Facoltà di Economia

Corso di laurea in Scienze Economiche

Beatrice Venturi e Marco Desogus

Algebra delle Matrici

Definizione di una matrice

Una matrice A è definita da m righe e da n colonne come ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 3 & 5 \\ 9 & 1 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow a_{23} = 1$$

In questo caso la matrice è composta da 3 righe e 4 colonne. Se il numero delle righe è uguale al numero delle colonne la matrice si dice quadrata.

L'elemento della matrice è definito come:

$$a_{ij}$$

i indice di riga

j indice di colonna

Vettore riga e vettore colonna

Una matrice di dimensione $1 \times n$ è chiamata vettore riga:

$$\underset{1\times 5}{a} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Invece, una matrice di dimensione $m \times 1$ è chiamata vettore colonna:

$$\underset{5\times 1}{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Somma di matrici

Date due matrici A e B la loro somma, cioè A + B, è definita come $a_{ij} + b_{ij}$
Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 3 & 5 \\ 9 & 1 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 9 \\ 9 & 1 & 4 & 3 \\ 6 & 6 & 9 & 6 \end{pmatrix} = A + B = C = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 8 & 14 \\ 18 & 2 & 5 & 11 \\ 10 & 12 & 13 & 8 \end{pmatrix}$$

$$a_{23} = 1 \quad b_{23} = 4 \quad c_{23} = 5$$

Prodotto di una matrice per uno scalare

Se moltiplichiamo la matrice A di dimensione $m \times n$ per uno scalare λ, il risultato sarà una matrice λA sempre di dimensione $m \times n$, ottenuta moltiplicando lo scalare per ogni elemento della matrice.
Esempio:

$$\lambda = 2 \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 3 & 5 \\ 9 & 1 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2A = \begin{pmatrix} 6 & 16 & 6 & 10 \\ 18 & 2 & 2 & 16 \\ 8 & 12 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Prodotto righe per colonne

Per poter effettuare il prodotto righe per colonne tra due matrici è necessario che il numero delle colonne della prima matrice sia uguale al numero delle righe della seconda matrice

il prodotto righe per colonne è la matrice che si ottiene: mettendo nel “posto ij” il “prodotto scalare” tra i-esima riga della prima matrice per j-esima colonna della seconda matrice

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C = A \times B = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ -1 & -2 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

Prodotto righe per colonne

Dove gli elementi della matrice C sono uguali ad:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 7 & c_{12} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 6 = 14 \\ c_{21} = -1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 = -1 & c_{22} = -1 \cdot 2 + 0 \cdot 6 = -2 \\ c_{31} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 6 & c_{32} = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 6 = 12 \end{pmatrix}$$

Prodotto righe per colonne

Da notare:

$$\underset{(m\times n)}{A} \cdot \underset{(n\times h)}{B} = \underset{(m\times h)}{C}$$

Da ciò implica che se moltiplico un vettore riga per un vettore colonna ottengo uno scalare. Invece, se moltiplico un vettore colonna per un vettore riga ottengo una matrice:

$$\underset{1\times n}{a} \cdot \underset{n\times 1}{b} = \underset{1\times 1}{c} \qquad \underset{n\times 1}{b} \cdot \underset{1\times n}{a} = \underset{n\times n}{C}$$

Prodotto righe per colonne

esempio

$$\underset{1\times 2}{a} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \underset{2\times 1}{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad a \times b = 2 \cdot 5 + 4 \cdot 2 = 18$$

invece

$$\underset{2\times 1}{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \underset{1\times 2}{a} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad b \times a = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Matrice trasposta

Data una matrice $A = (a_{ij})$ si chiama matrice trasposta la matrice che ha per colonne le righe di A:

$$A' = (a_{ji})$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 2 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 6 & 8 & 5 \\ 4 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice nulla

Una matrice è definita nulla se contiene tutti gli elementi uguali a 0.

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 0 \end{pmatrix}$$

Determinate di una matrice

È possibile calcolare il determinate solo di una matrice quadrata.

Calcolo del determinate di una matrice di 2° ordine

$$\det(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Determinate di una matrice

Calcolo del determinate di una matrice di 3° ordine (regola di Sarrus):

$$\det(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \quad = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \left(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}\right)$$

Esempio:

$$\det(A) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$\det(A) = 3*6*4 + 4*2*5 + 1*4*7 - (5*6*7 + 7*2*3 + 4*4*4) =$$

$$\det(A) = 140 - 136 = 4$$

Proprietà dei determinanti

Se la matrice A ha due righe o due colonne uguali, oppure una riga o colonna di 0, il det(A)=0

Det(A*B) = det(A)*det(B) teorema di Binet

Se la matrice B è la matrice ottenuta da A scambiando di posto due righe o due colonne il det(B)= -det(A)

Det(A') = det(A)

Il det(A) non cambia se ad A sommiamo ad una riga o ad una colonna una combinazione lineare delle altre righe o colonne.

Il det(A+B) $\neq$ det(A)+det(B)

Il det(λA) = λdet(A)

Rango di una matrice

Sia A una matrice di m righe ed n colonne , si definisce rango o caratteristica di A l'ordine massimo dei minori non nulli che si possono estrarre da essa.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 9 \end{pmatrix} \quad \det(A) = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$$

Quindi il rango è 2

Matrice inversa

Una matrice è invertibile solo se il suo determinate è diverso da 0, l'inversa di una matrice quadrata A è un'altra matrice quadrata indicata con A^{-1} .

La matrice inversa è tale che:

$$A \times A^{-1} = I$$

$$A^{-1} \times A = I$$

Matrice identità

Matrice identità

La matrice identità è una matrice quadrata chiamata I dove a gli elementi della diagonale principale tutti uguale ad 1 mentre il restante uguali a zero.

Ad esempio:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 1 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Questa matrice risulta molto importante perché:

$$A \times I = A \qquad A \times A^{-1} = I \qquad A^{-1} \times A = I$$

Traccia di una matrice

La traccia di una matrice quadrata A e definita come la somma degli elementi che si trovano sulla diagonale principale.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 7 & 5 & 8 \\ 9 & 7 & 5 \end{pmatrix} \qquad tr(A) = 2 + 5 + 5 = 12$$

Diagonale principale

Matrice ortogonale

Una matrice quadrata A di ordine n si dice ortogonale se la sua inversa coincide con la sua trasposta, cioè se risulta:

$$A^{-1} = A'$$

LE MATRICI

$$\mathbf{A}(m,n)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- La matrice può essere scritta in forma sintetica come:
- **A** $(m, n) = [a_{ij}]$, $(i = 1, 2, \ldots m; j = 1, 2, \ldots n)$

- Una matrice è rettangolare se il numero di righe “m” è diverso dal numero di colone “n”.

- Se m = n la matrice si dice quadrata di ordine n .

- Un vettore riga è una matrice con una sola riga.
- Un vettore colonna è una matrice con una sola colonna.

- Data una matrice A(m,n) si definisce sottomatrice e si indica con S(h,k), una matrice costituita dagli elementi comuni ad h righe e k colonne della matrice A.
- Esempio:
- Dalla matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- è possibile estrarre $\binom{3}{2} \cdot \binom{2}{2} = 3$ sottomatrici quadrate di ordine 2.

- Si consideri una matrice quadrata, la linea che unisce gli elementi con pedici uguali $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$, viene denominata DIAGONALE PRINCIPALE .

- La linea che unisce i vertici Nord-Est e Sud-Ovest viene denominata DIAGONALE SECONDARIA.

- Si chiama traccia il numero dato dalla somma degli elementi della diagonale principale $\mathrm{tr}\,\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

- Una matrice si dice simmetrica
- se $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \ldots n)$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Una matrice si dice diagonale se
- $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$
- $a_{ij} = d_i$ se $i = j$

- Esempio

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

- Si scrive:
- **A** = diag ($d_1, d_2, \ldots, d_n$) = diag (1,-2,3,-7)

- Se $d_i = d$ per ogni $i = 1,2... n$ la matrice viene denominata scalare.
- Ad esempio:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

- d=-3

- La matrice identità è una particolare matrice scalare nella quale gli elementi della diagonale principale sono uguali ad 1:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- La matrice identità gioca nell'algebra delle matrici lo stesso ruolo del numero 1 nell'algebra dei numeri.

- La matrice (quadrata o rettangolare) che contiene solo elementi nulli viene denominata matrice nulla e viene indicata con la lettera *O.*

$$O_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

- La matrice nulla gioca, nell'algebra delle matrici, lo stesso ruolo che lo 0 gioca nell'algebra dei numeri.

- Data la matrice **A(m,n)** = $[a_{ij}]$ si chiama matrice trasposta la matrice $\mathbf{A}^T(n,m) = [a_{ji}]$.
- Proprietà:
- $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$
- $\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^T = \mathrm{tr}\,\mathbf{A}$
- $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ se la matrice è simmetrica.
- Il trasposto di un vettore riga è un vettore colonna (e viceversa).

- **SOMMA E DIFFERENZA TRA MATRICI:**
- Date due matrici, $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]$, che hanno le stesse dimensioni, si definisce matrice somma la matrice avente le stesse dimensioni di A e B e cui elementi sono la somma degli elementi corrispondenti in A e B:
    - $\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij}+b_{ij}]$
- $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$
- $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

- La giacenza iniziale del magazzino è

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

- La matrice di approvvigionamento è data da:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

- La giacenza finale è:

$$\mathbf{A} + B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

- Il prodotto RIGHE PER COLONNE tra due matrici può essere eseguito se il numero di colonne della prima matrice è uguale al numero di righe della seconda matrice.
- Date le due matrici **A(m,p)**= [a_{ik}] e **B(p,n)** = [b_{kj}] la matrice
- prodotto **C(m,n)** = [c_{ij}] ha elementi espressi da

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

- **AB** $\neq$ **BA**
- **A**(**B** + **C**) = **AB** + **AC**
- **A**(**BC**) = (**AB**)**C**
- **AB** = **0** non implica **A** = **0** oppure **B** = **0**
- (**A B**)^T = **B**^{T}**A**^{T}

- Si consideri la matrice di giacenza di magazzino di 4 prodotti in 3 negozi :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 5 & 0 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

- I prezzi unitari dei 4 prodotti sono raccolti in un vettore colonna

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 8 \\ 50 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

- Il valore del magazzino si ottiene moltiplicando la matrice A per il vettore p, ottenendo:

$$\mathbf{A}p = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 5 & 0 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 50 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*8+2*50+5*10+5*20 \\ 286 \\ 260 \end{bmatrix}$$

- Il sistema $\begin{cases} \frac{x}{2}+y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$ può essere scritto come Ap=c dove

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Si chiama prodotto interno (o moltiplicazione scalare) tra due vettori il numero definito da:

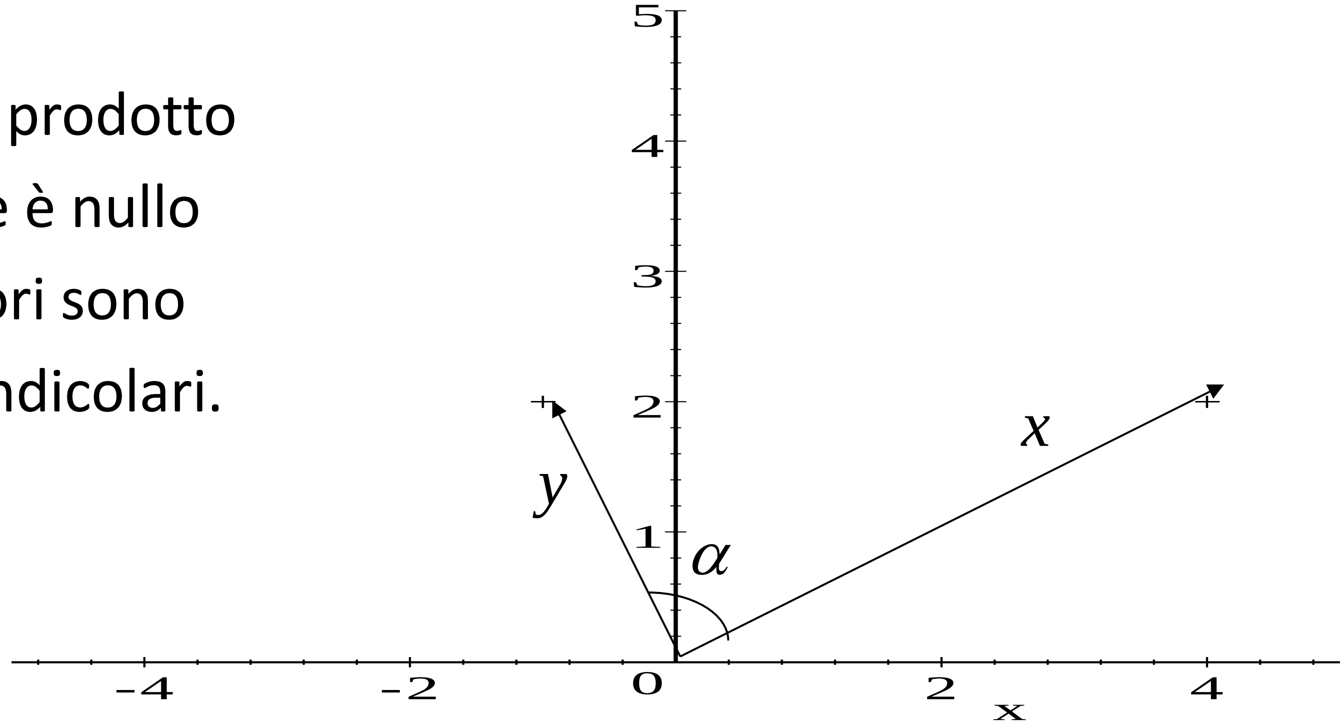
$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = |x| \cdot |y| \cdot \cos\alpha$$

- Due vettori non nulli per i quali il prodotto interno è nullo si dicono ortogonali.

- Si considerino i due vettori :

$$x = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Il loro prodotto scalare è nullo
- I vettori sono perpendicolari.



- Data una matrice quadrata **A s**i definisce matrice inversa A^{-1}
- la matrice che soddisfa la proprietà:
- A A^{-1} = A^{-1} A = I

- Per calcolarla occorre stabilire prima le condizioni di esistenza della matrice inversa.
- Si ricorda che un numero reale è dotato di inverso moltiplicativo se è diverso da 0.

- **DETERMINANTE**
- Il determinante è un numero che viene associato ad una matrice quadrata.
- Se la matrice è di ordine 1 allora il determinante è espresso dal valore dell'unico elemento che costituisce la matrice:

$$\mathbf{A}_1 = \left[a_{11}\right] \quad \Longrightarrow \quad \det \mathbf{A}_1 = a_{11}$$

- Se la matrice è di ordine 2, il determinante è espresso dalla differenza tra il prodotto degli elementi della diagonale principale e il prodotto degli elementi della diagonale secondaria. Infatti…

- Si sceglie una linea (una riga o una colonna).
- Per ogni elemento a_{ij} della linea scelta, si calcola il prodotto tra l'elemento, il valore di $(-1)^{i+j}$ e il valore del determinante della sottomatrice di A che si ottiene eliminando la riga i-esima e la colonna j-esima.
- Si sommano, per tutti gli elementi della linea scelta, i prodotti ottenuti.

- In modo analogo si procede per una qualunque matrice di ordine 3. Ad esempio se si considera la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

- Se si sceglie la prima riga si ottiene:

$$|\mathbf{A}| = 1 \cdot (-1)^{1+1} \det\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+2} \det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+3} \det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$1 \cdot 1 \cdot (-13) + 0 + 3 \cdot 1 \cdot 11 = -13 + 33 = 20$$

- Sia A una **matrice quadrata** di ordine **n**, si consideri l’elemento a_{ij} si indichi con A_{ij} la sottomatrice di A ottenuta eliminando la riga i e la colonna j. Si definisce
- **minore complementare** M_{ij} del determinante di A_{ij} .
- **complemento algebrico** $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

- Il determinante viene quindi espresso da

$$\det \mathbf{A}_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

- **CONDIZIONI DI ANNULLAMENTO DEL DETERMINANTE DI UNA MATRICE**

1. Se in A c’è almeno una riga (colonna) nulla
2. Se in A ci sono almeno due righe (colonne) uguali
3. Se in A ci sono due righe (colonne) proporzionali
4. Se in A c’è una riga (colonna) che è combinazione lineare di almeno due righe di A

- Un concetto chiave: il rango di una matrice.

- *“Il rango di una matrice è l’ordine massimo dei minori diversi da 0”*

- Il rango rappresenta il numero di righe (colonne) linearmente indipendenti.

- Si consideri la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ il suo rango è 2.
- *Infatti la seconda riga è la somma della prima e della terza*
- Si consideri la matrice $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 3 \\ -2 & +4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ il rango è 3.
- *Infatti esiste la sottomatrice di ordine 3 ottenuta eliminando la prima colonna che ha il det diverso da 0*

- La matrice inversa di A è l’unica matrice che soddisfa:
- $\mathbf{AA^{-1} = A^{-1}A = I}$

- ***La matrice A di ordine*** n ***è invertibile se e solo se è non singolare e in tal caso risulta*** $$\mathbf{A}_n^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}_n} \mathbf{A}_n^{*}$$

- In cui A^{*} è chiamata matrice aggiunta di A.

- **Procedura per calcolare l’inversa di A.**

1. Calcolare il det A. Se è nullo la matrice non è invertibile.
2. Calcolare la trasposta.
3. Calcolare l’aggiunta di A (ovvero la matrice i cui elementi sono i complementi algebrici degli elementi della trasposta)
4. Dividere gli elementi dell’aggiunta per il det A.

- Si consideri un sistema di m equazioni lineari in n incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- In forma matriciale **Ax=b.**
- Se b è nullo il sistema si dice **omogeneo.**

- La matrice A dei coefficienti è data da:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Il vettore x delle incognite e il vettore dei termini noti sono:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

- **Teorema di Rouchè Capelli**
- ***Un sistema lineare di*** *m* ***equazioni in*** *n* ***incognite è compatibile se e solo se la matrice incompleta e la matrice completa hanno rango uguale.***

- La matrice completa è la matrice che si ottiene inserendo nella matrice A, come n+1-esima colonna il vettore dei termini noti.

$$\mathbf{K} = \left[\mathbf{A} \quad \vdots \quad \mathbf{b}\right]$$

- Se r(A)=r(K)=*r* allora il sistema ammette ∞^{n-r} soluzioni. Se *n*-*r*=0 esiste un'unica soluzione e il sistema si dice determinato.

- Se il sistema è omogeneo allora A e K hanno sempre lo stesso rango e quindi il sistema ammette sempre soluzione (infatti ammette la soluzione nulla).

- Si consideri il seguente sistema di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$$

- Il rango di A è 1 mentre il rango di K è 2 $\Rightarrow$ quindi il sistema non è risolvibile.
- Infatti i primi membri delle equazioni sono uguali (e quindi il rango di A è 1) mentre i secondi membri sono diversi (rango di K uguale a 2). C'è incompatibilità tra primo e secondo membro nelle equazioni:
- <u>**la somma delle incognite o è uguale a 2 o a 4.**</u>

- **Procedura per risolvere un sistema di equazioni lineari.**

1. Calcolare il r(A) e il r(K). Se sono diversi il sistema non ha soluzioni.
2. Sia *r* il rango comune e sia $\hat{A}$ la sottomatrice di A che è servita per calcolare il rango *r*
3. Si eliminino le equazioni che non hanno coefficienti in $\hat{A}$
4. Si portino a secondo membro le incognite i cui coefficienti non appartengono ad $\hat{A}$

- Il sistema è stato riscritto nella forma:

$$\hat{A}\,\hat{x} = \hat{b}$$

- Dove $\hat{x}$ è il vettore delle incognite “vere” e
- Dove $\hat{b}$ è il vettore dei nuovi termini noti dove sono presenti *n-r* incognite che giocano il ruolo di parametri.

- Il sistema si risolve calcolando l’inversa di $\hat{A}$ e :

$$\hat{x} = \left(\hat{A}\right)^{-1} \cdot \hat{b}$$

Sistemi lineari
Metodo di Cramer

- **MATRICI E DETERMINANTI**
- **RISOLUZIONE DI SISTEMI COL METODO DI CRAMER**

CRAMER
(1704- 1752)

PRIMA DI STUDIARE LA RISOLUZIONE DI UN SISTEMA COL METODO DI CRAMER DOBBIAMO DARE ALCUNE DEFINIZIONI

CHIAMIAMO MATRICE 2x2 UN INSIEME DI QUATTRO NUMERI DISPOSTI IN MODO DA FORMARE 2 RIGHE E 2 COLONNE CHE INDICHIAMO CON LA SCRITTURA:

$$\begin{array}{cc} \textbf{COLONNE} & \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \textbf{RIGHE} \end{array}$$

CHIAMIAMO <u>DETERMINANTE</u> CORRISPONDENTE A TALE MATRICE LA DIFFERENZA DEI PRODOTTI TRA GLI ELEMENTI DELLA DIAGONALE DISCENDENTE E QUELLI DELLA DIAGONALE ASCENDENTE E LO INDICHIAMO CON:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

PER ESEMPIO, LA MATRICE:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

HA DETERMINANTE:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-1) \cdot 3 = 11$$

CONSIDERIAMO UN SISIEMA LINEARE NELLA FORMA:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

**CHIAMIAMO <u>MATRICE DEL SISTEMA</u>
LA MATRICE DEI COEFFICIENTI
DELLE INCOGNITE PRESENTI :**

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$$

QUINDI IL **DETERMINANTE DELLA MATRICE DEL SISTEMA** SARA':

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

CHIAMIAMO DETERMINANTE DELLA X:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b$$

OTTENUTO SOSTITUENDO NEL DETERMINANTE Δ DEL SISTEMA I TERMINI NOTI *c* E *c'* RISPETTIVAMENTE AL POSTO DEI COEFFICIENTI *a* E *a'* DELL'INCOGNITA *x*

IN MODO ANALOGO CHIAMIAMO
<u>DETERMINANTE DELLA y</u> :

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c'$$

OTTENUTO SOSTITUENDO *c* E *c'* RISPETTIVAMENTE AL POSTO DEI COEFFICIENTI *b* E *b'* DELL'INCOGNITA *y*

CONSIDERIAMO ORA IL SISTEMA

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

APPLICANDO IL SECONDO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA DELLE EQUAZIONI E LE PROPRIETA' DELLE UGUAGLIANZE POSSIAMO SCRIVERLO NELLA FORMA:

$$\begin{cases} (ab' - a'b)x = b'c - bc' \\ (ab' - a'b)y = ac' - a'c \end{cases}$$

CON L'INTRODUZIONE DEI NUOVI SIMBOLI IL SISTEMA ASSUME LA FORMA

$$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_x \\ \Delta \cdot y = \Delta_y \end{cases}$$

DA CUI SI OTTENGONO FACILMENTE LE SOLUZIONI DEL SISTEMA

SI POSSONO PRESENTARE <u>TRE CASI</u>:

$$\Delta \neq 0$$

<u>SISTEMA DETERMINATO</u>

SOL.

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} \\ y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} \end{cases}$$

$$\Delta = 0$$

$$\Delta_x \neq 0 \wedge \Delta_y \neq 0$$

<u>SISTEMA IMPOSSIBILE</u>

$$\Delta_x = \Delta_y = 0$$

<u>SISTEMA INDETERMINATO</u>

ENUNCIAMO LA REGOLA DETTA DI CRAMER:

CONSIDERATO UN SISTEMA DI PRIMO GRADO E CIOE' RICONDUCIBILE ALLA FORMA

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

SE RISULTA: $ab' - a'b = \Delta \neq 0$

IL SISTEMA E' DETERMINATO E LA SUA SOLUZIONE E' DATA DALLE FORMULE

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

ESEMPIO

RISOLVIAMO IL SISTEMA:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 3 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

SCRIVIAMO LA **MATRICE DEL SISTEMA**:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

TROVIAMO IL SUO **DETERMINANTE:**

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 -(-15)= 4+15= 19$$

IL **SISTEMA** E' **DETERMINATO** POICHE':

$$\Delta \neq 0$$

SOSTITUIAMO AI COEFFICIENTI DELLA x I TERMINI NOTI E OTTENIAMO LA MATRICE DELL'INCOGNITA x:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

CALCOLIAMO IL DETERMINANTE DI x:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 6 - (-5 \text{ x } 7) = 6 + 35 = 41$$

SOSTITUIAMO AI COEFFICIENTI DELLA y I TERMINI NOTI E OTTENIAMO LA MATRICE DELL'INCOGNITA y

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

TROVOIAMO IL SUO DETERMINANTE :

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 9 = 5$$

USANDO LE 2 BREVI FORMULE GIÀ ENUNCIATE PRIMA TROVIAMO IL VALORE DI X E Y

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \longrightarrow x = \frac{41}{19}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \longrightarrow y = \frac{5}{19}$$

RIASSUMENDO:

IL METODO DI CRAMER CONSISTE NEL RICAVARE I TRE DETERMINANTI (Δ; Δ_x ; Δ_y) E APPLICARE LE FORMULE

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} \\ \\ y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} \end{cases}$$

VI E' UNA CONDIZIONE INDISPENSABILE PER POTER APPLICARE QUESTO METODO

$$\Delta \neq 0$$

SE INVECE:

$$\Delta = 0$$

- **IL SISTEMA E' <u>INDETERMINATO</u> SE ANCHE:**

$$\Delta_x = \Delta_y = 0$$

- **IL SISTEMA E' <u>IMPOSSIBILE</u> SE:**

$$\Delta_x \neq 0 \wedge \Delta_y \neq 0$$

Sistemi lineari

I sistemi di equazioni di I grado

Diamo la seguente definizione:

Un **sistema di equazioni** è un insieme di due o più equazioni, tutte nelle stesse incognite, di cui cerchiamo soluzioni comuni.

L'**insieme delle soluzioni** di un sistema è formato da quei valori delle incognite che soddisfano **tutte** le equazioni che compongono il sistema.

Il grado di un sistema di equazioni è il prodotto dei gradi delle singole equazioni che vi figurano perciò un sistema si dirà di primo grado se tutte le equazioni in esso presenti sono di primo grado

Un sistema lineare, ridotto a forma normale, si presenta così:

$$\begin{cases} a\,x + b\,y = c \\ a_1 x + b_1 y = c_1 \end{cases}$$

PERCHE' SI CHIAMANO LINEARI?

Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -x + 1 \end{cases}$$

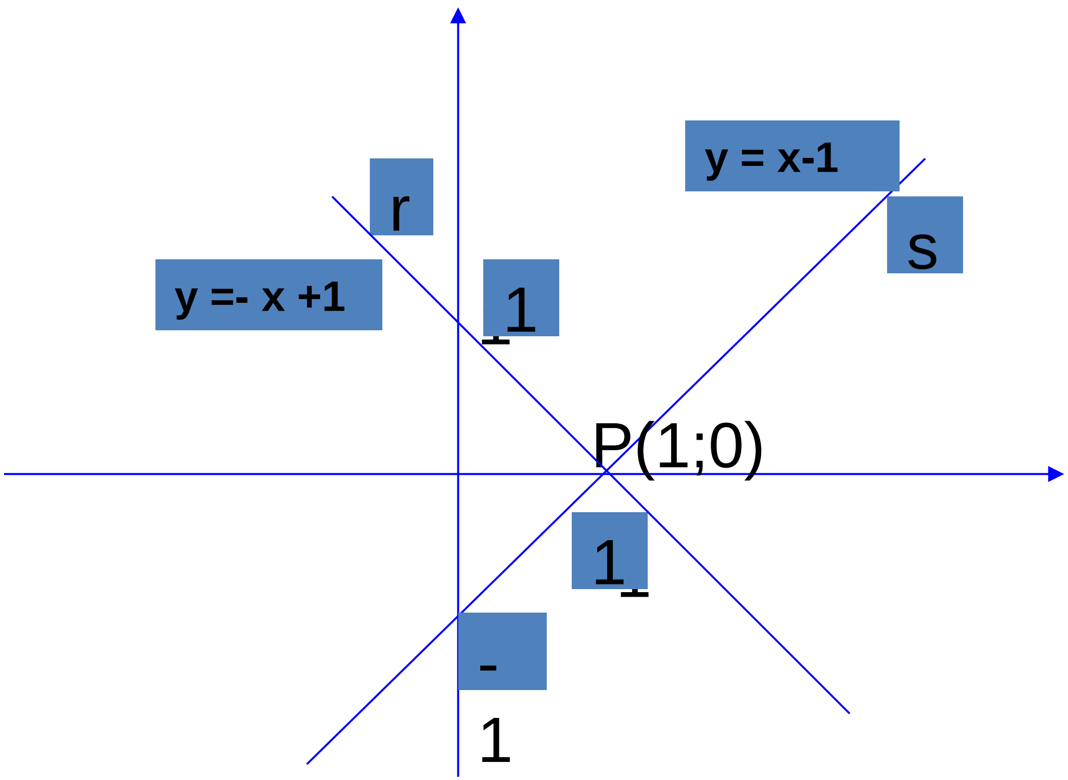
Esso è di primo grado poiché le sue equazioni sono entrambe di primo grado nelle incognite x e y .

Ciascuna delle due equazioni nel piano cartesiano rappresenta una retta.

Disegniamo nel piano cartesiano le due rette : se esse sono incidenti il punto comune sarà la soluzione del sistema cioè le sue coordinate x e y sono la coppia di numeri soluzione del sistema.

Tracciamo le due rette che rappresentano graficamente le equazioni:

s: y = x – 1 e r: *y = -x + 1*



Per la retta s: y = x -1

Determiniamo due punti:

x	y
0	-1
1	0

Per la retta r: y = - x +1

x	y
0	1
1	0

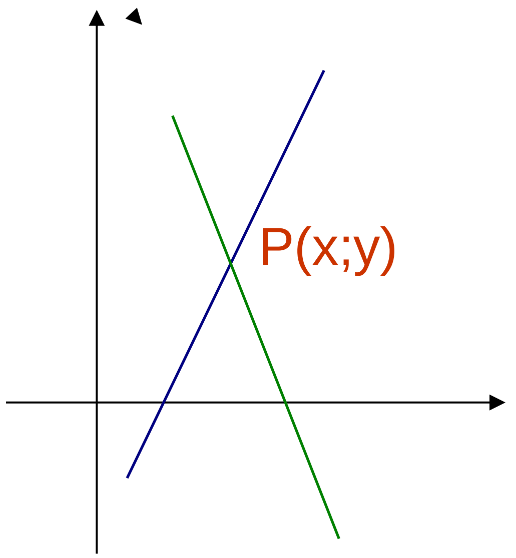
Il punto P(1 ; 0) è la soluzione grafica del nostro sistema

Quante soluzioni ha un sistema di questo tipo?

Un sistema può avere:

- ***Una soluzione (x ; y) e in tal caso si dice determinato;***
- ***Nessuna soluzione e in tal caso si dice impossibile;***
- ***Infinite soluzioni e in tal caso si dice indeterminato***

Una soluzione si ha quando le rette che rappresentano le equazioni del sistema sono incidenti

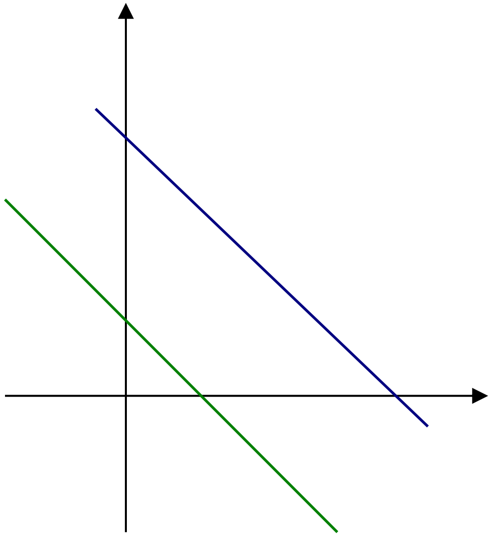


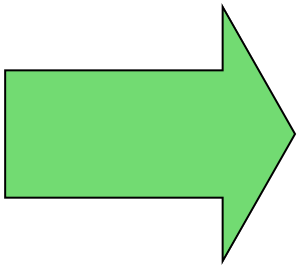
Il sistema ha

Una sola soluzione P(x ; y)

1 punto in comune

Nessuna soluzione se le rette che rappresentano le equazioni del sistema sono parallele e distinte





Il sistema

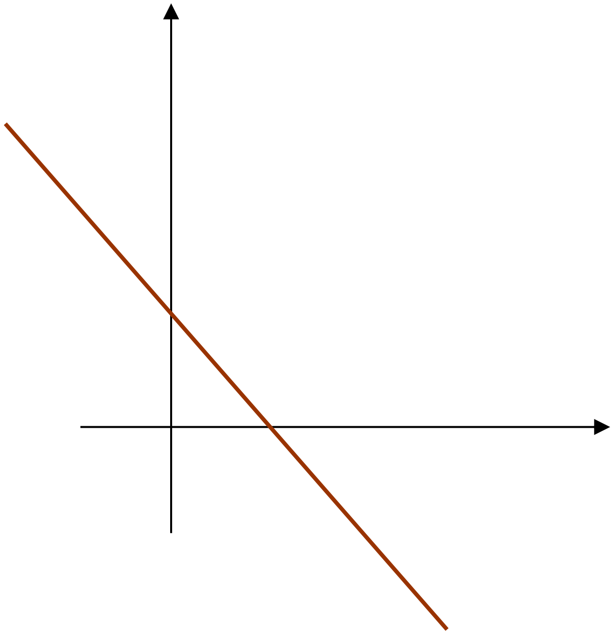
Non ha soluzione;

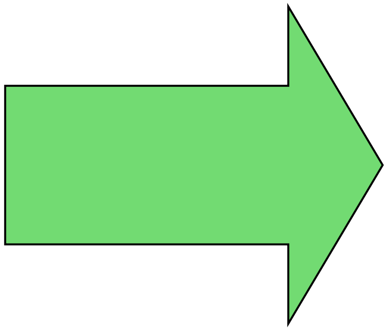
Il sistema è

IMPOSSIBILE

Nessun punto in comune

Infinite soluzioni se le rette sono parallele e coincidenti





Il sistema ha

Infinite soluzioni;

Il sistema è

INDETERMINATO

Infiniti punti in comune

A cosa servono i sitemi lineari

Molti sono i problemi di varia natura che possono essere risolti utilizzando i sistemi lineari.

Consideriamo il seguente problema:

Un Hotel possiede camere con vista mare ad un costo di 120 euro a notte e camere standard ad un costo di 100 euro a notte. Quando l’ albergo è al completo, in un solo giorno, l’ incasso è di 10400 euro. Sapendo che l’ albergo ha100 camere in tutto, quante camere con vista ci sono?

Costruiamo un modello che rappresenti il problema:

chiamiamo x il numero di camere con vista e y quello delle camere standard; poiché in tutto sono 100 deve risultare :

- **1) $x + y = 100$**

inoltre l' incasso di una notte per tutte le camere deve essere 10400 euro perciò:

- **2) $120x+100y= 10400$**

le due condizioni devono valere entrambe quindi

occorre risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 120x + 100y = 10400 \end{cases}$$

Per la risoluzione di questo sistema ci sono diversi metodi (noi lo risolviamo adesso con il metodo di sostituzione)

Metodi algebrici per risolvere un sistema lineare

Metodo di sostituzione

Metodo del confronto

Metodo di riduzione o di eliminazione

METODO Di CRAMER

METODO DEL CONFRONTO

Questo metodo consiste nell' esplicitare entrambe le equazioni rispetto alla stessa incognita così da potere uguagliare i secondi membri . Vediamo un esempio:

$$\begin{cases} 4x - y = 5 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{y+5}{4} \\ x = -2y + 8 \end{cases}$$

Poiché i primi membri sono uguali devono esserlo anche i secondi membri,
perciò scriviamo e risolviamo l'equazione:

$$\frac{y+5}{4} = -2y + 8 \Rightarrow y + 5 = -8y + 32$$

$$9y = 27 \Rightarrow y = 3$$

Sostituiamo:

$$x = -2(3) + 8 \Rightarrow x = 2$$

Metodo di sostituzione

•Risolviamo il sistema precedente con il metodo di sostituzione:

$$\begin{cases} x + y = +100 \\ 120x + 100y = 10400 \end{cases}$$

•Risolviamo una delle due equazioni rispetto ad un' incognita, nell'esempio la prima delle equazioni è stata risolta rispetto alla x

$$\begin{cases} x = 100 - y \\ 120x + 100y = 10400 \end{cases}$$

•Sostituiamo nell'altra equazione l' espressione trovata e calcoliamo il valore della y

$$\begin{cases} x = 100 - y \\ 120(100 - y) + 100y = 10400 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 100 - y \\ 12000 - 120y + 100y = 10400 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 100 - y \\ 20y = 1600 \end{cases}$$

•Una volta calcolato il valore di *y* lo sostituiremo di nuovo nell'equazione esplicitata in *x*

$$\begin{cases} x = 20 \\ y = 80 \end{cases}$$

soluzione

Nell’ albergo ci sono 20 camere con vista mare e le altre 80 sono standard

Ancora un esempio:

$$\begin{cases} 3x - 4y = -18 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 4y = -18 \\ x = -2y + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(-2y + 4) - 4y = -18 \\ x = -2y + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ x = -2y + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ x = -2(3) + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

- Il sistema è già ridotto a forma normale
- Risolviamo rispetto ad una delle incognite, ad esempio x, una delle due equazioni
- Sostituiamo nell'altra equazione la espressione (-2y+4);
- risolviamo rispetto all'incognita y
- Infine, sostituiamo il valore di y nell'altra equazione.

Soluzione: (-2, 3)

SISTEMA IMPOSSIBILE

Facciamo un esempio di sistema impossibile

$$\begin{cases} 8x - 6y = 1 \\ 4x - 3y = -12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x - 6y = 1 \\ x = \dfrac{3y - 12}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8\left(\dfrac{3y - 12}{4}\right) - 6y = 1 \\ x = \dfrac{3y - 12}{4} \end{cases}$$

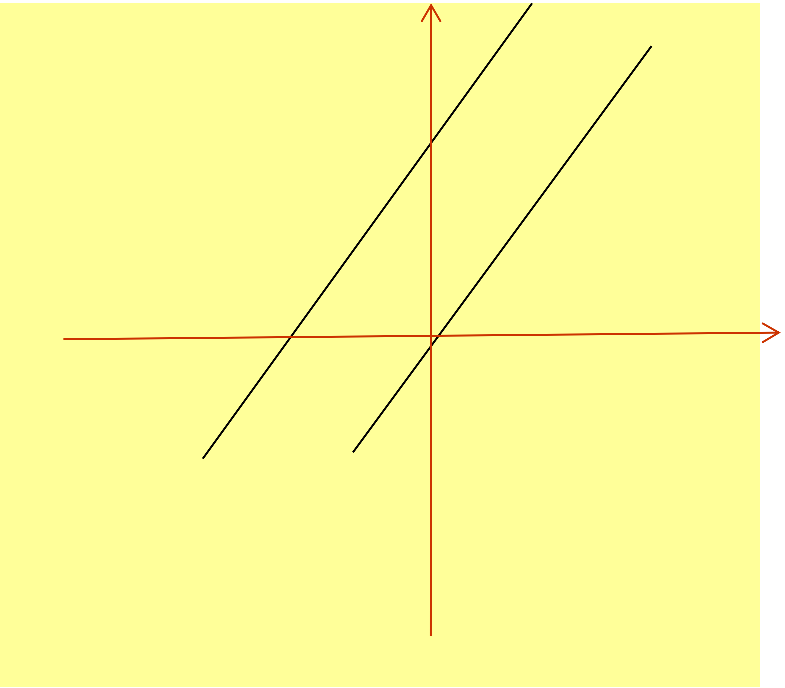
$$\begin{cases} 0y = 25 \\ x = \dfrac{3y - 12}{4} \end{cases}$$

Equazione impossibile!

Sistema Impossibile

RISOLUZIONE GRAFICA
(Sistema impossibile)

$$\begin{cases} 8x - 6y = 1 \\ 4x - 3y = -12 \end{cases}$$



SISTEMA INDETERMINATO

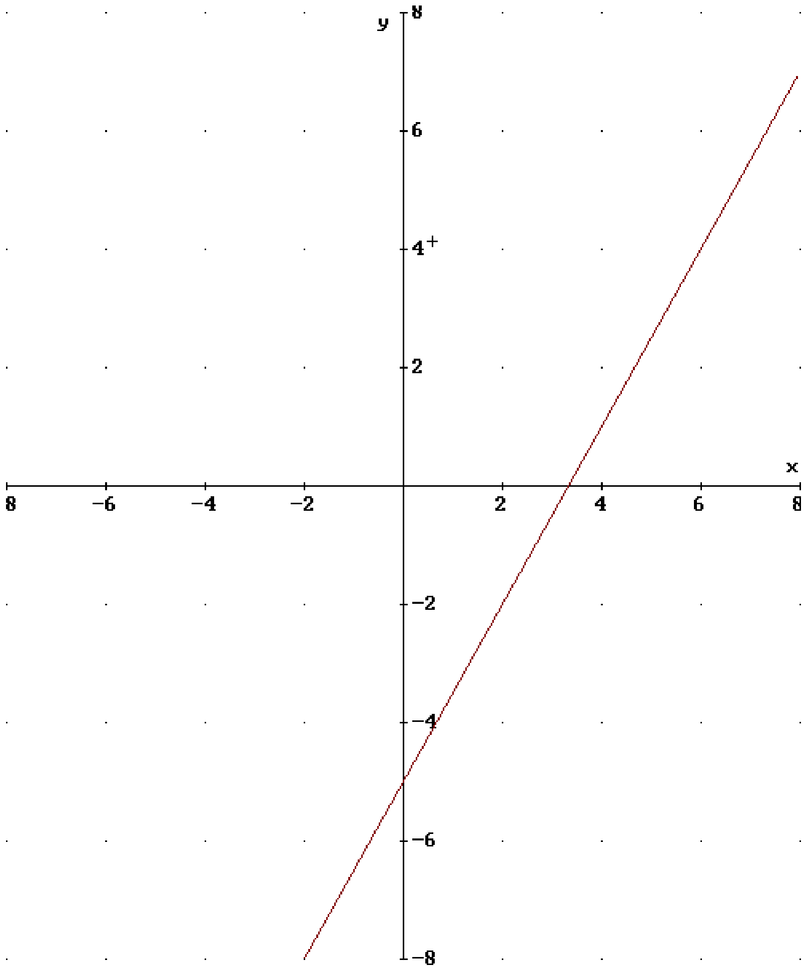
$$\begin{cases} 3x-2y=10 \\ 6x-4y=20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{2y+10}{3} \\ 6\left(\dfrac{2y+10}{3}\right)-4y=20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{2y+10}{3} \\ 0=0 \end{cases}$$

Equazione indeterminata!

Sistema Indeterminato



METODO DI RIDUZIONE O ELIMINAZIONE

Questo metodo si applica quando i coefficienti di una delle incognite sono uguali o opposti. Se non lo sono bisogna prima renderli uguali o opposti.

Il metodo consiste nell'addizionare o sottrarre membro a membro le equazioni del sistema.

Precisamente:

Se i coefficienti dell'incognita da eliminare sono uguali si sottraggono membro a membro le due equazioni;

Se tali coefficienti sono opposti si sommano membro a membro le due equazioni.

$$\begin{cases} 3x+2y=11 \\ 3x-y=8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x+2y=11 \\ 3x-y=8 \end{cases}$$

$$\overline{\quad // \; 3y=3 \quad} \; \textit{sottraggo}$$

$$y=1$$

Ripetiamo moltiplicando per 2 la seconda

$$\begin{cases} 3x+2y=11 \\ 6x-2y=16 \end{cases}$$

$$\overline{\quad 9x \; // =27 \quad} \; \textit{sommo} \rightarrow$$

$$x=3$$

$$\begin{array}{l} x=3 \\ y=1 \end{array}$$

Secondo esempio del metodo di <u>eliminazione</u>

Se i coefficienti dell'incognita non sono né uguali né opposti bisogna renderli uguali o opposti, nell' esempio seguente la seconda equazione viene moltiplicata per 2 (in generale si fa in modo da rendere i coefficienti uguali scegliendo il mcm tra i coefficienti dati)

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 3y = 9 \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot \begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 3y = 9 \end{cases} \Rightarrow \text{sottraggo} \quad \begin{cases} 2x - y = 4 \\ 2x + 6y = 18 \end{cases}$$

$$\cancel{} \quad \cancel{} \quad -7y = -14$$

Invece di ripetere il procedimento sostituisco il valore trovato in una delle due equazioni date

$$\begin{cases} y = 2 \\ x + 3(2) = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Metodo di Cramer

Consideriamo il sistema in forma normale:

$$\begin{cases} a\,x + b\,y = c \\ a_1 x + b_1 y = c_1 \end{cases}$$

Si chiama determinante del sistema e si indica con Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a \cdot b_1 - a_1 \cdot b$$

Se il $\Delta \neq 0$ il sistema è determinato e procediamo al calcolo di altri due determinanti

$$\boxed{\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix} = c \cdot b_1 - bc_1}$$

e

$$\boxed{\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} = a \cdot c_1 - c \cdot a_1}$$

La soluzione del sistema è

$$\boxed{x = \frac{\Delta_x}{\Delta}}$$

e

$$\boxed{y = \frac{\Delta_y}{\Delta}}$$

Facciamo un esempio

Questo metodo è molto semplice e conviene applicarlo soprattutto se i coefficienti del sistema sono numeri grandi e i calcoli si presentano laboriosi.

$$\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 5x-2y=1 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2)-3(5) = -4-15 = -19$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 8(-2)-3(1) = -16-3 = -19$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 2-40 = -38$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-19}{-19} = 1$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-38}{-19} = 2$$