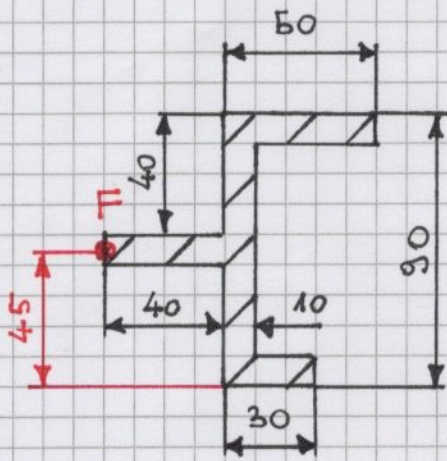


# CALCOLO DEGLI SFORZI

## - PRESSO FLESSIONE ECCENTRICA -

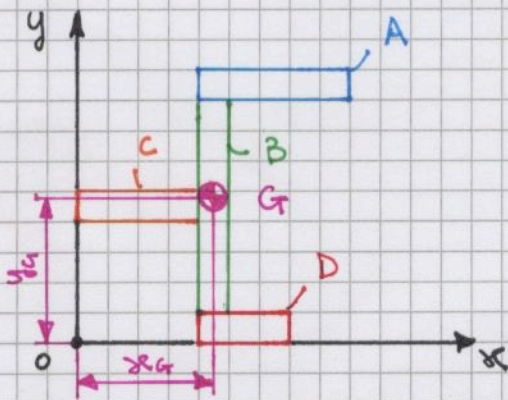
①



$F = 100 \text{ kN}$  - ENTRANTE NEL  
PIANO DEL  
FOGLIO

Spessore delle sezioni costante  
e pari a 10 mm.

### • CALCOLO DEL BARICENTRO



COORDINATE DEI BARICENTRI  
DELLE SINGOLE SEZIONI

{x, y}

$$A \begin{cases} x_{GA} = 65 \text{ mm} \\ y_{GA} = 85 \text{ mm} \end{cases}$$

$$B \begin{cases} x_{GB} = 45 \text{ mm} \\ y_{GB} = 45 \text{ mm} \end{cases}$$

$$C \begin{cases} x_{GC} = 20 \text{ mm} \\ y_{GC} = 45 \text{ mm} \end{cases}$$

$$D \begin{cases} x_{GD} = 55 \text{ mm} \\ y_{GD} = 5 \text{ mm} \end{cases}$$

$$A_A = 50 \cdot 10 = 500 \text{ mm}^2$$

$$A_B = 70 \cdot 10 = 700 \text{ mm}^2$$

$$A_C = 40 \cdot 10 = 400 \text{ mm}^2$$

$$A_D = 30 \cdot 10 = 300 \text{ mm}^2$$

$$A_{\text{Tot}} = A = 1900 \text{ mm}^2$$

### CALCOLO DEI MOMENTI STATICI

$$\begin{aligned} S_x &= A_A (y_{GA}) + A_B (y_{GB}) + A_C (y_{GC}) + A_D (y_{GD}) = \\ &= 500(85) + 700(45) + 400(45) + 300(5) = \\ &= 93500 \text{ mm}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_y &= A_A (x_{GA}) + A_B (x_{GB}) + A_C (x_{GC}) + A_D (x_{GD}) = \\ &= 500(65) + 700(45) + 400(20) + 300(55) = \\ &= 88500 \text{ mm}^3 \end{aligned}$$

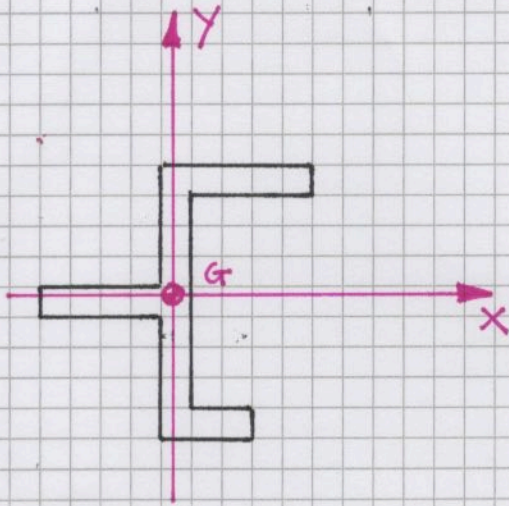
$$\underline{x_G} = \frac{S_y}{A} = \frac{88500}{1900} = \underline{46.5789 \text{ mm}} \quad \underline{y_G} = \frac{S_x}{A} = \underline{49.2105 \text{ mm}}$$



## • TRASLAZIONE ASSI

(2)

È opportuno sommare le coordinate dei centri delle singole sezioni rispetto ad un sistema baricentrico  $\{G, x, y\}$



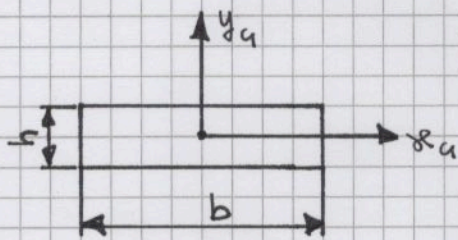
$$A \begin{cases} X_{GA} = x_{GA} - x_G = 18.4211 \text{ mm} \\ Y_{GA} = y_{GA} - y_G = 35.7895 \text{ mm} \end{cases}$$

$$B \begin{cases} X_{GB} = -1.5783 \text{ mm} \\ Y_{GB} = -4.2105 \text{ mm} \end{cases}$$

$$C \begin{cases} X_{GC} = -26.5789 \text{ mm} \\ Y_{GC} = -4.2105 \text{ mm} \end{cases}$$

$$D \begin{cases} X_{GD} = 8.4211 \text{ mm} \\ Y_{GD} = -44.2105 \text{ mm} \end{cases}$$

## • CALCOLO DEI MOMENTI DI INERZIA BARICENTRICI DELLE SINGOLE SOTTO SEZIONI

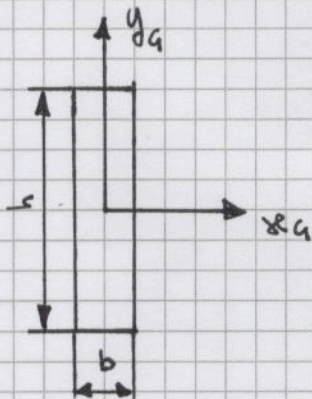


$$I_{x_G} = \frac{bh^3}{12}, \quad I_{y_G} = \frac{hb^3}{12}, \quad I_{xy_G} = 0$$

$$A) I_{x_A} = 4166.6667 \text{ mm}^4 \quad I_{y_A} = 104166.6667 \text{ mm}^4$$

$$C) I_{x_C} = 3333.3333 \text{ mm}^4 \quad I_{y_C} = 53333.3333 \text{ mm}^4$$

$$D) I_{x_D} = 2500 \text{ mm}^4 \quad I_{y_D} = \frac{22500}{6666.6667} \text{ mm}^4$$



$$B) I_{x_B} = 285833.3333 \text{ mm}^4 \quad I_{y_B} = 5833.3333 \text{ mm}^4$$

$$I_{x_G} = \frac{bh^3}{12}, \quad I_{y_G} = \frac{hb^3}{12}, \quad I_{xy_G} = 0$$



MOMENTI D' INERZIA BARICENTRICI  $\{GXY\}$  (3)

$$\begin{aligned}
 I_x &= I_{xA} + A_A (Y_{GA})^2 + I_{xB} + A_B (Y_{GB})^2 + I_{xC} + A_C (Y_{GC})^2 + I_{xD} + A_D (Y_{GD})^2 = \\
 &= I_{xA} + 500 (35.7895)^2 + I_{xB} + 700 (-4.2105)^2 + I_{xC} + 400 (-4.2105)^2 + \\
 &\quad + I_{xD} + 300 (-44.2105)^2 = \\
 &= 1'542'149,1228 \text{ mm}^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_y &= I_{yA} + A_A (X_{GA})^2 + I_{yB} + A_B (X_{GB})^2 + I_{yC} + A_C (X_{GC})^2 + I_{yD} + A_D (X_{GD})^2 = \\
 &= I_{yA} + 500 (18.4211)^2 + I_{yB} + 700 (-1.5783)^2 + I_{yC} + 400 (-26.5783)^2 + I_{yD} + \\
 &\quad + A_D 300 (8.4211)^2 = \\
 &= ~~645'263,1573 \text{ mm}^4~~ 661'096.4912 \text{ mm}^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{xy} &= I_{xyA} + A_A (X_{GA})(Y_{GA}) + I_{xyB} + A_B (X_{GB})(Y_{GB}) + I_{xyC} + A_C (X_{GC})(Y_{GC}) + \\
 &\quad + I_{xyD} + A_D (X_{GD})(Y_{GD}) = \\
 &= 500 (18.4211)(35.7895) + 700 (-1.5783)(-4.2105) + 400 (-26.5783)(-4.2105) + \\
 &\quad + 300 (8.4211)(-44.2105) = \\
 &= 267'368.4211 \text{ mm}^4
 \end{aligned}$$

$I_x > I_y$      $I_{xy} > 0$     COSTRUZIONE CERCHIO DI MOHR

$$C = \frac{I_x + I_y}{2} = ~~4'093'706,1404 \text{ mm}^4~~ 1'101'622.8070 \text{ mm}^4$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{(I_y - I_x)^2 + (2I_{xy})^2} = ~~522'098,6316 \text{ mm}^4~~ 515'314.7654 \text{ mm}^4$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \right) = ~~15.4020^\circ~~ - 15.6274^\circ$$



# CERCHIO DI MOHR DELLE INERZIE

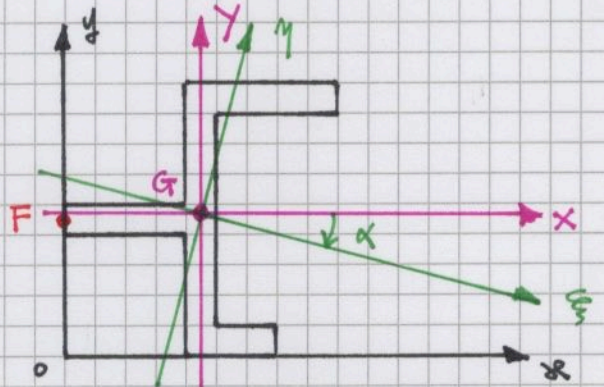
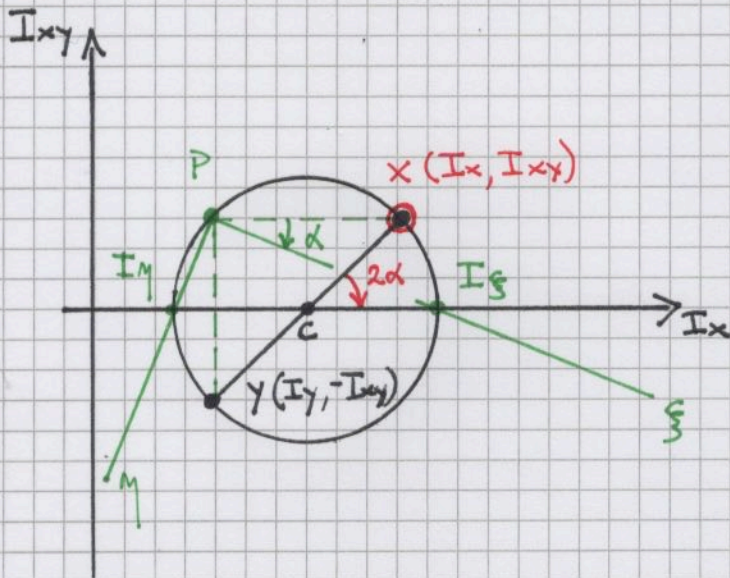
(4)

$$I_{\xi} = C + R = 1616837.5725 \text{ mm}^4$$

MOMENTI PRINCIPALI  
DI INERZIA

$$I_{\eta} = C - R = 586308.0416 \text{ mm}^4$$

$$I_{\xi\eta} = 0$$



## CALCOLO DEGLI SFORZI

Per calcolare gli sforzi ~~che~~ a cui è sottoposta la sezione è necessario trasportare le forze  $F$  nel baricentro  $G$ , tenendo conto del momento di trasporto lungo gli assi principali  $\xi$  ed  $\eta$ .

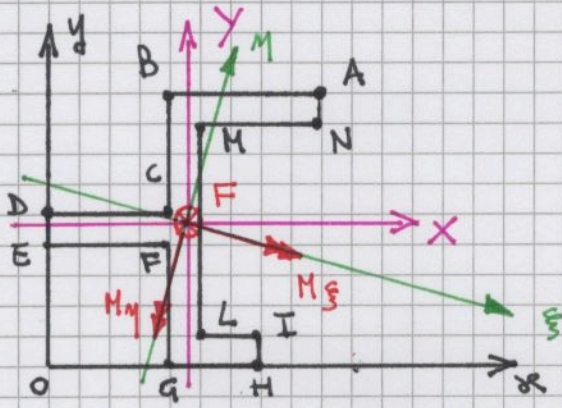
Le coordinate del punto in cui agisce  $F$  nel sistema  $\{oxy\}$  sono:

$$\begin{cases} x_F = 0 \\ y_F = 45 \text{ mm} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{È immediato passare alle coordinate} \\ \text{nel sistema baricentrico } \{Gxy\} \end{array}$$

$\begin{cases} x_F = x_F - x_G = -46.5789 \text{ mm} \\ y_F = y_F - y_G = -4.2105 \text{ mm} \end{cases}$  Per passare alle coordinate nel sistema principale  $\{G\xi\eta\}$  è necessario utilizzare la matrice di rotazione degli assi intorno a  $G$  (oppotante di  $S$  al sistema baricentrico che a quello principale).

$$\begin{Bmatrix} \xi_F \\ \eta_F \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}}_{R_z} \begin{Bmatrix} x_F \\ y_F \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.9630 & -0.2694 \\ 0.2694 & 0.9630 \end{bmatrix}}_{R_z} \begin{Bmatrix} -46.5789 \\ -4.2105 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -43.7229 \\ -16.6023 \end{Bmatrix}$$





$$M_{\xi} = F | \eta_F | = 100 \text{ E3 } (16.6023) = 1660233,4306 \text{ Nmm}$$

$$M_{\eta} = F | \xi_F | = 100 \text{ E3 } (43.7229) = 4372287.0050 \text{ Nmm}$$

Utilizzando la formula di Navier e la definizione di sforzo normale possiamo

definire completamente gli sforzi  $\sigma_z$ .

$$\sigma_z = \underbrace{+\frac{M_{\xi} \cdot \eta}{I_{\xi}}}_{\text{contributo } M_{\xi}} + \underbrace{\frac{M_{\eta} \cdot \xi}{I_{\eta}}}_{\text{contributo } M_{\eta}} - \underbrace{\frac{F}{A}}_{\text{contributo } F}$$

Si come siamo in caso lineare vale la sovrapposizione degli effetti che ci conduce a questa

scrittura che regge il problema delle compressioni eccentriche. Si noti che per valori positivi di  $\eta$  ( $\eta > 0$ ) il momento  $M_{\xi}$  tende le fibre della sezione, quindi il contributo  $M_{\xi}$  è preceduto dal segno +. Stesso caso vale per  $M_{\eta}$ . La forza  $F$  è di compressione, quindi dareà luogo, per definizione, ad un contributo negativo.

CALCOLO ASSE NEUTRO

Per trovare l'equazione dell'asse neutro (linea dei punti che non subiscono deformazioni delle fibre) è sufficiente imporre che  $\sigma$  sia nullo.

$$\frac{M_{\xi} \eta}{I_{\xi}} + \frac{M_{\eta} \xi}{I_{\eta}} - \frac{F}{A} = 0 \quad \eta = \underbrace{-\left(\frac{M_{\eta} I_{\xi}}{I_{\eta} M_{\xi}}\right)}_m \xi + \underbrace{\frac{F I_{\xi}}{A M_{\xi}}}_q$$

L'asse neutro è una RETTA

$$m = -7.2628$$

$$q = +51.2530 \text{ mm}$$

$$\eta = m \xi + q$$



# CALCOLO DEGLI SFORZI (PUNTI CARATTERISTICI)

⑥

Si vogliono calcolare gli sforzi in alcuni punti caratteristici. Prima è necessario individuare le coordinate di questi rispetto al sistema  $\{G \xi \eta\}$ .

Coordinate nel sistema  $\{oxy\}$  -  $\{GXY\}$  -  $\{G\xi\eta\}$

A (90, 90)	A (43.4211, 40.7895)	A (30.8281, 50.9784)
B (40, 90)	B (-6.5789, 40.7895)	B (-17.3236, 37.5094)
C (40, 50)	C (-6.5789, 0.7895)	C (-6.5484, -1.0119)
D (0, 50)	D (-46.5789, 0.7895)	D (-45.0688, -11.7872)
E (0, 40)	E (-46.5789, -9.2105)	E (-42.3760, -21.4175)
F (40, 40)	F (-6.5789, -9.2105)	F (-3.8546, -10.6423)
G (40, 0)	G (-6.5789, -43.2105)	G (6.9206, -49.1636)
H (70, 0)	H (23.4211, -49.2105)	H (35.8116, -41.0822)
I (70, 10)	I (23.4211, -39.2105)	I (33.1178, -31.4518)
L (50, 10)	L (3.4211, -39.2105)	L (13.8571, -36.8335)
M (50, 80)	M (3.4211, 30.7895)	M (-4.8995, 30.5729)
N (90, 80)	N (43.4211, 30.7895)	N (33.5219, 41.3481)

Calcolo degli sforzi punto per punto

$$\sigma_A = \frac{M_\xi \eta_A}{I_\xi} + \frac{M_\eta \xi_A}{I_\eta} - \frac{F}{A} = +229.6066 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = -143.3057 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C = -102.5043 \text{ MPa}$$

$$\sigma_D = -400.8341 \text{ MPa}$$

$$\sigma_E = -380.6337 \text{ MPa}$$

$$\sigma_F = -92.3033 \text{ MPa}$$

$$\sigma_G = -51.5025 \text{ MPa}$$

$$\sigma_H = +172.2449 \text{ MPa}$$

$$\sigma_I = +162.0445 \text{ MPa}$$

$$\sigma_L = +12.8796 \text{ MPa}$$

$$\sigma_M = -58.5229 \text{ MPa}$$

$$\sigma_N = 239.8069 \text{ MPa}$$

