

# Elettrotecnica

per

Ingegneria Civile

A.A. 2018-19

Docente:

*Giuliana Sias*

# riferimenti

Ricevimento: **lunedì 11-13**, presso **diee (pad. G)**  
piano mansarda.

**Indirizzo e-mail:** [giuliana.sias@diee.unica.it](mailto:giuliana.sias@diee.unica.it)

**Telefono:** 070-6755878

**Sito web:** <http://www.diee.unica.it/elettrotecnica/>

# informazioni

**Totale ore:** 50

**Crediti corrispondenti:** 5

**Prerequisiti richiesti:** Conoscenza degli argomenti di base dei corsi di Analisi I e II, Fisica I e II; Geometria.

**Testi consigliati:**

- C. K. Alexander, M. N. O. Sadiku, Circuiti Elettrici, McGraw-Hill
- R. Perfetti, Circuiti Elettrici, Zanichelli

**Modalità svolgimento esame:**

prova scritta e orale alla fine del corso.

# Conoscenze richieste

- ✓ Algebra complessa
- ✓ Trigonometria
- ✓ Calcolo vettoriale
- ✓ Capacità di risolvere di un sistema di equazioni algebriche lineari a coefficienti costanti
- ✓ Concetti di campo scalare, campo vettoriale e campo conservativo
- ✓ Principio di conservazione dell'energia e principio di sovrapposizione degli effetti
- ✓ Concetti di base dell'elettrostatica: campo elettrico, lavoro elettrostatico e principio di funzionamento di un condensatore
- ✓ Concetti di base dell'elettromagnetismo: campo magnetico campo elettromagnetico, principio di funzionamento dell'induttore

# COS'E' L'ELETTROTECNICA?

L'elettromagnetismo studia gli effetti prodotti dalle cariche ferme o in movimento ed è alla base di una grande quantità di fenomeni fisici:

- conversione elettromeccanica dell'energia
- comunicazione in fibra ottica
- dispositivi a micro-onde
- ricezione televisiva
- comunicazione via satellite
- radar

etc...

***L'ELETTROMAGNETISMO TECNICO O APPLICATO  
RIGUARDA L'ANALISI E LA SINTESI (PROGETTO) DI  
SISTEMI O SINGOLI DISPOSITIVI ELETTROMAGNETICI***

# Dai campi elettromagnetici ai circuiti elettrici

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{lib}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{J}} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Ipotesi:  
quasi stazionarietà



$$\frac{\partial \mathbf{B}(t)}{\partial t} \cong 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}(t)}{\partial t} \cong 0$$

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} \cong 0$$

Modellamento  
matematico  
semplificato

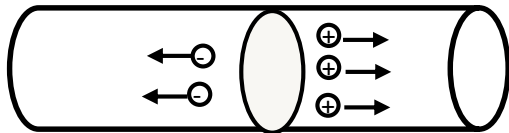
$$\sum v = 0$$
$$\sum I = 0$$

dell'elettrotecnica sussiste la possibilità di **approssimare** *le il modello elettromagnetico attraverso un modello matematico molto semplice* che prende il nome di **TEORIA DEI CIRCUITI**

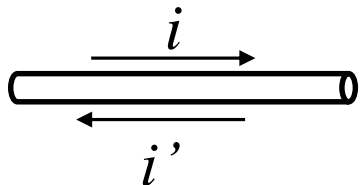
# Grandezze Descrittive dei circuiti

## Intensità di Corrente:

Quantità di carica netta che attraversa la sezione del conduttore nell'unità di tempo



$$I = \frac{dQ}{dt} = \left[ \frac{C}{S} \right] = [A]$$

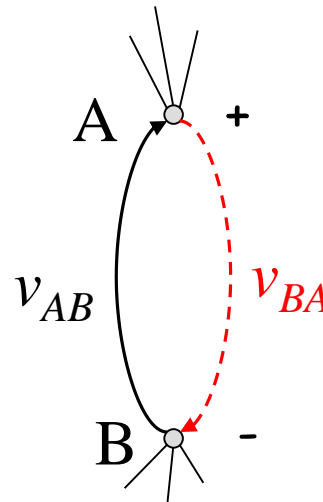


$$i = i(t)$$
$$i = -i'$$

## Differenza di Potenziale:

Lavoro compiuto per portare una carica unitaria da un punto del circuito ad un altro

$$v = \frac{dW}{dq} = \left[ \frac{J}{C} \right] = [V]$$



$$V(A) - V(B) = v_{AB}$$

$$V(B) - V(A) = v_{BA}$$

$$v_{AB} = -v_{BA}$$

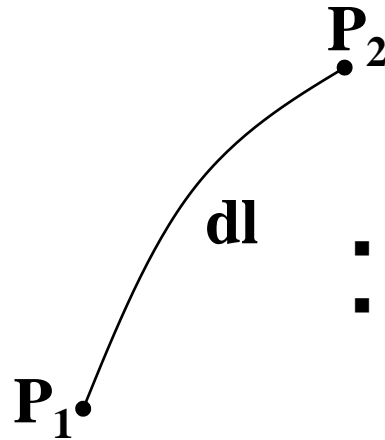
# Legge di Kirchhoff sulle Tensioni

$$\nabla \times \bar{\mathbf{E}} = 0$$



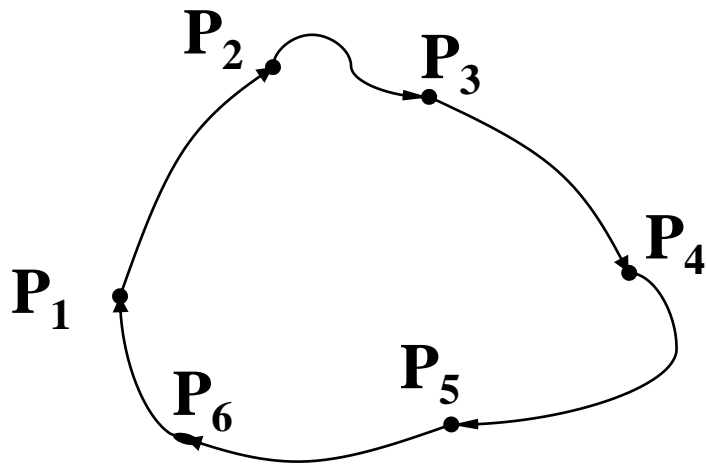
$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V(P_2) - V(P_1) = v_{21}$$



- $V(P_1)$  = potenziale elettrico [V]
- $v_{21}$  = tensione elettrica o differenza di potenziale [V]

$$[V(P_2) - V(P_1)] + [V(P_3) - V(P_2)] + [V(P_4) - V(P_3)] + [V(P_5) - V(P_4)] + [V(P_6) - V(P_5)] + [V(P_6) - V(P_1)] = 0$$



La somma delle differenze di potenziale calcolati lungo un **qualunque percorso chiuso** è pari a **Zero**

$$\sum v = 0$$



# Legge di Kirchhoff sulle Correnti

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{J}} = 0$$



$$\oint_s \bar{\mathbf{J}} \cdot d\bar{\mathbf{s}} = 0$$

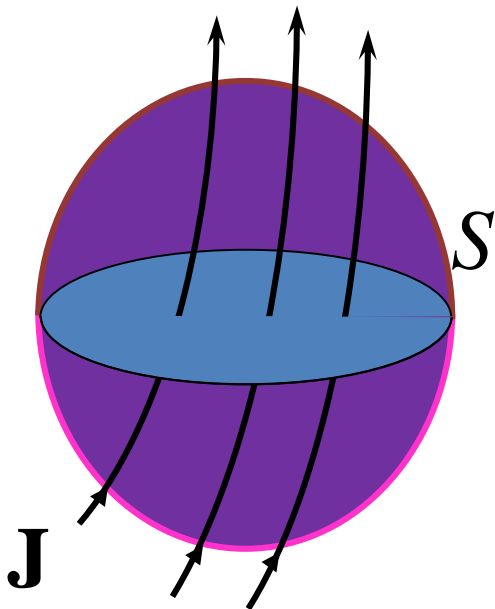
Il flusso della corrente attraverso **tutte** le superfici che hanno lo **stesso bordo e lo stesso orientamento** è lo stesso. Questo implica che la corrente che attraversa  $S_1$  è uguale e contraria alla corrente che attraversa  $S_2$ .

Dunque:

La somma delle correnti che attraversano una **qualunque superficie chiusa** è pari a

**Zero**

$$\sum I = 0$$



# Leggi di Kirchhoff

$$\text{LKV: } \sum v = 0$$

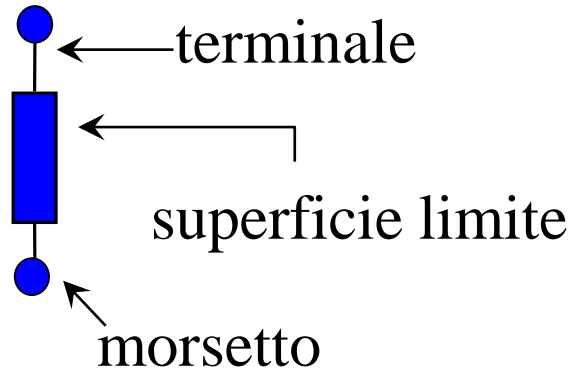
La somma algebrica delle **differenze di potenziale** calcolati lungo un qualunque percorso chiuso è pari a zero.

$$\text{LKC: } \sum i = 0$$

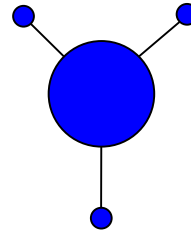
La somma algebrica delle **correnti** che attraversano una qualunque superficie chiusa è pari a Zero.

# Componenti Elettrici

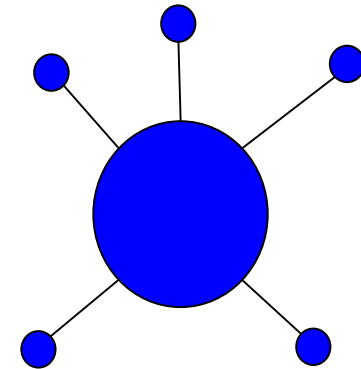
## BIPOLO



## TRIPOLO

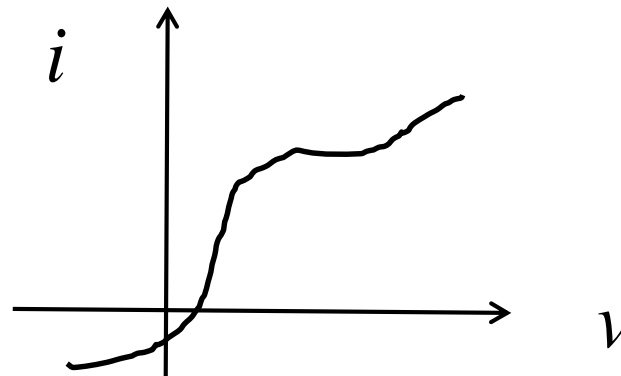


## MULTIPOLO



tutti i componenti verranno identificati con una caratteristica **corrente-tensione**.

$$v = f(i)$$

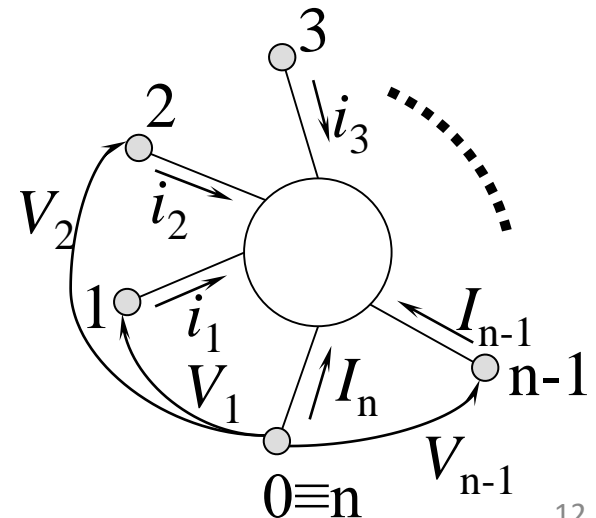
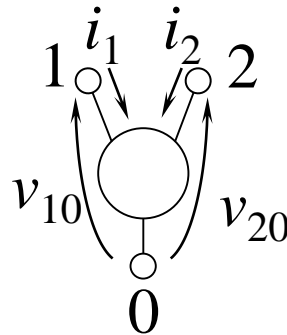
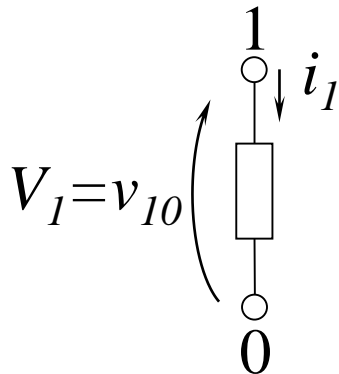


# VARIABILI DESCRITTIVE

I componenti di un circuito hanno tante **correnti** e tanti **potenziali** quanti sono i terminali

$$\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$$
$$\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$$

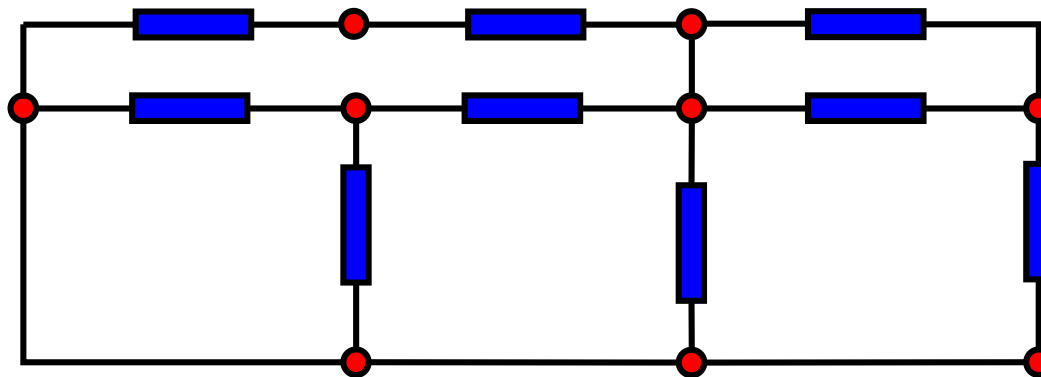
Per descrivere il comportamento di un componente con  $n$  morsetti si ha bisogno  **$n-1$  potenziali ed  $n-1$  correnti**



# CIRCUITO ELETTRICO

COLLEGAMENTO: due o più componenti si dicono collegati se hanno uno o più morsetti in comune

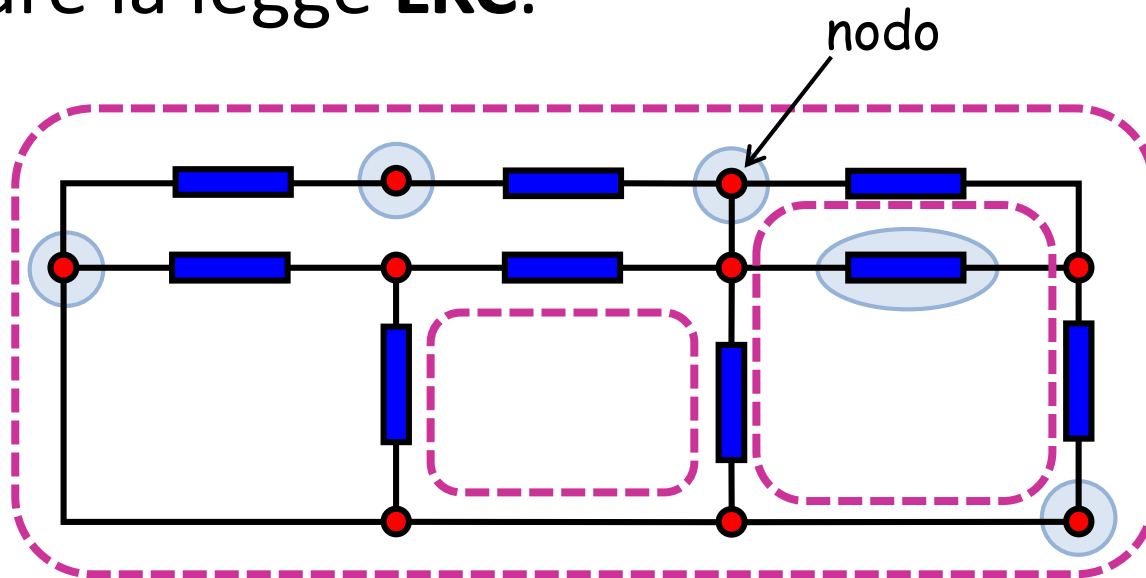
Schema a blocchi di un Circuito Elettrico di soli bipoli



E' un insieme di componenti elettrici collegati tra loro mediante **conduttori perfetti** (in essi non si ha accumulo di energia). L'energia si può considerare **concentrata nei componenti elettrici.**

# CIRCUITO ELETTRICO

In questo schema circuitale possiamo individuare diversi percorsi chiusi a cui applicare la **LKV** e possiamo racchiudere i nodi e i componenti all'interno di superfici chiuse a cui applicare la legge **LKC**.



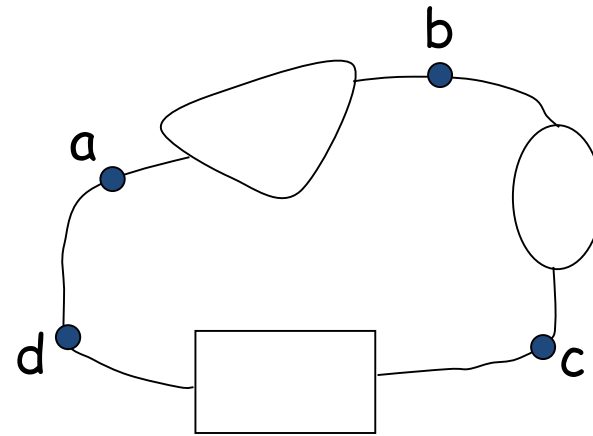
# Esercizio

In figura si hanno i seguenti potenziali nei punti indicati:

$$V(a)=3V, V(b)=5V, V(c)=-2V.$$

Calcolare le seguenti tensioni:

$$V_{ab}, V_{ba}, V_{bc}, V_{ad}, V_{cd}.$$



## Risoluzione

$$V_{ab} = V(a) - V(b) = 3 - 5 = -2V$$

$$V_{ba} = V(b) - V(a) = 5 - 3 = 2V \longrightarrow \boxed{V_{ab} = -V_{ba}}$$

$$V_{bc} = V(b) - V(c) = 5 - (-2) = 7V$$

$$V_{ad} = V(a) - V(d) = 0 \Rightarrow V(d) = V(a)$$

$$V_{cd} = V(c) - V(d) = -2 - 3 = -5V$$

I punti d e a sono uniti da un conduttore perfetto (anche detto **corto circuito**), per cui si trovano allo **stesso potenziale**...la differenza di potenziale è quindi nulla

# Esercizio

Ricavare la corrente  $i_c$  e la tensione  $V_{ba}$

## Risoluzione

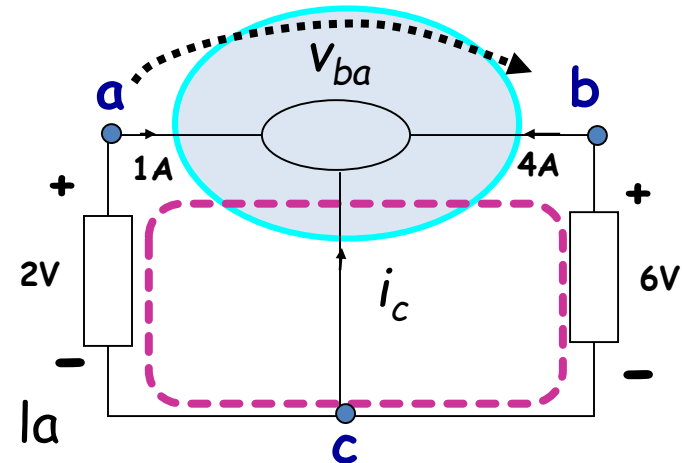
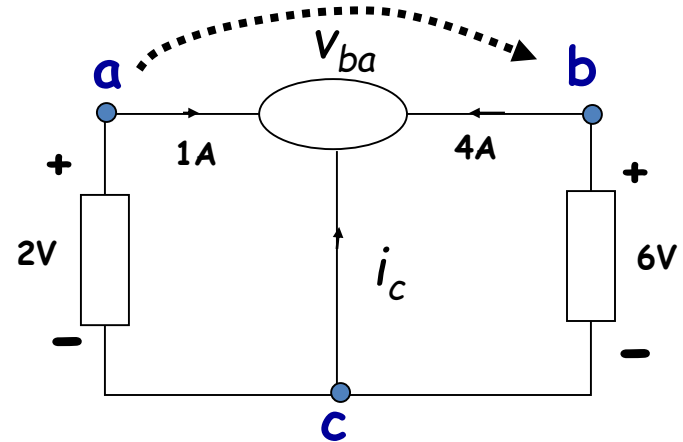
La corrente  $i_c$  si può ricavare dalla LKC applicata alla superficie chiusa in figura:

$$i_c + 1 + 4 = 0 \rightarrow i_c = -5A$$

Il verso della corrente è opposto rispetto a quello segnato in figura

La tensione  $v_{ba}$  si può ricavare applicando la LKV al percorso chiuso  $b-a-c-b$ .

$$v_{ba} - 6 + 2 = 0 \rightarrow v_{ba} = 4V$$



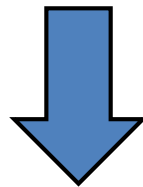


# Conservazione della potenza elettrica

$$P = \frac{dL}{dt} \Rightarrow P_{\text{elettrica}} = \frac{dL}{dQ} \cdot \frac{dQ}{dt} = v \cdot i = [V \cdot A] = [W]$$

Il principio di conservazione dell'energia deve essere soddisfatto da tutti i sistemi elettrici isolati, quindi:

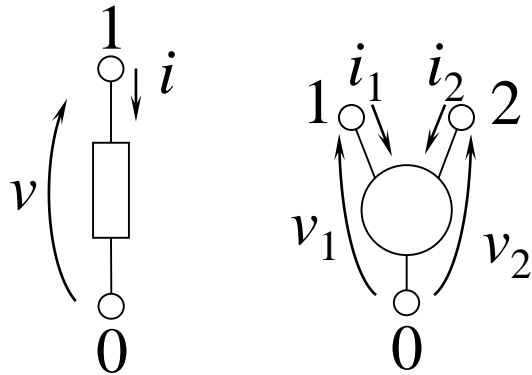
$$\sum P = 0$$



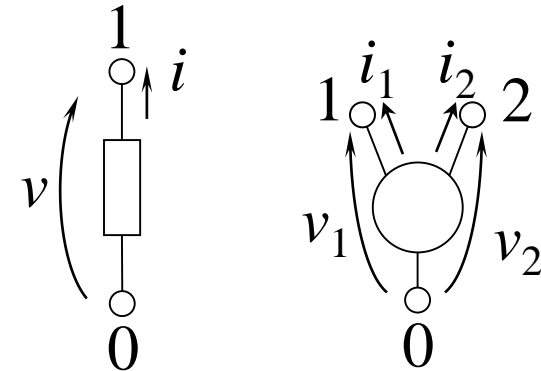
$$\sum P_{\text{generata}} = \sum P_{\text{utilizzata}}$$

# CONVENZIONI

Configurazione da utilizzatore



Configurazione da generatore



✓ convenzione 1 (degli utilizzatori):  $P_u > 0$ ,  $P_g < 0$

Se adottiamo la convenzione degli utilizzatori la potenza è positiva se utilizzata, negativa se generata.

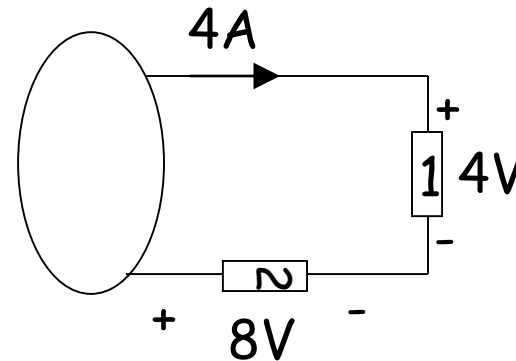
✓ convenzione 2 (dei generatori):  $P_u < 0$ ,  $P_g > 0$

Se adottiamo la convenzione dei generatori la potenza è positiva se generata, negativa se utilizzata

La potenza utilizzata verrà accumulata o dissipata

# Esercizio

Con riferimento alla figura, quale dei due elementi assorbe potenza? Quale la eroga? Dare un segno alle potenze sulla base della convenzione degli utilizzatori



## Risoluzione:

L'elemento 1 assorbe potenza perché tensione e corrente sono discordi

$$p = v \cdot i = 4 \cdot 4 = 16 \text{ W}$$

L'elemento 2 cede potenza perché tensione e corrente sono concordi:

$$p = v \cdot i = -(8 \cdot 4) = -32 \text{ W}$$

# Esercizio

Nel circuito in figura ricavare le potenze assorbite dai bipoli 3 e 4, e verificare la conservazione della potenza.

## Risoluzione

Notiamo anzitutto che

$$p_3 = -2 \times 4 = -8W$$

Ricaviamo  $v_1$  e  $v_2$

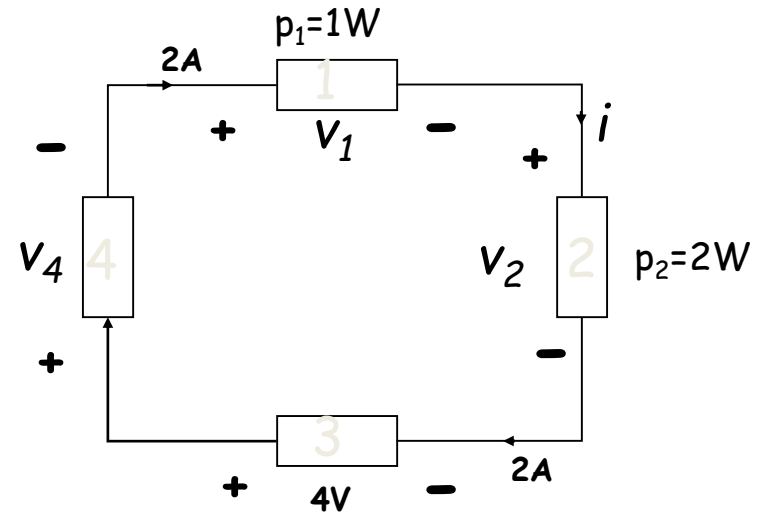
$$p_1 = 2v_1 = 1W \rightarrow v_1 = \frac{1}{2}V$$

$$p_2 = 2v_2 = 2W \rightarrow v_2 = 1V$$

Dalla LKT abbiamo

$$v_1 + v_2 - 4 + v_4 = 0$$

$$v_4 = -v_1 - v_2 + 4 = 2.5V$$



Quindi

$$p_4 = 2v_4 = 5W$$

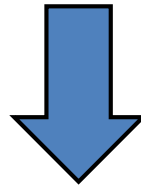
Sommando

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 + 2 - 8 + 5 = 0!$$

I bipoli 1, 2 e 4 assorbono potenza; il bipolo 3 eroga potenza

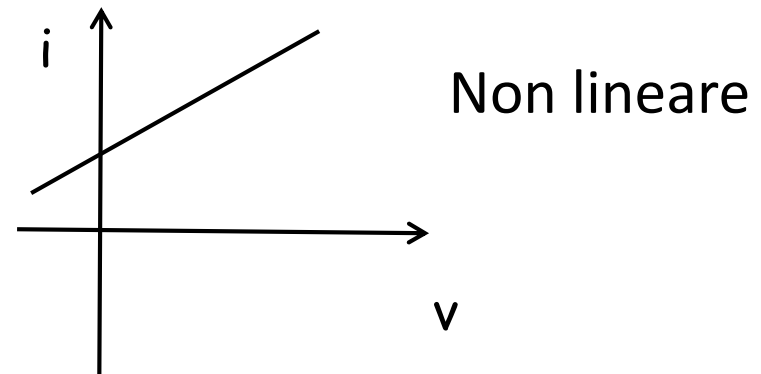
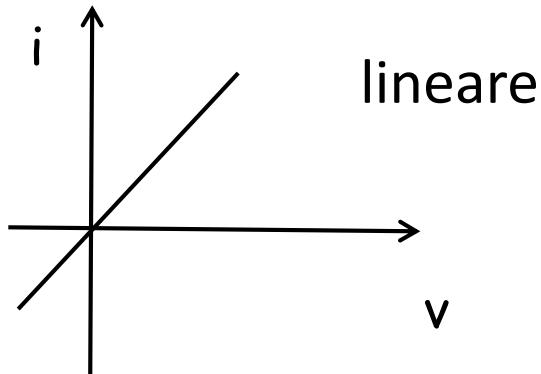
# Proprietà generali dei componenti

Linearità: Un componente o un circuito è lineare se l'effetto dovuto ad una qualsiasi causa è proporzionale alla causa stessa

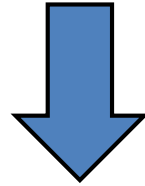


è valido il PRINCIPIO di SOVRAPPOSIZIONE degli EFFETTI

L'effetto dovuto a più cause che agiscono contemporaneamente è la somma degli effetti dovuti a ciascuna causa considerata come se agisse da sola

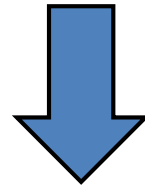


permanenza: Un componente o un circuito è permanente se l'effetto non dipende dall'istante di applicazione della causa



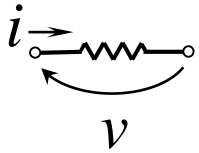
I coefficienti delle equazioni costitutive degli elementi o quelle rappresentative dei circuiti sono indipendenti dalla variabile tempo

passività: l'effetto di una qualsiasi causa di breve durata si mantiene limitato al passare del tempo.



Un componente o un circuito passivo può erogare energia ma per un intervallo di tempo limitato, tale energia sarà in quantità inferiore o al massimo uguale a quella accumulata in precedenza

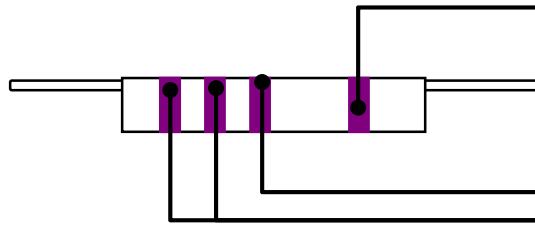
# RESISTORE ideale e LEGGE di OHM



$$v = R \cdot i \quad i = \frac{1}{R} \cdot v = G \cdot v$$

Il resistore è un elemento passivo dissipativo

per un conduttore di lunghezza  $l$  e sezione  $A$ :  $R = \rho \cdot \frac{l}{A} = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{l}{A} \quad [\Omega]$

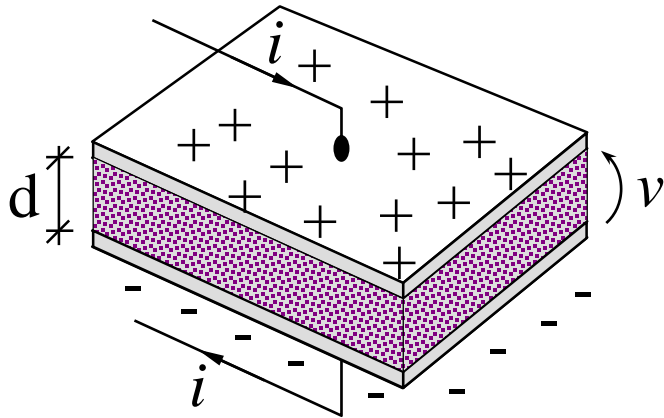


COLORE	CIFRA	MULTIPLIO	TOLL.ZA
<b>NERO</b>	0	$10^0$	
<b>MARRON</b>	1	$10^1$	
<b>ROSSO</b>	2	$10^2$	
<b>ARANCIO</b>	3	$10^3$	
<b>GIALLO</b>	4	$10^4$	
<b>VERDE</b>	5	$10^5$	
<b>BLU</b>	6	$10^6$	
<b>VIOLA</b>	7	$10^7$	
<b>GRIGIO</b>	8	$10^8$	
<b>BIANCO</b>	9	-	
<b>ORO</b>		$10^{-1}$	$\pm 5\%$
<b>ARGENTO</b>		$10^{-2}$	$\pm 10\%$
<b>NERO o null</b>		-	$\pm 20\%$

MATERIALE	$\rho$ ( $\Omega \times m$ )
argento	$1,63 \times 10^{-8}$
rame	$1,72 \times 10^{-8}$
oro	$2,44 \times 10^{-8}$
alluminio	$2,83 \times 10^{-8}$
tungsteno	$6,52 \times 10^{-8}$
silicio	2 300

prefisso	simbolo	significato
atto	a	$10^{-18}$
femto	f	$10^{-15}$
pico	p	$10^{-12}$
nano	n	$10^{-9}$
micro	$\mu$	$10^{-6}$
milli	m	$10^{-3}$
centi	c	$10^{-2}$
deci	d	$10^{-1}$
deca	da	$10^1$
etto	h	$10^2$
kilo	k	$10^3$
mega	M	$10^6$
giga	G	$10^9$
tera	T	$10^{12}$
exa	E	$10^{15}$
peta	P	$10^{18}$

# CAPACITORE ideale



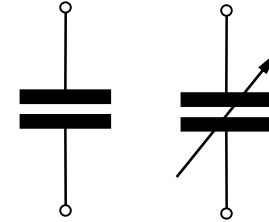
$$q = C \cdot v$$



$$\frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dq}{dt} = i$$

$$i = C \cdot \frac{dv}{dt}$$



$$C = \varepsilon \cdot \frac{A}{d} [F] \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$$

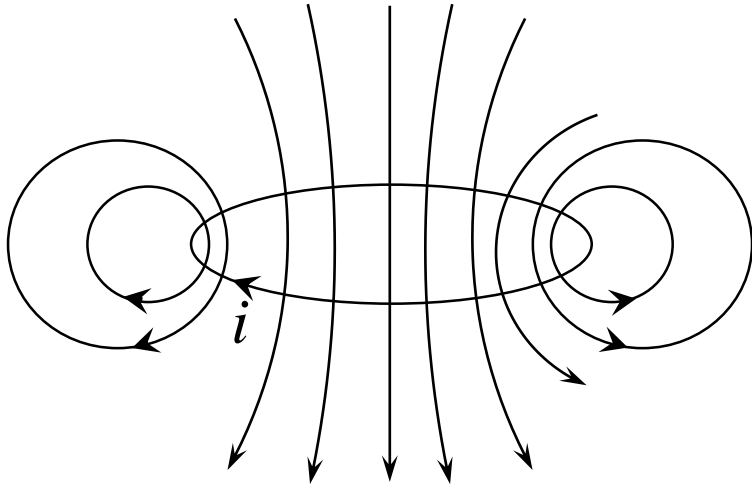
MATERIALE	$\varepsilon_r$
neoprene	6,46
silicone	3,20
mica	5,40 - 9,0
carta	2,99
acqua distillata	78,20
aria	1

Capacitore passivo:  $C > 0$

**Trasferisce l'energia in modo reversibile**

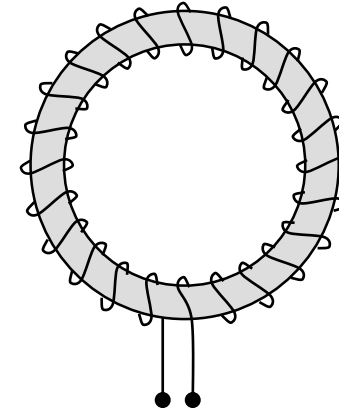
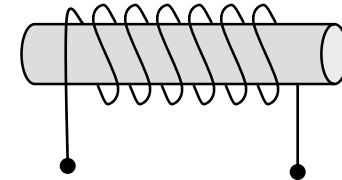


# INDUTTORE ideale



$$\phi = L \cdot i \quad v = \frac{d\phi}{dt}$$

$$v = L \cdot \frac{di}{dt}$$



$$L = \left[ \frac{\text{Weber}}{\text{A}} \right] = [\text{H}] = \textit{henry}$$

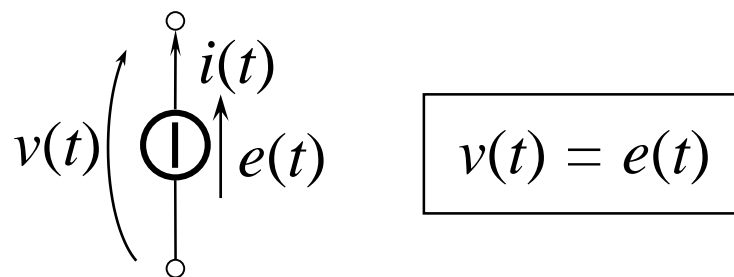
Induttore passivo  $L > 0$

Trasferisce l'energia in modo reversibile

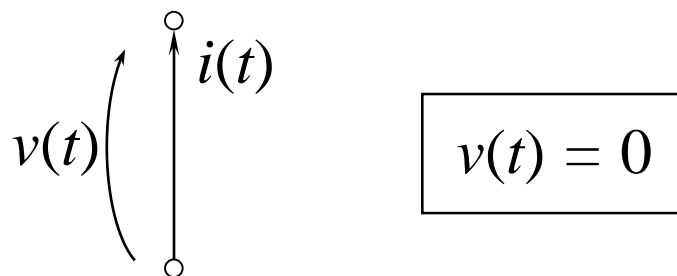
# GENERATORI ideali

## Generatore ideale di tensione

*La tensione disponibile non dipende dalla corrente erogata*



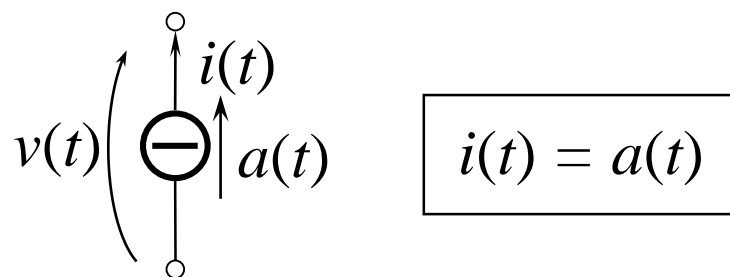
## Corto Circuito



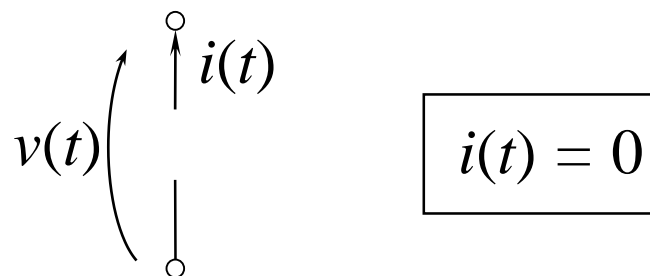
Caso degenerare del generatore di tensione o del resistore di resistenza nulla

## Generatore ideale di corrente

*La corrente non dipende dalla tensione disponibile*



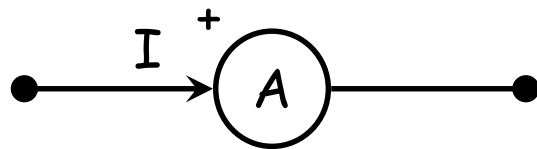
## Circuito Aperto



Caso degenerare del generatore di corrente o del resistore di resistenza infinita

# STRUMENTI DI MISURA

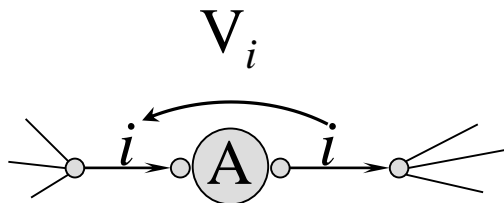
## CORRENTE



Ampere-metro

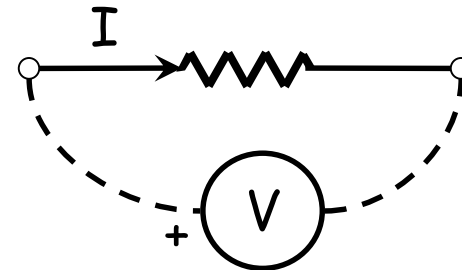
UNITA' DI MISURA: Ampère (A)

inserzione



$V_i$  piccolissima  $\rightarrow$  ideale  $r_i = 0$

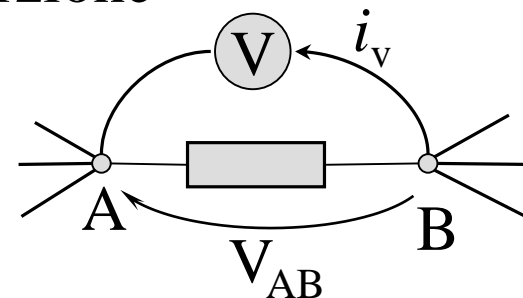
## TENSIONE



Volt-metro

UNITA' DI MISURA: Volt (V)

inserzione

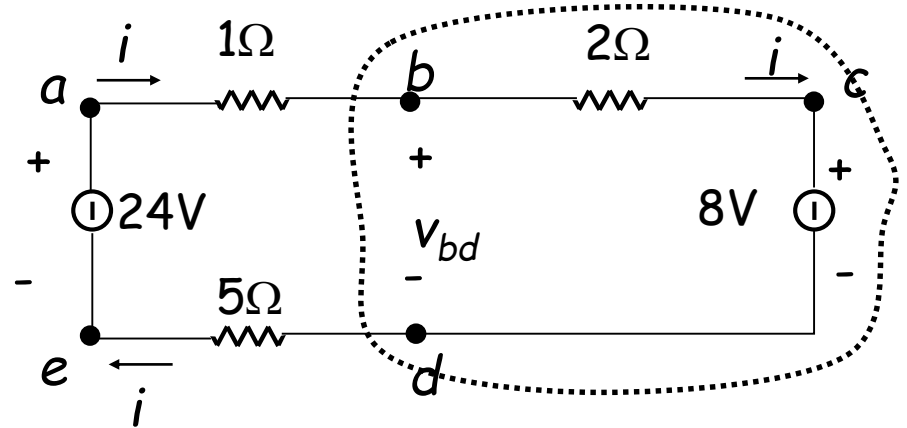


$i_v$  piccolissima  $\rightarrow$  ideale  $r_v = \infty$

# Esercizio

Calcolare la  $i$  e la  $v_{bd}$  nel circuito in figura

**Risoluzione**



Applicando la LKT al percorso chiuso  $a-b-c-d-e-a$  si ottiene:

$$v_{ab} + v_{bc} + 8 + v_{de} - 24 = 0$$

Per la legge di Ohm possiamo scrivere:

$$v_{ab} = i \quad v_{bc} = 2i \quad v_{de} = 5i$$

Sostituendo 
$$i + 2i + 8 + 5i - 24 = 0$$

Da cui si ricava 
$$i = \frac{(24-8)}{8} = 2A$$

Applichiamo LKV al percorso chiuso  $b-c-d-b$

$$2i + 8 - v_{bd} = 0 \rightarrow v_{bd} = 2i + 8 = 12V$$

# Esercizio

Nel circuito in figura ricavare la corrente  $i$ , la potenza dissipata nel resistore e la potenza erogata da ciascun generatore.

## Risoluzione

Applicando LKT al percorso chiuso  $a-b-c-d-a$

$$3 + 3i - 6 - 12 = 0 \rightarrow i = 5A$$

La potenza dissipata dal resistore vale  $P = v \cdot i = (R \cdot i) \cdot i = R \cdot i^2 = 3 \cdot 5^2 = 75W$

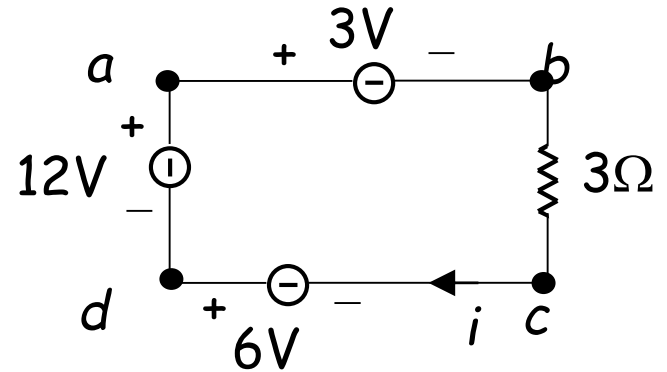
•Generatore da 3V: la corrente di 5A scorre dal + al -, quindi esso **assorbe** una potenza pari a  $3 \times 5 = 15W$ .

•Generatore da 6V: la corrente da 5A scorre dal- al +, quindi la potenza **erogata** vale  $6 \times 5 = 30W$

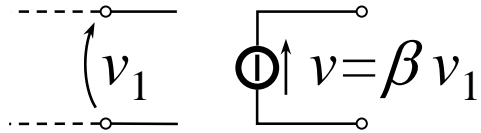
•Generatore di 12 V: la potenza **erogata** vale  $12 \times 5 = 60W$ .

In totale la potenza erogata dai generatori è:  $-15 + 30 + 60 = 75W$ , che coincide con la potenza dissipata nel resistore.

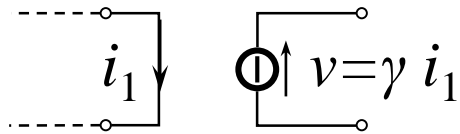
Il generatore indipendente può assorbire potenza anziché erogarla.



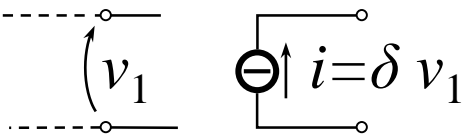
# GENERATORI PILOTATI



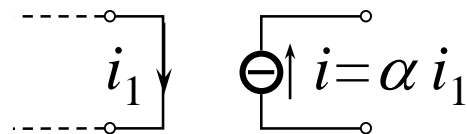
$\beta$ : parametro di controllo adimensionale



$\gamma$ : parametro di controllo  
(dimensionalmente è una resistenza)



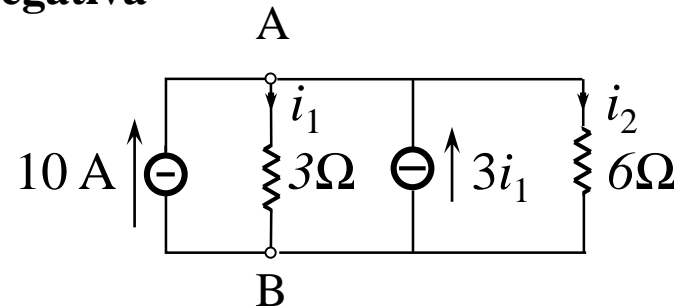
$\delta$ : parametro di controllo  
(dimensionalmente è una conduttanza)



$\alpha$ : parametro di controllo adimensionale

I generatori dipendenti o pilotati sono componenti **essenziali nei circuiti amplificatori**, in cui l'ampiezza dell'uscita è maggiore di quella dell'ingresso.

Inoltre servono ad **isolare una porzione di circuito o a fornire una resistenza negativa**



Trovare il valore di  $i_2$

$$10 - i_1 + 3i_1 - i_2 = 0 \quad \text{LKC nodo A}$$

$$i_1 = \frac{V_{AB}}{3}; \quad i_2 = \frac{V_{AB}}{6}$$

$$10 - \frac{V_{AB}}{3} + 3 \cdot \frac{V_{AB}}{3} - \frac{V_{AB}}{6} = 0$$

$$V_{AB} = -20V \rightarrow i_2 = \frac{V_{AB}}{6} = -\frac{20}{6}$$

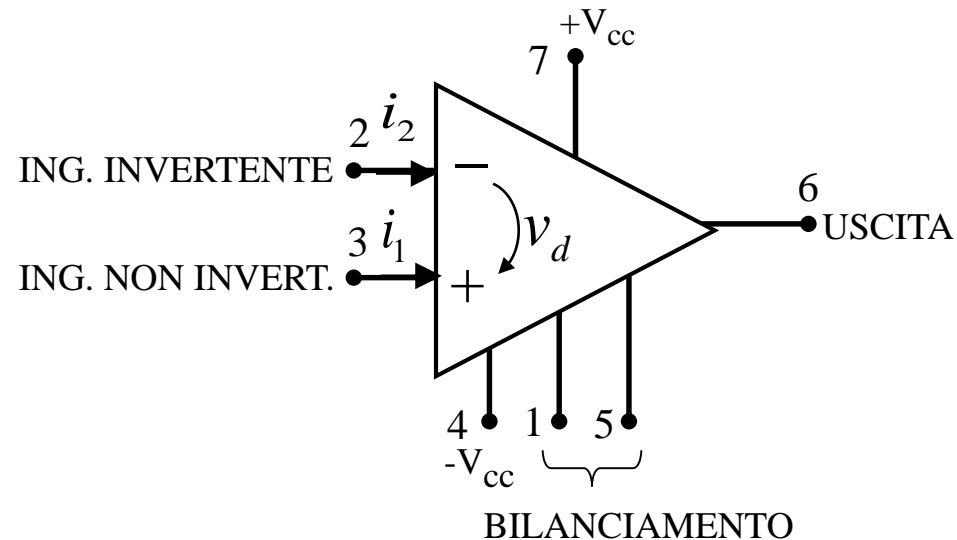
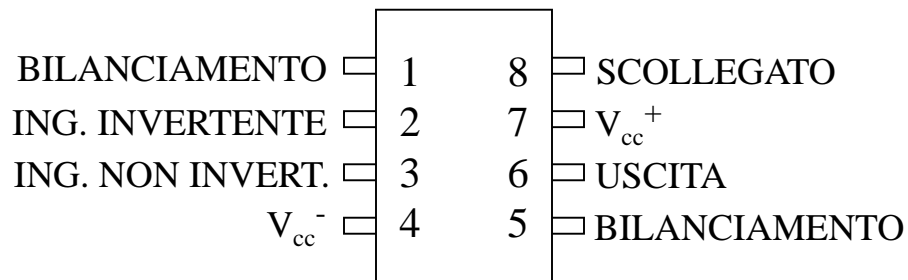
esempio:

# AMPLIFICATORE OPERAZIONALE

L'Amplificatore Operazionale (Operational Amplifier - OP) è un elemento circuitale attivo progettato per eseguire operazioni matematiche di addizione, sottrazione, divisione, moltiplicazione, derivazione e integrazione di segnali.

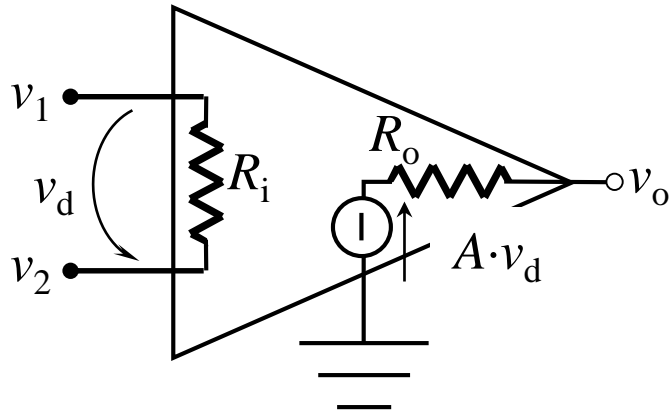
## CONFIGURAZIONE DEI PIN

## SIMBOLO CIRCUITALE



LE ALIMENTAZIONI VENGONO SPESSO OMESSE NEGLI SCHEMI CIRCUITALI, MA L'OP DEVE SEMPRE ESSERE ALIMENTATO

# MODELLO CIRCUITALE



L'OP si comporta come un generatore di tensione controllato in tensione

$$v_d = v_2 - v_1$$

$$v_o = A \cdot v_d = A \cdot (v_2 - v_1)$$

$A$ : guadagno di tensione ad anello aperto

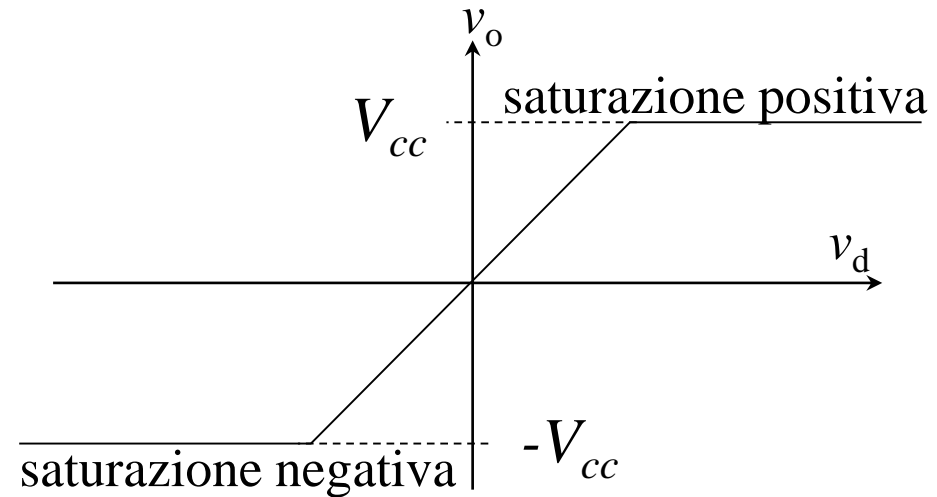
valori tipici

$$A \quad 10^5 \div 10^8$$

$$R_i \quad 10^6 \div 10^{13} \ \Omega$$

$$R_o \quad 10 \div 100 \ \Omega$$

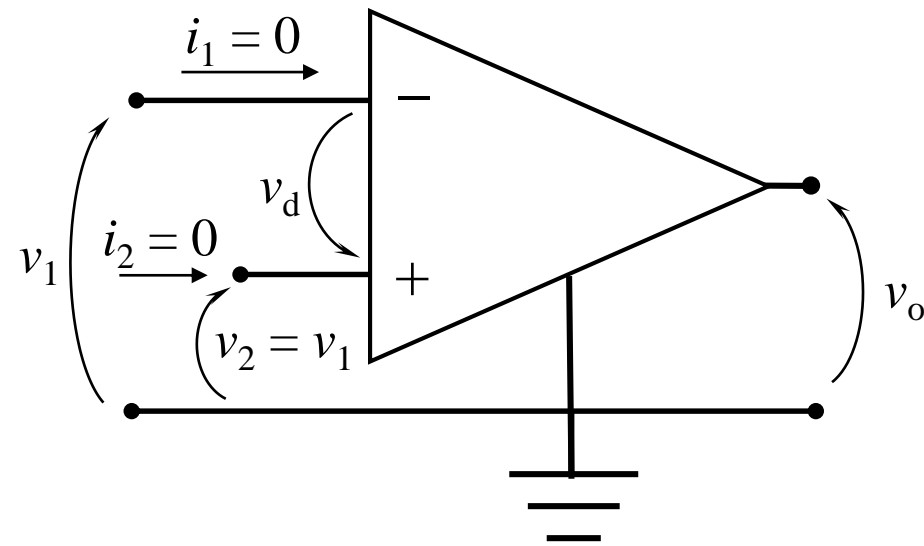
$$V_{cc} \quad 5 \div 24 \ \text{V} \quad \text{tensione di alimentazione}$$





# AMPLIFICATORE OPERAZIONALE IDEALE

Modello



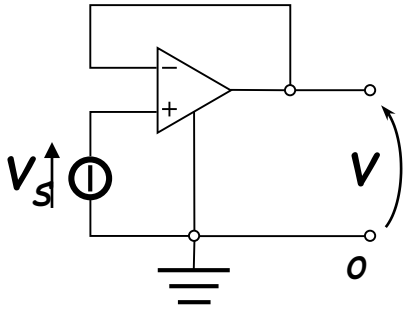
equazioni

$$\begin{cases} A = \infty \\ R_i = \infty \\ R_o = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1 = 0, i_2 = 0 \\ v_d = 0 \rightarrow v_2 = v_1 \end{cases}$$

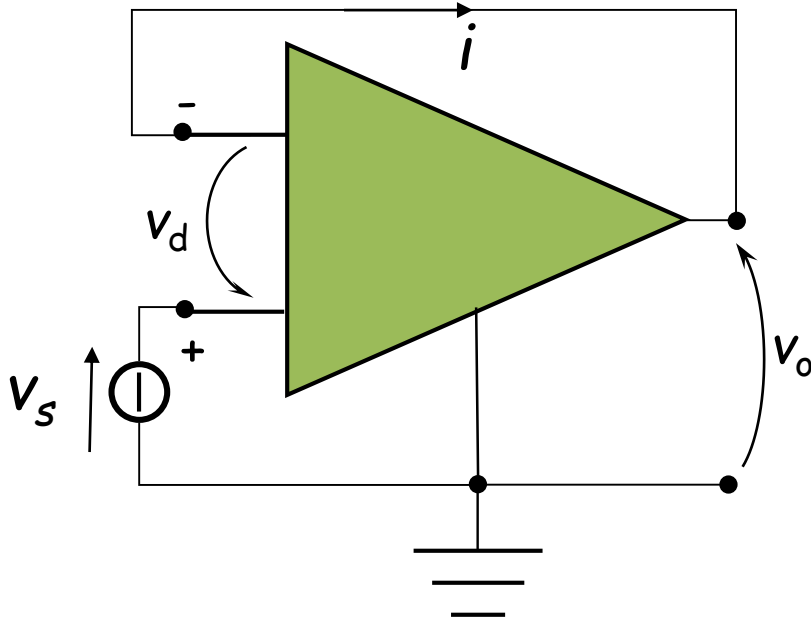
Il valore di  $v_o$  dipende da come l'amplificatore è collegato al resto del circuito

Nella maggior parte delle applicazioni si considerano **OP IDEALI** nella **REGIONE LINEARE** di funzionamento

## Inseguitore di tensione



Un generatore di tensione è collegato al morsetto non invertente dell'operazionale, mentre il morsetto invertente è collegato direttamente all'uscita.  
Determinare la tensione in uscita  $v_o$  nell'ipotesi di funzionamento nella regione lineare



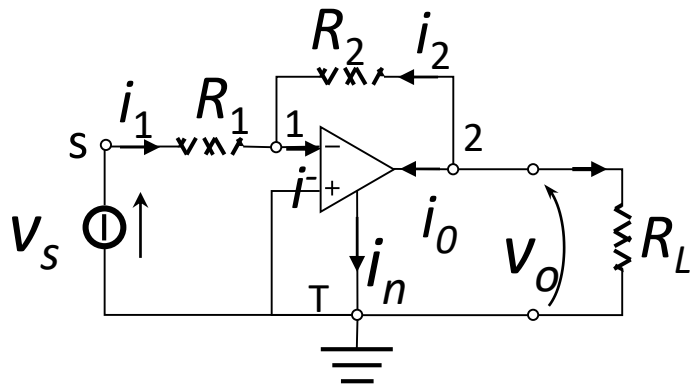
$$\begin{cases} i_+ = 0, & i_- = 0 \\ v^+ = v^- \end{cases} \quad \text{Equazioni dell'OP ideale}$$

$$v_o = v^-$$

$$v_s = v^+$$

$$v_s = v_o$$

# Amplificatore invertente



Determinare il valore della tensione  $v_o$

per l'idealità dell'operazionale:

$$\begin{cases} v_1 = v_- = v_+ = 0 \\ i^- = i^+ = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 &= i^- && \text{LKC al nodo 1} \\ v_{R_1} - v_s + v_1 &= 0 && \text{LKV al percorso chiuso s-1-T-s} \\ v_{R_2} - v_o + v_1 &= 0 && \text{LKV al percorso chiuso 2-1-T-2} \end{aligned}$$

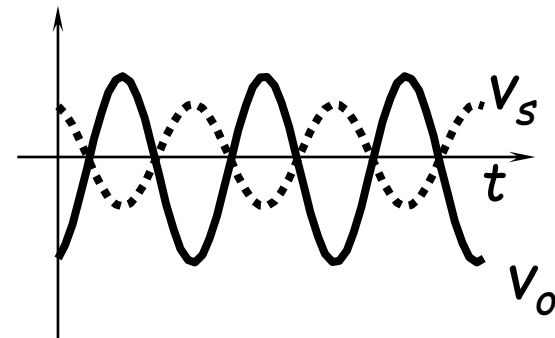
$$i_1 = \frac{v_{R_1}}{R_1} = \frac{v_s}{R_1}$$

$$i_2 = \frac{v_{R_2}}{R_1} = \frac{v_o}{R_1}$$

Equazioni dei componenti

$$i_1 = -i_2 \Rightarrow \frac{v_s}{R_1} = -\frac{v_o}{R_2} \quad \text{e infine: } v_o = -\frac{R_2}{R_1} \cdot v_s$$

Questa configurazione di operazionale amplifica l'ingresso in ragione del rapporto  $R_2/R_1$  e ne **inverte** il segno.

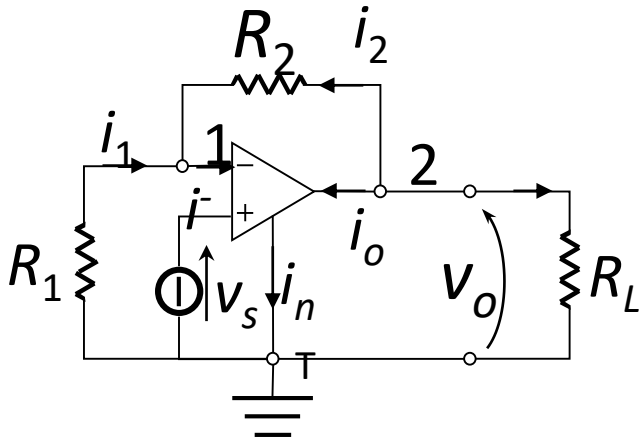


# Amplificatore non invertente

Determinare il valore della tensione  $v_o$

per l'idealità dell'operazionale:

$$\begin{cases} i^+ = i^- = 0 \\ v_- = v_+ = v_s \end{cases}$$



$$i_1 + i_2 = i^-$$

LKC al nodo 1

$$v_{R_1} + v_s = 0$$

LKV al percorso chiuso 1-T-s1

$$v_o - v_{R_2} - v_s = 0$$

LKV al percorso chiuso 2-1-T-2

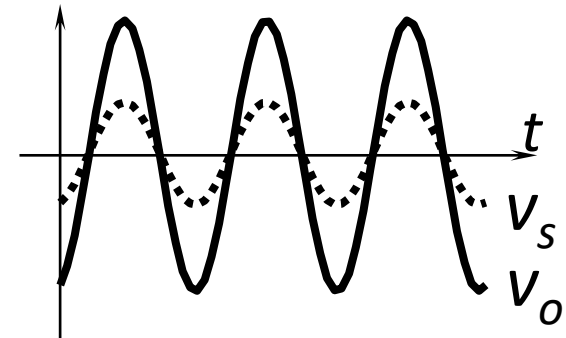
$$i_1 = \frac{v_{R_1}}{R_1} = -\frac{v_s}{R_1}$$

Equazioni dei componenti

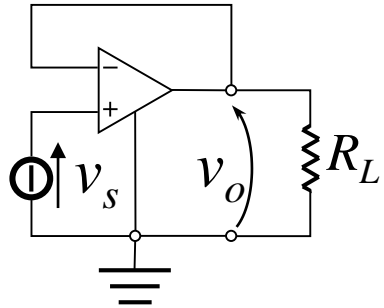
$$i_2 = \frac{v_{R_2}}{R_2} = \frac{v_o - v_s}{R_2}$$

$$i_1 = -i_2 \Rightarrow -\frac{v_s}{R_1} = -\frac{v_o - v_s}{R_2} \quad \text{e infine: } v_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot v_s$$

Questa configurazione di operazionale amplifica l'ingresso della quantità  $1 + R_2/R_1$  e **non inverte** il segno.

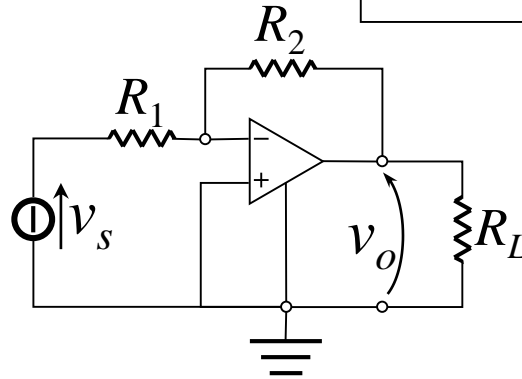


inseguitore di tensione



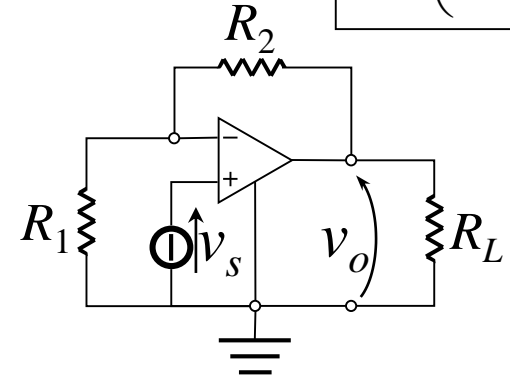
amplificatore invertente

$$v_o = -\frac{R_2}{R_1} \cdot v_s$$

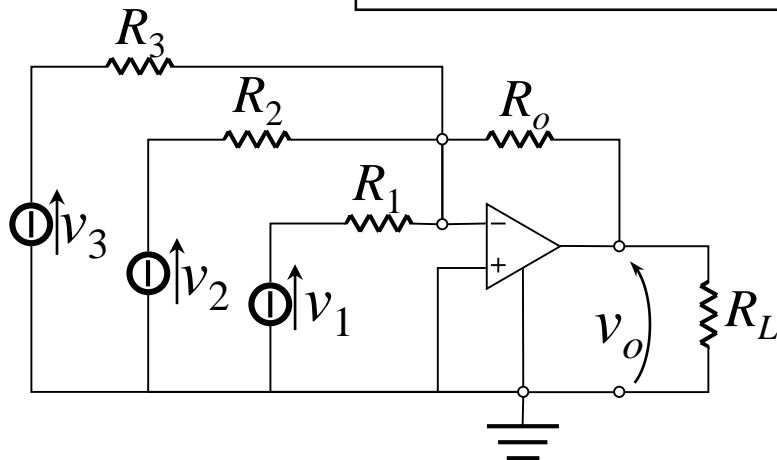
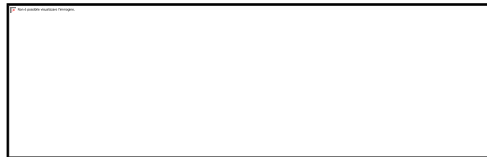


amplificatore non invertente

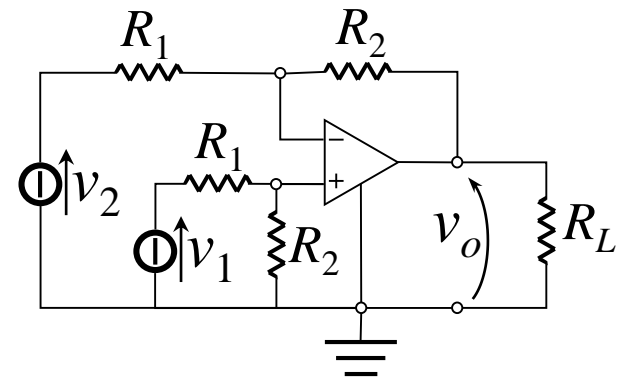
$$v_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot v_s$$



amplificatore sommatore



amplificatore differenziale

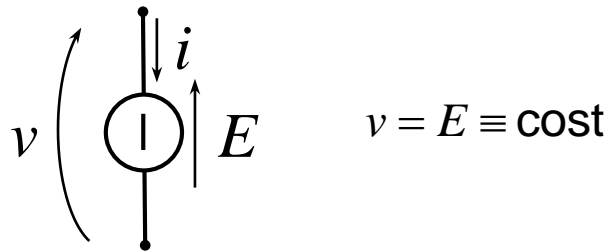


# Reti in Regime Stazionario

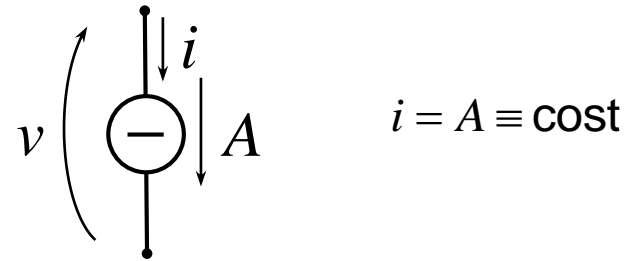
# COMPONENTI ELEMENTARI IN REGIME STAZIONARIO

Per circuiti assolutamente stabili, in presenza di eccitazioni costanti nel tempo:

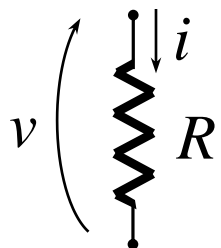
•Generatore indipendente di tensione



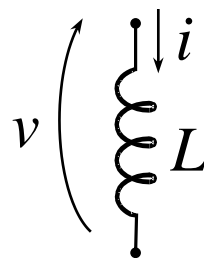
•Generatore indipendente di corrente



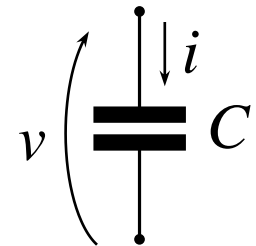
•Resistore



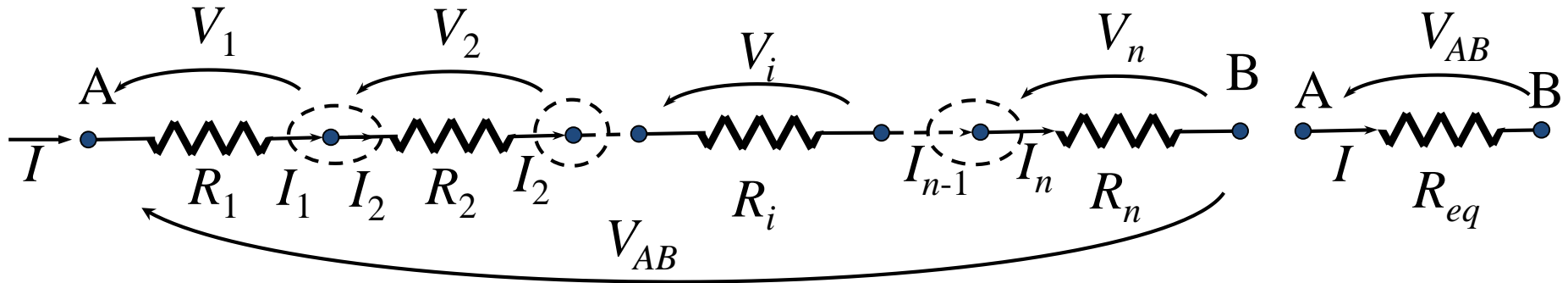
•Induttore



•Condensatore



# RESISTORI IN SERIE

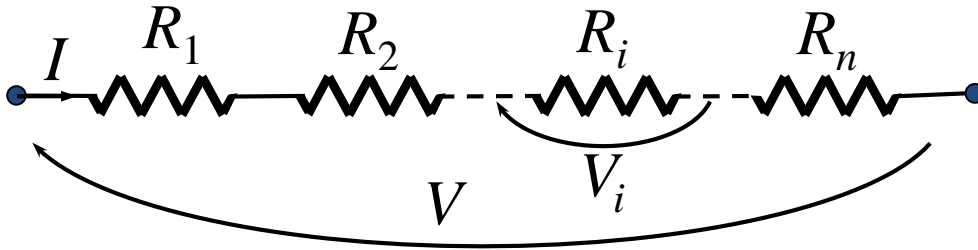


$$I_1 = I_2 = \dots = I_i = \dots = I_n = I$$

$$\begin{aligned} V_{AB} &= V_1 + V_2 + \dots + V_i + \dots + V_n = R_1 I_1 + R_2 I_2 + \dots + R_n I_n = \\ &= (R_1 + \dots + R_n) \cdot I = R_{eq} \cdot I \Rightarrow \\ R_{eq} &= \sum_i R_i \end{aligned}$$



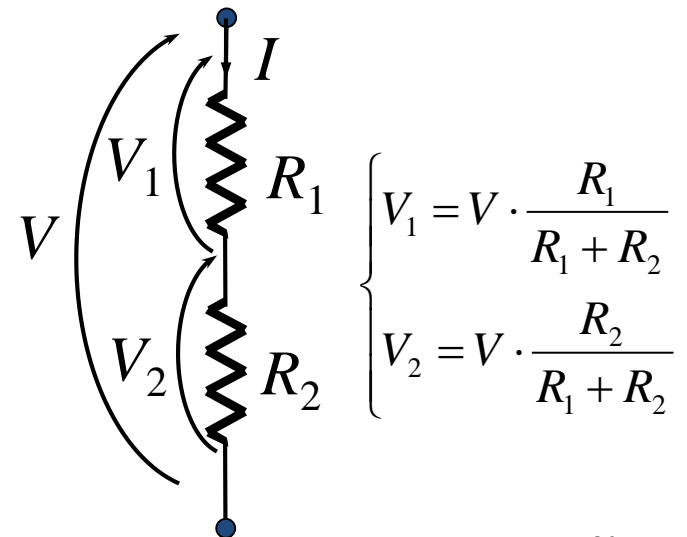
# PARTITORE DI TENSIONE



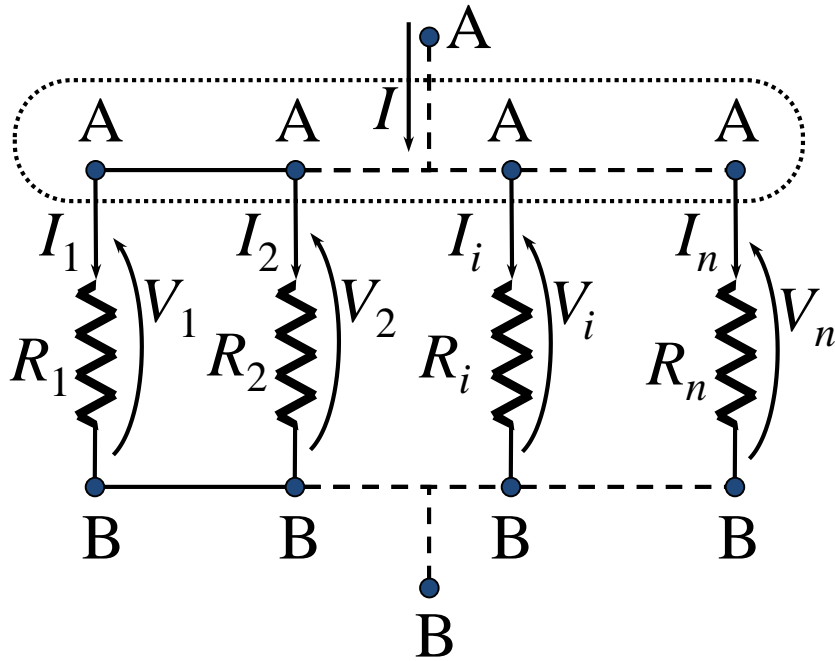
$$V_i = R_i I \quad V = (R_1 + \dots + R_n) I \Rightarrow I = V / \sum_h R_h$$

$$V_i = V \cdot \frac{R_i}{R_{eq}} = V \cdot \frac{R_i}{\sum_h R_h}$$

Nel caso di due soli resistori:



# PARALLELO DI RESISTORI



$$V_i = R_i I_i \quad I_i = \frac{V_i}{R_i} = G_i V_i$$

$$V_1 = V_2 = \dots = V_i = V_n = V$$

$$I = I_1 + \dots + I_n = \frac{V_1}{R_1} + \dots + \frac{V_n}{R_n} =$$

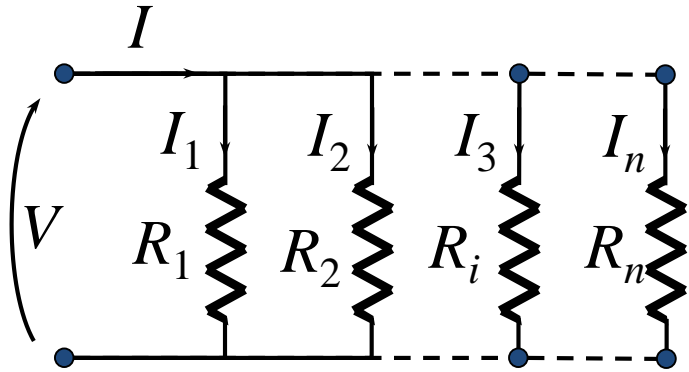
$$= \left( \frac{1}{R_1} + \dots + \frac{1}{R_n} \right) \cdot V = (G_1 + \dots + G_n) \cdot V$$

$$I = \frac{V}{R_{eq}} = G_{eq} \cdot V$$

$$G_{eq} = \sum_i G_i$$

$$\frac{1}{R_{eq\parallel}} = \sum_i \frac{1}{R_i} \Rightarrow R_{eq\parallel} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \dots + \frac{1}{R_n}}$$

# PARTITORE DI CORRENTE

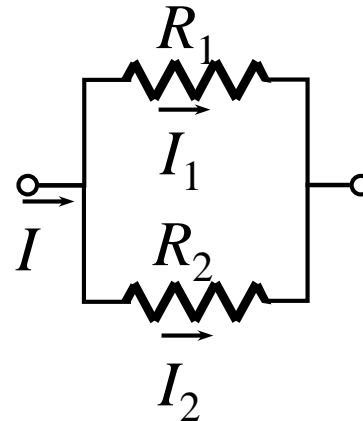


$$I_i = \frac{V}{R_i} = V \cdot G_i$$

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n = V \cdot G_{eq} = \frac{V}{R_{eq}}$$

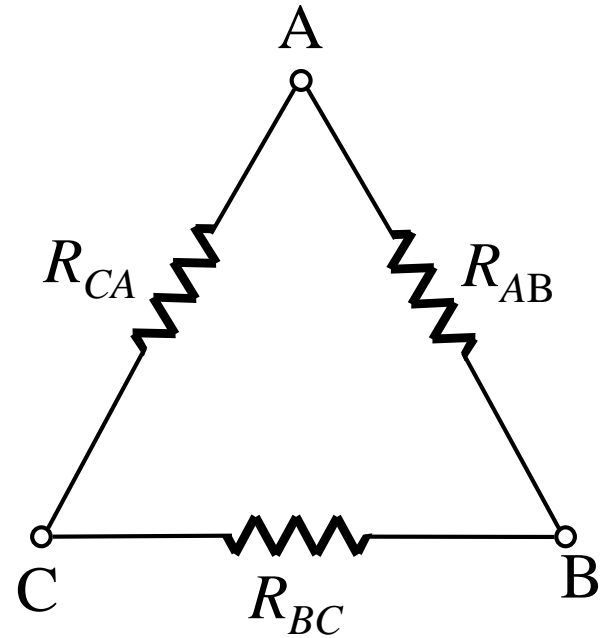
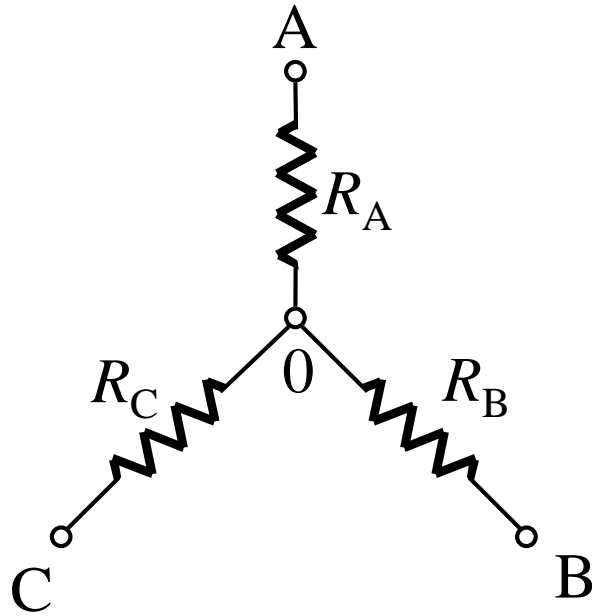
$$I_i = \frac{G_i}{G_{eq}} \cdot I = \frac{R_{eq\parallel}}{R_i} \cdot I = \left( \frac{1}{R_i} \middle/ \frac{1}{R_{eq\parallel}} \right) \cdot I$$

Nel caso di due soli resistori:



$$\begin{cases} I_1 = I \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \\ I_2 = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} \end{cases}$$

## TRASFORMAZIONE STELLA-TRIANGOLO



$$\left\{ \begin{array}{l} R_A = \frac{R_{AB} R_{CA}}{R_0} \\ R_B = \frac{R_{BC} R_{AB}}{R_0} \\ R_C = \frac{R_{CA} R_{BC}}{R_0} \end{array} \right. \quad R_0 = R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}$$

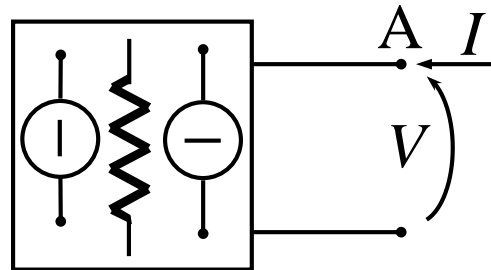
$$\left\{ \begin{array}{l} R_{AB} = R_A \cdot R_B \cdot G_0 \\ R_{BC} = R_B \cdot R_C \cdot G_0 \\ R_{CA} = R_C \cdot R_A \cdot G_0 \end{array} \right. \quad G_0 = \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}$$

Nel caso di tre resistenze uguali sarà:

$$R_Y = \frac{R_{\Delta}}{3}$$

# Principio di Sovrapposizione

In una rete lineare, comunque complessa, contenente  $N$  generatori lineari, le tensioni e le correnti in ciascun ramo possono essere determinate sommando i contributi dovuti ai singoli generatori presenti, agenti uno alla volta.



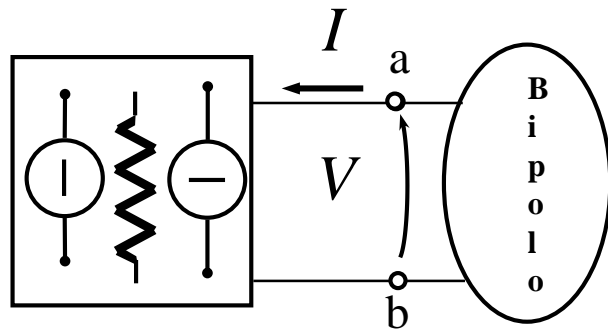
Passivazione dei generatori:

Generatore di corrente  $\implies$  circuito aperto (corrente nulla)  
Generatore di tensione  $\implies$  corto circuito (tensione nulla)

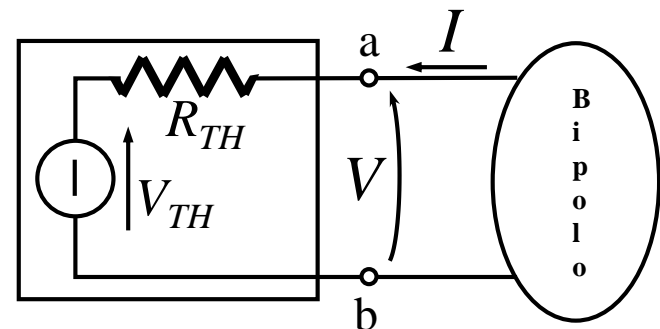
# Teorema di Thévenin

Una rete lineare, comunque complessa, accessibile da 2 terminali, può essere sostituita con un circuito equivalente formato da un generatore di tensione  $V_{TH}$  in serie con una resistenza  $R_{TH}$ , dove  $V_{TH}$  è la tensione a vuoto ai terminali e  $R_{TH}$  è la resistenza equivalente vista agli stessi morsetti quando i generatori indipendenti sono passivati.

Rete lineare



Equivalente di Thévenin

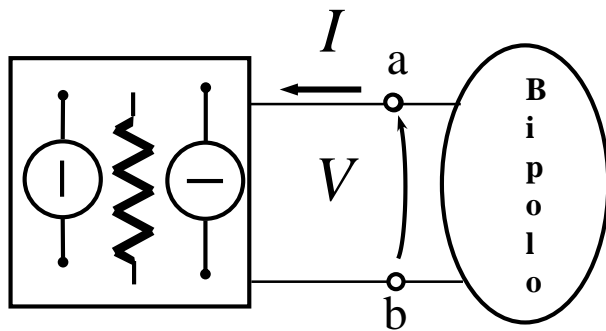


$$V = V_{TH} + R_{TH} I$$

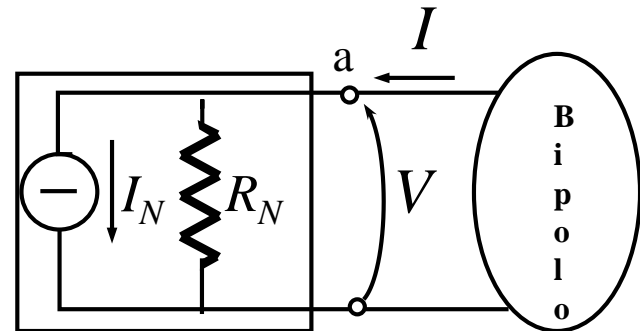
# Teorema di Norton

Una rete lineare, comunque complessa, accessibile da 2 terminali, può essere sostituita con un circuito equivalente formato da un generatore di corrente  $I_N$  in parallelo con una resistenza  $R_N$ , dove  $I_N$  è la corrente di corto circuito ai terminali e  $R_N$  è la resistenza equivalente vista agli stessi morsetti quando i generatori indipendenti sono passivati.

Rete lineare

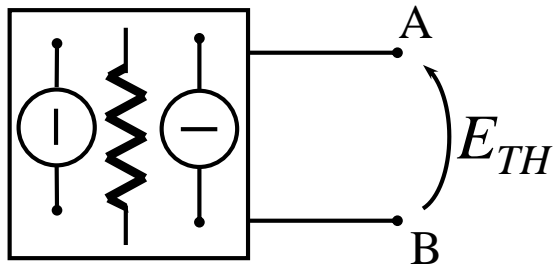


equivalente di Norton

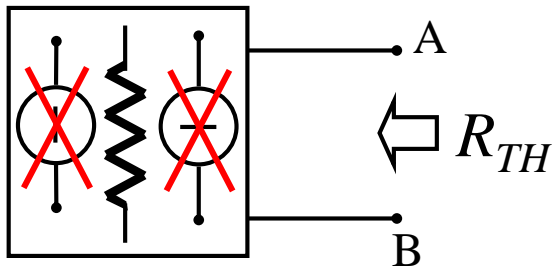


$$I = I_N + \frac{V}{R_N} = I_N + G_N \cdot V$$

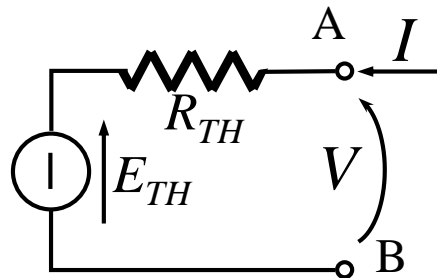
# Thevenin & Norton



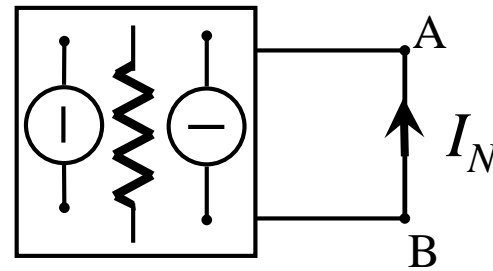
$V_{TH} = \text{tensione a vuoto}$



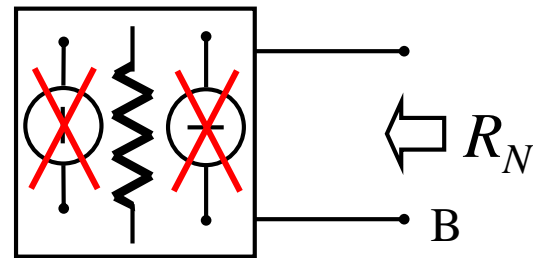
$R_{TH} = \text{resistenza del circuito passivato}$



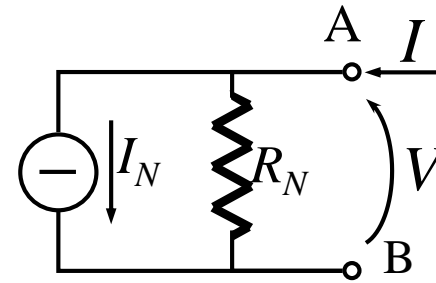
$$V = E_{TH} + R_{TH} I$$



$I_N = \text{corrente in c.to c.to}$



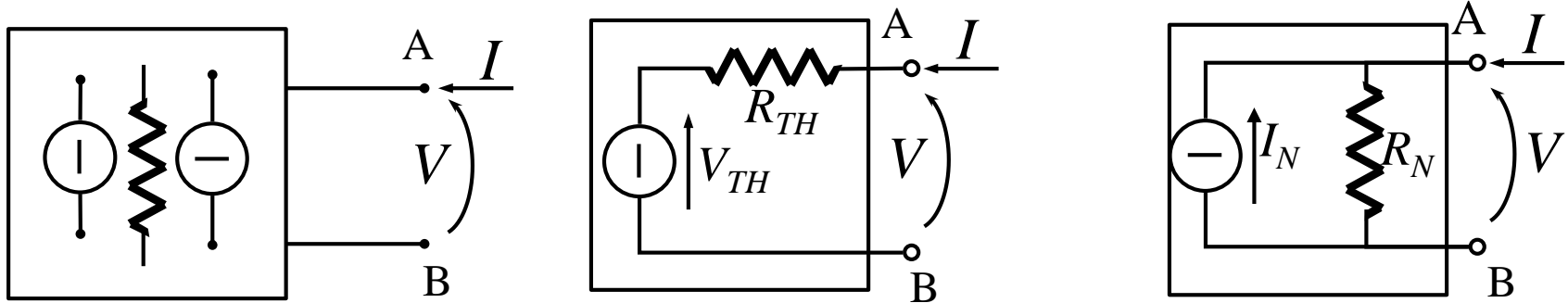
$R_N = \text{resistenza del circuito passivato}$



$$I = I_N + \frac{V}{R_N}$$



# Trasformazione della sorgente



$$R_{TH} = R_N$$

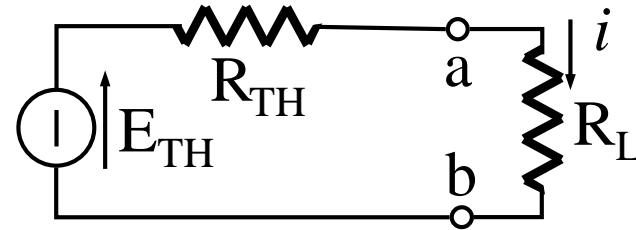
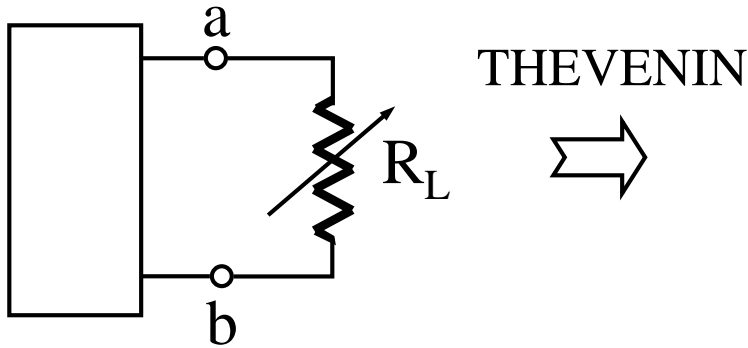
Un circuito in forma equivalente di Thévenin può generalmente essere sostituito da un circuito nella forma equivalente di Norton con un generatore di corrente  $I_N$ :

$$I_N = \frac{V_{TH}}{R_{TH}}$$

Un circuito in forma equivalente di Norton può generalmente essere sostituito da un circuito nella forma equivalente di Thévenin con un generatore di tensione  $V_{TH}$ :

$$V_{TH} = R_N \cdot I_N$$

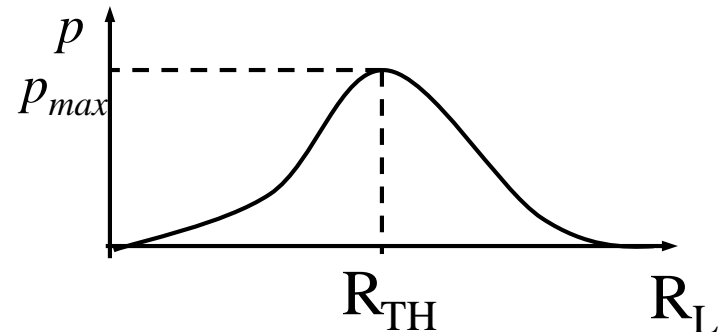
# TEOREMA DEL MASSIMO TRASFERIMENTO DI POTENZA



$$P = R_L i^2 = R_L \cdot \left( \frac{E_{TH}}{R_{TH} + R_L} \right)^2$$

$$\frac{dP}{dR_L} = E_{TH}^2 \left[ \frac{(R_{TH} + R_L)^2 - 2R_L(R_{TH} + R_L)}{(R_{TH} + R_L)^4} \right] = 0$$

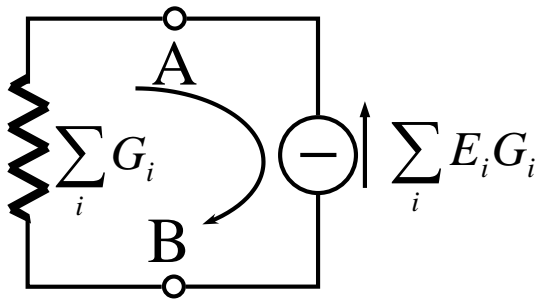
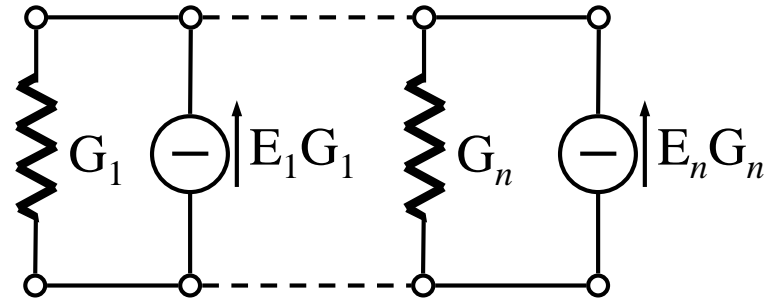
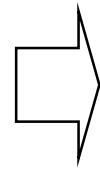
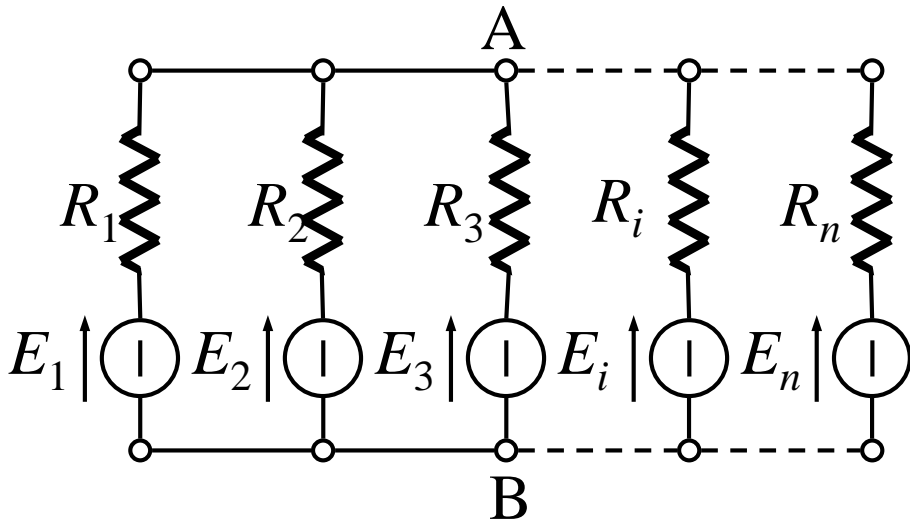
$$R_{TH} + R_L - 2R_L = 0 \Rightarrow R_L = R_{TH} \Rightarrow P_{\max} = \frac{E_{TH}^2}{4R_{TH}}$$



Se  $R_L = R_{Th}$  si ha la massima potenza trasferita al carico, perciò **il carico è sfruttato al meglio**. Questo però non pone il circuito nel suo complesso nelle condizioni di massimo rendimento, infatti:

$$P_{\text{generatore}} = E_{Th} \cdot I = E_{Th} \cdot \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_{Th}} = \frac{E_{Th}^2}{2R_{Th}} \quad \eta_{\text{circuito}} = \frac{P_C}{P_g} = \frac{E_{Th}^2}{4R_{Th}} \bigg/ \frac{E_{Th}^2}{2R_{Th}} = 0.5$$

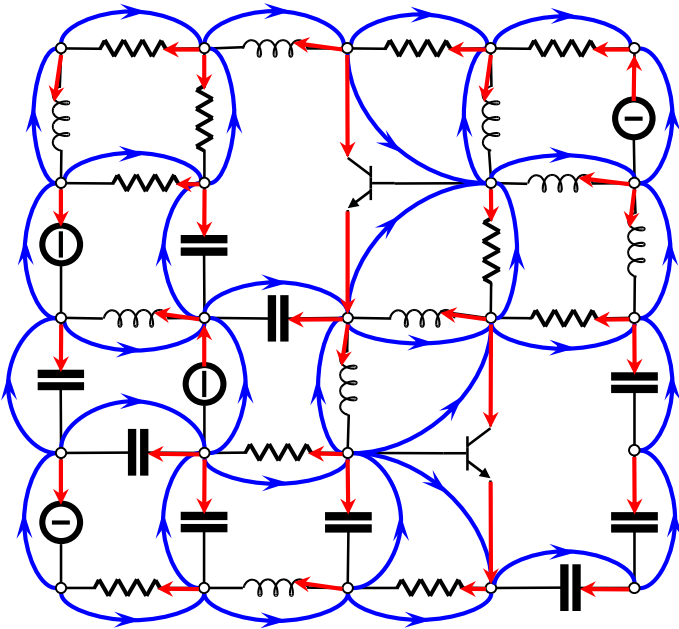
# TEOREMA DI MILLMAN



$$V_{AB} = \frac{\sum_i G_i E_i}{\sum_i G_i}$$

# Metodi di analisi

# Proprietà Topologiche



**Nodo:** punto di unione di 2 o più rami

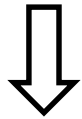
**Maglia:** percorso chiuso in cui per ogni nodo sono presi in considerazione 2 soli rami (o lati).

✓ Per ogni nodo possiamo scrivere la LKC

✓ Per ogni maglia possiamo scrivere la LKV

**2R variabili** che devono soddisfare 2 gruppi di equazioni:

Circuito con  $R$  rami e  $R$  componenti



2R variabili:

✓ R-Tensioni

✓ R-Correnti

1) Equazioni dei componenti: dipendono dalla natura dei componenti (proprietà fisiche)

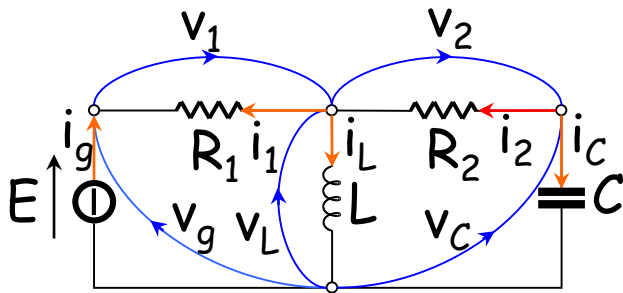
2) Leggi di Kirchhoff: non dipendono dalla natura dei componenti ma solo dalla topologia del circuito (proprietà topologiche).

# Equazioni linearmente indipendenti

Come scrivere equazioni **linearmente indipendenti**:

**LKC**: considero solo i nodi che introducono almeno una corrente nuova rispetto ai nodi considerati in precedenza

**LKV**: considero solo le maglie che introducono almeno tensione nuova rispetto alle maglie considerate in precedenza



**R=5**

**2R variabili**

**2R equazioni:**

- ✓ 5 eq Componenti
- ✓ 3 eq LKC
- ✓ 2 eq LKT

✓ LKC

$$\begin{cases} i_g + i_1 = 0 \\ -i_L - i_1 + i_2 = 0 \\ -i_C - i_2 = 0 \end{cases}$$

✓ LKV

$$\begin{cases} v_1 - v_L + v_g = 0 \\ v_2 - v_C + v_L = 0 \end{cases}$$

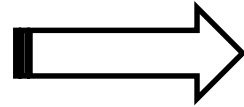
✓ Equazioni dei componenti

$$\begin{cases} v_g = E \\ v_1 = R_1 \cdot i_1 \\ v_2 = R_2 \cdot i_2 \\ v_L = L \frac{di_L}{dt} \\ i_C = C \frac{dv_C}{dt} \end{cases}$$

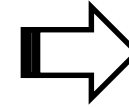
# Equazioni linearmente indipendenti

Equazioni  
dei componenti

Sostituisco in



Leggi di kirchhoff



R equazioni in  
R incognite

$$\left\{ \begin{array}{l} v_g = E \\ v_1 = R_1 \cdot i_1 \\ v_2 = R_2 \cdot i_2 \\ v_L = L \frac{di_L}{dt} \\ i_C = C \frac{dv_C}{dt} \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} i_g + i_1 = 0 \\ -i_L - i_1 + i_2 = 0 \\ -i_C - i_2 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 - v_L + v_g = 0 \\ v_2 - v_C + v_L = 0 \end{array} \right.$$

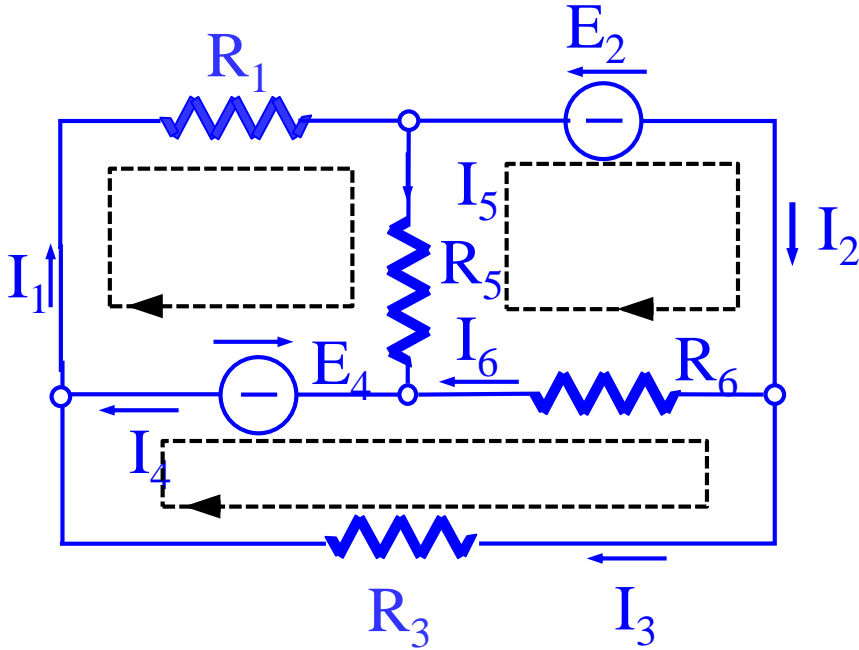
$$\left\{ \begin{array}{l} i_g + i_1 = 0 \\ -i_L - i_1 + i_2 = 0 \\ -i_C - i_2 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 \cdot i_1 - L \frac{di_L}{dt} + E = 0 \\ R_2 \cdot i_2 - \frac{1}{C} \int i_c dt + L \frac{di_L}{dt} = 0 \end{array} \right.$$

Ho la possibilità di ridurre le R equazioni alle sole LKV o alle sole LKC effettuando un **cambiamento di variabile**:

- ❖ **Correnti di maglia** al posto delle correnti di dei componenti  bastano le LKV
- ❖ **Potenziali nodali** al posto delle tensioni sui componenti  bastano le LKC

# METODO DELLE CORRENTI DI MAGLIA



$R=6$

12 variabili

2R equazioni:

✓ 6 eq Componenti

✓ 3 eq LKC

✓ 3 eq LKV

$$\begin{cases} v_1 + v_5 + E_4 = 0 \\ v_6 - v_5 + E_2 = 0 \\ v_3 - v_6 - E_4 = 0 \end{cases}$$

Equazione dei componenti

$$\begin{cases} v_1 = R_1 I_1 \\ v_3 = R_3 I_3 \\ v_5 = R_5 I_5 \\ v_6 = R_6 I_6 \end{cases}$$

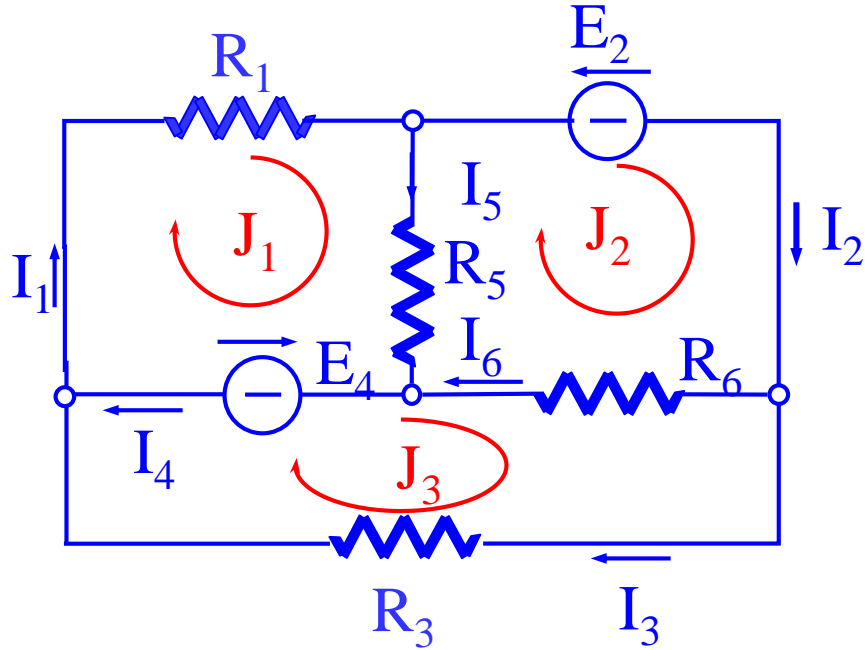
$$\begin{cases} R_1 I_1 + R_5 I_5 + E_4 = 0 \\ R_6 I_6 - R_5 I_5 + E_2 = 0 \\ R_3 I_3 - R_6 I_6 - E_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_5 = 0 \\ -I_1 + I_4 + I_3 = 0 \\ I_2 - I_6 - I_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_5 = 0 \\ -I_1 + I_4 + I_3 = 0 \\ I_2 - I_6 - I_3 = 0 \end{cases}$$



# METODO DELLE CORRENTI DI MAGLIA



*Effettuiamo un cambiamento di variabili*

$$\begin{aligned} I_1 &= J_1 \\ I_2 &= J_2 \\ I_3 &= J_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_4 &= J_1 - J_3 \\ I_5 &= J_1 - J_2 \\ I_6 &= J_2 - J_3 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} J_1 - J_2 - (J_1 - J_2) = 0 \\ -J_1 + (J_1 - J_3) + J_3 = 0 \\ J_2 - (J_2 - J_3) - J_3 = 0 \end{cases}$$

← **Le LKC sono delle identità**

$$\begin{cases} -E_4 = R_1 J_1 + R_5 (J_1 - J_2) \\ -E_2 = R_6 (J_2 - J_3) - R_5 (J_1 - J_2) \\ E_4 = R_3 J_3 - R_6 (J_2 - J_3) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_5 & -R_5 & 0 \\ -R_5 & R_5 + R_6 & -R_6 \\ 0 & -R_6 & R_3 + R_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_4 \\ -E_2 \\ E_4 \end{bmatrix}$$

# METODO DELLE CORRENTI DI MAGLIA

In generale:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1M} \\ \vdots & & & \\ R_{M1} & R_{M2} & \cdots & R_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ \vdots \\ J_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_M \end{bmatrix}$$

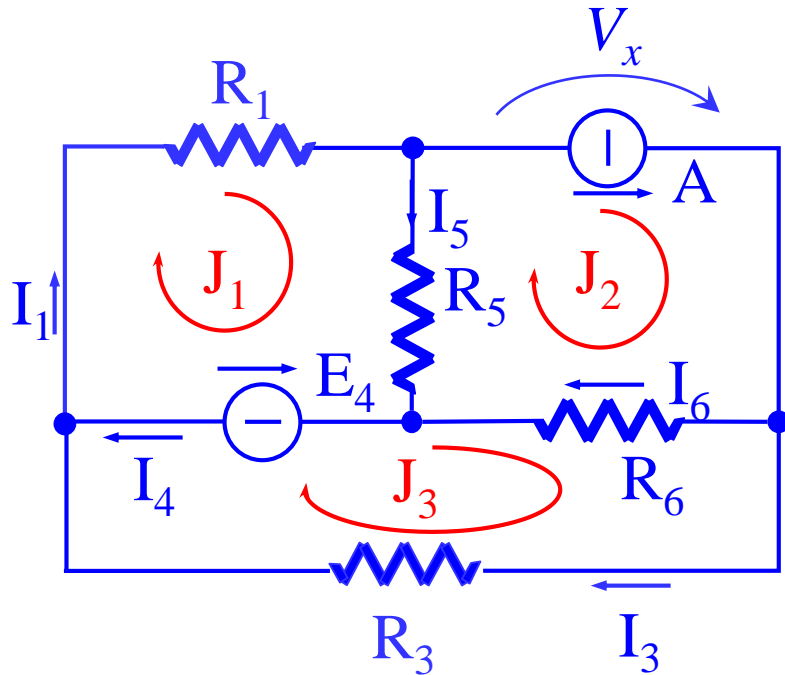
$R_{ii}$  : resistenza propria della maglia  $i$ -esima, data somma delle resistenze dei rami che fanno parte della maglia

$R_{ij}$  : mutua resistenza tra la maglia  $i$ -esima e la maglia  $j$ -esima, somma delle resistenze dei rami comuni alle  $i$  e  $j$

$J_i$  : corrente di maglia  $i$ -esima

$E_i$  : componente  $i$ -esima del vettore termini noti, somma algebrica delle tensioni ai capi dei generatori.

# METODO DELLE CORRENTI DI MAGLIA



È presente un generatore di corrente nota  $A$  e tensione incognita  $V_x$ , il sistema risolvente è:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_5 & -R_5 & 0 \\ -R_5 & R_5 + R_6 & -R_6 \\ 0 & -R_6 & R_3 + R_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_4 \\ V_x \\ E_4 \end{bmatrix}$$

Il generatore di corrente definisce  $J_2=A$ , il sistema quindi si modifica diventando:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_5 & 0 \\ 0 & R_3 + R_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_4 + R_5 \cdot A \\ E_4 + R_6 \cdot A \end{bmatrix}$$

Se ci sono  $m$  generatori di corrente che definiscono  $m$  correnti di maglia, le equazioni indipendenti necessarie per risolvere il sistema si riducono di  $m$ .

# METODO DELLE CORRENTI DI MAGLIA

In generale:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1M} \\ \vdots & & & \\ R_{M1} & R_{M2} & \cdots & R_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ \vdots \\ J_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum E_{V1} \\ \vdots \\ \sum E_{VM} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum E_{I1} \\ \vdots \\ \sum E_{IM} \end{bmatrix}$$

$R_{ii}$  : resistenza propria della maglia  $i$ -esima, data somma delle resistenze dei rami che fanno parte della maglia

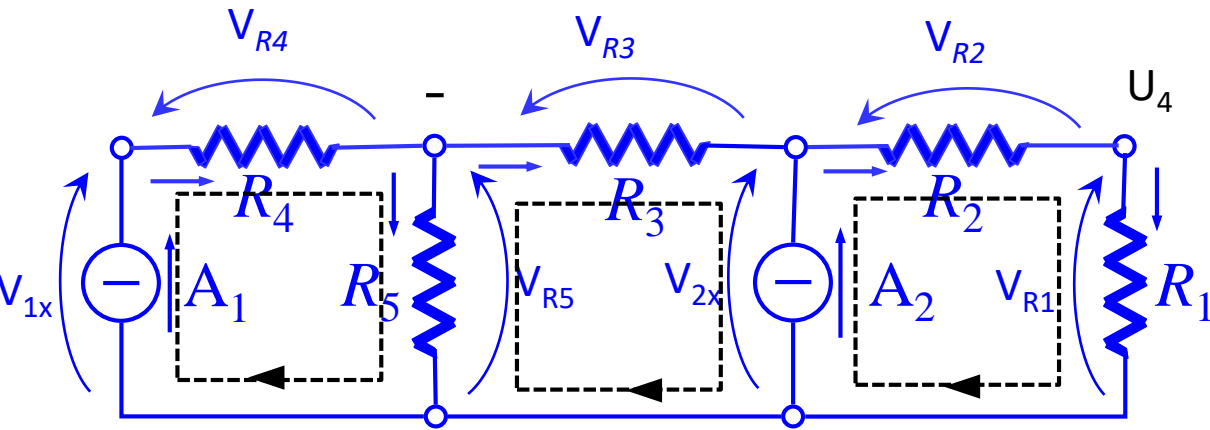
$R_{ij}$  : mutua resistenza tra la maglia  $i$ -esima e la maglia  $j$ -esima, somma delle resistenze dei rami comuni alle  $i$  e  $j$

$J_i$  : corrente di maglia  $i$ -esima

$\sum E_{Vi}$  : somma algebrica delle tensioni note ai capi dei generatori  
tensione della maglia  $i$ -esima

$\sum E_{Ii}$  : somma algebrica delle tensioni incognite ai capi dei generatori corrente della maglia  $i$ -esima.

# METODO DEI POTENZIALI NODALI



$R=7$

14 variabili

2\*7 equazioni:

- ✓ 7 eq Componenti
- ✓ 4 eq LKC
- ✓ 3 eq LKT

$$\begin{cases} A_1 - I_{R4} = 0 \\ I_{R4} - I_{R3} - I_{R5} = 0 \\ I_{R3} + A_2 - I_{R2} = 0 \\ I_{R2} - I_{R1} = 0 \end{cases}$$

Equazione dei componenti

$$\begin{cases} I_{R1} = G_1 V_{R1} \\ I_{R2} = G_2 V_{R2} \\ I_{R3} = G_3 V_{R3} \\ I_{R4} = G_4 V_{R4} \\ I_{R5} = G_5 V_{R5} \end{cases}$$

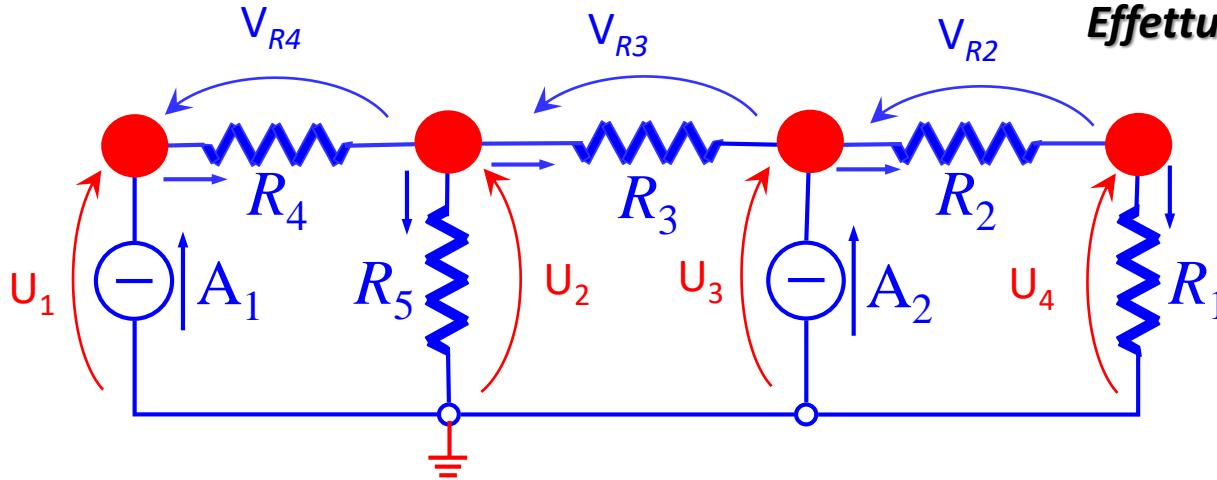
$$\begin{cases} A_1 - G_4 V_{R4} = 0 \\ G_4 V_{R4} - G_3 V_{R3} - G_5 V_{R5} = 0 \\ G_3 V_{R3} + A_2 - G_2 V_{R2} = 0 \\ G_2 V_{R2} - G_1 V_{R1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_{1x} - V_{R4} - V_{R5} = 0 \\ V_{R5} - V_{R3} - V_{2x} = 0 \\ V_{2x} - V_{R2} - V_{R1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_{1x} - V_{R4} - V_{R5} = 0 \\ V_{R5} - V_{R3} - V_{2x} = 0 \\ V_{2x} - V_{R2} - V_{R1} = 0 \end{cases}$$

# METODO DEI POTENZIALI NODALI

*Effettuiamo un cambiamento di variabili*



$$\begin{aligned} V_1 &= U_1 \\ V_{R5} &= U_2 \\ V_2 &= U_3 \\ V_{R1} &= U_4 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} U_1 - (U_1 - U_2) + U_2 = 0 \\ U_2 - (U_2 - U_3) - U_3 = 0 \\ U_3 - (U_3 - U_4) - U_4 = 0 \end{cases}$$

**Le LKV**

**sono delle identità**

$$\begin{aligned} V_{R4} &= U_1 - U_2 \\ V_{R3} &= U_2 - U_3 \\ V_{R2} &= U_3 - U_4 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A_1 - G_4(U_1 - U_2) = 0 \\ G_4(U_1 - U_2) - G_3(U_2 - U_3) - G_5U_2 = 0 \\ G_3(U_2 - U_3) + A_2 - G_2(U_3 - U_4) = 0 \\ G_2(U_3 - U_4) - G_1U_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} G_4 & -G_4 & 0 & 0 \\ -G_4 & G_3 + G_4 + G_5 & -G_3 & 0 \\ 0 & -G_3 & G_2 + G_1 & -G_2 \\ 0 & 0 & -G_2 & G_1 + G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \\ A_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# METODO DEI POTENZIALI NODALI

In generale:

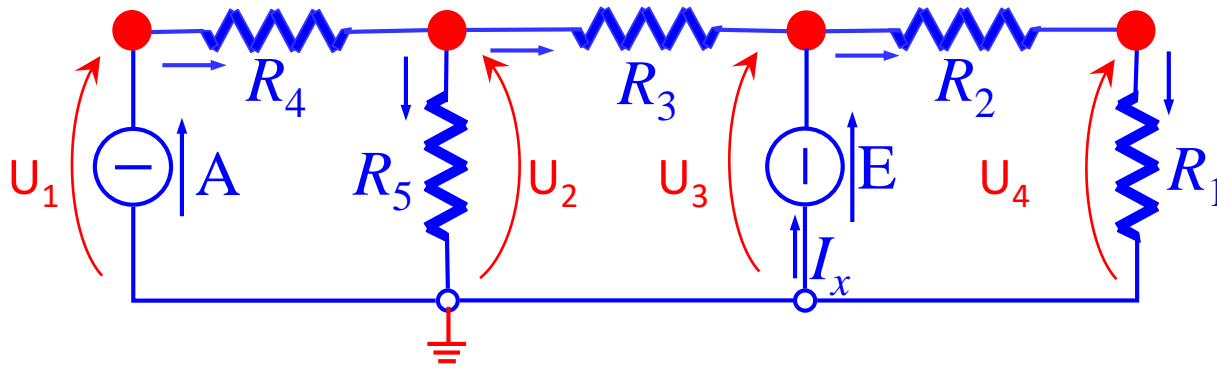
$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1N} \\ \vdots & & & \\ G_{N1} & G_{N2} & \cdots & G_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_N \end{bmatrix}$$

$G_{ii}$  : conduttanza propria del nodo  $i$ -esimo , data somma delle conduttanze che confluiscono al nodo.

$G_{ij}$  : conduttanza mutua tra i nodi  $i$  e  $j$ , somma delle conduttanze dei rami che uniscono il comuni al  $i$  e  $j$

$A_i$  : componente  $i$ -esima del vettore termini noti, somma algebrica delle correnti dei generatori che confluiscono al nodo  $i$ .

# METODO DEI POTENZIALI NODALI



È presente un generatore di tensione di valore noto  $E$  e corrente incognita  $I_x$ , il sistema risolvente è:

$$\begin{bmatrix} G_4 & -G_4 & 0 & 0 \\ -G_4 & G_3 + G_4 + G_5 & -G_3 & 0 \\ 0 & -G_3 & G_2 + G_3 & -G_2 \\ 0 & 0 & -G_2 & G_1 + G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ 0 \\ I_x \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il generatore di corrente definisce  $U_3 = E$ , il sistema quindi si modifica diventando:

Se ci sono  $m$  generatori di tensione che definiscono  $m$  potenziali nodali le equazioni indipendenti necessarie per risolvere il sistema si riduce di  $m$ .

$$\begin{bmatrix} G_4 & -G_4 & 0 \\ -G_4 & G_3 + G_4 + G_5 & 0 \\ 0 & 0 & G_1 + G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ G_3 \cdot E \\ G_2 \cdot E \end{bmatrix}$$



# METODO DEI POTENZIALI NODALI

In generale:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & -G_{12} & \cdots & -G_{1N} \\ \vdots & & & \\ -G_{N1} & -G_{N2} & \cdots & G_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum A_{I1} \\ \vdots \\ \sum A_{IN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum A_{V1} \\ \vdots \\ \sum A_{VN} \end{bmatrix}$$

$G_{ii}$  : conduttanza propria del nodo  $i$ -esimo, somma delle conduttanze che confluiscono al nodo.

$G_{ij}$  : conduttanza mutua tra i nodi  $i$  e  $j$ , somma delle conduttanze dei rami che uniscono il comuni al  $i$  e  $j$

$U_i$  : potenziale del nodo  $i$ -esimo

$\sum A_{Ii}$  : somma algebrica delle correnti note provenienti al nodo  $i$ -esimo dai generatori di corrente

$\sum A_{Vi}$  : somma algebrica delle correnti incognite provenienti al nodo  $i$ -esimo dai generatori di tensione.

# Reti in Regime Sinusoidale

# Reti in Regime Sinusoidale

Le reti in regime sinusoidale sono delle reti nelle quali le grandezze in gioco variano al variare del tempo con legge sinusoidale.

Le reti elettriche in alta potenza sono alimentate con tensione sinusoidale con frequenza di:

- 50 Hz in Europa
- 60 Hz in USA.

Se una rete lineare è alimentata da un generatore sinusoidale

$$v(t) = V_M \sin(\omega t + \phi)$$

risulteranno sinusoidali tutte le tensioni e tutte le correnti che si stabiliranno nei diversi rami del circuito.

**IN UNA RETE ASSOLUTAMENTE STABILE, IL REGIME SINUSOIDALE VIENE CONSEGUITO DA TUTTE LE VARIABILI DELLA RETE**

# Reti in Regime Sinusoidale

$$v(t) = V_M \sin(\omega t + \varphi)$$

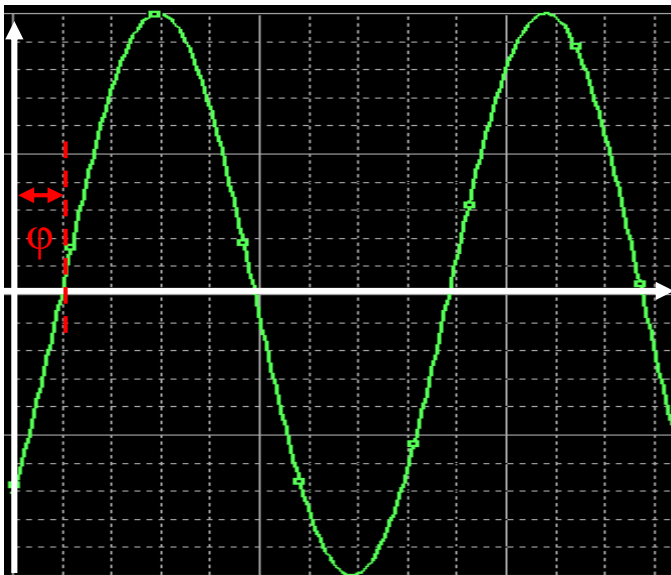
➤  $V_M$  ampiezza o valore massimo di  $v(t)$

➤  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \left[ \frac{rad}{s} \right]$  pulsazione

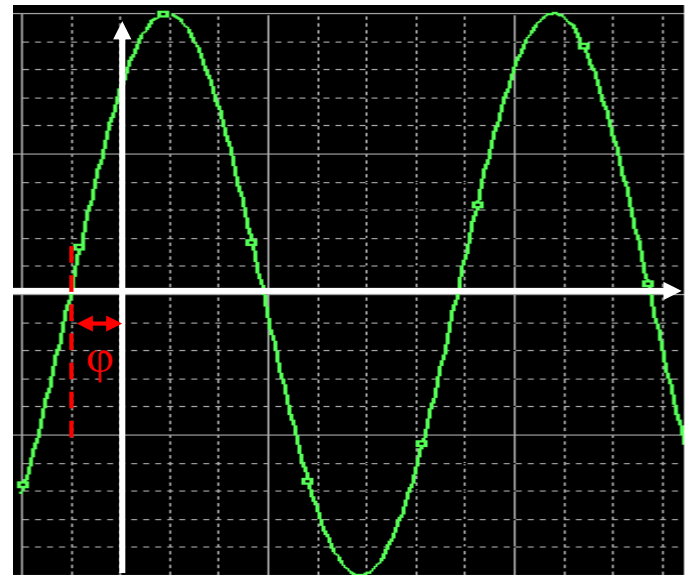
➤  $\varphi [rad]$  fase iniziale a cui corrisponde  $t_\varphi$

$$\begin{cases} t_\varphi = \frac{\varphi}{\omega} \left[ \frac{rad}{\frac{rad}{s}} \right] = [s] \\ \varphi = \omega \cdot t_\varphi \end{cases}$$

Sinusoide con  $\varphi < 0$



Sinusoide con  $\varphi > 0$



# FASORI

Il **fasore** è un vettore con il quale si rappresenta l'ampiezza e la fase di una sinusoidale.

La rappresentazione di una sinusoidale per mezzo di dei fasori si basa sull'identità di Eulero:

$$e^{\pm j\alpha} = \cos\alpha \pm j\sin\alpha$$
$$\cos\alpha = \operatorname{Re}\{e^{j\alpha}\} \quad \sin\alpha = \operatorname{Im}\{e^{j\alpha}\}$$

Esprimiamo una sinusoidale usando l'identità di Eulero:

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}\{V_M e^{j(\omega t + \varphi)}\} = \operatorname{Re}\{V_M e^{j\omega t} e^{j\varphi}\} \Rightarrow v(t) = \operatorname{Re}(\bar{V} e^{j\omega t})$$

$$v(t) = V_M \sin(\omega t + \varphi) = \operatorname{Im}\{V_M e^{j(\omega t + \varphi)}\} = \operatorname{Im}\{V_M e^{j\omega t} e^{j\varphi}\} \Rightarrow v(t) = \operatorname{Im}(\bar{V} e^{j\omega t})$$

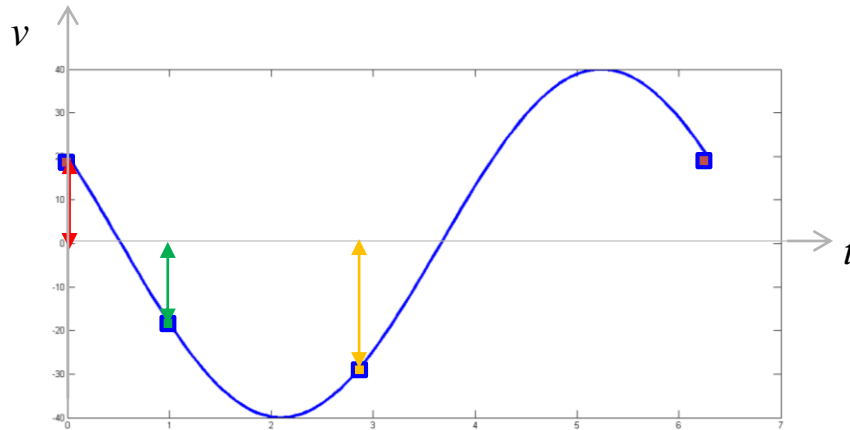
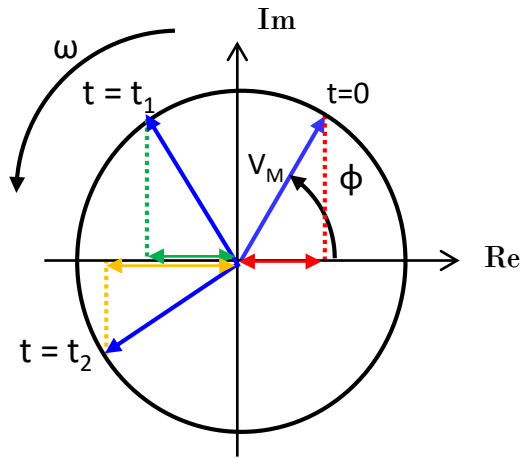
Dove :

$$\mathbf{V} = \bar{V} = V_M e^{j\varphi} = V_M \angle \varphi \quad \text{Fasore della funzione sinusoidale } v(t)$$

$$V(j\omega t) = V_M e^{j(\omega t + \varphi)} = \bar{V} e^{j\omega t} \quad \underline{\text{Vettore rotante}} \text{ con velocità angolare } \omega$$

# FASORI

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi) = \Re\{\bar{V} e^{j\omega t}\}$$

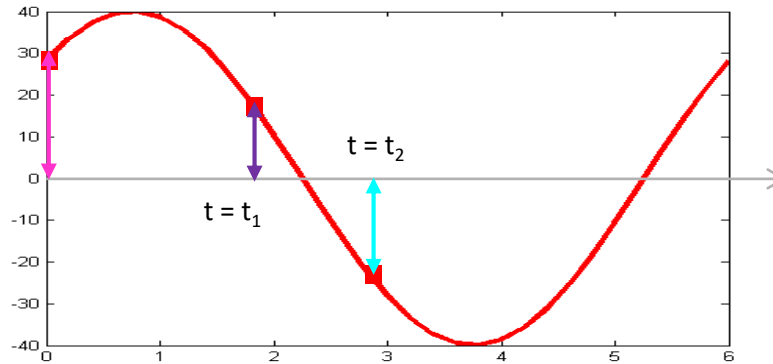
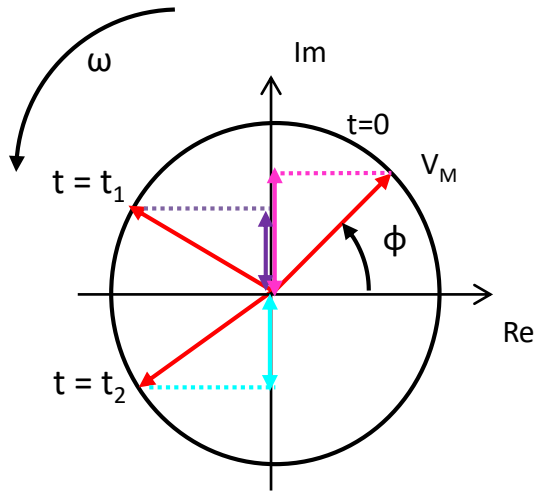


$v(t)$  Può essere interpretata come la proiezione del vettore rotante  $\mathbf{V}e^{j\omega t}$  sull'asse reale.

Per  $t=0$  il vettore rotante coincide con il fasore  $\mathbf{V}$  della sinusoide, perciò il vettore rotante può essere considerato come un fasore rotante.

# FASORI

$$v(t) = V_M \sin(\omega t + \varphi) = \text{Im}\{\bar{V} e^{j\omega t}\}$$



$v(t)$  può essere interpretata come la proiezione del vettore rotante  $\bar{V}e^{j\omega t}$  sull'asse immaginario

$$v(t) = V_M \sin(\omega t + \varphi) = \text{Im}\{\bar{V}e^{j\omega t}\}$$

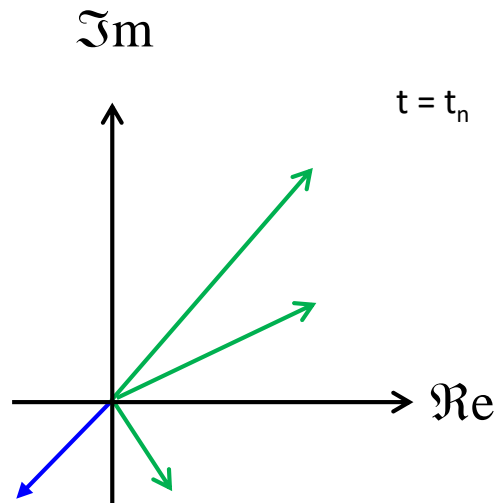
$$V_M \sin(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}) = \text{Re}\{V_M e^{j\omega t} e^{j(\varphi - \frac{\pi}{2})}\} = \text{Re}\{\bar{V} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{\bar{V}_1 e^{j\omega t}\}$$

con  $\bar{V}_1 = \bar{V} e^{-j\frac{\pi}{2}}$

$v(t)$  può anche essere interpretata come la proiezione sull'asse reale del vettore rotante  $\bar{V}_1 e^{j\omega t}$  che ha lo stesso modulo di  $V$  ma è in ritardo di  $90^\circ$ .

# FASORI

Una funzione sinusoidale può essere espressa come un fasore ed il termine  $e^{j\omega t}$  si considera implicito → **dominio delle frequenze**

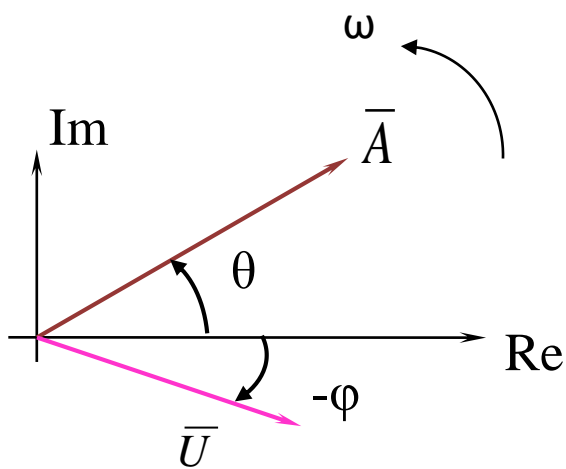


Se le grandezze sono iso-frequenziali, dopo un certo tempo, l'istante iniziale perde significato ed è superfluo indicare il riferimento degli assi. L'importante è che le diverse grandezze fasoriali stiano in un determinato rapporto di fase tra loro.



# FASORI

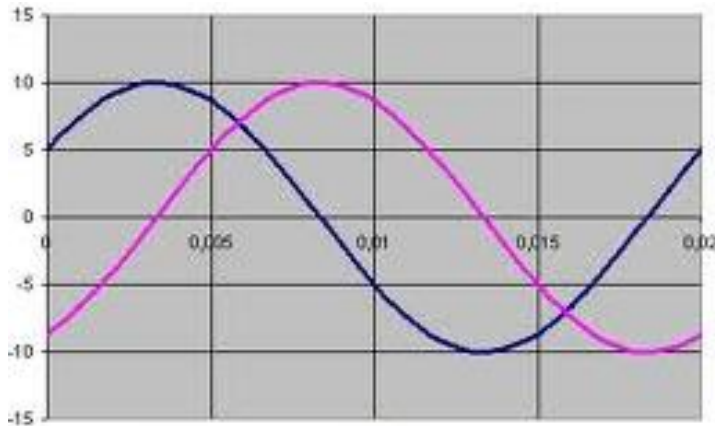
## Diagramma fasoriale o vettoriale



$\bar{U}, \bar{A}$  sono due fasori

Convenzionalmente:

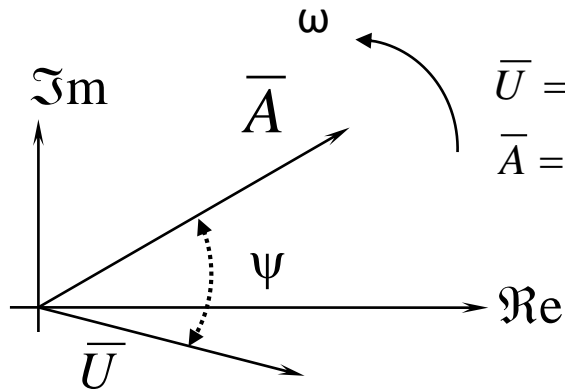
ANTICIPO  $\rightarrow$  ANGOLO POSITIVO  
RITARDO  $\rightarrow$  ANGOLO NEGATIVO



$$A(t) = 10 \sin(\omega t + \theta)$$

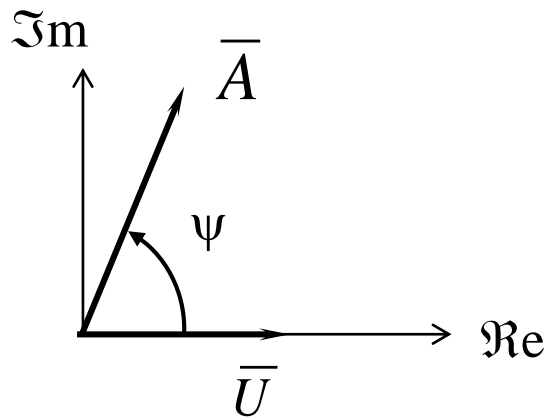
$$U(t) = 10 \sin(\omega t - \varphi)$$

# FASORI

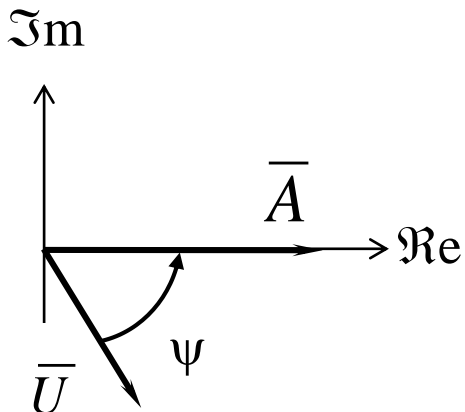


CASI PARTICOLARI:

- a)  $\psi = \phi - \theta = \pi / 2$  i fasori sono in quadratura
- b)  $\psi = \pi$  i fasori sono in opposizione di fase
- c)  $\psi = 0$  i fasori sono in fase



✓ se prendiamo  $\bar{U}$  come riferimento  $\bar{A}$  è in anticipo rispetto a  $\bar{U}$



✓ Se prendiamo  $\bar{A}$  come riferimento  $\bar{U}$  è in ritardo rispetto ad  $\bar{A}$

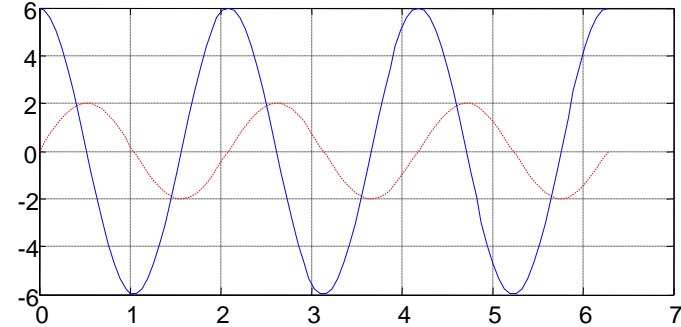
# FASORI

$$v(t) = 2 \cdot \sin(\omega t) = 2 \operatorname{Im}\{e^{j\omega t}\}$$

$$v'(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d[2 \cdot \sin(\omega t)]}{dt} = 2\omega \cdot \cos \omega t$$

$$v'(t) = 2\omega \cdot \cos \omega t = 2\omega \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 2\omega \cdot \operatorname{Im}\left\{e^{j\omega t} e^{j\frac{\pi}{2}}\right\}$$

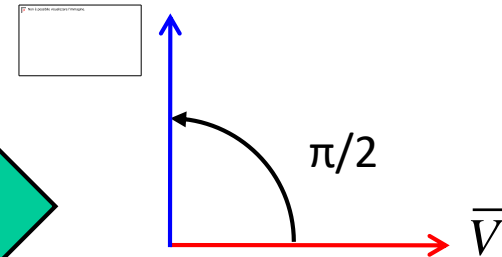
$$\varphi_v = 0; \quad \varphi_{v'} = \frac{\pi}{2}$$



Se prendiamo il fasore di  $v(t)$  come riferimento:

$$\psi = \varphi_{v'} - \varphi_v = \frac{\pi}{2} \quad \text{sfasamento di } v' \text{ rispetto a } v$$

$v'(t)$  è in quadratura in anticipo rispetto a  $v(t)$



**DOMINIO DEL TEMPO**

**DOMINIO DELLA FREQUENZA**

$$\frac{dv(t)}{dt}$$

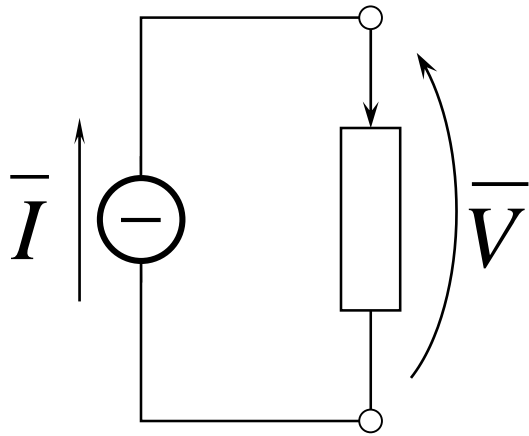
$$j\omega \bar{V}$$

$$\int v(t) dt$$

$$\frac{\bar{V}}{j\omega}$$

# Metodo Simbolico

EQUAZIONE DEI COMPONENTI



$$\dot{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} \quad \text{prende il nome di **IMPEDENZA**}$$

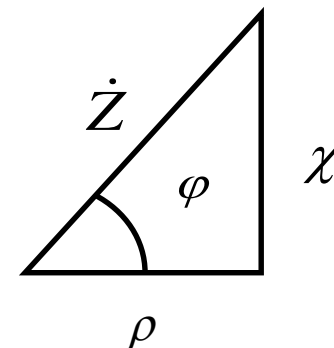
$$\bar{V} = \dot{Z} \cdot \bar{I} \quad e \quad \bar{I} = \frac{\bar{V}}{\dot{Z}}$$

L'impedenza è un numero complesso, non è un fasore perché non corrisponde ad una quantità che varia sinusoidalmente.

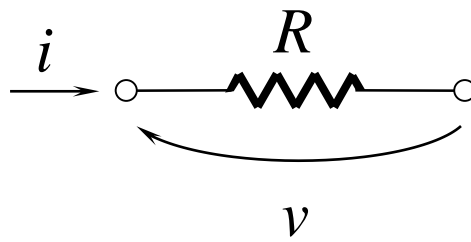
**TRIANGOLO DELLE IMPEDENZE**

$$\dot{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{V}{I} \angle \varphi_v - \varphi_i = Z \angle \varphi = \rho + j\chi$$

$$\tan \varphi = \arctan \frac{\chi}{\rho}$$



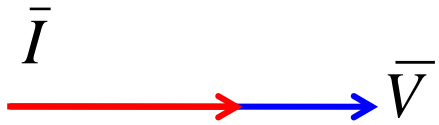
# RESISTORE



$$v = R \cdot i \Rightarrow \bar{V} = R \cdot \bar{I}$$

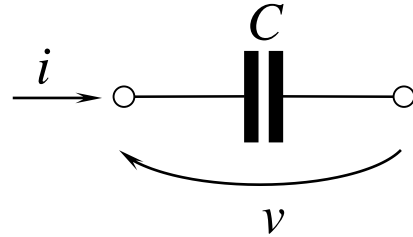
$$\dot{z} = R \quad \dot{y} = \frac{1}{R} = G$$

Diagramma fasoriale



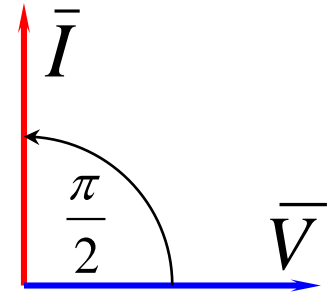
$\bar{I}$  è in fase con  $\bar{V}$

# CAPACITORE



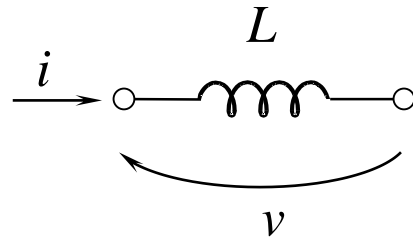
$$i = C \frac{dv}{dt} \Rightarrow \bar{I} = j\omega C \cdot \bar{V}$$

$$\frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \dot{Z} = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} = -jX_c \Rightarrow \dot{y} = j\omega C$$



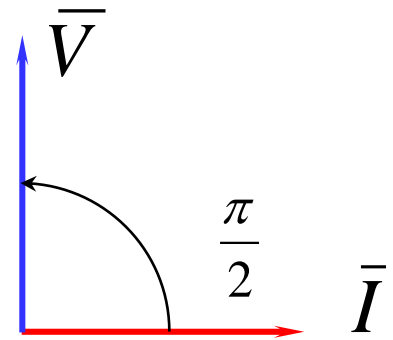
$\bar{I}$  è in anticipo di  $\pi/2$  rispetto a  $\bar{V}$

# INDUTTORE



$$v = L \frac{di}{dt} \Rightarrow \bar{V} = j\omega L \cdot \bar{I}$$

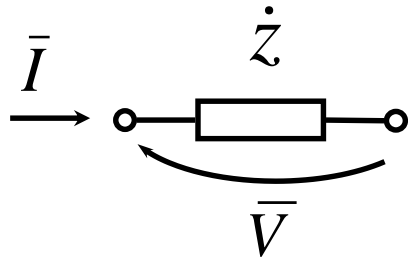
$$\frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \dot{Z} = j\omega L = jX_L \quad \dot{y} = \frac{1}{j\omega L}$$



$\bar{I}$  è in ritardo di  $\pi/2$  rispetto a  $\bar{V}$

# Metodo Simbolico

## Impedenza generica



$$\dot{Z} = Z \angle \varphi = Z \cos \varphi + j Z \sin \varphi \quad [\Omega]$$

$$\operatorname{Re}(\dot{Z}) = Z \cos \varphi = R \quad [\Omega] \quad \text{resistenza}$$

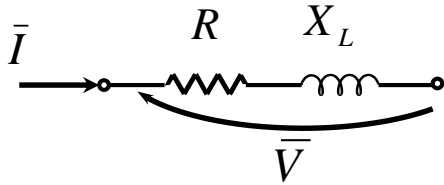
$$\operatorname{Im}(\dot{Z}) = Z \sin \varphi = X \quad [\Omega] \quad \text{reattanza} \quad \left\{ \begin{array}{l} X_L = \omega L \text{ induttiva} \\ X_C = \frac{1}{\omega C} \text{ capacitiva} \end{array} \right.$$

Esiste l'inversa dell'impedenza e si chiama **AMMETTENZA**:

$$\dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}} = \frac{1}{Z} \angle -\varphi = G + jB \quad [\Omega^{-1}] \quad \left\{ \begin{array}{l} G = \operatorname{Re}(\dot{Y}) \quad [\Omega^{-1}] \text{ conduttanza, } G \neq \frac{1}{R} \\ B = \operatorname{Im}(\dot{Y}) \quad [\Omega^{-1}] \text{ suscettanza, } B \neq \frac{1}{X} \end{array} \right.$$

# Metodo Simbolico

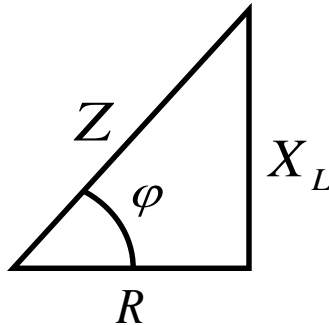
## Ohmico-induttiva



$$\dot{Z} = R + j\omega L = Z \angle \varphi$$

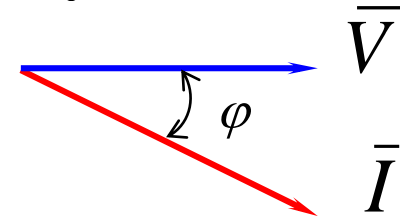
$$\varphi = \arctg \frac{\omega L}{R} > 0$$

### TRIANGOLO DELLE IMPEDENZE



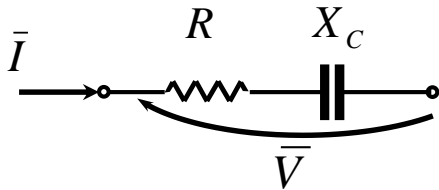
### DIAGRAMMA FASORIALE

$$\frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{V \angle \varphi_V}{I \angle \varphi_I} = Z \angle \varphi \Rightarrow \varphi_V - \varphi_I = \varphi > 0$$



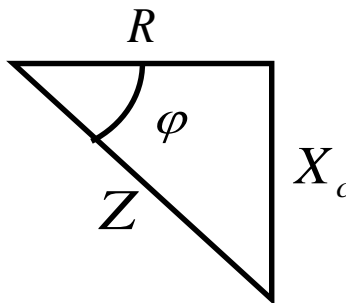
$\bar{I}$  è in ritardo di  $\varphi$  rispetto a  $\bar{V}$

## ohmico-capacitiva

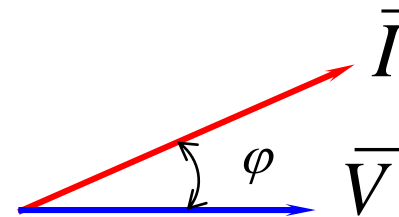


$$\dot{Z} = R - j \frac{1}{\omega C}$$

$$\varphi = \arctg \frac{\omega C}{R} < 0$$

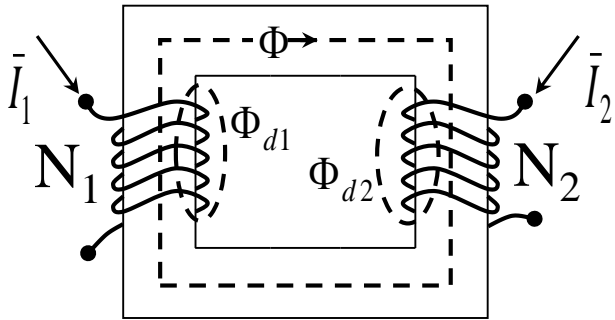


$$\frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{V \angle \varphi_V}{I \angle \varphi_I} = Z \angle \varphi \Rightarrow \varphi_V - \varphi_I = \varphi < 0$$



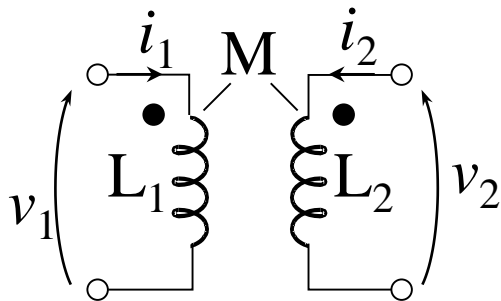
$\bar{I}$  è in anticipo di  $\varphi$  rispetto a  $\bar{V}$

# MUTUA INDUTTANZA



$$\begin{cases} v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

Nel caso di elemento passivo:



$$\begin{cases} R_1 = 0; R_2 = 0 \\ L_1 \geq 0; L_2 \geq 0 \\ |M| \leq \sqrt{L_1 \cdot L_2} \end{cases}$$

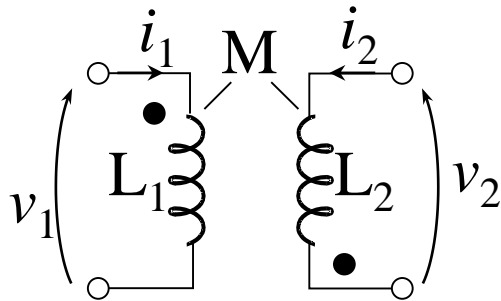
CONVENZIONE DEI PUNTINI:

La caduta di tensione su un induttore provocata dalla corrente che scorre nell'altro induttore è **concorde** con quella provocato dalla propria corrente se le due correnti **si trovano nella stessa posizione (entrambe entranti o entrambe uscenti) rispetto ai suddetti puntini**



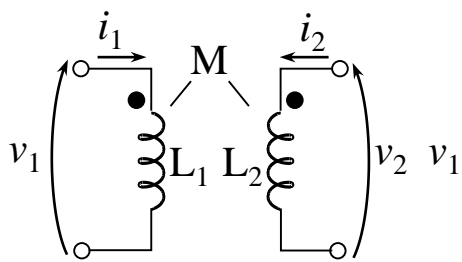
# MUTUA INDUTTANZA

La caduta di tensione provocata dalla corrente che scorre nell'altro induttore è **discorde** con quella provocato dalla propria corrente se le due correnti **non si trovano nella stessa posizione (una entrante e l'altra uscente) rispetto ai suddetti puntini**

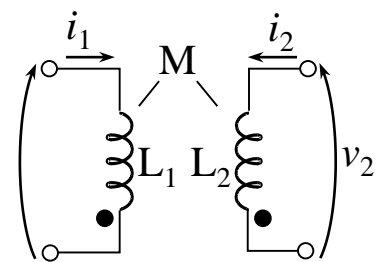


$$\begin{cases} v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = -M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

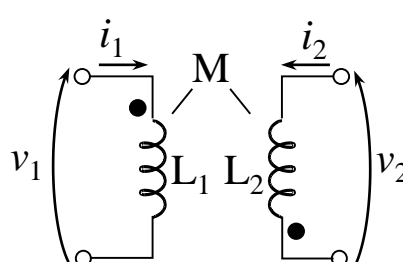
Esempi:



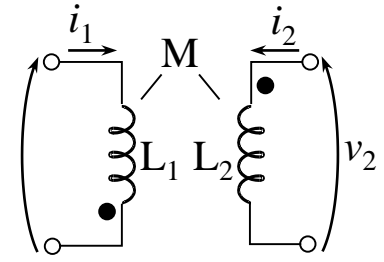
a)  $L_{1,2} > 0, M > 0$



b)  $L_{1,2} > 0, L > M > 0$

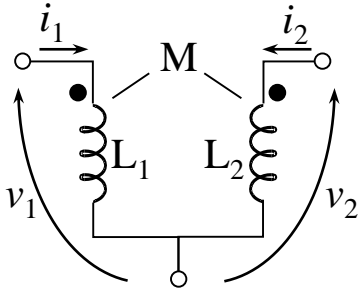


c)  $L_{1,2} > 0, M < 0$



d)  $L_{1,2} > 0, M < 0$

# MUTUA INDUTTANZA

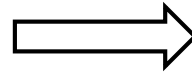


$$\text{Hp: } \begin{cases} R_1 = 0 & R_2 = 0 \\ M_{12} = M_{21} = M; & L_1 L_2 - M^2 \geq 0 \end{cases}$$

La mutua a 3 terminali ha le stesse equazioni di quella a 4 terminali

dominio delle tempo:

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{21} \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$



dominio delle frequenze:

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = j\omega L_1 \bar{I}_1 + j\omega M_{12} \bar{I}_2 \\ \bar{V}_2 = j\omega L_2 \bar{I}_2 + j\omega M_{21} \bar{I}_1 \end{cases}$$

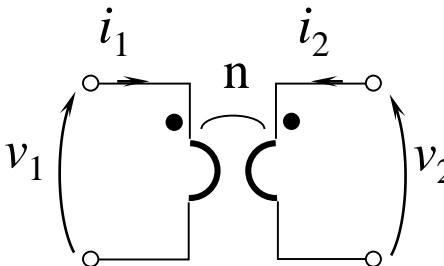
La mutua induttanza **non funziona in regime stazionario**

Coefficiente di Accoppiamento  $k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (k \leq 1)$

1-k è la porzione di flusso disperso

# TRASFORMATORE IDEALE

Nel caso di mutuo accoppiamento in cui  $k=1$  (accoppiamento stretto):


$$\begin{cases} v_1 = n \cdot v_2 \\ i_1 = -\frac{1}{n} \cdot i_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{V}_1 = n \bar{V}_2 \\ \bar{I}_1 = -\frac{1}{n} \bar{I}_2 \end{cases} \quad \mathbf{n} = \text{rapporto di trasformazione}$$

Il trasformatore ideale è un componente **due porte**:

- trasparente alle potenze (non utilizza o genera potenza)
- **passivo non dissipativo**

$$p(t) = v_1 i_1 + v_2 i_2 = v_1 i_1 + \frac{v_1}{n} (-n \cdot i_1) = 0$$

- ✓ non si possono imporre contemporaneamente le 2 tensioni o le 2 correnti
- ✓ **l'utilizzo naturale del trasformatore vede un generatore in una porta ed un utilizzatore nell'altra.**

# Metodo simbolico

## PRINCIPI DI KIRCHHOFF

Dominio del Tempo

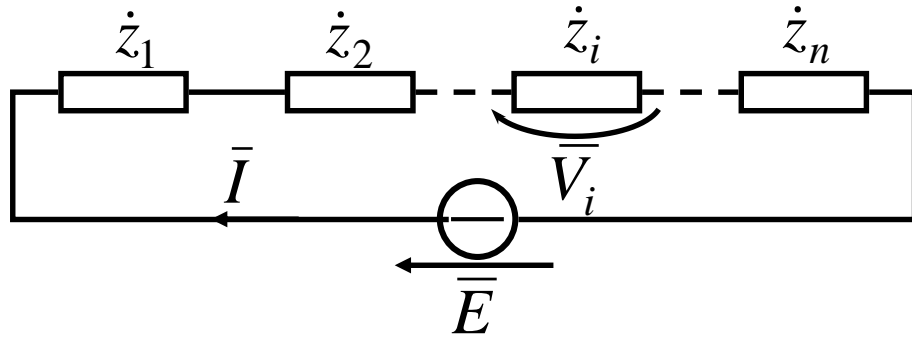
$$\begin{cases} \sum v(t) = 0 \\ \sum i(t) = 0 \end{cases}$$

Dominio della Frequenza

$$\begin{cases} \sum \bar{v} = 0 \\ \sum \bar{i} = 0 \end{cases}$$

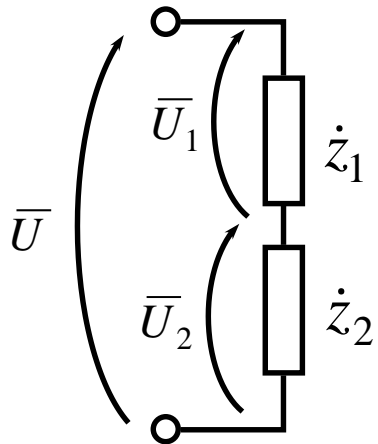
# PARTITORI

PARTITORE DI TENSIONE:



$$\begin{cases} \bar{V}_i = \dot{z}_i \cdot \bar{I} \\ \bar{E} = \left( \sum_i \dot{z}_i \right) \cdot \bar{I} \end{cases} \Rightarrow \bar{V}_i = \bar{E} \cdot \frac{\dot{z}_i}{\sum_i \dot{z}_i}$$

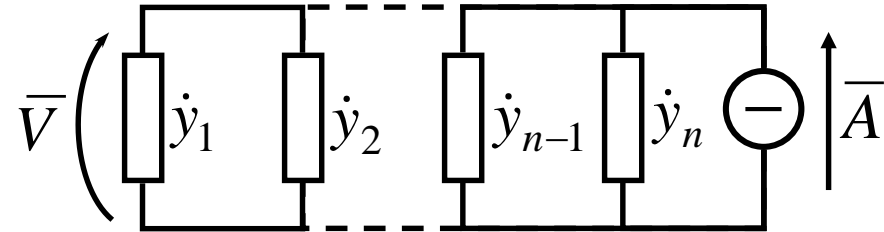
$n = 2$



$$\bar{U}_1 = \bar{U} \cdot \frac{\dot{z}_1}{\dot{z}_1 + \dot{z}_2}$$

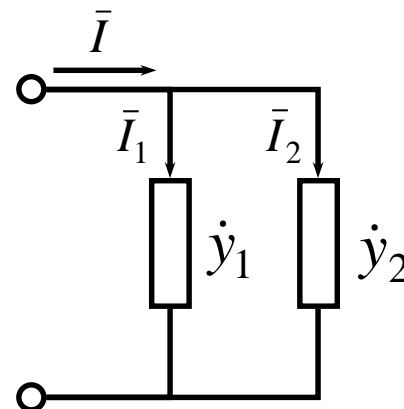
$$\bar{U}_2 = \bar{U} \cdot \frac{\dot{z}_2}{\dot{z}_1 + \dot{z}_2}$$

PARTITORE DI CORRENTE:



$$\begin{cases} \bar{I}_i = \dot{y}_i \cdot \bar{V} \\ \bar{A} = \left( \sum_i \dot{y}_i \right) \cdot \bar{V} \end{cases} \Rightarrow \bar{I}_i = \bar{A} \cdot \frac{\dot{y}_i}{\sum_i \dot{y}_i}$$

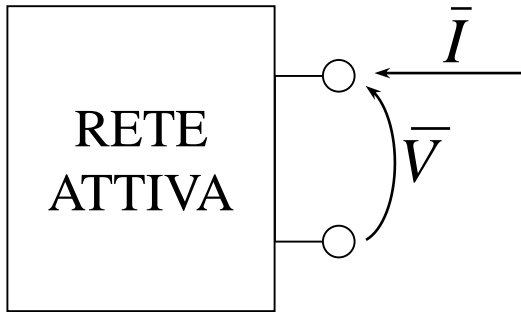
$n = 2$



$$\bar{I}_1 = \bar{I} \cdot \frac{\dot{y}_1}{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}$$

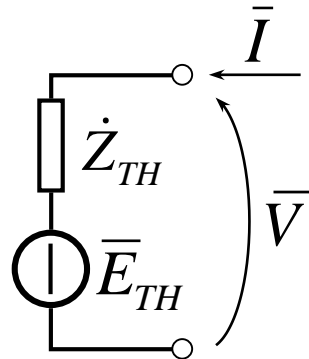
$$\bar{I}_2 = \bar{I} \cdot \frac{\dot{y}_2}{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}$$

# TEOREMI DI THEVENIN E NORTON



Rete attiva costituita da componenti lineari tempo-invarianti

**THEVENIN**

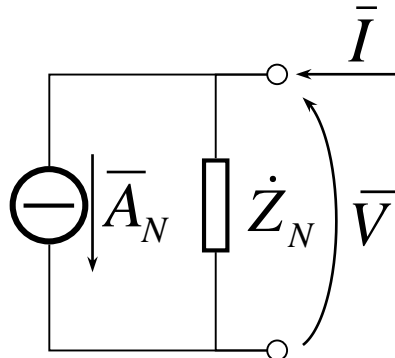


EQUIVALENTE CIRCUITALE

$$\bar{V} = \dot{Z}_{TH} \bar{I} + \bar{E}_{TH}$$

Il duale è il teorema di Norton

**NORTON**



EQUIVALENTE CIRCUITALE

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\dot{Z}_N} + \bar{A}_N$$

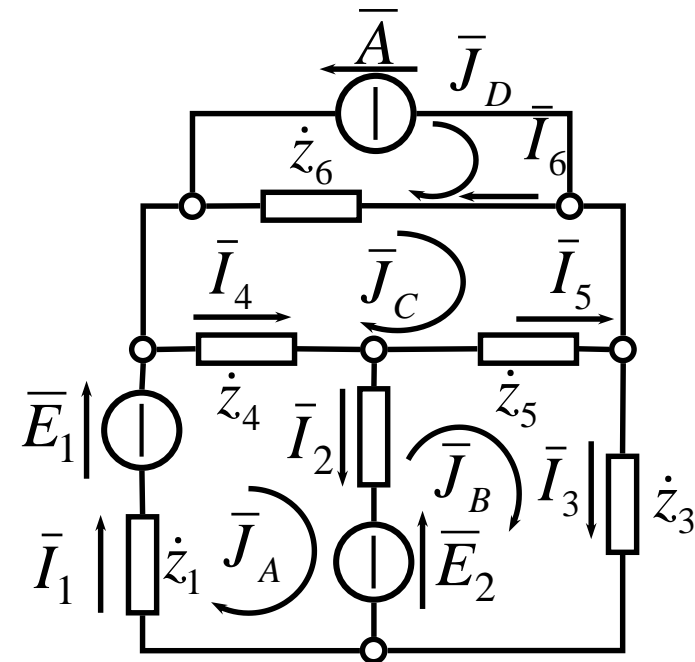
# METODI ABBREVIATI DI ANALISI

## METODO DELLE CORRENTI CICLICHE

Si introducono delle **correnti di maglia fittizie**  $\bar{J}_1, \dots, \bar{J}_M$

$$[\dot{Z}] \cdot [\bar{J}] = [\bar{E}]$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{11} & \dot{z}_{12} & \cdots & \dot{z}_{1M} \\ \dot{z}_{21} & \dot{z}_{22} & \cdots & \dot{z}_{2M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dot{z}_{M1} & \dot{z}_{M2} & \cdots & \dot{z}_{MM} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{J}_1 \\ \bar{J}_2 \\ \vdots \\ \bar{J}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \bar{E}_{V1} \\ \sum \bar{E}_{V2} \\ \vdots \\ \sum \bar{E}_{VM} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum \bar{E}_{I1} \\ \sum \bar{E}_{I2} \\ \vdots \\ \sum \bar{E}_{IM} \end{bmatrix}$$



$\dot{z}_{ii}$  Impedenza propria della maglia  $i$

$\dot{z}_{ij}$  Impedenza mutua tra le maglie  $i$  e  $j$  della maglia  $i$   $\dot{z}_{ij} = \dot{z}_{ji}$

$\sum \bar{E}_{Vi}$  Somma algebrica dei fasori delle tensioni note dei dai generatori di tensione della maglia  $i$ -esima

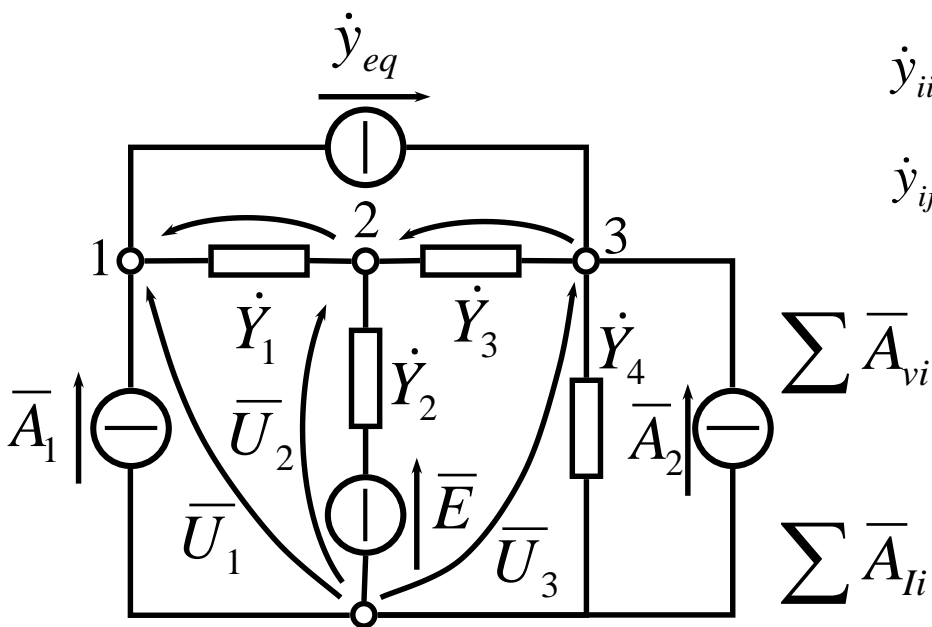
$\sum \bar{E}_{Ii}$  Somma algebrica dei fasori delle tensioni incognite dei generatori di corrente presenti nella maglia  $i$ -esima

# METODI ABBREVIATI DI ANALISI

## METODO DEI POTENZIALI NODALI

Si introducono i **potenziali agli N-1 nodi**  $\bar{U}_1, \dots, \bar{U}_M$

$$[\dot{Y}] \cdot [\bar{U}] = [\bar{A}] \begin{bmatrix} \dot{y}_{11} & -\dot{y}_{12} & \cdots & -\dot{y}_{1M} \\ -\dot{y}_{21} & \dot{y}_{22} & \cdots & -\dot{y}_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\dot{y}_{M1} & -\dot{y}_{M2} & \cdots & \dot{y}_{MM} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \\ \vdots \\ \bar{U}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \bar{A}_{V1} \\ \sum \bar{A}_{V2} \\ \vdots \\ \sum \bar{A}_{VM} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum \bar{A}_{I1} \\ \sum \bar{A}_{I2} \\ \vdots \\ \sum \bar{A}_{IM} \end{bmatrix}$$



$\dot{y}_{ii}$  Ammettenza propria della maglia i-esima

$\dot{y}_{ij}$  Ammettenza di collegamento tra le nodi  $i$  e  $j$ ,  $\dot{y}_{ij} = \dot{y}_{ji}$

$\sum \bar{A}_{vi}$  Somma algebrica dei fasori delle correnti incognite provenienti del nodo  $i$  dai generatori di tensione

$\sum \bar{A}_{Ii}$  Somma algebrica dei fasori Fasori correnti note provenienti al nodo dai generatori di corrente



# VALORE EFFICACE

Il valore efficace è definibile per tutte le grandezze periodiche:

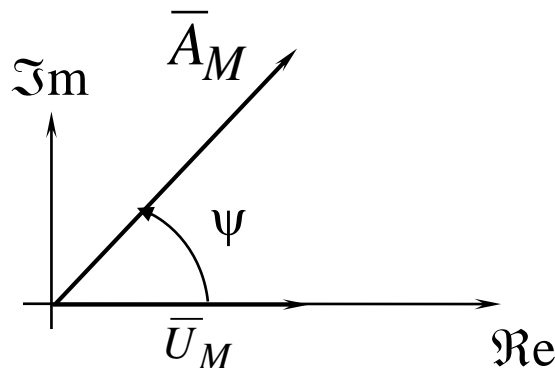
$$\text{VALORE EFFICACE} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt}$$

Nel caso sinusoidale:

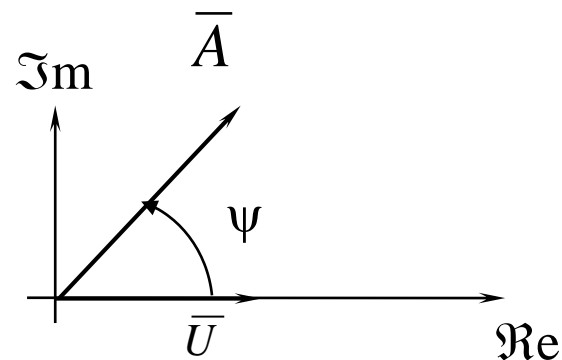
$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_M^2 \sin^2 \omega t \cdot dt} = \frac{I_M}{\sqrt{2}}$$

Il valore efficace di una corrente periodica è il **valore costante di corrente** in grado di causare in un resistore la stessa dissipazione di quella periodica

Valori massimi



Valori efficaci

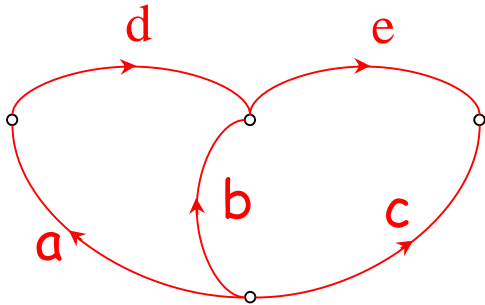


# Teorema di Tellegen

Siano  $k$  rami del circuito :

$\{i_k\}$  un sistema di correnti compatibile

$\{v_k\}$  un sistema di tensioni compatibile



Risulta:

$$\sum_k v_k i_k = 0$$

Circuiti compatibili:

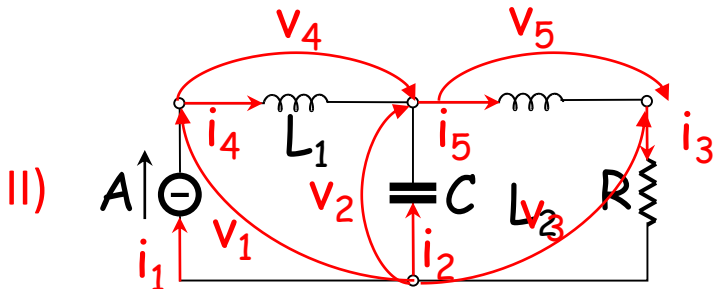
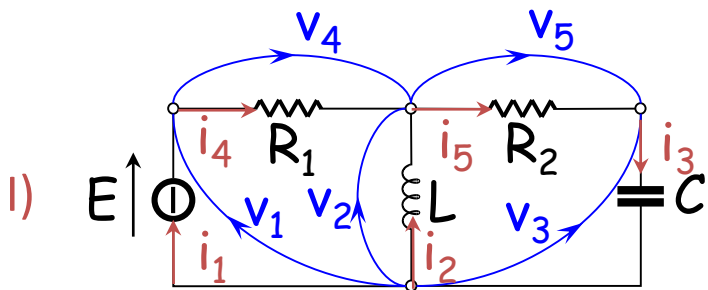
$$\sum_k v_k^{(I)} i_k^{(III)} = 0$$

$$\sum_k v_k^{(III)} i_k^{(I)} = 0$$

Caso particolare:

Se si considerano tensioni e correnti dello stesso circuito otteniamo la

**Conservazione delle Potenze**



# POTENZE IN REGIME SINUSOIDALE

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega t + \varphi_i) = \Re\left\{\sqrt{2} \cdot I \cdot e^{j\varphi_i} \cdot e^{j\omega t}\right\} \Rightarrow \bar{I} = I \cdot e^{j\varphi_i}$$

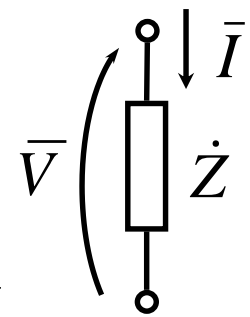
$$v(t) = \sqrt{2} \cdot V \cos(\omega t + \varphi_v) = \Re\left\{\sqrt{2} \cdot V \cdot e^{j\varphi_v} e^{j\omega t}\right\} \Rightarrow \bar{V} = V \cdot e^{j\varphi_v}$$

posto  $\varphi = \varphi_v - \varphi_i$ ;

$$p(t) = v \cdot i = \sqrt{2}V \cos \omega t \cdot \sqrt{2}I \cos(\omega t + \varphi) = 2VI \cos(\omega t + \varphi) \cdot \cos \omega t$$

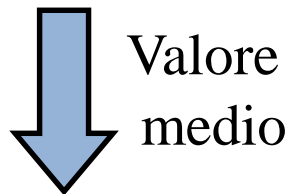
ma:  $2 \cos(\omega t + \varphi) \cos \omega t = \cos \varphi (1 + \cos 2\omega t) - \sin \varphi \sin 2\omega t$

$$p(t) = \underbrace{VI \cdot \cos \varphi (1 + \cos 2\omega t)}_{\text{Potenza Attiva istantanea}} - \underbrace{VI \cdot \sin \varphi \sin 2\omega t}_{\text{Potenza Reattiva istantanea}}$$



**Potenza Attiva istantanea**

**Potenza Reattiva istantanea**



Valore  
medio



Valore  
massimo

$$P = VI \cos \varphi$$

Potenza Attiva [W]

$$Q = VI \sin \varphi$$

Potenza Reattiva [VAR]

$$p(t) = P(1 + \cos 2\omega t) - Q \sin 2\omega t$$

# POTENZE IN REGIME SINUSOIDALE

definiamo  $\dot{S} = P + jQ$  Potenza Complessa

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{V^2 I^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = VI \text{ Potenza Apparente [VA]}$$

con  $\varphi = \varphi_v - \varphi_i$

si dimostra che :

$$\dot{S} = \bar{V} \cdot \bar{I}^* = \frac{1}{2} \bar{V}_M \cdot \bar{I}_M^*$$

$$\bar{V} \cdot \bar{I}^* = V \cdot I \angle \varphi_i - \varphi_v = V \cdot I e^{j\varphi} = V \cdot I \cos \varphi + jV \cdot I \sin \varphi$$

$$P = \text{Re}(\bar{V} \cdot \bar{I}^*) = V \cdot I \cos \varphi = \frac{1}{2} V_M \cdot I_M \cos \varphi \text{ potenza attiva}$$

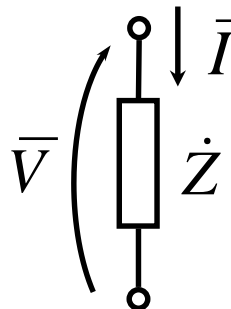
$$Q = \text{Im}(\bar{V} \cdot \bar{I}^*) = V \cdot I \sin \varphi = \frac{1}{2} V_M \cdot I_M \sin \varphi \text{ potenza reattiva}$$

possiamo scrivere anche :

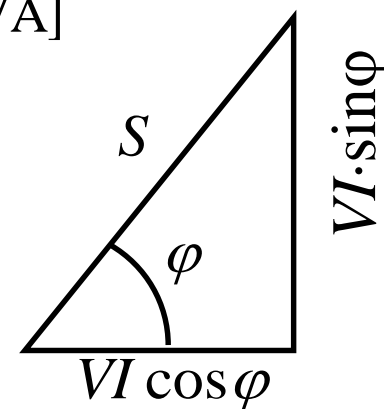
$$\dot{S} = \bar{V} \cdot \bar{I}^* = \dot{Z} \cdot I^2 = \frac{V^2}{\dot{Z}^*} = I^2 (R + jX)$$

$$P = \text{Re}(\dot{S}) = R \cdot I^2; [W]$$

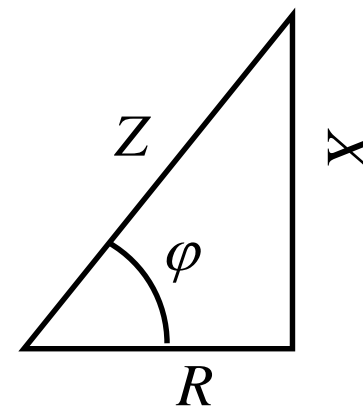
$$Q = \text{Im}(\dot{S}) = X \cdot I^2 [W]$$



**TRIANGOLO DELLE POTENZE**



**TRIANGOLO DELLE IMPEDENZE**



# POTENZE IN REGIME SINUSOIDALE: Casi particolari

## RESISTORE

$$\triangleright \varphi = 0$$

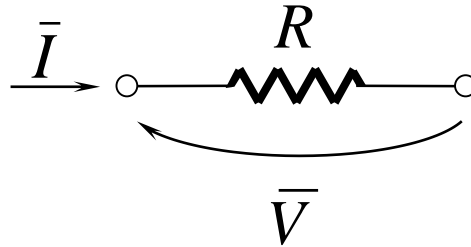
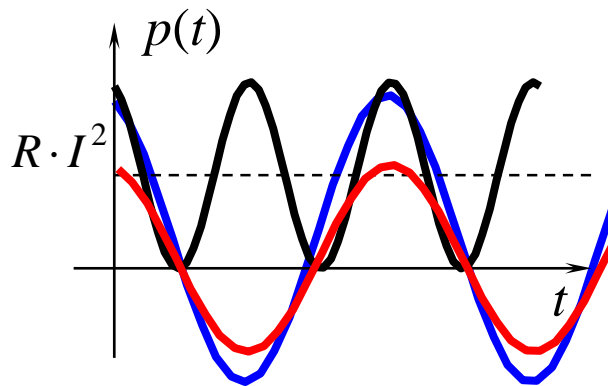


Diagramma fasoriale



$$p(t) = VI(1 + \cos 2\omega t) = RI^2(1 + \cos 2\omega t)$$



La potenza assorbita dal resistore è sempre positiva o al più, nulla, è pulsante di pulsazione doppia rispetto a quella della tensione o della corrente. La potenza reattiva è nulla.

$$\begin{cases} P = VI \cos \varphi = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R} \\ Q = 0 \end{cases}$$

# POTENZE IN REGIME SINUSOIDALE: Casi particolari

## CAPACITORE

$$\triangleright \varphi = \varphi_V - \varphi_I = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$p(t) = -(-VI) \sin 2\omega t = -Q_C \sin 2\omega t$$

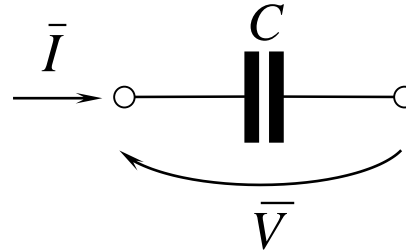
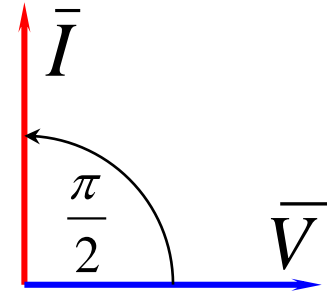
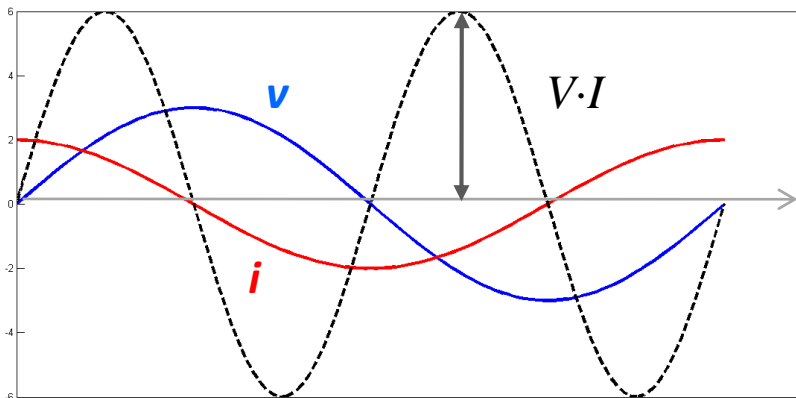


Diagramma fasoriale



La potenza istantanea è **una *sinusoide*** di pulsazione doppia rispetto a tensione e corrente. La quantità  $VI$  è l'AMPIEZZA MASSIMA dell'oscillazione della potenza istantanea  $p(t)$  ed è detta POTENZA REATTIVA CAPACITIVA e viene indicata con  $Q_C$



$Q_C$  è assunta *negativa*

$$\begin{cases} P = 0 \\ Q_C = -VI = -X_C I^2 = -\frac{V^2}{X_C} \end{cases}$$

# POTENZE IN REGIME SINUSOIDALE: Casi particolari

## INDUTTORE

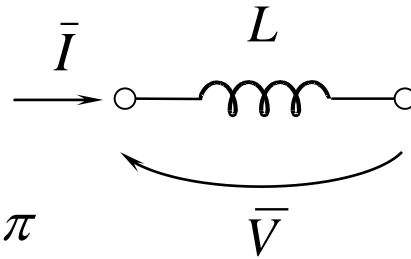
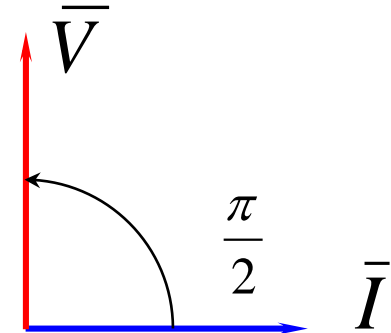


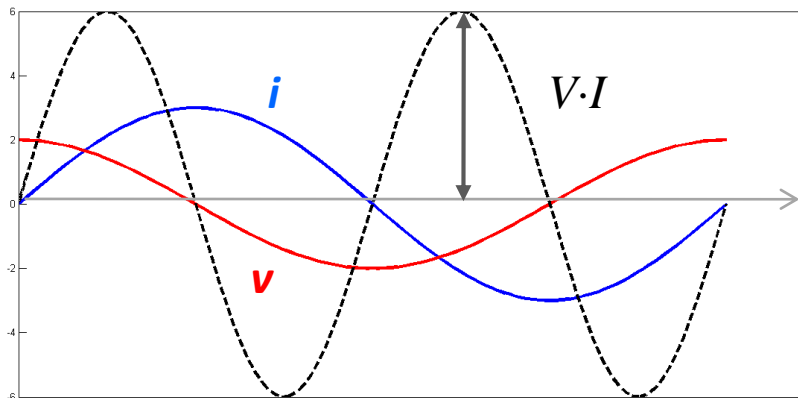
Diagramma fasoriale



$$\triangleright \varphi = \varphi_V - \varphi_I = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$p(t) = -(VI) \sin 2\omega t = -Q_L \text{sen}(2\omega t)$$

La potenza istantanea è una senoide di pulsazione doppia rispetto alla tensione e la corrente. La quantità  $VI$  è l'AMPIEZZA MASSIMA dell'oscillazione della potenza istantanea  $p(t)$  ed è detta POTENZA REATTIVA INDUTTIVA e viene indicata con  $Q_L$

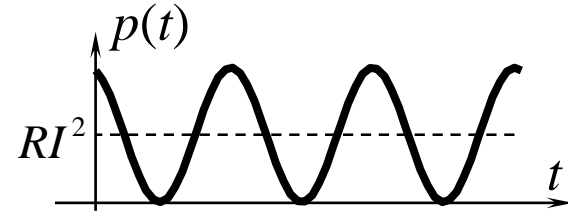
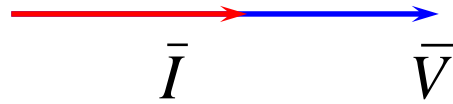
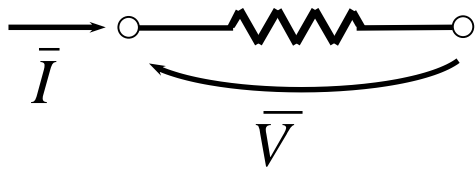


***$Q_L$  viene assunta positiva***

$$\begin{cases} P = 0 \\ Q_L = VI = X_L I^2 = \frac{V^2}{X_L} \end{cases}$$

# Tabella riassuntiva

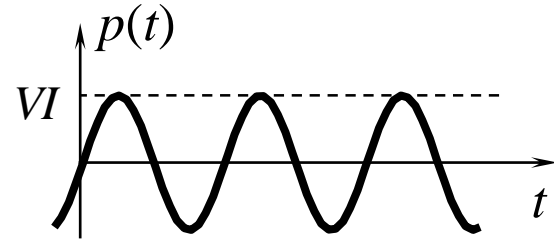
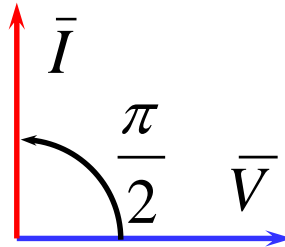
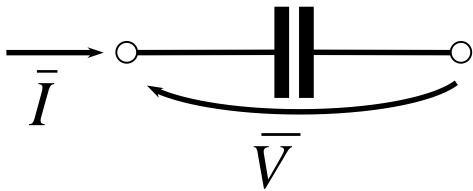
➤ RESISTORE  $\varphi = 0$



$$P = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R}$$

$$Q = 0$$

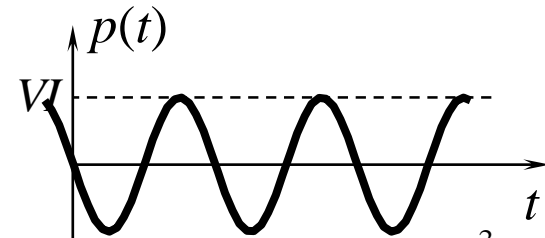
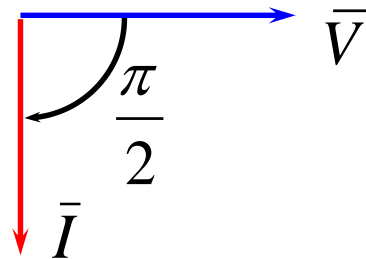
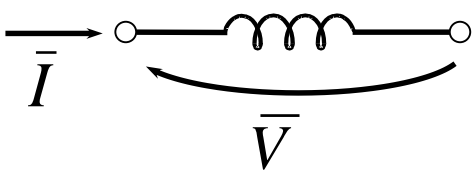
➤ CAPACITORE  $\varphi = \pi/2$



$$Q_c = -VI = -X_c I^2 = -\frac{V^2}{X_c}$$

$$P = 0$$

➤ INDUTTORE  $\varphi = \pi/2$



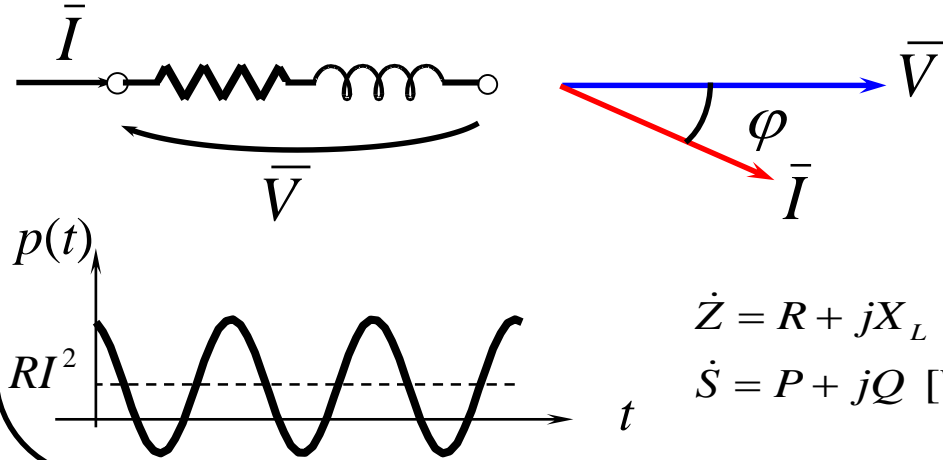
$$Q_L = VI = X_L I^2 = \frac{V^2}{X_L}$$

$$P = 0$$

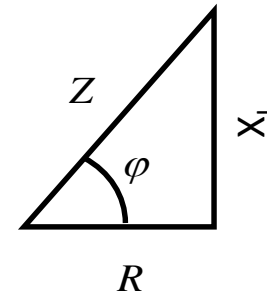


# Tabella riassuntiva

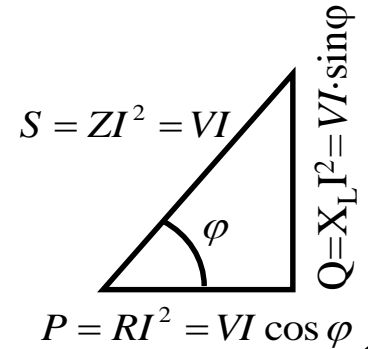
## ➤ impedenza ohmico-induttiva



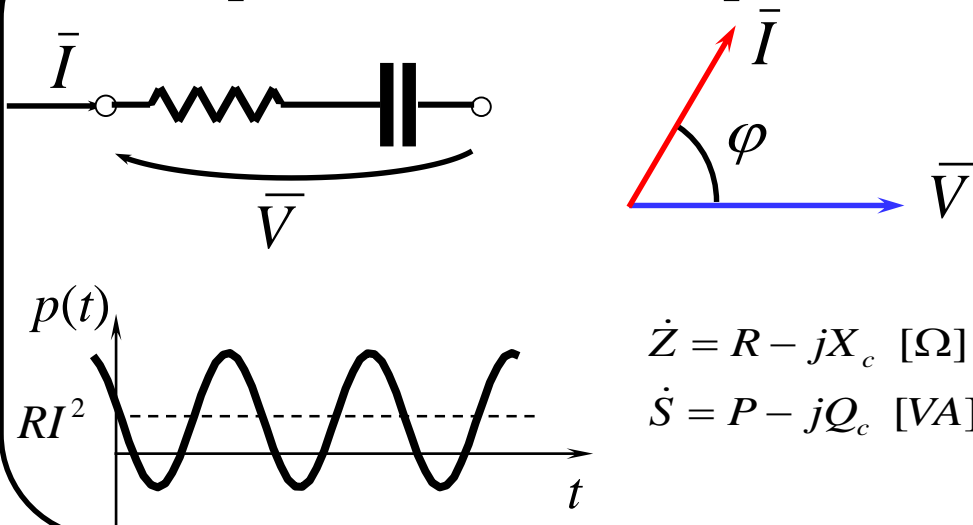
triangolo  
delle **impedenze**



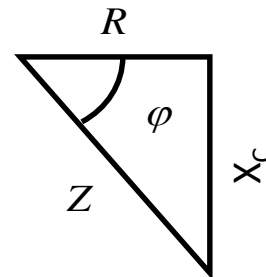
triangolo  
delle **potenze**



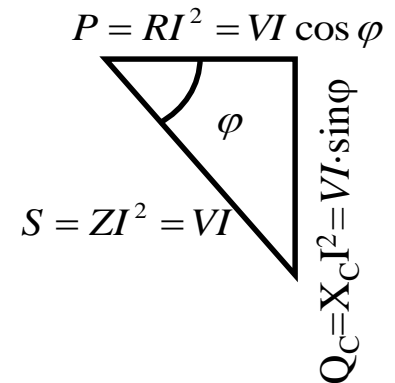
## ➤ Impedenza ohmico-capacitiva



triangolo  
delle **impedenze**



triangolo  
delle **potenze**



# Teorema di Boucherot

Dal teorema di Tellegen:  $\sum_h v_h' \cdot i_h'' = 0$     In regime sinusoidale  $\sum_h \bar{V}_h' \cdot \bar{I}_h'' = 0$

Scegliamo l'insieme delle tensioni di un circuito e come insieme delle correnti scegliamo quelle del circuito che ha le correnti coniugate rispetto al primo:

$$\{\bar{I}_h''\} = \{\bar{I}_h^*\}$$

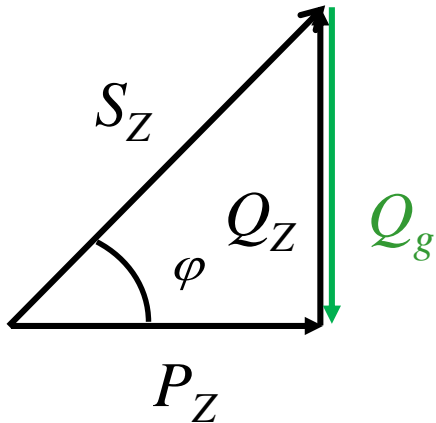
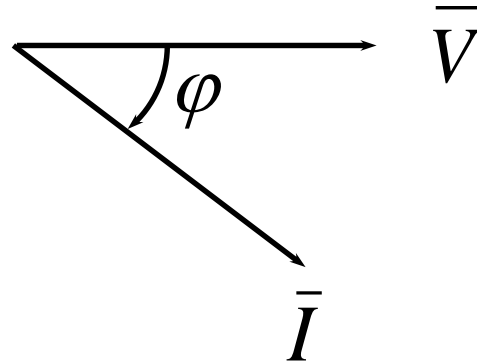
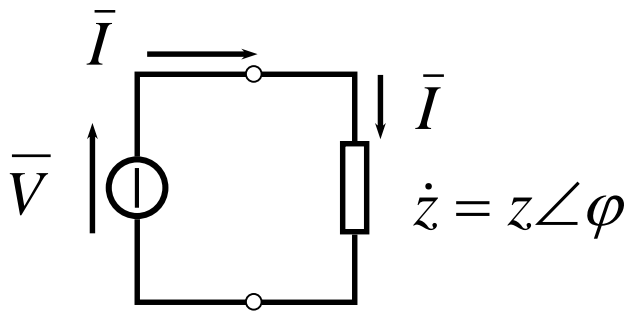
Allora: 
$$\sum_h \bar{V}_h' \cdot \bar{I}_h^* = \sum_h \dot{S}_h = \sum_h P_h + jQ_h = 0$$

Affinché Tellegen sia verificato deve essere: 
$$\begin{cases} \sum_h P_h = 0 \\ \sum_h Q_h = 0 \end{cases}$$

**Teorema di Boucherot:** 
$$\begin{cases} \sum_i P_{i_{\text{generatori}}} = \sum_k P_{k_{\text{utilizzatori}}} \\ \sum_k Q_{h_{\text{generatori}}} = \sum_k Q_{k_{\text{utilizzatori}}} \end{cases}$$

# Rifasamento

## Prima del Rifasamento:

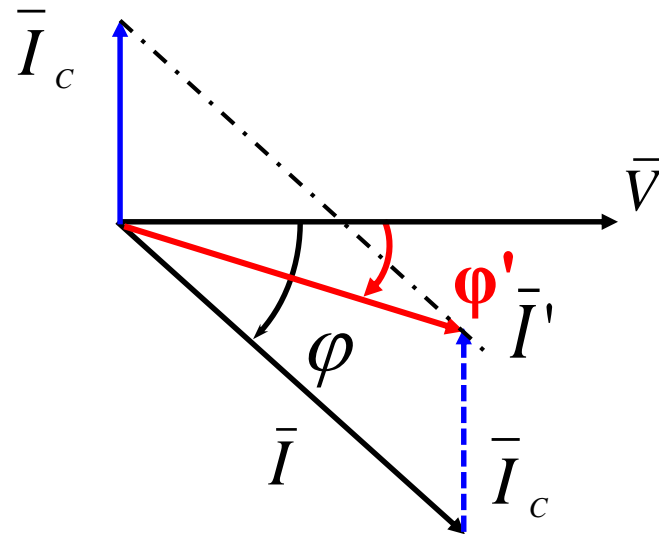
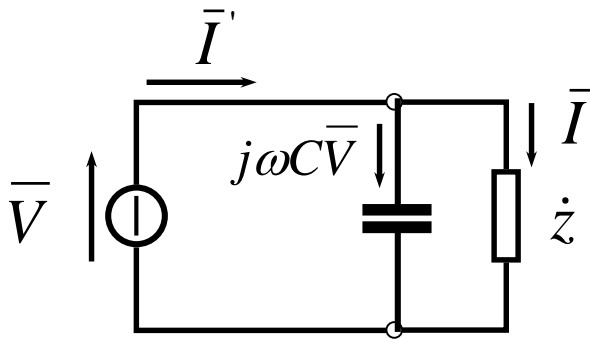


Per Boucherot:  $\dot{S}_Z - \dot{S}_g = 0$   $\begin{cases} Q_Z - Q_g = 0 \\ P_Z - P_g = 0 \end{cases}$

fattore di potenza (*p.f.*) =  $\frac{P}{S} = \cos \varphi$   $\begin{cases} \text{in ritardo (carico RL)} \\ \text{in anticipo (carico RC)} \end{cases}$  99

# Rifasamento

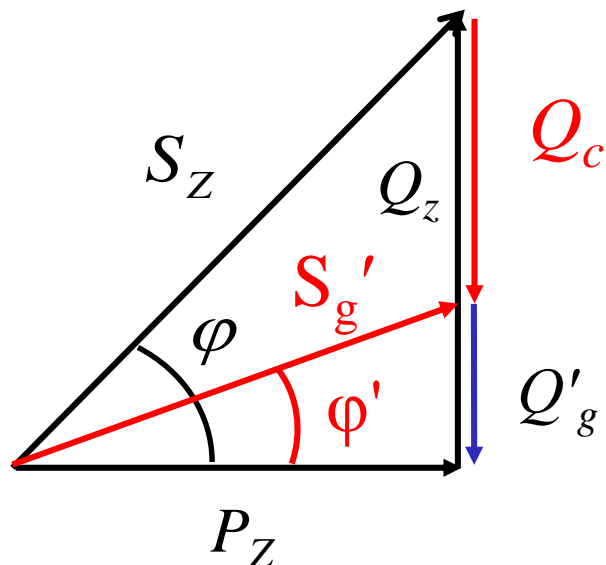
Il rifasamento consiste nell'inserire una capacità in parallelo al carico in modo da far diminuire lo sfasamento tra tensione e corrente erogata dal generatore,, questo significa aumentare il  $p.f.$



## Dopo il Rifasamento:

- ✓ **diminuisce** il modulo della corrente erogata dal generatore
- ✓ **diminuisce** la potenza reattiva erogata dal generatore
- ✓ **rimane costante** la potenza attiva erogata dal generatore
- ✓ **rimangono costanti**, corrente e potenze attive e reattiva del carico

# Rifasamento



Per Boucherot: 
$$\begin{cases} Q_Z - Q_c - Q_g' = 0 \\ P_Z - P_g = 0 \end{cases}$$

$$S \cos \varphi = P_Z = P_g = P$$

$$Q_Z = S \operatorname{sen} \varphi = P \operatorname{tg} \varphi$$

$$Q_g' = P \operatorname{tg} \varphi'$$

$$Q_c = Q_Z - Q_g' = P(\tan \varphi - \tan \varphi'); \quad S' = \sqrt{P^2 + (Q_Z - Q_c)^2}$$

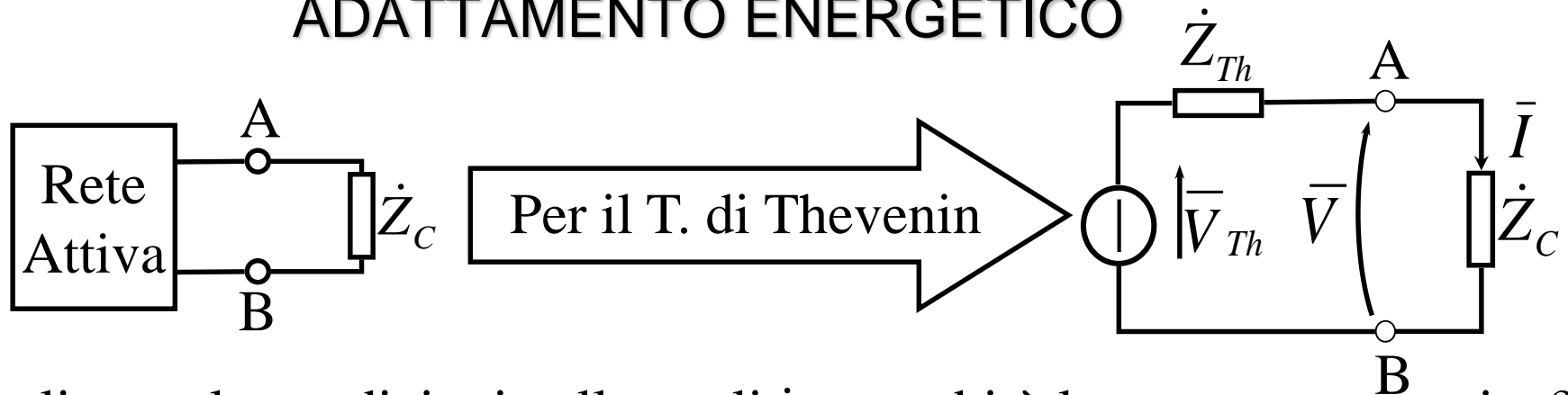
$$Q_c = \frac{V^2}{1/\omega C} = P(\tan \varphi - \tan \varphi')$$

$$C = \frac{P(\tan \varphi - \tan \varphi')}{\omega V^2}$$

Le potenze attiva  $P$  e reattiva  $Q$ , la tensione  $V$  e la corrente  $I$  assorbiti dal carico non vengono influenzati dal rifasamento

(GENERALMENTE  $\cos \varphi' \cong 0,9$ )

# ADATTAMENTO ENERGETICO



Quali sono le condizioni nelle quali  $\dot{z}_C$  assorbirà la max potenza attiva?

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}_{th}}{\dot{Z}_{Th} + \dot{Z}_C}; \quad \dot{Z}_C = R_C + jX_C; \quad \dot{Z}_{Th} = R_{Th} + jX_{Th}$$

$$P = \frac{1}{2} R_C |\bar{I}_M|^2 = R_C |\bar{I}|^2 = R_C \frac{|\bar{V}_{th}|^2}{|\dot{Z}_{Th} + \dot{Z}_C|^2} = |\bar{V}_{Th}|^2 \frac{R_C}{(R_C + R_{Th})^2 + (X_C + X_{Th})^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial X_C} = |\bar{V}_{Th}|^2 \frac{-R_C \cdot (X_{Th} + X_C)}{\left[ (R_{Th} + R_C)^2 + (X_{Th} + X_C)^2 \right]^2} = 0 \Rightarrow X_C = -X_{Th}$$

$$\frac{\partial P}{\partial R_C} = |\bar{V}_{Th}|^2 \frac{(R_{Th} + R_C)^2 + (X_{Th} + X_C)^2 - 2R_C(R_{Th} + R_C)}{\left[ (R_{Th} + R_C)^2 + (X_{Th} + X_C)^2 \right]^2} = 0 \Rightarrow R_C = R_{Th}$$

dunque  $\dot{Z}_C = \dot{Z}_{Th}^*$  perciò  $P_{MAX} = |\bar{V}_{Th}|^2 \frac{R_C}{(R_{Th} + R_{Th})^2 + (-X_{Th} + X_{Th})^2} = \frac{|\bar{V}_{Th}|^2}{4R_{Th}}$

# Sistemi Trifase

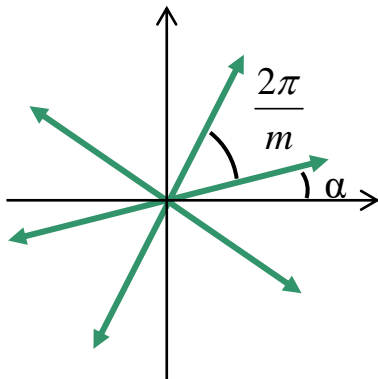
# Sistemi polifase

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1(t) = \sqrt{2}A \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) \\ \vdots \\ a_i(t) = \sqrt{2}A \operatorname{sen}\left(\omega t + \alpha \pm (i-1)\frac{2\pi}{m}\right) \\ \vdots \\ a_m(t) = \sqrt{2}A \operatorname{sen}\left(\omega t + \alpha \pm (m-1)\frac{2\pi}{m}\right) \end{array} \right.$$

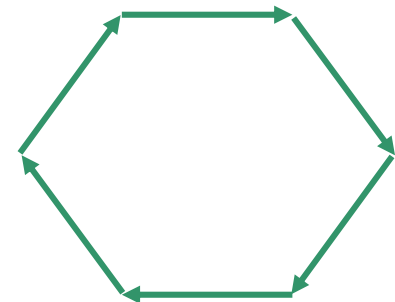
Sistema **polifase simmetrico**:  
m grandezze sinusoidali sfasate tra di loro di un angolo pari a  $\pm 2\pi/m$  e con uguale valore efficace e uguale pulsazione.

Se il segno è  $- \Rightarrow$  sistema diretto, se è  $+ \Rightarrow$  sistema inverso

## Rappresentazione fasoriale



in ogni istante è **nulla** la somma dei valori istantanei





# Sistemi trifase

per  $m=3$   $\longrightarrow$  Sistemi Trifase

$$\begin{cases} a_1(t) = \sqrt{2}A \cos \omega t \\ a_2(t) = \sqrt{2}A \cos(\omega t \mp \frac{2\pi}{3}) \\ a_3(t) = \sqrt{2}A \cos(\omega t \mp \frac{4\pi}{3}) \end{cases}$$

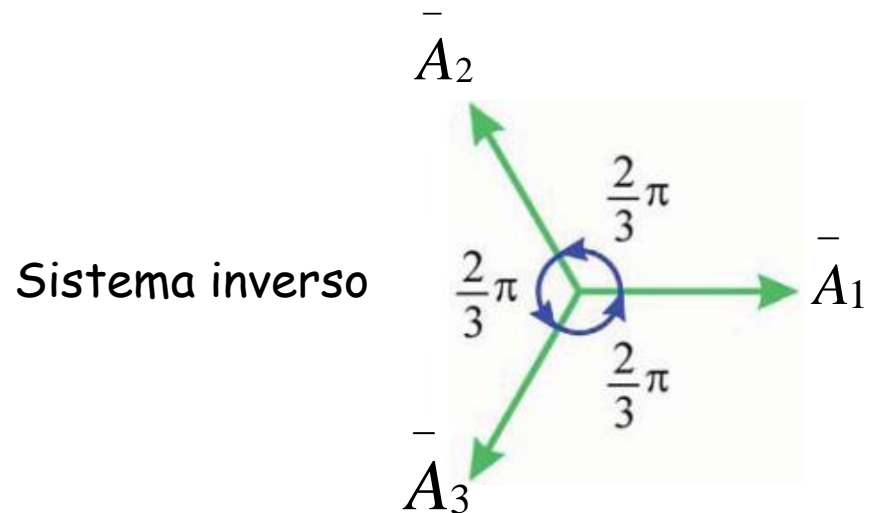
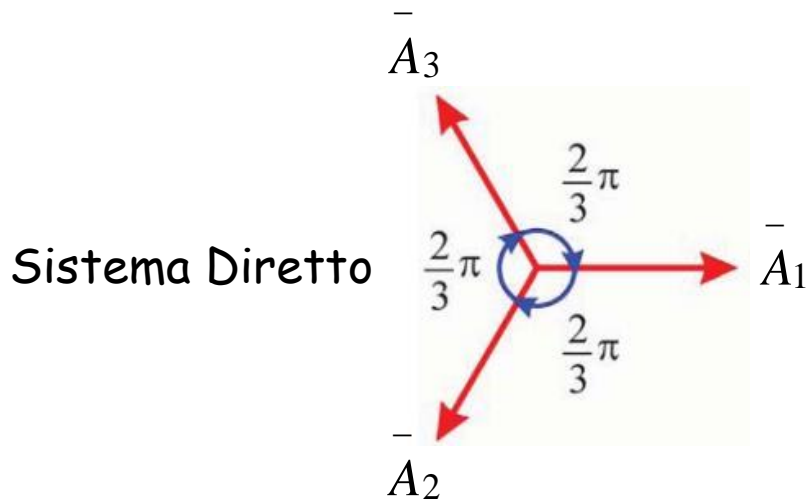
Sistema diretto:

Verso orario  $\rightarrow$  sequenza dei ritardi

Sistema inverso:

Verso antiorario  $\rightarrow$  sequenza degli anticipi

Diagramma delle fasi

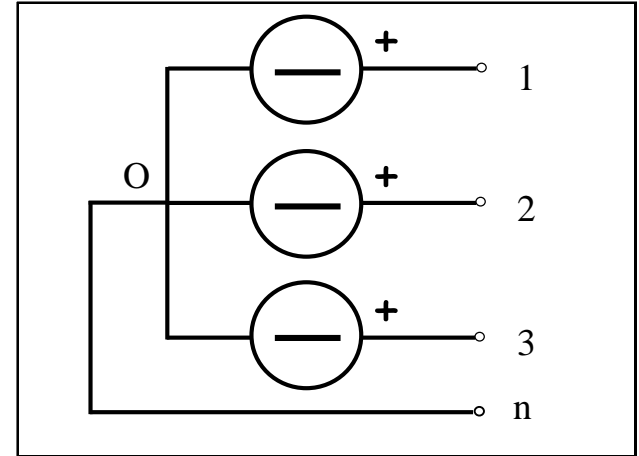
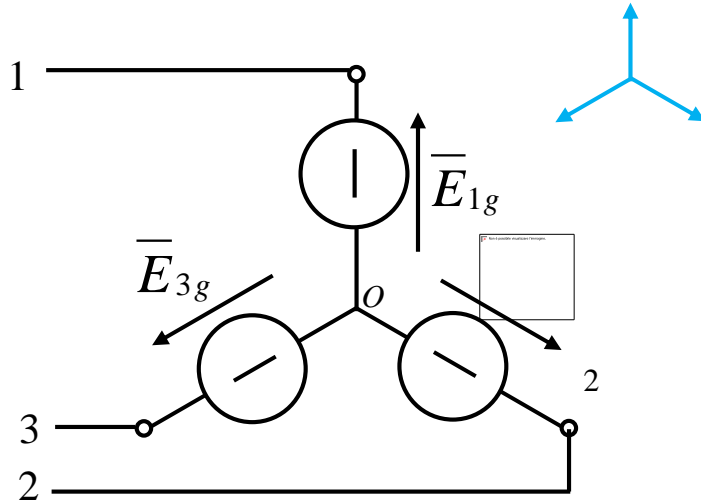


# Generatore trifase

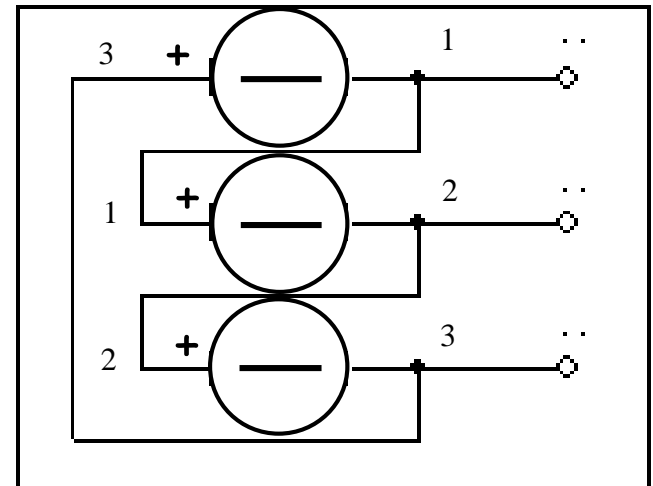
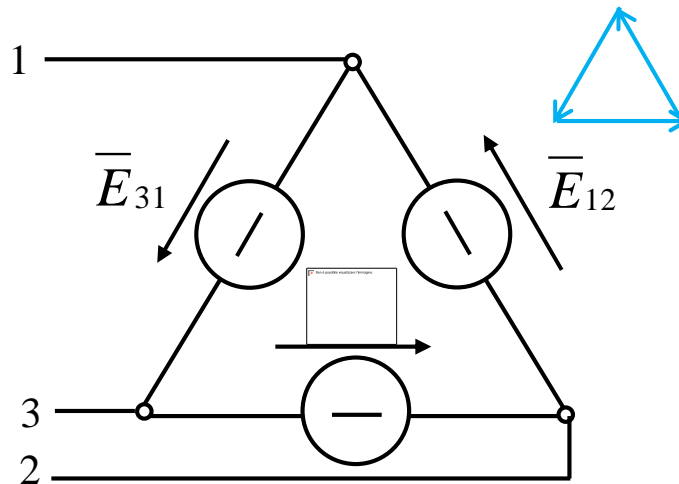
Dal **punto di vista elettrico** un generatore trifase simmetrico è equivalente a **3 generatori monofase**, collegati a stella o a triangolo, che producono una tensione di pari modulo ma fase diversa.

$$\begin{cases} E_1 = E_M \\ E_2 = E_M e^{-j\frac{2}{3}\pi} \\ E_3 = E_M e^{-j\frac{4}{3}\pi} = E_M e^{j\frac{2}{3}\pi} \end{cases}$$

Stella



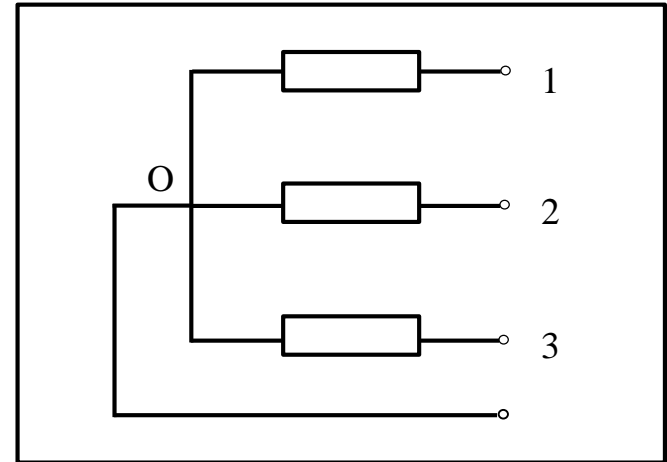
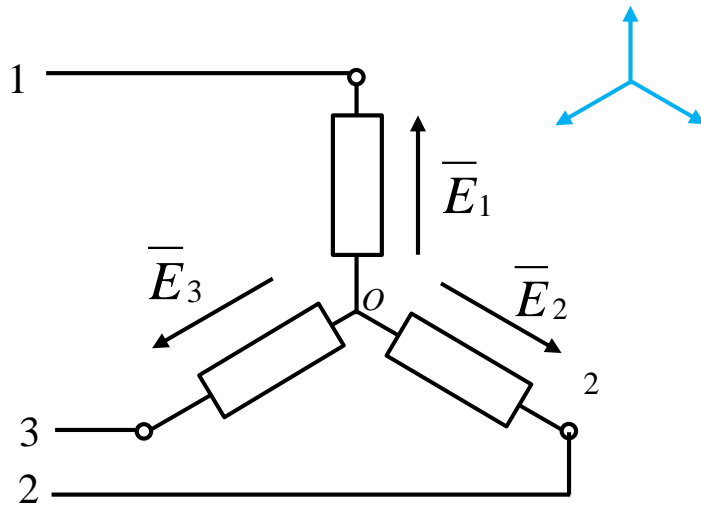
Triangolo



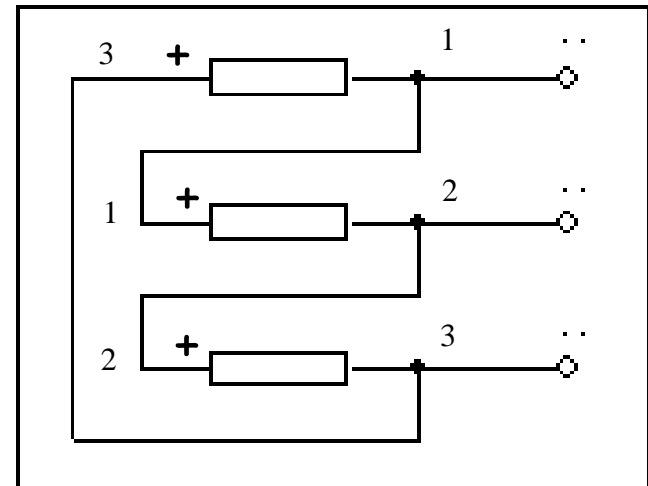
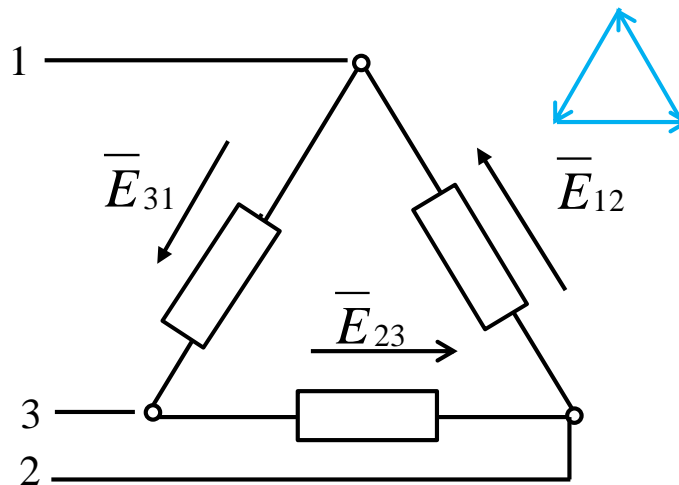
# Carico trifase

Dal **punto di vista elettrico** un carico trifase equilibrato è equivalente a **3 impedenze monofase uguali** collegate a stella o a triangolo.

Stella



Triangolo



# Sistema elettrico trifase

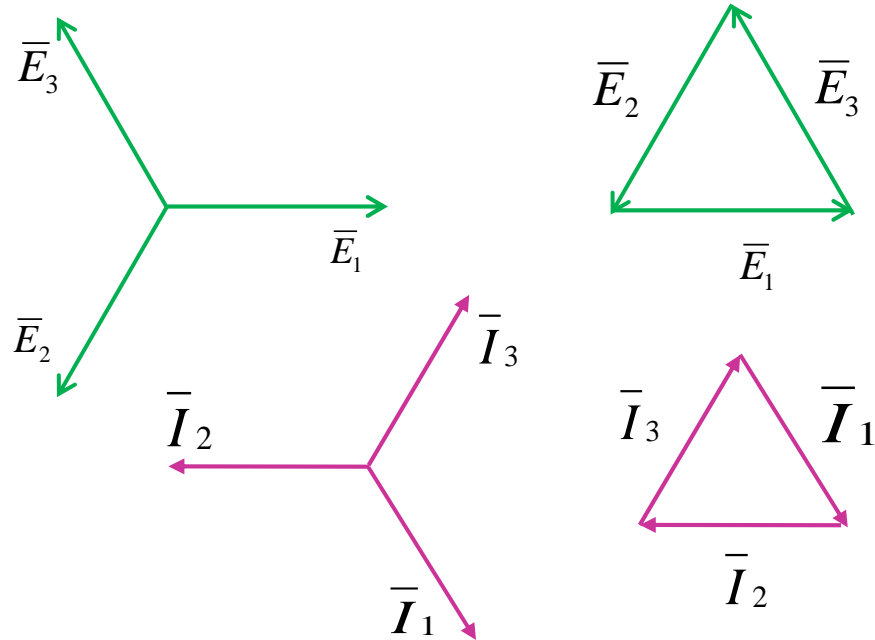
Un sistema trifase si definisce

✓ **simmetrico** se

$$\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 = 0$$

✓ **equilibrato** se

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0$$

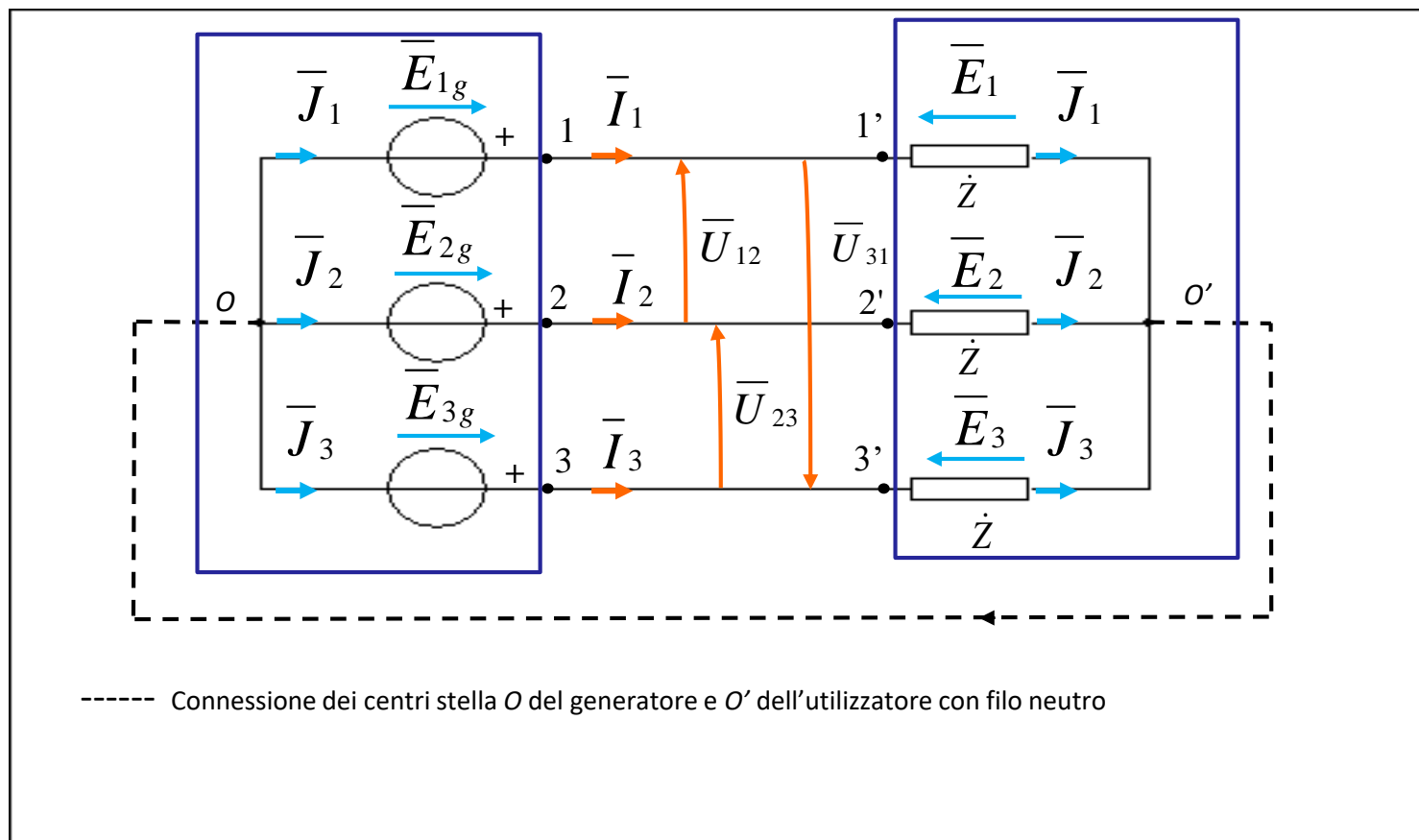


Per  $i=1, \dots, 3$  si definisce:

- **Tensione Concatena  $\bar{U}_{ij}$**  (o tensione di linea): è la tensione tra l'*i-esimo* e il *j-esimo* conduttore della linea che collega il generatore al carico.
- **Tensione di fase  $\bar{E}_i$** : è la tensione ai capi del componente monofase dell'*i-esima* fase
- **Corrente di linea  $\bar{I}_i$** : è la corrente che attraversa l'*i-esimo* conduttore di linea
- **Corrente di fase  $\bar{J}_i$** : è la corrente che attraversa il componente monofase *i-esima* fase

# Sistemi trifase

## Esempio di sistema trifase



$\bar{E}_i$  tensioni di fase = tensione ai capi del componente monofase

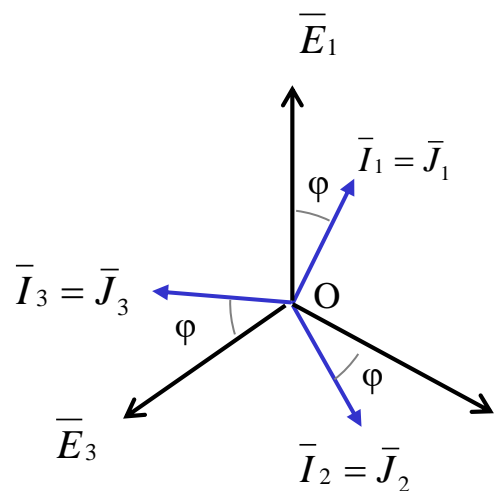
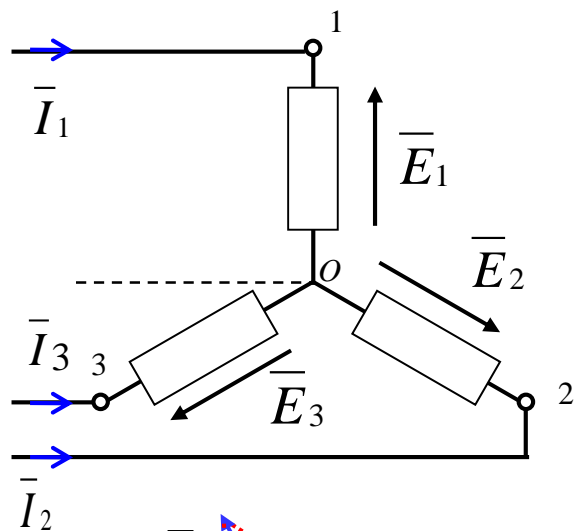
$\bar{U}_{ij}$  tensione di linea = tensione tra i conduttori di linea  $i$  e  $j$

$\bar{I}_i$  correnti di linea = corrente che scorre nel conduttore di linea

$\bar{J}_i$  correnti di fase = corrente che scorre nel componente monofase

# Componente Trifase collegato a stella

Ipotesi: sequenza diretta

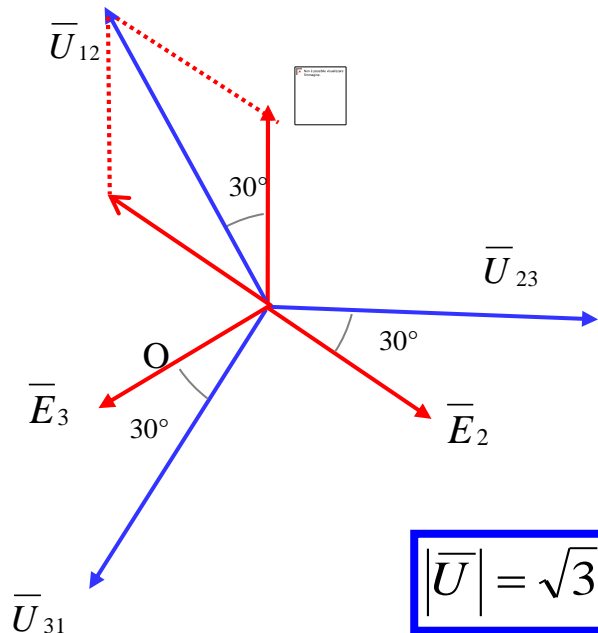


La terna delle correnti di fase coincide con quella di linea

$$\begin{cases} \bar{I}_1 = \bar{J}_1 = I \angle -\varphi \\ \bar{I}_2 = \bar{J}_2 = I \angle -\varphi - 120 \\ \bar{I}_3 = \bar{J}_3 = I \angle -\varphi + 120 \end{cases}$$

Ricavo le tensioni di linea:

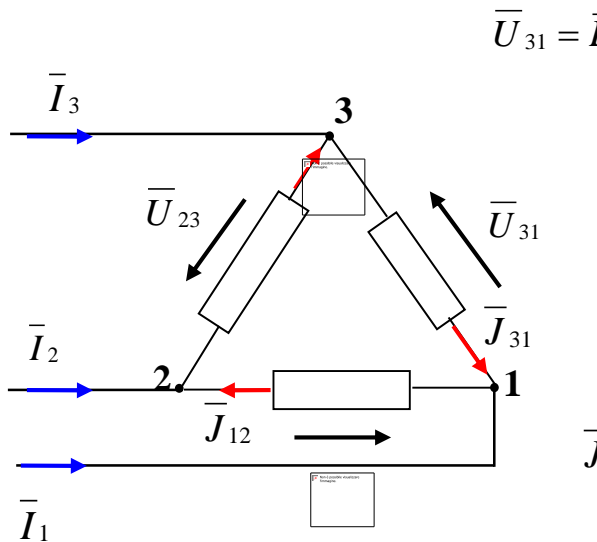
$$\begin{cases} \bar{U}_{12} = \bar{E}_1 - \bar{E}_2 = E \angle 0^\circ - E \angle -120^\circ = \sqrt{3}E \angle 30^\circ \\ \bar{U}_{23} = \bar{E}_2 - \bar{E}_3 = E \angle -120^\circ - E \angle -240^\circ = \sqrt{3}E \angle -90^\circ \\ \bar{U}_{31} = \bar{E}_3 - \bar{E}_1 = E \angle -240^\circ - E \angle 0^\circ = \sqrt{3}E \angle -210^\circ \end{cases}$$



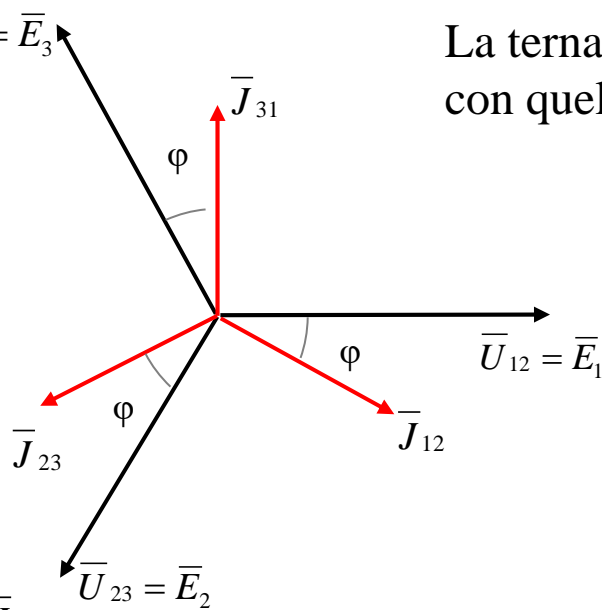
**Sequenza diretta:** la terna delle tensioni di linea è in anticipo di  $30^\circ$  rispetto a quelle di fase

# Componente trifase collegato a triangolo

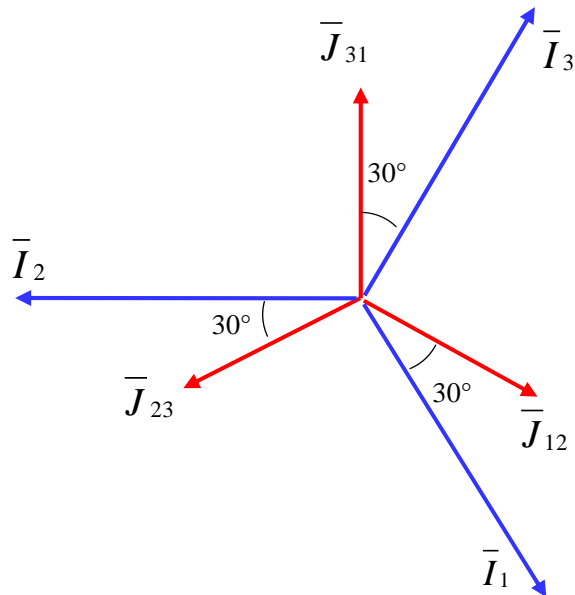
Ipotesi: sequenza diretta



La terna delle tensioni di fase coincide con quella di linea



$$\begin{cases} \bar{E}_1 = \bar{U}_{12} = E \angle 0 \\ \bar{E}_2 = \bar{U}_{23} = E \angle -120 \\ \bar{E}_3 = \bar{U}_{31} = E \angle +120 \end{cases}$$



Le correnti di linea:

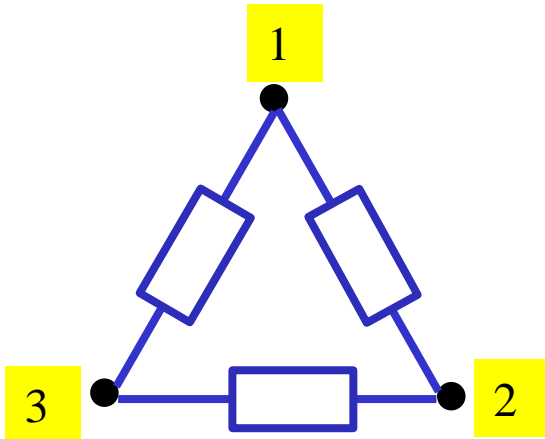
$$\begin{cases} \bar{I}_1 = \bar{J}_{12} - \bar{J}_{31} = J \angle -\varphi - J \angle (-240 - \varphi) = \sqrt{3} J \angle (-\varphi - 30^\circ) \\ \bar{I}_2 = \bar{J}_{23} - \bar{J}_{12} = J \angle (-120^\circ - \varphi) - J \angle -\varphi = \sqrt{3} J \angle (-\varphi - 150^\circ) \\ \bar{I}_3 = \bar{J}_{31} - \bar{J}_{23} = J \angle (-240^\circ - \varphi) - J \angle (-120^\circ - \varphi) = \sqrt{3} J \angle (-\varphi - 270^\circ) \end{cases}$$

$$|\bar{I}| = \sqrt{3} \cdot |\bar{J}|$$

**Sequenza diretta:** la terna delle correnti di linea è in ritardo di  $30^\circ$  rispetto a quelle di fase

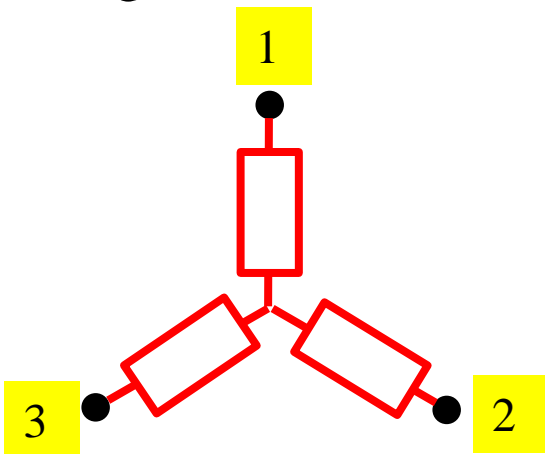
# Relazioni tra grandezze di linea e di fase

Collegamento a TRIANGOLO, sequenza diretta



$$\begin{cases} \bar{U}_{ij} = \bar{E}_i \\ \bar{I}_i = \sqrt{3} \cdot \bar{J}_{ij} \angle -30^\circ \end{cases}$$

Collegamento a STELLA, sequenza diretta

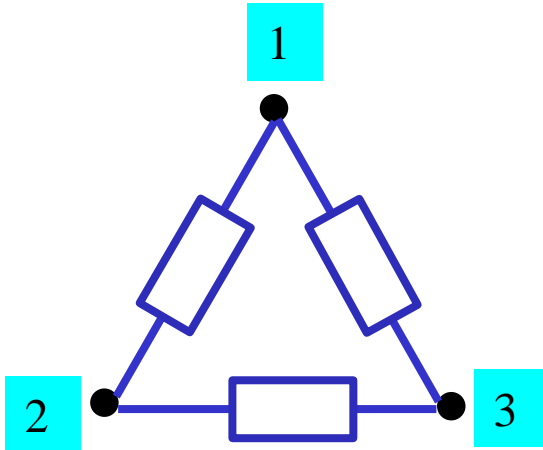


$$\begin{cases} \bar{U}_{ij} = \sqrt{3} \cdot \bar{E}_i \angle +30^\circ \\ \bar{I}_i = \bar{J}_{ij} \end{cases}$$



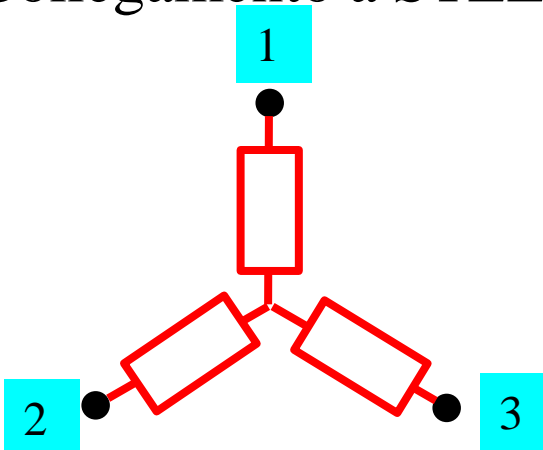
# Relazioni tra grandezze di linea e di fase

Collegamento a TRIANGOLO, sequenza inversa



$$\begin{cases} \bar{U}_{ij} = \bar{E}_i \\ \bar{I}_i = \sqrt{3} \cdot \bar{J}_{ij} \angle +30^\circ \end{cases}$$

Collegamento a STELLA, sequenza inversa

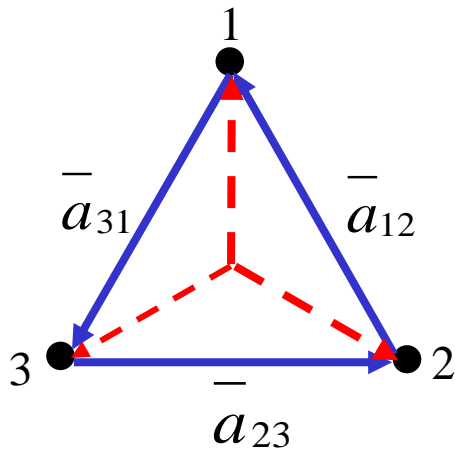


$$\begin{cases} \bar{U}_{ij} = \sqrt{3} \cdot \bar{E}_i \angle -30^\circ \\ \bar{I}_i = \bar{J}_{ij} \end{cases}$$

# Equivalenze triangolo-stella

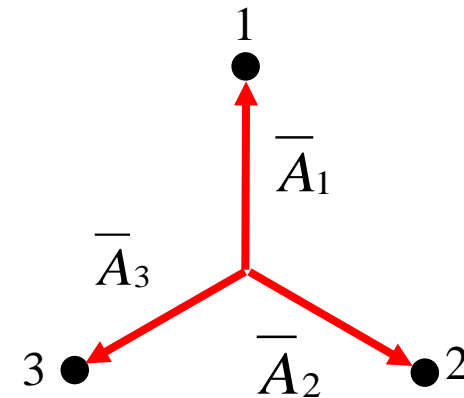
Ipotesi di sequenza diretta

grandezze a TRIANGOLO  $\longrightarrow$  Equivalente a STELLA

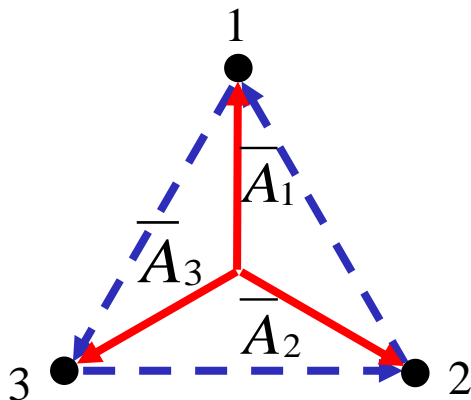


Tensione stellata  
equivalente

$$\bar{A}_i = \frac{\bar{a}_{ij}}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ$$

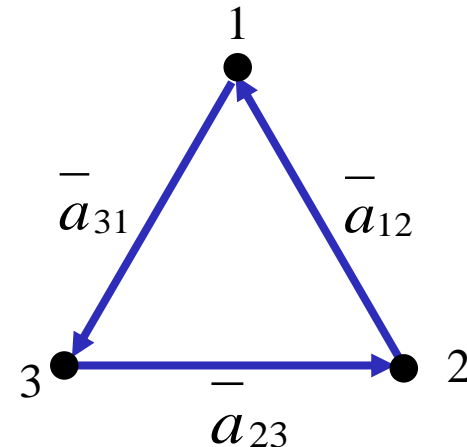


grandezze a STELLA  $\longrightarrow$  Equivalente a TRIANGOLO



Tensione concatenata  
equivalente

$$\bar{a}_{ij} = \sqrt{3} \cdot \bar{A}_i \angle +30^\circ$$



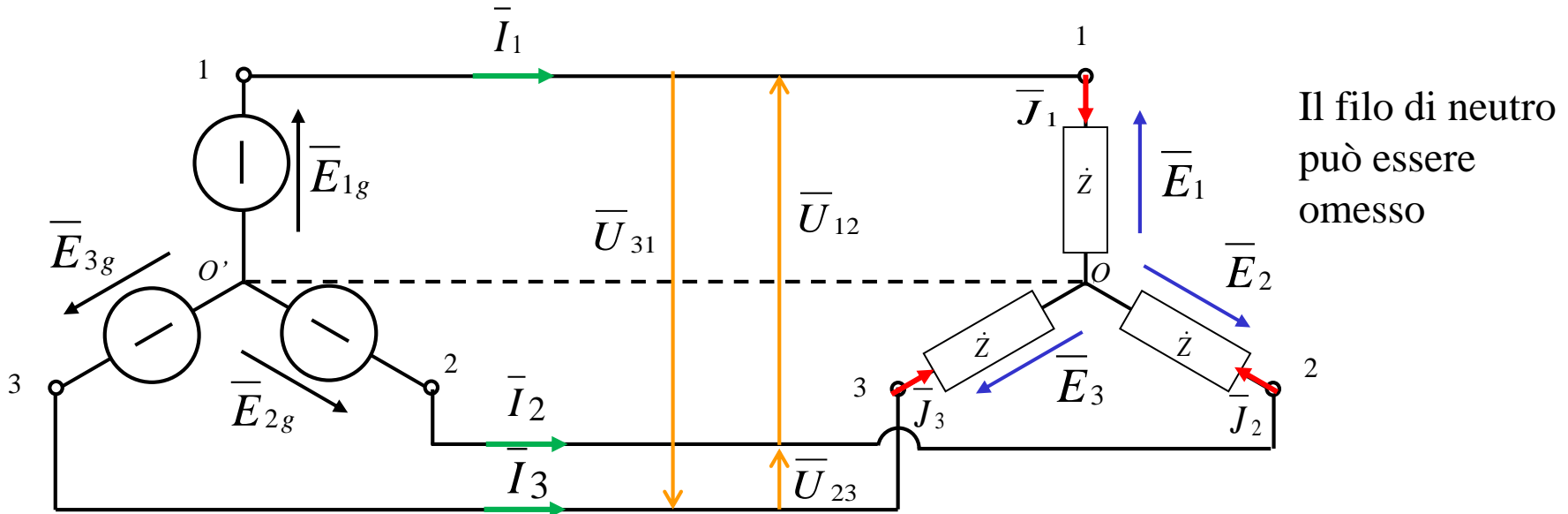
# Configurazioni bilanciate

Poiché sia il generatore trifase che carico trifase possono essere collegati a stella oppure a triangolo, si hanno 4 possibili configurazioni:

1. Collegamento **Y-Y** (generatore a stella-carico a stella)
2. Collegamento **Y- $\Delta$**  (generatore a stella- carico a triangolo)
3. Collegamento  **$\Delta$ - $\Delta$**  (generatore a triangolo-carico a triangolo)
4. Collegamento  **$\Delta$ -Y** (generatore a triangolo-carico a stella)

Le configurazione più comune per il generatore è quella a stella, mentre per il carico è a triangolo.

# 1. Collegamento Y-Y bilanciato



Grandezze note: tensione di fase del generatore, impedenza di carico

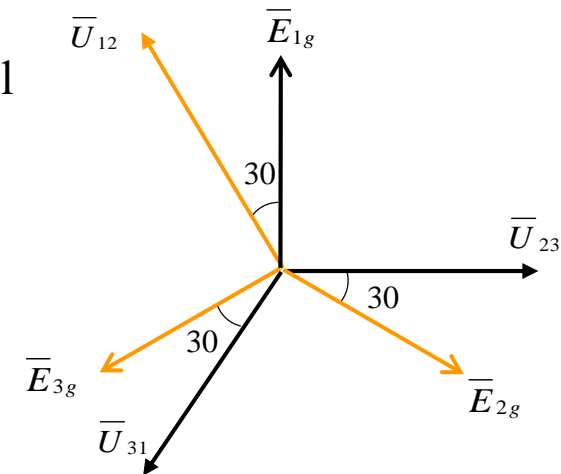
- La terna delle tensioni di fase del carico  $\equiv$  la terna delle tensioni di fase del generatore
- La terna delle correnti di linea  $\equiv$  la terna delle correnti di fase del carico:

$$\bar{I}_1 = \bar{J}_1 = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}}; \quad \bar{I}_2 = \bar{J}_2 = \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}}; \quad \bar{I}_3 = \bar{J}_3 = \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}}$$

Le correnti di fase e di linea costituiscono una terna equilibrata.

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0$$

Diagramma  
Generatore-linea



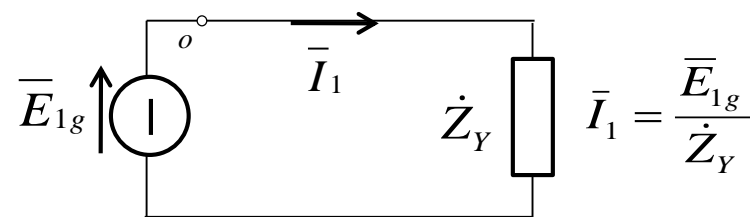
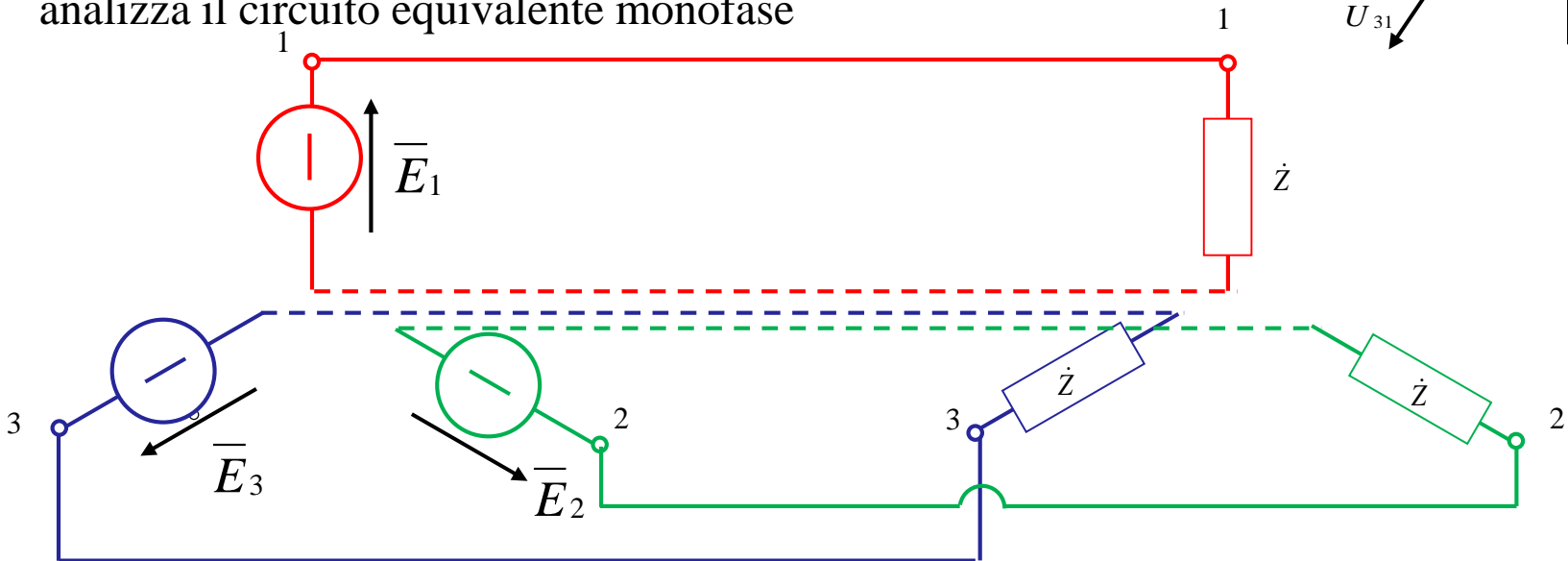
- La terna delle tensioni di linea è in anticipo di  $30^\circ$  rispetto a quelle di fase

$$|\bar{U}| = \sqrt{3} \cdot |\bar{E}|$$

- La terna delle correnti di fase del generatore  $\equiv$  la terna delle correnti di linea

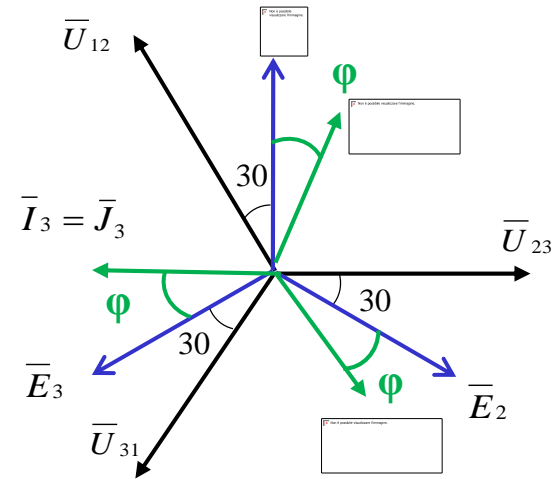
Soluzione alternativa: analisi per singole fasi.

Il circuito trifase Y-Y bilanciato può essere considerato come 3 circuiti monofasi uguali ma sfasati di  $120^\circ$  l'uno rispetto all'altro, dunque si prende in considerazione una sola fase, e si analizza il circuito equivalente monofase



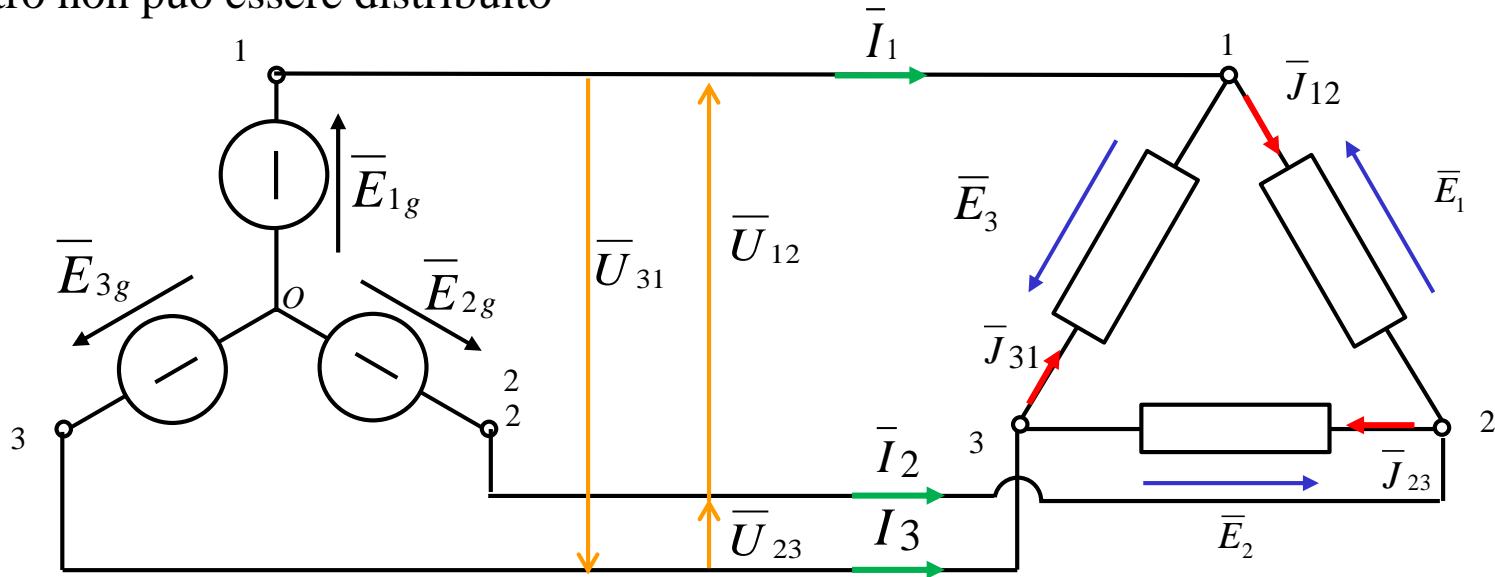
- Si ricava la  $\mathbf{I}_1$
- Nota la sequenza delle fasi è possibile ricavare la  $\mathbf{I}_2$  e la  $\mathbf{I}_3$

Diagramma line-carico



## 2. Collegamento Y-Δ bilanciato

Il neutro non può essere distribuito



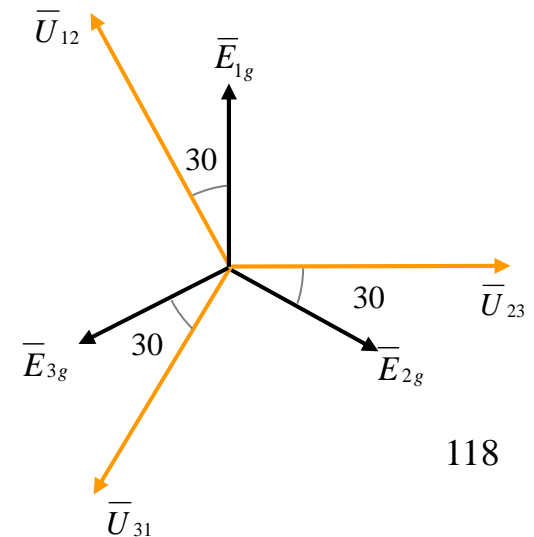
Grandezze note: tensione di fase del generatore, impedenza di carico.

Diagramma  
Generatore-linea

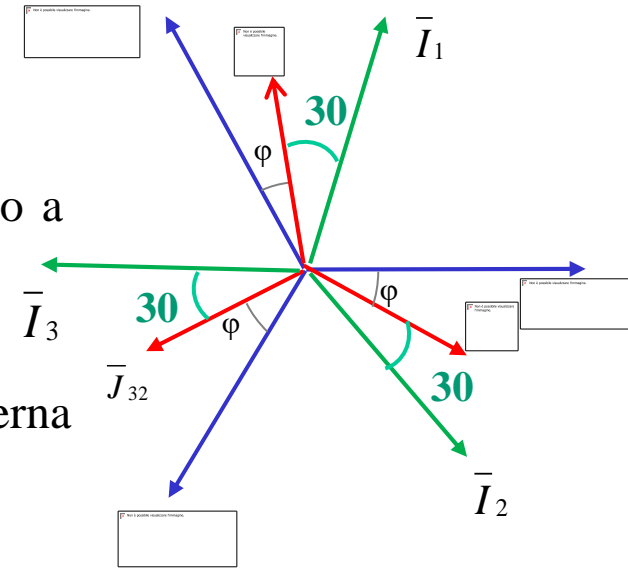
- La terna delle tensioni di linea è in anticipo di  $30^\circ$  rispetto a quelle di fase del generatore e



- Le terna delle tensione di fase del carico  $\equiv$  la terna delle tensioni di linea



## Diagramma linea-carico



- Le correnti di fase del carico sono:

$$\bar{J}_{12} = \frac{\bar{U}_{12}}{\bar{Z}}; \quad \bar{J}_{23} = \frac{\bar{U}_{23}}{\bar{Z}}; \quad \bar{J}_{31} = \frac{\bar{U}_{31}}{\bar{Z}}$$

- La terna delle correnti di linea è in ritardo di  $30^\circ$  rispetto a quelle di fase e

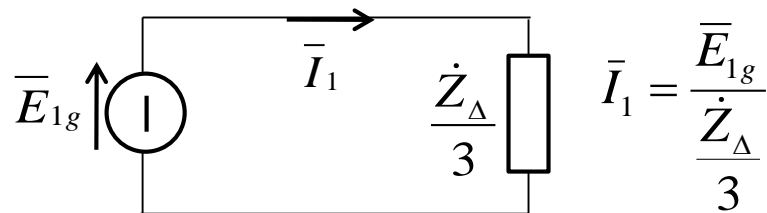
$$|\bar{I}| = \sqrt{3} \cdot |\bar{J}|$$

- La terna delle correnti di fase del generatore  $\equiv$  con la terna delle correnti di linea

Le terne delle correnti di fase e di linea sono equilibrate.

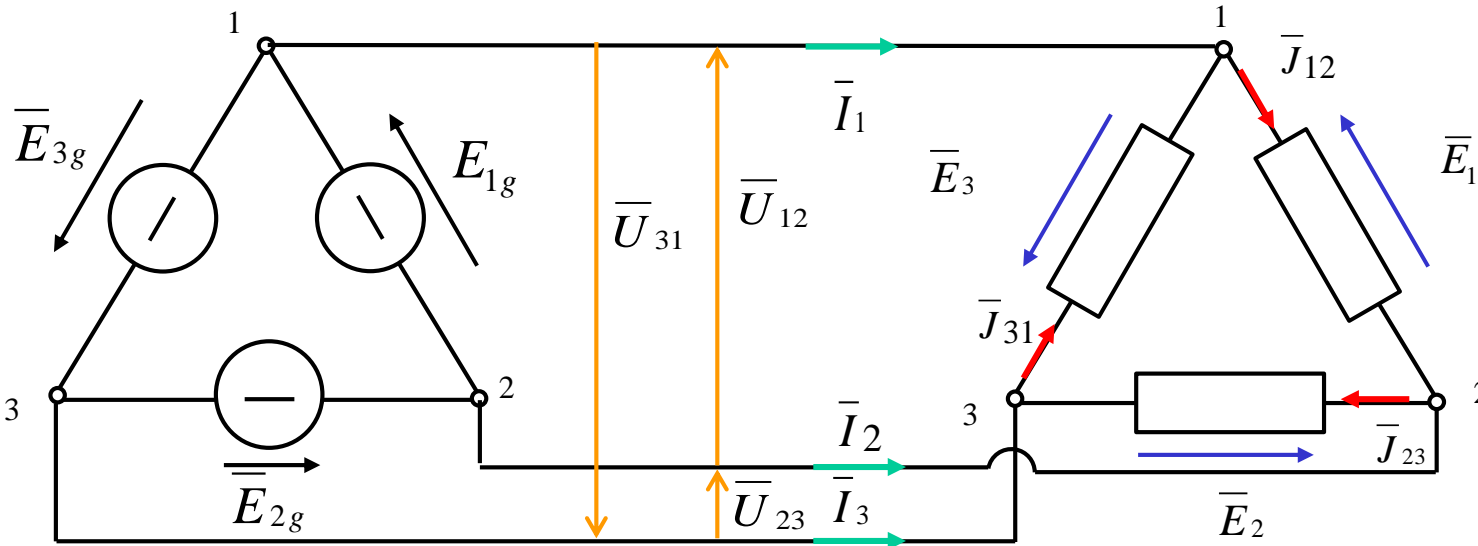
**Soluzione alternativa:** analisi per singole fasi.

si trasforma il carico nell'equivalente a stella, e si analizza il circuito equivalente monofase



Si ricava la corrente di linea  $\mathbf{I}_1$ , nota la sequenza delle fasi si ricava la  $\mathbf{I}_2$  la  $\mathbf{I}_3$ , da queste possono essere ricavate le correnti di fase.

### 3. Collegamento $\Delta$ - $\Delta$ bilanciato

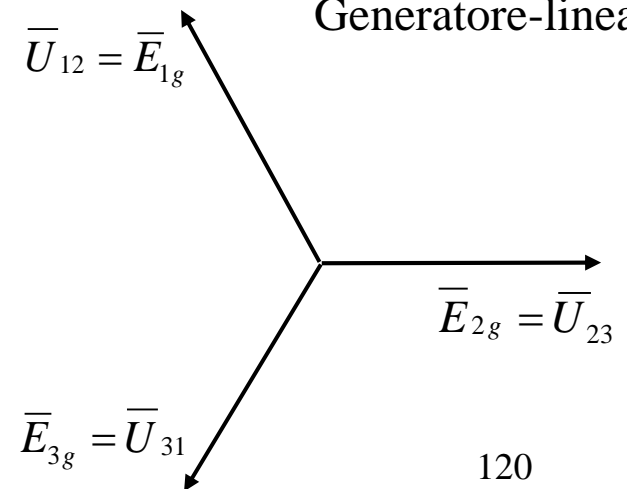


Il neutro non può essere distribuito

Grandezze note: tensione di fase del generatore, impedenza di carico.

- Le terna delle tensioni di linea  $\equiv$  La terna delle tensioni di fase del generatore
  - Le terna delle tensioni di fase del carico  $\equiv$  la terna delle tensioni di linea
- ↓
- La terna delle tensioni di fase del carico  $\equiv$  la terna delle tensioni di fase del generatore

Diagramma  
Generatore-linea





- Le correnti di fase del carico sono:

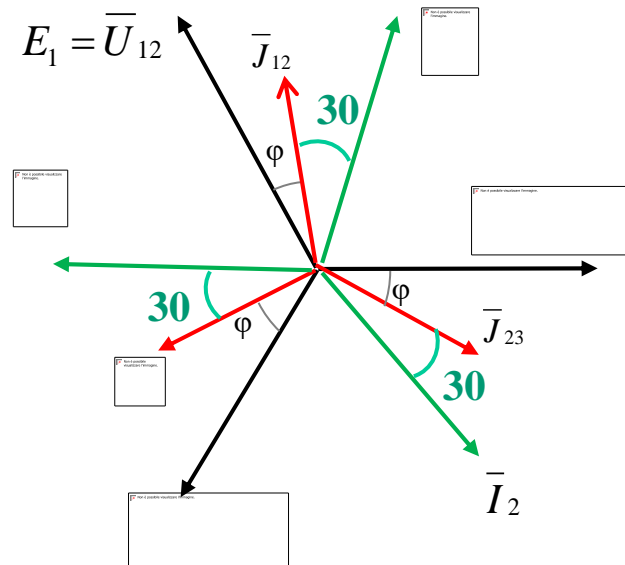
$$\bar{J}_{12} = \frac{\bar{U}_{12}}{\bar{Z}}; \quad \bar{J}_{23} = \frac{\bar{U}_{23}}{\bar{Z}}; \quad \bar{J}_{31} = \frac{\bar{U}_{31}}{\bar{Z}}$$

- La terna delle correnti di linea è in ritardo di  $30^\circ$  rispetto a quelle di fase e  $|\bar{I}| = \sqrt{3} \cdot |\bar{J}|$

- La terna delle correnti di fase del generatore è in anticipo di  $30^\circ$  rispetto a quelle di linea e



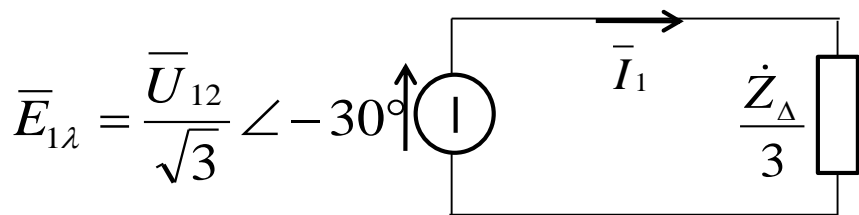
Diagramma linea-carico



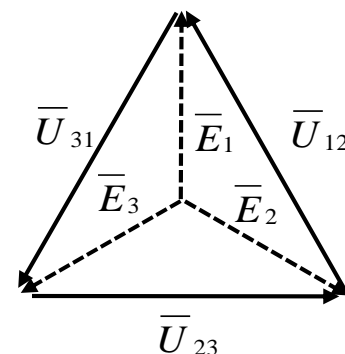
La terna delle correnti di fase e di linea sono equilibrate.

**Soluzione alternativa:** analisi per singole fasi.

Si trasformano sia i generatori che il carico nell'equivalente a stella, e si analizza il circuito equivalente monofase



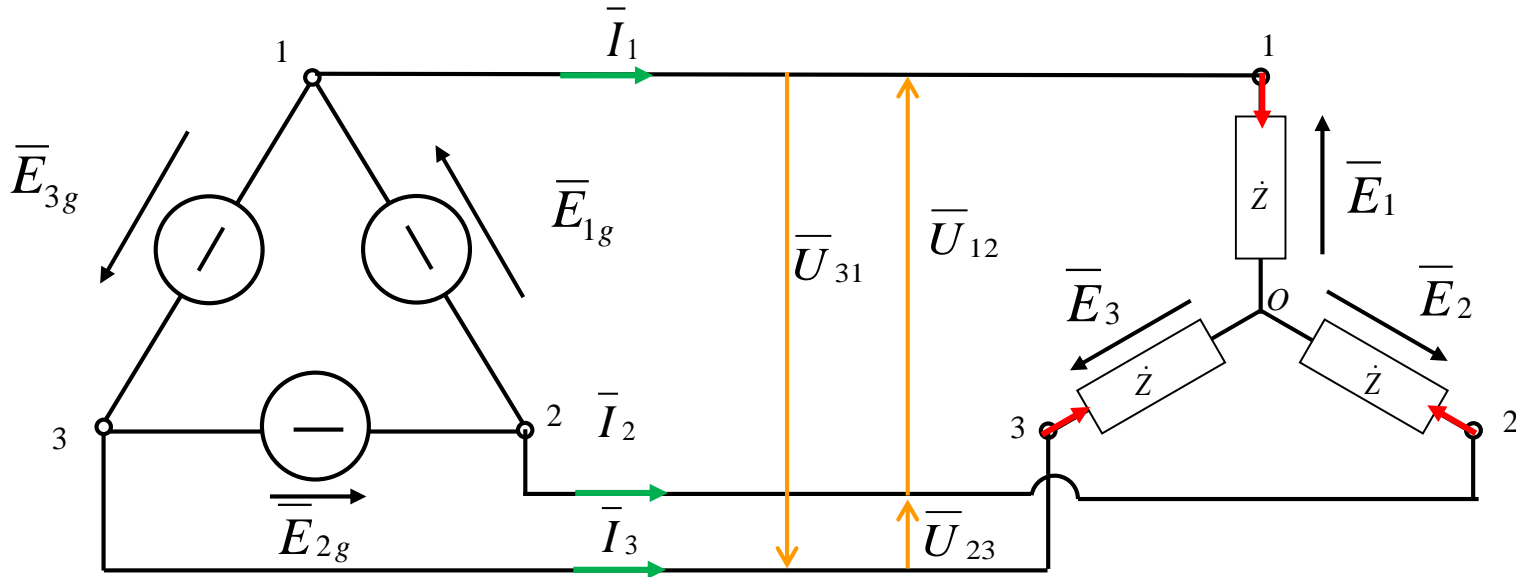
$$\bar{I}_1 = \frac{\frac{\bar{U}_{12}}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ}{\frac{\bar{Z}_\Delta}{3}}$$



Si ricava la corrente di linea  $\mathbf{I}_1$ , nota la sequenza delle fasi si ricava la  $\mathbf{I}_2$  la  $\mathbf{I}_3$ , e da queste possono essere ricavate le correnti di fase.

# Collegamento $\Delta$ -Y bilanciato

Il neutro non può essere distribuito

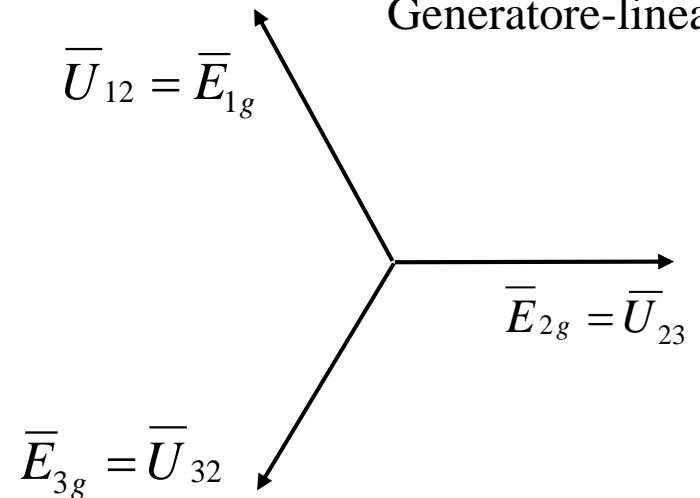


Grandezze note:

tensione di fase del generatore, impedenza di carico.

- Le tensioni di linea  $\equiv$  Le tensioni di fase del generatore

Diagramma  
Generatore-linea

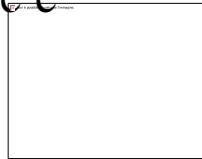


•La terna delle tensioni di fase del carico è in ritardo di  $30^\circ$  rispetto a quelle di linea e  $|\bar{E}| = \frac{|\bar{U}|}{\sqrt{3}}$

•Le correnti di linea  $\equiv$  le correnti di fase del carico:



• La terna delle correnti di fase del generatore è in anticipo di  $30^\circ$  rispetto a quelle di linea e

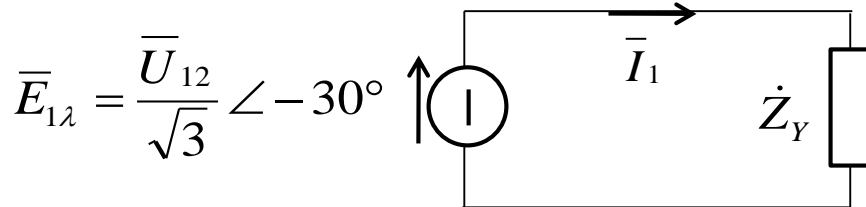
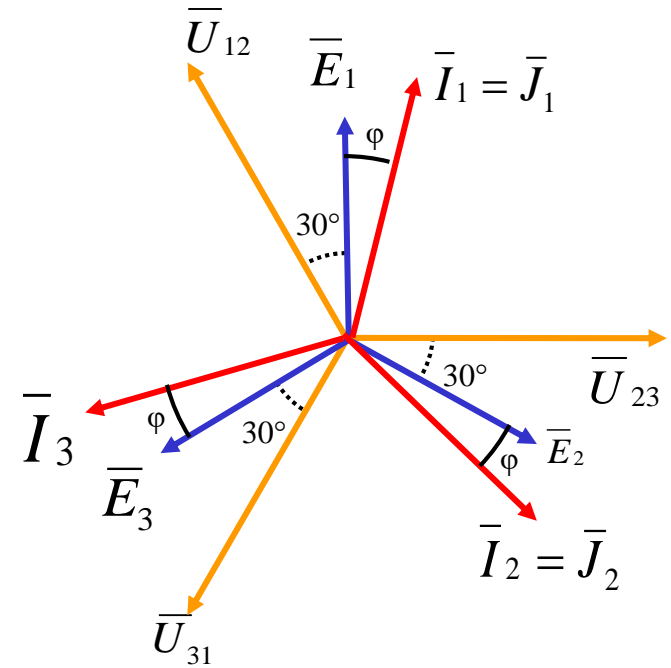


La terna delle correnti di fase e di linea sono equilibrate.

**Soluzione alternativa:** analisi per singole fasi.

Si trasformano i generatori nell'equivalente a stella, e si analizza il circuito equivalente monofase

Diagramma linea-carico

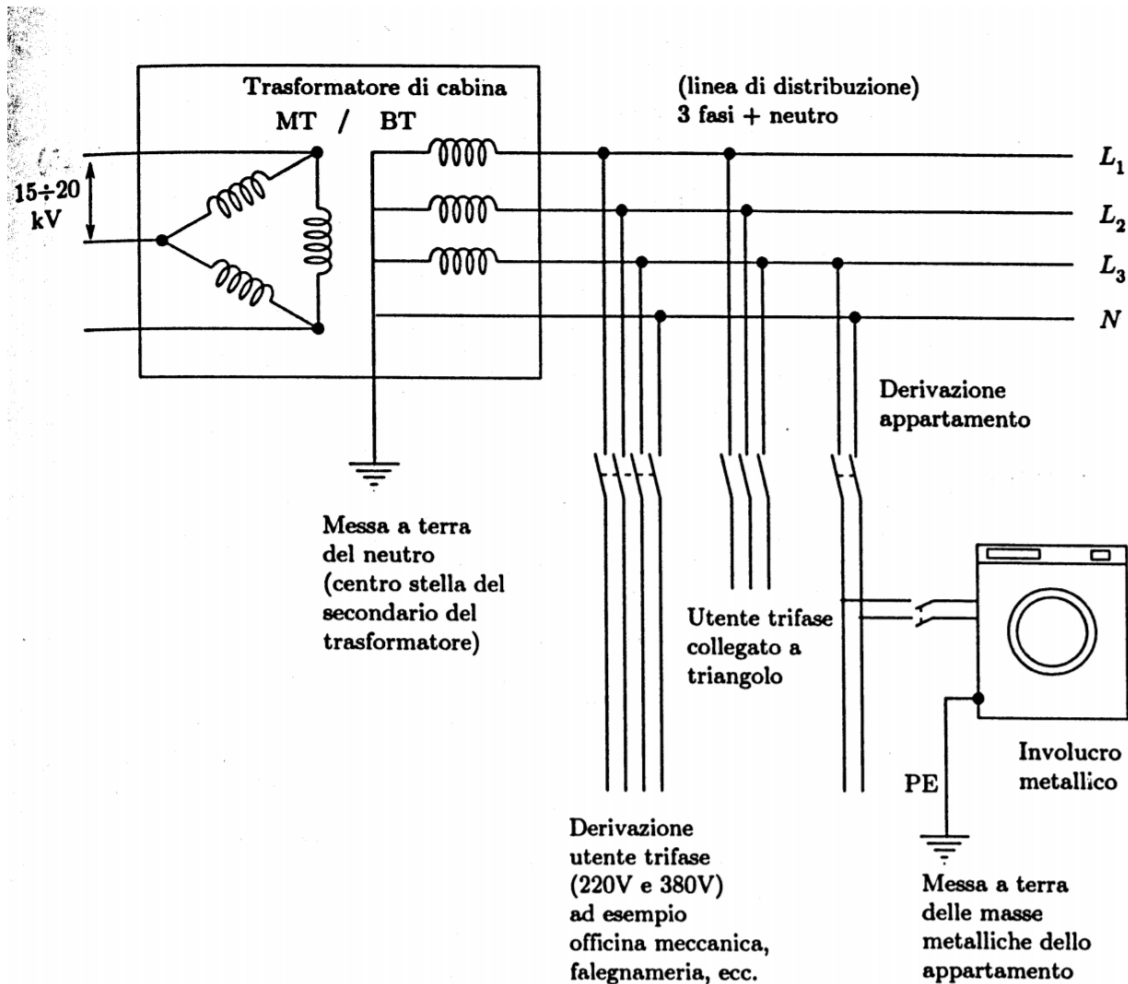


$$\bar{I}_1 = \frac{\frac{\bar{U}_{12}}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ}{\dot{Z}_Y}$$

Si ricava la  $\mathbf{I}_1$ , nota la sequenza delle fasi è possibile ricavare la  $\mathbf{I}_2$  la  $\mathbf{I}_3$

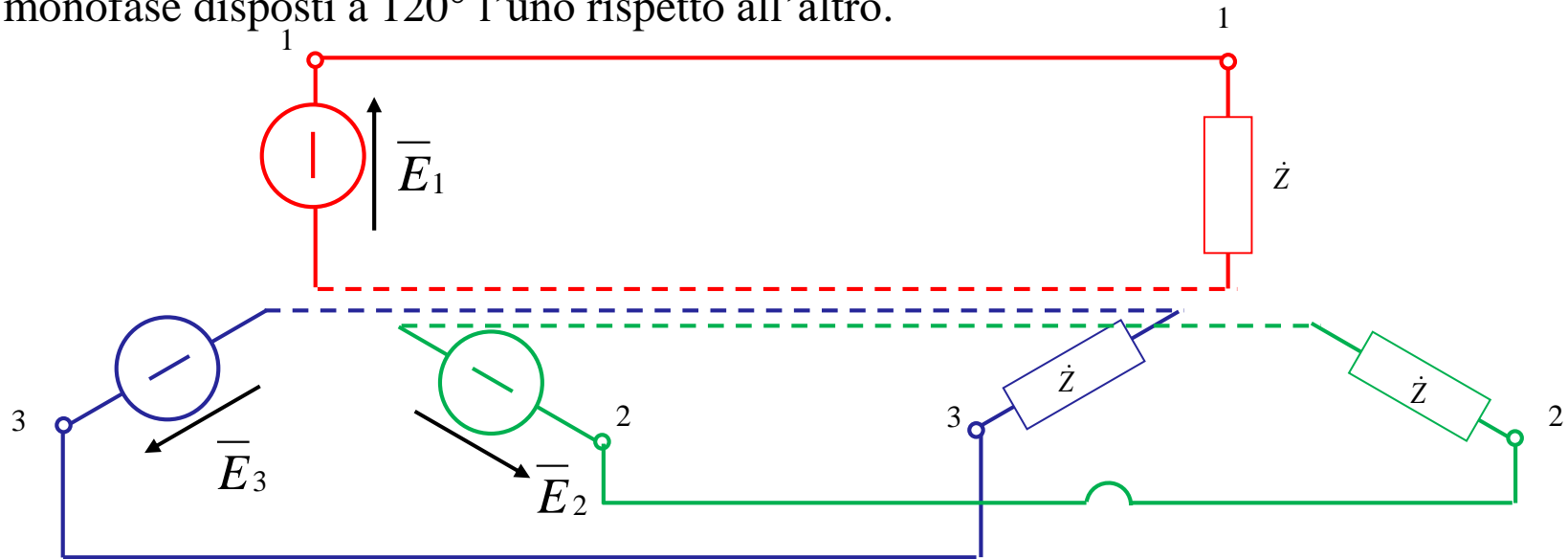
# Sistemi trifase

## Sistema di distribuzione in bassa tensione



# Potenza in un sistema trifase bilanciato

Data una qualunque configurazione bilanciata possiamo sempre ricondurci al suo equivalente Y-Y e perciò considerare il sistema trifase come costituito da tre circuiti monofase disposti a  $120^\circ$  l'uno rispetto all'altro.



**Per una singola fase**

$$P = |\bar{E}| \cdot |\bar{J}| \cos \varphi$$

$$Q = |\bar{E}| \cdot |\bar{J}| \sin \varphi$$

$$\dot{S} = P + jQ = \bar{E} \cdot \bar{J}^* = \dot{Z} \cdot |\bar{J}|^2 = \frac{|\bar{E}|^2}{\dot{Z}^*}$$

$$S = |\bar{E}| \cdot |\bar{J}|$$

**Per il sistema trifase**

$$P_T = P_1 + P_2 + P_3 = 3P = 3|\bar{E}| \cdot |\bar{J}| \cos \varphi$$

$$Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 3Q = 3|\bar{E}| \cdot |\bar{J}| \sin \varphi$$

$$\dot{S}_T = P_T + jQ_T = 3(P + jQ) = 3\bar{E} \cdot \bar{J}^* = 3 \cdot Z |\bar{J}|^2 = 3 \cdot \frac{|\bar{E}|^2}{Z^*}$$

$$S = |\dot{S}_T| = 3|\bar{E}| \cdot |\bar{J}^*| = 3E \cdot J$$

# Potenza in un sistema trifase bilanciato

Se usiamo le grandezze di linea al posto di quelle di fase

$$\begin{array}{l} \text{Collegamento} \\ \text{Y} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} |\bar{U}| = \sqrt{3} |\bar{E}| \\ |\bar{I}| = |\bar{J}| \end{array} \right. \Rightarrow P_T = \sqrt{3} |\bar{U}| \cdot |\bar{I}| \cos \varphi; Q_T = \sqrt{3} |\bar{U}| \cdot |\bar{I}| \sin \varphi$$

$$\begin{array}{l} \text{Collegamento} \\ \Delta \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} |\bar{U}| = |\bar{E}| \\ |\bar{I}| = \sqrt{3} |\bar{J}| \end{array} \right. \Rightarrow P_T = \sqrt{3} |\bar{U}| \cdot |\bar{I}| \cos \varphi; Q_T = \sqrt{3} |\bar{U}| \cdot |\bar{I}| \sin \varphi$$

**Nota bene:  $\varphi$  è l'angolo tra le grandezze di fase**

$$\dot{S}_T = P_T + jQ_T = 3(|\bar{E}| |\bar{J}| \cos \varphi + j |\bar{E}| |\bar{J}| \sin \varphi) = 3 |\bar{E}| |\bar{J}| e^{j\varphi} = 3 \bar{E} \cdot \bar{J}^*$$

$$\dot{S}_T = 3 |\bar{E}| |\bar{J}| e^{j\varphi} = \sqrt{3} |\bar{U}| |\bar{I}| e^{j\varphi}$$

$$S_T = 3 |\bar{E}| |\bar{J}| = \sqrt{3} |\bar{U}| |\bar{I}|$$

# Sistemi trifase

## Impiego

La **produzione, trasmissione e distribuzione e utilizzo** dell'energia elettrica avviene in maggior parte con sistemi trifase. I sistemi monofase sono impiegati in applicazioni specifiche impianti di piccola: impianti domestici, trazione etc.

## Vantaggi del sistema trifase rispetto al monofase:

- A parità di perdite di potenza in linea e tensione di alimentazione, nella costruzione della linea si **risparmia il 25% del rame**
- A parità di potenza trasportata la **corrente di linea è inferiore** di  $\sqrt{3}$ , questo significa che i componenti di linea (interruttori e sezionatori) devono essere dimensionati per correnti inferiori
- La terna trifase permette la generazione del **campo magnetico rotante** di ampiezza pari a  $3/2$  l'ampiezza del campo associato alle singole fasi. Il campo magnetico rotante è alla base del funzionamento delle macchine elettriche rotanti ad induzione.

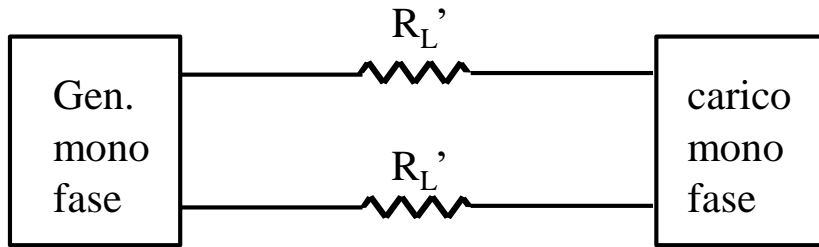
# Potenza dissipata in linea

Se la resistenza della linea non è trascurabile, la potenza dissipata nel singolo conduttore di linea è del tipo:

$$P = R_L \cdot |I|^2$$

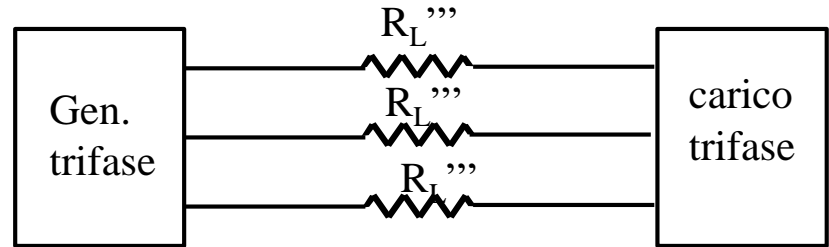
Potenza persa in nella linea monofase:

$$P_{L-monofase} = 2P' = 2(R'_L \cdot |I|^2)$$



Potenza persa in nella linea trifase:

$$P_{L-trifase} = 3P''' = 3(R'''_L \cdot |I|^2)$$



A parità di potenza di carico trasmessa  $P_c$  e di tensione di alimentazione  $V$ ,



$$P_{L-trifase} = 3(R'''_L \cdot |I|^2) = 3R'''_L \left( \frac{P_c}{\sqrt{3} \cdot V \cos \varphi} \right)^2$$

$$\frac{P_{L-monofase}}{P_{L-trifase}} = \frac{2R'_L \left( \frac{P_c}{V \cos \varphi} \right)^2}{3R'''_L \left( \frac{P_c}{\sqrt{3} \cdot V \cos \varphi} \right)^2} = 2 \frac{R'_L}{R'''_L}$$



# Potenza dissipata in linea

Se assumiamo che la potenza dissipata nelle nei due sistemi sia la stessa:

$$2 \frac{R'_L}{R'''_L} = 2 \frac{\rho L}{\pi (r')^2} \cdot \frac{\pi (r''')^2}{\rho L} = 1 \Rightarrow (r''')^2 = 0.5 \cdot (r')^2 \Rightarrow r''' = 0.71 \cdot r'$$

$$\text{volume materiale sistema monofase} = 2 \cdot (S' L) = 2\pi (r')^2 L$$

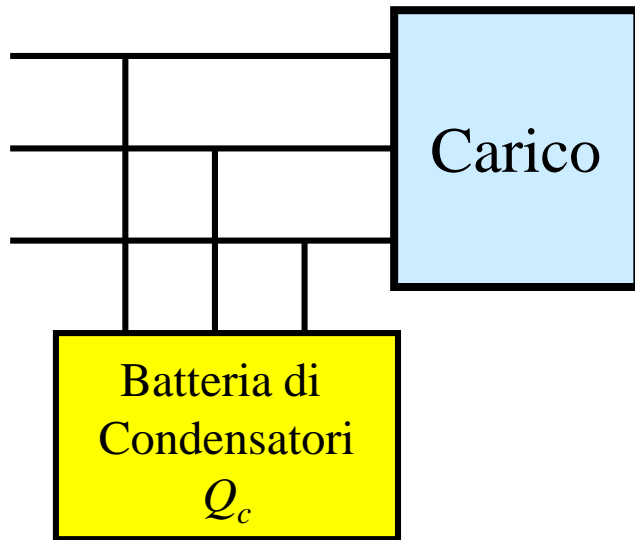
$$\text{volume materiale sistema trifase} = 3 \cdot (S''' L) = 3\pi (r''')^2 L$$

$$\frac{3 \cdot (S''' L)}{2 \cdot (S' L)} = \frac{3\pi r''' L}{2\pi r' L} = \frac{3 \cdot 0.5 \cdot (r')^2}{2(r')^2} = 0.75$$

A parità di energia trasportata, tensione di esercizio, lunghezza di linea e materiali impiegati con un sistema trifase è necessario il **75%** del materiale necessario ad sistema monofase.

# RIFASAMENTO DEI CARICHI TRIFASE

Rifasamento:  $\cos \varphi' > \cos \varphi$



$$P = P'$$

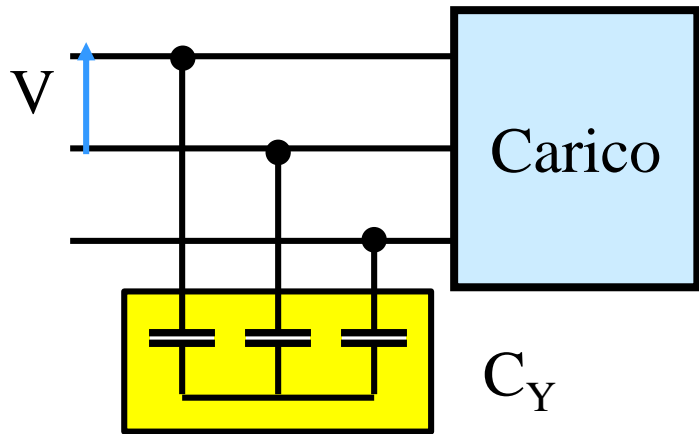
$$Q_c = Q - Q' = P \tan \varphi - P \tan \varphi'$$

$$3 \frac{|\bar{E}|^2}{X_c} = P(\tan \varphi - \tan \varphi')$$

$$C = \frac{P(\tan \varphi - \tan \varphi')}{3\omega |\bar{E}|^2}$$

- P e Q: rispettivamente potenza attiva e reattiva assorbite dal carico; esse coincidono con quelle erogate dal generatore trifase prima del rifasamento.
- P' e Q': rispettivamente potenza attiva e reattiva trifase erogate dal generatore dopo il rifasamento.
- $Q_c$ : potenza reattiva rifasante
- $\cos \varphi$  e  $\cos \varphi'$ : rispettivamente p.f. prima e dopo il rifasamento.

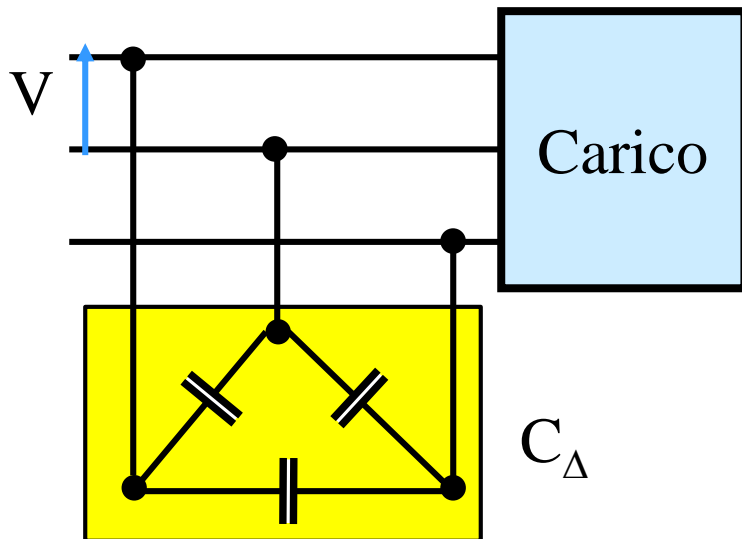
## Collegamento dei condensatori a stella



$$|\bar{V}| = \sqrt{3} |\bar{E}|$$

$$C_Y = \frac{P(\tan \varphi - \tan \varphi')}{\omega |\bar{V}|^2}$$

## Collegamento dei condensatori a triangolo



$$|\bar{V}| = |\bar{E}|$$

$$C_Y = \frac{P(\tan \varphi - \tan \varphi')}{3\omega |\bar{V}|^2}$$

$$C_\Delta = \frac{1}{3} C_Y$$