UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI

Corso di Matematica Generale

A cura di
Beatrice Venturi

Relazioni

1. Relazioni

Definizioni e notazioni

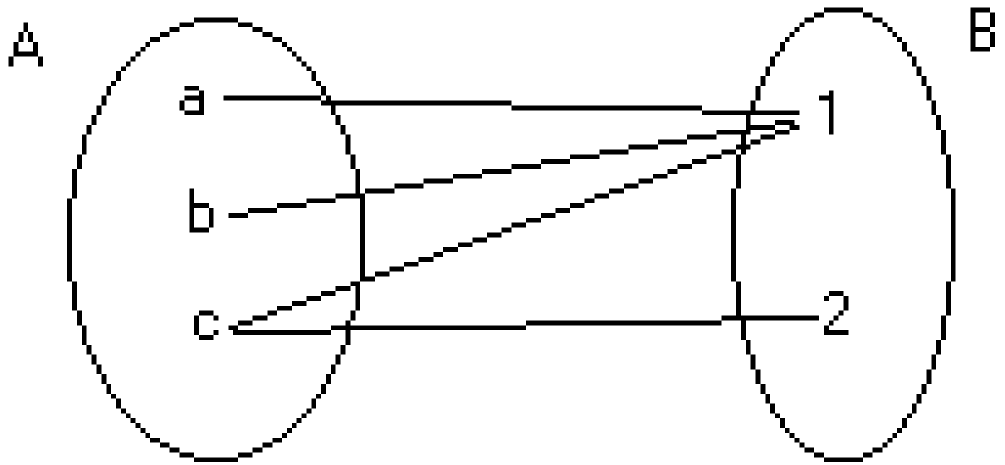
Dati **A** e **B** insiemi non vuoti

Una **relazione** R è un **sottoinsieme** del **prodotto cartesiano di *A*x*B*.**

$$R \subseteq A \times B$$

RELAZIONI

Esempio di **relazione**



RELAZIONI

- Per indicare che una coppia ordinata appartiene ad una relazione scriveremo :

$$aRb$$

al posto di

$$(a,b) \in R$$

RELAZIONI

Se R è una relazione da A ad A diremo semplicemente che è una relazione in A.

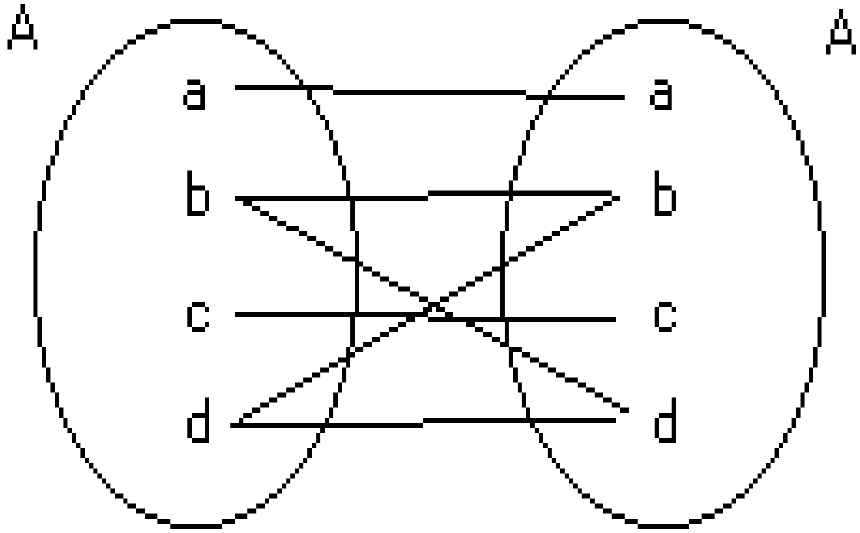
Diamo due esempi di relazione in A dove A è l'insieme degli studenti iscritti ad un corso universitario in un certo anno accademico

$$R_1 = \{(a,b); a \in A, b \in A, a \ldots è \ldots fratello \ldots di \ldots b\}$$

$$R_2 = \{(a,b); a \in A, b \in A, a \ldots è \ldots più \ldots giovane \ldots di \ldots b\}$$

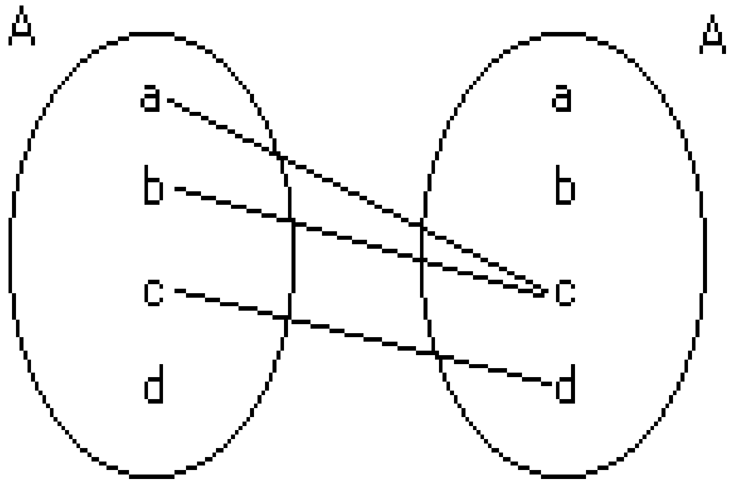
RELAZIONI

- Il grafico di R_1 potrebbe essere (nel caso di soli 4 elementi)



RELAZIONI

- Il grafico di R_2 potrebbe essere (nel caso di soli 4 elementi)



dove a ha 18 anni, b 18 anni, c 19 anni e d 20 anni.

RELAZIONE DI EQUIVALENZA

Relazione di equivalenza = dato ***A***, la **relazione *R*** dicesi di **equivalenza** nell'insieme ***A*** se gode delle seguenti proprietà;

a) **Riflessiva**

b) **Simmetrica**

c)**Transitiva**

PROPRIETA’ RIFLESSIVA

Ogni elemento è in relazione con se stesso:

$$x \Re x \quad \forall x \in A$$

PROPRIETA' SIMMETRICA

- Se **due elementi** sono **in relazione** tra **loro**, lo sono indipendentemente dall'ordine in cui vengono considerati:

$$x\Re y \qquad \text{oppure} \qquad y\Re x$$

PROPRIETA' TRANSITIVA

- **Due elementi in relazione** con un **terzo** sono **in relazione** tra **loro**

$$x \Re z \qquad z \Re y$$

allora

$$x \Re y$$

RELAZIONE DI EQUIVALENZA

- L'insieme A dotato di una relazione di equivalenza si scompone nelle sue classi di equivalenza.
- Una **relazione di equivalenza** in A determina una **partizione** di A nelle sue classi di equivalenza.

RELAZIONE DI EQUIVALENZA

- Queste **classi**, quando **non sono uguali**, sono **disgiunte** (non hanno elementi in comune) ed unite fra loro formano l'insieme A .
- L'insieme delle classi di equivalenza indotte in A dalla relazione di equivalenza R si chiama **insieme quoziente** di A rispetto ad R e si denota con **A/R** (A modulo R).

ESEMPI

- Nell'esempio la **relazione** R_1 ,è una relazione di equivalenza e le **classi di equivalenza** che partiscono A sono :

$$[a] = \{a\},\ [b] = \{b, d\},\ [c] = \{c\}\ .$$

- La proprietà di parallelismo tra rette è una relazione di equivalenza.

RELAZIONE DI ORDINE

Relazione di ordine = dato ***A***, la **relazione** *R* dicesi di **ordine** nell'insieme ***A*** se gode delle seguenti proprietà:

a) **Antisimmetrica**

b)**Transitiva**

RELAZIONE ANTISIMMETRICA

- Se **un elemento** è **in relazione** con un altro è escluso il viceversa::

$$x\Re y \quad \text{e} \quad y\Re x$$

$$\text{allora}$$

$$x = y$$

RELAZIONE TRANSITIVA

- **Due elementi in relazione** con un **terzo** sono **in relazione** tra **loro**

$$x\Re z \qquad z\Re y$$

allora

$$x\Re y$$

Esempi

- Nell'esempio precedente la **relazione** R_2 ,è una relazione di ordine.

ESEMPIO ECONOMICO

- Siano x, y **quantità di due** beni b_1 e b_2 che un consumatore possa decidere di consumare a suo piacimento.
- Ad ogni decisione del consumatore possiamo associare una **coppia ordinata** di **numeri**

$$(x, y)$$

- che si chiama paniere di consumo

ESEMPIO ECONOMICO

Indichiamo con D **l'insieme di panieri** e supponiamo che il **consumatore** sia in grado di stabilire un **confronto tra panieri**. Dati **due panieri**

$$(x_1, y_1) \ e \ (x_2, y_2)$$

- il consumatore è in grado di stabilire quale tra i due sia **preferibile**

$$(x_1, y_1) \succ (x_2, y_2) \, o \, (x_1, y_1) \prec (x_2, y_2)$$

- o che le due alternative gli sono **indifferenti**

$$(x_1, y_1) \approx (x_2, y_2)$$