

**UTILIZZO DEL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALE PER  
ANALISI DI STRUTTURE IPERSTATICHE  
CALCOLO DI SPOSTAMENTI**

**ESERCIZIO 1**

La struttura indicata in fig.1, composta da un'unica asta a sezione circolare piena di diametro  $d$ , simmetrica rispetto all'asse centrale verticale  $s-s$ , è soggetta ad una forza orizzontale  $P$  nel punto centrale.

Risolvere la struttura nell'ipotesi di comportamento elastico, e verificare a snervamento la sezione più sollecitata.

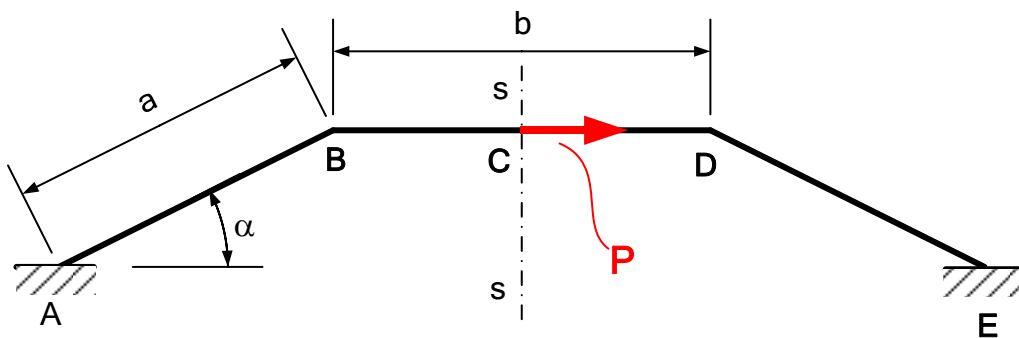


Fig. 1

Dati:

$$a = 1200 \text{ mm}$$

$$b = 1000 \text{ mm}$$

$$\alpha = 33^\circ$$

$$P = 1 \text{ kN}$$

$$d = 60 \text{ mm (sezione circolare)}$$

$$\text{Materiale: Acciaio (} E = 210000 \text{ MPa, } G = 80770 \text{ MPa, } \sigma_{sn} = 380 \text{ MPa)}$$

Si tratta di una struttura piana caricata nel suo piano, formata da un'unica asta, avente 3 gdl. I vincoli sono due incastri, cui corrispondono 6 gradi di vincolo. L'asta è tre volte iperstatica e non labile. Sulla base di quest'analisi, possiamo impostare un sistema di 3 equazioni nelle 3 azioni iperstatiche, che possiamo ad esempio mettere in evidenza in uno dei due incastri.

Osserviamo però che la struttura è simmetrica rispetto all'asse  $s$ , e che il carico  $P$  è un carico antisimmetrico rispetto all'asse di simmetria della struttura. Sfruttando la simmetria della struttura rispetto alla retta  $s$ , possiamo dividere la struttura in due parti simmetriche e limitarci a considerarne una metà (ad esempio la parte di sinistra) caricata da un carico pari a  $P/2$  ed individuare come iperstatiche le azioni interne in corrispondenza dell'asse di simmetria (fig. 2a).

Poiché ci troviamo nel caso di struttura simmetrica (geometricamente) soggetta a carichi antisimmetrici, l'unica azione iperstatica diversa da zero nella sezione di simmetria è l'azione di taglio  $X$  (l'unica componente antisimmetrica delle tre possibili azioni interne  $N$ ,  $M$  e  $T$ ), che quindi costituisce l'unica incognita del problema (e che possiamo scegliere con un verso a piacere).

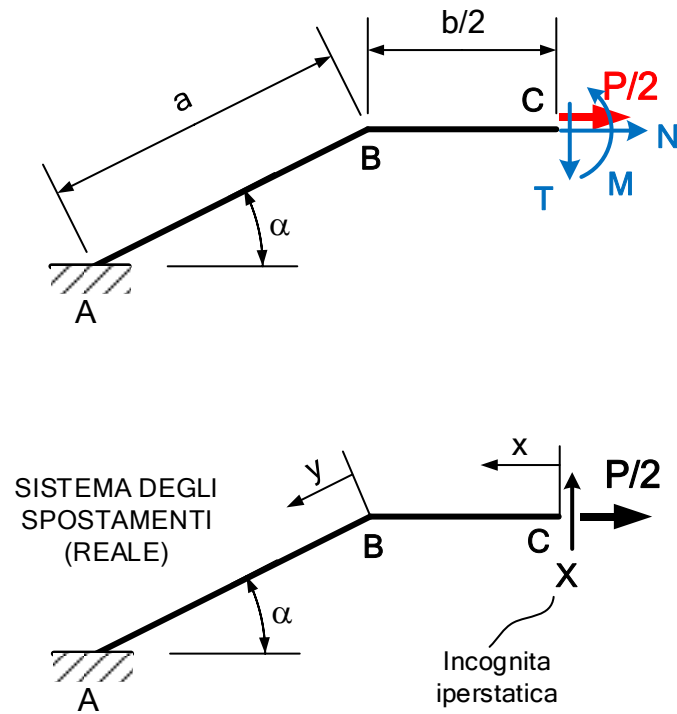


Fig. 2a

Per determinare  $X$ , applichiamo il PLV, considerando la struttura reale rappresentata sopra per il sistema degli spostamenti (fig. 2a) e la struttura caricata con la sola  $X$  resa unitaria per il sistema delle forze (fig. 2b).

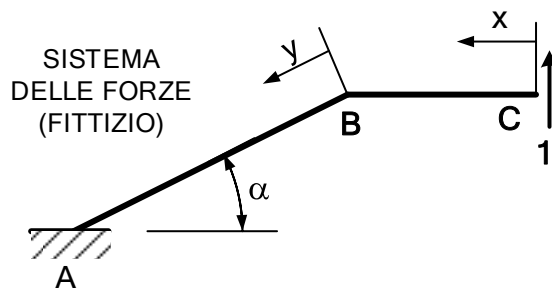
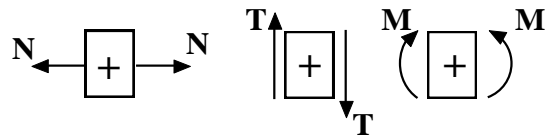


Fig. 2b

## AZIONI INTERNE

Le azioni interne nei vari tratti del SISTEMA DI SPOSTAMENTI valgono, con le seguenti convenzioni,



tratto CB)  $0 \leq x \leq b/2$

$$N = \frac{P}{2}$$

$$T = -X$$

$$M = Xx$$

Tratto BA)  $0 \leq y \leq a$

$$N = \frac{P}{2} \cos \alpha + X \sin \alpha$$

$$T = -X \cos \alpha + \frac{P}{2} \sin \alpha$$

$$M = X \left( \frac{b}{2} + y \cos \alpha \right) - \frac{Py}{2} \sin \alpha$$

Le azioni interne nei vari tratti del SISTEMA DI FORZE sono le seguenti:

Tratto CB)  $0 \leq x \leq b/2$

$$N' = 0$$

$$T' = -1$$

$$M' = x$$

Tratto BA)  $0 \leq y \leq a$

$$N' = \sin \alpha$$

$$T' = -\cos \alpha$$

$$M' = \frac{b}{2} + y \cos \alpha$$

Si noti che le azioni interne precedenti avrebbero potuto ottenersi semplicemente dalle equazioni delle azioni interne della struttura reale, ponendo  $X=1$  e non considerando il contributo del carico  $P/2$ .

### APPLICAZIONE DEL PLV

Ora si può applicare il PLV considerando il lavoro interno compiuto dalle azioni interne della struttura fittizia (sistema delle forze) per le deformazioni della struttura reale (sistema degli spostamenti). Il lavoro esterno compiuto dalle reazioni vincolari in A del sistema di forze sarà pari a zero, essendo nulli gli spostamenti e la rotazione del vincolo in A nel sistema di spostamenti (incastro perfetto). Il lavoro esterno compiuto dalla forza unitaria in C (sistema di forze) sarà pari a zero, essendo nullo lo spostamento verticale del punto C nel sistema di spostamenti (tale spostamento è nullo poiché il carico è antisimmetrico e la struttura simmetrica).

Avremo quindi, con

A = area della sezione = 2827 mm<sup>2</sup>

J = momento d'inerzia della sezione = 636174 mm<sup>4</sup>

E = modulo di Young del materiale

G = modulo elastico a taglio del materiale

$$0 = \int_0^{b/2} \chi \frac{X}{GA} dx + \int_0^{b/2} x \frac{Xx}{EJ} dx + \int_0^a \sin \alpha \frac{\frac{P}{2} \cos \alpha + X \sin \alpha}{EA} dy - \int_0^a \cos \alpha \frac{-X \cos \alpha + \frac{P}{2} \sin \alpha}{GA} \chi dy +$$

$$+ \int_0^a \left( \frac{b}{2} + y \cos \alpha \right) \frac{X \frac{b}{2} + Xy \cos \alpha - \frac{P}{2} y \sin \alpha}{EJ} dy$$

Dove  $\hat{\chi}$  è il fattore di taglio, che dipende dalla forma della sezione ( $\hat{\chi} = 1.11$  per la sezione circolare).

Svolgendo gli integrali si ottiene

$$X = \frac{-\frac{1}{EA} + \frac{\chi}{GA} + \left( \frac{ab}{4 \cos \alpha} + \frac{a^2}{3} \right) \frac{1}{EJ}}{\frac{a \sin^2 \alpha}{EA} + \frac{\chi}{GA} \left( \frac{b}{2} + a \cos^2 \alpha \right) + \left( \frac{b^3}{24} + \frac{ab^2}{4} + \frac{a^2 b}{2} \cos \alpha + \frac{a^3}{3} \cos^2 \alpha \right) \frac{1}{EJ}}$$

Sostituendo i valori numerici

$$X = P \cdot 0,16995 = 169,95 \text{ N}$$

Se si trascurano taglio e azione normale, e quindi si eliminano i primi due termini sia a numeratore che a denominatore, si ottiene

$$\mathbf{X} = P \cdot 0,16998 = 169,98 \text{ N}$$

Quindi è quasi nulla l'influenza dell'azione di taglio ed anche, per la struttura in esame, dell'azione normale.

Sostituendo il valore trovato di  $X$  nelle espressioni delle azioni interne, si ottengono le seguenti equazioni:

$$\text{CB)} \quad 0 \leq x \leq b/2$$

$$N = \frac{P}{2} = 500 \text{ N}$$

$$T = -X = -170 \text{ N}$$

$$M = Xx = 170x \text{ Nmm}$$

$$\text{BA)} \quad 0 \leq y \leq a$$

$$N = \frac{P}{2} \cos \alpha + X \sin \alpha = 512 \text{ N}$$

$$T = -X \cos \alpha + \frac{P}{2} \sin \alpha = 130 \text{ N}$$

$$M = X \frac{b}{2} + Xy \cos \alpha - \frac{Py}{2} \sin \alpha = 85000 - 130y \text{ Nmm}$$

Da cui si possono ottenere i diagrammi delle azioni interne:

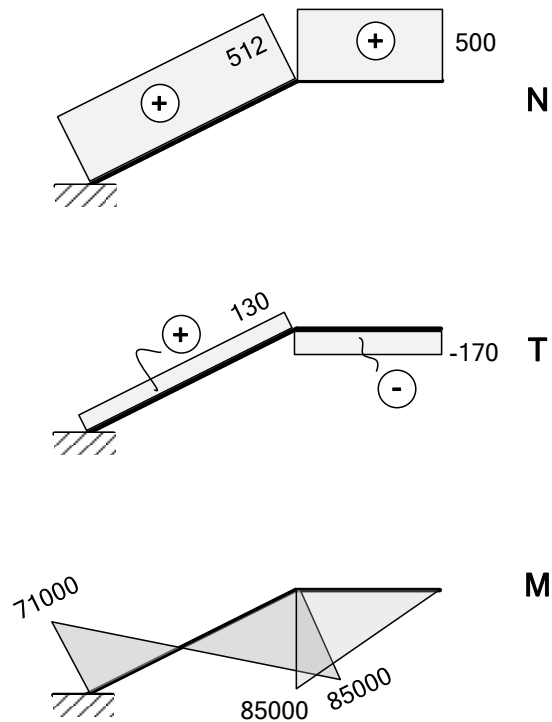


Fig. 3

Per l'azione flettente  $M$  si sono riportati i valori positivi dalla parte delle fibre tese. La parte destra della struttura originaria (fig.1) avrà dei diagrammi simili ma antisimmetrici, e quindi con azioni interne di segno opposto. Ad esempio l'azione normale nella parte di destra sarà di compressione ed il momento flettente nel tratto orizzontale sarà tale da tendere le fibre superiori.

Dai diagrammi si osserva che la sezione più sollecitata è quella dove il momento flettente vale 85000 Nmm e dove l'azione normale vale 512 N.

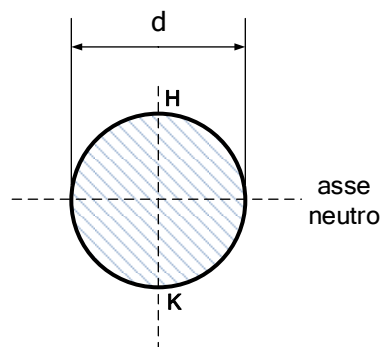


Fig. 4

In tale sezione (fig. 4) nei punti H (fibre superiori) e K (fibre inferiori) le tensioni valgono rispettivamente:

$$\sigma_H = \frac{N}{A} - \frac{M \frac{d}{2}}{J} = \frac{512}{2827} - \frac{85000 \cdot 30}{636174} = 0,18 - 4,01 = 3.83 \text{ MPa}$$

$$\sigma_K = \frac{N}{A} + \frac{M \frac{d}{2}}{I} = \frac{512}{2827} + \frac{85000 \cdot 30}{636174} = 0,181 + 4,01 = 4.19 \text{ MPa}$$

Il punto più sollecitato è pertanto K dove

$$\sigma_K = 4,19 \text{ MPa}$$

Il coefficiente di sicurezza a snervamento in tale punto risulta pari a

$$\eta_{sn} = \frac{380}{4,19} = 90,7$$

## ESERCIZIO 2

La struttura indicata in fig.1, composta da un'asta a sezione quadrata cava, è soggetta simultaneamente:

- ad una coppia  $C$  (rappresentata dal vettore con doppia freccia in figura) agente su un piano ortogonale al piano della struttura;
- ad un carico termico rappresentato dalla variazione della temperatura dal valore di riferimento ( $T_0 = 20^\circ\text{C}$ ) ai valori  $+\Delta T$  sulle fibre superiori (più vicine all'osservatore) e  $-\Delta T$  sulle fibre inferiori (più lontane dall'osservatore).

Analizzare la struttura nell'ipotesi di comportamento elastico, e verificare a snervamento la sezione più sollecitata.

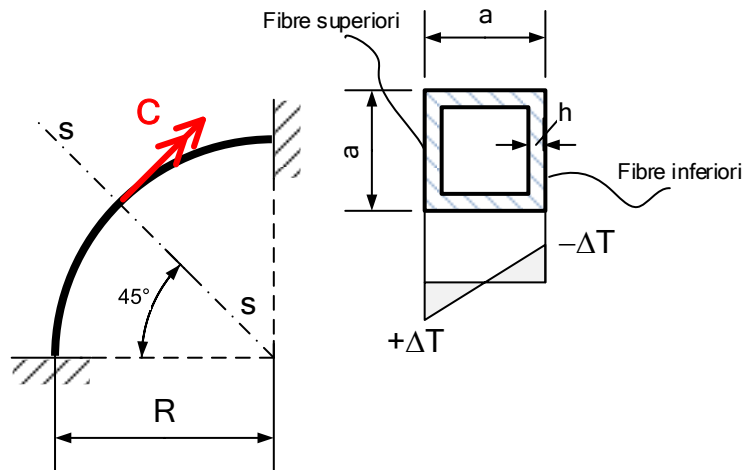


Fig. 1

Dati:

$$R = 400 \text{ mm}$$

$$a = 50 \text{ mm}$$

$$h = 5 \text{ mm}$$

$$C = 400 \text{ kNmm}$$

$$\Delta T = 15^\circ\text{C}$$

Materiale: Acciaio ( $E = 210000 \text{ MPa}$ ,  $G = 80000 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{sn} = 450 \text{ MPa}$ ;  $\alpha = 12.0 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ )

La struttura è simmetrica rispetto alla retta  $s$ - $s$ , ed è soggetta a carichi (coppia  $C$ ) ed effetti termici agenti fuori dal piano (entrambi ortogonali al piano della struttura). Sfruttando la simmetria della struttura rispetto alla retta  $s$ - $s$ , possiamo dividere la struttura in due parti simmetriche (fig. 2a) e limitarci a considerarne una metà (ad esempio la parte di sinistra)



caricata da una coppia pari a  $C/2$ , ed individuare come iperstatiche le azioni interne in corrispondenza dell'asse di simmetria.

Ci troviamo nel caso di struttura simmetrica (geometricamente) e soggetta a carichi simmetrici agenti fuori dal piano. Considerando la sezione sull'asse di simmetria, non verranno pertanto attivate le componenti di azioni interne  $M$  e  $T$  giacenti sul piano della struttura e saranno inoltre nulle le componenti antisimmetriche delle azioni interne (taglio e momento torcente) giacenti sul piano ortogonale al piano della struttura. Poiché inoltre la componente media della variazione di temperatura è nulla, le fibre baricentriche della trave non si allungano (o accorciano) e non è dunque presente nella sezione di simmetria la componente normale  $N$ . L'unica azione interna presente nella sezione della trave in corrispondenza dell'asse di simmetria è pertanto il momento flettente agente fuori dal piano della struttura.

Il momento flettente ortogonale al piano della struttura (rappresentato dal vettore  $X$  in fig. 2a) costituisce quindi l'unica incognita del problema.

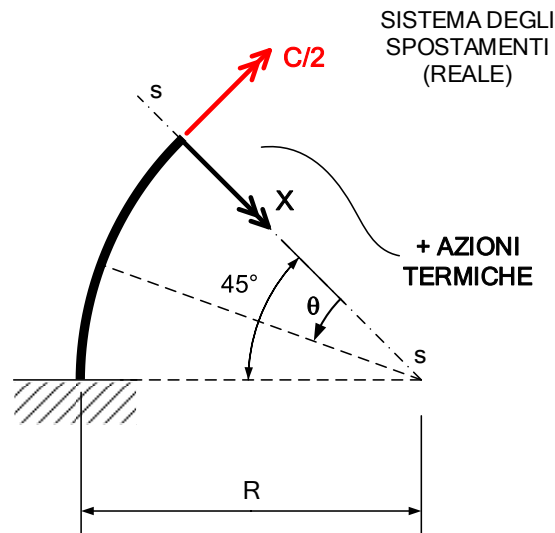


Fig. 2a

Per determinare  $X$ , applichiamo il PLV, considerando la struttura reale rappresentata sopra per il sistema degli spostamenti (fig. 2a) e la struttura caricata con la sola  $X$  resa unitaria per il sistema delle forze (fig. 2b).

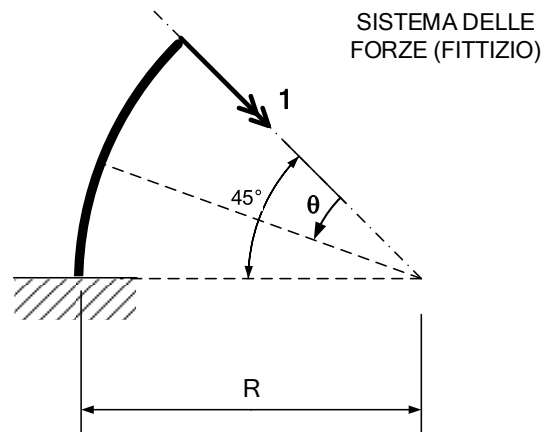


Fig. 2b

### AZIONI INTERNE

Le azioni interne nel SISTEMA DI SPOSTAMENTI valgono

$$0 \leq \theta \leq \pi/4$$

$$M = -X \cos(\vartheta) - \frac{C}{2} \sin(\vartheta)$$

$$M_t = \frac{C}{2} \cos(\vartheta) - X \sin(\vartheta)$$

Le azioni interne nel SISTEMA DI FORZE valgono

$$0 \leq \theta \leq \pi/4$$

$$M = -1 \cdot \cos(\vartheta)$$

$$M_t = -1 \cdot \sin(\vartheta)$$

### APPLICAZIONE DEL PLV

Ora si può applicare il PLV considerando il lavoro interno compiuto dalle azioni interne della struttura fittizia (sistema delle forze) per le deformazioni della struttura reale (sistema degli spostamenti). Il lavoro esterno compiuto dalle reazioni vincolari all'incastro del sistema di forze sarà pari a zero, essendo nulli gli spostamenti e la rotazione del vincolo incastro nel sistema di spostamenti (incastro non cedevole). Il lavoro esterno compiuto dalla coppia unitaria applicata (sistema di forze) sarà pari a zero, essendo nulla la rotazione

corrispondente della sezione nel sistema di spostamenti (tale rotazione è nulla poiché la struttura ed il carico sono simmetrici).

$$0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-\cos(\theta)) \left\{ \left( -X \cos(\vartheta) - \frac{C}{2} \sin(\vartheta) \right) \frac{1}{EJ} + \alpha \frac{\Delta T - (-\Delta T)}{a} \right\} R d\vartheta +$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-\sin(\theta)) \left( \frac{C}{2} \cos(\vartheta) - X \sin(\vartheta) \right) \frac{l}{4G A_m^2 h} R d\vartheta$$

dove

$$J = \frac{a^4}{12} - \frac{(a-2h)^4}{12}$$

$$l = 4(a-h) \quad (\text{perimetro medio})$$

$$A_m = \frac{a^2 + (a-2h)^2}{2} \quad (\text{area media})$$

Avremo quindi, con

$$J = \text{momento d'inerzia della sezione} = 307500 \text{ mm}^4$$

$$l = \text{perimetro medio della sezione} = 180 \text{ mm}$$

$$A_m = \text{area media della sezione} = 2050 \text{ mm}^2$$

Calcolando l'integrale e risolvendo l'equazione in X si ottiene:

$$X = \frac{C}{8} \frac{-\frac{1}{EJ} + \frac{1}{G \frac{4A_m^2 h}{l}}}{\left( \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \right) \frac{1}{EJ} + \left( \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{G \frac{4A_m^2 h}{l}}} - \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\alpha(2\Delta T)}{a}}{\left( \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \right) \frac{1}{EJ} + \left( \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{G \frac{4A_m^2 h}{l}}}$$

$$X = -328.7 \text{ kNmm}$$

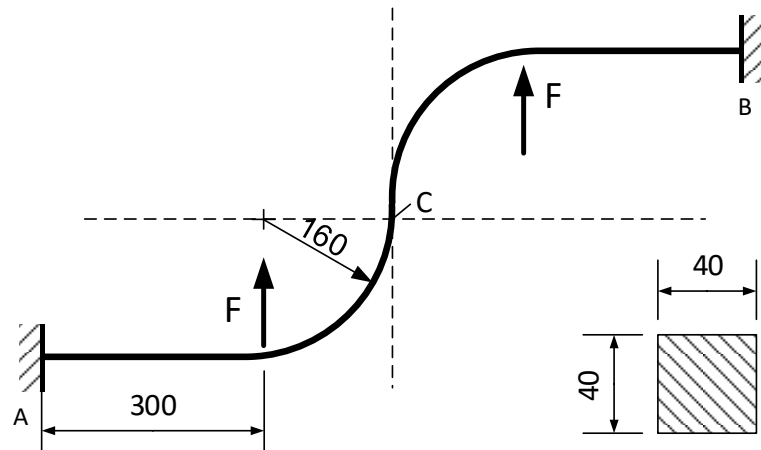
Nota l'incognita iperstatica X, si possono calcolare le azioni interne nelle varie sezioni della struttura, individuare la sezione (ed il punto) più sollecitato, ed effettuare la verifica a snervamento.

## ESERCIZIO 3

La struttura di figura è soggetta a due forze  $F$  ( $F = 4 \text{ kN}$ ) agenti nel piano della struttura. Si richiede di

1. tracciare i diagrammi delle azioni interne;
2. effettuare la verifica a snervamento nella sezione ritenuta più critica;
3. calcolare lo spostamento verticale del punto C.

Materiale: Acciaio;  $\sigma_{sn} = 710 \text{ MPa}$ ;  $E = 210 \text{ GPa}$ ;  $\nu = 0.31$



Si tratta di una struttura piana caricata nel suo piano e formata da un unico elemento. La struttura ha geometria a simmetria polare con polo nel punto C. Le azioni interne e le reazioni vincolari sono quindi esclusivamente quelle agenti sul piano della struttura. La struttura è tre volte iperstatica e non labile. Sulla base di quest'analisi, è possibile impostare un sistema di 3 equazioni in 3 incognite iperstatiche (reazioni vincolari), che possiamo ad esempio mettere in evidenza in uno dei due incastri.

E' tuttavia possibile semplificare l'analisi se consideriamo come incognite iperstatiche le componenti di azioni interne nella sezione C. Evidenziamo inanzitutto le azioni interne potenzialmente esistenti nella sezione C, che corrispondono alle tre azioni interne giacenti sul piano della struttura e dei carichi (fig. 1).

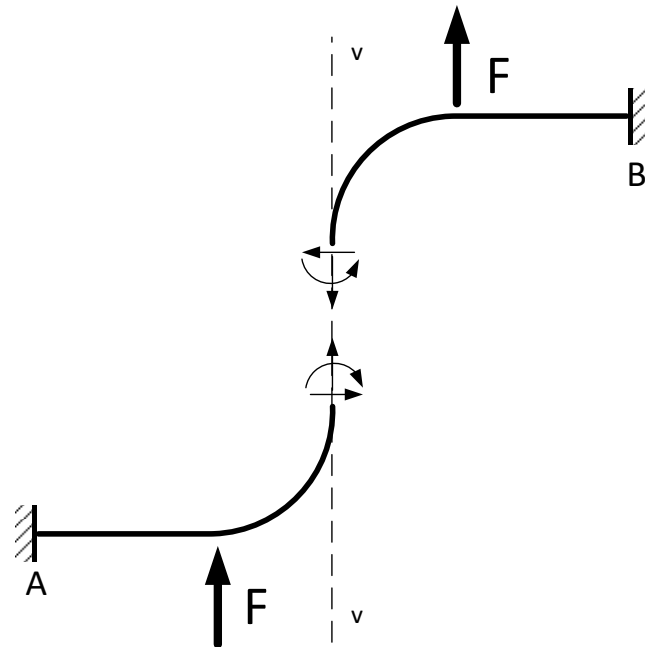


Fig. 1

Su tale schematizzazione della struttura in esame possiamo ora effettuare nell'ordine le seguenti operazioni:

- 1) Ruotiamo il sistema (struttura + carichi) della fig. 1 rispetto all'asse verticale v-v, ottenendo così il sistema di fig. 2

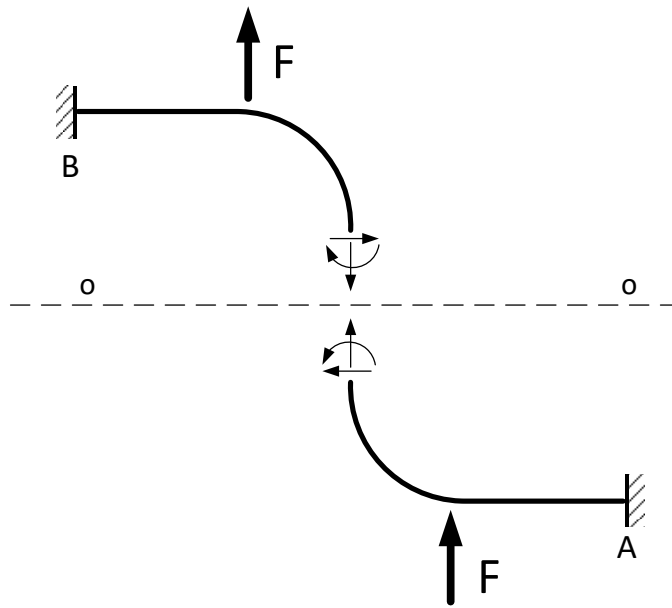


Fig. 2

- 2) Ruotiamo il sistema (struttura + carichi) della fig. 2 rispetto all'asse orizzontale o-o, ottenendo così il sistema di fig. 3. Confrontando il sistema di fig. 3 con il sistema da studiare (fig. 1), notiamo che la struttura è identica, mentre i carichi sono opposti.

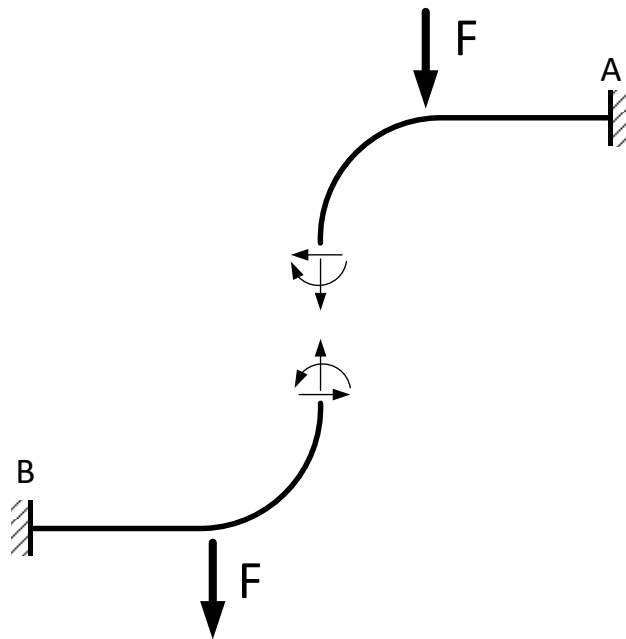


Fig. 3

In alternativa, si arriva allo stessa configurazione di fig. 3 effettuando una rotazione di  $180^\circ$  attorno al polo C.

- 3) Per ottenere un sistema (struttura + carichi) identico al sistema in esame (rappresentato in fig. 1), cambiamo i segni di tutti i carichi esterni applicati (nel nostro caso le due forze  $F$ ). Cambieranno di conseguenza anche i segni delle azioni interne nella sezione  $C$ , ottenendo così il sistema di fig. 4, identico (sia come struttura che come carichi applicati) al sistema da studiare di fig. 1.

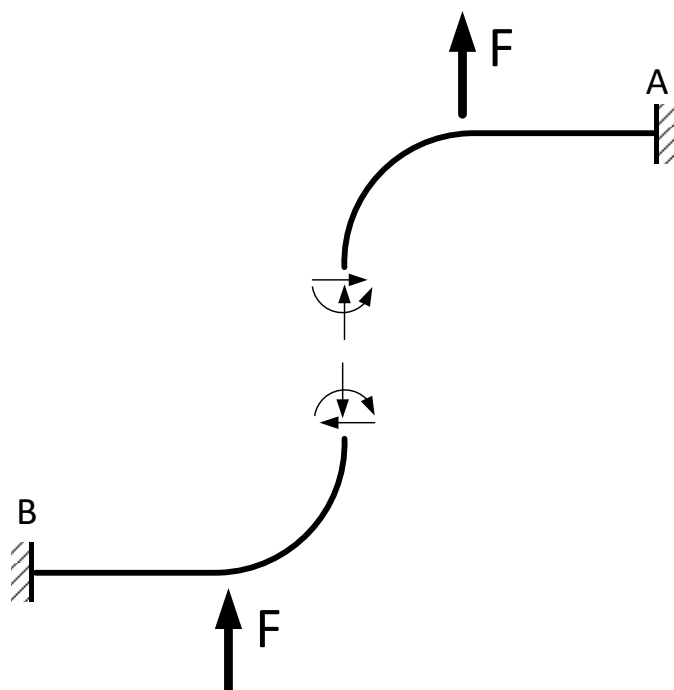


Fig. 4

A questo punto possiamo confrontare il sistema in esame (fig. 1) con quello ottenuto dopo i passaggi appena descritti (fig. 4); è evidente come l'unica azione interna possibile risulti il momento flettente in quanto su due strutture identiche e soggette agli stessi carichi non possono essere presenti azioni interne differenti (quali, nel caso specifico, l'azione normale e l'azione di taglio).

E' quindi sufficiente studiare una delle due parti di struttura, con una sola incognita iperstatica  $X$  (momento flettente nella sezione  $C$ ), come illustrato in fig. 5.

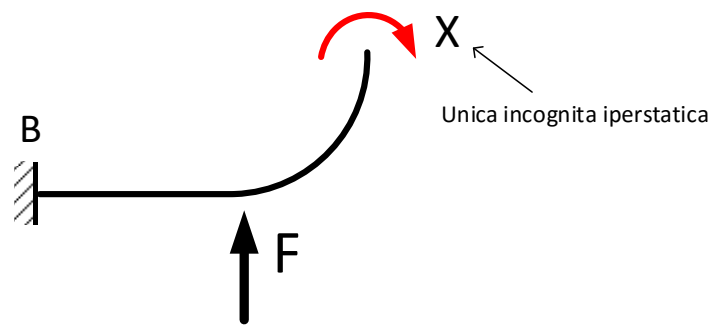


Fig. 5

Per determinare X, applichiamo il PLV, considerando la struttura reale rappresentata in fig. 5 per il sistema degli spostamenti e la struttura caricata con la sola X resa unitaria per il sistema delle forze. I sistemi degli spostamenti e delle forze sono rappresentati in fig. 6

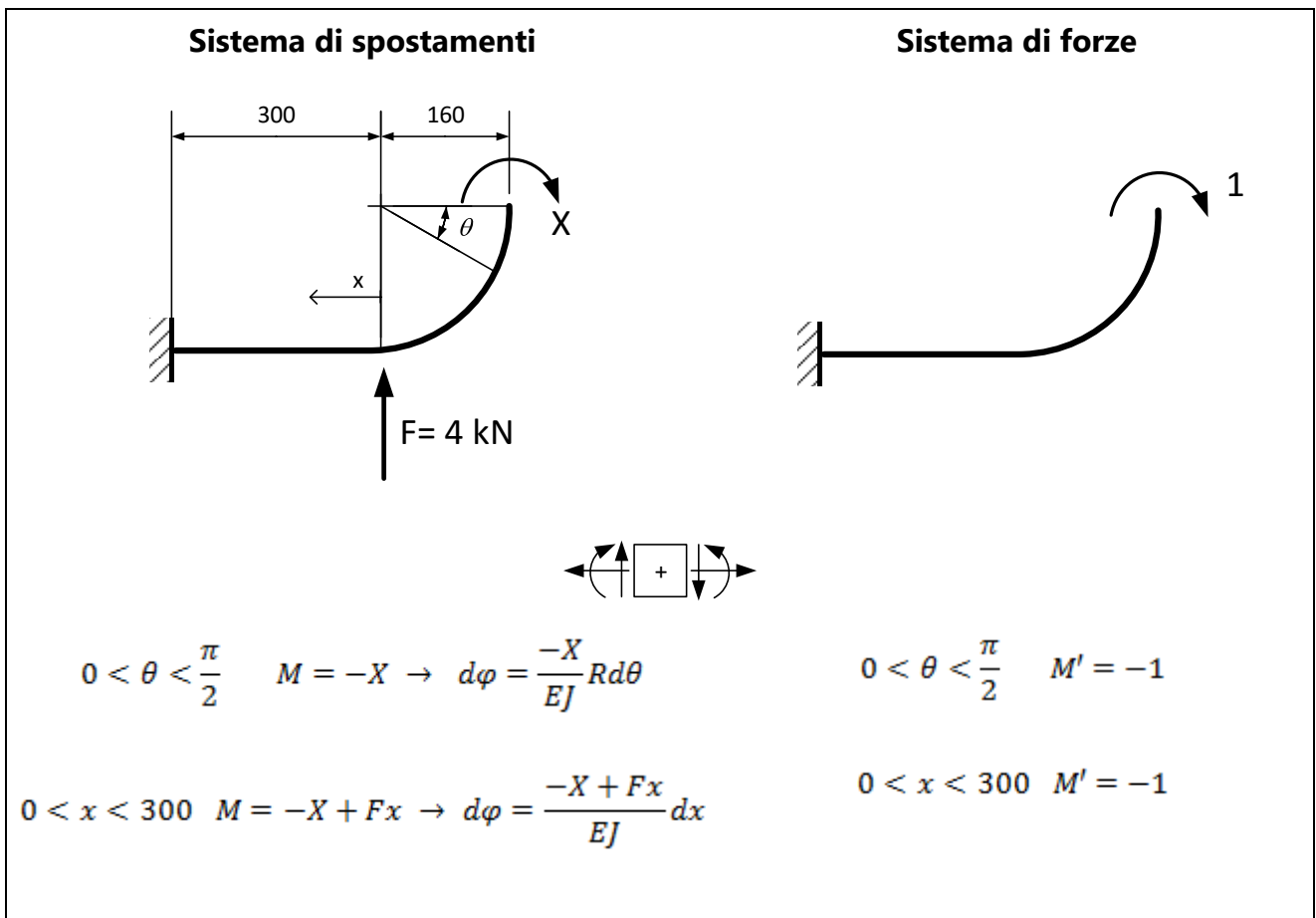


Fig. 6



L'equazione dei lavori virtuali è infine

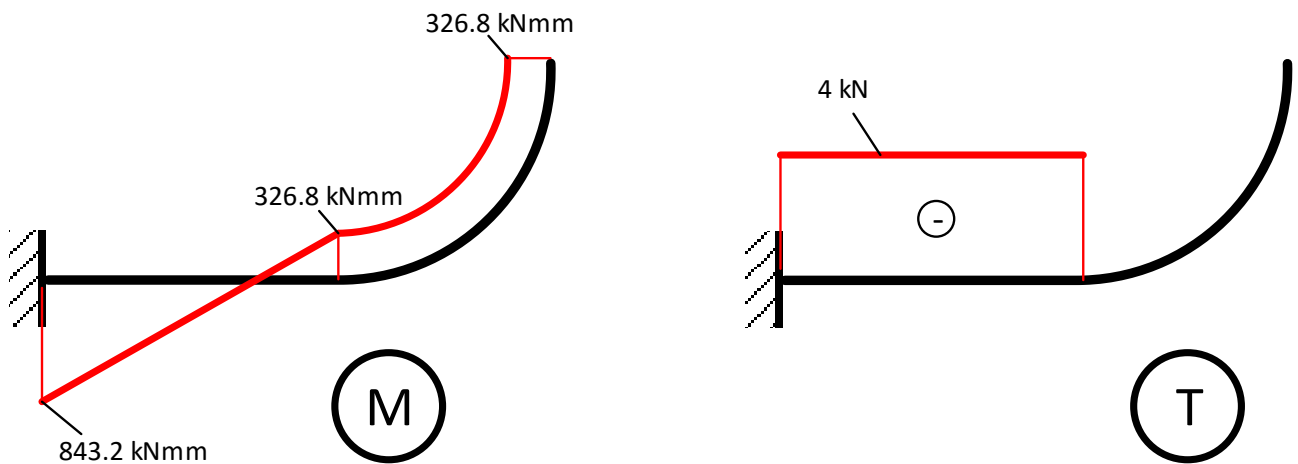
$$0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -1 \cdot \frac{-X}{EJ} 160 d\theta + \int_0^{300} -1 \frac{-X + Fx}{EJ} dx$$

$$0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 160X d\theta + \int_0^{300} X dx - \int_0^{300} 4000x dx$$

da cui

$$X = 326485 \text{ Nmm}$$

I diagrammi delle azioni interne sono pertanto i seguenti:



Le sezioni più sollecitate sono le sezioni agli incastri A e B, nelle quali lo sforzo normale massimo (sulle fibre più distanti dall'asse neutro) vale

$$\sigma = \frac{843.2 \cdot 20}{\frac{40 \cdot 40^3}{12}} \frac{\text{kNmm} \cdot \text{mm}}{\text{mm}^4} = 0.0791 \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2} = 79.1 \text{ MPa}$$

Lo sforzo tangenziale massimo (all'asse neutro) è pari a

$$\tau = \frac{3}{2} \cdot \frac{4000}{40 \cdot 40} \frac{N}{mm^2} = 3.8 \text{ MPa}$$

Il coefficiente di sicurezza allo snervamento vale pertanto

$$\eta = \frac{710}{79.1} = 9$$

Per calcolare lo spostamento del punto C in direzione verticale utilizziamo ancora il PLV (fig. 7).

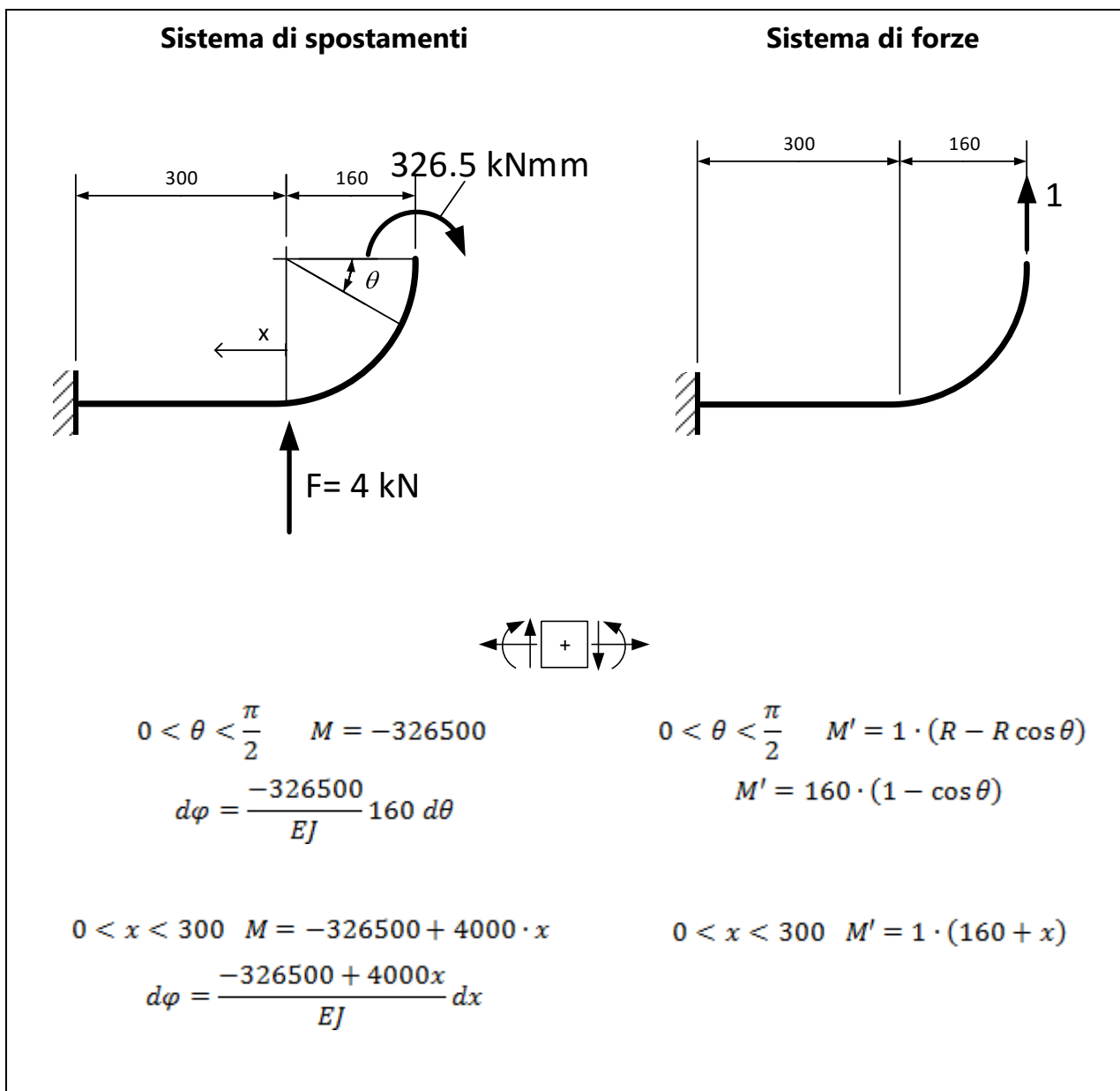


Fig. 7

L'equazione dei lavori virtuali è:

$$1 \cdot \delta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 160(1 - \cos \theta) \cdot \frac{-326500}{EJ} 160 d\theta + \int_0^{300} (160 + x) \cdot \frac{-326500 + 4000x}{EJ} dx$$

dalla quale possiamo calcolare lo spostamento richiesto

$$\delta = -0.1065 + 0.7687 = 0.662 \text{ mm}$$