SUCCESSIONI E SERIE NUMERICHE E DI FUNZIONI

SERIE NUMERICHE

Si consideri una successione di elementi $\{a_n\}$. Si definisce serie associata ad $\{a_n\}$ la somma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

Per ogni indice k della successione, si definisce *successione delle somme parziali* $\{S_k\}$ associata a $\{a_n\}$ la somma dei termini della successione $\{a_n\}$ da a_0 a a_k: $S_k = \sum_{n=0}^{k} a_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_k$

Si dice che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente al limite L se la relativa successione delle somme parziali S_k converge a L. Ovvero, si verifica che $L = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ se e solo se $L = \lim_{k\to\infty} S_k$

Il limite sopra enunciato si dice *somma della serie*, ed esprime il carattere della serie.

Osservazione: dal punto di vista pratico non è sempre possibile calcolare la successione delle somme parziali.

Teorema (condizione necessaria sulla convergenza): Una condizione necessaria ma non sufficiente affinché una serie converga è che: $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Un controesempio alla sufficienza è dato dalla serie armonica**.**

Serie a termini positivi

Una serie si dice *a termini positivi* quando tutti i suoi termini sono reali positivi, cioè il numero a_n è sempre reale positivo. Si noti che tali serie possono solo divergere o convergere, visto che le somme parziali sono monotone non decrescenti (non oscillano):

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$$

Il carattere di una serie a termini di segno costante si ottiene applicando vari metodi, quali il criterio del confronto asintotico, il criterio della radice, il criterio del rapporto e il criterio del confronto. In ogni caso, **se la condizione necessaria di convergenza non è rispettata, allora la serie diverge sicuramente**.

Prof. Giuseppe Viglialoro
Dipartimento di Matematica e Informatica
E-mail: giuseppe.viglialoro@unica.it

Si dicono inoltre *serie a termini di segno qualsiasi* le serie a termini reali le quali presentano sia infiniti termini positivi che infiniti termini negativi.

Comportamento delle serie a termini positivi: criteri di convergenza

Una serie a termini positivi o è convergente o è divergente.

Criterio del confronto diretto

Se $0 < a_n \leq b_n, \forall n \geq n_0$

- Se $\sum(b_n)$ converge $\Rightarrow \sum(a_n)$ converge
- Se $\sum(a_n)$ diverge $\Rightarrow \sum(b_n)$ diverge

Criterio del confronto asintotico

Siano $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serie a termini non negativi (positivi). Se esiste

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = L \in [0,+\infty) \cup (-\infty\, 0]$$, allora:

- Se $L = 0$ e la serie $\sum(b_n)$ converge allora $\sum(a_n)$ converge.
- Se $L = +\infty$ e la serie $\sum(b_n)$ diverge allora $\sum(a_n)$ diverge.
- Se $0 < L < +\infty$ allora le serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hanno lo stesso carattere (o convergono o divergono entrambe).

Criterio della radice

$$Sia \quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n) \quad con \quad a_n \neq 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$. Supponiamo esista $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, allora:

- se λ < 1 la serie converge assolutamente,
- se λ > 1 la serie non converge,

Prof. Giuseppe Viglialoro
Dipartimento di Matematica e Informatica
E-mail: giuseppe.viglialoro@unica.it

- se λ = 1 il criterio è inefficace.

Criterio del rapporto

$Sia\ \ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n)\ \ con\ \ a_n \neq 0\ \ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Supponiamo esista $\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lambda$. Allora:

- se λ < 1 la serie converge assolutamente,
- se λ > 1 la serie non converge,
- se λ = 1 il criterio è inefficace.

Serie alternate

Si dicono serie a termini di segno alterno le serie a termini reali tali che due termini consecutivi hanno segno opposto. La serie $\sum(-1)^n a_n$ è dunque a termini di segno alterno, infatti per n pari il termine è positivo e per n dispari il termine è negativo. Per queste serie vale il seguente criterio di Leibniz:

Criterio di Leibniz

Data la serie di termini a segno alterno $S_N = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n a_n$, se la successione $|a_n|$ è definitivamente positiva, decrescente e tende a 0, cioè:

- $|a_n| \geq |a_{n+1}| > 0\ \forall n < N$
- $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$

allora la serie è convergente.

Convergenza assoluta

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a termini di segno qualunque si dice *assolutamente convergente* se la serie dei valori assoluti $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ è convergente. La convergenza assoluta implica la convergenza (ordinaria), detta anche *convergenza semplice*. Occorre sottolineare che il viceversa può essere falso; non tutte le serie che convergono semplicemente convergono anche assolutamente. Ad esempio, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ converge semplicemente per il Criterio di Leibniz, ma non converge assolutamente, dato che la serie ad essa associata è quella armonica.

SERIE DI FUNZIONI

- Sia (f_n) una successione di funzioni da X in R e sia f un'altra funzione da X in R.

1. **Convergenza puntuale**: La successione di funzioni (f_n) converge puntualmente a f se: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, per ogni x nel dominio X. In simboli, si scrive: $f_n \to f$
2. **Converggenza uniforme:** La successione (f_n) converge uniformemente alla funzione f se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che:

   $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \qquad \forall x \in X$ per tutti gli $n > N$. Detto: $a_n = \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)|$

   la successione (f_n) converge uniformemente a f se e solo se: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Osservazione:

- Si può visualizzare la convergenza uniforme attraverso il fatto che le funzioni della successione non si allontanano dalla funzione limite f per una distanza maggiore di ε, piccola a piacere.
- La convergenza uniforme implica quella puntuale; il contrario è falso.
- Se $\forall n\ f_n$ è continua e converge uniformemente a f, allora anche f è continua. Questo è un criterio che si usa in negativo.

Analogamente alle serie numeriche, una serie di funzioni è definita come una particolare successione associata ad un'altra successione. Tale successione è una successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, cioè ogni elemento della successione è una funzione $f_n(x) : D \longrightarrow \mathbb{R}$, e la serie associata è definita dalla legge $\{s_n(x) = f_0 + \ldots + f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e si indica anche con: $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$. In analogia con le serie numeriche, i termini f_n e s_n vengono detti rispettivamente *termine generale* e *somma parziale* della serie.

Prof. Giuseppe Viglialoro
Dipartimento di Matematica e Informatica
E-mail: giuseppe.viglialoro@unica.it

Convergenza di una serie di funzioni

1. Una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *converge puntualmente* ad una funzione f in A se la serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x_0)$ converge a $f(x_0)$ per ogni x_0 in A. L'insieme A viene detto *dominio di convergenza* della serie.
2. Una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *converge uniformemente* ad una funzione f in A se converge uniformemente la successione delle somme parziali $\{s_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *converge totalmente* ad una funzione f in A se esiste una successione $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ tale che:

   * $|f_n(x)| \leq M_n \quad \forall x \in A \quad n \in \mathbb{N}$

   * $\sum M_n < \infty$

Come per le serie numeriche, una serie *converge assolutamente* se la serie di termine generale $|f_n|$ converge puntualmente. Inoltre se una serie converge totalmente, allora converge anche uniformemente e assolutamente. Non è vero il viceversa.

Gli esempi di serie di funzioni sono molteplici nell'analisi. Si segnalano in particolare le Serie di potenze, in cui il termine generale è del tipo $a_n\,(x-c)^n$, dove a_n è un coefficiente variabile.

SERIE DI POTENZE

Una serie di potenze ha la seguente forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \dots$$

dove i coefficienti *an*, il centro *c* e la variabile argomento *x* assumono, usualmente, valori reali.

Serie di potenze di uso frequente sono quelle ottenute da sviluppi di Taylor di funzioni particolari.

In alcune situazioni interessano serie con il centro *c* uguale a zero, ad esempio quando si considera una serie di Maclaurin. In questi casi la serie di potenze assume la forma più semplice

Prof. Giuseppe Viglialoro
Dipartimento di Matematica e Informatica
E-mail: giuseppe.viglialoro@unica.it

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots .$$

Raggio di convergenza

Una serie di potenze $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-c)^n$ converge per alcuni valori della variabile x (almeno per $x = c$) e può divergere per altri. Esiste un numero R con $0 \leq R \leq \infty$ tale che la serie converge quando $|x - c| < R$ e diverge quando $|x - c| > R$. Questo numero R è chiamato raggio di convergenza della serie e si calcola utilizzando una delle due seguenti formule

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,\quad \text{oppure} \quad R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Teorema: La serie di potenze converge assolutamente per ogni punto dell'intervallo *I=(c-R,c+R)* e converge totalmente (e quindi anche e uniformemente e puntualmente) su ogni sottoinsieme chiuso e limitato contenuto in *I=(c-R,c+R)*. Agli estremi dell'intervallo *I*, cioè per $|x - c| = R$, non si dispone di alcun enunciato generale sulla convergenza o meno della serie.

INTEGRAZIONE

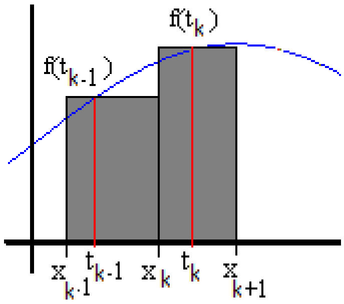
INTEGRALE DI RIEMANN

Per partizione di un intervallo [a,b] intendiamo una sequenza finita $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$; ciascun elemento $[x_i, x_{i+1}]$ è detto un sottointervallo che compone questa partizione. La lunghezza del più lungo di questi sottointervalli è detta ampiezza della partizione ed è indicato con δ.

Somma di Riemann

Supponiamo di avere una funzione reale f definita sull'intervallo [a,b], e stabiliamo una partizione di [a,b]. Siano poi punti $t_0,\ldots,t_{n-1}$ punti scelti arbitrariamente tra x_{k-1} e x_k; si chiama **somma di Riemann** all'espressione:

Prof. Giuseppe Viglialoro
Dipartimento di Matematica e Informatica
E-mail: giuseppe.viglialoro@unica.it



$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1})$, con $x_{k-1} \leq t_k \leq x_k$.

Intuitivamente, se la funzione è positiva, questa somma rappresenta la somma delle aree dei rettangoli con base $x_k - x_{k-1}$ e altezza *f*(t_k). In queste condizioni, se f(x) è una funzione definita su un intervallo chiuso e limitato [a,b], indichiamo inoltre con P una qualunque partizione sull'intervallo[a,b], di ampiezza δ. Si può allora definire l'integrale di Riemann come il limite della somma di Riemann di f su P per δ che tende a zero, ossia

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)(x_{k+1} - x_k)$$

e la funzione f si dice Riemann integrabile se e solo se questo limite esiste finito; in tal caso si indica la seguente notazione

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)(x_{k+1} - x_k) = \int_a^b f(x)dx$$

Elenchiamo alcune proprietà e risultati basilari riguardanti l'integrale di Riemann:

Criterio di integrabilità

Una funzione reale continua in [a,b] è Riemann integrabile.

Osserviamo che se f è continua in [a,b] per il teorema di Weierstrass è limitata.

Teorema della media

Se una funzione reale f di dominio [a,b] è continua, allora esiste un punto c nel dominio tale che

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Si chiama *funzione integrale* la funzione F definita nel seguente modo:

Prof. Giuseppe Viglialoro
Dipartimento di Matematica e Informatica
E-mail: giuseppe.viglialoro@unica.it

$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad a \leq x \leq b$. Allora, se f è una funzione continua, F è differenziabile in (a, b) e si ha $F'(x) = f(x)$

Più precisamente, se f è continua in un punto allora F è differenziabile in tal punto, e vale la precedente relazione.

Corollario

Sia F una **primitiva** di f su $[a, b]$, ovvero: $F'(x) = f(x)$. Allora si ha: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

CALCOLO DI PRIMITIVE

Prof. Giuseppe Viglialoro
Dipartimento di Matematica e Informatica
E-mail: giuseppe.viglialoro@unica.it

Tabella di primitive fondamentali

funzione	primitiva
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad \alpha \neq 1$
$\frac{1}{x}$	$\lg \lvert x \rvert$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\mathrm{arctg}x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{arcsen}x$
$\mathrm{sen}x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\mathrm{sen}x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}x$
$\frac{1}{\mathrm{sen}^2 x}$	$\mathrm{cotg}x$
e^x	e^x
a^x	$\frac{a^x}{\lg a}$
$\mathrm{senh}x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\mathrm{senh}x$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathrm{settsenh}x = \lg(x + \sqrt{1+x^2})$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\mathrm{settcosh}x = \lg(x + \sqrt{x^2-1})$

INTEGRALI IMMEDIATI

Dalla regola di derivazione delle funzioni composte

$$D(f(\varphi)) = f'(\varphi)\varphi'$$

si deduce la prima regola di sostituzione (ovvero quella usata per gli integrali immediati)

$$\int f'(\varphi)(x)\varphi'(x)\,dx = f(\varphi(x)) + C.$$

Sostituzioni convenienti

Prof. Giuseppe Viglialoro
Dipartimento di Matematica e Informatica
E-mail: giuseppe.viglialoro@unica.it

$$\int \mathcal{R}\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx \quad \text{sostituire} \quad x = a\text{sen}t$$

$$\int \mathcal{R}(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})\, dx \quad \text{sostituire} \quad \sqrt{ax+b} = t$$

Integrali di funzioni razionali fratte: andare a questo **link**

Integrazione per parti

INTEGRAZIONE PER PARTI

Dalla regola di derivazione del prodotto

$$D(fg) = f'g + fg'$$

si deduce la regola di integrazione per parti

$$\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\, dx.$$

La funzione g (che viene sempre integrata) si chiama *fattore differenziale*,la funzione f (che viene derivata nell'integrale a secondo membro) si chiama *fattore integrale*.
Nella successiva tabella vediamo **ALCUNI** casi notevoli di integrazione per parti

integrale	fattore differenziale
$\int x^n e^{\alpha x}\, dx \quad n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$	$e^{\alpha x}$
$\int x^\alpha \lg x\, dx \quad \alpha \in \mathbb{R}$	x^n
$\int x^n \text{arctg}(x)\, dx \quad n \in \mathbb{N}$	x^n
$\int x^n \cos x\, dx \quad n \in \mathbb{N}$	$\cos x$
$\int x^n \text{sen}x\, dx \quad n \in \mathbb{N}$	$\text{sen}x$
$\int \text{arcsen}x\, dx$	1
$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\, dx$	1
$\int e^{\alpha x}\text{sen}\beta x\, dx \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$	$e^{\alpha x}$ oppure $\text{sen}\beta x$
$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\, dx \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$	$e^{\alpha x}$ oppure $\cos\beta x$
$\int \text{sen}(\alpha x)\text{sen}(\beta x)\, dx \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$	$\text{sen}\alpha x$ oppure $\text{sen}\beta x$
$\int \text{sen}(\alpha x)\cos(\beta x)\, dx \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$	$\text{sen}\alpha x$ oppure $\cos\beta x$
$\int \cos(\alpha x)\cos(\beta x)\, dx \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$	$\cos\alpha x$ oppure $\cos\beta x$

Prof. Giuseppe Viglialoro
Dipartimento di Matematica e Informatica
E-mail: giuseppe.viglialoro@unica.it