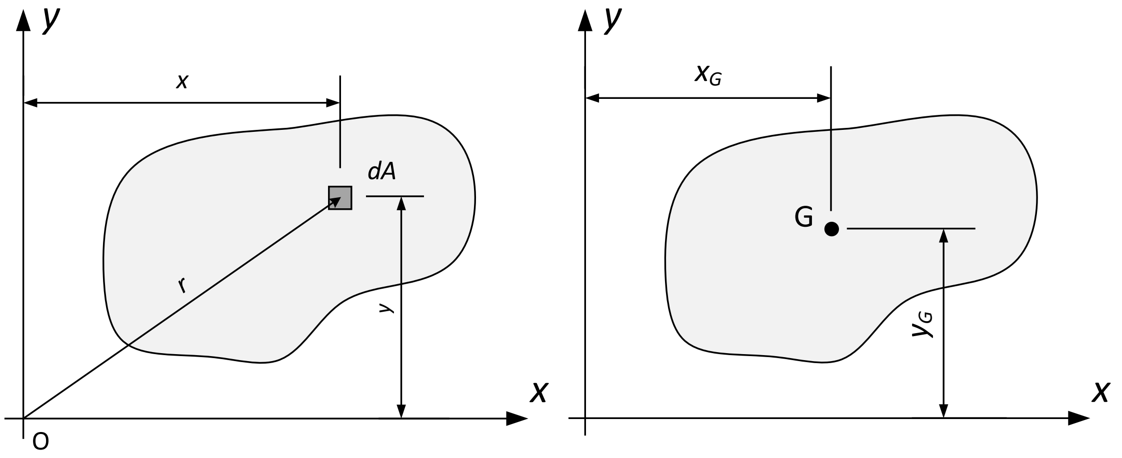
RICHIAMI DI GEOMETRIA DELLE AREE



Baricentro di un'area

Coordinate del baricentro *G* di un'area

$$x_G = \frac{\int_A x\, dA}{A}$$

$$y_G = \frac{\int_A y\, dA}{A}$$

Momento statico di un'area rispetto ad un asse

Momento statico dell'area *A* rispetto all'asse x $\quad S_x = \int_A y\, dA$

Momento statico dell'area *A* rispetto all'asse y $\quad S_y = \int_A x\, dA$

I momenti statici di un'area rispetto ad una retta possono essere positivi, negativi o nulli

Se è nota la posizione del baricentro di un area, i momenti statici rispetto ad un qualunque sistema di assi *x-y* possono essere ottenuti moltiplicando l'area *A* per le coordinate del suo baricentro rispetto al sistema di assi *x-y*.

Momento statico dell'area A rispetto all'asse *x* $\quad S_x = A \cdot y_G$

Momento statico dell'area A rispetto all'asse *y* $\quad S_y = A \cdot x_G$

Risulta quindi che il momento statico di un area rispetto a qualunque passante per il baricentro dell'area (retta baricentrica) è nullo.

Momento d’inerzia di un’area rispetto ad un asse

Momento d’inerzia dell’area *A* rispetto all’asse x $$J_x = \int_A y^2 \, dA$$

Momento d’inerzia dell’area *A* rispetto all’asse y $$J_y = \int_A x^2 \, dA$$

I momenti d’inerzia di un’area rispetto ad una retta sono quindi necessariamente positivi.

Momento d’inerzia centrifugo di un’area rispetto al sistema di assi *x* - *y*

Momento d’inerzia centrifugo dell’area *A* rispetto al sistema di assi *x*-*y*. $$J_{xy} = \int_A xy \, dA$$

I momenti d’inerzia centrifughi di un’area rispetto ad un sistema d’assi *x*-*y* possono essere positivi, negativi o nulli.

Se uno dei due assi (l’asse *x* o l’asse *y*) è un’asse di simmetria dell’area, il momento d’inerzia centrifugo J_{xy} dell’area è nullo

Momento polare di un’area rispetto ad un punto

Momento polare dell’area *A* rispetto al punto (polo) O $$J_O = \int_A r^2 \, dA$$

I momenti polari di un’area rispetto ad un punto sono necessariamente positivi.

Momenti d'inerzia di trasporto

Se è noto il momento d'inerzia di un'area *A* rispetto ad una retta <u>baricentrica</u> *x'*, è possibile determinare il momento d'inerzia dell'area A rispetto ad una qualunque <u>retta parallela</u> *x* mediante la seguente relazione

$$J_x = J_{x'} + A \cdot d_y^2$$

dove

$J_{x'}$ è il momento d'inerzia dell'area *A* rispetto alla retta <u>baricentrica</u> *x*'

J_x è il momento d'inerzia dell'area *A* rispetto alla retta *x* (parallela alla retta *x'*)

d_y è la distanza tra le rette *x* ed *x*'

Analogamente

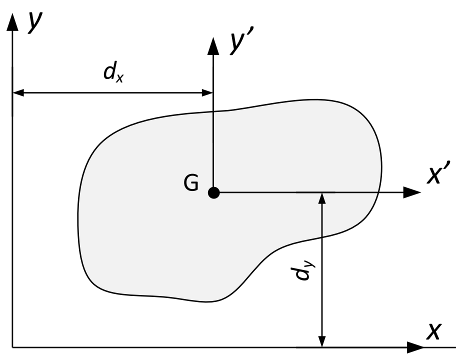
$$J_y = J_{y'} + A \cdot d_x^2$$

dove

$J_{y'}$ è il momento d'inerzia dell'area *A* rispetto alla retta <u>baricentrica</u> *y*'

J_y è il momento d'inerzia dell'area *A* rispetto alla retta *y x* (parallela alla retta *y'*)

d_x è la distanza tra le rette *y* ed *y'*



Una relazione analoga vale per il momento d'inerzia centrifugo:

$$J_{xy} = J_{x'y'} + A \cdot d_x \cdot d_y$$

dove

$J_{x'y'}$ è il momento d'inerzia centrifugo dell'area *A* rispetto al sistema d'assi baricentrico *x'*-*y'*

J_{xy} è il momento d'inerzia dell'area *A* rispetto al sistema d'assi *x*-*y* (parallelo al sistema *x*-*y*)

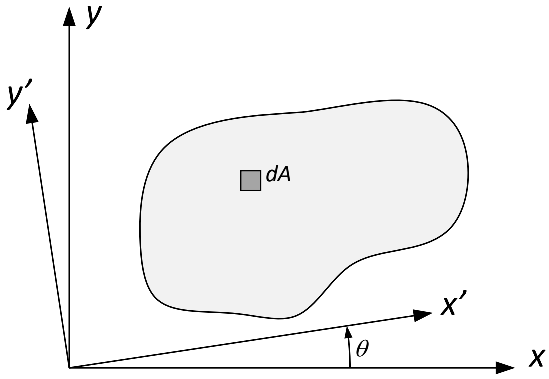
d_x è la distanza tra le rette *y* ed *y'*

d_yè la distanza tra le rette *x* ed *x'*

I momenti d'inerzia rispetto ad una retta di aree composte da aree semplici (rettangoli, triangoli, semicerchi, etc.) possono essere calcolati sommando i momenti d'inerzia delle singole aree rispetto alla retta. In particolare, se la sezione ha delle aree "vuote", il momento d'inerzia della area composta può essere calcolato sottraendo i momenti d'inerzia delle aree vuote dal momento d'inerzia della area completa che include i vuoti.

In maniera analoga si può procedere per il calcolo del momento d'inerzia centrifugo rispetto ad un sistema di assi.

Momenti principali d'inerzia



Se sono noti i momenti d'inerzia rispetto ad un sistema d'assi *x*-*y*, i momenti d'inerzia e d'inerzia centrifugo rispetto ad un sistema di assi *x'*-*y'* sono i seguenti

$$J_{x'} = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} cos(2\theta) - J_{xy}\, sin(2\theta)$$

$$J_{y'} = \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{J_x - J_y}{2} cos(2\theta) + J_{xy}\, sin(2\theta)$$

$$J_{x'y'} = \frac{J_x - J_y}{2}\, sin(2\theta) + J_{xy}\, cos(2\theta)$$

Gli <u>assi principali d'inerzia</u> dell'area sono le due rette x' ed y' per le quali i momenti d'inerzia dell'area ($J_{x'}$ e $J_{y'}$) sono massimi e minimi, ed il momento d'inerzia centrifugo è nullo ($J_{x'y'} = 0$)

L'orientazione degli assi principali d'inerzia è ricavabile dall'equazione

$$tan(2\theta) = -\frac{J_{xy}}{\frac{(J_x - J_y)}{2}}$$

Tale equazione ha due radici, distanti tra loro di 90°, che definiscono le direzioni dei due assi principali d'inerzia.

I momenti d'inerzia principali (rispetto ai due assi principali d'inerzia) possono essere ricavati dall'equazione:

$$\left.\begin{matrix} J_{max} \\ J_{min} \end{matrix}\right\} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}$$

Se un'area ha un asse di simmetria, tale asse e l'asse ad esso perpendicolare sono assi principali d'inerzia dell'area.

ESEMPIO DI CALCOLO

Determinare i momenti principali d'inerzia della sezione di figura 1.

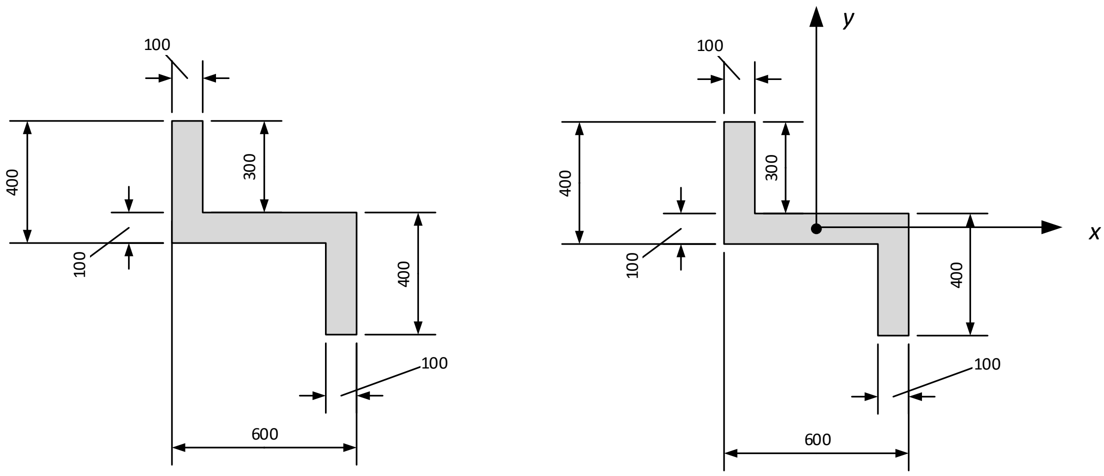


Figura 1

La sezione può essere considerata composta dalle tre aree rettangolari evidenziate in fig. 2 (rettangoli ①, ② e ③), dove

$A_1 = A_3 = 300 \cdot 100 \text{ mm}^2 = 30000 \text{ mm}^2$

$A_2 = 600 \cdot 100 \text{ mm}^2 = 60000 \text{ mm}^2$

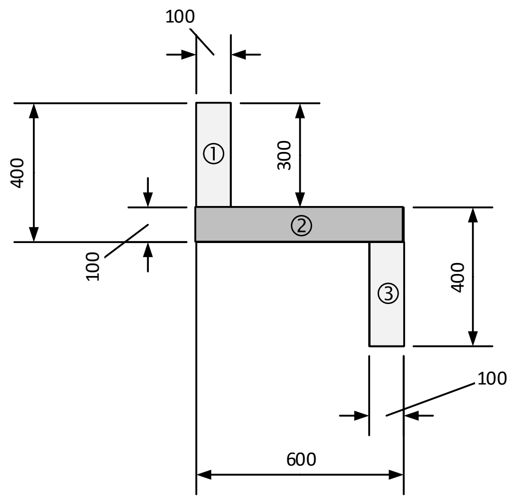


Figura 2

Noti i baricentri delle singole aree, il baricentro della sezione completa avrà coordinate

$$x_G = \frac{30000 \cdot 250 - 30000 \cdot 250}{2 \cdot 30000 + 60000} = 0\ mm$$

$$y_G = \frac{30000 \cdot 200 - 30000 \cdot 200}{2 \cdot 30000 + 60000} = 0\ mm$$

come intuibile dalla simmetria polare della sezione rispetto al baricentro G.

- Calcolo dei momenti d'inerzia rispetto all'asse *x* ed all'asse *y*:

$$J_x = 2\left(\frac{100 \cdot 300^3}{12} + 30000 \cdot 200^2\right) + \frac{600 \cdot 100^3}{12} = 2.9E9\ mm^4$$

$$J_y = 2\left(\frac{300 \cdot 100^3}{12} + 30000 \cdot 250^2\right) + \frac{100 \cdot 600^3}{12} = 5.6E9\ mm^4$$

- Calcolo del momento d'inerzia centrifugo rispetto agli assi *x*-*y*:

Per ogni area rettangolare (①, ② e ③) possiamo considerare un sistema di assi *x'*-*y'* passante per il baricentro di ogni rettangolo e parallelo alle rette *x*-*y*.

A causa della simmetria delle singole aree rettangolari rispetto alle rette *x'*-*y'* passanti per il loro baricentro, il momento d'inerzia centrifugo di ogni rettangolo rispetto alle rispettive rette *x'*-*y'* sara' nullo.

Avremo così, per le singole aree rettangolari:

Rettangolo ①

$$J_{xy} = J_{x'y'} + A_1 d_x d_y = 0 + 30000 \cdot (-250) \cdot 200 = -1.5E9\ mm^4$$

Rettangolo ②

$$J_{xy} = 0$$

Rettangolo ③

$$J_{xy} = J_{x'y'} + A_1 d_x d_y = 0 + 30000 \cdot 250 \cdot (-200) = -1.5E9\ mm^4$$

Il momento d'inerzia centrifugo della sezione completa è quindi

$$J_{xy} = -1.5E9 - 1.5E9 = -3.0E9\ mm^4$$

L'orientazione degli assi principali d'inerzia è ricavabile dall'equazione

$$tan(2\theta) = -\frac{J_{xy}}{\frac{(J_x - J_y)}{2}} = -\frac{-3.0E9}{\frac{(2.9E9-5.6E9)}{2}} = -2.22$$

da cui

$2\theta = -65.8°$
$2\theta = 114.2°$

$\theta = -32.9°$
$2\theta = 57.1°$

Gli assi principali d'inerzia della sezione (x' ed y') sono riportati in figura 3

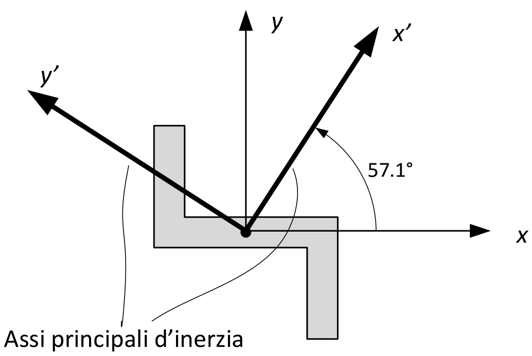


Figura 3

I momenti principali d'inerzia (rispetto alle rette x' ed y' di figura 3) valgono quindi

$$\left.\begin{matrix} J_{max} \\ J_{min} \end{matrix}\right\} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2} = \frac{2.9E9 + 5.6E9}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2.9E9 - 5.6E9}{2}\right)^2 + (-3E9)^2}$$

$J_{max} = 7.54E9\ mm^4$
$J_{min} = 0.96E9\ mm^4$

Tramite le equazioni

$$J_{x'} = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} cos(2\theta) - J_{xy}\ sin(2\theta)$$

$$J_{y'} = \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{J_x - J_y}{2} cos(2\theta) + J_{xy}\ sin(2\theta)$$

è possibile infine verificare, come ricavabile intuitivamente dall'osservazione della sezione, che il momento d'inerzia massimo è quello rispetto all'asse *x'* (θ = 57.1°), cioe' che

$J_{max} = J_{x'} = 7.54E9\ mm^4$
$J_{min} = J_{y'} = 0.96E9\ mm^4$