

## 30 RISONANZE SULLE LINEE DI TRASMISSIONE

*Risuonatori*, ovvero circuiti in grado di supportare soluzioni risonanti (soluzioni a regime sinusoidali in assenza di generatori) vengono largamente utilizzati nelle applicazioni, ad esempio per realizzare oscillatori sinusoidali, oppure filtri. Inoltre svariati dispositivi elettromagnetici, ad esempio molte antenne, possono essere analizzati e progettati considerandoli analoghi a risuonatori. Conviene quindi analizzare in dettaglio quali circuiti in linea di trasmissione presentino risonanze, circuiti che devono necessariamente essere privi di perdite, e successivamente considerare cosa avviene delle risonanze quando si tiene conto che in ogni circuito reale vi sono necessariamente perdite.

Per analizzare le risonanze, che fanno parte della parte transitoria della soluzione delle equazione delle linee nel dominio del tempo, conviene considerare il circuito di interesse come un sistema descritto mediante la sua funzione di trasferimento ingresso-uscita  $W(s)$  dove  $s$  è la variabile della trasformazione di Laplace. L'utilizzo della trasformazione di Laplace, al posto di quella di Fourier (che è direttamente ottenibile dalla soluzione nel dominio della frequenza) è legata al fatto che le risonanze sono oscillazioni sinusoidali persistenti, descritte da termini impulsivi nel dominio di Fourier, e da normali funzioni razionali nel dominio di Laplace. Tuttavia va ricordato che, con la sostituzione

$$\omega \longrightarrow \frac{1}{j} s \quad (178)$$

è immediato ottenere le relazioni nel dominio di Laplace a partire dalle grandezze del dominio della frequenza. Va solo ricordato che la sostituzione precedente va fatta ovunque compaia la frequenza, quindi anche nella costante di propagazione  $\beta$ . Ad esempio

$$e^{-j\beta z} = e^{-j\omega \frac{z}{c}} \longrightarrow e^{-s \frac{z}{c}}$$

$$jZ_0 \tan \beta \ell \longrightarrow jZ_0 \tan \left[ -js \frac{\ell}{c} \right] = -Z_0 \tanh \left[ s \frac{\ell}{c} \right]$$

A partire dalla soluzione del dominio della frequenza, è quindi molto facile scrivere la funzione di trasferimento ingresso-uscita  $W(s)$  una volta scelte le grandezze che rappresentano l'ingresso e l'uscita. Dall'analisi dei sistemi si sa che i poli della funzione di trasferimento (ovvero gli zeri del suo denominatore) forniscono la variazione temporale dei cosiddetti *modi caratteristici* del sistema, soluzioni in assenza di forzamento, che pertanto non sono altro che le nostre risonanze.

Se  $s_p = \sigma_p + j\omega_p$  è un polo della funzione trasferimento, la variazione temporale del corrispondente modo caratteristico, ovvero della corrispondente risonanza, è

$$e^{s_p t} = e^{\sigma_p t} e^{j\omega_p t}$$

Se  $\sigma_p = 0$  ovvero se  $s_p$  è sull'asse immaginario, si ha una risonanza in senso stretto, nel senso che la soluzione a regime esiste. Dalla discussione sull'unicità, segue allora che se la struttura è priva di perdite i suoi poli sono (salvo casi particolari) sull'asse immaginario, cosa che per ora assumeremo.

Per calcolare le risonanze in un circuito dobbiamo partire costruendo una descrizione ingresso-uscita del circuito medesimo. Naturalmente, per ogni circuito a costanti distribuite vi sono infinite descrizioni di questo tipo in quanto possiamo scegliere una qualunque tensione o

corrente come ingresso e un'altra come uscita. Tuttavia, salvo casi di simmetria, ogni descrizione ingresso-uscita fornisce le stesse risonanze.

Sceghieremo allora come ingresso e uscita tensione e corrente presenti ad una sezione  $AB$  del nostro circuito a costanti distribuite (o concentrate) come in figura 1. In tale figura  $Y_L, Y_R$  sono delle ammettenze di **ingresso**, ovvero calcolate con la convenzione dell'utilizzatore. Se applichiamo a  $AB$  un generatore di corrente  $I(s)$  (ingresso), la tensione tra  $A$  e  $B$  (uscita) sarà

$$V(s) = \frac{I(s)}{Y_L + Y_R}$$

La corrispondente funzione di trasferimento è pertanto

$$W_{iv}(s) = \frac{1}{Y_L + Y_R}$$

Possiamo ovviamente utilizzare anche un generatore di tensione  $V(s)$  come ingresso, come in figura 2, e prendere come uscita la corrente  $I(s)$  che scorre attraverso il generatore di tensione. In tal caso

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z_L + Z_R}$$

con corrispondente funzione di trasferimento

$$W_{vi}(s) = \frac{1}{Z_L + Z_R}$$

Le risonanze sono pertanto i poli di  $\frac{1}{Y_L + Y_R}$  e di  $\frac{1}{Z_L + Z_R}$  ovvero l'**unione** delle soluzioni di

$$Y_L + Y_R = 0 \quad Z_L + Z_R = 0 \quad (179)$$

D'altra parte

$$Y_L + Y_R = \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_R} = \frac{Z_L + Z_R}{Z_L \cdot Z_R}$$

Pertanto ogni zero di  $Y_L + Y_R$  è anche zero di  $Z_L + Z_R$  purchè queste due impedenza non vadano mai contemporaneamente all'infinito (e viceversa). Se quindi si è sicuri che le due impedenza, o le due ammettenze, godono di tale proprietà, basta una sola delle due equazioni (179). Caso tipico in cui ciò *non* si verifica è quando le due impedenza sono sempre uguali, ad esempio quando si sceglie come sezione  $AB$  una sezione di simmetria.

La sezione  $AB$  è arbitraria, nel senso che l'insieme di *tutte* le risonanze (unione delle soluzioni della prima di (179) e delle soluzioni della seconda di (179)) è invariante. Infatti se applichiamo il teorema di Poynting al campo risonante ad una *qualunque* sezione del circuito (vedi figura 3) si ha

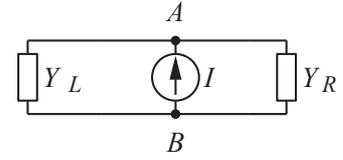


Fig 1

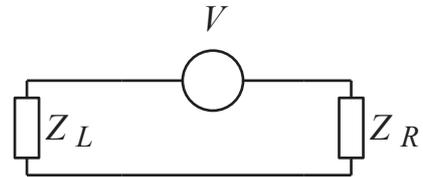


Fig 2

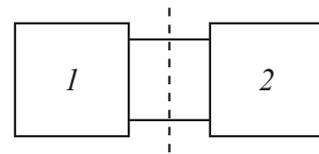


Fig 3

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} Z_R |I|^2 &= 2j\omega(W_{m2} - W_{e2}) \\ \frac{1}{2} Z_L |I|^2 &= 2j\omega(W_{m1} - W_{e1})\end{aligned}$$

e sommando

$$\frac{1}{2} (Z_L + Z_R) |I|^2 = 2j\omega(W_m - W_e) \quad (180)$$

Analogamente

$$\frac{1}{2} (Y_L + Y_R) |V|^2 = 2j\omega(W_m - W_e) \quad (181)$$

Se consideriamo la sezione cui abbiamo calcolato la risonanza, risolvendo la (179), il primo membro di (180), o quello di (181), è nullo e segue

$$W_m = W_e \quad (182)$$

(alla risonanza le energie, o pseudo-energie, *totali* sono uguali).

Poichè i secondi membri di (180,181) sono indipendenti dalla sezione, a qualunque altra sezione almeno una delle (179) è verificata, in quanto ad ogni sezione non possono essere contemporaneamente nulli sia la tensione, sia la corrente, se nel circuito vi è un campo diverso da zero.

Per chiarire questo problema consideriamo il semplice esempio di figura 4. Se scegliamo un estremo della linea, ad esempio quello di sinistra,  $Z_L$  è sempre nullo e basta la sola equazione alle impedenze:

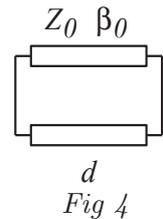
$$0 + jZ_0 \tan 2\beta_0 d = 0$$

che ha per soluzione

$$2\beta_0 d = n\pi \quad \text{ovvero} \quad \omega = \frac{n\pi}{2} \frac{c}{d}$$

Se invece ci poniamo al centro, occorrono entrambe le equazioni, che ora diventano

$$\begin{aligned}\tan \beta_0 d = 0 &\implies \omega = n\pi \frac{c}{d} \\ \cot \beta_0 d = 0 &\implies \omega = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \frac{c}{d}\end{aligned}$$



## 31 RISONANZE REALI

Una soluzione reale  $\omega_0$  dell'equazione di risonanza equivale a un modo naturale oscillatorio, con andamento temporale del tipo  $\text{Re}(e^{j\omega_0 t})$

Tuttavia, la presenza di perdite (distribuite o concentrate) impedisce la presenza di modi naturali persistenti, e quindi le equazione di risonanza (179) forniranno delle soluzioni in  $s$  con parte reale negativa. Interpretate in termini di frequenza, secondo la (178), tali soluzioni con

dovranno ad delle frequenze di risonanza *complesse* del tipo  $\omega_1 + j\omega_2$ . Di conseguenza l'andamento temporale del campo sarà del tipo

$$\operatorname{Re}(e^{j(\omega_1 + j\omega_2)t}) = e^{-\omega_2 t} \operatorname{Re}(e^{j\omega_1 t}) \quad (183)$$

ed è quindi di tipo oscillatorio smorzato. La parte reale della frequenza complessa di risonanza è la frequenza delle oscillazioni smorzate, mentre  $\omega_2$  è l'inverso della costante di tempo dello smorzamento del campo.

Per una soluzione di tipo oscillatorio smorzato, l'energia varia nel tempo e, a rigori, non si può evidentemente più parlare di energia media. Se però  $\omega_2 \ll \omega_1$  allora l'andamento (183) è quello di una funzione a banda stretta. Pertanto ha ancora senso parlare di energia media valutata su un periodo, in quanto all'interno di ogni periodo dell'oscillazione è possibile trascurare lo smorzamento. Naturalmente tal energia media non sarà costante, ma varierà a seconda del periodo scelto per calcolarla. In particolare si ridurrà secondo una legge del tipo

$$W(t) = W(0) e^{-2\omega_2 t} \quad (184)$$

in cui  $t$  è l'istante iniziale del periodo in cui stiamo calcolando l'energia media. La riduzione di energia descritta dalla (184) è evidentemente collegata a una dissipazione di potenza (o a un flusso di potenza verso l'esterno del risuonatore) tramite il teorema di Poynting:

$$P_D = -\frac{d}{dt} W(t) = (2\omega_2) W(t) \quad (185)$$

La potenza dissipata in un periodo di durata  $T$  vale

$$T P_D = \frac{2\pi}{\omega_1} (2\omega_2) W$$

e quindi il rapporto

$$\frac{2\omega_2}{\omega_1} = \frac{T}{2\pi} \frac{P_D}{W}$$

è una misura della potenza dissipata nel periodo, ovvero dell'attenuazione (sempre riferita d'un periodo) del campo. Per analogia con i circuiti risonanti *RLC* conviene introdurre il *fattore di merito*:

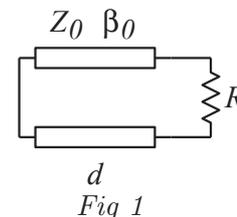
$$Q = \frac{\omega_1 W}{P_D} = \frac{\omega_1}{2\omega_2} \quad (186)$$

che, al pari di  $\omega_2$  fornisce una misura della velocità di attenuazione dell'energia in un periodo.

La (186) esprime il fattore di merito mediante le due parti della frequenza complessa. Tuttavia, molti casi, il fattore di merito può anche essere calcolato una tecnica più semplice, di tipo *perturbativa*, che è valida purchè  $Q \gg 1$ . Poichè ovviamente il fattore di merito non è noto prima di calcolarlo, sembrerebbe che tale tecnica non sia mai applicabile. È però possibile utilizzare un approccio cosiddetto *autoconsistente*, in cui si suppone inizialmente che il fattore di merito sia abbastanza grande, lo si calcola utilizzando la tecnica perturbativa e, se il valore è effettivamente grande, si accettano quei risultati. Se invece il valore trovato è troppo piccolo, occorre ricalcolare per altra via (e cioè usando la frequenza complessa) il fattore di merito. È evidente che, se si è in grado di fare una stima *a priori* del fattore di merito, il che è molto spesso possibile, allora si può evitare di utilizzare la tecnica perturbativa quando tale stima fornisce valori troppo piccoli.

Tale tecnica perturbativa prevede di calcolare la frequenza di risonanza e la energia immagazzinata di un risonatore *ideale* (cioè privo di perdite) che sia però *vicino* al risonatore reale di interesse. Per quanto riguarda invece la potenza dissipata, questa si calcola inserendo le perdite, ma assumendo che la presenza delle perdite medesime non alteri la distribuzione del campo nel risonatore rispetto al caso ideale. Naturalmente per il calcolo di energia e potenza dissipata occorre “alimentare” il risonatore, ovvero fissare il valore di una corrente o di una tensione. Questa scelta può essere fatta nel modo più comodo per calcolare le grandezze di interesse, in quanto il fattore di merito risulta completamente indipendente da essa.

Si consideri risonatore reale di figura 1, in cui la resistenza  $R$  è molto più piccola delle impedenza caratteristica  $Z_0$  della linea. Il risonatore ideale vicino a quello reale si ottiene allora ponendo  $R = 0$  e questo fornisce come frequenza di risonanza  $\omega = \pi c/d$  e come energia immagazzinata  $W = Ld|I_0|^2/4$ , essendo  $L$  la induttanza della linea e  $I_0$  la corrente che arbitrariamente assumiamo scorra nel cortocircuito di sinistra.



Per quanto riguarda il calcolo della potenza dissipata, occorre assumere la stessa configurazione di campo del risonatore ideale, e quindi, essendo il risonatore lungo mezza lunghezza d'onda, nella resistenza  $R$  scorrerà una corrente uguale a  $I_0$ . La potenza dissipata sarà allora  $P_D = R|I_0|^2/2$  e quindi il fattore di merito risulta

$$Q = \frac{\pi Z_0}{2R}$$

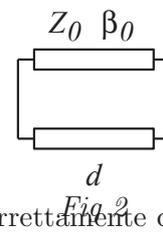
Risultando quindi  $Q \gg 1$  l'analisi perturbativa fatta è corretta.

Analizzando lo stesso risonatore con la tecnica della frequenza complessa si trova che l'errore relativo, sia sul fattore di merito, sia sulla frequenza di risonanza, è dell'ordine di grandezza di  $1/2Q$ , e questo valore dell'errore relativo si ritrova anche in tutti gli altri casi di applicazione della tecnica perturbativa.

Concludiamo questo paragrafo notando due cose.

La prima è che, nel calcolo della potenza dissipata con la tecnica perturbativa, non tutte le grandezze possono essere considerate uguali a quelle del caso ideale. Se consideriamo infatti la tensione ai capi della resistenza  $R$ , questa tensione è nulla nel caso ideale, e quindi se venisse utilizzata per calcolare la potenza dissipata, troveremo potenza dissipata nulla, il che è palesemente assurdo. Il punto è che possiamo considerare uguali nel risonatore ideale e in quello reale tutte le grandezze che nel risonatore ideale sono diverse da zero. Infatti in tal caso l'errore relativo fatto nel considerarle uguali è molto piccolo. Se invece prendiamo una grandezza nulla nel risonatore ideale, ma diversa da zero in quello reale, il supporle uguali porta a un errore relativo infinito. La tensione ai capi della resistenza nel risonatore ideale può essere calcolata a partire dalla corrente attraverso la resistenza (che è uguale nella risonatore ideale ed in quello reale, e vale  $I_0$ ) come  $V_R = R I_0$ .

La seconda è che anche un risonatore come quello di figura 2 *sembra* vicino al nostro risonatore ideale. Se però calcoliamo frequenza di risonanza e fattore di merito per tale risonatore troveremo una frequenza di risonanza metà di quella vera e soprattutto un fattore di merito pari a  $\pi Z_0/2R$ , ovvero molto più piccolo di 1. Tale ultimo fatto mostra che è stato fatto un errore, e in particolare quello di approssimare una resistenza *piccola* con un circuito aperto, anziché correttamente con un cortocircuito. Ovviamente, se la resistenza fosse risultata molto più grande dell'impedenza



caratteristica  $Z_0$  della linea, il risonatore ideale da utilizzare sarebbe stato quello di figura 2.

## 32 COLLEGAMENTO DEI RISUONATORI

Finora abbiamo considerato il risonatore isolato. Tuttavia, per utilizzare un risonatore, occorre connetterlo a un circuito esterno, alimentato. La rete di alimentazione dei risonatori ha evidentemente anche l'effetto di caricare il risonatore, abbassandone pertanto il fattore di merito. Pertanto la scelta del tipo di connessione, e della sua posizione, deve tener conto, oltre che dei vincoli costruttivi, anche della necessità di non caricare eccessivamente il risonatore medesimo. D'altra parte, in molti casi un risonatore è usato come modello di altre strutture, e in tal caso l'interesse è soprattutto quello di fornire al risonatore tutta la potenza disponibile dal generatore. È ovvio che in tal caso la riduzione dell'effetto di carico dell'alimentazione passa in secondo piano.

La varietà di possibili configurazioni di risonatori, e di reti di alimentazione, non consente una trattazione generale. Pertanto faremo riferimento a un'unica struttura risonante, riportata in Fig. 1, costituita da una linea di lunghezza  $d$ , e di impedenza  $Z_L$  piccola (dell'ordine di alcuni Ohm). Le due estremità della linea sono chiuse su due resistenze di valore  $R_0$  grandi (dell'ordine delle centinaia di Ohm e oltre). Cercheremo comunque di esprimere tutti i risultati in termini generali, in modo da poterli utilizzare direttamente (o applicando la dualità, qualora sia necessario) in tutti gli altri casi.

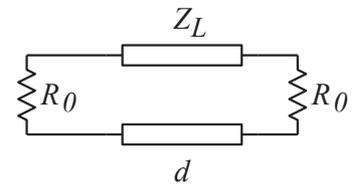


Fig 1

Utilizzando la tecnica perturbativa, occorre sostituire alle resistenze  $R_0$  dei circuiti aperti. Si trova quindi che la risonanza del sistema isolato è alla frequenza  $f_r$  definita dalla relazione

$$\beta_r d = \pi$$

dove  $\beta_r$  è la costante di propagazione nella linea, corrispondente alla frequenza di risonanza.

Per quanto riguarda il fattore di merito, possiamo *alimentare* il risonatore con una tensione  $V_0$  su una delle resistenze terminali. Si trova facilmente che l'energia vale

$$W_{em} = \frac{1}{2} C V_0^2 \frac{d}{2}$$

dove  $C$  è la capacità per unità di lunghezza della linea. Invece la potenza dissipata risulta

$$P_0 = 2 \frac{1}{2R_0} V_0^2 = \frac{1}{R_0} V_0^2$$

e quindi il fattore di merito totale <sup>1</sup> del risonatore isolato, che prende il nome di fattore di merito *a vuoto* (*unloaded Q*), vale

<sup>1</sup> Tale fattore di merito totale risulta pari alla metà del fattore di merito dovuto separatamente a ciascuna delle due resistenze  $R_0$ .

$$Q_0 = \omega_r \frac{W}{P_0} = \omega_r \frac{\frac{Cd}{4}}{\frac{1}{R_0}} = \frac{R_0}{Z_L} \frac{\beta_r d}{4} = \frac{\pi}{4} \frac{R_0}{Z_L}$$

La configurazione più semplice di alimentazione è quella di Fig. 2, in cui viene connessa a una delle due estremità del risonatore una linea di alimentazione di impedenza  $Z_A$ , che praticamente in tutti i casi soddisferà alla relazione

$$R_0 \gg Z_A \gg Z_L$$

Il carico dovuto a questa linea aumenterà evidentemente la potenza dissipata, riducendo il fattore di merito. Questo effetto può essere calcolato sostituendo alla linea la sua impedenza caratteristica, la quale si troverà in parallelo a  $R_0$  e quindi sarà soggetta alla stessa tensione. La potenza dissipata su tale impedenza risulterà quindi

$$P_A = \frac{1}{2Z_A} V_0^2$$

Se introduciamo il *fattore di merito dovuto all'alimentazione*

$$Q_A = \omega_r \frac{W}{P_A} = \frac{\pi}{2} \frac{Z_A}{Z_L}$$

il fattore di merito totale  $Q_T$ , detto *fattore di merito del risonatore caricato (loaded Q)*, risulterà pari a

$$\frac{1}{Q_T} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_A}$$

Nel nostro caso, in particolare, risulta

$$Q_T = \left[ \frac{4Z_L}{\pi R_0} + \frac{2Z_L}{\pi Z_A} \right]^{(-1)} = \frac{\pi R_0}{4Z_L} \frac{1}{1 + \frac{R_0}{2Z_A}}$$

da cui risulta evidente la riduzione del fattore di merito causata dall'effetto di carico dell'alimentazione, e misurata dall'ultimo fattore dell'espressione precedente. Viceversa, con questo tipo di alimentazione, non si ha variazione della frequenza di risonanza, in quanto, essendo  $Z_A \gg Z_L$ , la linea di alimentazione va sostituita con un circuito aperto per ottenere il risonatore ideale corrispondente a quello sotto esame.

Questo per quanto riguarda il problema visto dall'*interno* del risonatore. Dal punto di vista dell'alimentazione, invece, occorre determinare il valore della ammettenza di ingresso  $Y_{IN}(\omega)$ , almeno per le frequenze intorno quella di risonanza. In questi intervalli tale ammettenza di ingresso può essere determinata in una forma valida per qualunque tipo di risonatore che abbia una ammettenza di ingresso che tende ad 0 alla frequenza di risonanza, se le perdite si annullano. Per quei risonatori in cui alla frequenza di risonanza è l'impedenza di ingresso (nel caso ideale) ad annullarsi, basterà, per dualità, scambiare ammettenze con impedenze e viceversa.

Dal teorema di Poynting, infatti, si trova che

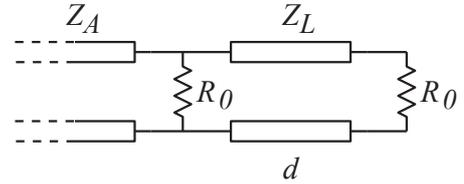


Fig 2

$$P_0 = \frac{1}{2} G_{IN} V_0^2$$

essendo  $G_{IN} = \text{Re}[Y_{IN}]$ .  
Segue allora

$$G_{IN} = 2 \frac{P_0}{V_0^2} = 2 \frac{\omega_r \frac{W}{Q_0}}{V_0^2} = \frac{1}{Q_0} \frac{\omega_r C d}{2} = \frac{\pi}{2Z_L} \frac{1}{Q_0}$$

Questo è, evidentemente, il valore alla risonanza ma, in un intervallo non troppo grande attorno alla risonanza medesima, possiamo assumere  $G_{IN}$  costante con la frequenza. Per quanto riguarda la suscettanza  $B_{IN}$ , questa risulta pari alla ammettenza di ingresso in assenza di perdite (divisa per  $j$ ). Si trova quindi

$$jB_{IN} = j \frac{1}{Z_L} \tan(\beta d) = j \frac{1}{Z_L} \tan[(\beta - \beta_r)d + \pi]$$

essendo  $\beta_r d = \pi$ . Limitandoci un intervallo piccolo attorno alla risonanza segue allora

$$B_{IN} = \frac{1}{Z_L} \tan[(\beta - \beta_r)d] \simeq \frac{1}{Z_L} (\beta - \beta_r)d = \frac{1}{Z_L} \frac{\omega - \omega_r}{\omega_r} \beta_r d = \frac{\pi}{Z_L} \frac{\omega - \omega_r}{\omega_r}$$

Pertanto vicino alla risonanza risulta

$$Y_{IN} = \frac{\pi}{2Z_L} \frac{1}{Q_0} + 2j \frac{\pi}{2\omega_r Z_L} (\omega - \omega_r)$$

Tale espressione corrisponde alla ammettenza di un circuito  $RLC$  parallelo (Fig. 3), sempre intorno alla risonanza. In tal caso si ha infatti

$$Y = \frac{1}{R_c} + j\omega C_c - \frac{j}{\omega L_c} = \frac{1}{R_c} + j\omega C_c \left(1 - \frac{\omega_r^2}{\omega^2}\right)$$

in cui la frequenza di risonanza è data da  $\omega_r^2 = (L_c C_c)^{-1}$ .  
Vicino alla risonanza

$$1 - \frac{\omega_r^2}{\omega^2} = \frac{\omega^2 - \omega_r^2}{\omega^2} \simeq \frac{\omega + \omega_r}{\omega_r^2} (\omega - \omega_r) = \frac{2}{\omega_r} (\omega - \omega_r)$$

e pertanto

$$Y \simeq \frac{1}{R_c} + 2jC_c(\omega - \omega_r)$$

che coincide con l'ammettenza di ingresso del nostro risuonatore con le corrispondenze

$$R_c \longleftrightarrow \frac{2Z_L Q_0}{\pi} \qquad C_c \longleftrightarrow \frac{\pi}{2Z_L \omega_r} \qquad L_c \longleftrightarrow \frac{2Z_L}{\pi \omega_r}$$

Nota l'ammettenza di ingresso  $Y_{IN}$  del risuonatore, è possibile calcolare la potenza assorbita dal risuonatore medesimo (che risulta anche proporzionale al modulo quadro dell'ampiezza dei campi all'interno del risuonatore) per una data potenza incidente. In particolare il rapporto  $\mathcal{P}$  tra la potenza assorbita e quella incidente risulta pari a

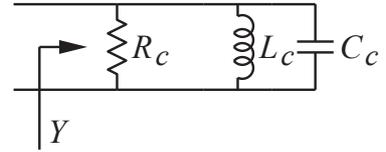


Fig 3

$$\mathcal{P} = 1 - |\Gamma|^2$$

essendo  $\Gamma$  il coefficiente di riflessione all'ingresso del risonatore, dato da

$$\Gamma = \frac{\frac{1}{Z_A} - Y_{IN}}{\frac{1}{Z_A} + Y_{IN}} = \frac{\frac{1}{Z_A} - \frac{\pi}{2Z_L Q_0} - 2j \frac{\pi}{2\omega_r Z_L} (\omega - \omega_r)}{\frac{1}{Z_A} + \frac{\pi}{2Z_L Q_0} + 2j \frac{\pi}{2\omega_r Z_L} (\omega - \omega_r)}$$

Ricordando poi che

$$\frac{1}{Z_A} = \frac{\pi}{2Z_L Q_A}$$

risulta

$$\Gamma = \frac{\left(\frac{1}{Q_A} - \frac{1}{Q_0}\right) - 2j \left(\frac{\omega - \omega_r}{\omega_r}\right)}{\left(\frac{1}{Q_A} + \frac{1}{Q_0}\right) + 2j \left(\frac{\omega - \omega_r}{\omega_r}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{Q_A} - \frac{1}{Q_0}\right) - 2j \left(\frac{\omega - \omega_r}{\omega_r}\right)}{\frac{1}{Q_T} + 2j \left(\frac{\omega - \omega_r}{\omega_r}\right)}$$

Il valore del coefficiente di riflessione alla risonanza,  $\Gamma_r$ , risulta pertanto

$$\Gamma_r = \frac{\left(\frac{1}{Q_A} - \frac{1}{Q_0}\right)}{\frac{1}{Q_T}}$$

Evidentemente la condizione di massimo trasferimento di potenza è  $Q_A = Q_0$ , situazione detta di *accoppiamento critico*. È ovvio che in tal caso il fattore di merito totale risulta dimezzato rispetto al fattore di merito a vuoto <sup>2</sup>. Dall'espressione precedente di  $\Gamma$  risulta

$$\mathcal{P} = 1 - \frac{\frac{|\Gamma_r|^2}{Q_T^2} + 4 \left(\frac{\omega - \omega_r}{\omega_r}\right)^2}{\frac{1}{Q_T^2} + 4 \left(\frac{\omega - \omega_r}{\omega_r}\right)^2} = \frac{1 - |\Gamma_r|^2}{1 + 4Q_T^2 \left(\frac{\omega - \omega_r}{\omega_r}\right)^2}$$

L'andamento di  $\mathcal{P}(\omega)$  (Fig. 4) è il tipico andamento di una risonanza. La sua larghezza si misura convenzionalmente mediante la banda passante a metà altezza

$$B_3 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi}$$

dove  $\omega_1$  e  $\omega_2$  sono le due frequenze per cui  $\mathcal{P}$  dimezza rispetto suo valore massimo (dette *frequenze di taglio* rispettivamente inferiore e superiore). Poichè il numeratore di  $\mathcal{P}$  è costante

---

<sup>2</sup> Se la condizione di massimo trasferimento di potenza non è verificata si parla di *accoppiamento lasco* se  $Q_A > Q_0$ , condizione nella quale la rete di alimentazione carica poco il risonatore, e ne modifica poco il fattore di merito, e di *accoppiamento stretto* se  $Q_A < Q_0$ , condizione nella quale la rete di alimentazione carica molto il risonatore, producendo una notevole riduzione del fattore di merito totale

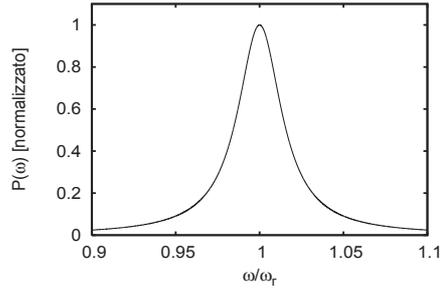


Fig. 4: Andamento della potenza assorbita da un risuonatore

con la frequenza, le due frequenze di taglio sono le frequenze per cui il denominatore di  $\mathcal{P}$  vale 2, e cioè

$$\omega_{1,2} = \omega_r \mp \frac{\omega_r}{2Q_T}$$

La banda passante è allora data da

$$B_3 = \frac{\omega_r}{2\pi} \frac{1}{Q_T}$$

e la banda passante relativa è esattamente l'inverso del fattore di merito totale. Al crescere di  $Q_T$  si riduce quindi la banda passante, il che è un vantaggio se il risuonatore è utilizzato per discriminare una frequenza rispetto alle altre, mentre risulta uno svantaggio se il risuonatore viene utilizzato per modellare un carico da alimentare, perchè in tal caso la banda in cui quel carico può essere utilizzato si riduce.

Occorre ovviamente notare che i risultati precedenti valgono solo in un intervallo non troppo largo attorno alla frequenza di risonanza. Tuttavia l'errore che si commette sulla banda passante risulta intorno allo 0.2% per bande passanti notevoli (superiori al 15%), e significativamente più piccolo per bande passanti piccole.

### 33 ALTRE CONFIGURAZIONI DI ALIMENTAZIONE

Dall'analisi del caso precedente si vede che non è consigliabile connettere direttamente la linea di alimentazione a risuonatori con un fattore di merito elevato, in quanto ciò riduce considerevolmente il fattore di merito stesso.

Una configurazione alternativa (Fig. 1) prevede di inserire tra la linea e l'ingresso del risuonatore una reattanza (tipicamente un condensatore) di valore elevato  $jX_A$ , che consenta di disaccoppiare il risuonatore dalla linea di alimentazione. Naturalmente la presenza della reattanza modifica anche la frequenza di

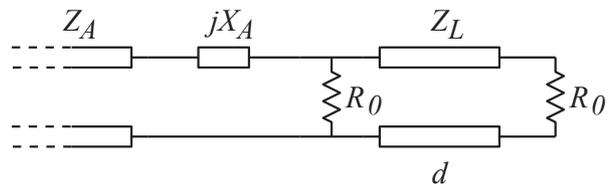


Fig 1

risonanza. L'equazione di risonanza per il risuonatore ideale (in cui la linea di alimentazione va ora sostituita con un cortocircuito) diventa

$$jX_A + jZ_L \cot \beta_{rx}d = 0$$

Ovviamente, essendo la reattanza di valore elevato, la frequenza di risonanza  $\beta_{rx}$  si sposta di poco, e si può quindi porre  $\beta_{rx}d = \beta_r d + (\beta_{rx} - \beta_r)d = \pi + \Delta\vartheta$ , con  $\Delta\vartheta$  piccolo in modulo. Sostituendo nell'equazione di risonanza si trova

$$0 = jX_A - jZ_L \cot \Delta\vartheta \simeq jX_A - j\frac{Z_L}{\Delta\vartheta}$$

da cui segue <sup>3</sup>

$$\Delta\vartheta = \frac{Z_L}{X_A}$$

La presenza di un condensatore riduce pertanto la frequenza di risonanza.

Per quanto riguarda il fattore di merito, si può trascurare nell'energia sia l'effetto della variazione di lunghezza  $\Delta\vartheta$ , sia l'energia immagazzinata in  $X_A$ . Anche la potenza dissipata nelle resistenze rimane inalterata. Viceversa la potenza dissipata in  $Z_A$  si riduce notevolmente e vale

$$P_A = \frac{1}{2} Z_A |I_A|^2 = \frac{1}{2} Z_A \frac{V_0^2}{Z_A^2 + X_A^2}$$

e pertanto

$$Q_A = \frac{\pi}{2Z_L} \frac{Z_A^2 + X_A^2}{Z_A}$$

Se  $|X_A| \gg Z_A$ , il fattore di merito dovuto all'alimentazione risulta notevolmente più grande, ovvero l'alimentazione non carica il risuonatore.

Un'altra configurazione di alimentazione, che viene utilizzata non solo per evitare di caricare i risuonatori con fattore di merito elevato, ma anche per ottenere facilmente la condizione di accoppiamento critico, è quella di connettere la alimentazione in un punto intermedio del risuonatore.

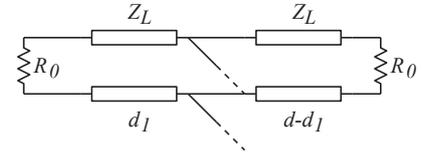


Fig 2

Collegiamo la linea di alimentazione, di impedenza  $Z_A$ , a una distanza  $d_1$  da una delle estremità del risuonatore.

L'unica grandezza che varia rispetto alle configurazioni iniziali è la potenza dissipata sulla alimentazione. Poiché la tensione nel punto in cui è connessa la alimentazione vale  $V_0 \cos \beta d_1$ , tale potenza risulta

$$P_A = \frac{1}{2Z_A} V_0^2 \cos^2 \beta d_1$$

e di conseguenza

$$Q_A = \frac{\pi}{2Z_L} \frac{Z_A}{\cos^2 \beta d_1}$$

<sup>3</sup> A rigori anche  $X_A$  dipende dalla frequenza, ma non si commette errore apprezzabile sostituendo nell'equazione precedente il suo valore alla frequenza di risonanza

più elevato rispetto al caso in cui alimentazione viene connessa a una estremità.

La posizione  $d_1$  che fornisce l'accoppiamento critico (ovvero l'adattamento di ingresso) si ottiene imponendo  $Q_A = Q_0$ , e vale

$$\cos^2 \beta d_1 = \frac{\pi Z_A}{2Z_L} \frac{1}{Q_0}$$