

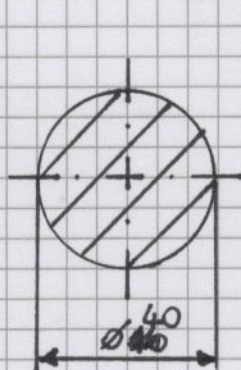
CARICO : $q = 5 \text{ N/mm}$

MATERIALE : ACCIAIO

$E = 210 \text{ GPa}$ $\nu = 0.3$

$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 80.7692 \text{ GPa}$

SEZIONE : CIRCOLARE PIENA



$A = \frac{\pi D^2}{4} = 1256.6371 \text{ mm}^2$

$I = \frac{\pi D^4}{64} = 125663.7061 \text{ mm}^4$

$\chi = \frac{10}{3} = 1.11$

CARATTERISTICHE GEOMETRICHE

$L_{AB} = 400 \text{ mm}$ $L_{BC} = \sqrt{400^2 + 200^2} = 447.2136 \text{ mm}$

$\alpha = \arctan\left(\frac{400}{200}\right) = 63.4349^\circ$

STATICITÀ E LABILITÀ

• La trave è composta da 2 aste, per un totale di $2 \cdot 3 = 6$ GDL.

Abbiamo 2 vincoli esterni, rispettivamente gli incastri in A e B, che in totale forniscono 6 GAV. Abbiamo anche un vincolo interno, la cerniera B, che fornisce 2 GAV.

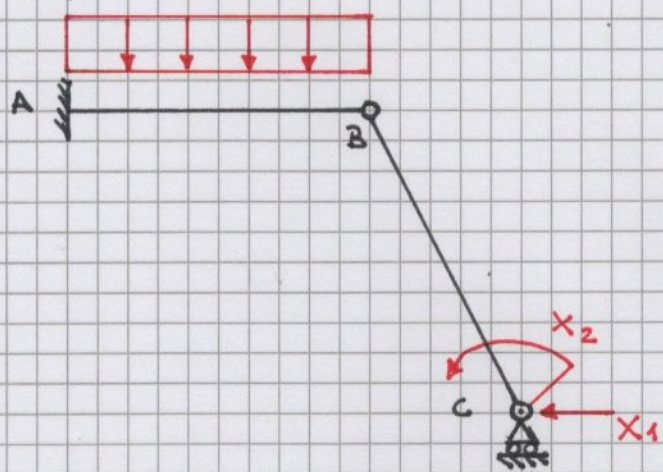
$GAV = 8$ $GDL = 6$ \rightarrow Struttura IPERSTATICA 2 VOLTE.

• I tratti AB e BC, avendo gli estremi incastri sono fissi, quindi la struttura è non labile.

APPLICAZIONE DEL METODO DELLE FORZE.

Come primo passo è necessario definire una struttura isostatica, eliminando i GAV in eccesso, senza rendere labile la struttura.

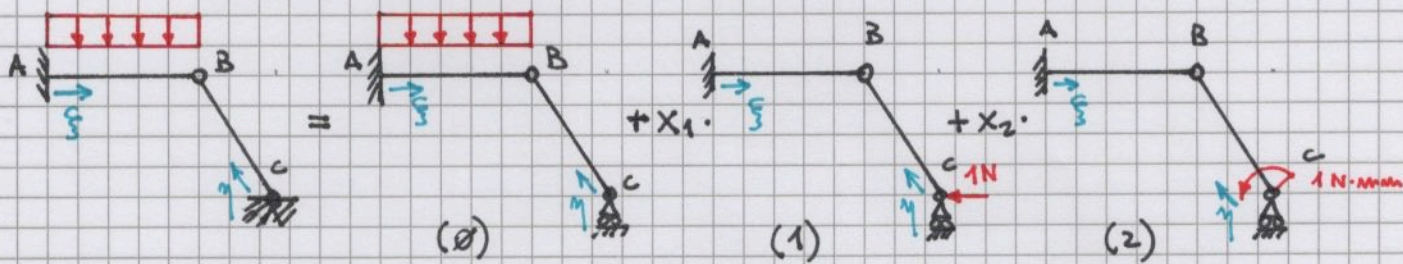
Una possibile scelta è la seguente:



Si sostituisce l'incastro C con un carrello, sui vanno aggiunte le reazioni ipostatiche X_1 e X_2 . Il sistema è chiaramente non labile in quanto il tratto AB, è incastro ad una estremità. Si considera la cerniera B e quindi ad una cerniera e tenne. Il tratto BC è

non labile perché la retta del CIR del carrello non interseca la cerniera B.

Per l'applicazione del metodo è necessario identificare le strutture (0), (1) e (2).



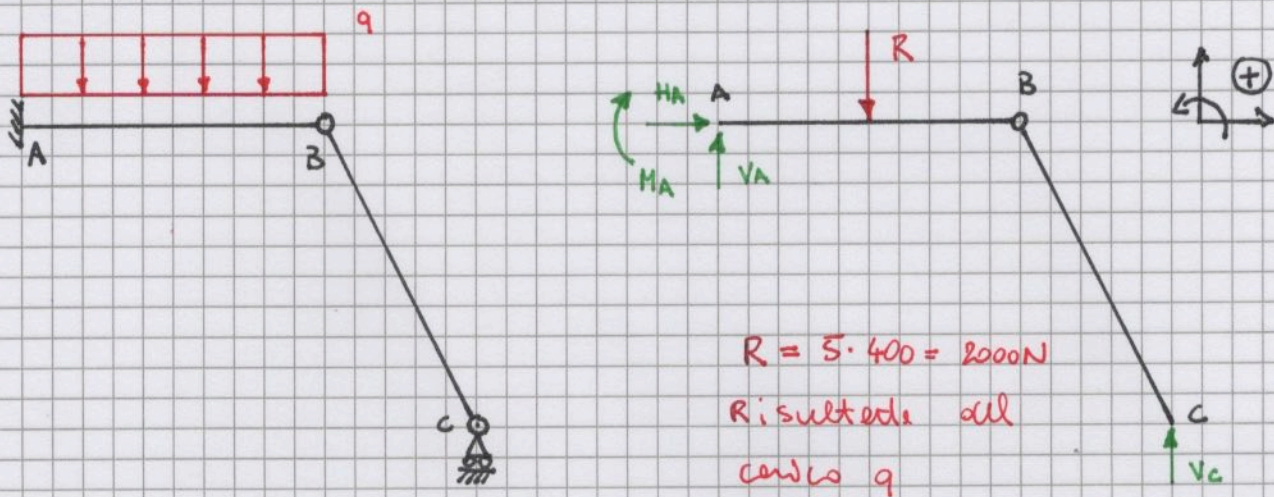
$$N = N_0 + X_1 N_1 + X_2 N_2$$

$$T = T_0 + X_1 T_1 + X_2 T_2$$

$$M = M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2$$

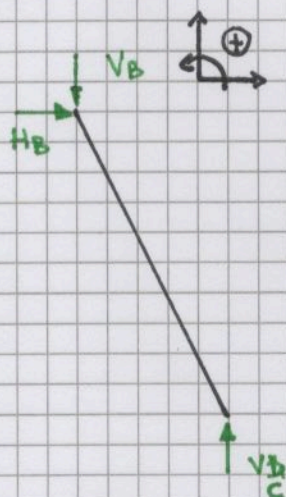
N_0	N_1	N_2
T_0	T_1	T_2
M_0	M_1	M_2

Scegliamo due coordinate arbitrarie per esprimere le azioni interne sui due tratti AB e BC. Queste dovranno essere mantenute invariate per lo studio delle strutture (0), (1) e (2).



È evidente che un equilibrio globale della struttura non potrebbe nulla di nuovo, in quanto sono presenti 4 incognite ma 3 sole equazioni di equilibrio. Si procede quindi a fase degli equilibri possibili.

TRATTO \overline{BC}



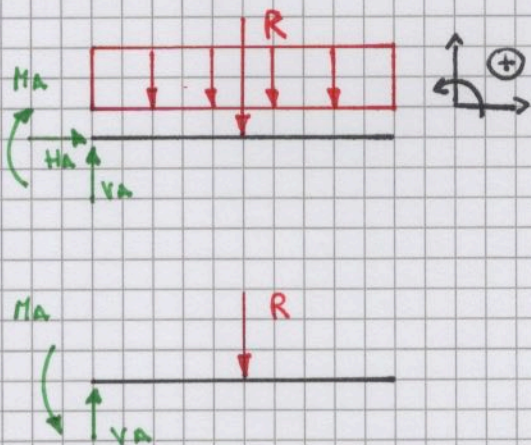
$$\rightarrow H_B = \phi$$

$$\uparrow^+ V_B = V_C \quad (V_C - V_B = \phi)$$

$$\curvearrowright^+ B) V_C \cdot 200 = \phi \rightarrow V_C = \phi ; V_B = V_C = \phi$$

Le azioni reazioni tranne al tratto AB sono nulle.

TRATTO \overline{AB}



$$V_A - R = \phi \rightarrow V_A = R = 2000 \text{ N}$$

$$H_A = \phi$$

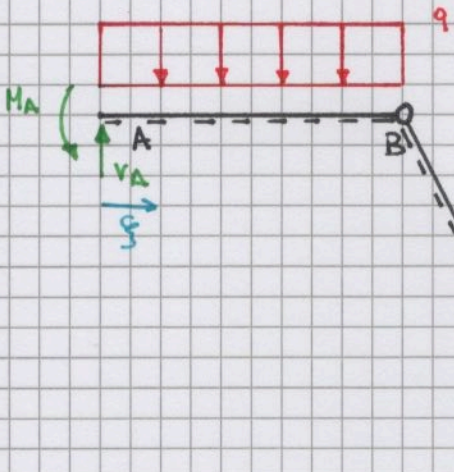
$$-M_A - R \cdot 200 = \phi$$

$$M_A = -R \cdot 200 = -400'000 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Come al solito cambiano segno a M_A e invertano il verso nel disegno.

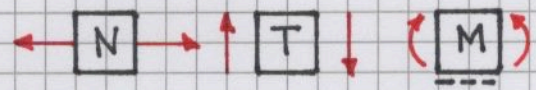
STRUTTURA (0)

Ricerca reazioni vincolari.



$$\begin{cases} H_A = \emptyset \\ V_A = 2000 \text{ N} \\ M_A = 400'000 \text{ Nmm} \\ V_C = \emptyset \end{cases}$$

CONVENZIONI AZIONI INTERNE

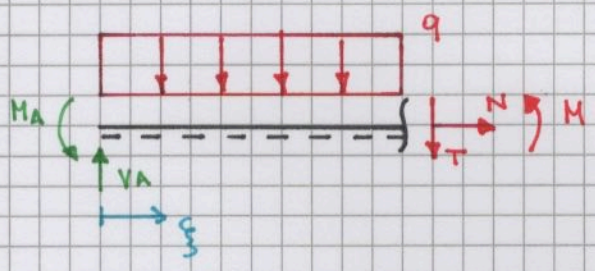


CALCOLO AZIONI INTERNE (0)

TRATTO BC $0 < \eta < L_{BC}$

$$N_{BC}^{(0)} = T_{BC}^{(0)} = M_{BC}^{(0)} = \emptyset$$

TRATTO AB $0 < \xi < 400$



$$\begin{aligned} N_{AB}^{(0)} &= \emptyset \\ T_{AB}^{(0)} - V_A + q \xi &= \emptyset \\ T_{AB}^{(0)} &= V_A - q \xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(\emptyset) &= V_A = 2000 \text{ N} \\ T(400) &= \emptyset \text{ N} \end{aligned}$$

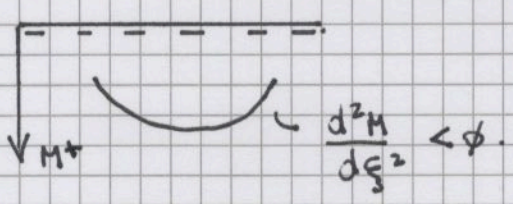
$T = \emptyset$ in $\xi = \frac{V_A}{q} = 400 \text{ mm} \rightarrow$ punto di annullamento del momento.

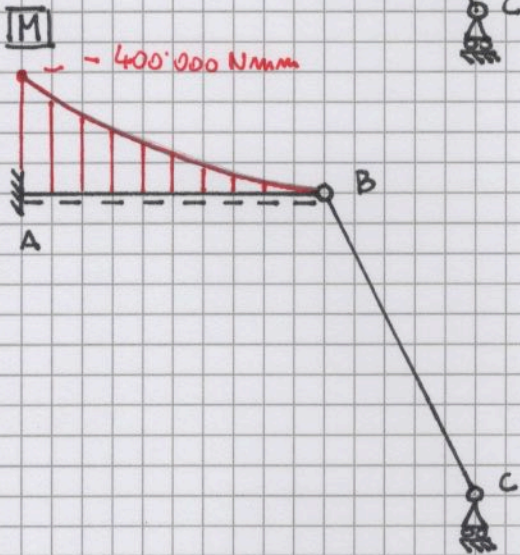
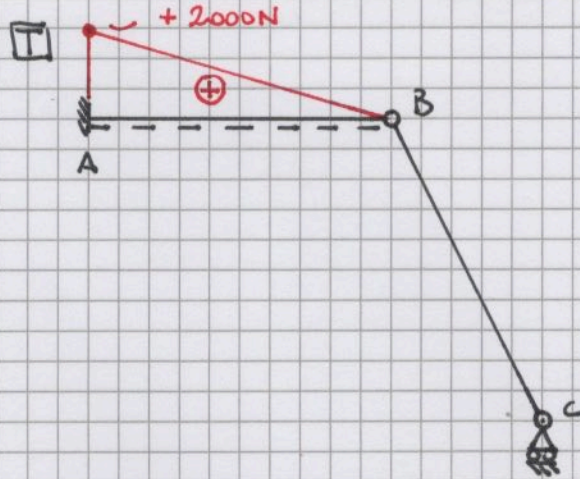
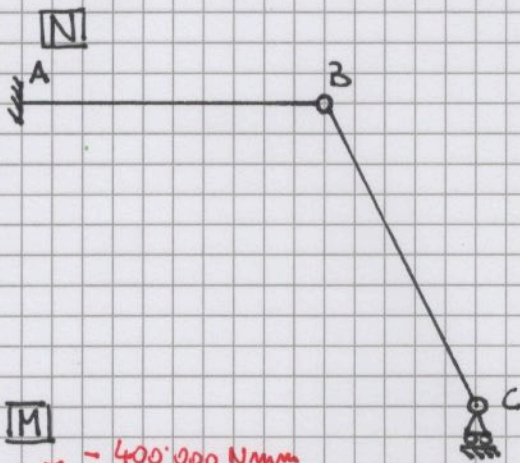
$$M_{AB}^{(0)} = -M_A + V_A \cdot \xi - \frac{q \xi^2}{2}$$

$$M(\emptyset) = -M_A = -400'000 \text{ Nmm} \quad M(400) = \emptyset$$

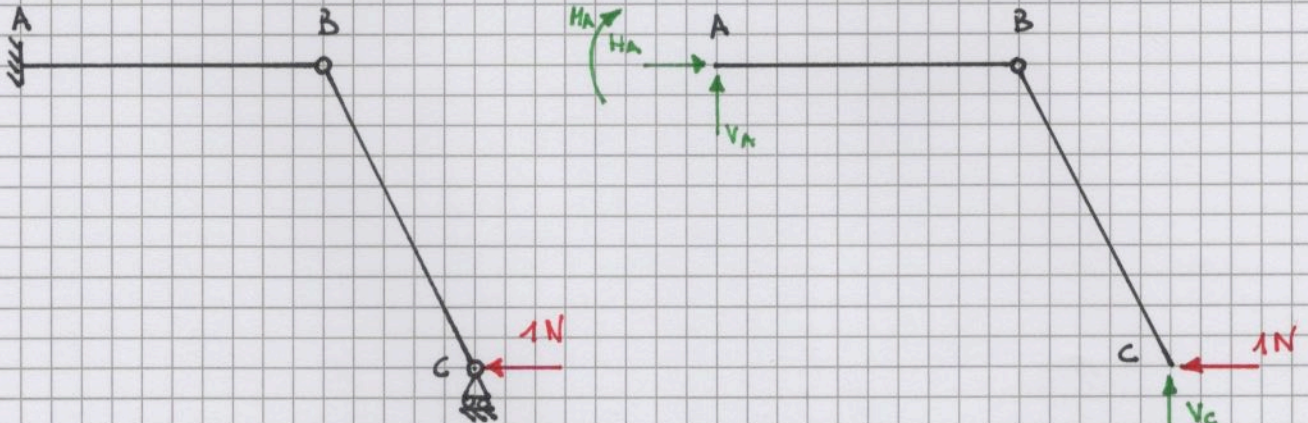
$\frac{d^2 M}{d\xi^2} = -q < \emptyset \rightarrow$ concavità verso i membri superiori.

Di conseguenza il momento assume un minimo (si annulla) in $\xi = 400 \text{ mm}$

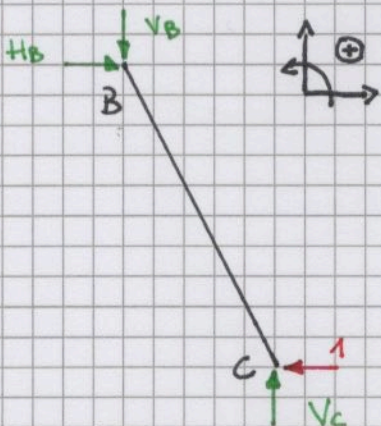




STRUTTURA (1)



Procediamo anche in questo caso con gli equilibri parziali dei tratti \overline{AB} e \overline{BC} .



$$\begin{aligned} \rightarrow^+ & \\ \bullet H_B &= 1\text{ N} \\ \uparrow^+ & V_C - V_B = \phi \\ \bullet V_B = V_C & \rightarrow \bullet V_B = 2\text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \curvearrowright^+ & \\ B) & V_C \cdot 200 - 1 \cdot 400 = \phi \\ \bullet V_C &= \frac{400}{200} = 2\text{ N} \end{aligned}$$

STRUTTURA (1)

6



→

$$H_A - H_B = \phi \rightarrow \bullet H_A = H_B = 1N$$

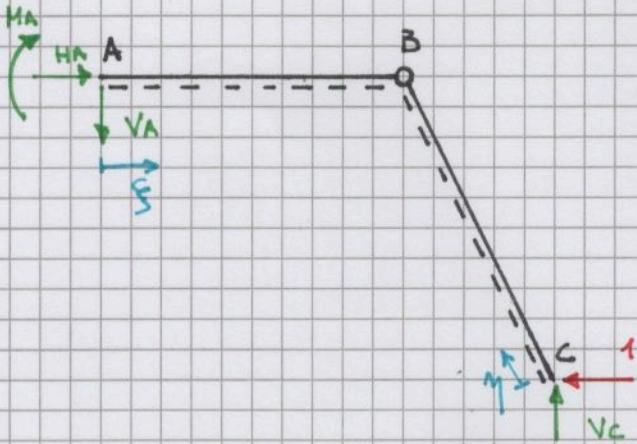
↑ +

$$V_A + V_B = \phi \rightarrow \bullet V_A = -V_B = -2N$$

$$\overset{+}{\curvearrowright} A) -M_A + V_B \cdot 400 = \phi$$

$$\bullet M_A = V_B \cdot 400 = 800 \text{ Nmm}$$

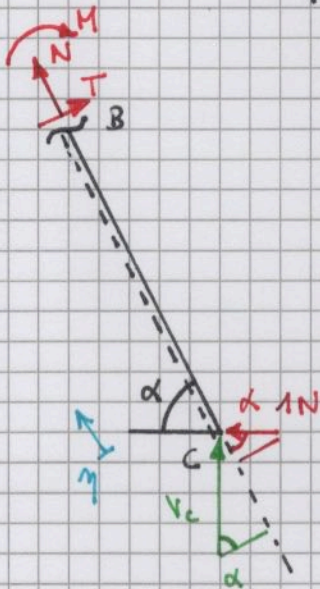
Riordinando → operando le solite convenzioni sulle reazioni negative si ottiene:



$$\begin{cases} H_A = 1N \\ V_A = 2N \\ M_A = 800 \text{ Nmm} \\ V_C = 2N \end{cases}$$

AZIONI INTERNE (1)

TRATTO \overline{BC} $0 < \eta < L_{BC}$ L'asta BC è chiusa da una biella superiore.



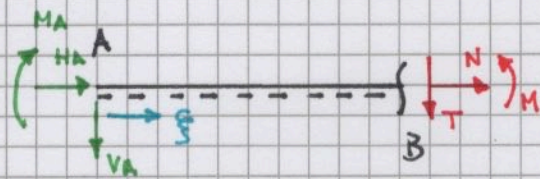
$$N_{BC}^{(1)} = -(V_C \cdot \sin(\alpha) + 1 \cdot \cos(\alpha)) = -2.2361 \text{ N}$$

$$T_{BC}^{(1)} = -V_C \cdot \cos(\alpha) + 1 \cdot \sin(\alpha) = \phi$$

$$M_{BC}^{(1)} = [V_C \cdot \cos(\alpha) - 1 \cdot \sin(\alpha)] \eta = \phi$$

STRUTTURA (1)

TRATTO \overline{AB} $0 < \xi < 400$



$$N_{AB}^{(1)} = -H_A = -1 \text{ N}$$

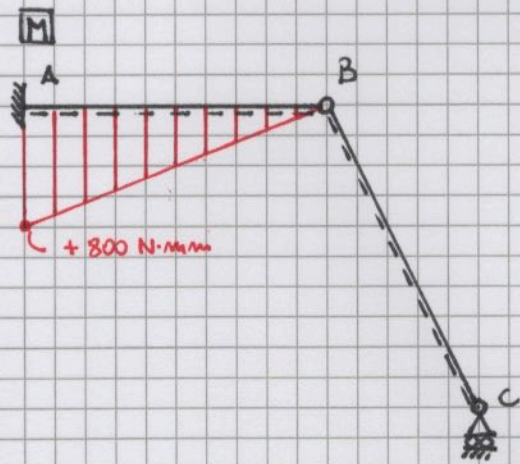
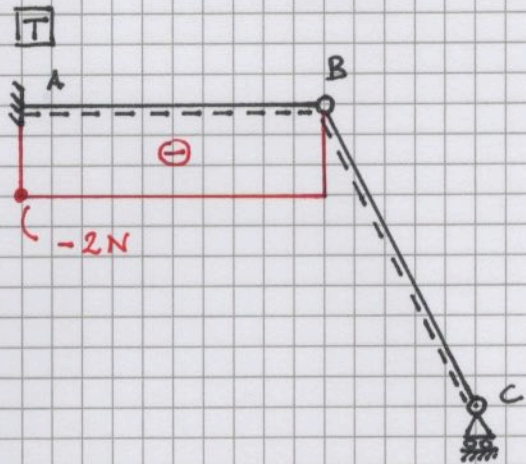
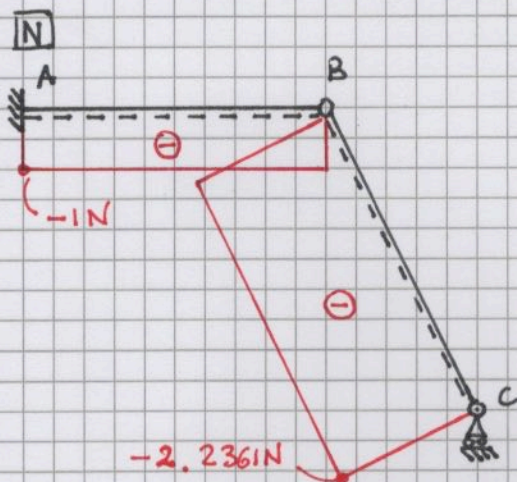
$$T_{AB}^{(1)} = -V_A = -2 \text{ N}$$

$$M_{AB}^{(1)} = M_A - V_A \xi$$

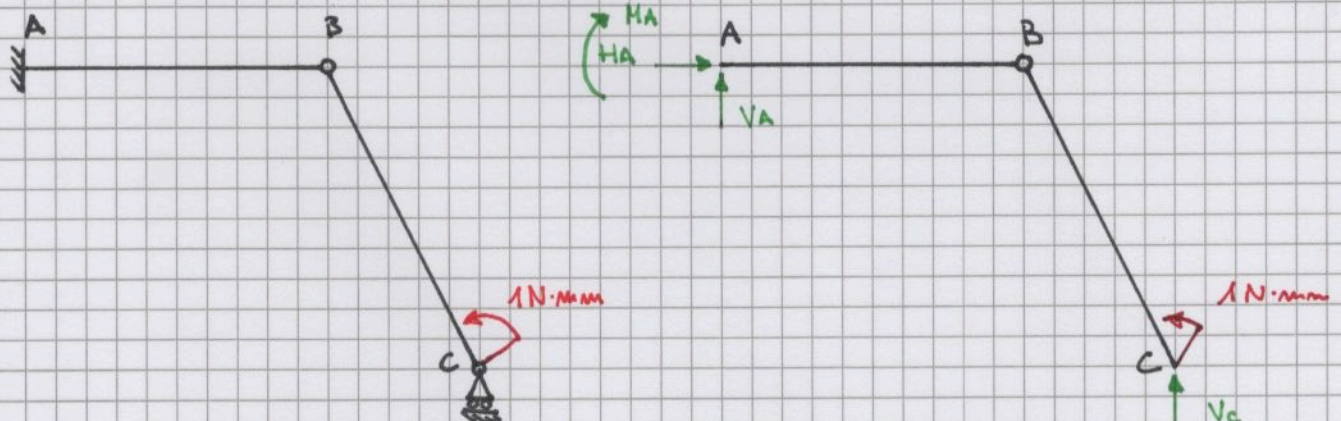
$$M(0) = M_A = 800 \text{ Nmm}$$

$$M(400) = 0$$

DIA GRAMMI STRUTTURA (1)



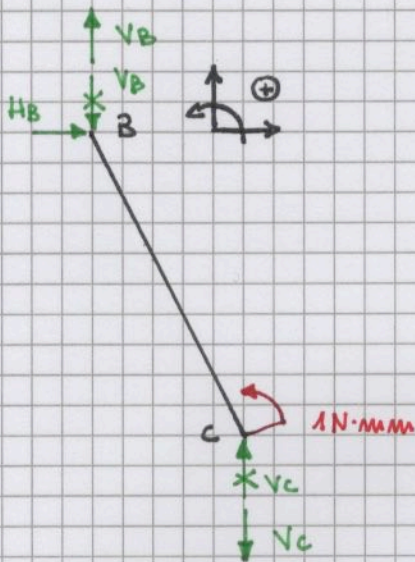
STRUTTURA (2)



Come nelle precedenti strutture si possono agli equilibri possibili.

STRUTTURA (2)

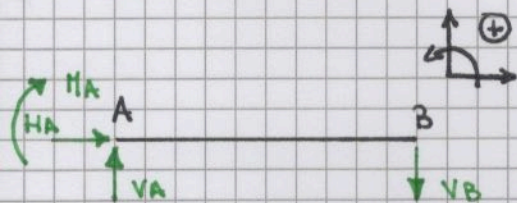
TRATTO BC



$$\begin{aligned}
 & \rightarrow^+ \quad H_B = \phi \\
 & \uparrow^+ \quad V_C - V_B = \phi \quad \bullet V_B = V_C = -0.005 \text{ N} \\
 & \curvearrowright^+ \quad V_C \cdot 200 + 1 = \phi \\
 & \quad \bullet V_C = -\frac{1}{200} = -0.005 \text{ N}
 \end{aligned}$$

Come al solito cambiamo il segno alle reazioni negative e le invertiamo nel disegno.

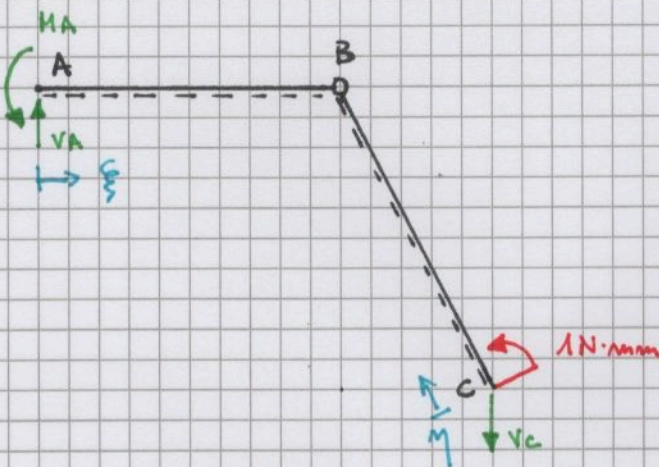
TRATTO AB



$$\begin{aligned}
 & \rightarrow^+ \quad H_A = \phi \\
 & \uparrow^+ \quad V_A - V_B = \phi \rightarrow \bullet V_A = V_B = 0.005 \text{ N} \\
 & \curvearrowleft^+ \quad -M_A - V_B \cdot 400 = \phi \\
 & \quad M_A = -V_B \cdot 400 = -2 \text{ N} \cdot \text{mm}
 \end{aligned}$$

Come prima cambiamo segno ad MA e vengo nel disegno.

Riassunto.

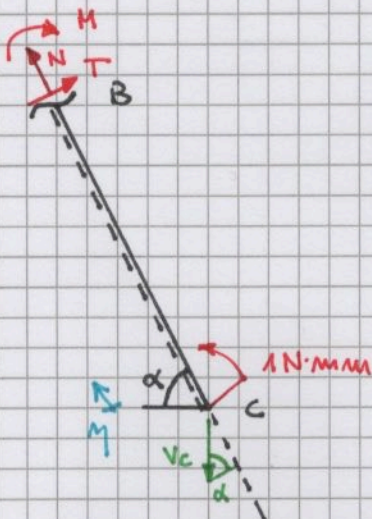


$$\begin{cases}
 H_A = 0 \text{ N} \\
 V_A = 0.005 \text{ N} \\
 M_A = 2 \text{ N} \cdot \text{mm} \\
 V_C = 0.005 \text{ N}
 \end{cases}$$

STRUTTURA (2)

AZIONI INTERNE

TRATTO \overline{BC} $0 < \eta < L_{BC}$



$$N_{BC}^{(2)} = V_c \cdot \sin(\alpha) = 0.0045 \text{ N}$$

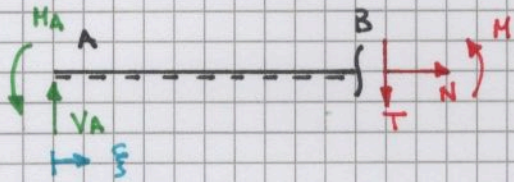
$$T_{BC}^{(2)} = V_c \cdot \cos(\alpha) = 0.0022 \text{ N}$$

$$M_{BC}^{(2)} = 1 - V_c \cdot \cos(\alpha) \eta$$

$$M(\phi) = 1$$

$$M(L_{BC}) = \phi$$

TRATTO \overline{AB} $0 < \xi < 400$



$$N_{AB}^{(2)} = \phi$$

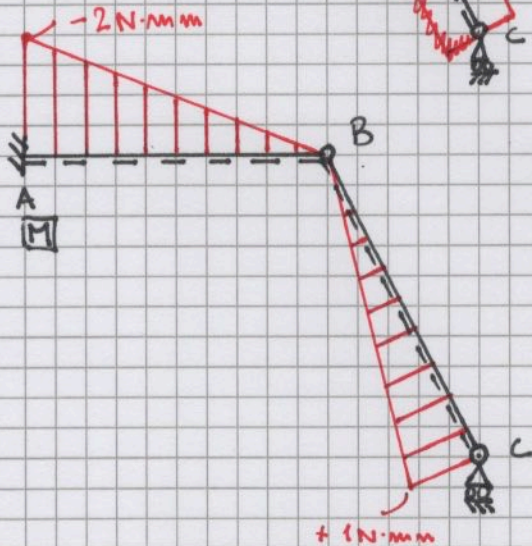
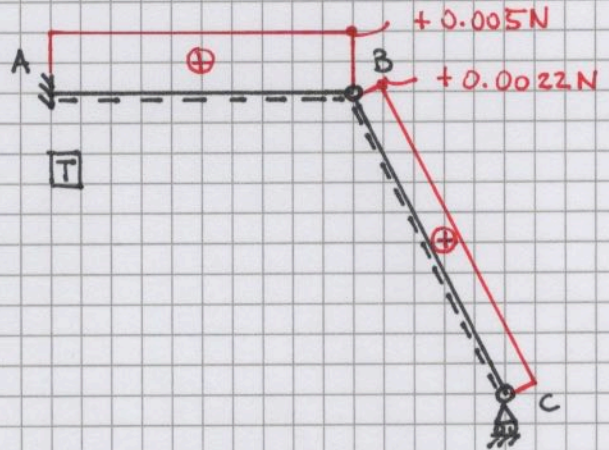
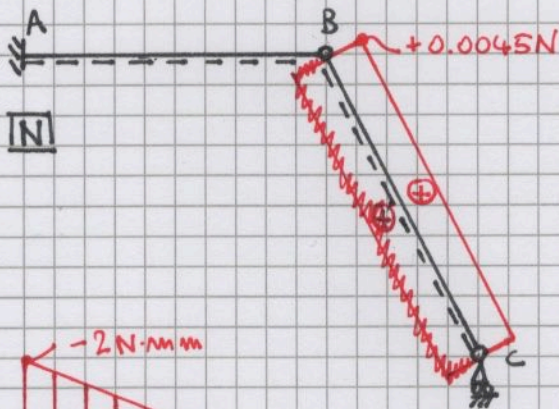
$$T_{AB}^{(2)} = V_A = 0.005 \text{ N}$$

$$M_{AB}^{(2)} = -M_A + V_A \xi$$

$$M(\phi) = -M_A = -2 \text{ N}\cdot\text{mm}$$

$$M(400) = \phi$$

DIAGRAMMI STRUTTURA (2)



$$\begin{cases} M_1 = M_{10} + X_1 M_{11} + X_2 M_{12} \\ M_2 = M_{20} + X_1 M_{21} + X_2 M_{22} \end{cases}$$

calcolo dei contributi M_{ij}

$$\begin{aligned} \bullet M_{10} &= \int_0^{L_{BC}} \left[\frac{N_{BC}^{(1)} N_{BC}^{(0)}}{EA} + \chi \frac{T_{BC}^{(1)} T_{BC}^{(0)}}{GA} + \frac{M_{BC}^{(1)} M_{BC}^{(0)}}{EI} \right] d\eta + \\ &+ \int_0^{400} \left[\frac{N_{AB}^{(1)} N_{AB}^{(0)}}{EA} + \chi \frac{T_{AB}^{(1)} T_{AB}^{(0)}}{GA} + \frac{M_{AB}^{(1)} M_{AB}^{(0)}}{EI} \right] d\xi = \\ &= \emptyset - 1.2214 = -1.2214 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet M_{20} &= \int_0^{L_{BC}} \left[\frac{N_{BC}^{(2)} N_{BC}^{(0)}}{EA} + \chi \frac{T_{BC}^{(2)} T_{BC}^{(0)}}{GA} + \frac{M_{BC}^{(2)} M_{BC}^{(0)}}{EI} \right] d\eta + \\ &+ \int_0^{400} \left[\frac{N_{AB}^{(2)} N_{AB}^{(0)}}{EA} + \chi \frac{T_{AB}^{(2)} T_{AB}^{(0)}}{GA} + \frac{M_{AB}^{(2)} M_{AB}^{(0)}}{EI} \right] d\xi = \\ &= \emptyset + 0.00305 = 0.00305 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet M_{11} &= \int_0^{L_{BC}} \left[\frac{(N_{BC}^{(1)})^2}{EA} + \chi \frac{(T_{BC}^{(1)})^2}{GA} + \frac{(M_{BC}^{(1)})^2}{EI} \right] d\eta + \\ &+ \int_0^{400} \left[\frac{(N_{AB}^{(1)})^2}{EA} + \chi \frac{(T_{AB}^{(1)})^2}{GA} + \frac{(M_{AB}^{(1)})^2}{EI} \right] d\xi = \\ &= 8.4734 E-06 + 0.00325 = 0.00326 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet M_{12} &= \int_0^{L_{BC}} \left[\frac{N_{BC}^{(1)} N_{BC}^{(2)}}{EA} + \chi \frac{T_{BC}^{(1)} T_{BC}^{(2)}}{GA} + \frac{M_{BC}^{(1)} M_{BC}^{(2)}}{EI} \right] d\eta + \\ &+ \int_0^{400} \left[\frac{N_{AB}^{(1)} N_{AB}^{(2)}}{EA} + \chi \frac{T_{AB}^{(1)} T_{AB}^{(2)}}{GA} + \frac{M_{AB}^{(1)} M_{AB}^{(2)}}{EI} \right] d\xi = \\ &= -1.6947 E-08 - 8.1278 E-06 = -8.1448 E-06 \end{aligned}$$

$$\bullet M_{21} = M_{12} \rightarrow \bar{e} \text{ immediato verificato}$$

$$M_{122} = \int_0^{L_{BC}} \left[\frac{(N_{BC}^{(2)})^2}{EA} + \chi \frac{(T_{BC}^{(2)})^2}{GA} + \frac{(M_{BC}^{(2)})^2}{EI} \right] d\eta +$$

$$+ \int_0^{400} \left[\frac{(N_{AB}^{(2)})^2}{EA} + \chi \frac{(T_{AB}^{(2)})^2}{GA} + \frac{(M_{AB}^{(2)})^2}{EI} \right] d\xi =$$

$$= 5.7073 E-09 + 2.0320 E-08 = 2.6027 E-08$$

M_1 e M_2 : sono nulli perché non sono presenti carichi, quindi il lavoro esterno è nullo.

$$\begin{matrix} M_{11} x_1 + M_{12} x_2 = M_1 - M_{10} \\ M_{21} x_1 + M_{22} x_2 = M_2 - M_{20} \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M_{10} \\ -M_{20} \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 373.2021$$

$$x_2 = -528.7551$$

→ Le incognite rappresentano dei fattori di scala su le rispettive strutture.

Sostituendo i valori nelle equazioni delle azioni interne delle strutture effettive si ottiene:

$\overline{BC} \quad 0 < \eta < L_{BC}$

$$N_{BC} = N_{BC}^{(0)} + x_1 N_{BC}^{(1)} + x_2 N_{BC}^{(2)} = -836.8700 \text{ N}$$

$$T_{BC} = T_{BC}^{(0)} + x_1 T_{BC}^{(1)} + x_2 T_{BC}^{(2)} = -1.1823 \text{ N}$$

$$M_{BC} = M_{BC}^{(0)} + x_1 M_{BC}^{(1)} + x_2 M_{BC}^{(2)} = 1.1823 \eta - 528.7551$$

$$M_{BC}(\phi) = -528.7551 \text{ N}\cdot\text{mm} \quad M_{BC}(L_{BC}) = \phi \quad (\approx 3.5825 E-14)$$

$\overline{AB} \quad 0 < \xi < 400$

$$N_{AB} = N_{AB}^{(0)} + x_1 N_{AB}^{(1)} + x_2 N_{AB}^{(2)} = -373.2021 \text{ N}$$

$$T_{AB} = T_{AB}^{(0)} + x_1 T_{AB}^{(1)} + x_2 T_{AB}^{(2)} = 1250.9520 - 5\xi$$

$$T_{AB}(\phi) = 1250.9520 \text{ N} \quad T_{AB}(400) = -749.0480 \text{ N}$$

$$\xi (T_{AB}=\phi) \rightarrow \xi = \frac{1250.9520}{5} = 250.1904 \text{ mm}$$

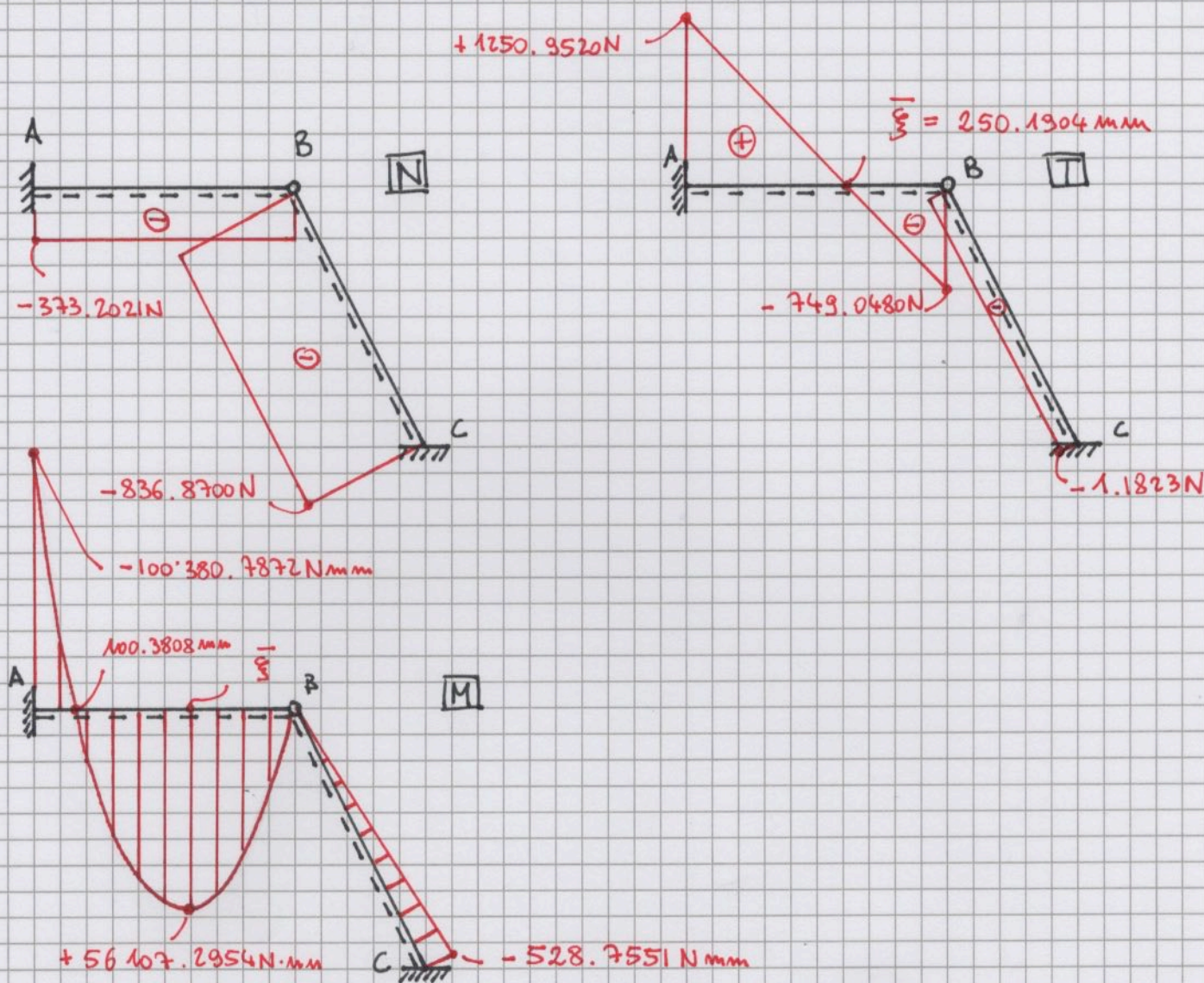
↳ punto di stazionarietà del momento.

$$M_{AB} = M_{AB}^{(0)} + x_1 M_{AB}^{(1)} + x_2 M_{AB}^{(2)} = -100380.7872 + 1250.9520 \xi - \frac{5}{2} \xi^2$$

$$M_{AB}(\phi) = -100380.7872 \text{ N}\cdot\text{mm} \quad M_{AB}(\xi) = 56107.2954 \text{ N}\cdot\text{mm}$$

$$M_{AB}(400) = \phi \quad M_{AB}=\phi \text{ in } \xi = 400 \text{ e } \xi = 100.3808 \text{ mm}$$

$\frac{d^2 M_{AB}}{d\xi^2} < \phi \rightarrow$ concavità verso i momenti negativi.



Osservazioni

- 1) Il diagramma dei momenti è continuo.
- 2) Il momento è nullo nella cerniera interna B.
- 3) Gran parte del carico è assorbito dal tratto AB, che presenta valori delle azioni interne nettamente superiori a quelle del tratto BC, e parte l'azione rimane.