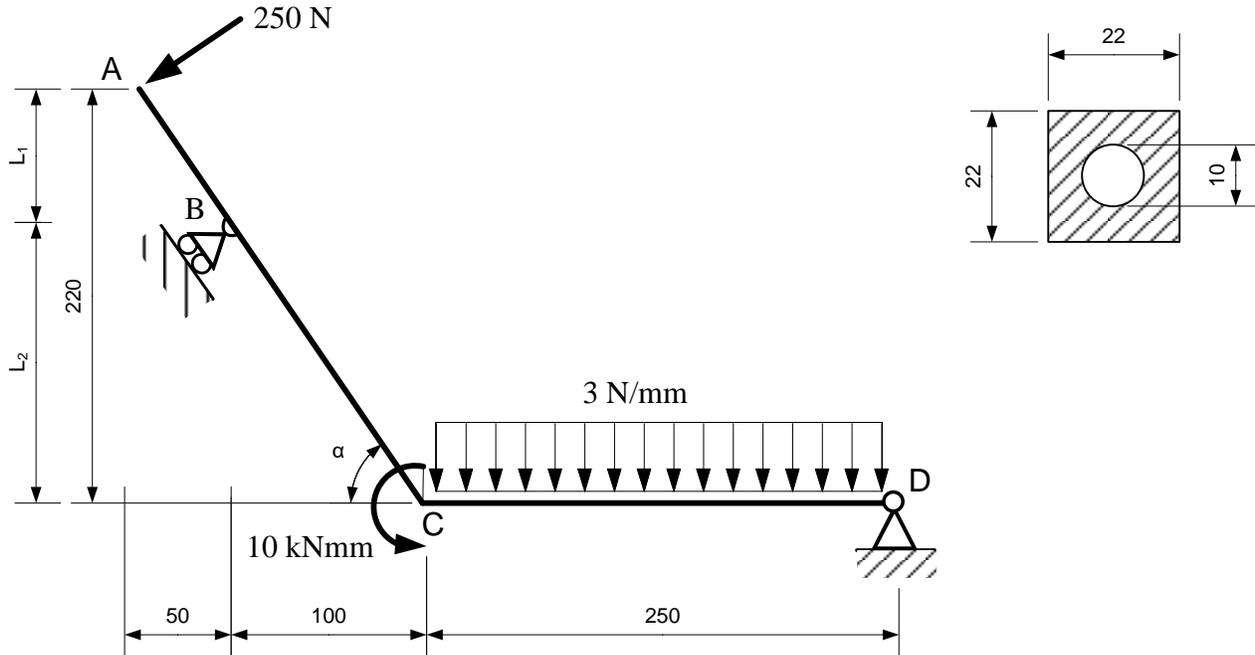


# ESEMPIO 1

Data la struttura di figura, si richiede:

- il calcolo della rotazione (in gradi) della linea d'asse nell'estremo A;
- il calcolo dello sforzo  $\sigma$  massimo positivo nella struttura;
- il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne (M, N, T).

Materiale : Acciaio ( $E = 210 \text{ GPa}$ )



Struttura isostatica ( $GdL=3$ ;  $GdV=3$ ), non labile.

Per il calcolo della rotazione (in gradi) della linea d'asse nell'estremo A si utilizza il Principio dei Lavori Virtuali.

## CALCOLI PRELIMINARI

Area e momento di inerzia della sezione circolare cava.

$$A = 22 \cdot 22 - \pi \cdot \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 405.46 \text{ mm}^2$$

$$J = \frac{1}{12} \cdot 22 \cdot 22^3 - \frac{\pi}{64} \cdot 10^4 = 19030.46 \text{ mm}^4$$

Angolo  $\alpha$ .

$$\alpha = \arctg\left(\frac{220}{150}\right) = 55.713^\circ$$

$$\cos \alpha = 0.56334$$

$$\sin \alpha = 0.82623$$

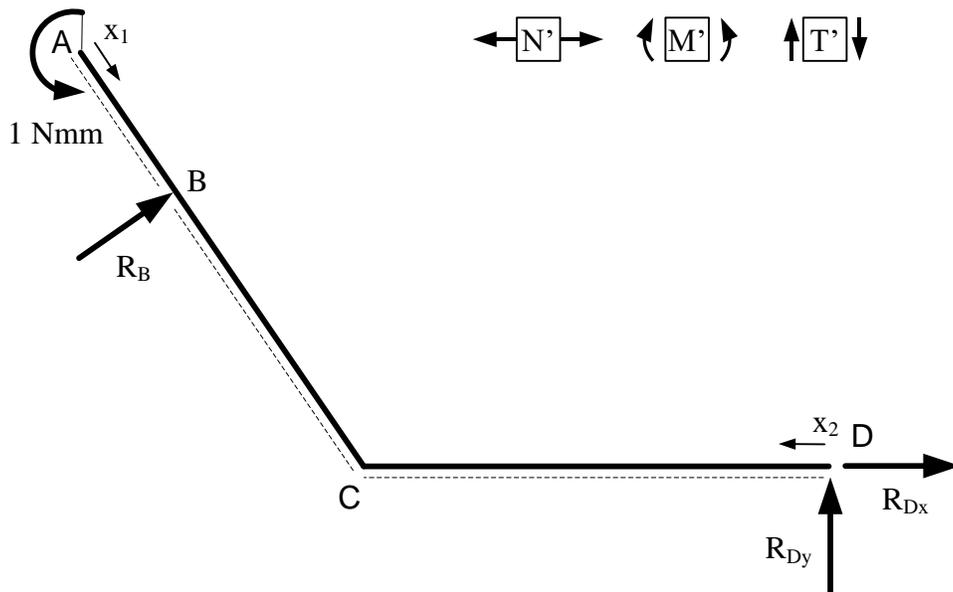
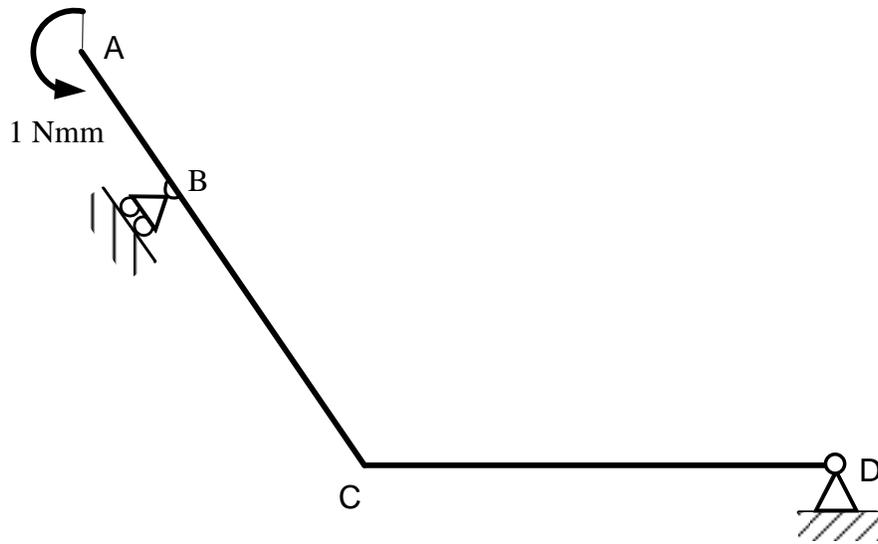
Lunghezza tratti vari.

$$AB = \frac{50}{\cos 55.713^\circ} = 88.8 \text{ mm} \quad BC = \frac{100}{\cos 55.713^\circ} = 177.5 \text{ mm} \quad AC = \frac{150}{\cos 55.713^\circ} = 266.3 \text{ mm}$$

$$L_1 = 50 \cdot \tan 55.713^\circ = 73.3 \text{ mm}$$

$$L_2 = 100 \cdot \tan 55.713^\circ = 146.7 \text{ mm}$$

### RISOLUZIONE DEL SISTEMA DELLE FORZE



Calcolo delle reazioni vincolari.

$$\curvearrowright_D) R_B \cdot \cos 55.713^\circ \cdot (250 + 100) + R_B \cdot \sin 55.713^\circ \cdot 146.7 - 1 = 0$$

$$\rightarrow) R_{Dx} + R_B \cdot \sin 55.713^\circ = 0$$

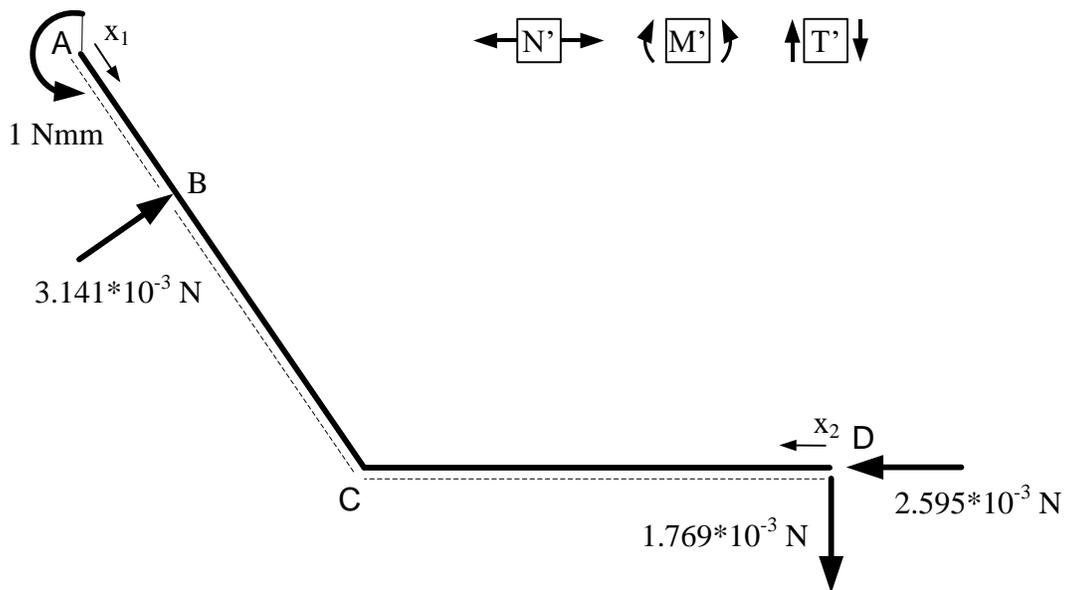
$$\uparrow) R_{Dy} + R_B \cdot \cos 55.713^\circ = 0$$

Si ottiene:

$$R_B = 3.141 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

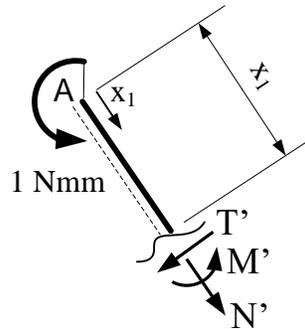
$$R_{Dx} = -2.595 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

$$R_{Dy} = -1.769 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$



Calcolo delle azioni interne.

$$0 \leq x_1 \leq 88.8$$

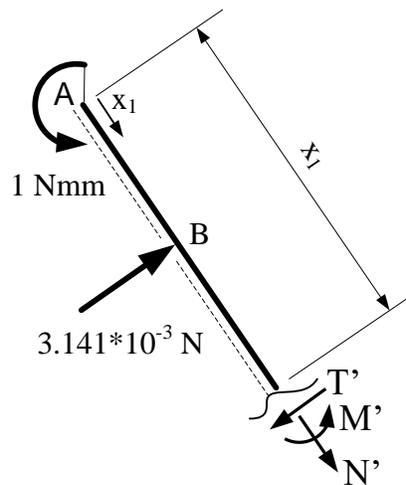


$$N' = 0$$

$$M' + 1 = 0$$

$$M' = -1 \text{ Nmm}$$

$$88.8 \leq x_1 \leq 266.3$$

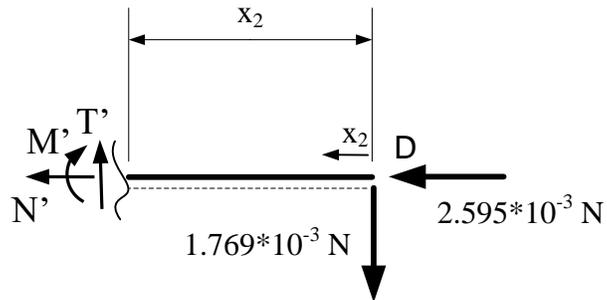


$$N' = 0$$

$$M' + 1 - 3.141 \cdot 10^{-3} \cdot (x_1 - 88.8) = 0$$

$$M' = 3.141 \cdot 10^{-3} \cdot x_1 - 1.279$$

$$0 \leq x_2 \leq 250$$



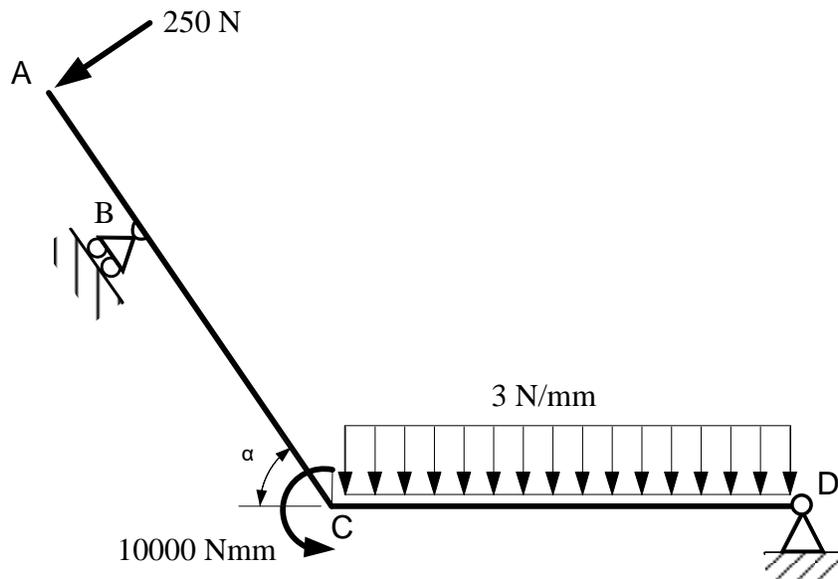
$$N' + 2.595 \cdot 10^{-3} = 0$$

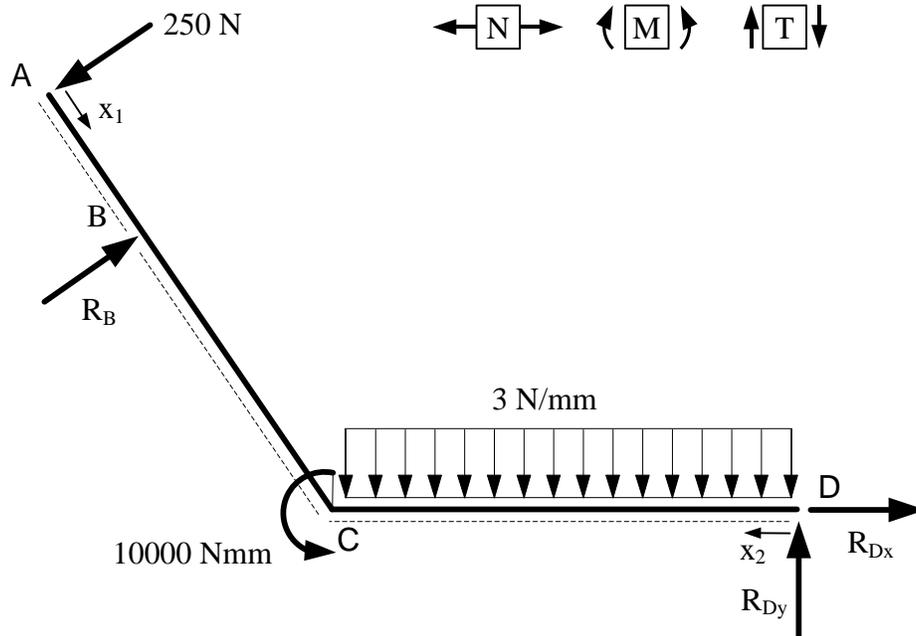
$$N' = -2.595 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

$$M' + 1.769 \cdot 10^{-3} \cdot x_2 = 0$$

$$M' = -1.769 \cdot 10^{-3} \cdot x_2$$

### RISOLUZIONE DEL SISTEMA DEGLI SPOSTAMENTI





Calcolo delle reazioni vincolari.

$$\curvearrowright_D) R_B \cdot \cos 55.713^\circ \cdot (250 + 100) + R_B \cdot \sin 55.713^\circ \cdot 146.7 - 250 \cdot \cos 55.713^\circ \cdot (250 + 100 + 50) - 250 \cdot \sin 55.713^\circ \cdot 220 - 10000 - 3 \cdot \frac{250^2}{2} = 0$$

$$\rightarrow) R_{Dx} + R_B \cdot \sin 55.713^\circ - 250 \cdot \sin 55.713^\circ = 0$$

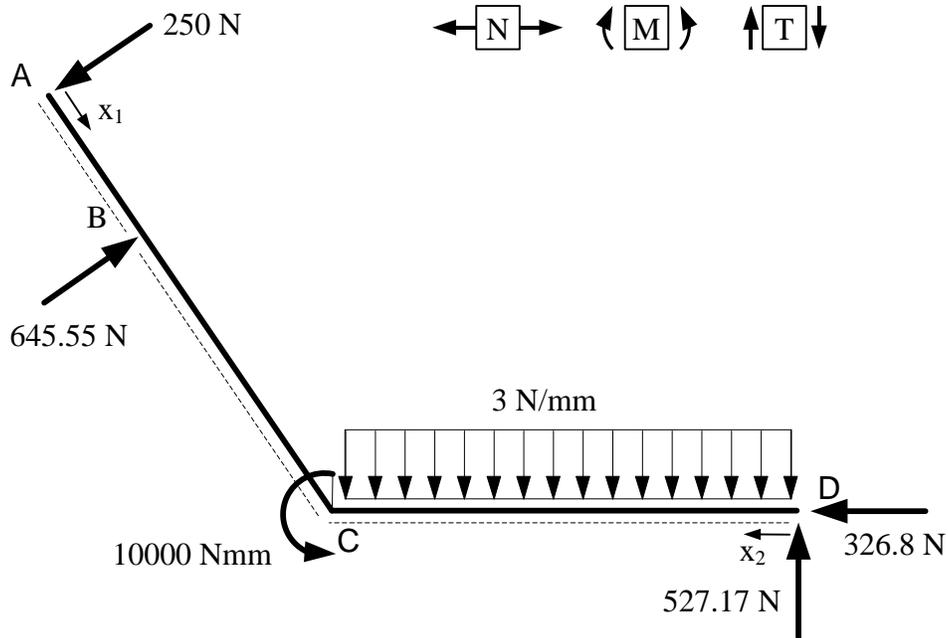
$$\uparrow) R_{Dy} + R_B \cdot \cos 55.713^\circ - 250 \cdot \cos 55.713^\circ - 3 \cdot 250 = 0$$

Si ottiene:

$$R_B = 645.55 \text{ N}$$

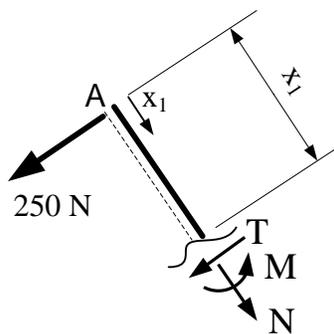
$$R_{Dx} = -326.8 \text{ N}$$

$$R_{Dy} = -527.17 \text{ N}$$



Calcolo delle azioni interne.

$$0 \leq x_1 \leq 88.8$$



$$N = 0$$

$$T + 250 = 0$$

$$T = -250 \text{ N}$$

$$M + 250 \cdot x_1 = 0$$

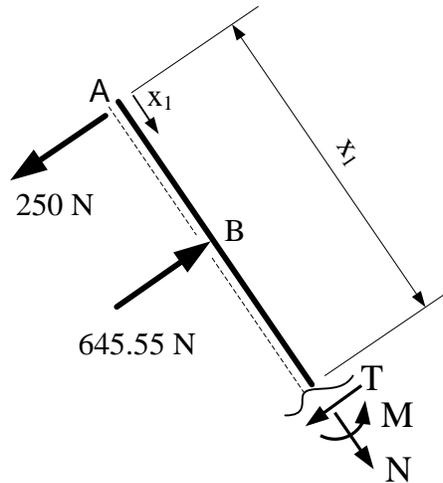
$$M = -250 \cdot x_1$$

Calcolo di alcuni valori per il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne.

$$M(0) = 0$$

$$M(88.8) = -22200 \text{ Nmm}$$

$$88.8 \leq x_2 \leq 266.3$$



$$N = 0$$

$$T + 250 - 645.55 = 0$$

$$T = 395.55 \text{ N}$$

$$M + 250 \cdot x_1 - 645.55 \cdot (x_1 - 88.8) = 0$$

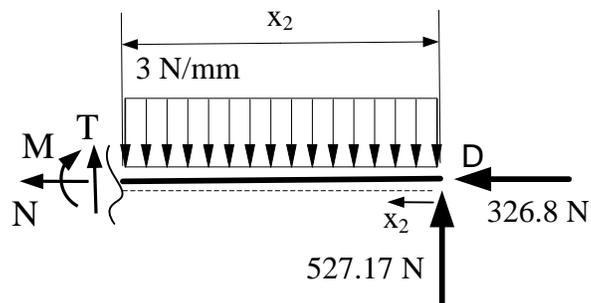
$$M = 395.55 \cdot x_1 - 57324.84$$

Calcolo di alcuni valori per il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne.

$$M(88.8) = -22200 \text{ Nmm}$$

$$M(266.3) = 48010 \text{ Nmm}$$

$$0 \leq x_2 \leq 250$$



$$N + 326.8 = 0$$

$$N = -326.8 \text{ N}$$

$$T + 527.17 - 3 \cdot x_2 = 0$$

$$T = 3 \cdot x_2 - 527.17$$

$$M - 527.17 \cdot x_2 + 3 \cdot \frac{x_2^2}{2} = 0$$

$$M = 527.17 \cdot x_2 - 1.5 \cdot x_2^2$$

Calcolo di alcuni valori per il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne.

$$T(0) = -527.17 \text{ N}$$

$$T(250) = 222.83$$

Il taglio assume valore nullo per  $x_2 = 175.7$  mm, per cui il momento ha un punto di stazionarietà (massimo/minimo) in tale punto.

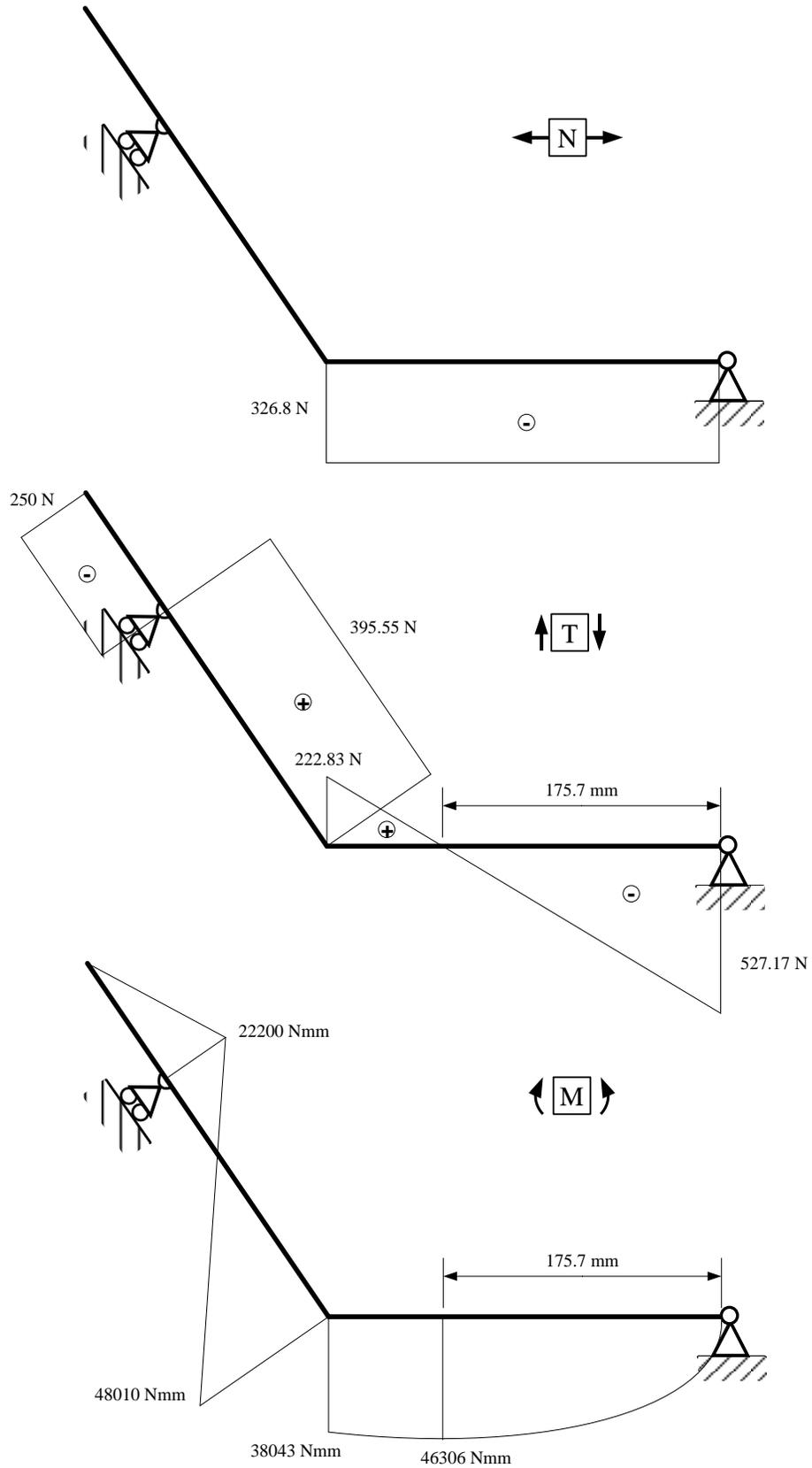
E' sufficiente quindi calcolare il valore del momento agli estremi del tratto e nel punto di stazionarietà, sapendo che avrà andamento parabolico.

$$M(0) = 0$$

$$M(175.7) = 46306 \text{ Nmm}$$

$$M(250) = 38043 \text{ Nmm}$$

DIAGRAMMI DELLE AZIONI INTERNE (N, T, M) DELLA STRUTTURA



Su tali diagrammi si possono fare alcune osservazioni:

- il momento nell'estremo libero in A e nella cerniera in D è nullo;
- nel punto C, dove è applicata una coppia, il valore del momento calcolato nei due tratti AB e DC differisce di un valore pari a 10000 Nmm, pari alla coppia applicata nello stesso punto.
- nel tratto DC il momento è parabolico ed il taglio varia linearmente. Il momento ha un punto di stazionarietà dove il taglio è nullo.
- nel punto B il diagramma del taglio presenta un salto pari al valore della reazione del carrello.

Tutte queste osservazioni indicano come i diagrammi delle azioni interne siano coerenti con lo schema statico della struttura originaria.

INTEGRALE RELATIVO AL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI PER IL CALCOLO DELLA  
ROTAZIONE DELLA LINEA D'ASSE NEL PUNTO A.

$$\varphi = \int_0^l N' \cdot N \cdot \frac{dx}{EA} + \int_0^l M' \cdot M \cdot \frac{dx}{EJ}$$

$$EA = 8.515 \cdot 10^7 \text{ N}$$

$$EJ = 8.8 \cdot 10^{10} \text{ N} \cdot \text{mm}^2$$

Trattandosi di una struttura snella, nelle quali gli effetti del taglio sono trascurabili rispetto a quelli del momento e dell'azione normale, si può trascurare il contributo del taglio nell'integrale del Principio dei Lavori Virtuali.

$$\begin{aligned} \varphi = & \int_0^{88.8} (-1) \cdot (-250 \cdot x_1) \cdot \frac{dx_1}{8.8 \cdot 10^{10}} + \\ & + \int_{88.8}^{266.3} (3.141 \cdot 10^{-3} \cdot x_1 - 1.279) \cdot (395.55 \cdot x_1 - 57324.84) \cdot \frac{dx_1}{8.8 \cdot 10^{10}} + \\ & + \int_0^{250} (-2.595 \cdot 10^{-3}) \cdot (-326.8) \cdot \frac{dx_2}{8.515 \cdot 10^7} + \\ & + \int_0^{250} (-1.769 \cdot 10^{-3} \cdot x_2) \cdot (527.17 \cdot x_2 - 1.5 \cdot x_2^2) \cdot \frac{dx_2}{8.8 \cdot 10^{10}} \end{aligned}$$

Svolgendo i calcoli si ottiene il seguente valore di rotazione, espressa in radianti, che, essendo negativa, ha verso opposto a quello in cui è stata rivolta la coppia unitaria nel sistema delle forze.

$$\varphi = -2.426 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

Convertendo tale valore in gradi, si ottiene la seguente rotazione.

$$\varphi = -0.00139^\circ$$

## CALCOLO DELLO SFORZO $\sigma$ MASSIMO POSITIVO NELLA STRUTTURA

Nella sezione  $x_1=266.3$  mm si ha il momento massimo (in valore assoluto). E' quindi il punto da cui si può iniziare la ricerca dello sforzo  $\sigma$  positivo massimo.

$$M(266.3) = 48010 \text{ Nmm}$$

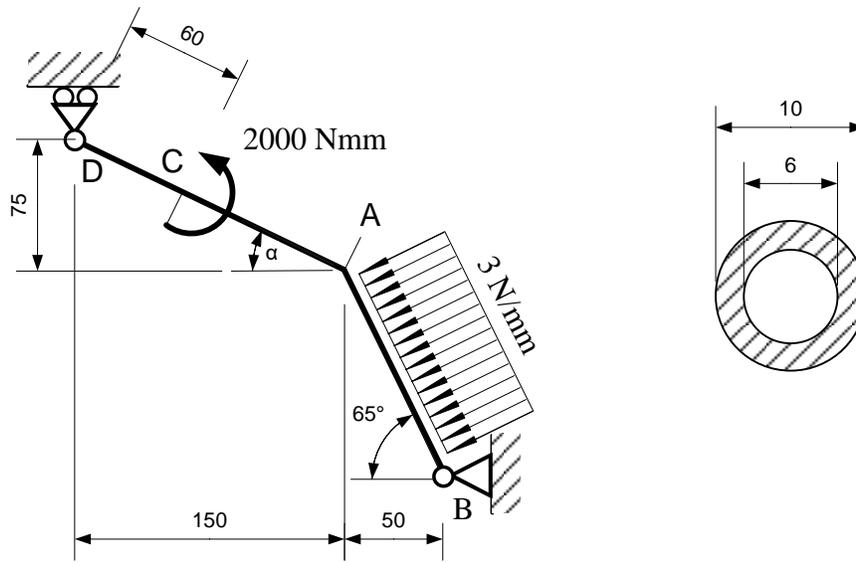
$$N(266.3) = 0$$

$$\sigma_M = \pm \frac{M}{J} \cdot Y = + \frac{48010}{19030.46} \cdot 11 = +27.75 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

C'è però un'altra sezione che si potrebbe pensare di verificare, in cui il momento ha un valore abbastanza simile, anche se più piccolo ed è presente in aggiunta azione normale. Però l'azione normale è negativa, di compressione, e quindi riduce sicuramente lo sforzo  $\sigma$  di trazione (positivo) dovuto al momento. Lo sforzo  $\sigma$  massimo positivo sarà pertanto quello appena calcolato.

## ESEMPIO 2

- Data la struttura di figura (acciaio;  $E = 210 \text{ kN/mm}^2$ ), si richiede:
- il calcolo dello spostamento del punto A in direzione orizzontale;
  - il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne;
  - il calcolo dello sforzo  $\sigma$  massimo nella struttura.



Struttura isostatica (GdL=3; GdV=3), non labile.

Per il calcolo dello spostamento del punto A in direzione orizzontale si utilizza il Principio dei Lavori Virtuali.

### CALCOLI PRELIMINARI

Area e momento di inerzia della sezione circolare cava.

$$A = \pi \left(\frac{10}{2}\right)^2 - \pi \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 50.27 \text{ mm}^2$$

$$J = \frac{\pi}{64} (10)^4 - \frac{\pi}{64} (6)^4 = 427.26 \text{ mm}^4$$

Angolo  $\alpha$ .

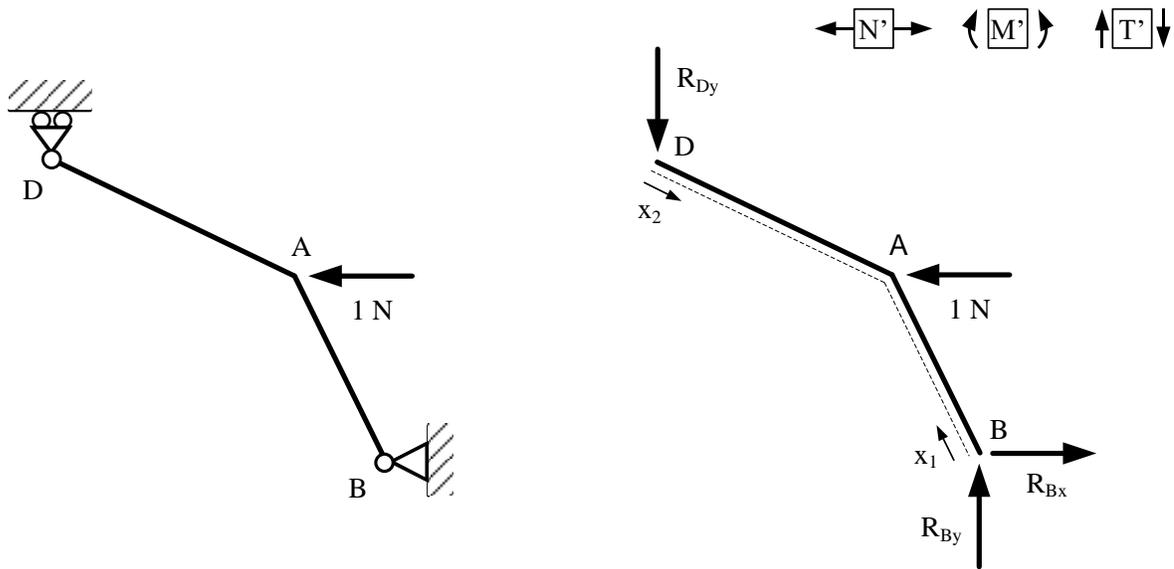
$$\alpha = \text{arctg}\left(\frac{75}{150}\right) = 26.57^\circ$$

Lunghezza tratti BA e DA.

$$BA = \frac{50}{\cos 65^\circ} = 118.3 \text{ mm}$$

$$DA = \sqrt{150^2 + 75^2} = 167.7 \text{ mm}$$

## RISOLUZIONE DEL SISTEMA DELLE FORZE



Calcolo delle reazioni vincolari.

$$\rightarrow) R_{Bx} - 1 = 0$$

$$\curvearrowright_B) -R_{Dy} \cdot (150 + 50) - 1 \cdot (50 \cdot \operatorname{tg}65^\circ) = 0$$

$$\uparrow) R_{By} - R_{Dy} = 0$$

Si ottiene:

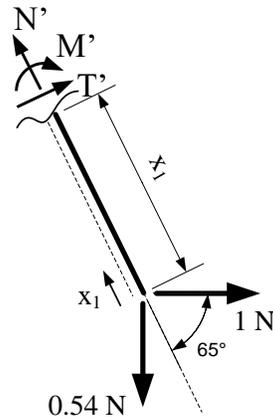
$$R_{Bx} = 1 \text{ N}$$

$$R_{Dy} = -0.54 \text{ N}$$

$$R_{By} = -0.54 \text{ N}$$

Calcolo delle azioni interne.

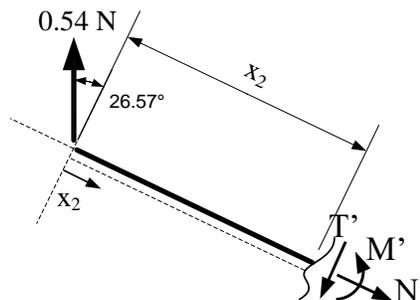
$$0 \leq x_1 \leq 118.3$$



$$N' - 1 \cdot \cos 65^\circ - 0.54 \cdot \sin 65^\circ = 0$$
$$N' = 0.91 \text{ N}$$

$$M' - 1 \cdot \sin 65^\circ \cdot x_1 + 0.54 \cdot \cos 65^\circ \cdot x_1 = 0$$
$$M' = 0.678 \cdot x_1$$

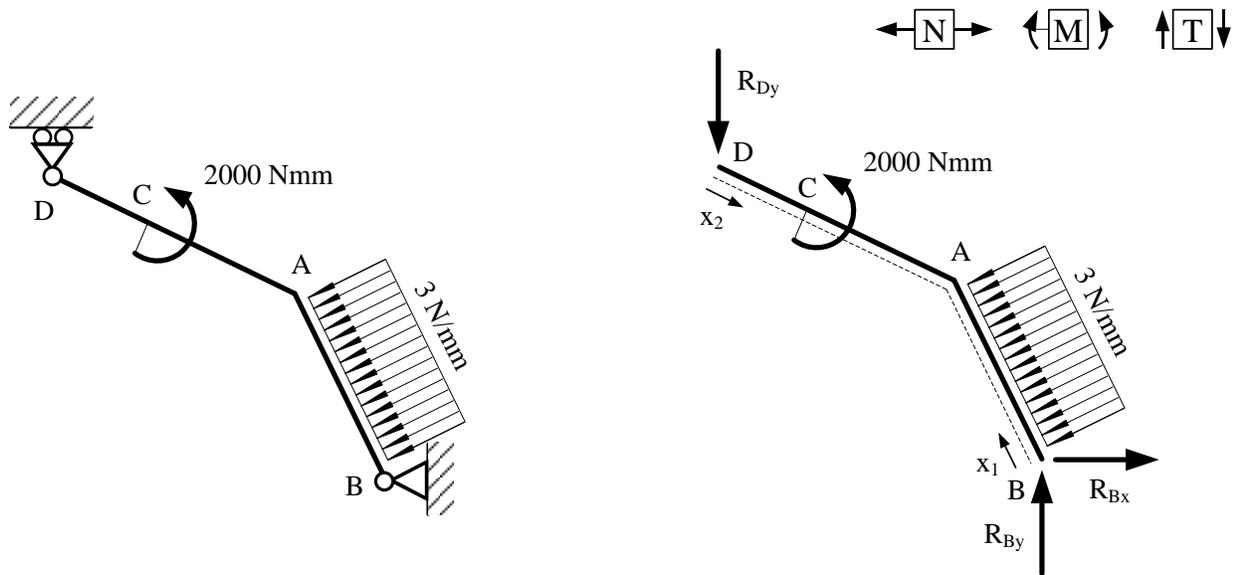
$$0 \leq x_2 \leq 167.7$$



$$N' - 0.54 \cdot \sin 26.57^\circ = 0$$
$$N' = 0.24 \text{ N}$$

$$M' - 0.54 \cdot \cos 26.57^\circ \cdot x_2 = 0$$
$$M' = 0.483 \cdot x_2$$

## RISOLUZIONE DEL SISTEMA DEGLI SPOSTAMENTI



Calcolo delle reazioni vincolari.

$$\rightarrow) R_{Bx} - 3 \cdot 118.3 \cdot \text{sen}65^\circ = 0$$

$$\curvearrowright) -R_{Dy} \cdot (150 + 50) - 2000 - 3 \cdot \frac{118.3^2}{2} = 0$$

$$\uparrow) R_{By} - R_{Dy} - 3 \cdot 118.3 \cdot \text{cos}65^\circ = 0$$

Si ottiene:

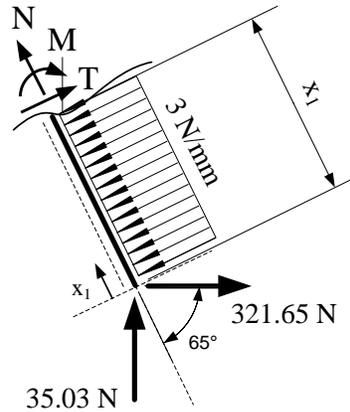
$$R_{Bx} = 321.65 \text{ N}$$

$$R_{Dy} = -114.96 \text{ N}$$

$$R_{By} = 35.03 \text{ N}$$

Calcolo delle azioni interne.

$$0 \leq x_1 \leq 118.3$$



$$N - 321.65 \cdot \cos 65^\circ + 35.03 \cdot \sin 65^\circ = 0$$

$$N = 104.19 \text{ N}$$

$$M - 321.65 \cdot \sin 65^\circ \cdot x_1 - 35.03 \cdot \cos 65^\circ \cdot x_1 + 3 \cdot \frac{x_1^2}{2} = 0$$

$$M = 306.32 \cdot x_1 - 1.5 \cdot x_1^2$$

$$T + 321.65 \cdot \sin 65^\circ + 35.03 \cdot \cos 65^\circ - 3 \cdot x_1 = 0$$

$$T = -306.32 + 3 \cdot x_1$$

Calcolo di alcuni valori per il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne. Di seguito, i valori del momento e del taglio agli estremi dell'intervallo.

$$T(0) = -306.32 \text{ N} \qquad T(118.3) = 48.58 \text{ N}$$

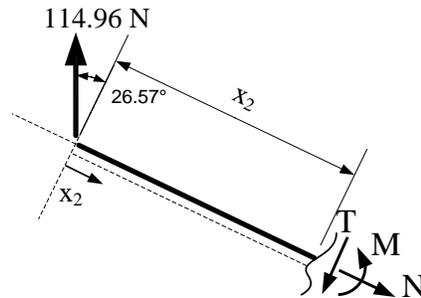
$$M(0) = 0 \qquad M(118.3) = 15243 \text{ Nmm}$$

Essendo il momento parabolico, è necessario verificare se abbia un massimo od un minimo (punto a derivata nulla). Si valuta quindi se il taglio, che è la derivata prima del momento, si annulli in qualche punto dell'intervallo.

$$T = 0 \qquad \text{per} \qquad x_1 = 102.1 \text{ mm}$$

Il momento ha quindi un punto di stazionarietà (massimo o minimo) nel punto appena calcolato, ed il suo valore è pari a  $M(102.1) = 15639 \text{ Nmm}$

$$0 \leq x_2 \leq 60$$



$$N - 114.96 \cdot \sin 26.57^\circ = 0$$
$$N = 51.41 \text{ N}$$

$$M - 114.96 \cdot \cos 26.57^\circ \cdot x_2 = 0$$
$$M = 102.82 \cdot x_2$$

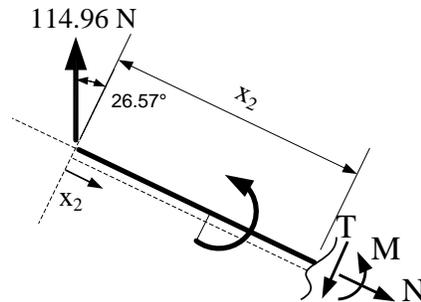
$$T - 114.96 \cdot \cos 26.57^\circ = 0$$
$$T = 102.82$$

Calcolo di alcuni valori per il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne.

$$M(0) = 0$$

$$M(60) = 6169.2 \text{ Nmm}$$

$$60 \leq x_2 \leq 167.7$$



$$N - 114.96 \cdot \sin 26.57^\circ = 0$$

$$N = 51.41 \text{ N}$$

$$M - 114.96 \cdot \cos 26.57^\circ \cdot x_2 + 2000 = 0$$

$$M = 102.82 \cdot x_2 - 2000$$

$$T - 114.96 \cdot \cos 26.57^\circ = 0$$

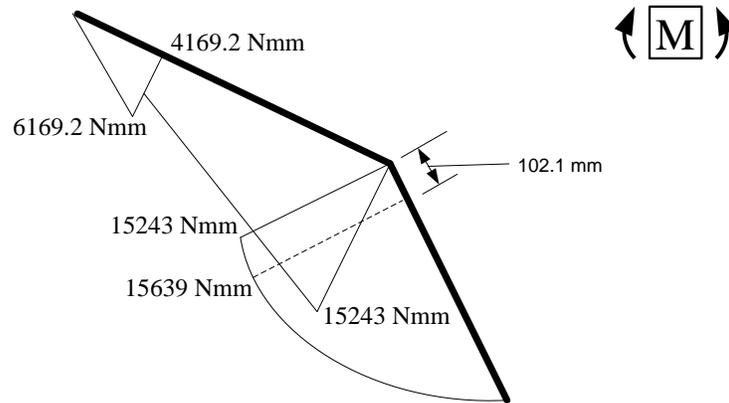
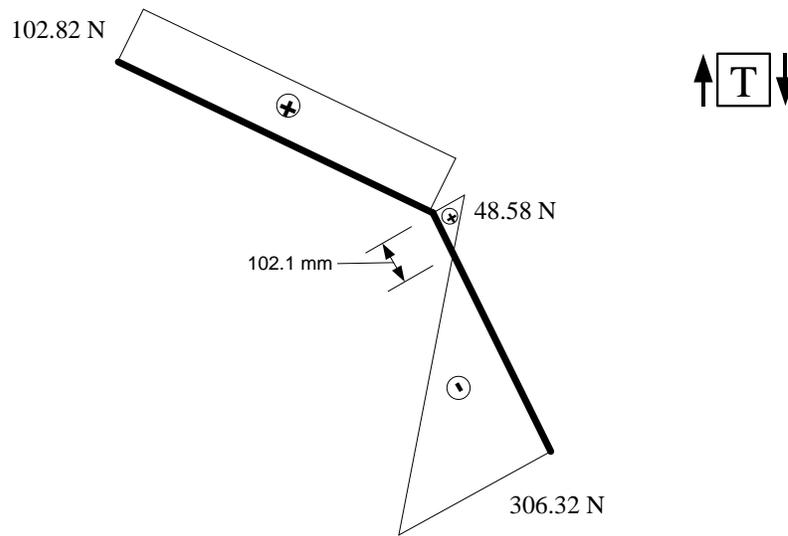
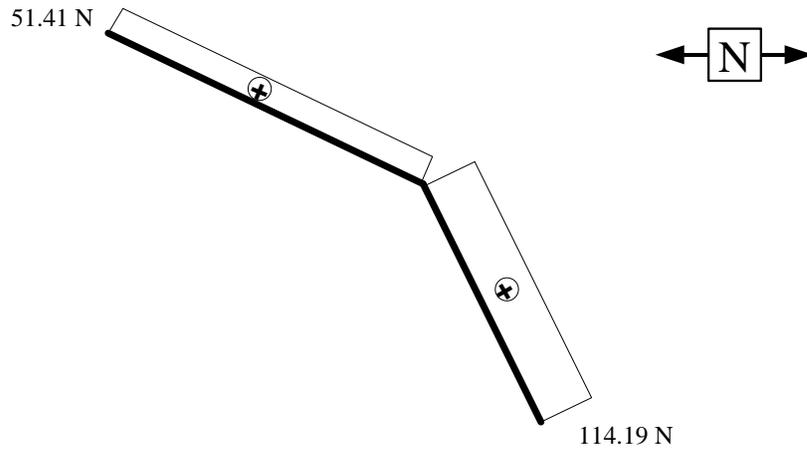
$$T = 102.82$$

Calcolo di alcuni valori per il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne.

$$M(60) = 4169.2 \text{ Nmm}$$

$$M(167.7) = 15243 \text{ Nmm}$$

DIAGRAMMI DELLE AZIONI INTERNE (N, T, M) DELLA STRUTTURA



Su tali diagrammi si possono fare alcune osservazioni:

- il momento nelle cerniere B e D è nullo;
- il momento presenta gli stessi valori nel punto A nei due tratti (equilibrio al nodo);
- nel punto C, dove è applicata una coppia, il diagramma del momento presenta un salto pari al valore della coppia applicata;
- nel tratto BA il momento è parabolico ed il taglio varia linearmente, ed il momento ha un punto di stazionarietà dove il taglio è nullo;
- nel tratto DA il momento varia linearmente ed il taglio è costante.

Tutte queste osservazioni indicano come i diagrammi delle azioni interne siano coerenti con lo schema statico della struttura originaria.

INTEGRALE RELATIVO AL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI PER IL CALCOLO DELLO SPOSTAMENTO DEL PUNTO A IN DIREZIONE ORIZZONTALE.

$$\delta = \int_0^l N' \cdot N \cdot \frac{dx}{EA} + \int_0^l M' \cdot M \cdot \frac{dx}{EJ}$$

$$EA = 1.056 \cdot 10^7 \text{ N}$$

$$EJ = 8.972 \cdot 10^7 \text{ N} \cdot \text{mm}^2$$

Trattandosi di una struttura snella, nelle quali gli effetti del taglio sono trascurabili rispetto a quelli del momento e dell'azione normale, si può trascurare il contributo del taglio nell'integrale del Principio dei Lavori Virtuali.

$$\begin{aligned} \delta = & \int_0^{118.3} 0.91 \cdot 104.19 \cdot \frac{dx_1}{1.056 \cdot 10^7} + \int_0^{118.3} (0.678 \cdot x_1) \cdot (306.32 \cdot x_1 - 1.5 \cdot x_1^2) \cdot \frac{dx_1}{8.972 \cdot 10^7} + \\ & + \int_0^{60} 0.24 \cdot 51.41 \cdot \frac{dx_2}{1.056 \cdot 10^7} + \int_0^{60} (0.483 \cdot x_2) \cdot (102.82 \cdot x_2) \cdot \frac{dx_2}{8.972 \cdot 10^7} + \\ & + \int_{60}^{167.7} 0.24 \cdot 51.41 \cdot \frac{dx_2}{1.056 \cdot 10^7} + \int_{60}^{167.7} (0.483 \cdot x_2) \cdot (102.82 \cdot x_2 - 2000) \cdot \frac{dx_2}{8.972 \cdot 10^7} \end{aligned}$$

Svolgendo i calcoli si ottiene il seguente valore di spostamento, che, essendo positivo, ha lo stesso verso in cui è stata rivolta la forza unitaria nel sistema delle forze.

$$\delta = 1.42 \text{ mm}$$

CALCOLO DELLO SFORZO  $\sigma$  MASSIMO NELLA STRUTTURA

Nella sezione  $x_1=102.1$  mm si hanno sia il momento massimo (in valore assoluto) che l'azione normale massima, per cui questa è sicuramente la sezione in cui cercare lo sforzo  $\sigma$  massimo.

$$M(102.1) = 15639 \text{ Nmm}$$

$$N(102.1) = 104.19 \text{ N}$$

$$\sigma_N = \frac{N}{A} = \frac{104.19}{50.27} = 2.07 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_M = \pm \frac{M}{J} \cdot Y = \pm \frac{15639}{427.26} \cdot 5 = \pm 183.02 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Lo sforzo  $\sigma$  massimo positivo sarà dato dalla somma delle sigma dovute all'azione normale e delle sigma positive dovute al momento flettente.

$$\sigma_{\text{MAX}} = 2.07 + 183.02 = 185.09 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$