Sistemi lineari

Un'equazione lineare nelle n incognite $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ è un'equazione nella quale le incognite appaiono solo con esponente 1, ossia del tipo:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

con $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ numeri fissati

Un sistema di equazioni lineari considera simultaneamente più equazioni lineari, la sua soluzione è data dai valori per le incognite che verificano simultaneamente tutte le equazioni considerate.
Un sistema può non avere soluzione (in questo caso si dice che il sistema è incompatibile), avere una sola soluzione (compatibile) o infinite soluzioni (indeterminato).

Due equazioni in due incognite

La soluzione di un sistema di due equazioni lineari in due incognite è data dalle coordinate del punto (o dei punti) di intersezione tra le due rette.
Già nello studio di funzione si risolve un sistema di equazioni per trovare le intersezioni tra la funzione studiata e l'asse delle x:

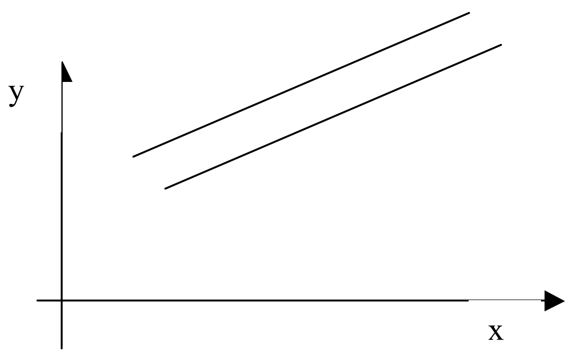
$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$$ da cui si ottiene (per sostituzione): $f(x) = 0$;

se la $f(x)$ rappresenta anche essa una retta avremo un sistema di due equazioni lineari in due incognite:

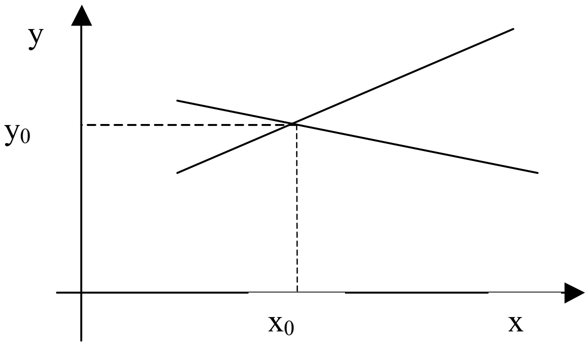
$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = 0 \end{cases}$$

Dal punto di vista geometrico il fatto che il sistema ammetta nessuna, una o infinite soluzioni corrisponde ai tre casi seguenti:

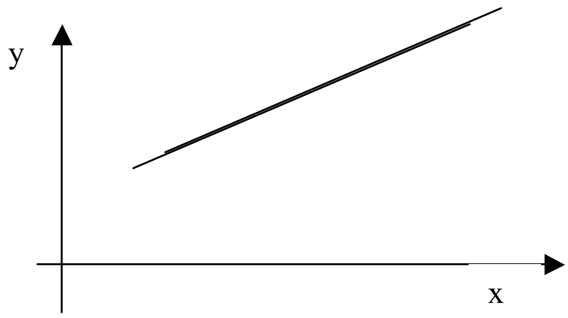
1) rette parallele: due rette con lo stesso coefficiente angolare e diverso termine noto non hanno punti in comune. Il sistema non ha soluzione;



2) rette con coefficiente angolare diverso: le due rette si intersecano in un punto, le cui coordinate $(x_0;y_0)$sono la soluzione del sistema;



3) le due rette hanno sia lo stesso coefficiente angolare che lo stesso termine noto: essendo coincidenti, tutti i punti di una retta appartengono anche all'altra retta, e pertanto il sistema avrà infinite soluzioni.



Dal punto di vista algebrico avremo:

$$\begin{cases} y = a_1 x + b_1 \\ y = a_2 x + b_2 \end{cases}$$

Nel quale se a_1 è diverso da a_2 le due rette avranno coefficiente angolare diverso e, quindi, il sistema avrà una sola soluzione
Se invece a_1 è uguale ad a_2 le due rette avranno lo stesso coefficiente angolare: dobbiamo verificare se anche i termini noti sono uguali, in questo caso le due rette coincidono (sistema indeterminato, infinite soluzioni).
Se le due rette hanno lo stesso coefficiente angolare ma i termini noti sono diversi, allora le due rette sono parallele in senso proprio, e il sistema è incompatibile (nessuna soluzione).

Per permettere un adeguato sviluppo del problema dobbiamo cambiare la rappresentazione delle equazioni portando tutti i termini noti a destra e le variabili con i loro coefficienti a sinistra:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + gy = h \end{cases}$$

O anche, per permetterne una più facile estensione:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Nel quale il coefficiente angolare di ciascuna delle due rette dipende dai coefficienti delle due variabili.

Se $\frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}}$ il sistema ha una sola soluzione;

se $\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{b_1}{b_2}$ il sistema è incompatibile (nessuna soluzione)

se $\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2}$ il sistema è indeterminato (infinite soluzioni)

Da un altro punto di vista, possiamo considerare anche che le due rette sono parallele (hanno lo stesso coefficiente angolare) quando il determinante della matrice dei coefficienti delle variabili uguale a zero, ossia:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Dobbiamo quindi definire matrice e determinante.

Matrice: è una tabella di numeri disposti in righe e colonne, del tipo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Usualmente le matrici vengono indicate con gli elementi racchiusi tra parentesi tonde, o con lettere maiuscole, o con indicazione dell'elemento generico e dimensioni (righe per colonne), ovvero:

$$A_{2\times 3} = \left[a_{ij}\right]_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Il primo indice si riferisce sempre alle righe, il secondo alle colonne, sia per quanto riguarda le dimensioni della matrice che per l'individuazione dell'elemento, ad esempio a_{35} è l'elemento della terza riga e quinta colonna.

Determinante di una matrice:

è un numero reale associato ad ogni matrice quadrata (stesso numero di righe e colonne), ottenuto come segue

Se $A_{1\times 1} = \left(a_{11}\right)$ (matrice quadrata di ordine o dimensione 1)

Il suo determinante è uguale all'unico elemento della matrice

$$\det A = a_{11}$$

Se $A_{2\times2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ (matrice quadrata di ordine o dimensione 2)

Il suo determinante è uguale a:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Per i determinanti di matrici di ordine superiore *n* qualsiasi, la regola seguente permette di ricondurre il calcolo a determinanti di ordine *n-1*:
Il determinante di una matrice è uguale alla somma del prodotto di ciascun elemento di una riga o di una colonna per il suo complemento algebrico. Ad esempio, sviluppando sulla prima riga abbiamo:

$$\det A_{n\times n} = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} - \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n}A_{1n}$$

Nel quale A_{11} è il complemento algebrico di a_{11}, ossia il determinante della matrice quadrata di dimensione *n-1* ottenuta escludendo la prima riga e la prima colonna. Similmente A_{12} sarà il determinante della matrice ottenuta escludendo la prima riga e la seconda colonna, e così via. Ciascuno di tali elementi va preso con il segno + se la somma degli indici di riga e colonna è un numero pari, con il segno – se, viceversa, la somma degli indici è dispari.

Così nell'esempio indicato sopra il primo termine $a_{11}A_{11}$ è positivo perché la somma degli indici (1+1) è pari, mentre il secondo $a_{12}A_{12}$ è negativo perché 1+2=3 è dispari.

Lo stesso risultato si può ottenere come indicato per l'ultimo termine, $a_{1n}A_{1n}$, moltiplicando per -1 elevato la somma degli indici, nell'esempio $+(-1)^{1+n}$, che vale -1 se 1+*n* è dispari, e +1 se 1+*n* è pari.

Esempio:

$$A_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Sviluppando sulla terza riga abbiamo:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}\, 0 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}\, 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}\, 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 0(2-2) - 1(-2-6) + 3(1+3) = 8 + 12 = 20$$

Soluzione di un sistema di n equazioni in n incognite:

Il teorema di Cramer ci assicura che:
un sistema con lo stesso numero di equazioni e di incognite ammette soluzione unica se e solo se la matrice dei coefficienti delle variabili ha determinante diverso da zero.
Quindi considerato un sistema del tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Esso avrà una sola soluzione se e soltanto se:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

La regola di Cramer ci permette di calcolarne la soluzione:
Il valore della soluzione per ciascuna variabile è ottenuta ponendo al denominatore il determinante della la matrice dei coefficienti delle variabili, e al numeratore il determinante della stessa matrice modificata sostituendo la colonna dei coefficienti della variabile ricercata con la colonna dei termini noti, ovvero, per il sistema generico precedente, la prima variabile è data da:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Esempio: risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ 3x + y - 2z = -1 \\ y + 3z = 11 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è

$$A_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Il suo determinante:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 20$$

Il teorema di Cramer ci assicura che il sistema ha soluzione unica.
La regola di Cramer ci indica la soluzione:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 11 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{5\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 11 & 1 \end{vmatrix}}{20} = \frac{25+19-24}{20} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & 11 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{1\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 11 \end{vmatrix}}{20} = \frac{19-45+66}{20} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 11 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 11 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{20} = \frac{12+33+15}{20} = 3$$

La soluzione del sistema sarà quindi:

$x = 1; \quad y = 2; \quad z = 3$

Caratteristica di una matrice

Data una matrice generica A, di n righe per m colonne, chiamiamo minore di ordine k di A il determinante di una qualsiasi matrice di k righe per k colonne estratta dalla matrice A prendendo ordinatamente gli elementi delle qualsiasi k righe e k colonne.

Esempio: data la matrice

$$A_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

I minori di ordine due sono tre:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=2 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=2 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=-2$$

La Caratteristica di una matrice è la dimensione del massimo minore non nullo della matrice

Dato che il teorema di Cramer si applica soltanto a sistemi con lo stesso numero di equazioni e incognite, quando il numero di equazioni è diverso dal numero di incognite o quando il determinante della matrice dei coefficienti è uguale zero si può applicare il seguente

Teorema di Rouchè-Capelli
Un sistema di n equazioni in m incognite ammette soluzione se la matrice incompleta e la matrice completa hanno la stessa caratteristica

Come evidente dall'enunciato, non ci sono vincoli sul numero di equazioni e incognite, ma solo sulla caratteristica delle matrici incompleta (coefficienti delle variabili) e completa (coefficienti della variabili più la colonna dei termini noti).

Esempio:

$$\begin{cases} x-2y=1 \\ -2x+y=5 \\ -2x+4y=-2 \end{cases}$$

La matrice incompleta è

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

La cui caratteristica è 2 dato che almeno il minore $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-3\neq 0$

La matrice completa è

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Il cui unico minore di ordine 3 è uguale a zero.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(-2-20) + 2(4+10) + 1(-8+2) = 0$$

Lo stesso minore considerato per la matrice incompleta

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

è anche minore della matrice completa, pertanto anche la matrice completa avrà caratteristica 2.
Quindi, per il teorema di Rouchè-Capelli il sistema ammette soluzione.
Per trovare la soluzione ricordiamo che il determinante di una matrice quadrata è uguale zero se almeno una riga o una colonna sono combinazione lineare delle restanti (nell'esempio precedente la terza riga è ottenuta sommando la seconda riga alla prima moltiplicata per -2).
In questo caso, visto che il minore di ordine 2 non nullo è ottenuto escludendo la terza riga dalla matrice incompleta, possiamo tralasciare la terza equazione e risolvere il sistema restante con la regola di Cramer (sappiamo già che la matrice incompleta ha determinante diverso da zero).

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + y = 5 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{11}{-3} = -\frac{11}{3} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{7}{-3} = -\frac{7}{3}$$

Possiamo verificare che le soluzioni trovate soddisfano anche la terza equazione:

$$-2\left(-\frac{11}{3}\right) + 4\left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{22-28}{3} = -2$$

Riepilogo:

1) il sistema ha lo stesso numero di equazioni e di incognite
   a. La matrice incompleta ha determinante diverso da zero: il sistema (per il teorema di Cramer) ammette soluzione unica ottenibile attraverso l'applicazione della regola di Cramer
   b. La matrice incompleta ha determinante uguale da zero: applichiamo il teorema di Rouchè-Capelli, se è verificato (la matrice incompleta e completa hanno la stessa caratteristica) il sistema ammette infinite soluzioni, ottenibili prendendo a riferimento il minore non nullo che ci ha permesso di determinare la caratteristica

della matrice incompleta, tralasciando le equazioni (righe) che non ne fanno parte, e portando a destra le variabili (colonne) che non fanno parte dello stesso minore.
    c. La matrice incompleta ha determinante uguale a zero, al matrice incompleta e la matrice completa hanno caratteristica diversa: il sistema è incompatibile.

2) Il sistema ha più equazioni che incognite:
    a. la matrice incompleta e completa hanno la stessa caratteristica: il sistema ammette soluzioni, ottenibili prendendo a riferimento il minore non nullo che ci ha permesso di determinare la caratteristica della matrice incompleta, tralasciando le equazioni (righe) che non ne fanno parte (eventualmente portando a destra le variabili che non fanno parte dello stesso minore).
    b. la matrice incompleta e completa hanno la stessa caratteristica diversa: il sistema è incompatibile
3) Il sistema ha più incognite che equazioni:
    a. la matrice incompleta e completa hanno la stessa caratteristica: il sistema ammette infinite soluzioni, ottenibili portando a destra (e trattandole come parte del termine noto) le variabili che non fanno parte del minore della matrice incompleta che ci ha permesso di determinare la caratteristica. Le soluzioni saranno quindi funzione delle variabili portate a destra.
    b. la matrice incompleta e completa hanno la stessa caratteristica diversa: il sistema è incompatibile

Esercizio:
Determinare per quali valori del parametro k il sistema seguente ammette soluzione e determinarne la soluzione.

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y + kz = k \\ -3x - y + 2z = -3 \end{cases}$$

Risoluzione:
Il sistema ha lo stesso numero di equazioni e di incognite; applicando il teorema di Cramer otteniamo la seguente condizione: il sistema ammette soluzione unica se e solo se

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & k \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{ovvero, dato che} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & k \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4k - 3 \quad \text{se} \quad k \neq \frac{3}{4}$$

In tale caso avremo

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ k & -1 & k \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & k \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{4k-3}{4k-3} = 1 \quad \text{e, similmente } y = 2; \quad z = 1$$

Se invece $k = \frac{3}{4}$ avremo:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y + \frac{3}{4}z = \frac{3}{4} \\ -3x - y + 2z = -3 \end{cases} ; \quad \text{con} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3/4 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

E tutti i minori di ordine 3 estraibili dalla matrice completa (escludendo la prima o la seconda o la terza colonna) uguali a zero.

Essendo $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ sia la matrice incompleta che la matrice completa avranno caratteristica 2. Quindi per il teorema di Rouchè Capelli il sistema ammette soluzione.
Tralasciando la terza riga (equazione) avremo:

$$\begin{cases} x - y = -z \\ 2x - y = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}z \end{cases}$$

Da cui ricaviamo

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z & -1 \\ \frac{3}{4} - \frac{3}{4}z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{z - \left(-\frac{3}{4} + \frac{3}{4}z\right)}{1} = -\frac{4z + 3 - 3z}{4} = \frac{z+3}{4}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 2 & \frac{3}{4} - \frac{3}{4}z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{4}z + 2z}{1} = -\frac{3 - 3z + 8z}{4} = \frac{5z+3}{4}$$

La verifica della correttezza della soluzione può essere fatta facilmente sostituendo i valori trovati nel sistema iniziale e verificando la tenuta dell'uguaglianza:

$$\begin{cases} \frac{z+3}{4} - \frac{5z+3}{4} = -z \\ 2\frac{z+3}{4} - \frac{5z+3}{4} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}z \end{cases}$$