



*Politecnico di Milano
Istituto di
Idraulica e Costruzioni Idrauliche*

Correnti permanenti

con portata variabile lungo il percorso

G. Noseda

INDICE

GENERALITA'	pag. 1
CORRENTI A PELO LIBERO.....	" 3
A - Canali con portata crescente.....	" 6
B - Canali con portata decrescente.....	" 14
Sfioratore laterale.....	" 19
Griglia di fondo.....	" 23
CORRENTI IN PRESSIONE.....	" 28
A - Correnti con portata crescente.....	" 28
B - Correnti con portata decrescente.....	" 39
APPENDICE - Caratteristiche della spinta totale.....	" 47
NOTE BIBLIOGRAFICHE	" 51

GENERALITA'

Diversi e talvolta di rilevante importanza sono i manufatti degli impianti idraulici percorsi da una corrente di moto permanente con portata progressivamente crescente o decrescente lungo il percorso.

Nei campo delle correnti a pelo libero, il canale collettore delle acque tracimate da uno sfioratore, il canale di fuga di una centrale idroelettrica al quale affluiscono separatamente gli scarichi delle diverse turbine, e se si vuole la grondata che raccoglie le acque provenienti dal piovante sotteso, sono alcuni fra gli esempi tipici di opere nelle quali la corrente subisce un graduale aumento della portata, mentre il canale munito, lungo una o ambedue le sponde, di uno sfioratore longitudinale, il canale un tratto del cui fondo è costituito da una griglia o da una lastra comunque forata, rappresentano alcune delle situazioni più frequenti di correnti con portata progressivamente decrescente.

Situazioni analoghe si verificano per le correnti in pressione: i tubi forati di drenaggio oppure gli acquedotti longitudinali per lo scarico delle conche di navigazione convogliano correnti in pressione con portata che aumenta lungo il percorso; i tubi forati impiegati nell'irrigazione a pioggia, gli acquedotti longitudinali per l'alimentazione delle conche di navigazione sono invece percorsi da correnti con portata continuamente decrescente.

Lo studio dei caratteri del processo di movimento proprio delle diverse situazioni di correnti siffatte appare essenziale sia per il dimensionamento di un manufatto in grado di erogare o di raccogliere prefissati quantitativi d'acqua sotto determinate condizioni, sia per verificare il funzionamento di un'opera esistente.

Fra le due grandi categorie delle correnti con portata decrescente e con portata crescente (siano esse in pressione o a pelo libero) intercorrono alcune differenze sostanziali che vale la pena di porre subito in evidenza.

L'erogazione di portata avviene, nella generalità delle pratiche si-

tuazioni, attraverso processi di efflusso (da luci o da stramazzi) i quali per la loro stessa natura non perturbano sensibilmente il movimento della corrente principale: questa perciò prosegue con dissipazioni poco diverse da quelle che si verificherebbero se la diminuzione di portata non ci fosse.

L'immissione di nuova acqua in una corrente determina invece, non appena gli apporti raggiungono una certa entità, una intensa agitazione della corrente stessa, agitazione alla quale corrisponde la dissipazione di gran parte dell'energia cinetica dell'acqua immessa, che perciò acquista parte o l'intera quantità di moto a spese della corrente principale.

In linea generale perciò nelle correnti a portata decrescente l'energia dell'unità di peso subisce lungo il percorso variazioni modeste dello stesso ordine di grandezza di quelle di una corrente di moto uniforme; nelle correnti a portata crescente l'energia dell'unità di peso diminuisce assai più intensamente.

Sulla base di queste caratteristiche fondamentali sono stati ormai condotti numerosi studi teorici e sperimentali: da quelli fondamentali che hanno considerato gli aspetti essenziali delle situazioni tipiche, alle ricerche di affinamento che hanno messo in conto anche gli elementi di secondaria importanza che possono influenzare il processo di movimento nelle più svariate condizioni pratiche.

In queste brevi note ci proponiamo di esporre soltanto i risultati principali degli studi finora svolti, rimandando alle ricerche originali per gli aspetti di dettaglio.

Dall'impostazione generale dei diversi problemi verranno dedotte le caratteristiche fondamentali dei processi relativi alle situazioni più semplici che, d'altra parte sono anche quelle più frequentemente adottate nelle pratiche applicazioni.

La trattazione sarà condotta separatamente per le correnti a pelo libero e per quelle in pressione.

CORRENTI A PELO LIBERO

La trattazione farà esclusivo riferimento al caso di un canale prismatico con pendenza di fondo uniforme e sufficientemente piccola da poter considerare ovunque le sezioni trasversali come piane e verticali, con distribuzione idrostatica delle pressioni: la corrente cioè possa in ogni suo tratto (eccettuata soltanto l'eventualità di un risalto) essere trattata come lineare, o gradualmente variata.

Al riguardo della portata si ammetterà che essa possa comunque variare lungo il percorso ma sempre con continuità.

Inoltre si farà sempre l'ipotesi che la distribuzione delle velocità sia tale da poter ritenere uguali all'unità tanto il coefficiente di ragguglio delle quantità di moto, quanto quello di ragguglio delle altezze cinetiche.

Nella generica sezione di ascissa s (misurata secondo la direzione media del moto) sia:

h [m] la profondità della corrente, contata dal punto più basso del contorno;

A [m²] l'area bagnata;

q [m³/s] la portata;

$V = \frac{q}{A}$ [m/s] la velocità media della corrente;

$\gamma X = \gamma A h_b + \rho q V = \gamma (A h_b + \frac{q^2}{gA})$ [kg] la spinta totale pari alla somma della spinta idrostatica $\gamma A h_b$ (con h_b affondamento del baricentro della sezione) e della quantità di moto $\rho q V$;

$\frac{dq_1}{ds}$ [m³/sm] la portata entrante, per unità di lunghezza del canale;

$\frac{dq_2}{ds}$ [m³/sm] la portata uscente, per unità di lunghezza del canale;

V^* [m/s] la componente secondo la direzione della corrente nel canale della velocità della portata entrante.

Considerato un tronco elementare di corrente (fig. 1) limitato tra due sezioni successive s e $s+ds$ l'equazione delle quantità di moto, appli-

cata al tronco e proiettata nella direzione del moto, fornisce:

$$\gamma \Sigma + \gamma A ds + \rho V^* dq_1 = \gamma (\Sigma + \frac{d\Sigma}{ds} ds) + dR + \rho V dq_2, \quad (1)$$

essendo:

$\gamma A ds$ la componente del peso del volume liquido;

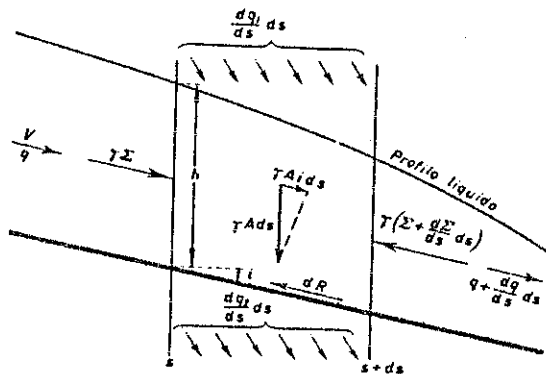


Fig. i

$\rho V^* dq_1$ la componente della quantità di moto della portata dq_1 entrate;

$\rho V dq_2$ la componente della quantità di moto della portata dq_2 uscenti; questa espressione ammette che la componente della velocità della corrente uscente dal canale sia pari a quella media della corrente nel canale. Questa ipotesi appare del tutto conforme al processo reale: infatti se consideriamo la corrente uscente all'atto del distacco dal canale, essa, in quanto fa ancora parte della corrente principale defluente nel canale, non può muoversi, nella direzione del moto, altro che con la velocità propria della corrente nel canale;

dR l'azione resistente della parete, la quale vale $\gamma A J ds$ avendo designato con J la cadente della linea dei carichi totali, per la quale si può assumere, come di consueto, una delle solite espressioni fornite dalle equazioni del moto uniforme.

Se la pendenza del canale è limitata, la resistenza dell'alveo e la componente del peso nella direzione del moto risultano piccole in confronto alle altre forze in gioco; inoltre, almeno quando il fondo non sia orizzontale o in contropendenza, le dette forze sono di verso opposto e pertanto tendono ad equilibrarsi mutuamente; per ambedue queste ragioni è in generale lecito trascurare la loro differenza. La (1) diventa allora:

$$\gamma \frac{d\Sigma}{ds} = \rho V^* \frac{dq_1}{ds} - \rho V \frac{dq_2}{ds};$$

od anche:

$$\frac{d\Sigma}{ds} = \frac{V^* dq_1}{g ds} - \frac{q dq_2}{g A ds}. \quad (2)$$

Il primo termine di questa equazione può scriversi:

$$\frac{d\Sigma}{ds} = \frac{\partial \Sigma}{\partial h} \frac{dh}{ds} + \frac{\partial \Sigma}{\partial q} \frac{dq}{ds}, \quad (a)$$

dove $dq = dq_1 - dq_2$ e la variazione della portata del canale lungo il tronco ds :

Posto:

$$e = h + \frac{q^2}{2gA^2}$$

dove e rappresenta per ogni sezione l'energia specifica, o dell'unità di peso, del liquido in moto, rispetto al fondo della sezione, si ha:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial h} = A \frac{\partial e}{\partial h}; \quad (b)$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial q} = 2A \frac{\partial e}{\partial q} = \frac{2q}{gA}. \quad (c)$$

Tenuto conto delle relazioni (a), (b) e (c) ed esplicitando rispetto a $\frac{dh}{ds}$ la (2) diventa allora:

$$\frac{dh}{ds} = \frac{V^*}{gA} \frac{dq_1}{ds} - (2 \frac{dq_1}{ds} - \frac{dq_2}{ds}) \frac{\partial e}{\partial q}. \quad (3)$$

Questa è l'equazione differenziale del profilo liquido della corrente: da essa, note che siano le caratteristiche geometriche del canale, le

leggi con le quali avvengono l'immissione e l'erogazione della portata, si possono dedurre - in generale con integrazione per differenze finite - tutti i possibili andamenti dei profili liquidi realizzabili nel particolare processo di movimento considerato. Tenute presenti le condizioni della corrente a monte o a valle del tronco di canale con portata variabile lungo il percorso, si potrà in definitiva individuare quale dei sopradetti possibili profili liquidi si verifica in ogni situazione particolare.

Una discussione generale della (3) esula dallo scopo di queste brevi note; ci limiteremo soltanto a prendere in considerazione alcuni casi particolari che più frequentemente si incontrano nella pratica delle costruzioni idrauliche.

A - Canali con portata crescente.

1. Consideriamo il caso di un canale la cui portata varia esclusivamente in conseguenza di una graduale immissione con direzione normale a quella della corrente nel canale stesso: è questa la situazione che di norma si presenta nei collettori delle acque di uno sfioratore; in tal caso è:

$$\frac{dq}{ds} = 0, \quad V'' = 0;$$

l'equazione differenziale del profilo liquido della corrente risulta allora dalla (3):

$$\frac{dh}{ds} = -2 \frac{\frac{\partial e}{\partial q} dq}{\frac{\partial e}{\partial h}}, \quad (4)$$

questa equazione corrisponde anche, come risulta dalla (2), alla assai semplice condizione:

$$\frac{d\Sigma}{ds} = 0,$$

cioè:

$$\Sigma = \text{cost.} \quad (5)$$

Il particolare processo si svolge cioè in modo da mantenere inalterato

il valore della spinta totale per l'intero tronco di canale interessato dall'apporto laterale, qualunque sia la legge con la quale viene effettuata l'immissione di portata: in tale tratto allora la linea delle spinte totali si può ritenere parallela al fondo.

La condizione (5) vale ad individuare facilmente l'andamento del profilo libero; esso risulta determinato quando è noto il valore della costante la quale corrisponde evidentemente alla spinta totale che si mantiene invariata per le successive sezioni del tronco alimentato. Per determinarla basterà, quindi, che siano noti gli elementi del moto (profondità e velocità) per una generica sezione del tronco.

L'andamento qualitativo del profilo libero deriva direttamente dall'esame della curva $q(h)$ correlativa alla condizione $\Sigma = \text{cost}$, di cui è detto in appendice e il cui andamento è indicato nella fig. 2. Poiché la carat-

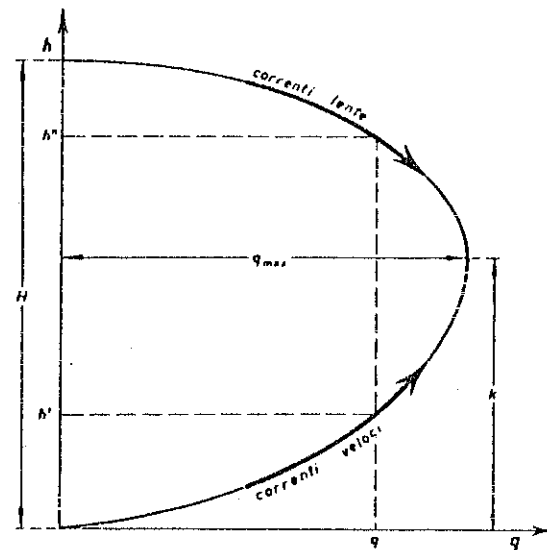


Fig. 2 - Curva $h=h(q)$ per $\Sigma = \text{cost}$.

teristica fondamentale del processo di movimento e l'aumento della portata nella direzione del moto, la semplice osservazione della curva $q(h)$ (fig. 2) indica che, quando la corrente defluente nel canale è lenta, la profondità della corrente diminuisce progressivamente e la corrente è

necessariamente accelerata.

Se invece la corrente è velece, il progressivo aumento della portata si associa ad un continuo aumento della profondità mentre la corrente, almeno per le consuete forme di sezione (come rettangolare, trapezia), è ritardata.

Si nota inoltre che lo stato critico può verificarsi soltanto all'estremità di valle del tronco con apporto laterale; ciò significa che, salvo la formazione di un risalto intermedio, la corrente lungo il tronco interessato dall'immissione è o tutta lenta o tutta veloce.

Le considerazioni ora svolte possono anche ottenersi dalla discussione dell'equazione differenziale (4) del profilo libero; infatti poichè $\frac{\partial e}{\partial q} = \frac{q}{gA^2}$ e $\frac{dq}{ds}$ sono sempre delle quantità positive, il segno di $\frac{dh}{ds}$ dipende soltanto dal segno di $\frac{\partial e}{\partial h}$. Per le ben note proprietà delle correnti lineari a pelo libero si ha:

$$\frac{\partial e}{\partial h} > 0 \quad \text{per le correnti lente;}$$

$$\frac{\partial e}{\partial h} < 0 \quad \text{" " " veloci,}$$

e di conseguenza dalla (4):

$$\frac{dh}{ds} < 0 \quad \text{(profondità decrescenti) per le correnti lente;}$$

$$\frac{dh}{ds} > 0 \quad \text{(profondità crescenti) per le correnti veloci.}$$

2. L'effettivo tracciamento del profilo libero richiede, come già detto, la determinazione del valore della spinta totale che si mantiene invariata lungo il tronco con apporto laterale; questo valore dipende essenzialmente dalle condizioni della corrente a monte o a valle del tronco stesso, come sarà chiaramente dimostrato dall'esame di alcuni casi particolari, attraverso il quale potremo anche meglio comprendere il significato di tutte le constatazioni fatte in precedenza.

Sia dato un canale prismatico di lunghezza indefinita, nel quale defluisca di moto uniforme una certa portata q_0 con la profondità h_0 , e si

voglia stabilire come si modifica il profilo liquido della corrente allorchè lungo il tronco MN (fig. 3) di lunghezza B viene immessa lateralmente o dall'alto (ma in direzione normale alla corrente nel canale) una certa portata complessiva P comunque distribuita con continuità lungo il percorso.

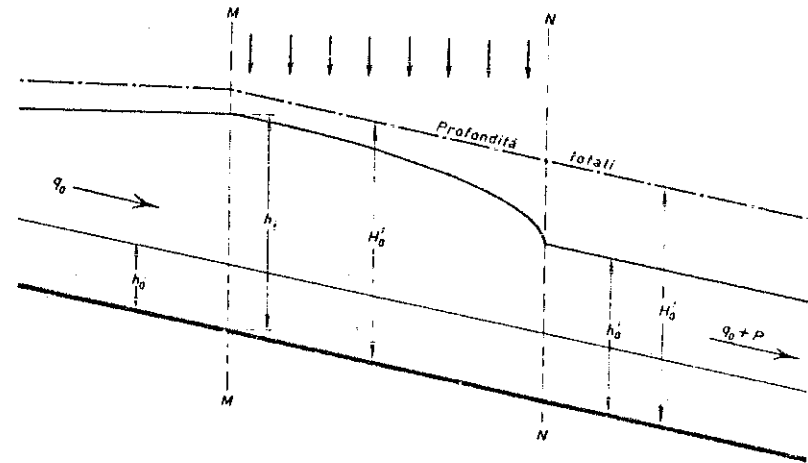


Fig. 3 - Correnti a pelo libero con portata crescente: andamento del profilo liquido in alveo a debole pendenza.

Se il canale è a debole pendenza (fig. 3), a valle della sezione NN la corrente di portata $q_0 + P$ defluisce in moto uniforme con profondità h'_0 e profondità totale H'_0 , questo valore è evidentemente anche quello che compete alla corrente lungo tutto il tronco MN. La profondità cresce da valle verso monte dal valore h'_0 fino a raggiungere nella sezione MM un valore $h_1 > h'_0 > h_0$. A monte di detta sezione la corrente è lenta ritardata con il tipico profilo di moto permanente corrispondente.

Se invece il canale è a forte pendenza (fig. 4) a monte della sezione MM la corrente di portata q_0 defluisce in moto uniforme con profondità h_0 e profondità totale H_0 pari a quella che si mantiene costante per tutto il tronco successivo MN; lungo questo la profondità aumenta da monte verso valle fino a raggiungere nella sezione NN una profondità $h_1 > h'_0$, essendo h'_0 la profondità di moto uniforme correlativa alla portata $q_0 + P$. Nei tratto a valle di NN si ha una corrente veloce accelerata con profondità tendente asintoticamente verso il valore h'_0 .

Nei caso di alveo a forte pendenza può anche verificarsi una situazione più complessa (fig. 5) qualora la portata immessa fosse abbastanza

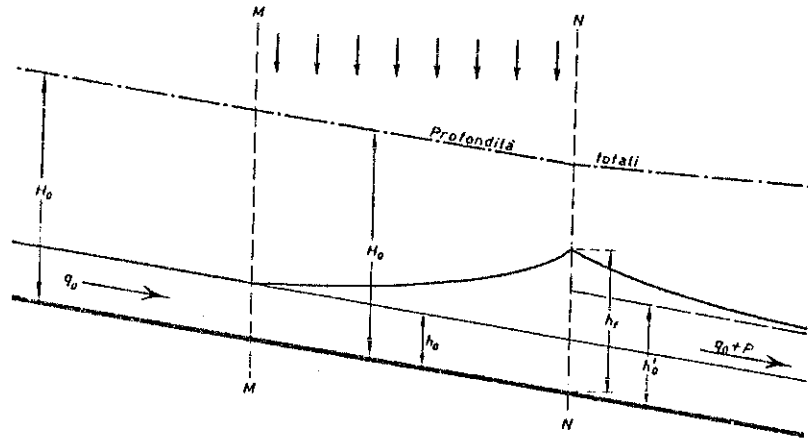


Fig. 4 - Correnti a pelo libero con portata crescente: andamento del profilo liquido in alveo a forte pendenza.

grande, perchè il valore finale $Q = q_0 + P$ arrivasse a superare il valore massimo q_{max} compatibile con la profondità totale H_0 della corrente veloce in arrivo. E' ovvio che, in tali condizioni, nella sezione terminale NN

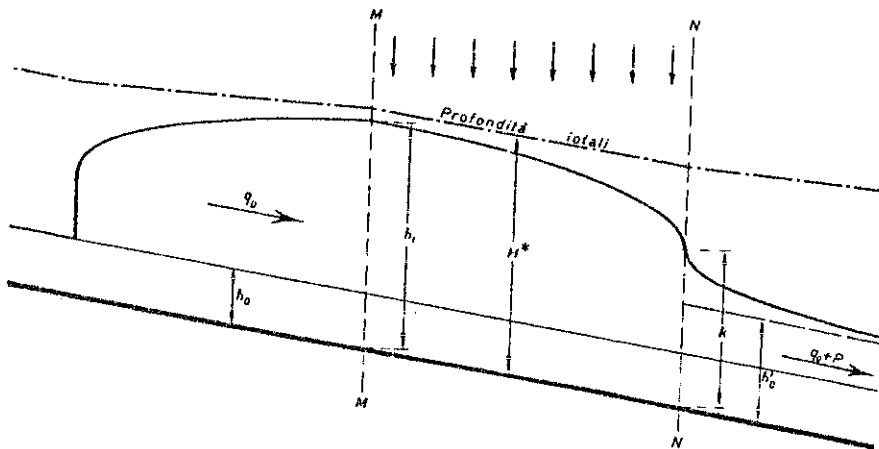


Fig. 5 - Correnti a pelo libero con portata crescente: andamento del profilo liquido in alveo a forte pendenza.

si stabilisce la profondità critica k corrispondente alla portata Q ; nella

stessa sezione la profondità totale assume il valore H^* minimo per il quale è possibile il movimento della portata Q , e tale valore si mantiene costante per tutto il tronco MN, lungo il quale si ha una corrente lenta di profondità decrescente fino a ridursi al valore k nella sezione NN. Nella sezione MM si ha una profondità $h_1 > h_0'$; a monte di essa si stabilisce una corrente lenta ritardata con il profilo tipico degli alvei a forte pendenza. La corrente lenta inizia con un risalto localizzato nella sezione ove la profondità totale della corrente lenta è pari a quella H_0 della corrente veloce uniforme in arrivo. *spinto?*

3. La curva $q = q(h)$ per $H = H_0 = cost$, oltre a permettere, come si è visto, la facile determinazione degli aspetti qualitativi del processo di movimento, è anche di immediata utilità per il tracciamento effettivo del profilo libero della corrente lungo un tronco di canale con apporto laterale.

Nota la forma della sezione e individuato il valore H_0 della profondità totale caratteristico della situazione in esame attraverso l'esame delle condizioni della corrente a monte o a valle del tronco con immissione, è subito tracciabile la curva $q = q(h)$ correlativa a detto valore H_0 . Conosciuta la legge di immissione della portata risulta pure individuata la portata defluente in ogni sezione del canale: in corrispondenza ad ognuno di questi valori dalla curva $q = q(h)$ si ricava la relativa profondità della corrente e quindi si può tracciare per punti il profilo libero.

Naturalmente, se la forma del canale e la legge di immissione sono semplici, si può stabilire direttamente l'equazione del profilo libero; a titolo di esempio consideriamo il caso assai semplice ma molto frequente nella pratica di un canale rettangolare di larghezza L , con immissione uniforme di una portata α per unità di lunghezza.

Se H_0 è la profondità totale della corrente per il caso in esame, si ha:

$$\frac{Lh^2}{2} + \frac{q^2}{glh} = \frac{LH_0^2}{2};$$

da questa relazione, posto $p = \frac{q}{L}$, si ottiene:

$$p = \sqrt{\frac{gh}{2} (H_0^2 - h^2)}, \quad (6)$$

espressione questa che fornisce il legame fra portata e profondità per H_0 costante; da essa si ricava facilmente che il massimo di portata si verifica quando la profondità assume il valore critico:

$$k = \frac{H_0}{\sqrt{3}}$$

e vale:

$$P_{max} = k\sqrt{gk} = \frac{H_0\sqrt{gH_0}}{\sqrt{3\sqrt{3}}}$$

Chiamata $q_0 = p_0 L$ la portata defluente nella sezione iniziale ($s=0$) del tronco con portata crescente, la portata nella generica sezione di ascissa s vale:

$$q = q_0 + \alpha s, \quad \text{oppure} \quad p = p_0 + \alpha \frac{s}{L}$$

Sostituendo nella (6) si ha:

$$s = \frac{L}{2\alpha} \sqrt{2gh(H_0^2 - h^2)} - p_0 \frac{L}{\alpha}, \quad (7)$$

equazione questa del profilo libero della corrente.

Se la portata q_0 in arrivo è nulla, posto

$$x = \frac{s}{B^*}; \quad y = \frac{h}{H_0},$$

essendo $B^* = \frac{q_{max}}{\alpha} = \frac{L}{\alpha} \frac{H_0\sqrt{gH_0}}{\sqrt{3\sqrt{3}}}$ la lunghezza che dovrebbe avere il canale affinché alla sua estremità di valle la portata sia pari alla massima compatibile con l'assegnato valore di H_0 , con semplici trasformazioni si ottiene la relazione:

$$x = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \sqrt{y(1-y^2)}, \quad (8)$$

che sintetizza tutti i profili possibili in alveo rettangolare; la fig. 6 ne dà la rappresentazione grafica: il ramo superiore è correlativo alle correnti lente, quello inferiore alle correnti veloci.

Nei caso di canale rettangolare e immissione uniforme riesce anche

facile individuare l'andamento della linea dei carichi totali.

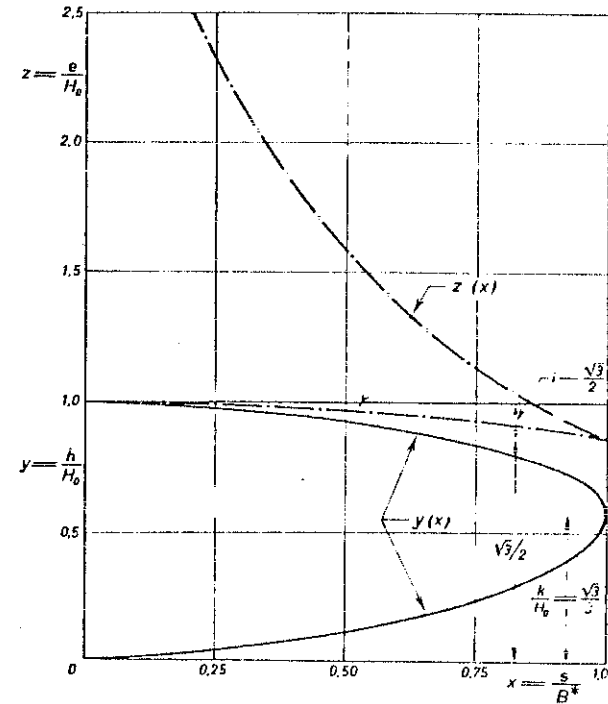


Fig. 6 - Canale rettangolare con portata uniformemente crescente: andamenti del profilo liquido e della linea dei carichi totali.

Quando è $q_0 = 0$, l'espressione dell'energia specifica della corrente risulta:

$$e = h + \frac{\alpha^2 s^2}{2gt^2 h^2},$$

dalla quale, posto $z = \frac{e}{H_0}$, tenendo conto della (8), si ottiene:

$$z = \frac{1}{4y} + \frac{3y}{4}, \quad (9)$$

questa relazione individua l'andamento generale della linea dei carichi totali, rappresentato nella fig. 6, insieme con quello del profilo libero.

L'energia specifica, sempre decrescente nel senso del moto, è poco

variabile nelle correnti lente mentre diminuisce assai rapidamente quando la corrente è veloce.

4. Le ormai numerose ricerche sperimentali condotte al riguardo dei canali con portata crescente permettono di constatare che i punti sperimentali bene si accordano con i profili deducibili con la condizione $\Sigma = \text{cost}$ nel caso di canali prismatici con pendenza limitata e percorsi da correnti lente, mentre maggiori scarti fra risultati sperimentali e calcolati si riscontrano per il caso di canali a forte pendenza percorsi da correnti veloci.

Ciò dipende essenzialmente dalla ipotesi fondamentale posta alla base di tutta la trattazione e cioè dall'aver ammesso trascurabili o fra loro compensati i due termini rappresentativi delle resistenze della parete e della componente del peso nella direzione della corrente: è chiaro che, nel caso di canali con pendenza rilevante o quando le correnti sono veloci, l'ipotesi suddetta può non corrispondere alla effettiva situazione reale e quindi portare a risultati non del tutto aderenti al processo reale.

Se si verificassero condizioni di questo genere (però non molto frequenti nelle pratiche applicazioni) sarebbe necessario tener conto dei due termini trascurati: la relativa trattazione verrebbe ad essere notevolmente complicata e occorrerebbe, caso per caso, procedere ad un esame particolare del singolo problema.

B - Canali con portata decrescente.

1. In queste situazioni è $\frac{dq_1}{ds} = 0$ e perciò dalla (3) si ricava immediatamente:

$$\frac{dh}{ds} = \frac{\frac{\partial e}{\partial q} dq_2}{\frac{\partial e}{\partial h} ds}, \quad (10)$$

equazione differenziale questa del profilo libero, che corrisponde anche a quella assai più sintetica:

$$\frac{de}{ds} = 0, \quad (11)$$

cioè

$$e = \text{cost}; \quad (12)$$

infatti tenuto conto che l'energia specifica e è funzione della profondità h e della portata q , ambedue a loro volta funzioni di s , esplicitando la (11), si ottiene:

$$\frac{\partial e}{\partial h} \frac{dh}{ds} + \frac{\partial e}{\partial q} \frac{dq}{ds} = 0,$$

dalla quale, ricordando che $dq = -dq_2$, si passa subito alla (10).

Il processo di movimento proprio di un canale con portata comunque decrescente nel senso del moto, avviene quindi in modo da mantenere inalterata l'energia specifica della corrente: la linea dei carichi totali ha cioè andamento parallelo al fondo.

Questa condizione permette di individuare con facilità l'andamento qualitativo del profilo libero; indicato con e_0 il valore costante dell'energia specifica lungo il tratto di canale con erogazione, ricordata l'espressione di e in funzione di h e q , la (12) equivale alla ben nota relazione:

$$q = A\sqrt{2g(e_0 - h)}, \quad (13)$$

che fornisce tutte le portate che possono defluire in un canale di forma assegnata compatibilmente con l'assegnato valore di e_0 , l'andamento qualitativo di tale curva è rappresentato nella fig. 7.

La semplice osservazione di questa curva porta a riconoscere che, quando la corrente nel canale è lenta, la progressiva diminuzione della portata comporta necessariamente un progressivo aumento della profondità della corrente che perciò risulta ritardata; se invece la corrente è veloce all'erogazione di portata dal canale corrisponde una continua diminuzione della profondità, mentre la corrente è accelerata.

Gli andamenti qualitativi ora riconosciuti per il canale a portata decrescente sono opposti a quelli individuati in precedenza per il canale a portata crescente.

L'esame della fig. 7 indica inoltre che lo stato critico può verificarsi soltanto nella sezione iniziale del tronco di canale con erogazione: la cor-

rente lungo questo tronco, fatta eccezione la formazione di un risalto intermedio, è perciò o tutta lenta o tutta veloce.

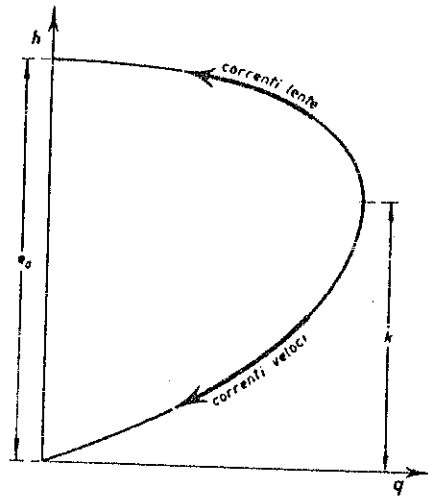


Fig. 7 - Curva $h=h(q)$ per $e = \text{cost.}$

2. Le constatazioni ora fatte trovano migliore chiarimento attraverso l'esame di alcune situazioni particolari, dalle quali si potrà anche stabilire come risulti individuato, caso per caso, il valore e_0 dell'energia specifica che si mantiene invariato lungo il tratto interessato dall'erogazione.

Consideriamo a questo scopo le due situazioni nelle quali il tronco con erogazione è inserito in un alveo prismatico a forte oppure a debole pendenza di lunghezza indefinita.

Se l'alveo è a forte pendenza (fig. 8), in relazione alle note proprietà delle correnti veloci, fino all'inizio del tronco MN con erogazione la corrente ha profondità h_0 di moto uniforme correlativa alla portata q_0 in arrivo; lungo il tratto MN il profilo liquido si deprime raggiungendo nella sezione NN una profondità h_f inferiore a quella di moto uniforme h'_0 ; a valle si ha un profilo di moto permanente che tende alla profondità di moto uniforme. Lungo il tronco con erogazione l'energia specifica della corrente ha ovunque il valore e_0 spettante alla corrente di moto uniforme di monte.

Se l'alveo è a debole pendenza possono presentarsi due differenti eventualità in dipendenza della lunghezza del tronco MN e delle modalità con le

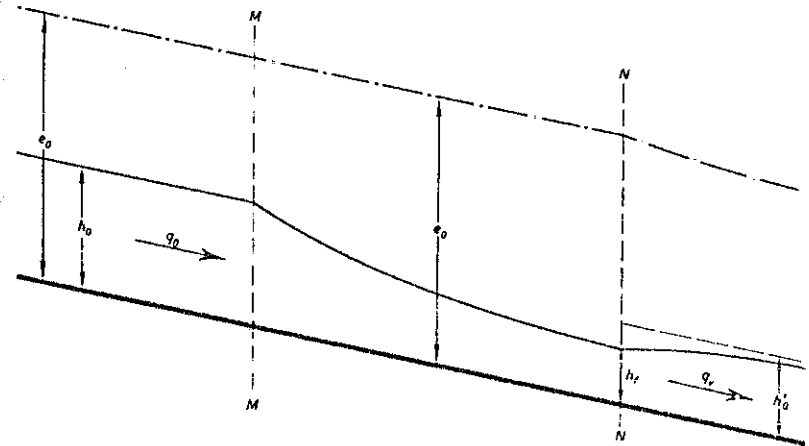


Fig. 8 - Correnti a pelo libero con portata decrescente: andamento del profilo libero in alveo a forte pendenza

quali avviene l'erogazione (fig. 9). Il primo caso si verifica quando il richiamo determinato sulla corrente di monte dall'erogazione è tale che la pro-

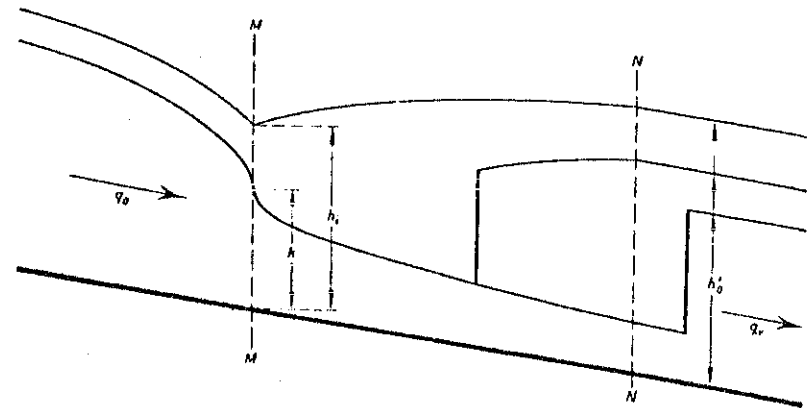


Fig. 9 - Correnti a pelo libero con portata decrescente: andamenti del profilo libero in alveo a debole pendenza

fondità h_1 nella sezione iniziale MM è superiore a quella critica correlativa alla portata q_0 in arrivo; a monte si ha un profilo di chiamata in cor-

rente lenta; lungo MN la profondità della corrente aumenta fino a raggiungere nella sezione terminale NN la profondità h'_0 di moto uniforme relativa alla portata rimasta nel canale a valle. Il valore costante e_0 dell'energia specifica della corrente lungo MN è pari a quello della corrente uniforme di valle.

Quando l'erogazione aumenta la chiamata a monte si fa sempre più pronunciata finchè, per determinate caratteristiche delle modalità di erogazione, nella sezione iniziale si forma lo stato critico correlativo alla portata q_0 in arrivo; la corrente lungo MN prosegue allora veloce con e_0 pari all'energia specifica minima per la quale si può muovere la portata q_0 , la corrente torna successivamente lenta attraverso un risalto che può intervenire sia lungo il tronco MN, sia a valle di esso.

Qualora immediatamente a valle del tronco con erogazione il canale presenti un salto di fondo (come accade per numerose applicazioni pratiche) la corrente è tutta veloce lungo MN; qualunque siano le modalità dell'erogazione.

3. La determinazione effettiva del profilo libero lungo il tronco con erogazione richiede la conoscenza precisa della legge che regola l'erogazione stessa; nei casi pratici questa avviene attraverso uno sfioratore laterale oppure una griglia di fondo: in ambedue i casi l'erogazione dipende quindi dalla profondità della corrente (cioè $\frac{dq}{ds}$ è una funzione di h). Questo fatto rende particolarmente complessa l'integrazione della (10), anche quando si ricorra a metodi alle differenze finite, la cui impostazione è peraltro concettualmente abbastanza semplice ed evidente.

Quando il canale ha sezione rettangolare di larghezza L , l'integrazione della (10) è relativamente facile per entrambi i casi sopracitati.

Con canale rettangolare infatti si ha:

$$e = h + \frac{q^2}{2gl^2h^2} = e_0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial e}{\partial q} = \frac{q}{gl^2h^2} = \frac{\sqrt{2g(e_0-h)}}{glh}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial e}{\partial h} = 1 - \frac{q^2}{gl^2h^3} = \frac{3h-2e_0}{h}. \quad (16)$$

Introducendo nella (10), si ottiene:

$$\frac{dh}{ds} = \frac{\sqrt{2g(e_0-h)}}{g(3h-2e_0)L} \frac{dq_2}{ds}, \quad (17)$$

equazione differenziale del profilo libero per alveo rettangolare.

4. Sfioratore laterale. Ammesso che la soglia dello sfioratore sia parallela al fondo all'altezza c rispetto ad esso, la portata erogata per unità di lunghezza di sfioratore può essere espressa con la normale formula degli stramazzi e cioè

$$\frac{dq_2}{ds} = \mu \sqrt{2g} (h-c)^{3/2},$$

essendo μ un coefficiente di efflusso che dipende dalla sagoma della soglia e che, almeno in prima approssimazione, ammettiamo costante per tutta la lunghezza dello sfioratore.

La (17) diventa allora:

$$\frac{dh}{ds} = \frac{2\mu (h-c) \sqrt{(h-c)(e_0-h)}}{L(3h-2e_0)}, \quad (18)$$

che integrata fornisce:

$$\mu \frac{s-s_0}{L} - \left(\frac{2-3\lambda}{1-\lambda} \right) \sqrt{\frac{1-\gamma}{\gamma-\lambda}} - 3 \arcsen \sqrt{\frac{1-\gamma}{1-\lambda}} = \Phi(\gamma), \quad (19)$$

avendo posto $\gamma = \frac{h}{e_0}$, $\lambda = \frac{c}{e_0}$, e indicato con s_0 l'ascissa (reale o fittizia) nella quale si ha $h = e_0$ e quindi $q = 0$.

La distanza fra due sezioni successive di ascisse s_1 e s_2 (distanti cioè $B = s_2 - s_1$), nelle quali la profondità dell'acqua assume rispettivamente i valori h_1 e h_2 , risulta allora:

$$\mu \frac{B}{L} = \Phi(\gamma_2) - \Phi(\gamma_1). \quad (20)$$

La funzione $\Phi(\gamma)$ si presenta come caratteristica degli stramazzi laterali; essa contiene, in qualità di parametro, il rapporto $\lambda = \frac{c}{e_0}$.

fra l'altezza c della soglia e la e_0 :

L'andamento della $\Phi(y)$ appare dalla fig. 10, ove sono tracciate le curve relative a diversi valori del parametro λ .

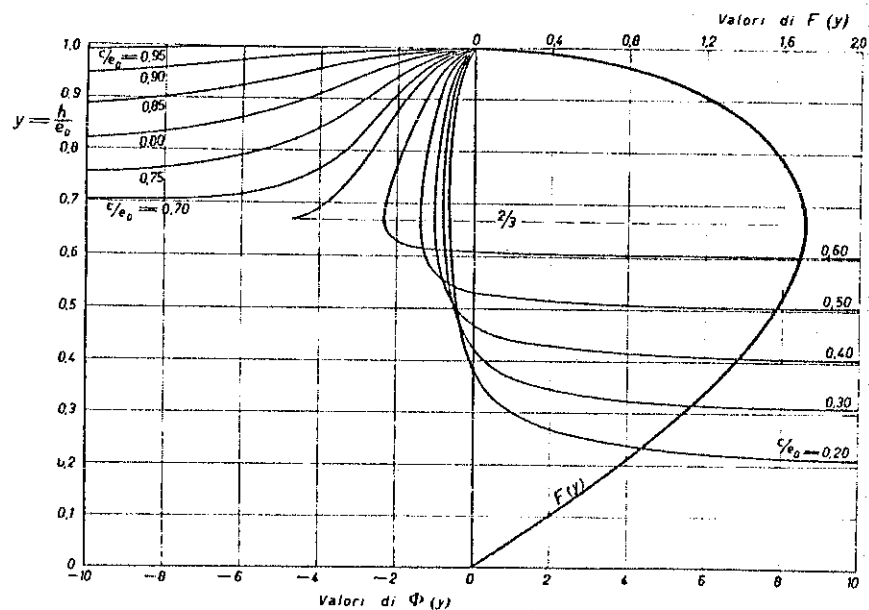


Fig. 10 - Canale rettangolare con sfioratore laterale: andamenti del profilo liquido

Dalla figura si individuano le seguenti proprietà, deducibili anche dall'esame diretto della (19):

- la Φ è reale soltanto per y compreso fra λ e 1 ; cioè per h compreso tra c e e_0 ;
- ogni singola curva parte dal punto di ordinata $h = e_0$ e tende asintoticamente all'ordinata $h = c$; i profili liberi raggiungono la soglia dello stramazzo a distanza infinita;
- quando $c > 2e_0/3 = k$ i profili possibili sono tutti ascendenti, come del resto era facilmente prevedibile, perchè in questi casi si possono avere soltanto correnti lente;
- quando $c < 2e_0/3 = k$ le curve presentano un ramo ascendente per $k < h < e_0$

e un ramo discendente per $c < h < k$. Come già detto in precedenza : due rami non possono coesistere, l'uno essendo proprio delle correnti lente, l'altro di quelle veloci;

- per $c < 2e_0/3 = k$ il primo termine della Φ è zero e risulta $h = c$ per $s - s_0 = -\frac{3L}{\mu} \arcsen 1 = -\frac{3\pi L}{2\mu}$.

L'andamento delle $\Phi(y)$ è, in forma adimensionale, anche quello del profilo libero; dall'esame della fig. 10, si nota allora immediatamente che, sia con correnti veloci, sia con correnti lente, i profili tendono, almeno nella maggioranza dei casi, a raggiungere abbastanza rapidamente profondità assai prossime a c : ciò sta a significare che non vale la pena di prolungare lo sfioratore oltre certi limiti perchè la ulteriore portata che verrebbe erogata risulterebbe assai modesta in conseguenza dei piccoli spessori della lama sfiorante.

Sulla fig. 10 è tracciata anche la curva $F(y) = \frac{q}{Le_0\sqrt{2ge_0}} = y\sqrt{1-y}$ immediatamente deducibile dalla (14).

Le due curve Φ e F permettono di risolvere direttamente o con pochi tentativi qualunque problema inerente agli sfioratori laterali.

Ad esempio consideriamo il caso di uno sfioratore di lunghezza B e quota della soglia c , lungo il quale la corrente è lenta (caso questo assai frequente nella pratica); se è assegnata la portata di valle q_v , si deducono subito la portata q_0 in arrivo e quella $q_e = q_v - q_0$ sfiorata: basta procedere come segue:

- calcolare $e_0 = h_1 + \frac{q_v^2}{2gh_1^2L^2}$, essendo h_1 la profondità nella sezione terminale, determinata dalle condizioni della corrente nel canale di valle;
- individuare sulla particolare Φ di parametro noto λ , il punto di ordinata $y_1 = h_1/e_0$;
- individuare sulla stessa curva Φ il punto la cui ascissa dista da quella del punto precedente della quantità $\mu B/L$, l'ordinata di questo punto vale $y_2 = h_2/e_0$ essendo h_2 la profondità della corrente nella sezione iniziale;

- l'ascissa del punto della curva F avente per ordinata il valore $y_i = h_i/e_o$: vale $\frac{q_o}{L e_o \sqrt{2 g e_o}}$, da cui si ricava immediatamente la portata q_o e quindi quella sfiorata $q_s = q_o - q_v$.

Se invece fosse assegnata la portata q_o , si dovrebbe per tentativi individuare quel valore q_v il quale, a mezzo delle operazioni ora esposte, riportasse alla data q_o .

Con procedimenti del tutto simili possono essere risolti gli analoghi problemi di verifica quando la corrente è veloce.

La determinazione della lunghezza B dello sfioratore, quando ne sia fissata l'altezza c , oppure il calcolo di c quando sia assegnata B , con la condizione che la portata si riduca da un valore q_o ad un altro q_v ambedue assegnati, è un problema di immediata soluzione, che non richiede particolari spiegazioni.

Per $0,88 < y < 1$ e $0,85 < \lambda < 0,95$, Citrini ha mostrato che le curve $\Phi(y)$ possono essere sostituite, con ottima approssimazione, da rette di equazione:

$$\Phi = ay + b$$

dove a e b sono funzioni del solo parametro λ ; in particolare per a vale l'espressione:

$$a = \frac{\lambda - 0,72}{0,97 - \lambda} .$$

Con questa ammissione la (20) diventa semplicemente:

$$B = \frac{L a}{\mu} \left(\frac{h_f - h_i}{e_o} \right) , \quad (21)$$

relazione questa che rende assai rapidi ed immediati tutti i calcoli relativi a sfioratori per i quali naturalmente siano rispettati i limiti sopra indicati per y e λ .

Le soluzioni ora presentate sono attendibili quando, come già detto, possano ritenersi effettivamente trascurabili le differenze fra componente del peso e resistenza delle pareti; numerose esperienze condotte al riguardo hanno dato luogo a constatare che la teoria proposta è atta a fornire

risultati assai approssimati quando la corrente nel canale è lenta, con valori di λ superiori a 0,75 e quando al termine dello sfioratore sia $y_i > 0,9$. Dalle esperienze (Gentilini) è apparsa pure la necessità di assegnare al coefficiente di efflusso μ un valore inferiore a quello μ_o che, a parità di carico, spetterebbe ad uno stramazzo trasversale al canale: con correnti lente si può porre in media $\mu = 0,93 \mu_o$.

5. Griglia di fondo. Un tratto del fondo del canale rettangolare sia costituito da una griglia caratterizzata da un determinato valore Ψ del rapporto $\frac{\text{vuoto}}{\text{vuoto} + \text{pieno}}$; ammesse valide le normali leggi dell'efflusso la portata erogata per unità di lunghezza del canale vale:

$$\frac{dq_2}{ds} = \mu \Psi \sqrt{2gh} ,$$

essendo μ un coefficiente di efflusso il cui valore dipende dalle caratteristiche della griglia, ma che comunque viene ritenuto costante lungo la griglia.

Sostituendo nella (17) si ottiene facilmente:

$$\frac{dh}{ds} = \frac{2\mu\Psi\sqrt{h(e_o-h)}}{3h-2e_o} , \quad (22)$$

che è l'equazione differenziale del profilo liquido della corrente defluente sulla griglia.

La sua integrazione fornisce:

$$s - s_o = \frac{e_o}{\mu\Psi} \left[\frac{1}{2} \arccos \sqrt{y} - \frac{3}{2} \sqrt{y(1-y)} \right] = \frac{e_o}{\mu\Psi} \Phi(y) , \quad (23)$$

avendo posto $y = h/e_o$ e indicato con s_o l'ascissa (reale o fittizia) alla quale corrisponde una profondità pari ad e_o , e quindi $q = 0$.

La distanza $B = s_1 - s_2$ fra due sezioni successive del canale, nelle quali la profondità dell'acqua assume rispettivamente i valori h_1 e h_2 , risulta allora:

$$B = s_2 - s_1 = \frac{e_o}{\mu\Psi} [\Phi(y_2) - \Phi(y_1)] . \quad (24)$$

Ricavando h dalla (14) e sostituendo nella $\Phi(y)$ si può inoltre dedurre la relazione:

$$\beta(u) = \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{2 \cos \theta + 1} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(2 \cos \theta + 1)(1 - \cos \theta)} \quad (25)$$

nella quale per θ occorre introdurre i valori:

$$\begin{cases} \theta_l = \frac{1}{3} \arccos(1 - 2u^2) & \text{per correnti lente;} \\ \theta_v = \frac{1}{3} \arccos(1 - 2u^2) + 240^\circ & \text{per correnti veloci.} \end{cases}$$

Con u si è indicato il rapporto q/q_{max} fra la generica portata q e quella

$$q_{max} = \frac{2Le_0}{3\sqrt{3}} \sqrt{2ge_0}$$

massima realizzabile con l'assegnato valore di e_0 .

Dette q_1 e q_2 le portate nelle sezioni di ascissa s_1 e s_2 , la (24) diventa:

$$B = \frac{e_0}{\mu\psi} [\beta(u_2) - \beta(u_1)] \quad (26)$$

La (24) e la (26) permettono di determinare la lunghezza B sia in funzione delle profondità d'acqua sia delle portate all'inizio e al termine di un tronco di griglia lungo B .

Le due funzioni $\Phi(y)$ e $\beta(u)$ sono caratteristiche delle griglie di fondo: la $\Phi(y)$ per la definizione del profilo liquido di cui è una rappresentazione adimensionale; la $\beta(u)$ per la definizione della distribuzione delle portate; il loro andamento tracciato nelle figg. 11 e 12, mette in rilievo il diverso comportamento delle griglie in corrispondenza alle due situazioni di corrente lenta e veloce, comportamento qualitativamente già individuato in precedenza nel caso generale di canale con portata decrescente.

Da notare che la portata del canale si annulla, per correnti sia lente che veloci, dopo un percorso di lunghezza finita; in particolare se all'inizio della griglia la corrente ha la profondità critica k , la lunghezza di

griglia occorrente per derivare l'intera portata vale:

$$\begin{cases} B = 0,3994 \frac{e_0}{\mu\psi} & \text{per corrente lenta;} \\ B = 1,1848 \frac{e_0}{\mu\psi} & \text{per corrente veloce;} \end{cases}$$

la maggiore lunghezza necessaria per corrente veloce è ovvia conseguenza del diverso andamento del profilo liquido nelle due situazioni.

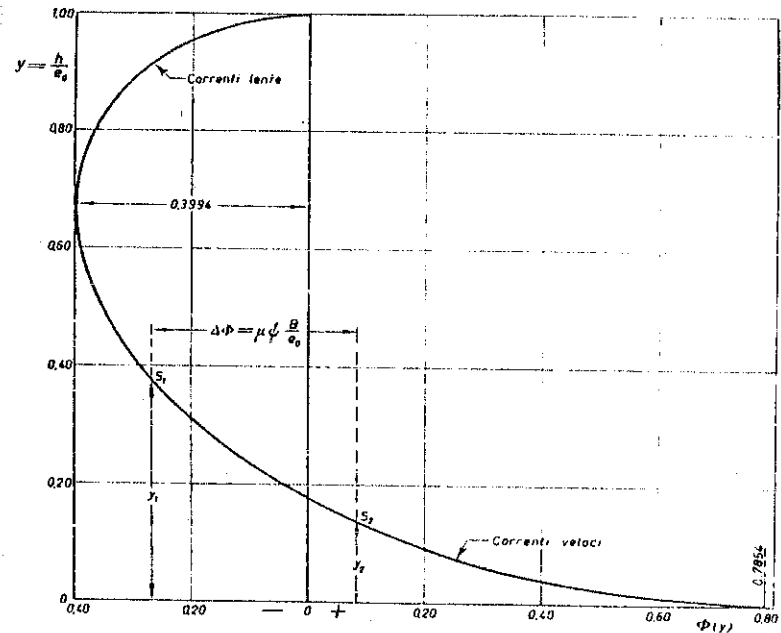


Fig. 11 - Canale rettangolare con griglia di fondo: andamento del profilo liquido

Nei caso di correnti lente, l'andamento della curva $\beta(u)$ può essere assimilato, almeno per $0 < u < 0,80$, con ottima approssimazione da una retta di equazione:

$$\beta = -0,391u,$$

a cui corrisponde per la $\Phi(y)$ la semplice relazione:

$$\Phi = -1,016y\sqrt{1-y}$$

valida per $0,88 < y < 1$.

Sostituendo nella (24) e nella (26) si ottengono le relazioni:

$$\begin{cases} B = 1,016 \frac{e_0}{\mu \Psi} \left[\gamma_1 \sqrt{1-\gamma_1} - \gamma_2 \sqrt{1-\gamma_2} \right], \\ B = 0,391 \frac{e_0}{\mu \Psi} (u_1 - u_2); \end{cases}$$

che possono essere impiegate nei calcoli pratici con ottima approssimazione, purchè siano rispettati gli intervalli di y e u sopraddetti.

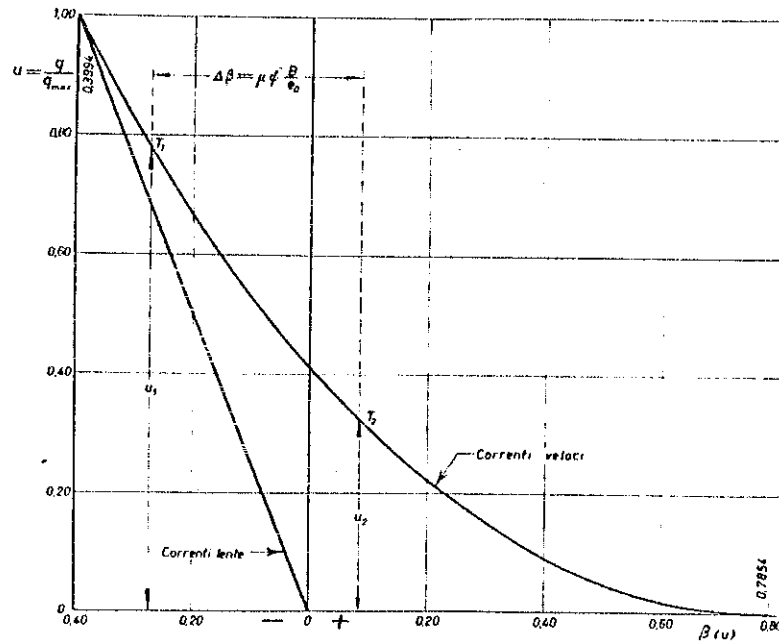


Fig. 12 - Canale rettangolare con griglia di fondo:
andamento della portata

I diversi problemi di verifica o di dimensionamento, vengono risolti direttamente o per tentativi con l'ausilio delle due curve $\Phi(y)$ e $\beta(u)$, seguendo procedimenti del tutto analoghi a quelli già visti per lo sfioratore laterale.

I risultati di numerose esperienze hanno mostrato la buona aderenza

dei risultati teorici con il processo reale, purchè vengano opportunamente scelti i valori del coefficiente di efflusso in dipendenza delle caratteristiche della griglia.

COPRENTI IN PRESSIONE

Qualunque sia la situazione in esame, ammetteremo sempre che la corrente sia ovunque lineare, in modo da poter ritenere idrostatica la distribuzione delle pressioni su ogni sezione trasversale; la tubazione entro cui scorre la corrente dovrà perciò presentare asse rettilineo o comunque con curvatura trascurabile e le sezioni trasversali dovranno variare molto gradualmente con l'ascissa. Inoltre si farà sempre l'ipotesi che la distribuzione delle velocità sia tale da poter ritenere uguali all'unità tanto il coefficiente di ragguglio delle quantità di moto, quanto quello di ragguglio delle altezze cinetiche.

Per quanto riguarda le perdite continue si ammetterà che esse possano essere valutate con le usuali formule valide per il moto uniforme (formule di Chezy, monomie, ecc.).

A - Correnti con portata crescente.

1. Consideriamo il caso tipico di una tubazione comunque forata che emunge l'acqua da un serbatoio a livello costante per convogliarla in un altro serbatoio sempre a livello costante oppure direttamente nell'atmosfera (fig. 13).

Ammettiamo che la velocità della portata entrante nella tubazione sia ovunque diretta normalmente all'asse della tubazione, e perciò possa ritenersi nulla la componente assiale della quantità di moto della corrente entrante.

Assunto un piano orizzontale di riferimento, nella generica sezione di ascissa s (misurata lungo l'asse della tubazione) sia:

ζ [m] la quota del baricentro della sezione;

p [kg/m²] la pressione agente nel baricentro della sezione;

A [m²] l'area della sezione;

q [m³/s] la portata;

$V = \frac{q}{A}$ [m/s] la velocità media della corrente;

H_A [m] la quota del pelo libero nel serbatoio di monte;

$h = H_A - (\zeta + \frac{p}{\gamma})$ [m] la differenza fra la quota del pelo libero nel serbatoio di monte e la quota piezometrica della sezione;

$H = H_A - (\zeta + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g})$ [m] la differenza fra la quota del pelo libero nel serbatoio di monte e il carico totale nella sezione;

α l'angolo formato dall'asse della tubazione con l'orizzontale (positivo se l'asse discende nella direzione del moto).

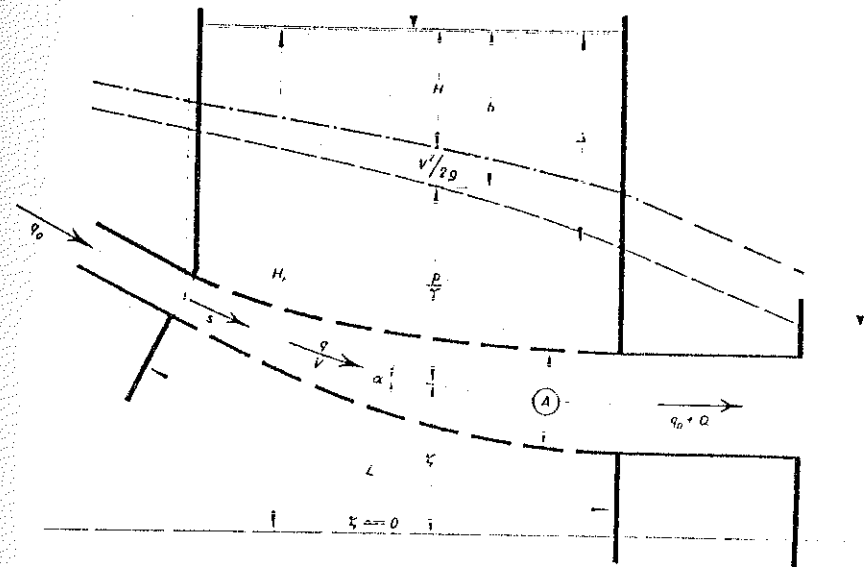


Fig. 13

Applichiamo il teorema delle quantità di moto ad un tronco infinitesimo limitato da due sezioni di ascissa s e $s+ds$, proiettando lungo l'asse della tubazione otteniamo:

$$\gamma A s \alpha - \frac{d(pA)}{ds} - \frac{d\Pi_p}{ds} - \frac{dR}{ds} - \rho \frac{d(qV)}{ds} = 0, \quad (27)$$

essendo:

$$s \alpha = - \frac{d\zeta}{ds};$$

$dR = \gamma A J ds$ l'azione di trascinalamento con J cadente della linea dei cari-

chi totali, per il cui calcolo potrà impiegarsi una delle normali formule per il moto uniforme;

Π_p la componente assiale della spinta idrostatica esercitata dalla parete del tubo.

Dalla (27) dividendo per γA , esplicitando le derivate e tenuto presente che:

$$\frac{d}{ds} \left(\zeta + \frac{p}{\gamma} \right) = - \frac{dh}{ds},$$

in definitiva si ottiene:

$$\frac{dh}{ds} = J + 2 \frac{d}{ds} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{v^2}{gA} \frac{dA}{ds} + \frac{p}{\gamma A} \frac{dA}{ds} + \frac{1}{\gamma A} \frac{d\Pi_p}{ds},$$

che è l'equazione differenziale della linea piezometrica della corrente entro la tubazione.

Se, come di norma, la variazione della sezione è graduale la componente assiale $d\Pi_p$ può ritenersi uguale a $p dA$ e cioè può ammettersi nulla (o almeno trascurabile rispetto agli altri termini) la differenza:

$$\frac{1}{\gamma A} \left(p \frac{dA}{ds} - \frac{d\Pi_p}{ds} \right),$$

cosicchè la precedente relazione diventa:

$$\frac{dh}{ds} = J + 2 \frac{d}{ds} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{v^2}{gA} \frac{dA}{ds},$$

dalla quale introducendo la portata q , in definitiva si ha:

$$\frac{dh}{ds} = J + \frac{2q}{gA^2} \frac{dq}{ds} - \frac{q^2}{gA^3} \frac{dA}{ds}. \quad (28)$$

Indicata con α (m^2/m) l'area dei fori per metro di tubazione e ammessa valida la nota legge dell'efflusso rigurgitato si ha anche:

$$\frac{dq}{ds} = \mu \alpha \sqrt{2gh}. \quad (29)$$

ove con μ si è indicato un coefficiente di efflusso che, almeno in prima approssimazione, può ritenersi costante lungo la tubazione; l'area α è invece variabile con s .

Chiamata q_0 la portata nella sezione di ascissa $s=0$ ove ha inizio il

tubo forato e quindi l'emungimento, si ha inoltre:

$$q = q_0 + \mu \int_0^s \alpha \sqrt{2gh} ds. \quad (30)$$

Il complesso delle due equazioni (28), (29), insieme con le convenienti condizioni ai limiti, definisce completamente il processo di movimento di una qualunque corrente in pressione con portata crescente, e permette di risolvere qualsiasi problema pratico; in particolare assegnate due delle quattro funzioni $A = A(s)$; $\alpha = \alpha(s)$; $h = h(s)$; $q = q(s)$ possono essere individuate le altre due funzioni incognite. Sarà così possibile, fissate le caratteristiche geometriche della tubazione, determinare la portata che essa può emungere o viceversa, assegnata la portata che si intende emungere, definire alcune caratteristiche della tubazione.

La soluzione di tutti questi problemi richiede però la integrazione del sistema delle (28), (29) che in generale può essere condotta soltanto con i normali metodi alle differenze finite; in qualche caso semplice si può però giungere a soluzioni dirette delle quali riporteremo qui di seguito qualche esempio fra quelli che più frequentemente trovano applicazione in pratica.

2. Condotta a sezione costante ed area uniforme dei fori $\left[A = \text{cost}; \alpha = \text{cost}; \frac{dA}{ds} = 0 \right]$

Dalla (28) si ha:

$$\frac{dh}{ds} = J + \frac{2q}{gA^2} \frac{dq}{ds}. \quad (28')$$

Dalla (29), esplicitando rispetto ad h e derivando poi rispetto ad s tenendo presente che è $\alpha = \text{cost}$, si ottiene inoltre la relazione:

$$\frac{dh}{ds} = \frac{1}{g\mu^2\alpha^2} \frac{dq}{ds} \frac{d^2q}{ds^2},$$

che confrontata con la (28') fornisce:

$$\frac{d^2q}{ds^2} - \frac{g\mu^2\alpha^2 J}{dq/ds} - \frac{2\mu^2\alpha^2}{A^2} q = 0, \quad (31)$$

equazione differenziale dell'andamento della portata lungo la tubazione; questa equazione non è in generale integrabile in termini finiti ed è perciò necessario ricorrere, caso per caso, ad uno dei soliti procedimenti

alle differenze finite.

Occorre però tener presente che, di norma, nelle pratiche applicazioni la lunghezza del tronco forato è in generale piccola, cosicchè possono ritenersi trascurabili, rispetto alle altre grandezze in gioco, le perdite di carico continue, vale a dire si può porre $J = 0$; con questa condizione la (31) diventa semplicemente:

$$\frac{d^2q}{ds^2} - \frac{2\mu^2\alpha^2}{A^2}q = 0, \quad (32)$$

il cui integrale generale è il seguente:

$$q = C_1 \operatorname{Ch}\left(\frac{\mu\alpha\sqrt{2}}{A}s\right) + C_2 \operatorname{Sh}\left(\frac{\mu\alpha\sqrt{2}}{A}s\right).$$

Indicata con L la lunghezza del tronco forato, con q_0 la portata in arrivo da monte, e con Δ la quota piezometrica della corrente sotto il livello nel serbatoio di emungimento nella sezione terminale (fig. 13), le condizioni ai limiti risultano le seguenti:

$$\begin{cases} q = q_0 & \text{per } s = 0; \\ \frac{dq}{ds} = \mu\alpha\sqrt{2g\Delta} & \text{per } s = L. \end{cases}$$

Scelte inoltre le seguenti grandezze adimensionali:

$$x = \frac{\mu\alpha\sqrt{2}}{A}s; \quad y = \frac{q}{A\sqrt{2g\Delta}}; \quad z = \frac{h}{\Delta}; \quad w = \frac{H}{\Delta};$$

dal precedente integrale generale si ottiene la relazione:

$$y = y_0 \operatorname{Ch}x + \frac{\sqrt{2} - 2y_0 \operatorname{Sh}x_L}{2\operatorname{Ch}x_L} \operatorname{Sh}x, \quad (33)$$

che fornisce l'andamento della portata lungo il tronco forato; gli indici z ed L individuano le grandezze relative rispettivamente alla sezione iniziale ($s = 0$) e a quella terminale ($s = L$).

Dalla (29) e dalla (33) si può poi facilmente ricavare l'andamento della piezometrica ed anche quello della linea dei carichi totali, definite, in forma adimensionale, dalle relazioni:

$$z = 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2\left[y_0 \operatorname{Sh}x + \frac{\sqrt{2} - 2y_0 \operatorname{Sh}x_L}{2\operatorname{Ch}x_L} \operatorname{Ch}x\right]^2; \quad (34)$$

$$w = z - y^2 = \left[y_0 \operatorname{Sh}x + \frac{\sqrt{2} - 2y_0 \operatorname{Sh}x_L}{2\operatorname{Ch}x_L} \operatorname{Ch}x\right]^2 + \left[\frac{\sqrt{2} - 2y_0 \operatorname{Sh}x_L}{2\operatorname{Ch}x_L}\right]^2 - y_0^2. \quad (35)$$

Da queste due ultime relazioni si riconosce facilmente che ambedue le grandezze z e w sono crescenti con x ; ciò significa evidentemente che la linea dei carichi totali e la linea piezometrica sono entrambi discendenti nel senso del moto.

Dai valori che le variabili y, z, w assumono alle estremità del tronco forato ($x = 0$; $x = x_L$); si ricava che la portata emunta dal tubo forato vale:

$$y_L - y_0 = \frac{2y_0(1 - \operatorname{Ch}x_L) + 2\operatorname{Sh}x_L}{2\operatorname{Ch}x_L}, \quad (36)$$

mentre gli abbassamenti subiti dalla piezometrica e dalla linea dei carichi totali valgono:

$$z_L - z_0 = \frac{(1 - 2y_0) \operatorname{Sh}^2x_L + 2\sqrt{2}y_0 \operatorname{Sh}x_L}{\operatorname{Ch}^2x_L}, \quad (37)$$

$$w_L - w_0 = \frac{(1 - 2y_0^2) \operatorname{Sh}^2x_L + 2\sqrt{2}y_0 \operatorname{Sh}x_L}{2\operatorname{Ch}^2x_L}. \quad (38)$$

L'insieme delle relazioni dalla (33) in avanti permette di risolvere, direttamente o per tentativi, qualsiasi problema di dimensionamento o di verifica. Accenneremo qui di seguito a qualche caso particolare, tra quelli che più frequentemente ricorrono nella pratica.

Si voglia ad esempio determinare la lunghezza L che deve avere una condotta di assegnata sezione e con determinata area dei fori, affinché emunga una certa portata assegnata Q . Dalle condizioni esistenti a valle del tronco forato, essendo nota la portata $q_0 + Q$ che deve defluire a valle, si ricava il valore del dislivello Δ e quindi il rapporto:

$$\frac{Q}{A\sqrt{2g\Delta}} = y_L - y_0,$$

dalla (36) si ottiene allora la x_L e in definitiva la lunghezza L cercata.

Con lo stesso procedimento si può determinare l'area dei fori α necessaria per ottenere l'emungimento di una portata Q da una condotta di sezione e lunghezza assegnata.

Se invece vogliamo determinare la portata Q emunta da un tronco forato di assegnate caratteristiche (A, l, α) è necessario procedere per tentativi non essendo in questo caso conosciuto il dislivello Δ , il cui valore dipende in generale dalla portata Q cercata. In questo caso occorre provare con diversi valori di Δ , fino a trovare quello che soddisfa alle condizioni sia a valle sia a monte del tronco forato.

Una situazione che è assai frequente è quella di un tubo forato, chiuso all'estremità di monte e la cui sezione terminale sbocca a valle in un serbatoio (fig. 14); in tal caso dalla (36), essendo $y_0 = 0$, si ha

$$y_L = \frac{\sqrt{2}}{2} Thx_L, \quad (39)$$

relazione assai semplice che permette di risolvere direttamente qualsiasi

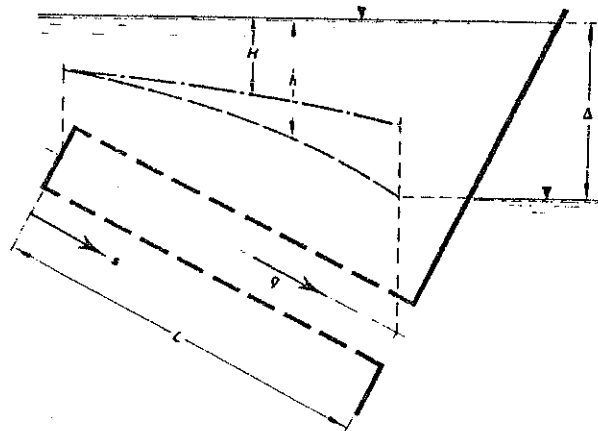


Fig. 14

problema di dimensionamento e di verifica per i quali non occorrono particolari spiegazioni.

Per questa situazione risulta invece interessante individuare gli andamenti della portata, della piezometrica e della linea dei carichi totali;

dalle (33), (34) e (35), con la condizione $y_0 = 0$, scelte le nuove variabili adimensionali:

$$y' = yChx_L; \quad z' = zCh^2x_L; \quad w' = wCh^2x_L,$$

si hanno le relazioni:

$$\left\{ \begin{aligned} y' &= \frac{\sqrt{2}}{2} Shx; \\ z' &= Ch^2x; \\ w' &= \frac{1 + Ch^2x}{2}; \end{aligned} \right. \quad (33')$$

$$(34')$$

$$(35')$$

la cui rappresentazione grafica di fig. 15, fornisce l'andamento (in forma

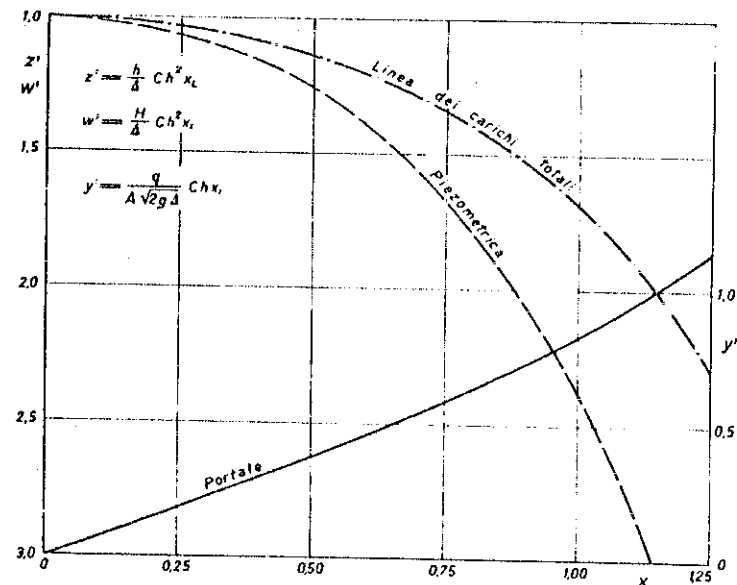


Fig. 15 - Condotta emungente a sezione costante ed area uniforme dei fori: andamenti della linea dei carichi totali, della piezometrica e delle portate.

adimensionate) della portata, della piezometrica e della linea dei carichi totali lungo il tubo.

3. Condotta con emungimento costante lungo il percorso. Consideriamo ancora lo schema di fig. 14, ove ora però la sezione A della condotta e

l'area α dei fori siano variabili lungo il percorso, mentre la portata q vari linearmente con s ; sia cioè:

$$q = ps$$

essendo p la portata costante entrante nella condotta per unità di lunghezza, pari ovviamente a:

$$p = \frac{dq}{ds} = \mu \alpha \sqrt{2gh} \quad (40)$$

Dalla (28), con questa ultima posizione, otteniamo:

$$\frac{dh}{ds} = J + \frac{2p^2s}{gA^2} - \frac{p^2s^2}{gA^3} \frac{dA}{ds} \quad (41)$$

Esplicitando h dalla (40), derivando rispetto ad s e quindi sostituendo nella (41) si ha in definitiva:

$$J + \frac{2p^2s}{gA^2} - \frac{p^2s^2}{gA^3} \frac{dA}{ds} + \frac{p^2}{g\mu^2\alpha^3} \frac{d\alpha}{ds} = 0, \quad (42)$$

relazione generale che permette di individuare la legge che occorre assegnare all'area A (oppure a quella α) una volta che sia nota la legge di variazione di α (oppure quella di A).

Per la cadente J scegliamo la formula di Gaukler-Strickler:

$$J = \frac{V^2}{k^2 R^{4/3}} = K \frac{p^2 s^2}{A^{8/3}},$$

dove k è il coefficiente che dipende soltanto dalla scabrezza, mentre K dipende anche dalla forma della sezione comprendendo il coefficiente di forma che lega il raggio idraulico all'area della sezione; ma in ogni caso essi sono indipendenti dall'area della sezione.

La (42) diventa allora:

$$K \frac{p^2 s^2}{A^{8/3}} + \frac{2p^2s}{gA^2} - \frac{p^2s^2}{gA^3} \frac{dA}{ds} + \frac{p^2}{g\mu^2\alpha^3} \frac{d\alpha}{ds} = 0. \quad (43)$$

a) Condotta con sezione di area costante ($A = \text{cost}$; $\frac{dA}{ds} = 0$). Dalla (43) si ha:

$$\frac{d\alpha}{ds} = -\alpha^3 \left[\frac{gK\mu^2}{A^{8/3}} s^2 + \frac{2\mu^2}{A^2} s \right];$$

indicato con Δ il dislivello fra i peli liberi nei due serbatoi, l'area dei fori nella sezione terminale ($s = L$) vale:

$$\alpha_L = \frac{p}{\mu \sqrt{2g\Delta}};$$

integrando allora fra la generica ascissa s e quella terminale $s = L$, si ottiene la relazione:

$$\frac{\alpha}{\alpha_L} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{p^2 K}{3\Delta A^{8/3}} (L^3 - s^3) - \frac{p^2}{g\Delta A^2} (L^2 - s^2)}}, \quad (44)$$

che definisce la legge di variazione dell'area dei fori; si riconosce immediatamente che l'area α diminuisce con s , raggiungendo il suo valore minimo α_L nella sezione terminale.

All'inizio del tronco forato l'area dei fori assume il valore:

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_L} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{p^2 K L^3}{3\Delta A^{8/3}} - \frac{p^2 L^2}{g\Delta A^2}}}, \quad (45)$$

in dipendenza dei valori di p , K , L , Δ , e A il termine sotto radice può assumere valore negativo e perciò l'area α_0 valore immaginario; è chiaro che qualora si verificasse un simile risultato, la condotta considerata non potrebbe funzionare con emungimento costante di portata p e sarebbe perciò necessario modificare qualche caratteristica del tronco forato.

Affinchè le condizioni di funzionamento siano reali deve allora sussistere la ovvia condizione:

$$p \leq \frac{A\sqrt{g\Delta}}{L} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{gKL}{3A^{2/3}}}}.$$

E' inoltre da osservare che, pur verificandosi questa condizione, può accadere che la α_0 sia così grande da non poter essere realizzata sulla parete del tubo; anche in tal caso si dovrà modificare qualche caratteristica del tronco forato.

Dalle (40) e (44) si ricava poi l'andamento della piezometrica, definito dalla relazione:

$$\frac{h}{\Delta} = 1 - \frac{p^2 K}{3\Delta A^{2/3}} (L^3 - s^3) - \frac{p^2}{g\Delta A^2} (L^2 - s^2), \quad (46)$$

ed anche l'andamento della linea dei carichi totali definito dalla relazione:

$$\frac{H}{\Delta} = i - \frac{p^2 K}{3 \Delta A^{2/3}} (l^3 - s^3) - \frac{p^2}{g \Delta A^2} (l^2 - \frac{s^2}{2}). \quad (47)$$

b) Condotta con area dei fori costante ($\alpha = \text{cost}$; $\frac{d\alpha}{ds} = 0$). Dalla (43) si ha:

$$\frac{dA}{ds} = gKA^{1/3} + 2 \frac{A}{s};$$

indicata con A_l l'area della condotta per $s = L$, integrando si ottiene la relazione:

$$\frac{A}{A_l} = \frac{s^2}{L^2} \left\{ 1 + \frac{2gKL}{A_l^{2/3}} \left[1 - \left(\frac{l}{s} \right)^{1/3} \right] \right\}^{3/2}. \quad (48)$$

che definisce l'andamento della sezione trasversale della condotta.

La variazione di A non dipende né dall'area dei fori, né dalla portata unitaria emunta, e neppure dal dislivello fra i due serbatoi.

D'altra parte si riconosce dalla (48) che l'area A è reale e positiva soltanto quando:

$$s > \frac{L}{\left(\frac{A_l^{2/3}}{2gKL} + 1 \right)^{3/2}}$$

questa condizione indica che, con una condotta ad area dei fori costante e sezione trasversale variabile, l'emungimento di una portata costante per unità di lunghezza è realizzabile soltanto quando defluisce una portata non nulla attraverso la sezione iniziale del tronco forato.

Dalla (40) si vede immediatamente che la piezometrica deve essere orizzontale alla quota del pelo libero del serbatoio di valle; l'area dei fori costante vale:

$$\alpha = \frac{p}{\mu \sqrt{2g\Delta}}$$

B - Correnti con portata decrescente.

Consideriamo il caso generale di una condotta ad andamento comunque curvilineo, con fori di area variabile lungo il percorso, dalla quale si ha una erogazione con sbocco nell'atmosfera (fig. 16); il processo di movimento avverrebbe in modo del tutto analogo anche quando il condotto fosse im-

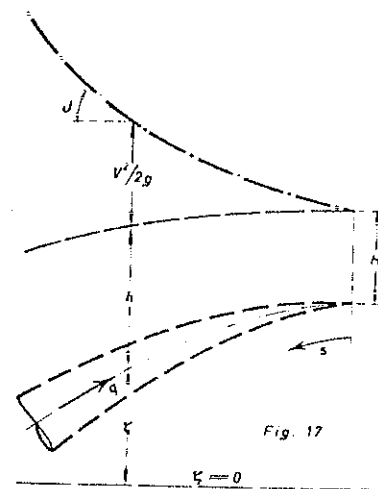


Fig. 16

merso in acqua e l'efflusso rigurgitato; anzi in tal caso esso si semplificherebbe perché evidentemente l'andamento altimetrico della condotta non eserciterebbe più alcuna influenza e la condotta si comporterebbe come se fosse rettilinea ed orizzontale con efflusso nell'atmosfera e con l'asse posto alla quota dello specchio liquido del serbatoio di valle.

Amnesso che il moto entro la condotta sia permanente e lineare, chiamate ζ la quota geometrica del baricentro della sezione di ascissa s e h la relativa altezza piezometrica, il processo di movimento può considerarsi retto dalla solita equazione:

$$J = \frac{d}{ds} \left(\zeta + h + \frac{V^2}{2g} \right), \quad (49)$$

nella quale J rappresenta la cadente della linea dei carichi totali, funzione di s tramite l'area A della sezione e la velocità $V = q/A$; per

quanto riguarda la J si può ammettere che essa assuma lo stesso valore che si avrebbe, a parità di portata, in condizioni di moto uniforme e risultino perciò adottabili per il suo calcolo le solite formule del moto uniforme; in particolare, come già fatto per il caso delle correnti con portata crescente, in tutta la successiva trattazione verrà fatto riferimento alla formula di Gaukler-Strickler:

$$J = \frac{V^2}{k^2 R^{4/3}} = K \frac{q^2}{A^{8/3}},$$

dove il coefficiente K dipende dalla scabrezza, dalla forma della sezione ma non dell'area A .

Esplicitando i diversi termini al secondo membro della (49), si ottiene la relazione:

$$K \frac{q^2}{A^{8/3}} = \frac{d\zeta}{ds} + \frac{dh}{ds} + \frac{q}{gA^2} \frac{dq}{ds} - \frac{q^2}{gA^3} \frac{dA}{ds}, \quad (50)$$

alla quale va associata l'equazione dell'efflusso dai fori, per la quale ammettiamo che valga la formula di Torricelli, ove si ponga il carico pari all'altezza piezometrica della corrente nella generica sezione della condotta che si considera; poniamo cioè:

$$\frac{dq}{ds} = \mu \alpha \sqrt{2gh}, \quad (51)$$

essendo μ il coefficiente di efflusso dei fori che riteniamo, almeno in prima approssimazione, costante per l'intera lunghezza del tronco forato.

Ricavando dalla (51) l'altezza piezometrica h , derivando rispetto a s e infine sostituendo nella (50) si ottiene:

$$K \frac{q^2}{A^{8/3}} = \frac{d\zeta}{ds} + \left[\frac{1}{g\mu^2\alpha^2} \frac{d^2q}{ds^2} + \frac{q}{gA^2} \right] \frac{dq}{ds} - \frac{q^2}{gA^3} \frac{dA}{ds} - \frac{1}{g\mu^2\alpha^3} \left(\frac{dq}{ds} \right)^2 \frac{d\alpha}{ds}, \quad (52)$$

equazione differenziale questa che regge il processo di movimento nel caso generale; con essa possono risolversi tutti i diversi problemi di dimensionamento e di verifica. In ciò che segue verranno esaminati alcune situazioni particolari fra quelle che più di frequente si riscontrano nella pratica; in ogni caso verranno considerate soltanto condotte ad asse rettilineo ed orizzontale, cosicchè risulti $\frac{d\zeta}{ds} = 0$.

1. Condotta orizzontale a sezione ed area dei fori costante lungo il percorso ($\frac{dA}{ds} = 0$; $\frac{d\alpha}{ds} = 0$).

Dalla (52) si ottiene:

$$K \frac{q^2}{A^{8/3}} = \left[\frac{1}{g\mu^2\alpha^2} \frac{d^2q}{ds^2} + \frac{q}{gA^2} \right] \frac{dq}{ds}. \quad (53)$$

Assumiamo ora le seguenti variabili adimensionali:

$$x = \frac{s}{L^*}; \quad y = \frac{q}{Q^*}; \quad \lambda = \frac{2gKA^{1/3}}{\mu\alpha}$$

dove $L^* = \frac{\pi}{2} \frac{A}{\mu\alpha}$ e $Q^* = A\sqrt{2gH_0}$, essendo H_0 il carico totale della corrente nella sezione (reale o fittizia) di ascissa $s = 0$, nella quale la portata è o sarebbe nulla. Dalla (53) si ha allora la relazione:

$$2 \left[\frac{4}{\pi^2} \frac{d^2y}{dx^2} + y \right] \frac{dy}{dx} - \frac{\pi}{2} \lambda y^2 = 0, \quad (54)$$

che in forma differenziale, fornisce la variazione della portata lungo il tronco forato. Questa equazione non è in generale integrabile, se non per il caso di perdite nulle ($\lambda = 0$). Una simile ipotesi può essere accettata con sufficiente approssimazione se il tronco forato ha lunghezza limitata, e cioè quando effettivamente le perdite di carico possono ritenersi trascurabili; comunque ammesso $\lambda = 0$ dalla (54) si ricava l'equazione differenziale:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\pi^2}{4} y = 0,$$

che integrata con le condizioni ai limiti:

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 \quad (q = 0) \\ \frac{dy}{dx} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{dq}{ds} = \mu\alpha\sqrt{2gH_0} \right) \end{array} \right\} \text{ per } x = 0 \quad (s = 0)$$

fornisce la semplice relazione:

$$y = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad (55)$$

che dà la distribuzione della portata lungo il tronco forato.

Posto poi:

$$z = \frac{h}{H_0},$$

dalla (55) e dalla (51) si ottiene la relazione:

$$z = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad (56)$$

che dà l'andamento della piezometrica lungo il tronco forato.

Si riconosce facilmente che l'altezza piezometrica decresce dal valore $h = H_0$ per $s = 0$ fino al minimo $h = 0$ proprio alla distanza finita L^* più sopra definita; questo risultato porterebbe alla conclusione che se il tronco forato avesse una lunghezza superiore ad L^* la portata erogata non potrebbe superare il valore massimo $Q^* = AV\sqrt{2gH_0}$ (che si verifica per $s = L^*$), poichè la piezometrica una volta raggiunto l'asse della condotta non potrebbe mantenersi, naturalmente in assenza di perdite di carico, altro che coincidente con l'asse stesso, rendendo con ciò nullo l'efflusso dai fori sui quali il carico diventerebbe nullo; il processo di movimento con portata decrescente si manifesterebbe perciò soltanto nel tratto estremo della condotta, di lunghezza L^* . Tutto ciò non può trovare un esatto riscontro nella realtà, dove esistono le perdite di carico. Ciò è ben visibile nel grafico di fig. 17, ove sono tracciate le piezometriche e le curve delle portate, relative a diversi valori del coefficiente λ (e perciò a condotte con perdite di carico); tali curve sono state ottenute per integrazione alle differenze finite della (54).

Il diagramma mostra che per $\lambda > 0$ (cioè quando si tiene conto delle perdite di carico) le piezometriche ammettono tutte un minimo avente ordinata maggiore di zero e tanto più grande quanto più elevato è il valore di λ . L'andamento della piezometrica si discosta da quello relativo alla condizione di perdite nulle ($\lambda = 0$) tanto più, quanto maggiore è il valore di λ e quanto più grande è l'ascissa x : ciò significa che le semplici relazioni (55) e (56) relative alla condizione $\lambda = 0$ possono essere impiegate con buona approssimazione soltanto quando i valori del parametro λ sono piccoli, oppure quando il tronco forato ha lunghezza abbastanza inferiore a L^* ed eroga l'intera o quasi tutta la portata in arrivo.

Occorre però notare che nei confronti delle portate, l'approssimazione che si raggiunge ponendo $\lambda = 0$, risulta maggiore che non per le altezze piezometriche, come appare chiaramente dalla stessa fig. 17, dove le cur-

ve delle portate con $\lambda > 0$ appaiono per larghi intervalli assai prossime a quella con $\lambda = 0$: ciò è del resto facilmente spiegabile se si pone mente al fatto che la portata erogata è proporzionale alla radice dell'altezza piezometrica.

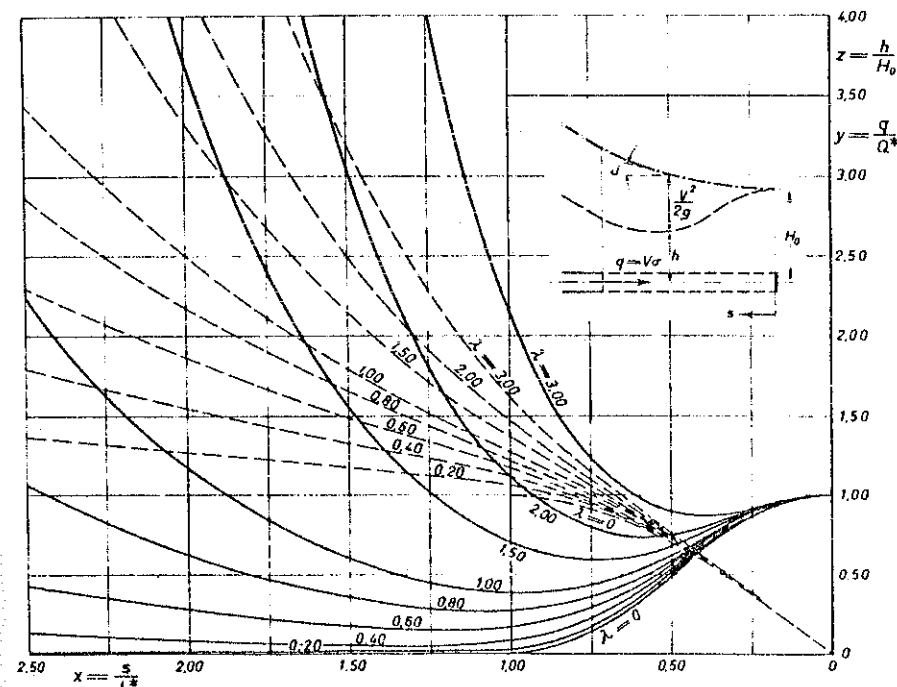


Fig. 17 - Condotte orizzontali con sezione ed area dei fori costanti lungo il percorso: andamenti della piezometrica e della portata.

Le curve di fig. 17 sono di utile ausilio per la soluzione di diversi problemi pratici.

Si voglia determinare la lunghezza L di un tronco forato di una condotta di caratteristiche note (A, α, μ) necessaria per erogare la portata $Q_e = Q_1 - Q_2$, essendo assegnata la portata Q_1 e l'altezza piezometrica h_1 nella sezione iniziale. Il valore del carico H_0 viene determinato per tentativi in modo che i due valori adimensionali y_1 e z_1 , letti sulle due corrispondenti curve di uguale parametro λ siano relativi alla stessa ascissa x_1 . L'ascissa x_2 della sezione terminale è subito otte-

nuta come ascissa relativa all'ordinata y^2 ; la lunghezza cercata vale:

$L=L^*(x_1-x_2)$. Procedimento identico si adotta quando siano assegnate Q_2 e h_2 .

Criteri del tutto analoghi servono per determinare la portata erogata da un tronco di lunghezza assegnata.

2. Condotta orizzontale con erogazione uniforme lungo il percorso

($\frac{dq}{ds} = p = \text{cost}$). Questa condizione può essere realizzata con l'assegnazione di idonee leggi di variazione dell'area della condotta e di quella dei fori; in pratica si preferisce mantenere costante una di tali grandezze e variare l'altra.

a) Condotta con area costante ($A = \text{cost}$; $\frac{dA}{ds} = 0$)

Dalla (50), poste le condizioni:

$$\frac{d\zeta}{ds} = 0; \quad q = ps; \quad \frac{dq}{ds} = p; \quad \frac{dA}{ds} = 0,$$

si ottiene la relazione:

$$\frac{dh}{ds} = K \frac{p^2 s^2}{A^{8/3}} - \frac{p^2 s}{gA^2},$$

che integrata con la condizione iniziale $h = H_0$, per $s=0$, fornisce l'andamento della piezometrica:

$$h = H_0 + \frac{Kp^2}{3A^{8/3}} s^3 - \frac{p^2}{2gA^2} s^2. \quad (57)$$

Sostituendo detto valore dell'altezza piezometrica nella (51) si ottiene:

$$\alpha = \frac{p}{\mu \sqrt{2g \left\{ H_0 + \frac{Kp^2}{3A^{8/3}} s^3 - \frac{p^2}{2gA^2} s^2 \right\}}}; \quad (58)$$

risulta così determinata, sezione per sezione, l'area da assegnare ai fori per ottenere la distribuzione costante della portata p .

Come già visto per l'analogo caso di emungimento costante, si riconosce che per determinate caratteristiche della condotta, l'area α assume valore immaginario per ascisse s superiori a un ben determinato valo-

re s^* di facile determinazione; in tal caso, se la condotta ha lunghezza maggiore di s^* e si vuol mantenere in essa l'erogazione uniforme, sarà necessario modificare l'area A della condotta oppure il carico H_0 in modo che sussista, per qualunque s , la ovvia condizione:

$$H_0 + \frac{Kp^2}{3A^{8/3}} s^3 - \frac{p^2}{2gA^2} s^2 \geq 0.$$

E' inoltre da osservare che può accadere che l'area α sia talmente grande da non poter essere realizzata sulla parete del tubo; anche in tal caso si dovrà modificare qualche caratteristica del tronco forato.

b) Condotta con area dei fori costante ($\alpha = \text{cost}$; $\frac{d\alpha}{ds} = 0$). Dalla (52)

con le condizioni:

$$\frac{d\zeta}{ds} = 0; \quad q = ps; \quad \frac{dq}{ds} = p; \quad \frac{d\alpha}{ds} = 0,$$

si ottiene la relazione:

$$\frac{dA}{ds} = \frac{A}{s} - gKA^{1/3},$$

che integrata, con la condizione $A = A_L$ per $s = L$, fornisce la variazione dell'area della condotta:

$$\frac{A}{A_L} = \frac{s}{L} \left\{ 1 + \frac{2gKL}{A_L^{2/3}} \left[1 - \left(\frac{s}{L} \right)^{1/3} \right] \right\}^{3/2} \quad (59)$$

La variazione di A non dipende né dall'area dei fori, né dalla portata unitaria erogata, e neppure dal carico finale H_0 ; ciò significa che, una volta scelto il tipo di condotta e la sua sezione A_L , la forma definita dalla (59) assicura una erogazione uniforme qualunque siano la portata in arrivo, l'area dei fori e il carico finale.

Al riguardo di A_L , nella pratica risulterà opportuno assumere il valore assegnato alla sezione iniziale del tronco forato.

Dalla (59) si riconosce che l'area A diventa nulla per $s = 0$; questa condizione ovviamente non è però realizzata in pratica in quanto con sezione nulla (o quasi) non è più possibile mantenere l'area dei fori necessaria all'erogazione della portata p ; la condotta dovrà perciò terminare con

sezione non nulla e quindi avere all'estremità una portata diversa da zero, che può essere erogata da una idonea luce terminale.

Dalla (51) si riconosce immediatamente che la piezometrica deve essere orizzontale alla quota H_0 ; l'area dei fori vale perciò:

$$a = \frac{p}{\mu \sqrt{2gH_0}}$$

A P P E N D I C E

Caratteristiche della spinta totale

Come già detto in precedenza, chiamiamo spinta totale della corrente in una generica sezione la somma della spinta idrostatica e della quantità di moto; con i simboli adottati l'espressione generale della spinta totale è la seguente:

$$\gamma \Sigma = \gamma \left(A h_b + \frac{q^2}{gA} \right);$$

ad essa può essere associata una particolare profondità della corrente denominata profondità totale H, tale che la spinta idrostatica

$$\gamma A_H h_{bH},$$

corrispondente a detta profondità è esattamente uguale alla spinta totale; possiamo perciò scrivere:

$$A h_b + \frac{q^2}{gA} = A_H h_{bH} = f(H). \quad (a)$$

Considerata una corrente potremo allora anche tracciare una linea delle spinte o delle profondità totali, come luogo dei punti che per ogni sezione sovrastano verticalmente al fondo di una quantità pari alla profondità totale della sezione.

Assegnata la forma della sezione, la (a) costituisce un legame univoco fra la profondità h , la portata q della corrente e la profondità totale H , il cui significato può essere facilmente chiarito attraverso l'esame di alcune situazioni particolari.

Consideriamo dapprima la curva che fornisce i valori della spinta totale Σ in funzione di quelli della profondità h della corrente per un particolare valore costante q della portata. Nota la forma della sezione (e cioè nota la funzione $A = A(h)$), le due grandezze:

$$\gamma_1 = A h_b;$$

$$\gamma_2 = \frac{q^2}{gA},$$

sono ambedue funzioni unicamente della profondità h , la prima crescente, la seconda decrescente al crescere di h ; tracciamo su un diagramma cartesiano le corrispondenti curve ed anche quella somma delle due: le ordinate di quest'ultima curva forniscono evidentemente i valori di Σ correlativi ad ogni valore di h (fig. 18).

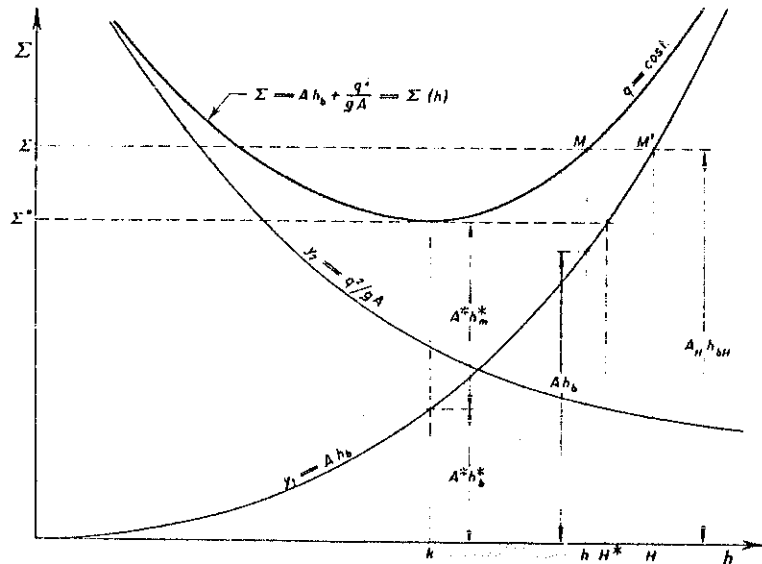


Fig. 18

Data una generica profondità h , la ordinata del punto M che ad essa corrisponde sulla curva $\Sigma = \Sigma(h)$, rappresenta il valore Σ , mentre l'ascissa del punto M' della curva $\gamma_1 = Ah_b$, che ha ordinata pari a quella di M , rappresenta la profondità totale H relativa ad h .

La curva $\Sigma = \Sigma(h)$, a q costante, presenta un minimo, il quale cade esattamente in corrispondenza della profondità critica k , relativa alla portata q . Infatti dalla (a) si ha:

$$\frac{d\Sigma}{dh} = \frac{d}{dh}(Ah_b) - \frac{q^2}{gA^2} \frac{dA}{dh}$$

tenuto presente che $\frac{d(Ah_b)}{dh} = A$ e indicato con $l = \frac{dA}{dh}$ la larghezza dello specchio liquido e con $h_m = \frac{A}{l}$ la profondità media della sezione,

risulta:

$$A\sqrt{gh_m} = q, \quad (b)$$

relazione questa che, come ben noto, è verificata proprio quando la corrente assume lo stato critico con profondità k .

Chiamati rispettivamente A^* , h_b^* , h_m^* i valori corrispondenti allo stato critico, si ricava la minima spinta totale $\gamma\Sigma^*$ per la quale la portata assegnata q può ancora defluire attraverso la sezione considerata; risulta in particolare:

$$\Sigma^* = A^*(h_b^* + h_m^*);$$

il valore della profondità totale H^* che è critica per la stessa portata q , si desume in modo ovvio dalla curva $\gamma_1(h)$ (fig. 18) o direttamente dalla (a).

Consideriamo ora il caso in cui, per una determinata sezione sia assegnato un particolare valore $\gamma\Sigma$ della spinta totale e quindi anche un particolare valore della profondità totale H (definita dalla condizione $\Sigma = A_H h_b H$); la relazione (a) definisce allora tutte le portate che possono defluire in quella sezione compatibilmente con quel valore Σ (o con il corrispondente valore H): queste portate sono date dalla relazione:

$$q = A\sqrt{g\left(\frac{\Sigma}{A} - h_b\right)} = A\sqrt{g\left(\frac{A_H}{A}h_b H - h_b\right)} \quad (c)$$

Il secondo membro è evidentemente una funzione della sola h , esso si annulla sia per $A=0$ ($h=0$), sia per $\Sigma = Ah_b$, cioè per $h=H$, ed è massimo per i particolari valori di A e h_b che soddisfano alla relazione

$$\frac{dq}{dh} = \frac{g}{2} \frac{l(A_H h_b H - Ah_b) - A^2}{\sqrt{gA(A_H h_b H - Ah_b)}} = 0,$$

cioè

$$A_H h_b H = A(h_b + h_m);$$

indicati con A^* , h_b^* , h_m^* i valori che soddisfano questa relazione, introducendoli nella (c) si ottiene:

$$q_{max} = A^* \sqrt{gh_m^*};$$

confrontata con la (b), questa relazione viene a dire che A^* e h_m^* sono elementi dello stato critico per il moto della portata q_{max} nella sezione considerata. Cioè la massima portata compatibile con l'assegnata profondità totale H , si verifica quando la corrente è critica con profondità k critica per quella portata.

La curva rappresentata dalla (c) assume in generale l'andamento qualitativo di fig. 2, dove ascisse sono le q e ordinate le h ; essa ha tangente orizzontale tanto per $h=0$; quanto per $h=H$; i punti del ramo superiore ai massimo rappresentano correnti lente, quelli del ramo inferiore correnti veloci.

Una generica portata $q < q_{max}$ può defluire nella sezione assegnata in due diversi stati di moto, caratterizzati da due profondità h' e h'' (fig. 2) coniugate, l'una inferiore, l'altra superiore alla critica; tenendo presente che, come ben noto, in un risalto si mantiene costante la spinta totale della corrente, queste due profondità coniugate h' e h'' potrebbero essere profondità iniziale e finale di un risalto, per una corrente di portata q defluente in un alveo prismatico con sezione pari a quella assegnata.

NOTE BIBLIOGRAFICHE

La bibliografia è limitata alle fonti principali che trattano i diversi argomenti, avendo speciale riguardo, per l'uso degli studenti, alle pubblicazioni italiane.

CORRENTI A PELO LIBERO

- [1] ACKERS P.: A theoretical consideration of side weirs as stormwater overflows. Proc. Inst. of Civil Engineers, Vol. 6, London 1957.
- [2] ALLEN J.: The discharging of water over side weirs in circular pipe. Proc. Inst. of Civil Engineers, Vol. 6, London 1957.
- [3] ARREDI F.: Sul calcolo dei canali collettori laterali di sfioratori. L'Acqua, Agosto 1941.
- [4] BELJ K. H.: Flow in roof gutter. Journal of Research, Febbraio 1934.
- [5] CITRINI D.: Ricerca di una formula semplificata per il dimensionamento pratico degli stramazzi longitudinali. L'Energia Elettrica, Settembre 1938.
- [6] CITRINI D.: Canali rettangolari con portata e larghezza gradualmente variabili. L'Energia Elettrica, Maggio-Giugno 1942.
- [7] CITRINI D.: Canali rettangolari con apporto laterale di portata. L'Energia Elettrica, Aprile 1948.
- [8] COLEMAN G. S. - SMITH D.: The discharging capacity of side weirs. Institution of Civil Engineers, Selected Engineering Papers n. 6, London 1923.
- [9] COLLINGE V.: The discharge capacity of side weirs. Proc. Inst. of Civil Engineers, Vol. 6, London 1957.

- [10] DE MARCHI G. : Saggio di teoria del funzionamento degli stramazzi laterali. L'Energia Elettrica, Novembre 1934.
- [11] DE MARCHI G. : Canali con portata progressivamente crescente. L'Energia Elettrica, Giugno 1941.
- [12] DULNEV V. B. : Correnti permanenti con portata variabile, defluenti in canali aperti (in russo). Rendiconti dell'Accademia delle Scienze U. R. S. S., Vol. 1, 1955.
- [13] EHRENBERGER R. : Modellversuche über Streichwehre mit besonderer Berücksichtigung der geplanten Hochwasserentlastungen an der Gail. Die Wasserwirtschaft, n. 11-12, 13-14, 15, 1934.
- [14] ENGELS H. : Mitteilungen aus dem Dresdener Flussbau-Laboratorium. Forschungsarbeiten, Heft 200 e 201, Berlin 1917.
- [15] FAVRE H. : Contribution à l'étude des courants liquides. Rascher e C., Zurich, 1933.
- [16] FAVRE - BRAENDLE : Expériences sur le mouvement permanent de l'eau dans les canaux découverts, avec apport ou prélèvement le long du courant. Bulletin Technique de la Suisse Romande, n. 8, 9, 11, 1937.
- [17] FERROGLIO L. : Contributo allo studio degli sfioratori laterali. L'Energia Elettrica, Dicembre 1941.
- [18] FERROGLIO L. : Ricerche sperimentali sugli sfioratori laterali. L'Energia Elettrica, Gennaio 1942.
- [19] FRAZER W. : The behaviour of side weirs in prismatic rectangular channels. Proc. Inst. of Civil Engineers, Vol. 6, London, 1957.
- [20] GENTILINI B. : Ricerche sperimentali sugli sfioratori longitudinali. L'Energia Elettrica, Settembre 1938.

- [21] GEORGESCU P. - BRATU C. - VIECELLI A. : Problemi speciali dello sfioratore laterale. VI Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, Padova, 1959.
- [22] GUSBERTI G. L. : Canali collettori da tagli artificiali. Studio del profilo liquido. VI Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, Padova, 1959.
- [23] HINDS J. : Side channel spillways: hydraulic theory ecc. Trans. of Am. Soc. of Civil Engineers, Vol. 89, 1926.
- [24] MACHNE G. : Profili di rigurgito in un canale con portata progressivamente crescente. Tecnica Italiana, Dicembre 1957.
- [25] MAIONE U. : Profili di corrente in canali prismatici con portata progressivamente crescente. L'Acqua, Gennaio-Febbraio 1962.
- [26] MAIONE U. : Canali con portata uniformemente crescente. Rendiconti dell'Istituto Lombardo - Accademia di Scienze e Lettere, Classe di Scienze (A), Vol. 96, 1962.
- [27] MAIONE U. : Contributo sperimentale allo studio delle correnti con portata uniformemente crescente. VIII Convegno di Idraulica, Pisa, Aprile 1963.
- [28] MARONE V. : Coefficienti di efflusso degli sfioratori longitudinali. L'Energia Elettrica, Gennaio 1964.
- [29] NOSEDA G. : Correnti permanenti con portata progressivamente decrescente, defluenti su griglie di fondo. L'Energia Elettrica, Gennaio e Giugno 1956.
- [30] NOSEDA G. : Correnti permanenti con contemporanea immissione ed erogazione lungo il percorso. L'Energia Elettrica, Agosto 1957.
- [31] PADERI F. : Sul funzionamento degli stramazzi laterali. Ricerche di Ingegneria, n. 3, 1936.

- [32] RUGGIERO C. : Sul calcolo di sfioratori e collettori laterali. L'Energia Elettrica, Aprile 1942.
- [33] SASSOLI F. : Canali collettori laterali a forte pendenza. L'Energia Elettrica, Gennaio 1959.
- [34] SASSOLI F. : Ricerca sperimentale sugli sfioratori laterali in canali a sezione circolare. VIII Convegno di Idraulica, Pisa, Aprile 1963.
- [35] SCHMIDT M. : Zur Frage des Abflusses über Streichwehren. Mitteilungen aus dem Institut für Wasserbau - Technischen Universität Berlin-Charlottenburg, N. 41, 1954.
- [36] SCHMIDT M. : Die Berechnung von Streichwehren. Die Wasserwirtschaft, N. 4, Gennaio 1955.
- [37] VELATTA M. : Contributo sperimentale allo studio degli sfioratori laterali. L'Energia Elettrica, Luglio 1934.
- [38] VIPARELLI C. : Sui proporzionamento di canali collettori a servizio di scarichi di superficie. L'Energia Elettrica, Giugno 1952.
- [39] ZSCHIESCHE O. : Die Berechnung von Streichwehren auf Grund von Modellversuchen mit geraden und schräggestellten Streichwehren. Veröff. Forschungsanstalt, Schifffahrt, Wasser-und Grundbau, N. 2, Berlin, 1954.

CORRENTI IN PRESSIONE

- [40] CITRINI D. : Correnti in pressione con portata variabile lungo il percorso. L'Energia Elettrica, Maggio 1952.
- [41] DATEI G. : I condotti emungenti da un serbatoio. Memorie della Accademia patavina di Scienze Lettere ed Arti; Classe di Scienze Matematiche e Naturali, Vol. LXXIV, 1961-62.

- [42] GIUDICI P. : Irrigazione per scorrimento mediante condotte ad acqua in pressione forate. La Irrigazione a Pioggia, Settembre 1955.
- [43] INDRI E. : Ricerche sperimentali sui condotti emungenti da vasca. L'Energia Elettrica, Dicembre 1958.
- [44] NOSEDA G. : Erogazione costante di portata da una condotta forata in pressione. Relazioni su ricerche e studi promossi dall'ANIDEL, 1957.
- [45] NOSEDA G. : Ricerca sperimentale sul moto permanente di correnti in pressione con portata decrescente. L'Energia Elettrica, Gennaio 1959.
- [46] NOSEDA G. : Condotta in pressione forata per l'emungimento di portata costante per unità di percorso. Rendiconti dell'Istituto Lombardo - Accademia di Scienze e Lettere, Classe di Scienze (A), Vol. 93, 1959.