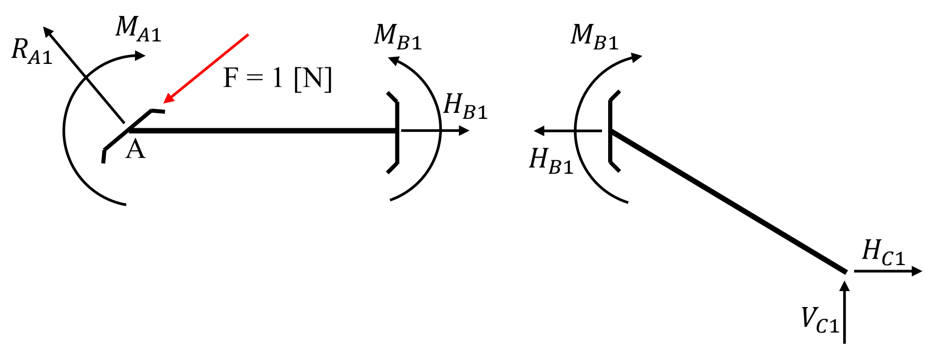
$$L_{BC} = \sqrt{900^2 + 500^2} = 1029.563\ [mm]\ \ ;\ A = \pi R^2 = 2828.4\ [mm^2]\ \ ;\ I = \frac{\pi R^4}{4} = 636172.5\ [mm^4]$$

$$500 \times tang(\beta) = 900 \qquad\qquad \beta = arctan\left(\frac{900}{500}\right) = 60.945°$$

$\chi = \frac{10}{9}$ Fattore di taglio della sezione circolare piena

$\nu = 0.3$ Coefficiente di Poisson dell'acciaio; $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 76923\ [MPa]$

SISTEMA DELLE FORZE.



Sostituiamo i vincoli con le rispettive reazioni: nel pattino del punto A inseriamo la reazione perpendicolare al terreno R_{A1} ed il momento M_{A1} che impedisce al pattino di ruotare; nella cerniera a terra, nel punto C, inseriamo le reazioni del terreno V_{C1} e H_{C1}; nel vincolo interno, nel punto B, rappresentato da due pattini che possono scorrere uno sull'altro, inseriamo la forza orizzontale H_{B1} che i due pattini si scambiano e la coppia M_{B1} che obbliga i due pattini a ruotare insieme, cioè a subire la stessa rotazione.

Le incognite sono sei: $R_{A1}, M_{A1}, H_{B1}, M_{B1}, V_{C1}, H_{C1}$. Il pedice "1" indica che si tratta delle reazioni che agiscono sulla struttura fittizia nel sistema delle forze.

1) Equilibrio dell'asta AB:

$$\sum F_x(asta\ AB) = H_{B1} - R_{A1} \times cos(\alpha) - 1 \times sin(\alpha) = 0$$
$$\sum F_y(asta\ AB) = R_{A1} \times sin(\alpha) - 1 \times cos(\alpha) = 0$$

Dalla seconda equazione abbiamo: $R_{A1} = \frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)} = \frac{1}{tang(40)} = 1.19175\ [N]$

Dalla prima equazione abbiamo:

$$H_{B1} = R_{A1} \times cos(\alpha) + 1 \times sin(\alpha) = \frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)} \times cos(\alpha) + sin(\alpha) = \frac{1}{sin(\alpha)} = 1.5557\ [N]$$

2) Equilibrio dell'asta BC:

$\sum F_x(asta\ BC) = H_{C1} - H_{B1} = 0$ da cui: $H_{C1} = H_{B1} = 1.5557\ [N]$

$\sum F_y(asta\ BC) = V_{C1} = 0$

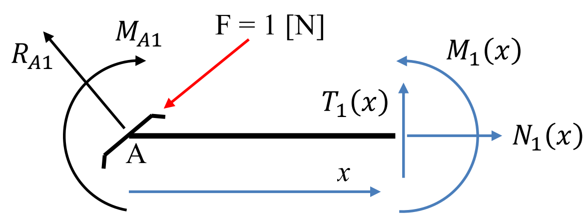
$\sum M_C(asta\ BC) = M_{B1} - H_{B1} \times 900 = 0$ da cui: $M_{B1} = H_{B1} \times 900 = 1400.151\ [Nmm]$

3) Equilibrio dell'asta AB:

$\sum M_A(asta\ AB) = M_{A1} - M_{B1} = 0$ da cui: $M_{A1} = 1400.151\ [Nmm]$

EQUAZIONI DELLE AZIONI INTERNE NELLA STRUTTURA FITTIZIA

1) Asta AB:



$$\sum F_x(asta\ AB) = N_1(x) - R_{A1} \times cos(\alpha) - 1 \times sin(\alpha) = 0$$

$$\sum F_y(asta\ AB) = T_1(x) + R_{A1} \times sin(\alpha) - 1 \times cos(\alpha) = 0$$

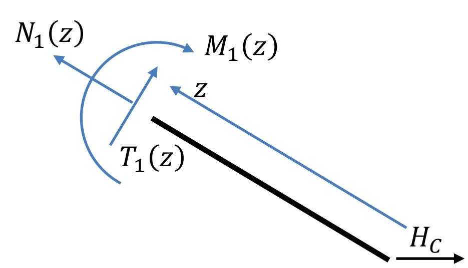
$$\sum M_A(asta\ AB) = M_1(x) + T_1(x) \times x - M_{A1} = 0$$

Dalla prima: $N_1(x) = R_{A1} \times cos(\alpha) + sin(\alpha) = H_{B1} = 1.5557\ [N]$

Dalla seconda: $T_1(x) = -R_{A1} \times sin(\alpha) + cos(\alpha) = -\frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)} \times sin(\alpha) + cos(\alpha) = 0$

Dalla terza: $M_1(x) = M_{A1} - T_1(x) \times x = 1400.151\ [Nmm]$

2) Asta BC:



$\sum F_{\parallel}(asta\ BC) = N_1(z) - H_{C1} \times cos(\beta) = 0$

$\sum F_{\perp}(asta\ BC) = T_1(z) + H_{C1} \times sin(\beta) = 0$

$\sum M_z(asta\ BC) = M_1(z) - H_{C1} \times sin(\beta) \times z = 0$

Dalla prima: $N_1(z) = H_{C1} \times cos(\beta) = 1.5557 \times cos(60.945°) = 0.75553\ [N]$

Dalla seconda: $T_1(z) = -H_{C1} \times sin(\beta) = -1.5557 \times sin(60.945°) = -1.35995\ [N]$

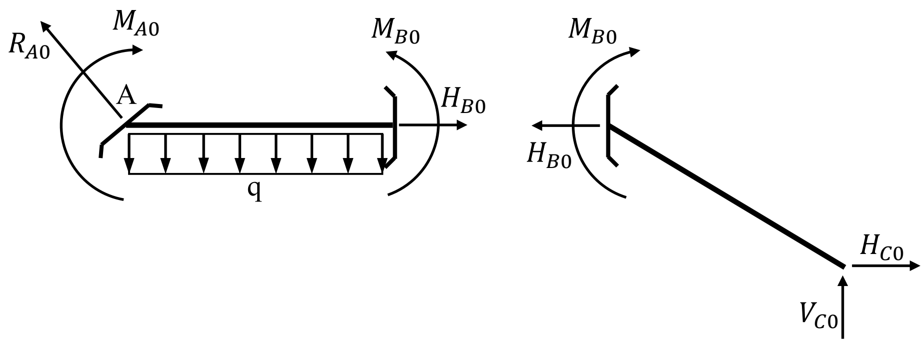
Dalla terza: $M_1(z) = H_{C1} \times sin(\beta) \times z = 1.5557 \times sin(60.945°) \times z = 1.35995 \times z\ [Nmm]$

Quando $z = 1029.563$, cioè nel punto B, il momento vale:

$$M_1(z = 1029.563) = 1.35995 \times z \ = 1.35995 \times 1029.563 = 1400.154\ [Nmm]$$

Il risultato è identico al valore calcolato precedentemente quando abbiamo esaminato l'asta AB.

SISTEMA DEGLI SPOSTAMENTI.



Il pedice "0" indica che si tratta delle reazioni che agiscono sulla struttura reale nel sistema degli spostamenti.

1) Equilibrio dell'asta AB:

$$\sum F_x(asta\ AB) = H_{B0} - R_{A0} \times cos(\alpha) = 0$$

$$\sum F_y(asta\ AB) = R_{A0} \times sin(\alpha) - q \times L_{AB} = 0$$

Dalla seconda equazione abbiamo: $R_{A0} = \frac{q \times L_{AB}}{sin(\alpha)} = \frac{10 \times 1000}{sin(40)} = 15557.24\ [N]$

Dalla prima equazione abbiamo:

$$H_{B0} = R_{A0} \times cos(\alpha) = \frac{q \times L_{AB}}{sin(\alpha)} \times cos(\alpha) = \frac{q \times L_{AB}}{tang(40)} = 11917.54\ [N]$$

2) Equilibrio dell'asta BC:

$\sum F_x(asta\ BC) = H_{C0} - H_{B0} = 0$ da cui: $H_{C0} = H_{B0} = 11917.54\ [N]$

$$\sum F_y(asta\ BC) = V_{C0} = 0$$

$\sum M_C(asta\ BC) = M_{B0} - H_{B0} \times 900 = 0$ da cui: $M_{B0} = H_{B0} \times 900 = 10725782\ [Nmm]$

3) Equilibrio dell'asta AB:

$\sum M_A(asta\ AB) = M_{A0} - M_{B0} + \frac{qL_{AB}^2}{2} = 0$ da cui:

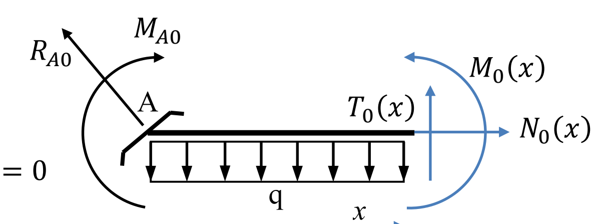
$$M_{A0} = M_{B0} - \frac{qL_{AB}^2}{2} = 10725782 - \frac{10 \times 1000^2}{2} = 5725782\ [Nmm]$$

EQUAZIONI DELLE AZIONI INTERNE NELLA STRUTTURA REALE

1) Asta AB:

$$\sum F_x(asta\ AB) = N_0(x) - R_{A0} \times cos(\alpha) = 0$$

$$\sum F_y(asta\ AB) = T_0(x) + R_{A0} \times sin(\alpha) - q \times x = 0$$



$$\sum M_x(asta\ AB) = M_0(x) + \frac{qx^2}{2} - R_{A0} \times sin(\alpha) \times x - M_{A0} = 0$$

Dalla prima: $N_0(x) = R_{A0} \times cos(\alpha) = H_{B0} = 11917.54\ [N]$

Dalla seconda: $T_0(x) = q \times x - R_{A0} \times sin(\alpha) = 10 \times x - q \times L_{AB} = 10 \times x - 10000$

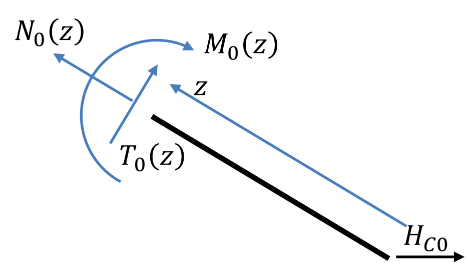
Dalla terza: $M_0(x) = -\frac{qx^2}{2} + R_{A0} \times sin(\alpha) \times x + M_{A0} = -5x^2 + 10000 \times x + 5725782$

L'azione normale $N_0(x)$ è costante: $N_0(x) = 11917.54\ [N]$

L'azione di taglio varia linearmente: $\begin{cases} T_0(x=0) = -10000\ [N] \\ T_0(x=1000) = 0 \end{cases}$

Il momento flettente ha andamento parabolico: $\begin{cases} M_0(x=0) = 5725782\ [Nmm] \\ M_0(x=1000) = 10725782\ [Nmm] \end{cases}$

2) Asta BC:



$\sum F_{\parallel}(asta\ BC) = N_0(z) - H_{C0} \times cos(\beta) = 0$

$\sum F_{\perp}(asta\ BC) = T_0(z) + H_{C0} \times sin(\beta) = 0$

$\sum M_z(asta\ BC) = M_0(z) - H_{C0} \times sin(\beta) \times z = 0$

Dalla prima: $N_0(z) = H_{C0} \times cos(\beta) = 11917.54 \times cos(60.945°) = 5787.667\ [N]$

Dalla seconda: $T_0(z) = -H_{C0} \times sin(\beta) = -11917.547 \times sin(60.945°) = -10417.8\ [N]$

Dalla terza: $M_0(z) = H_{C0} \times sin(\beta) \times z = 11917.54 \times sin(60.945°) \times z = 10417.8 \times z\ [Nmm]$

Quando $z = 1029.563$, cioè nel punto B, il momento vale:

$$M_0(z = 1029.563) = 10417.8 \times z = 10417.8 \times 1029.563 = 10725782\ [Nmm]$$

Il risultato è identico al valore calcolato precedentemente quando abbiamo esaminato l'asta AB.

CALCOLO DELLO SPOSTAMENTO PER MEZZO DEL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

$$\delta_A = \int_A^B \frac{M_0(x)M_1(x)}{EI}dx + \int_A^B \frac{N_0(x)N_1(x)}{EA}dx + \int_A^B \frac{\chi T_0(x)T_1(x)}{GA}dx + \int_C^B \frac{M_0(z)M_1(z)}{EI}dz + \int_C^B \frac{N_0(z)N_1(z)}{EA}dz + \int_C^B \frac{\chi T_0(z)T_1(z)}{GA}dz$$

Nel tratto A-B abbiamo:

$N_1(x) = 1.5557$	$N_0(x) = 11917.54$
$T_1(x) = 0$	$T_0(x) = 10 \times x - 10000$
$M_1(x) = 1400.151$	$M_0(x) = -5x^2 + 10000 \times x + 5725782$

Il calcolo dei singoli integrali fornisce i seguenti risultati:

$$\int_A^B \frac{N_0(x)N_1(x)}{EA}dx = \frac{1.5557 \times 11917.54}{200000 \times 2828.4}1000 = 0.033\ [mm]$$

$$\int_A^B \frac{\chi T_0(x)T_1(x)}{GA}dx = 0$$

$$\int_A^B \frac{M_0(x)M_1(x)}{EI}dx = \int_A^B \frac{[-5x^2 + 10000 \times x + 5725782]1400.151}{EI}dx =$$

$$= \frac{1400.151}{EI}\left[-5\frac{x^3}{3} + 10000\frac{x^2}{2} + 5725782x\right]_0^{1000} = \frac{1400.151}{EI}\left[-\frac{5}{3} \times 10^9 + 5 \times 10^9 + 5.725782 \times 10^9\right] =$$

$$= \frac{1400.151}{200000 \times 636172.5}\left[-\frac{5}{3} \times 10^9 + 10.725782 \times 10^9\right] = 99.691\ [mm]$$

Nel tratto C-B abbiamo:

$N_1(z) = 0.75553$ $\qquad$ $N_0(z) = 5787.667$

$T_1(z) = -1.35995$ $\qquad$ $T_0(z) = -10417.8$

$M_1(z) = 1.35995 \times z$ $\qquad$ $M_0(z) = 10417.8 \times z$

$$\int_C^B \frac{N_0(z)N_1(z)}{EA}dz = \frac{5787.667 \times 0.75553}{200000 \times 2828.4} \times 1029.563 = 0.008\ [mm]$$

$$\int_C^B \frac{\chi T_0(z)T_1(z)}{GA}dz = \frac{\frac{10}{9}(-10417.8)(-1.35995)}{76923 \times 2828.4} \times 1029.563 = 0.074 [mm]$$

$$\int_C^B \frac{M_0(z)M_1(z)}{EI}dz = \int_C^B \frac{(10417.8 \times z)(1.35995 \times z)}{EI}dz = \frac{10417.8 \times 1.35995}{EI}\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{1029.563} = 40.507\ [mm]$$

Sommando il contributo dell'azione normale otteniamo:

$$\delta_A^N = 0.033 + 0.008 = 0.041\ [mm]$$

Sommando il contributo dell'azione di taglio otteniamo:

$$\delta_A^T = 0.074\ [mm]$$

Sommando il contributo del momento flettente otteniamo:

$$\delta_A^M = 99.691 + 40.507 = 140.2\ [mm]$$

Come si può osservare, i contributi del taglio e dell'azione normale sono trascurabili rispetto al valore prodotto dal momento flettente. Appare inoltre come lo spostamento sia molto elevato, rispetto alle dimensioni della struttura.

Lo sforzo massimo si produce dove il momento flettente raggiunge il valore massimo in valore assoluto. In questo caso ciò capita sull'asta A-B, in prossimità del pattino, dove il momento flettente vale $M_0 = 10725782\ [Nmm]$ e l'azione normale vale $N_0 = 11917.54\ [N]$. Abbiamo quindi:

Sforzo max: $\sigma_x = \frac{N_x}{A} + \frac{M_z y}{I_z} = \frac{11917.54}{2828.4} + \frac{10725782 \times 30}{636172.5} = 4.215 + 504.58 = 509\ [MPa]$

Si tratta di un valore elevato, ma accettabile per certi acciai.

DISEGNO DEI DIAGRAMMI DELLE AZIONI INTERNE

Per il disegno dei diagrammi delle azioni interne non ho a disposizione un software che mi consenta di realizzarli in modo agevole. Avrei potuto digitalizzare i disegni fatti a mano libera, ma lo spazio di memoria necessario per contenere i file digitalizzati su computer è molto grande ed ho quindi preferito utilizzare un programma di calcolo strutturale (ANSYS) che però rappresenta i diagrammi dei momenti flettenti seguendo una convenzione dei segni diversa da quella abituale che consiste nel disegnarli dalla parte delle fibre tese. Per questo motivo, quando sarà necessario, indicherò se i diagrammi sono stati disegnati come ci si attenderebbe secondo le convenzioni abituali.

Fatta questa premessa, ecco i diagrammi delle azioni interne della struttura proposta nel compito.

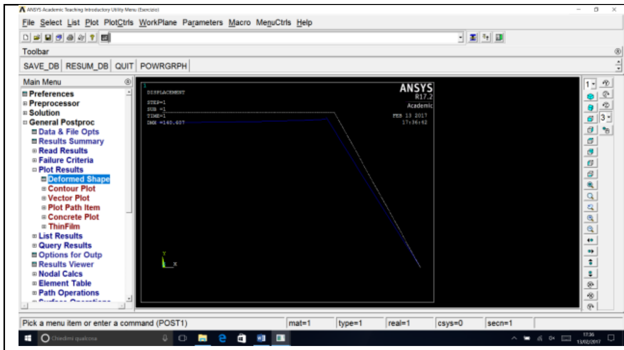


Fig. 1 – Deformata: lo spostamento del pattino A, in direzione parallela al terreno, vale circa 140.6 mm.

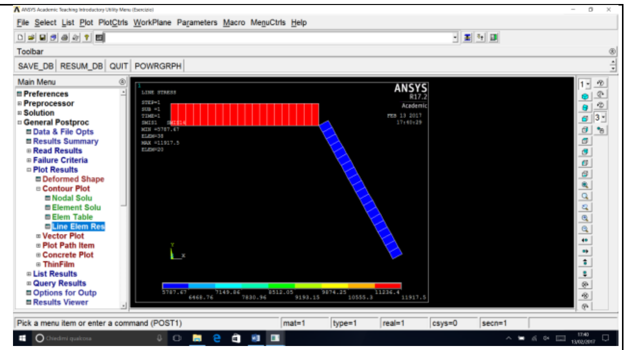


Fig.2 – Azione Normale

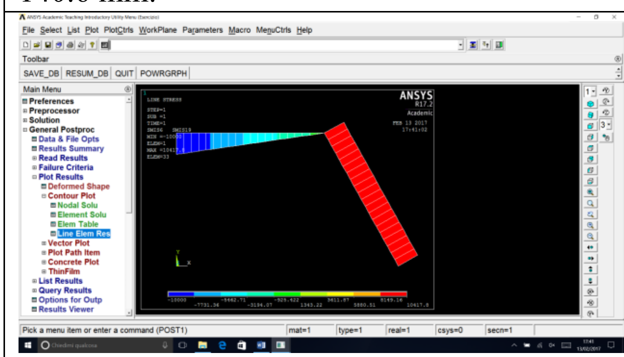


Fig.3 – Azione di Taglio

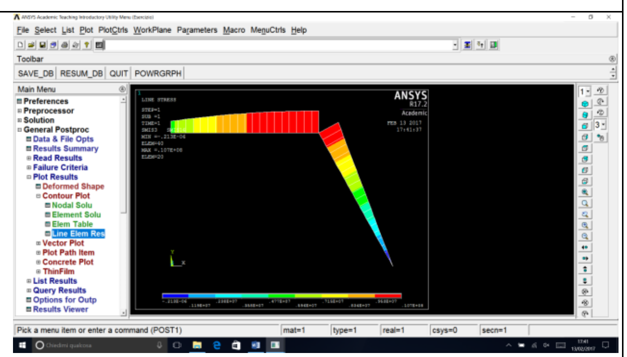


Fig.4 – Momento flettente

Come si può osservare nella Fig.4, ANSYS ha disegnato i diagrammi dalla parte delle fibre compresse. Infatti le equazioni dei momenti sono le seguenti:

Nel tratto A-B: $M_0(x) = -5x^2 + 10000 \times x + 5725782$

Nel tratto C-B: $M_0(z) = 10417.8 \times z$

Quindi: $M_0(x = 0) = 5725782\ [Nmm]$ e i diagrammi dovrebbero essere disegnati in basso, dove le fibre delle travi sono tese. Non si tratta di un errore, ma solo di una diversa convenzione di rappresentazione.