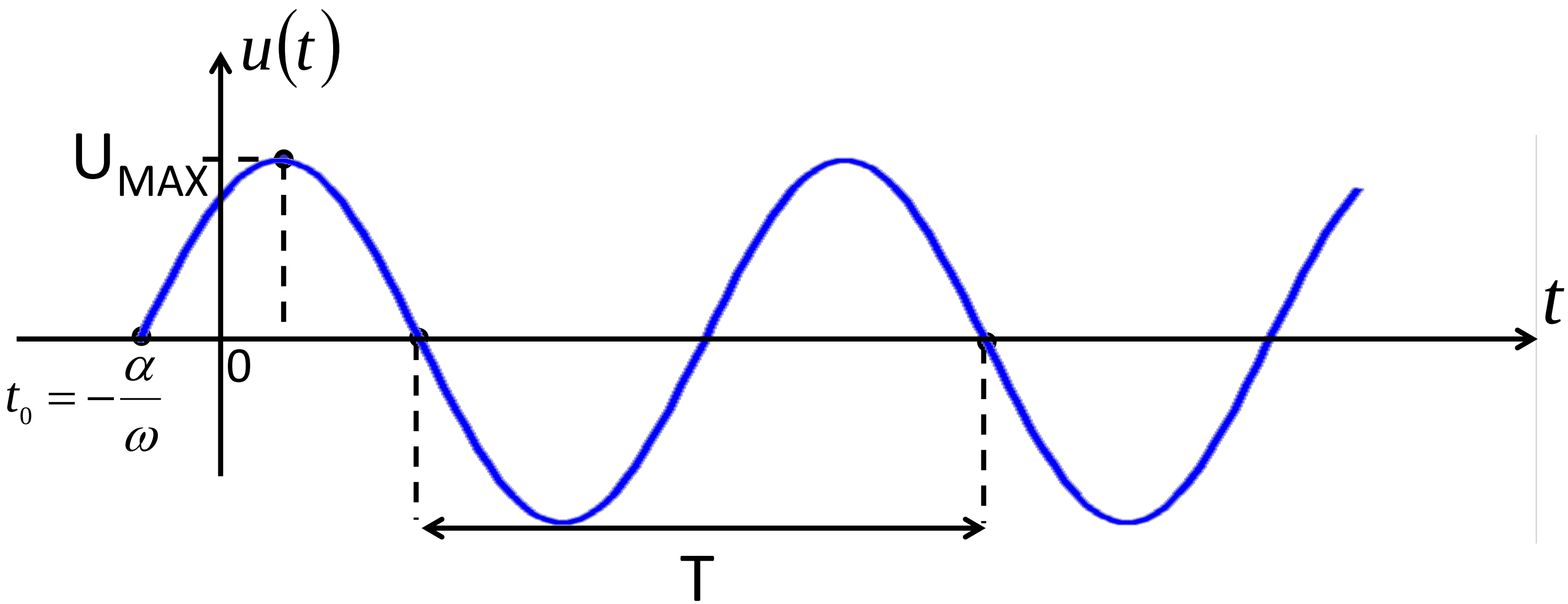
Reti in Regime Sinusoidale

INGRESSO SINUSOIDALE

$$u(t) = U_{MAX} \cos(\omega t + \alpha)$$



U_{MAX}= Ampiezza massima

ω = pulsazione angolare [**rad**/s]

$(\omega t + \alpha)$ = fase istantanea [**rad**]

f = frequenza [**Hz**] T = periodo [s]

α = fase iniziale [**rad**]

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

VALORE EFFICACE

In elettrotecnica si utilizzano spesso i valori efficaci delle grandezze sinusoidali, soprattutto quando si parla degli aspetti energetici.
Il valore efficace è definibile per tutte le grandezze periodiche:

$$\boxed{\text{VALORE EFFICACE} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt}}$$

Nel caso sinusoidale:

$$V_{eff} = V = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T V_M^2 \sin^2(\omega t)\cdot dt} = \frac{V_M}{\sqrt{2}}$$

VALORE EFFICACE = $\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt}$

Se $f(t) = A_M \cos(\varpi t + \varphi)$

$$A = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T A_M^2 \cos^2(\varpi t + \varphi)dt} = \sqrt{\frac{1}{T} A_M^2 \int_0^T \cos^2(\varpi t + \varphi)dt}$$

ma: $\int \cos^2(x)dx = \int \cos x \cdot \cos x dx =$ (integrando per parti)

$$\sin x \cos x + \int \sin x \cdot \sin x dx = \sin x \cos x + \int \sin^2 x dx =$$

$$\sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x)dx = \sin x \cos x + \int dx + \int -\cos^2 x dx \Rightarrow$$

$$2\int \cos^2 x dx = \sin x \cos x + \int dx \Rightarrow \int \cos^2 x dx = \frac{\sin x \cos x + x}{2}$$

allora

$$\int_0^T \cos^2(\varpi t + \varphi)dt = \frac{1}{2}\frac{1}{\varpi}\left[\sin \varpi T \cos \varpi T + \varpi T - \sin 0 \cos 0\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{T}{2\pi}\left[\sin\frac{2\pi}{T}T \cos\frac{2\pi}{T}T + \frac{2\pi}{T}T\right] = \frac{1}{2}\frac{T}{2\pi}\frac{2\pi}{T}T = \frac{T}{2}$$

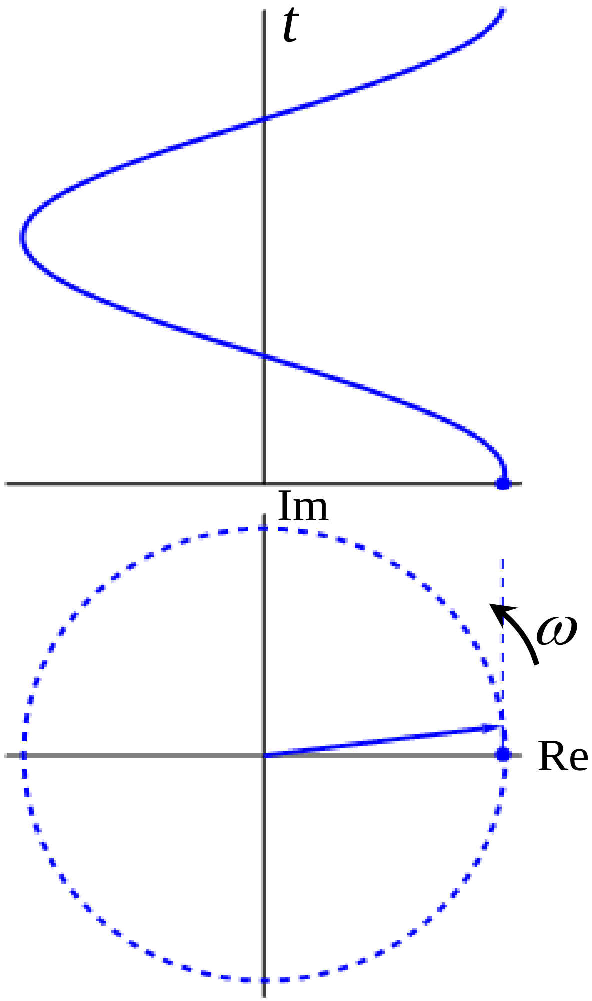
$$A = \sqrt{\frac{1}{T} A_M^2 \frac{T}{2}} = \frac{A_M}{\sqrt{2}}$$

TRASFORMAZIONE DI DOMINIO

$$a(t) = A_{MAX}\cos(\varpi t + \alpha) \qquad \overline{A} = A_{MAX}\angle\alpha = A_{MAX}\cdot e^{j\alpha}$$

$$a(t) = \Re e\left\{\overline{A}\cdot e^{j\varpi t}\right\} = \Re e\left\{A_{MAX}\cdot e^{j\alpha}\cdot e^{j\varpi t}\right\} = \Re e\left\{A_{MAX}\cdot e^{j(\varpi t+\alpha)}\right\} =$$

$$= \Re e\left\{A_{MAX}\cdot\left[\cos(\varpi t+\alpha) + j\sin(\varpi t+\alpha)\right]\right\} = A_{MAX}\cos(\varpi t+\alpha)\ c.v.d.$$



- **Dominio del tempo**

$$a(t) = A_M\cos(\omega t + \alpha)$$

- **Dominio della frequenza**

$$\overline{A} = A_{MAX}\angle\alpha = A_{MAX}\cdot e^{j\alpha}$$

INGRESSO SINUSOIDALE: $u(t) = U\cos(\omega t + \varphi)\cdot \delta_{-1}(t)$ $\quad U > 0$

$y_p(t)$ dipende dall'ingresso $u(t)$

$$u(t) = \Re e\left\{\overline{U}\cdot e^{j\varpi t}\right\} \qquad \overline{U} = \left|\overline{U}\right|\cdot e^{j\varphi}$$

$$y_p(t) = \Re e\left\{\overline{Y}\cdot e^{j\varpi t}\right\}$$

$$\overline{Y} = \frac{b_m(j\varpi)^m + \cdots + b_0}{a_n(j\varpi)^n + \cdots + a_0}\cdot\overline{U} = H(j\varpi)\cdot\overline{U}$$

$$\boxed{H(j\varpi) = \frac{b_m(j\varpi)^m + \cdots + b_0}{a_n(j\varpi)^n + \cdots + a_0}}$$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

Dimostrazione

$$u(t) = U_{MAX} \cos(\varpi t + \alpha) \qquad \overline{U} = U_{MAX} \angle \alpha = U_{MAX} \cdot e^{j\alpha}$$

$$y_p(t) = \Re e\left\{\overline{Y} \cdot e^{j\varpi t}\right\} \quad \overline{Y} = Y_{MAX} \angle \beta = Y_{MAX} \cdot e^{j\beta}$$

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^n} + \cdots + b_0 u \qquad \text{Relazione I/O}$$

sostituendo

$$a_n \Re e\left\{(j\varpi)^n \overline{Y} \cdot e^{j\varpi t}\right\} + \cdots + a_0 \Re e\left\{\overline{Y} \cdot e^{j\varpi t}\right\} = b_m \Re e\left\{(j\varpi)^m \overline{U} \cdot e^{j\varpi t}\right\} + \cdots + b_0 \Re e\left\{\overline{U} \cdot e^{j\varpi t}\right\}$$

$$\Re e\left\{[a_n (j\varpi)^n + + \cdots + a_0]\overline{Y} \cdot e^{j\varpi t}\right\} = \Re e\left\{[b_m (j\varpi)^m + \cdots + b_0]\overline{U} \cdot e^{j\varpi t}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$[a_n (j\varpi)^n + + \cdots + a_0]\overline{Y} \cdot e^{j\varpi t} = [b_m (j\varpi)^m + + \cdots + b_0]\overline{U} \cdot e^{j\varpi t}$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{Y} = \frac{b_m (j\varpi)^m + \cdots + b_0}{a_n (j\varpi)^n + \cdots + a_0} \cdot \overline{U} = H(j\varpi) \cdot \overline{U} \Rightarrow y_p(t) = \Re e\left\{\overline{Y} \cdot e^{j\varpi t}\right\}$$

LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DIPENDE DALLE CARATTERISTICHE DELLA RETE E NON DALL'INGRESSO

RIASSUMENDO:

REL. I/O

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + a_0 y = b_m \frac{d^n u}{dt^n} + \cdots + b_0 u$$

$$\begin{cases} y(0^+) \\ \vdots \\ \left.\dfrac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}\right|_{0^+} \end{cases}$$

CONDIZIONI INIZIALI NOTE

$$u(t) = \Re e\left\{\overline{U} \cdot e^{j\varpi t}\right\} \quad \Rightarrow$$

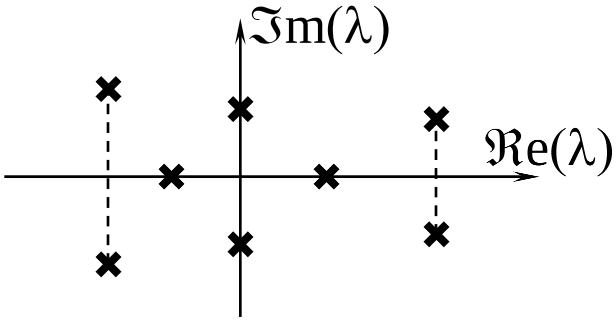
$$y(t)\Big|_{t>0} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda_i t}}_{\text{RISP.LIBERA}} + \Re e\left\{\underbrace{\overline{H}(j\varpi) \cdot \overline{U}(j\varpi)}_{\text{RISP.FORZATA}} \cdot e^{j\varpi t}\right\}$$

λ_i FREQ. LIBERE DELLA RETE (soluzioni dell'eq. caratteristica)

$\sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda_i t}$ Rappresenta il modo di evolvere della rete, indipendentemente dall'ingresso

La risposta forzata evolve, nel tempo, come l'ingresso

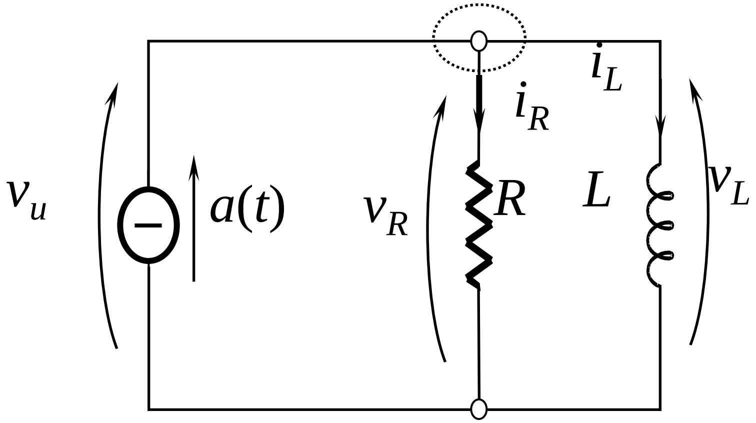
FREQUENZE LIBERE



se $\Re e\{\lambda_i\} < 0 \quad \forall i$ la risposta libera converge a zero dopo un certo tempo. Per $t \to \infty$ RIMANE LA SOLA RISPOSTA FORZATA

- se $\Re e\{\lambda_i\} < 0 \quad \forall i$ RETE ASSOLUTAMENTE STABILE
- se $\exists i \ni \Re e\{\lambda_i\} = 0$ RETE SEMPLICEMENTE STABILE
- se $\exists i \ni \Re e\{\lambda_i\} < 0$ RETE INSTABILE

ESEMPIO



$$u(t) = a(t) \cdot \delta_{-1}(t)$$

$$\text{eq. top.} \begin{cases} u(t) = i_R + i_L & \text{KLI} \\ v_u = v_R = v_L & \text{KLV} \end{cases}$$

$$\text{eq. comp.} \begin{cases} v_R = R \cdot i_R \\ v_L = L \cdot \dfrac{di_L}{dt} \\ a(t) = u(t) \end{cases}$$

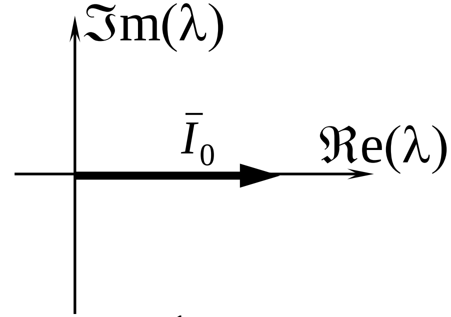
$$\boxed{u(t) = \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L}$$

RELAZIONE I/O

Se

$$u(t) = (I_0 \cos \omega t) \cdot \delta_{-1}(t) \quad I_0 > 0 \quad \rightarrow$$

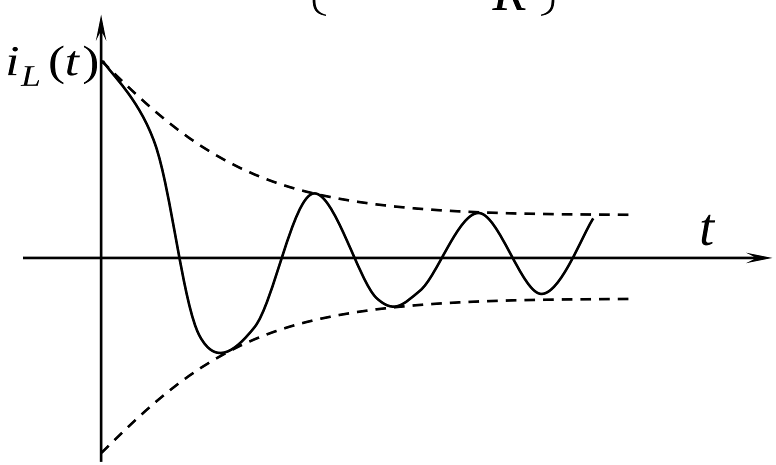
$$u(t) = \Re e\{\bar{I}_0 \cdot e^{j\varpi t}\} \qquad \bar{I}_0 = I_0 \cdot e^{j0} = I_0$$



Hp: <u>stato nullo</u> : $i_L(0^-) = 0$

$$i_{Lp} = \Re e\{\overline{B} \cdot e^{j\varpi t}\} = \Re e\{\overline{H}(j\varpi) \cdot \overline{U} \cdot e^{j\varpi t}\} \quad H(j\varpi) = \frac{1}{1 + j\varpi \frac{L}{R}}$$

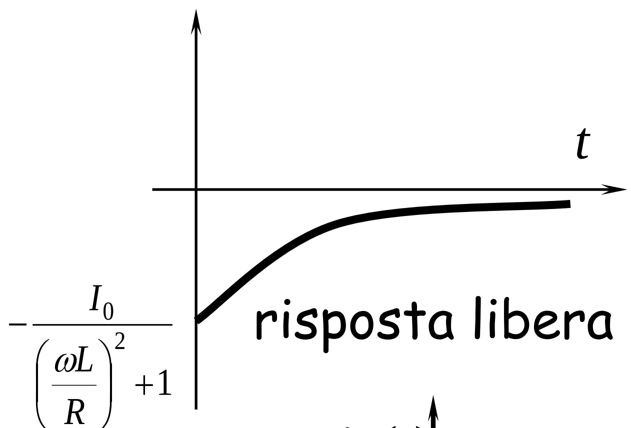
$$i_L = -\Re e\left\{\frac{I_0}{1 + j\varpi \frac{L}{R}}\right\} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + \Re e\left\{\frac{I_0 \cdot e^{j\varpi t}}{1 + j\varpi \frac{L}{R}}\right\}$$

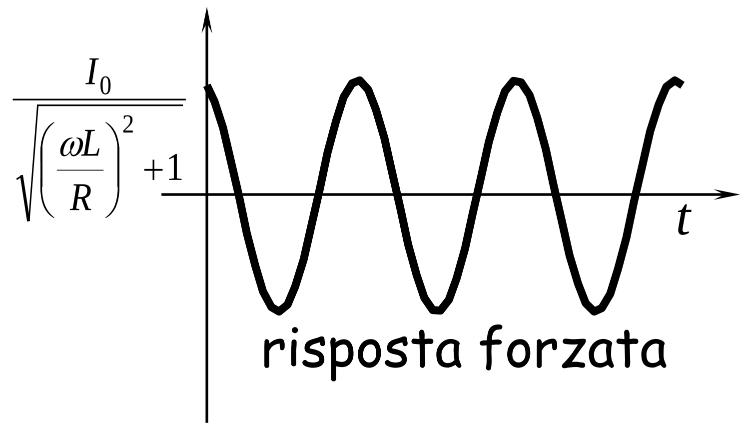


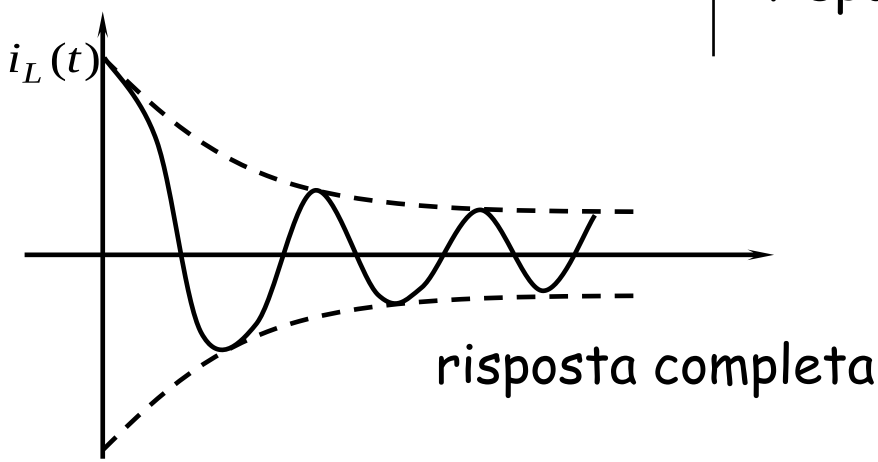
PER $t \rightarrow \infty$ LA RISPOSTA TENDE ALLA SOLA RISPOSTA FORZATA!

$$i_{Lp} = \Re e\left\{\frac{I_0 \cdot e^{j\omega t}}{j\omega L/R+1}\right\} = \Re e\left\{\frac{I_0 \cdot e^{j\omega t}\left(1- j\,\omega L/R\right)}{\left(\omega L/R\right)^2+1}\right\} =$$

$$= \frac{I_0}{\left(\omega L/R\right)^2+1}\cdot\left(\cos\omega t + \frac{\omega L}{R}\sin\omega t\right)$$







REGIME SINUSOIDALE

se l'ingresso è sinusoidale
dopo un certo tempo si instaura il regime sinusoidale

$$\overline{Y} = \dot{H}(j\omega) \cdot \overline{U}$$

Per tempi molto grandi, possiamo prescindere dall'origine dei tempi e pensare di lavorare direttamente nel campo complesso.
La riconversione al dominio del tempo è immediata:

$$y(t) = \Re e\left\{\overline{Y} \cdot e^{j\omega t}\right\} \quad \text{se} \quad u(t) = \Re e\left\{\overline{U} \cdot e^{j\omega t}\right\}$$

$\Downarrow$

<u>SI UTILIZZA IL METODO SIMBOLICO o la TRASFORMATA FASORIALE</u>

Affinché un circuito consegua il regime sinusoidale:

- Tutte le alimentazioni devono essere segnali sinusoidali iso-frequenziali
- Il circuito deve essere assolutamente stabile

⇓

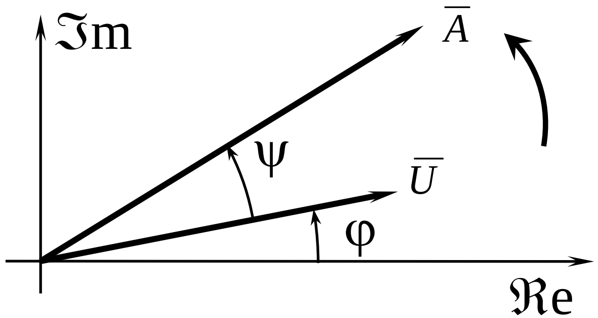
Tutte le tensioni e tutte le correnti saranno sinusoidi della stessa frequenza ed è lecito fare i calcoli nel dominio trasformato (relativo a quella data frequenza o pulsazione)

⇓

IN UNA RETE ASSOLUTAMENTE STABILE,
IL REGIME SINUSOIDALE VIENE CONSEGUITO
DA TUTTE LE VARIABILI DELLA RETE

METODO SIMBOLICO

$\overline{U}, \overline{A}$ sono due fasori



verso positivo
per le fasi
(convenzionalmente)

$$\overline{U} = \left|\overline{U}\right| \cdot e^{j\varphi}$$

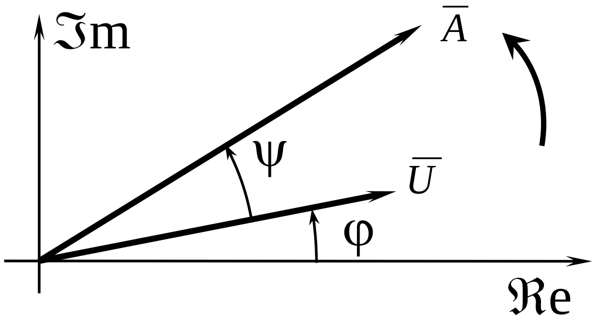
$$\dot{H} = \left|\dot{H}\right| \cdot e^{j\psi}$$

$$\overline{A} = H \cdot U \cdot e^{j(\varphi+\psi)}$$

Nella figura, $\overline{A}$ è in anticipo rispetto a $\overline{V}$

ANTICIPO $\rightarrow$ ANGOLO POSITIVO
RITARDO $\rightarrow$ ANGOLO NEGATIVO

Le grandezze sono iso-frequenziali, quindi, dopo un certo tempo, l'istante iniziale perde significato ed è superfluo indicare il riferimento degli assi. L'importante è che le diverse grandezze fasoriali stiano in un determinato rapporto di fase tra loro

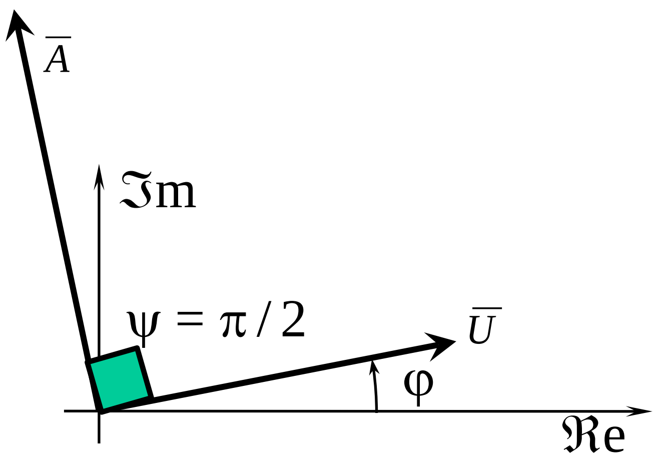


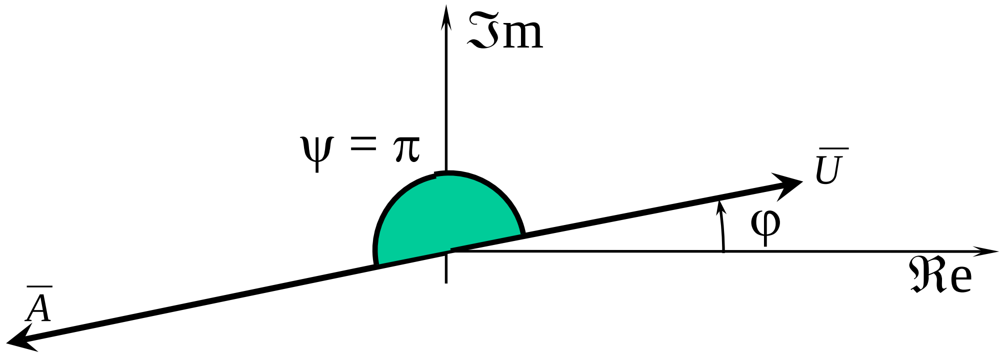
CASI PARTICOLARI:

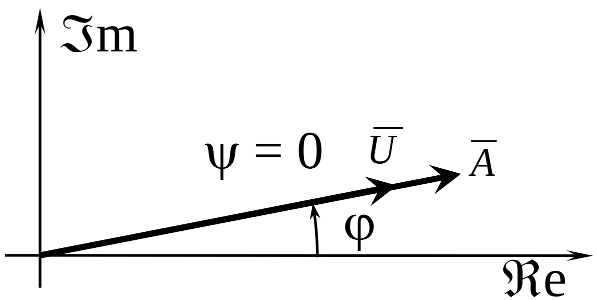
a) $\psi = \pi / 2$ i fasori sono in quadratura

b) $\psi = \pi$ i fasori sono in opposizione di fase

c) $\psi = 0$ i fasori sono in fase







OPERAZIONI: SOMMA

Dominio del tempo

$$a(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha)$$

$$b(t) = B_M \cos(\omega t + \beta)$$

$$c(t) = a(t) + b(t) =$$

$$= C_M \cos(\omega t + \gamma)$$

$$\begin{cases} C_M \cos\gamma = A_M \cos\alpha + B_M \cos\beta \\ C_M \sin\gamma = A_M \sin\alpha + B_M \sin\beta \end{cases}$$

Dominio della frequenza

$$\overline{A} = A_{\Re e} + jA_{\Im m}$$

$$\overline{B} = B_{\Re e} + jB_{\Im m}$$

$$\overline{C} = \overline{A} + \overline{B} = C_{\Re e} + jC_{\Im m}$$

$$\begin{cases} C_{\Re e} = A_{\Re e} + B_{\Re e} \\ C_{\Im m} = A_{\Im m} + B_{\Im m} \end{cases}$$

OPERAZIONI: PRODOTTO PER UNO SCALARE

Dominio del tempo

$$a(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha)$$

$$k \cdot a(t) = C_M \cos(\omega t + \gamma)$$

$$\begin{cases} C_M = |k| A_M \\ \gamma = \begin{cases} \alpha & \text{se} \quad k > 0 \\ \alpha \pm \pi & \text{se} \quad k < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Dominio della frequenza

$$\overline{A} = A_M e^{j\alpha}$$

$$k\overline{A} = \overline{C} = C_M e^{j\gamma}$$

$$\begin{cases} C_M = |k| A_M \\ \gamma = \begin{cases} \alpha & \text{se} \quad k > 0 \\ \alpha \pm \pi & \text{se} \quad k < 0 \end{cases} \end{cases}$$

OPERAZIONI: DERIVATA TEMPORALE

Dominio del tempo

$$a(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\frac{d}{dt} \cdot a(t) = -\omega A_M \sin(\omega t + \alpha) =$$

$$= \omega A_M \cos(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}) =$$

$$= C_M \cos(\omega t + \gamma)$$

$$\begin{cases} C_M = \omega A_M \\ \gamma = \alpha + \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

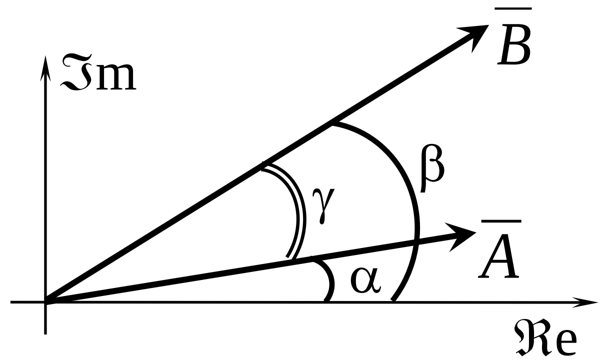
Dominio della frequenza

$$\overline{A} = A_M e^{j\alpha}$$

$$j\omega \overline{A} = \overline{C} = C_M e^{j\gamma}$$

$$\begin{cases} C_M = \omega A_M \\ \gamma = \alpha + \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

OPERAZIONI: RAPPRESENTAZIONE GRAFICA

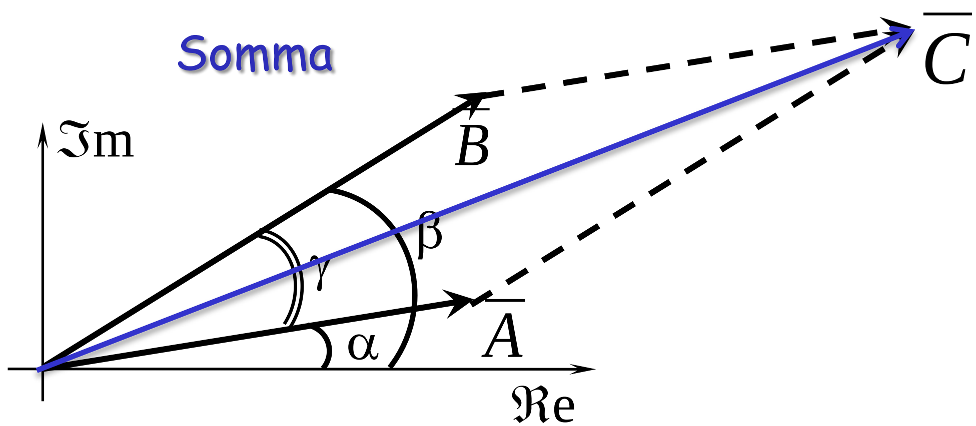


$$\overline{A} = A_M \angle \alpha = A_M \cdot e^{j\alpha}$$

$$\overline{B} = B_M \angle \beta = B_M \cdot e^{j\beta}$$

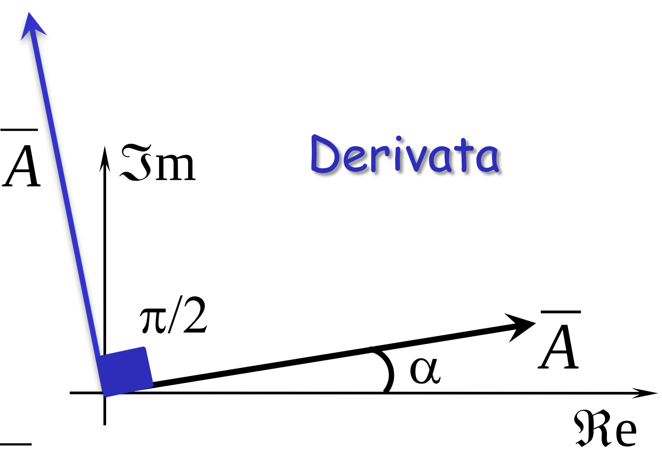
$\gamma \rightarrow$ sfasamento tra $\overline{A}$ e $\overline{B}$

Somma



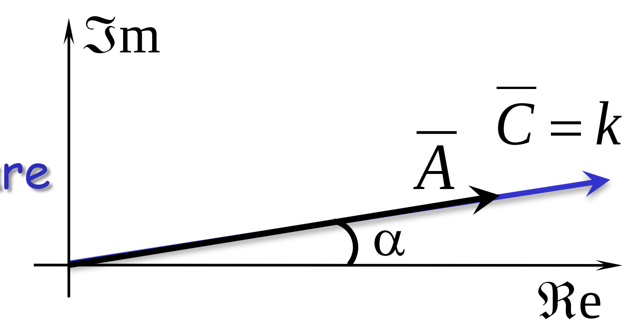
Derivata

$$\overline{C} = j\omega\overline{A}$$



Prodotto per uno scalare

$$\overline{C} = k\overline{A}$$



Dominio del tempo

Eq.ni Topologiche

$$\Sigma i(t)=0$$

$$\Sigma v(t)=0$$

Eq.ni dei componenti

V=Ri

i=Cdv/dt

V=Ldi/dt

……

Sistema di eq.ni differenziali

Risoluzione di eq.ni differenziali ordinarie

Dominio della frequenza

Eq.ni Topologiche

$$\sum \overline{I} = 0$$

$$\sum \overline{V} = 0$$

Eq.ni dei componenti

$$\overline{V} = R\overline{I}$$

$$\overline{V} = \frac{1}{j\omega C}\overline{I}$$

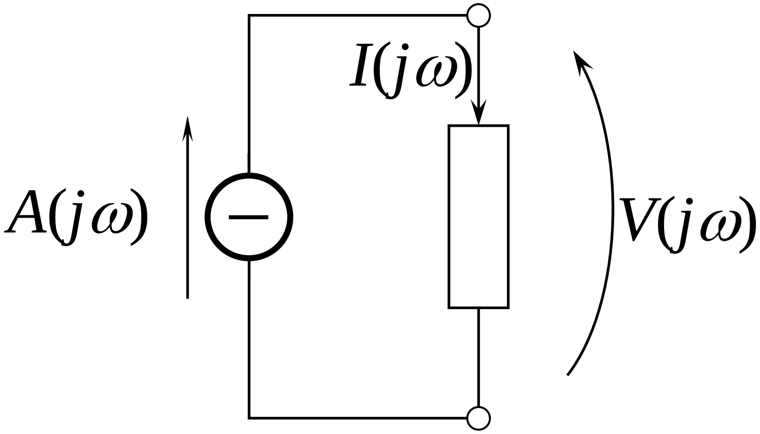
$$\overline{V} = j\omega L\overline{I}$$

……

Sistema Algebrico

Risoluzione di sistemi in algebra complessa

EQUAZIONE DEI COMPONENTI



$$\overline{V}\left(j\varpi\right) = \dot{H}\left(j\omega\right)\cdot \overline{I}\left(j\omega\right)$$

$H(j\omega)$ prende il nome di IMPEDENZA $\dot{Z}\left(j\varpi\right)$

$$\dot{Z}\left(j\omega\right) = \dot{Z}$$

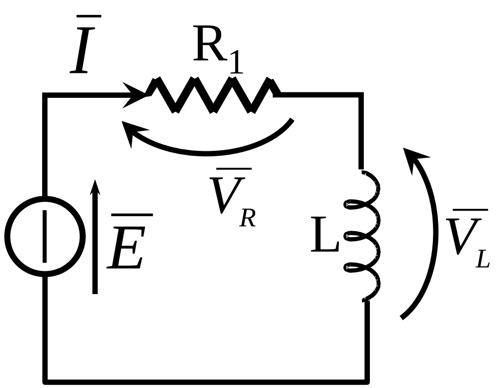
$$\overline{V} = \dot{Z}\cdot\overline{I}$$

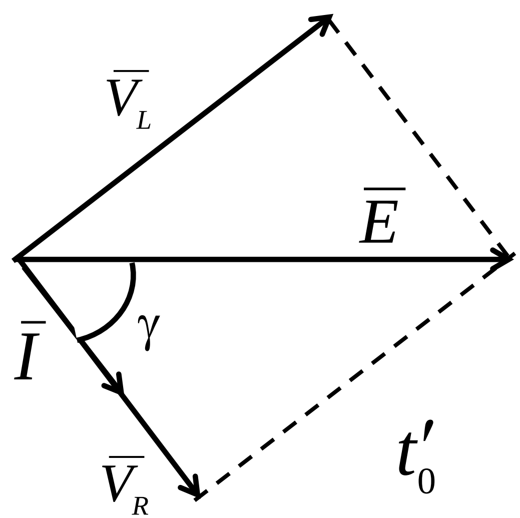
Se esiste l'inversa della funzione di trasferimento:

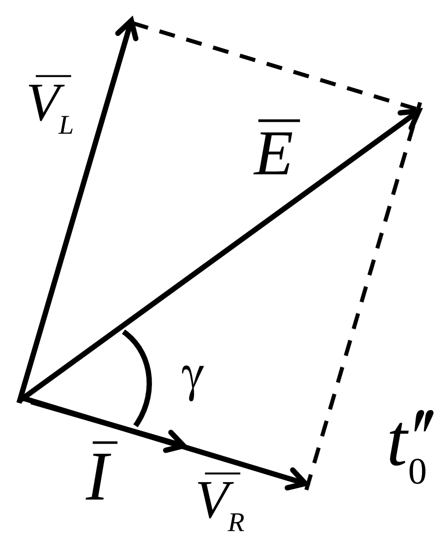
AMMETTENZA $\dot{Y}\left(j\omega\right) = \dfrac{1}{\dot{Z}\left(j\omega\right)} = \dot{Y}$

DIAGRAMMA FASORIALE

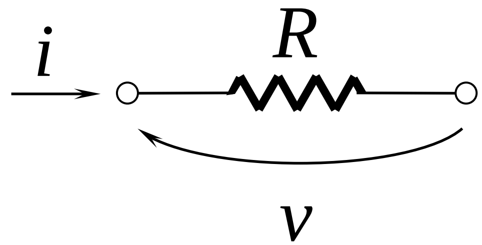
- È la rappresentazione grafica di più fasori rappresentativi delle tensioni e delle correnti in un circuito
- Gli sfasamento reciproci tra i fasori non cambiano anche se prendiamo un diverso fasore come riferimento
- I fasori delle tensioni devono rispettare una stessa scala metrica (ad esempio 100 V per 1 cm)
- I fasori delle correnti devono rispettare una stessa scala metrica (ad esempio 1 A per 1 cm)

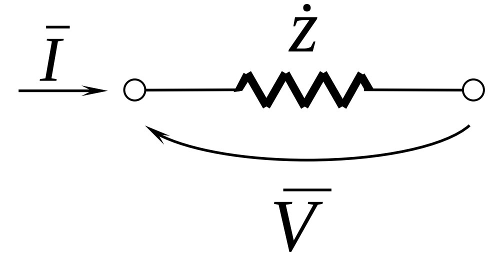






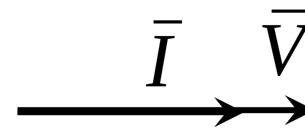
RESISTORE



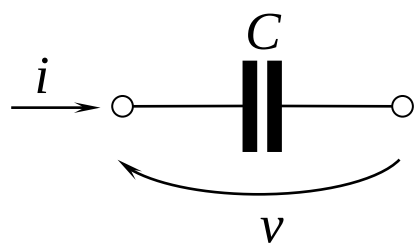


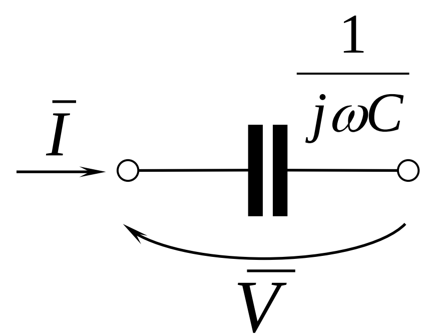
$$v = R \cdot i \;\Rightarrow\; \bar{V} = R \cdot \bar{I} \qquad \dot{Z} = R \qquad \dot{Y} = \frac{1}{R} = G$$

Rappresentazione fasoriale

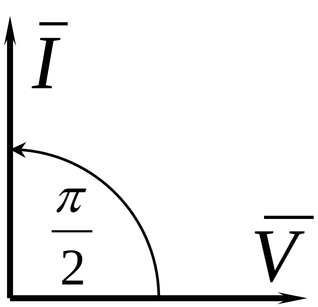


CAPACITORE





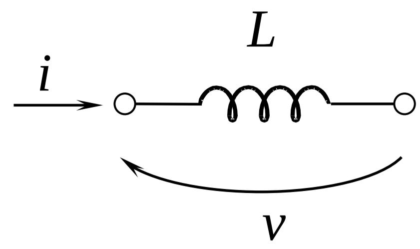
Rappresentazione fasoriale

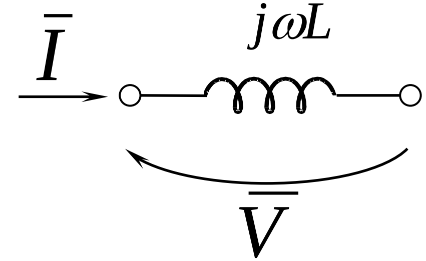


$$i = C\frac{dv}{dt} \;\Rightarrow\; \bar{I} = j\omega C \cdot \bar{V}(j\omega)$$

$$\frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \dot{Z}(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} \qquad \dot{Y} = j\omega C$$

INDUTTORE

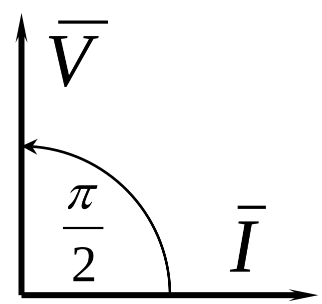




$$v = L\frac{di}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \bar{V} = j\omega L \cdot \bar{I}(j\omega)$$

$$\frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \dot{Z}(j\omega) = j\omega L \qquad\qquad \dot{Y} = \frac{1}{j\omega L}$$

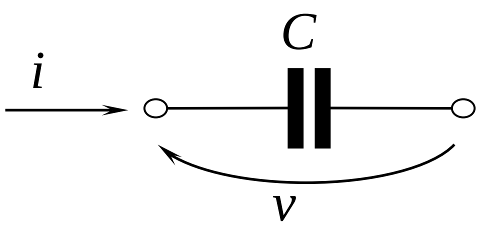
Rappresentazione fasoriale



$\bar{V}$ è in anticipo di π /2 rispetto a $\bar{I}$

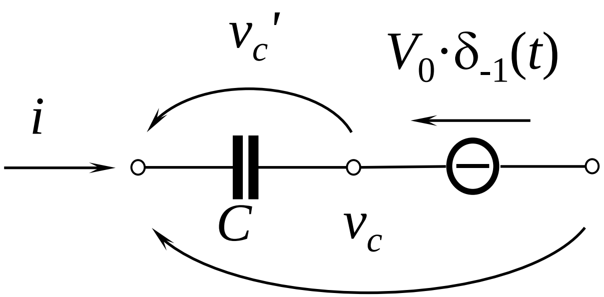
MEMORIZZAZIONE DELLO STATO INIZIALE

SE NON SI E' NELLO STATO ZERO NON SI PUO' PARLARE DI IMPEDENZA DI UN COMPONENTE



$$v(t) = \int_0^t \frac{1}{C} i(\tau)\, d\tau + \text{cost} \qquad v(t) = \frac{q(t)}{C}$$

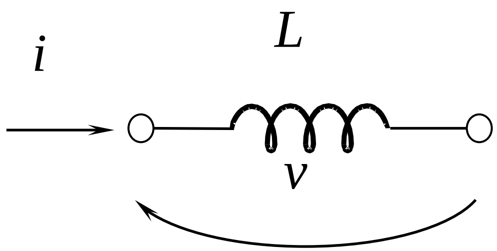
$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{0^-}^t i\, d\tau + V_0 = \frac{1}{C}\cdot q\left(t \geq 0^-\right) + V_0$$



$$v'\left(0^-\right) = 0$$

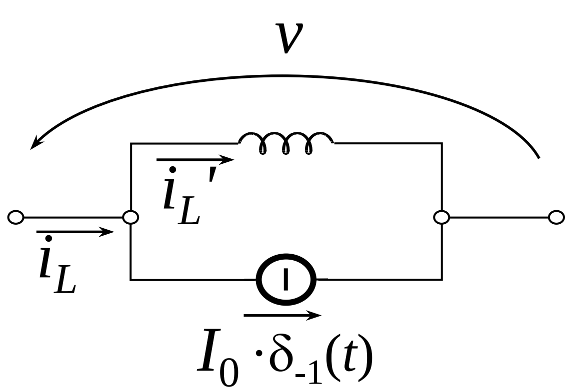
$$i(t) = C\frac{dv'}{dt} \qquad t > 0$$

Lo stato del capacitore può essere "memorizzato" mediante un generatore di tensione



$$i(t)=\int_0^t \frac{1}{L}\, v(\tau)\, d\tau + \text{cost} \qquad i(t)=\frac{\varphi(t)}{L}$$

$$i(t)=\frac{1}{L}\int_{0^-}^t v\, d\tau + I_0 = \frac{1}{L}\cdot \varphi\left(t \ge 0^-\right) + I_0$$



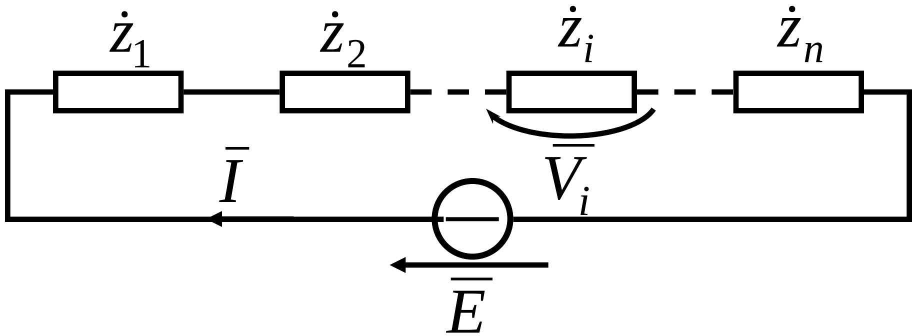
$$i_L'\left(0^-\right)=0 \qquad v(t)=L\,\frac{di_L'}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{V} = j\omega L \cdot \bar{I}'(j\omega)$$

Lo stato dell'induttore può essere "memorizzato" mediante un generatore di corrente

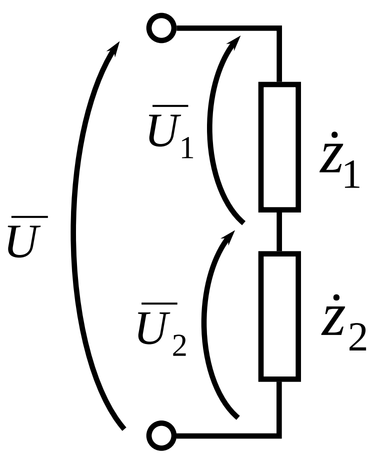
PARTITORI

PARTITORE DI TENSIONE:



$$\begin{cases} \overline{V}_i = \dot{z}_i \cdot \overline{I} \\ \overline{E} = \left(\sum_i \dot{z}_i\right) \cdot \overline{I} \end{cases} \Rightarrow \quad \overline{V}_i = \overline{E} \cdot \frac{\dot{z}_i}{\sum_i \dot{z}_i}$$

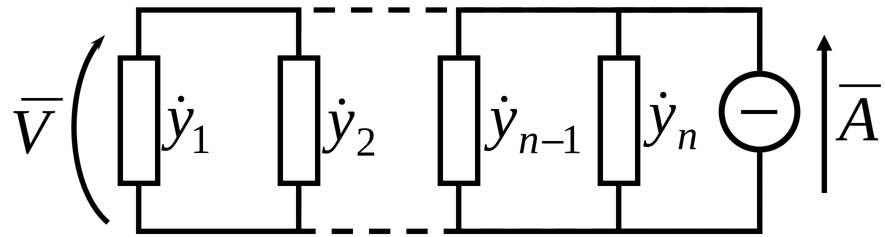
$n = 2$



$$\overline{U}_1 = \overline{U} \cdot \frac{\dot{z}_1}{\dot{z}_1 + \dot{z}_2}$$

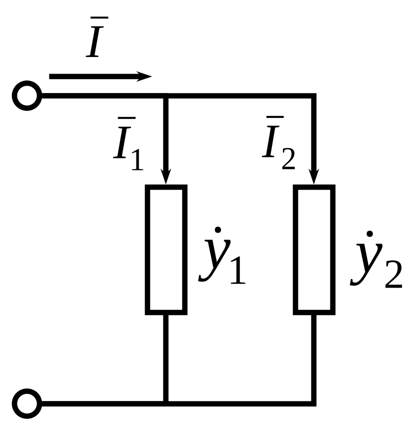
$$\overline{U}_2 = \overline{U} \cdot \frac{\dot{z}_2}{\dot{z}_1 + \dot{z}_2}$$

PARTITORE DI CORRENTE:



$$\begin{cases} \overline{I}_i = \dot{y}_i \cdot \overline{V} \\ \overline{A} = \left(\sum_i \dot{y}_i\right) \cdot \overline{V} \end{cases} \Rightarrow \quad \overline{I}_i = \overline{A} \cdot \frac{\dot{y}_i}{\sum_i \dot{y}_i}$$

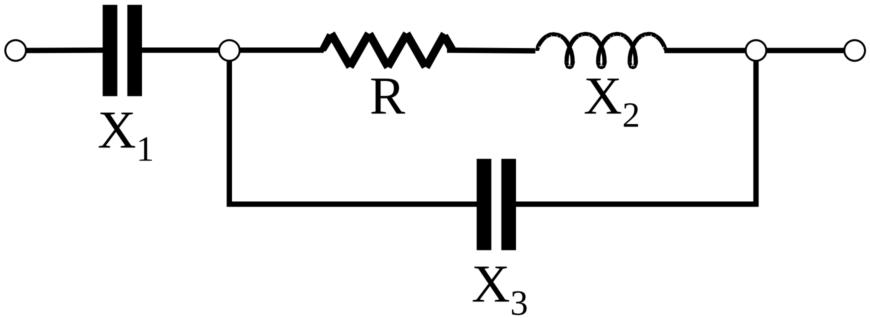
$n = 2$



$$\overline{I}_1 = \overline{I} \cdot \frac{\dot{Y}_1}{\dot{y}_1 + \dot{y}_2} = \overline{I} \cdot \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}$$

$$\overline{I}_2 = \overline{I} \cdot \frac{\dot{Y}_2}{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2} = \overline{I} \cdot \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}$$

ESEMPIO: impedenza equivalente

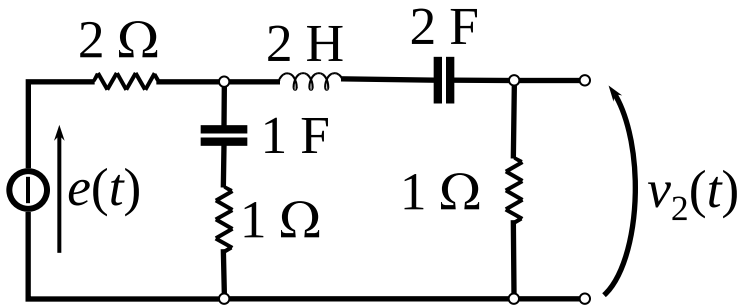


R = 10 Ω
$X_1 = 2\ \Omega$
$X_2 = 5\ \Omega$
$X_3 = 6\ \Omega$

$$\dot{z}_{eq} = \frac{(R + jX_2)(-jX_3)}{R + jX_2 - jX_3} - jX_1 = \frac{(10 + j5)(-j6)}{10 - j} - j2 =$$

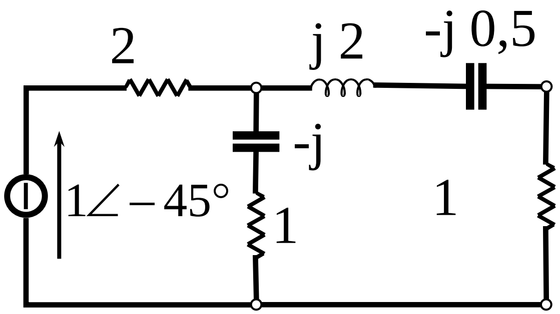
$$= \frac{-j60 + 30 - j20 - j2}{10 - j} = \frac{28 - j80}{10 - j} = \boxed{8{,}43\angle -64{,}9^\circ}$$

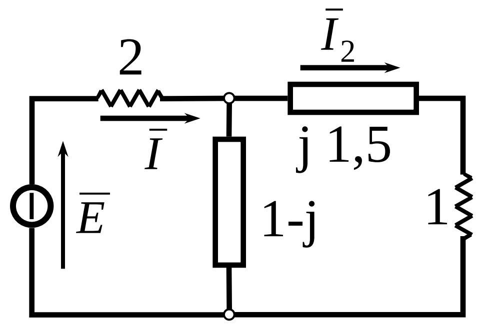
ESEMPIO

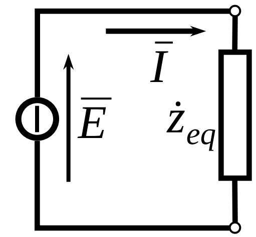


$v_2(t) = ?$

$e(t) = \cos(t-\pi/4)$







$$\bar{I} = \bar{E} / \dot{z}_{eq}$$

$$\bar{I}_2 = \bar{I}\,\frac{1-j}{(1-j)+(1+j1{,}5)}$$

$$\bar{V}_2 = 1\cdot \bar{I}_2$$

$$\dot{z}_{eq} = \frac{(1+j1{,}5)(1-j)}{1+j1{,}5+1-j} + 2 = \frac{1-j+j1{,}5+1{,}5+4+j}{2-j0{,}5} = \frac{6{,}5+j1{,}5}{2-j0{,}5} = \frac{6{,}67\angle 13^\circ}{2{,}06\angle 14^\circ} = 3{,}24\angle -1^\circ$$

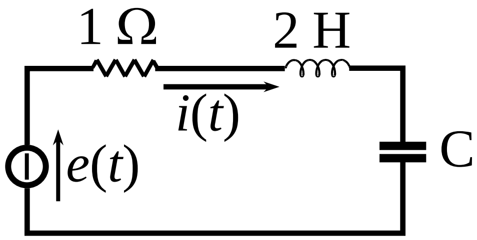
$$\bar{I} = \frac{1\angle -45^\circ}{3{,}24\angle -1^\circ} = 0{,}31\angle -44^\circ$$

$$\bar{I}_2 = 0{,}31\angle -44^\circ \cdot \frac{1-j}{2+j0{,}5} = \frac{0{,}31\angle -44^\circ \cdot \sqrt{2}\angle -45^\circ}{2{,}06\angle 14^\circ} = 0{,}21\angle -103^\circ$$

$$\bar{V}_2 = 0{,}21\angle -103^\circ$$

$$\boxed{v_2(t) = 0{,}21\cdot \cos(t-103^\circ)}$$

ESEMPIO



$e(t)$ = 3 cos t - sin t
$i(t)$ = 2 cos t + sin t
C = ?

$$e(t) = \sqrt{10}\cos(t - 0{,}322)$$

$$i(t) = \sqrt{5}\cos(t + 0{,}464)$$

$$\Rightarrow$$

$$\bar{E} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}\angle -18{,}43°$$

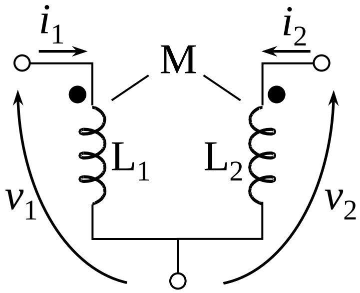
$$\bar{I} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\angle 26{,}565°$$

$$\dot{z}_{eq} = 1 + j2 - jX_c$$

$$\dot{z}_{eq} = \frac{\bar{E}}{\bar{I}} = \sqrt{2}\angle -\pi/4 = 1 - j$$

$$1 - j = 1 + j2 - jX_c \quad \Rightarrow \quad X_c = 3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = \frac{1}{\varpi X_c} = \frac{1}{3}\,\mathrm{F}}$$

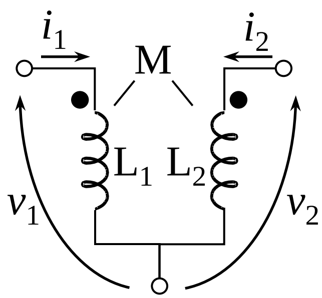
MUTUA INDUTTANZA -1



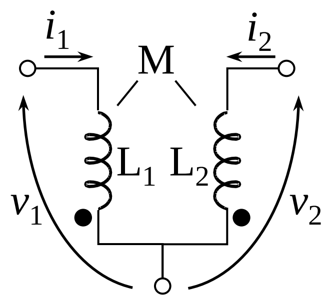
$$\begin{cases} v_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M_{12}\dfrac{di_2}{dt} \\ v_2 = L_2 \dfrac{di_2}{dt} + M_{21}\dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$

Hp: $\begin{cases} \text{non dissipativo} \\ \text{passivo} \end{cases}$ $\longrightarrow$ $\begin{matrix} M_{12} = M_{21} = M \\ L_1 L_2 - M^2 \geq 0 \end{matrix}$

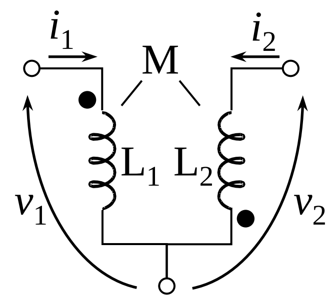
$$k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}}$$ COEFFICIENTE DI ACCOPPIAMENTO ($k \leq 1$)



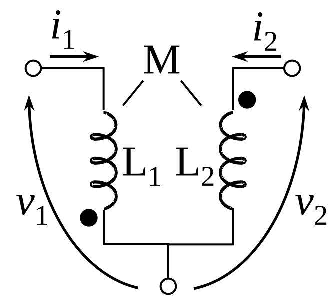
a) $M > 0$



b) $M > 0$



c) $M < 0$



d) $M < 0$

In regime sinusoidale:

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = j\omega L_1 \bar{I}_1 + j\omega M_{12} \bar{I}_2 \\ \bar{V}_2 = j\omega L_2 \bar{I}_2 + j\omega M_{21} \bar{I}_1 \end{cases}$$

Se inizialmente si è nello stato **zero**,
$j\omega L_1$, **$j\omega L_2$** e **$j\omega M$** sono delle **impedenze** (Ω).

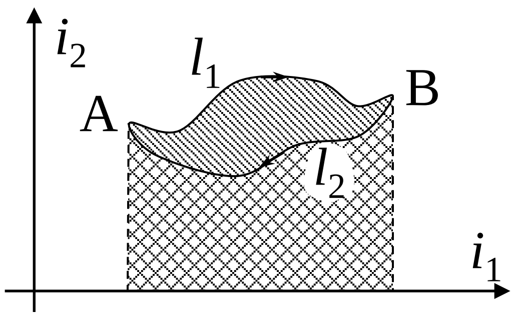
LA MUTUA A 4 TERMINALI HA LE STESSE EQUAZIONI DI QUELLA A 3 TERMINALI

MUTUA INDUTTANZA -2

Hp: PASSIVO
NON DISSIPATIVO

$$M_{12} \neq M_{21} \quad \Rightarrow \quad M_{21} = M_{12} + g$$

$$p(t) = v_1 i_1 + v_2 i_2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M_{12} i_1 i_2\right) + g \cdot i_2 \frac{di_1}{dt}$$



Per la condizione di NON DISSIPATIVITA':

$$\Delta\omega_1 + \Delta\omega_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint p(t) \cdot dt = 0$$

Δw_1 e Δw_2 devono dipendere solo dagli estremi $\rightarrow$
$p(t)$ deve essere un differenziale esatto $\rightarrow$
$g = 0 \rightarrow M_{12} = M_{21} = M$

Infatti: $\oint g \cdot i_2 di_1 = 0$ AREA A TRATTEGGIO SEMPLICE

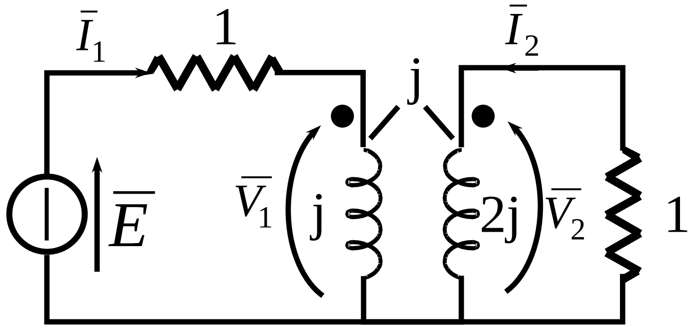
Lungo le l_1 e l_2 $\int g \cdot i_2 di_1$ assume valori differenti . Per la condizione di passività:

$$\omega = \int_{-\infty}^{t} p(t) dt \geq 0 \quad \forall t \quad \Rightarrow \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 \geq 0 \; \forall t \Rightarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \geq 0$$

FORMA QUADRATICA SEMIDEFINITA POSITIVA $\rightarrow$ MINORI $\geq 0 \rightarrow$

$L_1 \geq 0$ $\qquad$ $L_2 \geq 0$ $\qquad$ $L_1 L_2 - M^2 \geq 0$

ESEMPIO

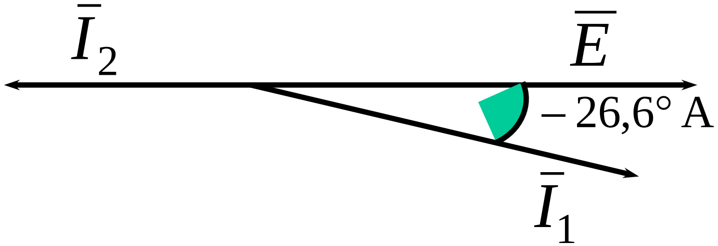


Calcolare $\bar I_1$ e $\bar I_2$ a regime

$$e(t) = \sqrt{2}\cdot 30\cos\omega t$$

$$\begin{cases} 30 = 1\cdot \bar I_1 + j\cdot \bar I_1 + j\cdot \bar I_2 \\ 0 = j\cdot \bar I_1 + 2j\cdot \bar I_2 + 1\cdot \bar I_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 30 = (1+j)\cdot \bar I_1 + j\cdot \bar I_2 \\ 0 = j\cdot \bar I_1 + (1+j2)\cdot \bar I_2 \end{cases}$$

$$\bar I_2 = \frac{-j}{1+j2}\cdot \bar I_1 = \frac{-j\cdot(1-j2)}{5}\cdot \bar I_1 = \frac{-2-j}{5}\cdot \bar I_1$$

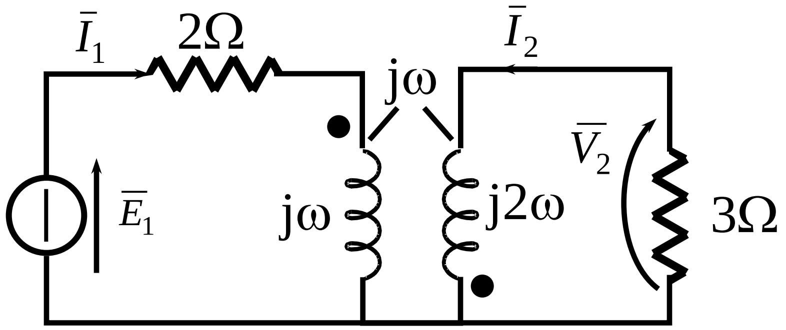


$$30 = \left(1 + j - \frac{1-2j}{5}\right)\cdot \bar I_1 = \left(\frac{6}{5} + j\frac{3}{5}\right)\cdot \bar I_1$$

$$\bar I_1 = \frac{30\cdot 5}{6+j3} = \frac{30\cdot 5}{3\cdot(2+j)} = \frac{10\cdot 5\cdot(2-j)}{5} = 10\cdot(2-j)\,\text{A} = \boxed{22{,}4\angle -26{,}6°\ \text{A}}$$

$$\bar I_2 = -2\cdot(2-j)\cdot(2+j) = -2\cdot(4+1) = \boxed{-10\ \text{A}}$$

ESEMPIO



$$e_1 = 100\cos 10t$$

Trovare la tensione $\bar{V}_2$ e $v_2(t)$

$$\begin{cases} \bar{E}_1 = (2 + j\omega)\cdot \bar{I}_1 - j\omega \cdot \bar{I}_2 \\ 0 = -j\omega \cdot \bar{I}_1 + (3 + j2\omega)\cdot \bar{I}_2 \end{cases}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 + j\omega & \bar{E}_1 \\ -j\omega & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 + j\omega & -j\omega \\ -j\omega & 3 + j2\omega \end{vmatrix}} = \frac{j\omega \cdot \bar{E}_1}{(2 + j\omega)(3 + j2\omega) + \omega^2} = \frac{j\omega \cdot \bar{E}_1}{6 + j4\omega + j3\omega - 2\omega^2 + \omega^2} =$$

$$= \frac{j\omega \cdot \bar{E}_1}{(6 - \omega^2) + j7\omega} = \frac{j10^3}{-94 + j70} = \frac{j10^3}{117{,}2\angle 143{,}32°} = 8{,}53\angle -53{,}32° \text{ A}$$

$$\bar{V}_2 = -R\cdot \bar{I}_2 = -3\cdot 8{,}53\angle -53{,}32° = -25{,}6\angle -53{,}32° \text{ V} = \boxed{25{,}6\angle 126{,}68° \text{ V}}$$

$$\boxed{v_2(t) = 25{,}6\cos(10t + 2{,}21)\text{ V}}$$

TRASFORMATORE IDEALE

Se $k = 1$ (accoppiamento stretto)

$$M = \sqrt{L_1 L_2}$$

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + \sqrt{L_1 L_2}\,\dfrac{di_2}{dt} \\ v_2 = \sqrt{L_1 L_2}\,\dfrac{di_1}{dt} + L_2 \dfrac{di_2}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + \sqrt{L_1 L_2}\,\dfrac{di_2}{dt} \\ \sqrt{\dfrac{L_1}{L_2}}\,v_2 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + \sqrt{L_1 L_2}\,\dfrac{di_2}{dt} \end{cases} \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \cdot v_2 = n \cdot v_2$$

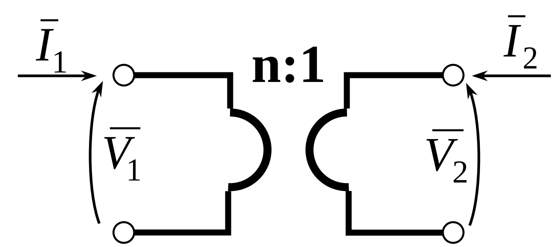
Nel dominio della frequenza:

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = j\omega L_1 \bar{I}_1 + j\omega\sqrt{L_1 L_2}\,\bar{I}_2 \\ \sqrt{\dfrac{L_1}{L_2}} \cdot \bar{V}_2 = j\omega L_1 \bar{I}_1 + j\omega\sqrt{L_1 L_2}\,\bar{I}_2 \end{cases} \Rightarrow \quad \bar{V}_1 = n \cdot \bar{V}_2 \qquad\qquad \frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2} = \frac{1}{j\omega L_1}\frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_2} - \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$$

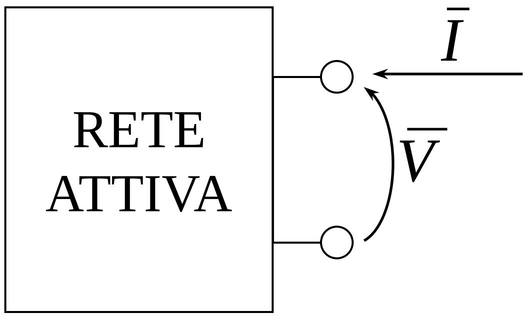
Per L_1 , $L_2 \to \infty$ si può trascurare il termine $\dfrac{1}{j\omega L_1}\dfrac{\bar{V}_1}{\bar{I}_2}$ mentre $\sqrt{\dfrac{L_2}{L_1}} = \dfrac{1}{n}$ da cui:

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = n\bar{V}_2 \\ \bar{I}_1 = -\dfrac{1}{n}\bar{I}_2 \end{cases}$$

TRASFORMATORE IDEALE

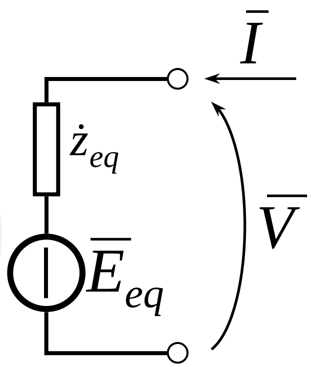


TEOREMI DI THEVENIN E NORTON



Rete attiva costituita da componenti lineari tempo-invarianti

THEVENIN

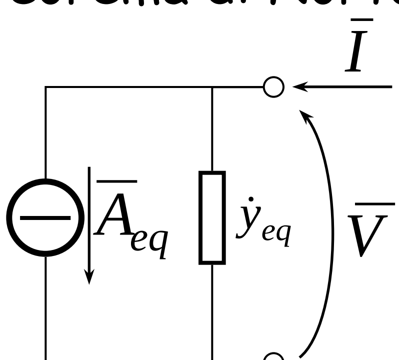


EQUIVALENTE CIRCUITALE

$$\boxed{\overline{V} = \dot{Z}_{eq}\overline{I} + \overline{E}_{eq}}$$

Il duale è il teorema di Norton

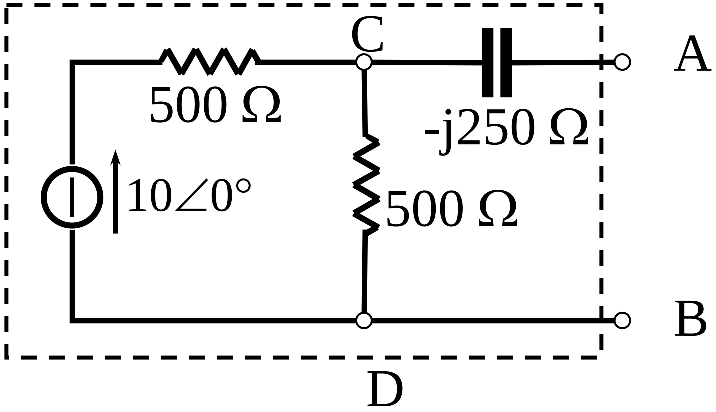
NORTON



EQUIVALENTE CIRCUITALE

$$\boxed{\overline{I} = \dot{Y}_{eq} \cdot \overline{V} + \overline{A}_{eq}}$$

ESEMPIO



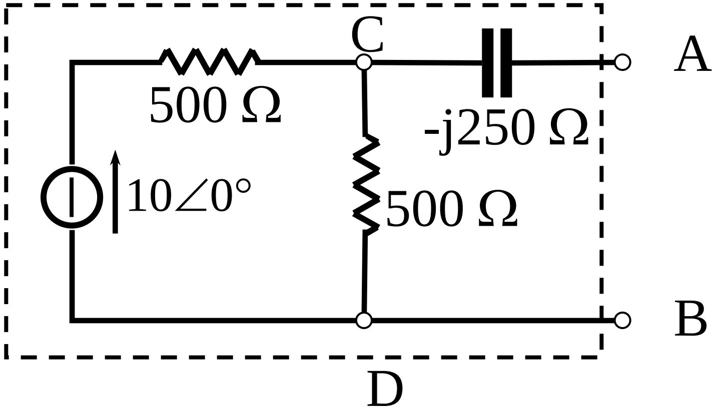
Trovare gli equivalenti di Thevenin e Norton

THEVENIN

$$\overline{E}_{eq} = 10 \cdot \frac{500}{500+500} = 5\angle 0° \text{ V}$$

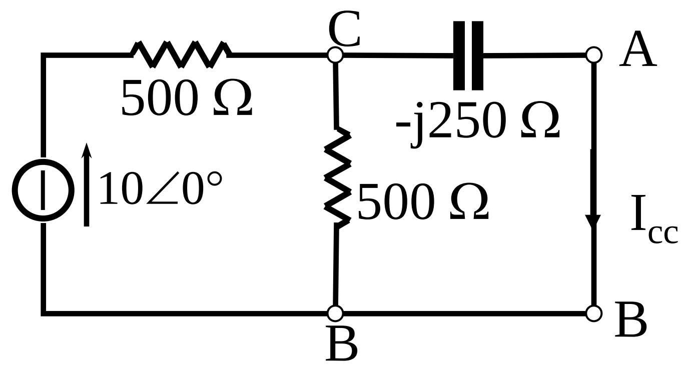
$$\dot{z}_{eq} = -j250 + \frac{500 \cdot 500}{500+500} = 250 - j250 = 250 \cdot \sqrt{2}\angle -45° \,\Omega$$

ESEMPIO



Trovare gli equivalenti di Thevenin e Norton

NORTON



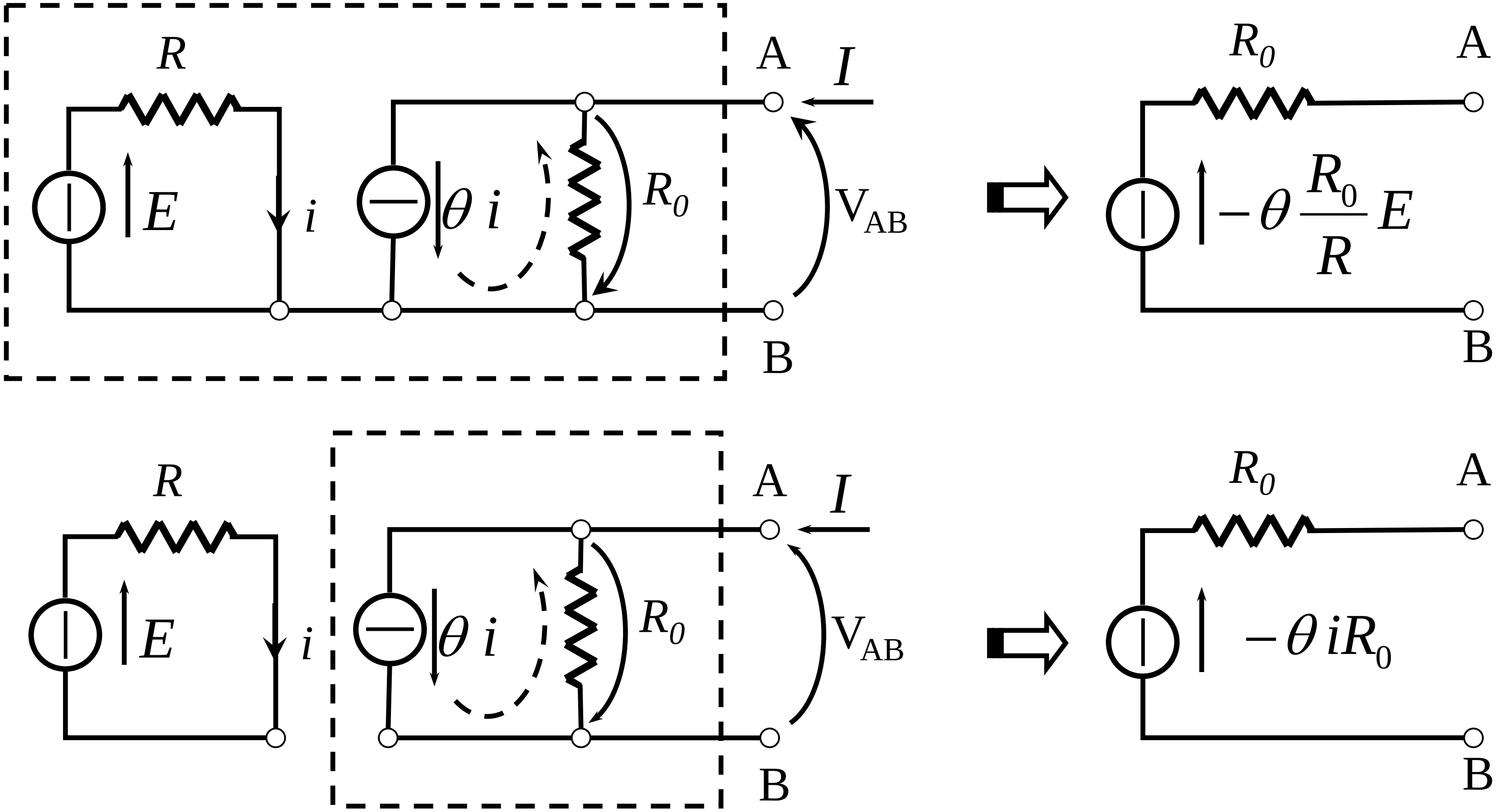
$$\dot{y}_{eq} = \frac{1}{\dot{z}_{eq}} = \frac{1}{250\cdot\sqrt{2}}\angle 45°\ \Omega = 2{,}828\cdot 10^{-3}\angle 45°$$

$$\bar{I}_{cc} = \frac{\bar{V}_{CB}}{-j250} \qquad \bar{V}_{CB} = 10\angle 0° \cdot \frac{\dfrac{500(-j250)}{500-j250}}{500+\dfrac{500(-j250)}{500-j250}} = 10\angle 0°\cdot\frac{-j}{2-j2} = \frac{5}{\sqrt{2}}\angle -45°$$

$$\bar{I}_{cc} = \frac{5\angle -45°}{\sqrt{2}\cdot 250\angle -90°} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot 50}\angle 45° = 0{,}01414\angle 45° = \bar{A}_{eq}$$

$$\bar{E}_{eq}\cdot\dot{y}_{eq} = \frac{5}{250\cdot\sqrt{2}}\angle 45° = 0{,}01414\angle 45° = \bar{A}_{eq}$$ c.v.d.

THEVENIN IN PRESENZA DI GENERATORI PILOTATI



N.B.

GRANDEZZA PILOTANTE ESTERNA: POSSIAMO PASSIVARE

GRANDEZZA PILOTANTE INTERNA: NON POSSIAMO PASSIVARE

METODI ABBREVIATI DI ANALISI

METODO DELLE CORRENTI CICLICHE $\left[\dot{Z}\right]\cdot \underline{\overline{J}} = \underline{\overline{E}}$

Discende dalle equazioni di Maxwell $\rightarrow$ **Solenoidalità delle Correnti**
Si introducono delle **correnti fittizie** che siano di per sé solenoidali
(base vettoriale su cui si proiettano le correnti reali $\overline{I}$)

$$\left[\dot{Z}\right] = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{11} & \dot{Z}_{12} & \cdots & \dot{Z}_{1M} \\ \dot{Z}_{21} & \dot{Z}_{22} & \cdots & \dot{Z}_{2M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dot{Z}_{M1} & \dot{Z}_{M2} & \cdots & \dot{Z}_{MM} \end{bmatrix}$$

$\dot{Z}_{ii}$ Impedenza propria della maglia *i*

$\dot{Z}_{ji}$ Impedenza mutua tra le maglie *i* e *j* della maglia *i*

$\dot{Z}_{ij} = \dot{Z}_{ji}$

$$M = l - (n - 1)$$

$$\left[\overline{J}\right] = \begin{bmatrix} \overline{J}_1 \\ \vdots \\ \overline{J}_M \end{bmatrix}$$ Correnti cicliche nelle maglie

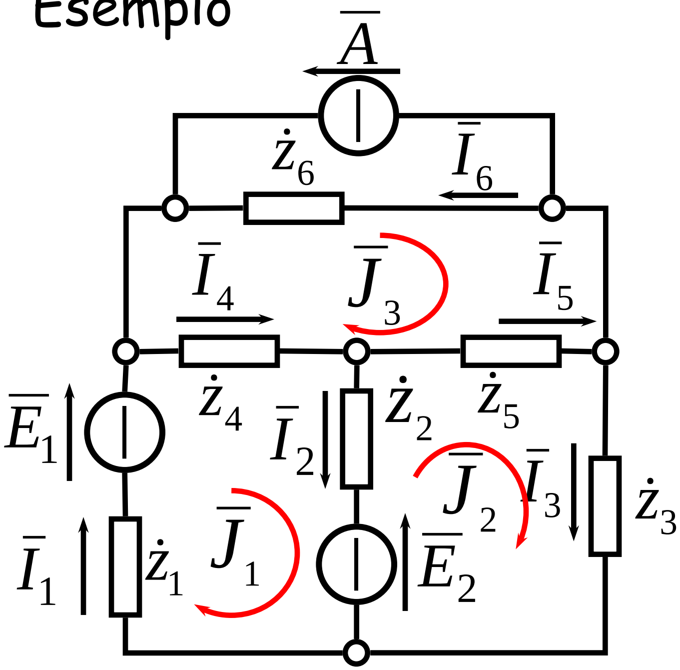
$$\left[\overline{E}\right] = \begin{bmatrix} \overline{E}_{v1} \\ \vdots \\ \overline{E}_{vM} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{E}_{i1} \\ \vdots \\ \overline{E}_{iM} \end{bmatrix}$$

- E_{vi} è la somma dei generatori di tensione nella maglia *i*, prese con segno + se concordi con il verso di J_i e viceversa
- E_{ii} è la somma delle tensioni dovute ai generatori di corrente collegati agli estremi dei lati della maglia *i* (prodotto della corrente per l'impedenza del ramo a cui è collegato) preso con il segno + se la caduta di tensione provocata in quel ramo dalla sola corrente del generatore è concorde con J_i e viceversa

METODI ABBREVIATI DI ANALISI

METODO DELLE CORRENTI CICLICHE $\left[\dot{Z}\right] \cdot \underline{\overline{J}} = \underline{\overline{E}}$

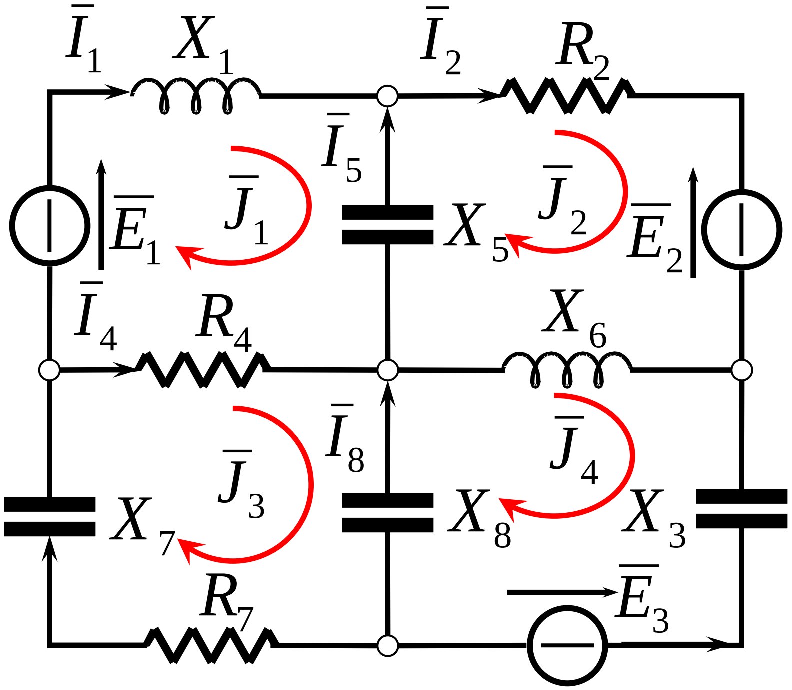
Esempio



$$[Z] = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 + \dot{z}_2 + \dot{z}_4 & -\dot{z}_2 & -\dot{z}_4 \\ -\dot{z}_2 & \dot{z}_2 + \dot{z}_3 + \dot{z}_5 & -\dot{z}_5 \\ -\dot{z}_4 & -\dot{z}_5 & \dot{z}_4 + \dot{z}_5 + \dot{z}_6 \end{bmatrix}$$

$$[\overline{J}] = \begin{bmatrix} \overline{J}_1 \\ \overline{J}_2 \\ \overline{J}_3 \end{bmatrix} \qquad [\overline{E}] = \begin{bmatrix} \overline{E}_1 - \overline{E}_2 \\ \overline{E}_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{z}_6 A \end{bmatrix}$$

ESEMPIO



$$e_1(t) = 100\sqrt{2}\sin\omega t$$

$$e_2(t) = 200\sqrt{2}\cos\omega t$$

$$e_3(t) = 100\cos(\omega t + \pi/4)$$

$$R_2 = R_4 = R_7 = 6 \ \ \Omega$$

$$X_1 = X_3 = X_5 = X_6 = X_7 = X_8 = 3\,\Omega$$

$$\overline{E}_1 = j100; \qquad \overline{E}_2 = 200; \qquad \overline{E}_3 = 50 + j50$$

$$\begin{bmatrix} 6 & j3 & -6 & 0 \\ j3 & 6 & 0 & -j3 \\ -6 & 0 & 12 - j6 & j3 \\ 0 & -j3 & j3 & -j3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{J}_1 \\ \overline{J}_2 \\ \overline{J}_3 \\ \overline{J}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j100 \\ -200 \\ 0 \\ -50 - j50 \end{bmatrix}$$

METODI ABBREVIATI DI ANALISI

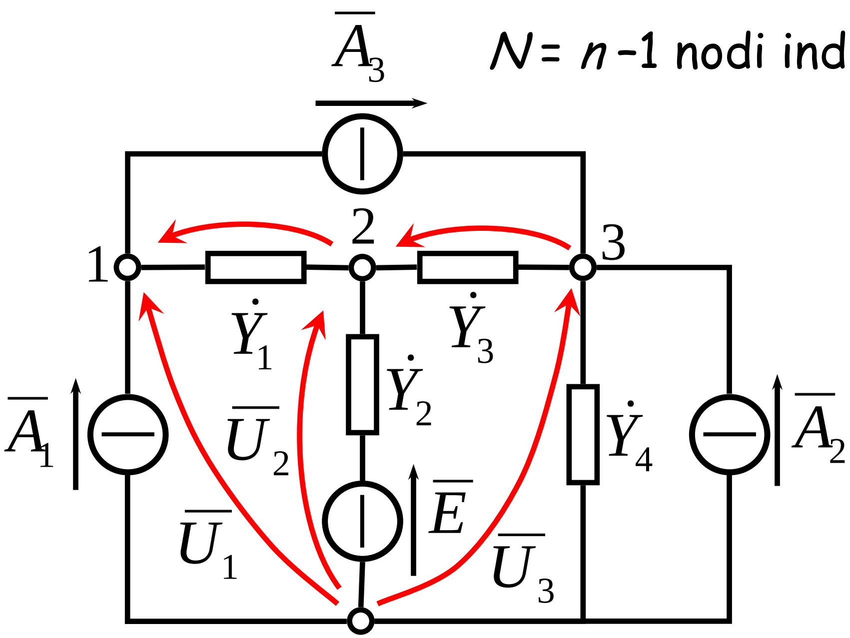
METODO DEI POTENZIALI NODALI $\left[\dot{Y}\right]\left[\overline{U}\right]=\left[\overline{A}\right]$

Si basa sulla proprietà di **irrotazionalità delle tensioni** ➡ Legge di Kirchhoff delle tensioni

$$\oint \overline{E}\cdot d\overline{l}=0$$

Qualsiasi tensione di lato è esprimibile come somma algebrica dei potenziali di nodo.
LE $\overline{U}$ COSTITUISCONO UNA BASE PER LE TENSIONI

NOTA: si parla di nodi che sono casi particolari di co-cicli.
In pratica si considerano i co-cicli fondamentali riferiti ad un albero a stella



$N = n - 1$ nodi indipendenti

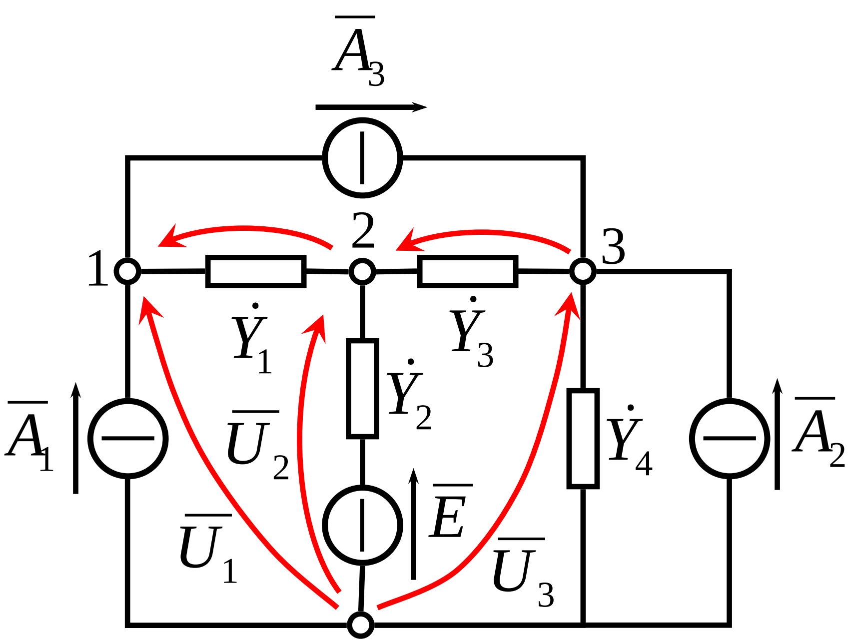
$$\left[\dot{Y}\right]=\begin{bmatrix}\dot{Y}_{11} & \dot{Y}_{12} & \cdots & \dot{Y}_{1N}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dot{Y}_{N1} & \dot{Y}_{N2} & \cdots & \dot{Y}_{NN}\end{bmatrix} \qquad \dot{Y}_{ij}=\dot{Y}_{ji}$$

$\dot{Y}_{ii}$ = ammettenza propria del nodo *i*

$\dot{Y}_{ij}$ = ammettenza del lato che collega i nodi *i* e *j* presa col segno negativo

METODI ABBREVIATI DI ANALISI

METODO DEI POTENZIALI NODALI $\left[\dot{Y}\right]\left[\overline{U}\right]=\left[\overline{A}\right]$



$$\left[\dot{Y}\right]=\begin{bmatrix} \dot{Y}_1 & -\dot{Y}_1 & 0 \\ -\dot{Y}_1 & \dot{Y}_1+\dot{Y}_2+\dot{Y}_3 & -\dot{Y}_3 \\ 0 & -\dot{Y}_3 & \dot{Y}_3+\dot{Y}_4 \end{bmatrix}$$

$\dot{Y}_{ii}$ = ammettenza propria del nodo i

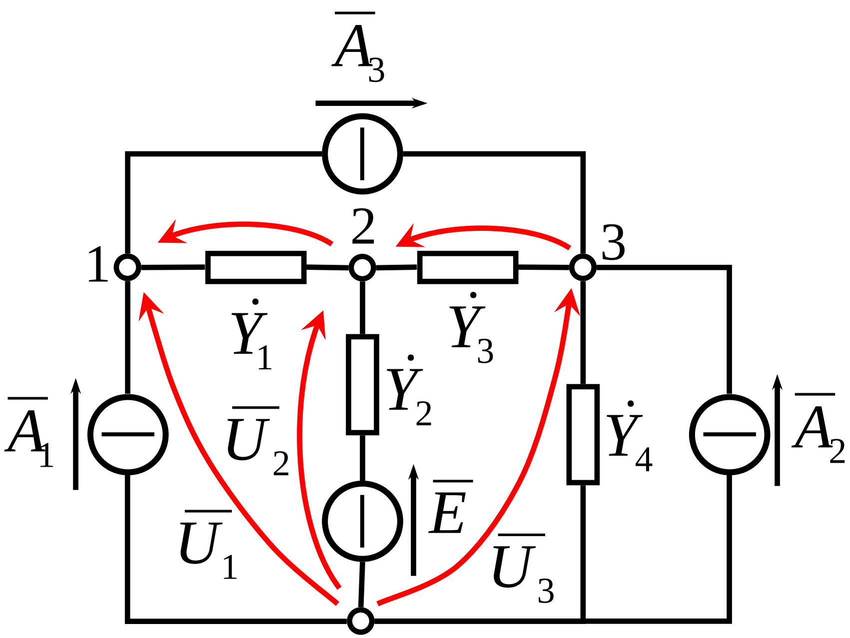
$\dot{Y}_{ij}$ = ammettenza del lato che collega i nodi i e j presa col segno negativo

METODI ABBREVIATI DI ANALISI

METODO DEI POTENZIALI NODALI $\left[\dot{Y}\right]\left[\overline{U}\right]=\left[\overline{A}\right]$

$$\left[\overline{A}\right]=\begin{bmatrix}\overline{A}_{i1}\\ \vdots \\ \overline{A}_{iN}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\overline{A}_{v1}\\ \vdots \\ \overline{A}_{vN}\end{bmatrix} \qquad \left[\overline{A}\right]=\begin{bmatrix}\overline{A}_1-\overline{A}_3\\ 0 \\ \overline{A}_2+\overline{A}_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \dot{E}\dot{Y}_2 \\ 0\end{bmatrix}$$

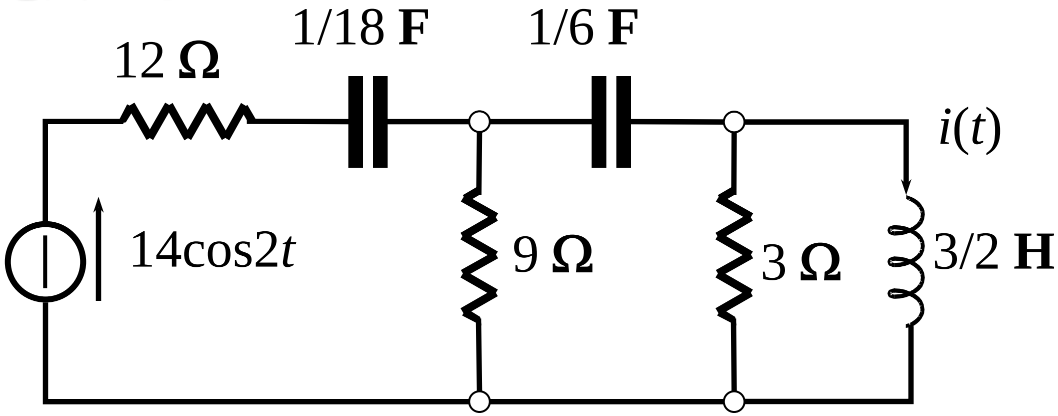
A_{ij} = somma delle correnti dei generatori di corrente che incidono sul nodo i, positivi se entranti.
A_{vi} = correnti dovute ai generatori di tensione inseriti in lati convergenti nel nodo i (f.e.m. $\times$ ammettenza del lato) positivi se il generatore da solo fa circolare corrente entrante.



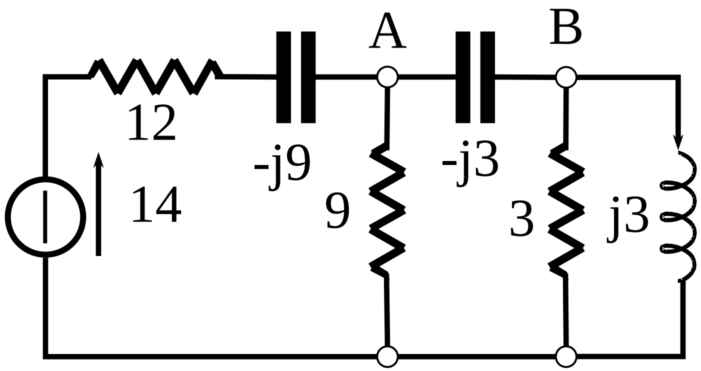
Potenziali degli n–1 nodi rispetto all'n-esimo

$$\left[\overline{U}\right]=\begin{bmatrix}\overline{U}_1\\ \vdots \\ \overline{U}_N\end{bmatrix} \qquad \left[\overline{U}\right]=\begin{bmatrix}\overline{U}_1\\ \overline{U}_2 \\ \overline{U}_3\end{bmatrix}$$

ESEMPIO



Trovare $i(t)$ con l'analisi nodale

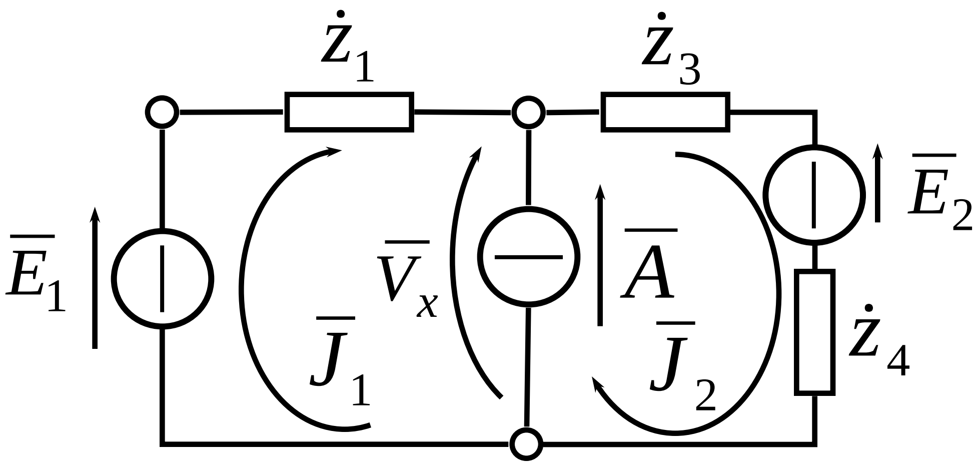


$$\begin{bmatrix} \frac{1}{12-j9}+\frac{1}{9}+\frac{j}{3} & -\frac{j}{3} \\ -\frac{j}{3} & \frac{j}{3}+\frac{1}{3}-\frac{j}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{U}_A \\ \overline{U}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{12-j9} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{U}_B = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{12-j9}+\frac{1}{9}+\frac{j}{3} & \frac{14}{12-j9} \\ -\frac{j}{3} & 0 \end{vmatrix}}{0{,}1669 + j0{,}1244} = j1{,}5 \qquad \overline{I} = \frac{\overline{U}_B}{j3} = 0{,}5 \qquad i(t) = 0{,}5\cos 2t$$

N.B. ho lavorato con i valori massimi

METODO DELLE CORRENTI CICLICHE: OSSERVAZIONI



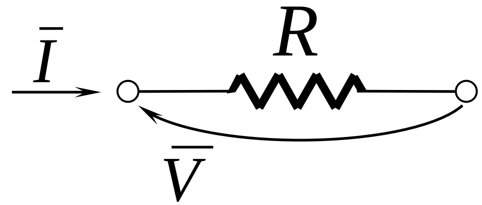
$$\begin{cases} \overline{E}_1 - \dot{z}_1 \overline{J}_1 - \overline{V}_x = 0 \\ \overline{V}_x - \left(\dot{z}_3 + \dot{z}_4\right)\overline{J}_2 = \overline{E}_2 \\ \overline{J}_1 + \overline{A} - \overline{J}_2 = 0 \end{cases}$$

LA PRESENZA DI GENERATORI DI CORRENTE INTRODUCE UNA DESTRUTTURAZIONE DEL METODO, INTRODUCENDO INCOGNITE MISTE (V, J) E TERMINI NOTI MISTI (E , A).

ANALOGAMENTE PER IL METODO DEI POTENZIALI NODALI.

E' IMPORTANTE LA SCELTA OCULATA DELLE MAGLIE E DEI NODI.

Potenza del RESISTORE

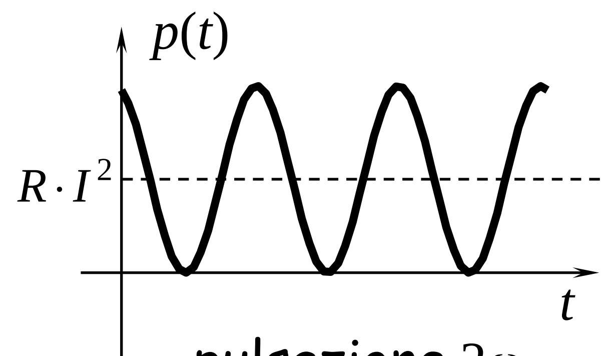


$$i(t) = I_{\max} \cos \omega t \qquad p(t) = v \cdot i = R \cdot i^2 = R \cdot I_{\max}^2 \cos^2 \omega t$$

$$\cos^2 \omega t = \frac{1+\cos 2\omega t}{2} \Rightarrow \quad p(t) = R \cdot I_{\max}^2 \frac{1+\cos 2\omega t}{2}$$

$$I_{\max} = \sqrt{2} \cdot I_{eff} = \sqrt{2} \cdot I \qquad \boxed{p(t) = R \cdot I^2 (1+\cos 2\omega t) = V \cdot I + V \cdot I \cdot \cos 2\omega t}$$

NOTA: La potenza assorbita dal resistore è sempre positiva o, al più, nulla, è pulsante di pulsazione doppia rispetto a quella della tensione o della corrente

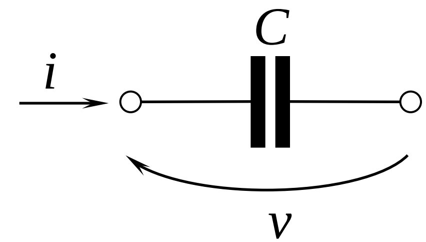


pulsazione 2ω

Il valore $V \cdot I$ e' il valore medio di $p(t)$ nel periodo e viene chiamato POTENZA ATTIVA.
La potenza attiva si misura in WATT.

$$P = R \cdot I^2 = V \cdot I$$

Potenza del CAPACITORE



$$i = C\frac{dv}{dt}$$

$$\bar{I} = j\omega C \cdot \bar{V}$$

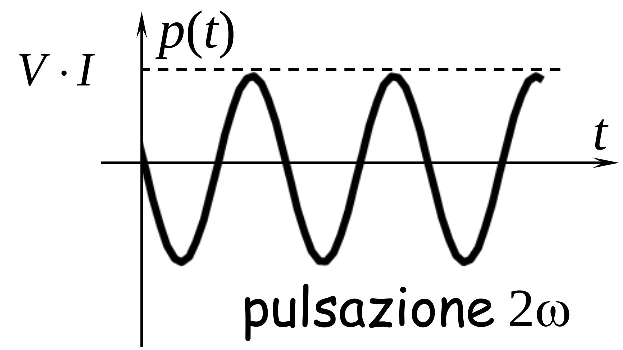
$$v(t) = V_{\max}\cos\ \omega t \qquad i(t) = -\omega C V_{\max}\sin\ \omega t$$

$$V = \frac{I}{\omega C}$$

$$p(t) = v \cdot i = -\omega C V_{\max}\sin\omega t\cos\omega t = -2\omega C V^2\sin\omega t\cos\omega t =$$

$$= -\omega C V^2\sin 2\omega t = -\omega C\frac{I^2}{\omega^2 C^2}\sin 2\omega t = -\frac{I^2}{\omega C}\sin 2\omega t = \boxed{-VI\sin 2\omega t}$$

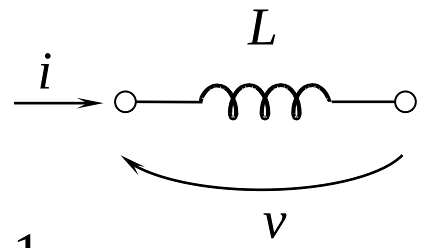
NOTA: La potenza assorbita è sinusoidale di pulsazione doppia rispetto a tensione e corrente ed ha valore medio nullo.
LA POTENZA ATTIVA E' NULLA



La quantità **Q = -V·I** pari all'ampiezza massima dell'oscillazione della potenza istantanea è detta <u>POTENZA REATTIVA</u>. La potenza reattiva si misura in **VAR**.

Se $\omega=0 \rightarrow j\omega C = 0$ (regime permanente)
il condensatore si comporta da circuito aperto

Potenza dell'INDUTTORE



$$v = L\frac{di}{dt}$$

$$\bar{V} = j\omega L \cdot \bar{I}$$

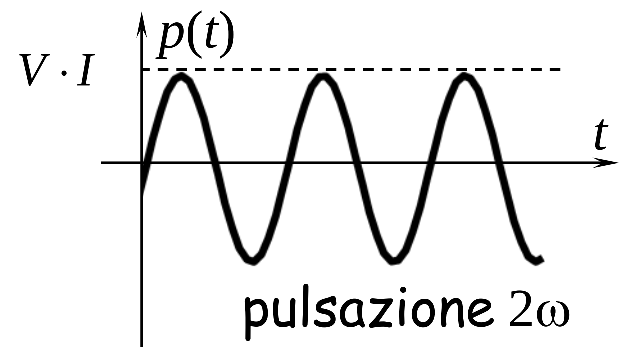
$$I = \frac{V}{\omega L}$$

$$v(t) = V_{max}\cos\ \omega t \qquad i(t) = \frac{1}{L}\int i(\tau)d\tau = \frac{1}{\omega L}V_{max}\sin\ \omega t$$

$$p(t) = v \cdot i = \frac{1}{\omega L}V_{max}^2 \sin\omega t\cos\omega t = \frac{2}{\omega L}V^2 \sin\omega t\cos\omega t =$$

$$= \frac{V^2}{\omega L}\sin 2\omega t = \omega L I^2 \sin 2\omega t = \boxed{VI\sin 2\omega t}$$

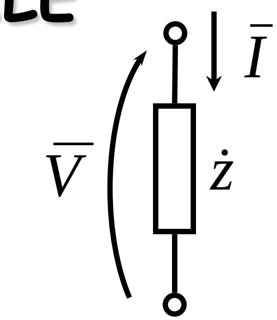
NOTA: La potenza istantanea è una sinusoide di pulsazione doppia rispetto a tensione e corrente.
LA POTENZA ATTIVA E' NULLA



La quantità $\mathbf{Q = V \cdot I}$ pari all'ampiezza massima dell'oscillazione della potenza istantanea è detta <u>POTENZA REATTIVA</u>. La potenza reattiva si misura in **VAR**.

Se $\omega=0 \rightarrow j\omega L = 0$ (regime permanente)
l'induttore si comporta da corto circuito

POTENZE IN REGIME SINUSOIDALE



$$i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos \omega t = \Re e\left\{\sqrt{2} \cdot \bar{I} \cdot e^{j\omega t}\right\} \Rightarrow \bar{I} = I \cdot e^{j0}$$

$$\dot{z} = z \cdot e^{j\varphi}$$

$$\bar{V} = \dot{z} \cdot \bar{I} = z \cdot e^{j\varphi} \cdot I \cdot e^{j0} = z \cdot I \cdot e^{j\varphi}$$

$$v(t) = \Re e\left\{\sqrt{2} \cdot zI \cdot e^{j\varphi} e^{j\omega t}\right\} = \sqrt{2} V \cos(\omega t + \varphi)$$

$$p(t) = v \cdot i = \sqrt{2} V \cos(\omega t + \varphi) \cdot \sqrt{2} I \cos \omega t = 2VI \cos(\omega t + \varphi) \cos \omega t$$

ma : $\cos(\alpha)\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$ e $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos\beta - \sin(\alpha)\sin\beta$

da cui : $2\cos(\omega t + \varphi)\cos\omega t = \cos\varphi(1 + \cos 2\omega t) - \sin\varphi \sin 2\omega t$

$$p(t) = V\underbrace{I \cdot \cos\varphi(1 + \cos 2\omega t)}_{\text{Potenza Attiva istantanea}} - V\underbrace{I \cdot \sin\varphi \sin 2\omega t}_{\text{Potenza Reattiva istantanea}}$$

valore medio $\Downarrow$

$$P = VI\cos\varphi$$

Potenza Attiva [W]

valore massimo $\Downarrow$

$$Q = VI\sin\varphi$$

Potenza Rettiva [VAR]

POTENZE IN REGIME SINUSOIDALE

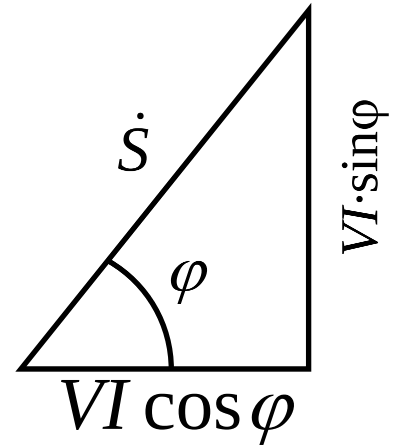
$\dot{S} = P + jQ$ **Potenza Complessa**

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} =$$

$$= \sqrt{V^2 I^2 \left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)} =$$

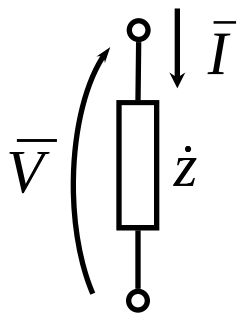
$= VI$ **Potenza Apparente [VA]**

TRIANGOLO DELLE POTENZE



Si dimostra facilmente che: $\dot{S} = \overline{V} \cdot \overline{I}^*$

Infatti:



$$\dot{z} = R + jX = \left|\dot{z}\right| \cdot e^{j\varphi}$$

se $\overline{I} = I \cdot e^{j\psi}$ allora:

$$\overline{V} = \dot{z} \cdot \overline{I} = zI \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\psi} = V \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\psi}$$

Perciò:

$$\overline{V} \cdot \overline{I}^* = Ve^{j\varphi}e^{j\psi} \cdot I \cdot e^{-j\psi} = VI \cdot e^{j\varphi} =$$
$$= VI \cdot \cos\varphi + jVI \cdot \sin\varphi = P + jQ = \dot{S}$$

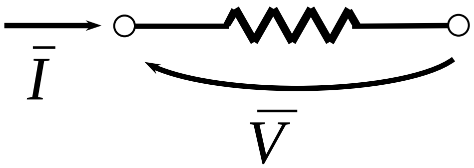
P rappresenta la potenza dissipata
Q rappresenta la potenza scambiata con altri accumulatori di energia

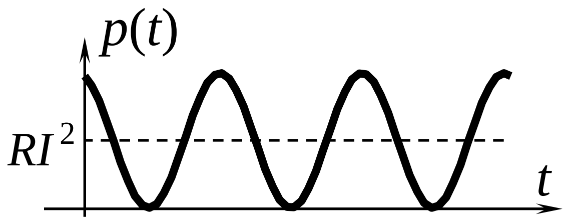
cos φ : fattore di potenza del carico

CASI PARTICOLARI

➢RESISTORE $\varphi = 0$

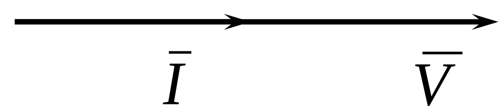
$$p(t) = VI(1+\cos 2\omega t) = RI^2(1+\cos 2\omega t)$$





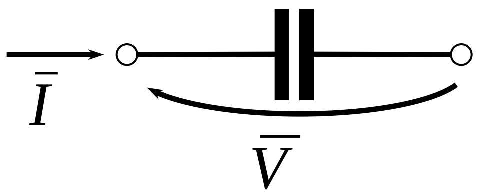
valore medio: $P = VI$

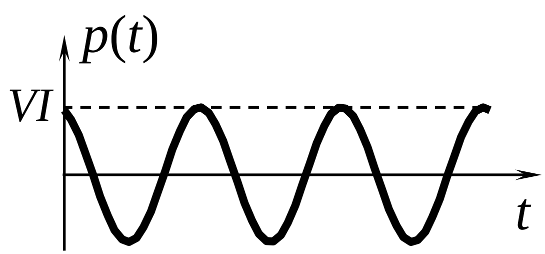
$Q = 0$

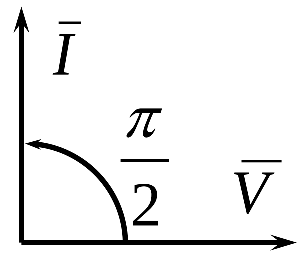


➢CAPACITORE $\varphi = \pi/2$ anticipo

$$p(t) = -VI \sin 2\omega t$$





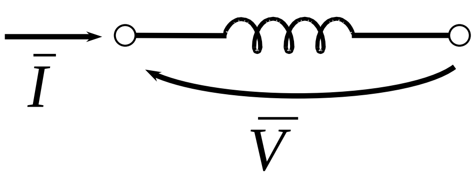


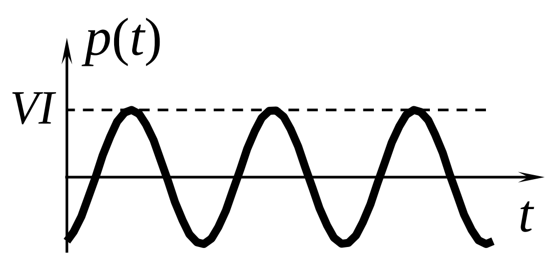
$P = 0$

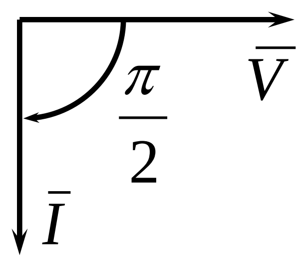
$Q = -VI$

➢INDUTTORE $\varphi = \pi/2$ ritardo

$$p(t) = VI \sin 2\omega t$$







$P = 0$

$Q = VI$

TEOREMA DI BOUCHEROT

Dal teorema di Tellegen: $\sum_h v_h^{'} \cdot i_h^{''} = 0$

In regime sinusoidale: $\left\{\overline{V}_h\right\}$; $\left\{\overline{I}_h^*\right\}$

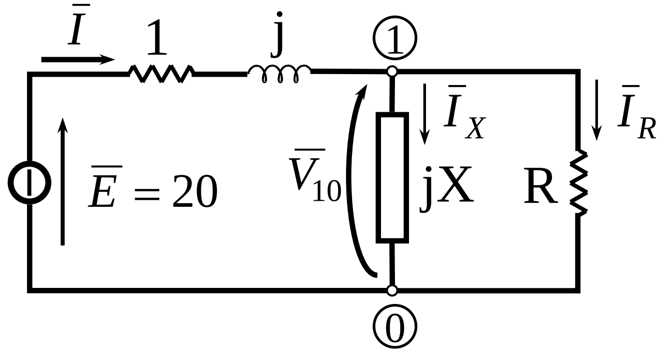
Applichiamo Tellegen agli insiemi delle $\left\{\overline{V}_h\right\}$ e $\left\{\overline{I}_h^*\right\}$

$$\sum_h \overline{V}_h \cdot \overline{I}_h^* = \sum_h \left(P_h + jQ_h\right) = 0$$

Affinché sia verificata deve essere:

$$\boxed{\begin{gathered}\sum_h P_h = 0 \\ \sum_h Q_h = 0\end{gathered}}$$

ESEMPIO (Teorema di Boucherot)



La potenza complessa erogata dal generatore è:

$$\dot{S} = 100 \cdot (1 - j)$$

Calcolare i valori di *R* ed *X*

$$\dot{S} = \bar{E} \cdot \bar{I}^*$$

$$\bar{I}^* = \dot{S}/\bar{E} = 100 \cdot (1 - j)/20 = 5 - j5 \quad \Rightarrow \quad \bar{I} = 5 + j5 = \sqrt{50}\angle 45°$$

$$\bar{V}_{10} = \bar{E} - (1 + j)\bar{I} = 20 - (1 + j)(5 + j5) = 20 - 5(1 + 2j - 1) = 20 - j10$$

$$\bar{I}_X = \frac{\bar{V}_{10}}{jX} = \frac{20 - j10}{jX} = \frac{10 + j20}{X} \Rightarrow \left|\bar{I}_X\right| = \frac{\sqrt{500}}{X}$$

$$\bar{I}_R = \frac{\bar{V}_{10}}{R} = \frac{20 - j10}{R} \quad \Rightarrow \quad \left|\bar{I}_R\right| = \frac{\sqrt{500}}{R}$$

Essendo:

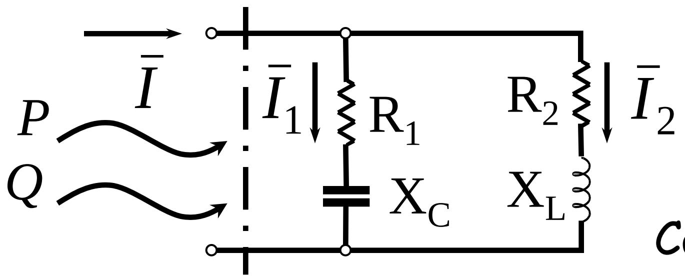
$$P = \Re e\{\dot{S}\} = 100 = 1 \cdot I^2 + R \cdot I_R^2 = 50 + 500/R$$

$$Q = \Im m\{\dot{S}\} = -100 = 1 \cdot I^2 + X \cdot I_X^2 = 50 + 500/X$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 100R - 50R = 500 \\ -100X - 50X = 500 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = 10\ \Omega \\ X = -10/3 \end{cases}$$

Reattanza Capacitiva

ESEMPIO (Teorema di Boucherot)



$$I_1 = 20\,\mathbf{A}\ ;\ I_2 = 20\,\mathbf{A}\ ;\ I = 24\,\mathbf{A}$$

$$P = 2{,}4\,\mathbf{kW}\ ;\ Q = 0\,\mathbf{VAR}$$

Calcolare R_1 , X_C e la potenza reattiva assorbita da X_C

$$\begin{cases} Q = Q_C + Q_L = X_C \cdot I_1^2 + X_L \cdot I_2^2 \\ P = P_1 + P_2 = R_1 \cdot I_1^2 + R_2 \cdot I_2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} Q = 0 \Rightarrow X_C \cdot I_1^2 + X_L \cdot I_2^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad X_C = -X_L \ (I_1 = I_2) \\ (R_1 + jX_C) \cdot \bar{I}_1 = (R_2 + jX_L) \cdot \bar{I}_2 = \bar{U} \end{array}$$

(Teorema di Boucherot)

Essendo le correnti uguali in modulo e le reattanze uguali in modulo, ed essendo i due rami in parallelo, sarà: $R_1 = R_2$, da cui:

$$P = 2R_1 I_1^2 = 2R_2 I_2^2 \quad \Rightarrow R_1 = R_2 = P/2I_1^2 = 2400/(2 \cdot 400) = 3\,\Omega$$

inoltre è:

$$|\bar{U}| = \sqrt{R_1^2 + X_1^2} \cdot |\bar{I}_1| \quad \Rightarrow \sqrt{R_1^2 + X_1^2} = \frac{|\bar{U}|}{|\bar{I}_1|} \quad \Rightarrow R_1^2 + X_1^2 = \frac{U^2}{I_1^2}$$

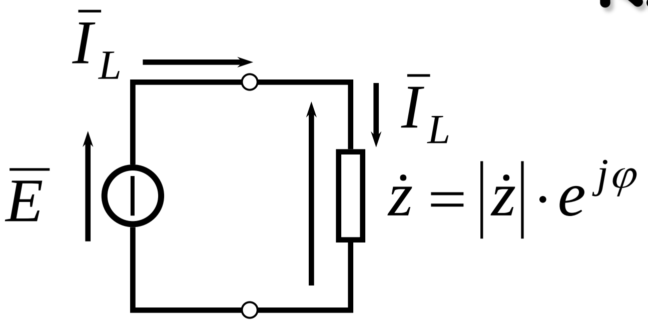
ma:

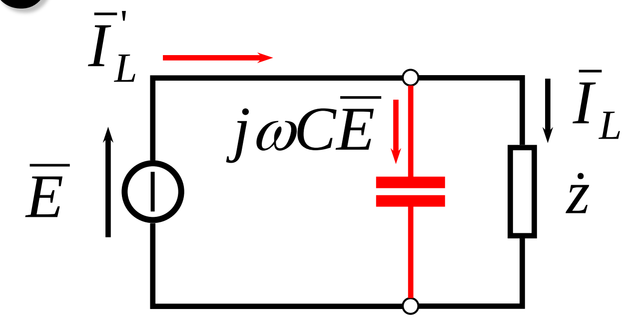
$$\dot{S} = P + jQ = P \Rightarrow S = P = U \cdot I \Rightarrow U = \frac{P}{I} = \frac{2400}{24} = 100\,\mathbf{V} \qquad X_C = \sqrt{\frac{U^2}{I^2} - R_1^2} = \sqrt{\frac{100^2}{20^2} - 3^2} = 4\,\Omega$$

$$\Rightarrow \quad Q_C = X_C \cdot I_1^2 = 4 \cdot 400 = 1600\,\mathbf{VAR}$$

capacitivi

RIFASAMENTO





$$P = \frac{E^2}{|\dot{z}|}\cos\varphi \qquad Q = \frac{E^2}{|\dot{z}|}\sin\varphi$$

Per Boucherot: $Q_g + Q_c + Q_z = 0$

$$\bar{I}_L = \frac{\bar{E}}{\dot{z}}$$

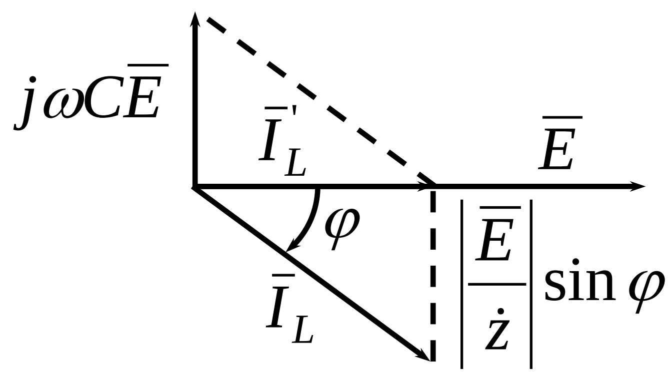
RIFASARE completamente significa imporre $Q_g = 0$ ➡ $Q_c + Q_z = 0$

$$Q_z = \frac{E^2}{|\dot{z}|}\sin\varphi \qquad Q_c = \frac{E^2}{1/\omega C}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\omega C E^2 \Rightarrow C = \frac{\sin\varphi}{|\dot{z}|\omega}$$

La capacità dipende solo dal **carico** e dalla **pulsazione**

$$\bar{I}'_L = \bar{E}\left(j\omega C + \frac{1}{|\dot{z}| \cdot e^{j\varphi}}\right) =$$

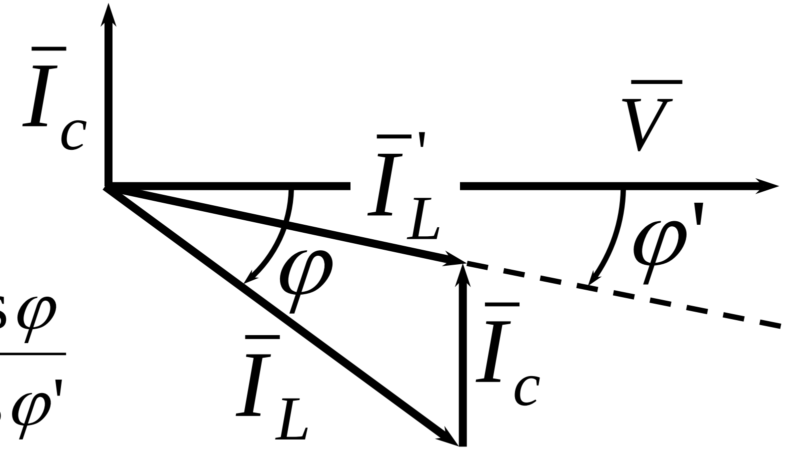
$$= \bar{E}\left(j\omega C + \frac{\cos\varphi - j\sin\varphi}{|\dot{z}|}\right) = \frac{\bar{E}\cos\varphi}{|\dot{z}|}$$



$\bar{I}'_L$ in FASE con $\bar{E}$ (**GENERALMENTE** $\cos\varphi' \cong 0{,}9$)

$$P_g + P_z = 0$$

$$Q_g + Q_c + Q_z = 0$$



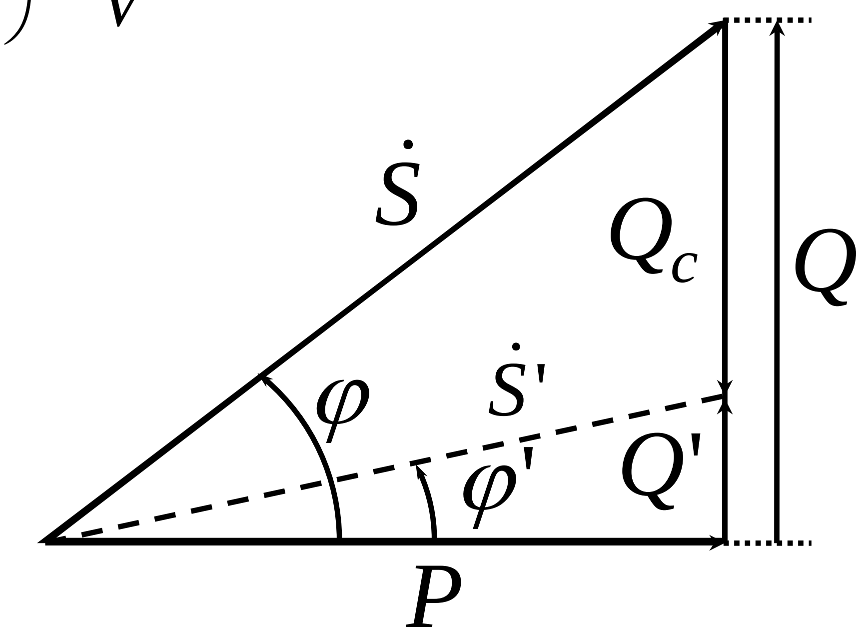
$$I_L' \cos\varphi' = I_L \cos\varphi \quad \Rightarrow \quad I_L' = I_L \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'}$$

$$I_c = I_L \sin\varphi - I_L' \sin\varphi' = I_L \sin\varphi - I_L \cos\varphi \cdot \tan\varphi'$$

$$I_c = I_L \cos\varphi \cdot \left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} - \frac{\cos\varphi \tan\varphi'}{\cos\varphi} \right) = \frac{V}{V} I_L \cos\varphi \cdot (\tan\varphi - \tan\varphi')$$

$$I_c = \omega C V = \frac{P \cdot (\tan\varphi - \tan\varphi')}{V}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{C = \frac{P \cdot (\tan\varphi - \tan\varphi')}{\omega V^2}}$$



Tra i carichi che occorre rifasare:

- MOTORI ASINCRONI
- LAMPADE A SCARICA CON REATTORE DI STABILIZZAZIONE
- FORNI AD INDUZIONE
- etc

Esempio

Lampada fluorescente da 20 **W** $\rightarrow$ $C \cong$ 5 **mF**
Lampata fluorescente da 100 **W** $\rightarrow$ $C \cong$ 18 **mF**

MASSIMO TORNACONTO PER L'ENTE $\quad$ $\cos\varphi = 0{,}95 \div 0{,}97$

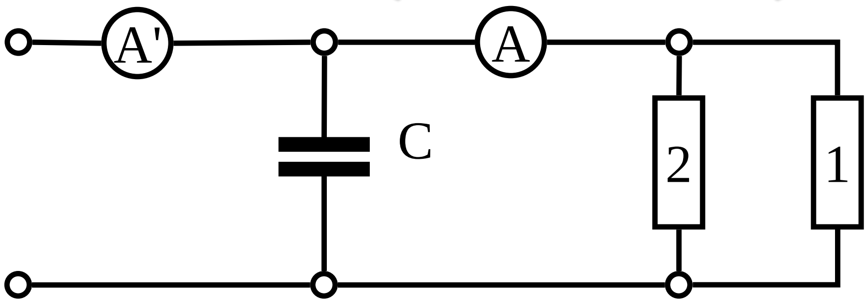
Norme: Per P $\geq$ 15 **kW**

$\cos\varphi \geq 0{,}9$ Nessuna Penale

$0{,}7 \geq \cos\varphi \geq 0{,}9$ Penale: $f\left(\int Qdt / \int Pdt\right)$ nel periodo di fatturazione

$\cos\varphi \leq 0{,}7$ Obbligo di Rifasamento

ESEMPIO (Rifasamento)



Si valuti il fattore di potenza complessivo cosφ_t e il valore efficace della corrente totale per i carichi 1 e 2, alimentati con una tensione di 500 V alla frequenza industriale di 50 Hz.

Si rifasi eventualmente il carico a cos $\varphi'_t = 0{,}95$ e si valuti l'indicazione dell'ampermetro A' dopo il rifasamento. Dati: P_1 = 10 **kW** , Q_1 = 10 **kVAR** , Q_2 = 8 **kVAR** , cos $\varphi_2 = 0{,}5$

$$P_2 = \frac{Q_2}{\tan\varphi_2} = \frac{8000}{1{,}732} = 4619\ \mathbf{W} \qquad P_t = P_1 + P_2 = 14619\ \mathbf{W} \qquad Q_t = Q_1 + Q_2 = 1800\ \mathbf{VAR}$$

$$S_t = \sqrt{P_t^2 + Q_t^2} = \sqrt{14619^2 + 18000^2} = 23189\ \mathbf{VA} \Rightarrow I_t = S_t / U = 46{,}38\ \mathbf{A}$$

$$\cos\varphi_t = \cos(\arctan Q_t / P_t) = \cos(\arctan(18000/14619)) = 0{,}63$$ occorre rifasare a cosφ = 0,95:

$$C = P_t \frac{\tan\varphi - \tan\varphi'}{\omega U^2} = 4619 \cdot \frac{1{,}23\text{-}0{,}329}{2\pi \cdot 50 \cdot 500^2} = 168\ \mu\mathbf{F}$$ dopo il rifasamento:

$$Q'_t = Q_t - Q_C = 18000 - \omega C U^2 = 18000 - 13195 = 4805\ \mathbf{VAR}\ \mathbf{;}\ S'_t = \sqrt{14619^2 + 4805^2} = 15389\ \mathbf{VA}$$

$$I'_t = \frac{S'_t}{U} = \frac{15389}{500} = 30{,}78\ \mathbf{A}$$ (Lettura dell'ampermetro A')

ADATTAMENTO ENERGETICO

Quali sono le condizioni nelle quali $\dot{z}_C$ assorbirà la max potenza attiva?

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\dot{z}_g + \dot{z}_C}; \quad \bar{V} = \frac{\bar{E} \cdot \dot{z}_C}{\dot{z}_g + \dot{z}_C}; \quad \dot{z}_C = R_C + jX_C;$$

$$\dot{S} = P + jQ = \bar{V} \cdot \bar{I}^* = \frac{\bar{E} \cdot \dot{z}_C}{\dot{z}_g + \dot{z}_C} \cdot \frac{\bar{E}^*}{\left(\dot{z}_g + \dot{z}_C\right)^*} = \frac{\left|\bar{E}\right|^2}{\left|\dot{z}_g + \dot{z}_C\right|^2} \cdot \dot{z}_C$$

$$P = \Re e\left\{\dot{S}\right\} = \frac{\left|\bar{E}\right|^2}{\left|\dot{z}_g + \dot{z}_C\right|^2} \cdot R_C = \frac{E^2}{\left(R_g + R_C\right)^2 + \left(X_g + X_C\right)^2} \cdot R_C$$

Max P:

Poiché $X_C \lessgtr 0 \rightarrow X_C + X_g = 0 \rightarrow X_C = \boxed{-X_g}$

$$P = \frac{E^2}{\left(R_g + R_C\right)^2} \cdot R_C \Rightarrow$$

$$\frac{dP}{dR_C} = E^2 \frac{\left(R_g + R_C\right)^2 - 2R_C\left(R_g + R_C\right)}{\left(R_g + R_C\right)^4} = E^2 \frac{R_g + R_C - 2R_C}{\left(R_g + R_C\right)^3} = E^2 \frac{R_g - R_C}{\left(R_g + R_C\right)^3}$$

$$\frac{dP}{dR_C} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_C = R_g \quad \Rightarrow \boxed{\dot{Z}_C = \dot{Z}_g^*}$$

TEOREMA DEL MASSIMO TRASFERIMENTO DI POTENZA