ISOMORFISMO TRA $V^N \sim \mathbb{C}^N$

$\Rightarrow$ OGNI SPAZIO VETTORIALE VETTORIALE LINEARE SU $\mathbb{C}$ È ISOMORFO A $\mathbb{C}^N$

POSSIAMO RAPPRESENTARE

- KET
- BRA
- OPERATORI

$\Longrightarrow$ MATRICI

ALGEBRA KET-BRA E OPERATORI $\sim$ ALGEBRA DELLE MATRICI

ELABORIAMO L'ISOMORFISMO

②

## RAPPRESENTAZIONE VETTORI KET

$|x\rangle \in V^{(N)}$

scegliamo una base ON $\{|e_i\rangle\}$ di $V^{(N)}$

$$|x\rangle = \sum_i c_i |e_i\rangle$$

$$|x\rangle \stackrel{F}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix}$$ vettore colonna $N \times 1$

## VETTORI BRA

$$\langle x| = \sum_i c_i^* \langle e_i|$$

$$\langle x| \Longrightarrow (c_1^* \; c_2^* \; \dots \; c_N^*)$$ VETTORE RIGA $1 \times N$

## PRODOTTO SCALARE

$$|y\rangle = \sum_i b_i |e_i\rangle$$

$$\langle x|y\rangle = \sum_i c_i^* \langle e_i \sum_k b_k |e_k\rangle =$$

$$= \sum_{ik} c_i^* b_k \langle e_i|e_k\rangle = \sum_{ik} c_i^* b_k \delta_{ik}$$

$$= \sum_i c_i^* b_i$$

$$= (c_1^* \; c_2^* \; \dots \; c_N^*) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$$

ISOMORFISMO $V^N \to \mathbb{C}^N$

INFATTI LA CORRISPONDENZA

$$f: |x\rangle \to c_i$$ È UN ISOMORFISMO

RISPETTO ALLA STRUTTURA ALGEBRICA DI SPAZIO VETTORIALE

$$f(|x\rangle + |y\rangle) = f(|x\rangle) + f(|y\rangle)$$

$$f(\alpha|x\rangle) = \alpha f(|x\rangle) \ldots$$

$$f(\langle x| + \langle y|) = f(\langle x|) + f(\langle y|)$$

$$f(\langle x|y\rangle) = f(\langle x|)\, f(|y\rangle)$$

$\boxed{NB}$

RAPPRESENTAZIONE È BASE-DIPENDENTE

NOTAZIONE

MATRICI RIGA $c$ $\to$ KET $|x\rangle$

" COLONNA $c^+$ $\Rightarrow$ BRA $\langle x|$

COSA SUCCEDE AGLI OPERATORI ??

# RAPPRESENTAZIONE OPERATORI TRAMITE MATRICI

- OGNI OPERATORE $A$ SU $\mathbb{C}^N$ PUO' ESSERE RAPPRESENTATO DA MATRICE $N \times N$

DATA UNA BASE ON $\{|e_j\rangle\}$

$$A|e_i\rangle = |e'_i\rangle = \sum_k a_{ki} |e_k\rangle$$

$$\langle e_j|A|e_i\rangle = \sum_k a_{ki} \langle e_j|e_k\rangle$$

$$= \sum_k a_{ki} \delta_{jk} = a_{ji}$$

$$a_{ji} = \langle e_j|A|e_i\rangle$$

OPERATORE $A \to a_{ij}$ (MATRICE)

NB

RAPPRESENTAZIONE BASE DIPENDENTE

AZIONE OPERATORI SU VETTORI

$$|y\rangle = A|x\rangle \qquad |x\rangle \doteq \sum_i c_i |e_i\rangle$$

$$|y\rangle = \sum_i b_i |e_i\rangle$$

$$\sum_i b_i |e_i\rangle = \sum_i c_i A|e_i\rangle$$

$$\sum_i b_i \langle e_j|e_i\rangle = \sum_i c_i \langle e_j|A|e_i\rangle$$

$$b_j = \sum_i a_{ji} c_i$$

$$f: \begin{cases} |x\rangle \to c_i \\ |y\rangle \to b_i \\ A \to a_{ij} \end{cases} \qquad \boxed{\text{ISOMORFISMI}}$$

$$f(A|x\rangle) = f(A) \cdot f(|x\rangle)$$

$$f(AB|x\rangle) = \underbrace{f(A) f(B)}_{\text{PRODOTTO TRA MATRICI}} f(|x\rangle)$$

$$AB|x\rangle = |y\rangle \qquad I = \sum_j |e_j\rangle\langle e_j|$$

$$AB \sum_i c_i |e_i\rangle = \sum_i b_i |e_i\rangle$$

$$\sum_{ij} c_i A|e_j\rangle\langle e_j|B|e_i\rangle = \sum_i b_i |e_i\rangle$$

$$\sum_{ij} c_i \langle e_k|A|e_j\rangle \langle e_j|B|e_i\rangle = \sum_i b_i \underbrace{\langle e_k|e_i\rangle}_{\delta_{ki}}$$

$$b_k = \sum_{ij} a_{kj} b_{ji} c_i$$

$$b = ABc \qquad \Rightarrow |y\rangle = AB|x\rangle$$

ESEMPIO: SPAZIO VETTORIALE $\mathbb{V}$ SU $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}^3$

BASE ORTONORMALE $|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle$

$$\langle u_i | u_j \rangle = \delta_{ij}$$

OPERATORE PARITÀ $P$

$$\forall v \in \mathbb{V} : \quad P|v\rangle = -|v\rangle$$

$$P|v_1\rangle = -|v_1\rangle \qquad P|v_2\rangle = -|v_2\rangle$$

$$P|v_3\rangle = -|v_3\rangle$$

$$\langle v_1|P|v_1\rangle = -\langle v_1|v_1\rangle = -1$$

$$\langle v_2|P|v_2\rangle = -\langle v_2|v_2\rangle = -1$$

$$\langle v_3|P|v_3\rangle = -\langle v_3|v_3\rangle = -1$$

$$\langle v_i|P|v_j\rangle = 0 \quad \text{SE} \quad i \neq j$$

QUINDI

$$|v_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |v_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |v_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

L' ISOMORFISMO È COMPLETO

$\Rightarrow$ CORRISPONDENZA COMPLETA TRA

LO SPAZIO $V^N$ + GLI OPERATORI CHE AGISCONO SU DI ESSO E

SPAZIO $\mathbb{C}^N$ + MATRICI CHE AGISCONO SU DI ESSO

VOCABOLARIO TRADUZIONE

- KET $|V\rangle \longrightarrow$ VETTORE COLONNA $\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix}$
- BRA $\langle V| \longrightarrow$ VETTORE RIGA $(V_1^*, V_2^* \dots V_N^*)$
- OPERATORE $A \longrightarrow$ MATRICE $a_{ij} = \langle e_j|A|e_i\rangle$
- SOMMA OPERATORI $\longrightarrow$ SOMMA MATRICI
  $C = A+B$ $\quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
- PRODOTTO OPERATORI $\longrightarrow$ PRODOTTO MATRIC
  $C = AB$ $\quad c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$
- OPERATORE IDENTITÀ $\longrightarrow$ MATRICE UNITÀ
  $I$ $\quad \mathbb{1} \quad \delta_{ij}$
- OPERATORE INVERSO $\longrightarrow$ MATRICE INVERSA
  $A^{-1}$ $\quad a^{-1}_{ij}$

...

- LA POSSIBILITÀ DI POTER RAPPRESENTARE VETTORI ED OPERATORI TRAMITE MATRICI È DI FONDAMENTALE IMPORTANZA PER FARE CALCOLI ESPLICITI

- AGGIUNTA DI UNA MATRICE

CHE MATRICE ASSOCIAMO ALL'OPERATORE AGGIUNTO DI A ?

ABBIAMO DALLA DEFINIZIONE

$$\langle u | A^{+} | y \rangle = \langle y | A | u \rangle^{*}$$

SE $|u\rangle$ $|y\rangle$ SONO VETTORI DELLA BASE

$$\langle i | A^{+} | j \rangle = \langle j | A | i \rangle^{*}$$

SEGUE

$$\boxed{a^{+}_{ij} = a^{*}_{ji}}$$

L' AGGIUNTA DI UNA MATRICE SI OTTIENE FACENDONE LA $\boxed{\text{TRASPOSTA}}$

(SCAMBIO RIGHE $\leftrightarrow$ COLONNE)
E LA $\boxed{\text{COMPLESSA CONIUGATA}}$

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

- SI VERIFICANO FACILMENTE LE PROPRIETÀ DEGLI OPERATORI AGGIUNTI

$$(A^+)^+ = A \quad , \quad (A^+ + B^+) = (A+B)^+$$

$$(AB)^+ = B^+ A^+$$

$$\Downarrow$$

$$AB = \sum_k a_{ik} b_{kj} \Rightarrow (AB)^+ = \sum_k a^*_{jk} b^*_{ki}$$

$$= \sum_k (\tilde{b}^*_{ik})(\tilde{a}^*_{kj}) = B^+ A^+$$

- UNA MATRICE È HERMITIANA SE

$$A^+ = A \Rightarrow \boxed{a^*_{jk} = a_{kj}}$$

L' AGGIUNTA DI UNA MATRICE SI OTTIENE FACENDONE LA $\boxed{\text{TRASPOSTA}}$

(SCAMBIO RIGHE $\leftrightarrow$ COLONNE)

E LA $\boxed{\text{COMPLESSA CONIUGATA}}$

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^{+} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

- SI VERIFICANO FACILMENTE LE PROPRIETÀ DEGLI OPERATORI AGGIUNTI

$$(A^{+})^{+} = A \quad , \quad (A^{+} + B^{+}) = (A + B)^{+}$$

$$(AB)^{+} = B^{+}A^{+}$$

$\Downarrow$

$$AB = \sum_k a_{ik} b_{kj} \Rightarrow (AB)^{+} = \sum_k a^{*}_{jk} b^{*}_{ki}$$

$$= \sum_k \left(\tilde{b}^{*}_{ik}\right)\left(\tilde{a}^{*}_{kj}\right) = B^{+} A^{+}$$

- UNA MATRICE È HERMITIANA SE

$$A^{+} = A \Rightarrow \boxed{a^{*}_{jk} = a_{kj}}$$

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{+} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$A^{+} = A$$

- ANTIHERMITIANA

$$A^{+} = -A$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad A^{+} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -A$$

- UNITARIA

$$U^{+} = U^{-1}$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \qquad U^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \qquad U^{+} = U^{-1}$$

- MATRICI ORTOGONALI

$$\tilde{A} = A^{-1} \qquad \tilde{A}A = \mathbb{1}$$

$$\boxed{\text{TRASPOSTA} = \text{INVERSA}}$$

NOTARE SE UNA MATRICE HA SOLO ELEMENTI REALI $\Rightarrow$ MATRICE ORTOGONALE

= MATRICE UNITARIA

$$\tilde{A} = A^{+} \qquad \tilde{A} = A^{-1} \Rightarrow A^{+} = A^{-1}$$

- OPERATORI CHE DESCRIVONO ROTAZIONI DEL SISTEMA DI COORDINATE SONO RAPPRESENTATI DA MATRICI ORTOGONALI

INFATTI

$$\sum_J a_{JK}\, a_{Jl} = \delta_{Kl}$$

$$\Rightarrow \sum_J \tilde{a}_{KJ}\, a_{Jl} = \delta_{Kl} \Rightarrow \tilde{A}A = \mathbb{1}$$

NOTARE: MATRICI ORTOGONALI E
MATRICI UNITARIE

LASCIANO INVARIATA LA NORMA DEI VETTORI E LA TRACCIA DI MATRICI

- NEL CAMPO REALE | A ORTOGONALE

$$\bar{u}' = A\bar{u} \qquad u'_i = \sum_k a_{ik} u_k$$

$$\bar{u}'\cdot\bar{u}' = \tilde{\bar{u}}'\cdot\bar{u}' = \widetilde{(A\bar{u})}\cdot A\bar{u} = \tilde{\bar{u}}\tilde{A}A\bar{u}$$

$$= \tilde{\bar{u}}A^{-1}A\bar{u} = \tilde{\bar{u}}\cdot u$$

IN COMPONENTI

$$u'_i\, u'_i = a_{ik} u_k \, a_{il} u_l$$

$$= u_k \, a_{ik} a_{il} \, u_l = u_k \, \tilde{a}_{ki} a_{il} u_l$$

$$= u_k \, a^{-1}_{kl} a_{il} u_l = u_k \, \delta_{kl} u_l$$

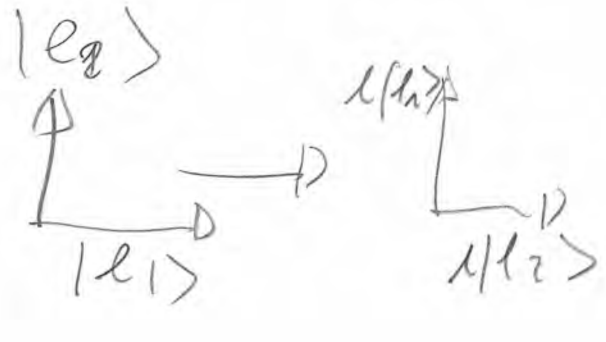
$$= u_i u_i$$

$$A^+ = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -A$$ ANTI HERM.

$$A^+ = A^{-1}$$ UNITARIA

$$A^+ A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}$$

⇒ N.B A FA PASSARE DA UNA BASE ON AD UN ALTRA BASE ON



MATRICE NORMALE

$$[A, A^+] = 0$$

ABBIAMO COMPLETATO L'ISOMORFISMO

$$V^N \sim C^N$$

ALGEBRA OPERATORI ∼ ALGEBRA MATRICI

- OPERATORE AGGIUNTO → MATRICE AGGIUNTA
- // (ANTI) HERMITIANO → MATRICE ANTI(HERMITIANA)
- // UNITARIO → MATRICE UNITARIA
- // NORMALE → MATRICE NORMALE

ESEMPIO: SPAZIO VETTORIALE 2DIM SUL CAMPO COMPLESSO $\mathbb{C}^2$

→ BASE ORTONORMALE $|V_1\rangle$, $|V_2\rangle$

→ OPERATORE A: TRASFORMA KET NEI LORO ORTOGONALI E MOLTIPLICA PER $i$

$A|u\rangle = i|v\rangle$

CON $\langle u|u\rangle = \langle v|v\rangle$ $\langle u|v\rangle = 0$

ABBIAMO QUINDI

$A|V_1\rangle = i\,|V_2\rangle$ $\langle V_1|A^+ = -\langle V_2|\,i$

$A|V_2\rangle = i\,|V_1\rangle$ $\langle V_2|A^+ = -\langle V_1|\,i$

SEGUE

$\langle V_2|A|V_1\rangle = i\langle V_2|V_2\rangle = i$

$\langle V_1|A|V_1\rangle = i\langle V_1|V_2\rangle = 0$

$\langle V_1|A|V_2\rangle = i\langle V_1|V_1\rangle = i$

$\langle V_2|A|V_2\rangle = i\langle V_2|V_1\rangle = 0$

QUINDI SE SCEGLIAMO LA BASE

$|V_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $|V_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle V_1|A|V_1\rangle & \langle V_2|A|V_1\rangle \\ \langle V_1|A|V_2\rangle & \langle V_2|A|V_2\rangle \end{pmatrix}$$

$$A^{+} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

MATRICE INVERSA

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

INFATTI

$$A^{-1} A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

NOTARE:

$$A^{+} = A^{-1}$$

- NEL CAMPO COMPLESSO
  $U$ UNITARIA $\qquad U^+ = U^{-1}$

$$|u'\rangle = U|u\rangle$$

$$\langle u'| = \langle u|U^+$$

$$\langle u'|u'\rangle = \langle u|U^+U|u\rangle =$$

$$= \langle u|U^{-1}U|u\rangle = \langle u|u\rangle$$

## CAMBIAMENTI DI BASE

COMPONENTI DEI VETTORI E DELLE MATRICI ASSOCIATE AI VETTORI ED OPERATORI DI UNO SPAZIO VETTORIALE DIPENDONO DALLA BASE SCELTA

$\Downarrow$

LA RAPPRESENTAZIONE È BASE-DIPENDENTE

$\Downarrow$

CAMBIANDO BASE CAMBIANO LE COMPONENTI

- CONSIDERIAMO IL PASSAGGIO DA UNA BASE ON $\{|e_i\rangle\}$ AD UN ALTRA BASE ON $\{|e'_i\rangle\}$

$$\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij} \qquad \langle e'_i|e'_j\rangle = \delta_{ij}$$

E OPERATORE $U$

$$\boxed{|e'_i\rangle = U|e_i\rangle}$$

$$\langle e'_j| = \langle e_j|U^+$$

$$\langle e'_j|e'_i\rangle = \langle e_j|U^+U|e_i\rangle = \delta_{ji}$$

$$\sum_k \langle e_j|U^+|e_k\rangle\langle e_k|U|e_i\rangle = \delta_{ij} \Rightarrow \sum_k u^+_{jk}u_{ki} = \delta_{ij}$$

$$U^+U = \mathbb{1}$$

CAMBIAMENTO DI BASE DESCRITTO DA OPERATORE UNITARIO

- TRASFORMAZIONE COMPONENTI DI UN VETTORE

$$|x\rangle = \sum_i c_i|e_i\rangle = \sum_i c'_i|e'_i\rangle = \sum_i c'_i U|e_i\rangle$$

NB
$|x\rangle$ NON VIENE RUOTATO
RUOTA LA BASE
(TRASFORMAZIONE PASSIVA)

$$\sum_i c_i\langle e_j|e_i\rangle = \sum_i c'_i\langle e_j|U|e_i\rangle$$

$$c_j = \sum_i U_{ji}c'_i$$

$$c = Uc' \Rightarrow \boxed{c' = U^+c}$$

$$c^+ = c'^+U^+ \qquad \boxed{c'^+ = c^+U}$$

# TRASFORMAZIONE COMPONENTI DI UNA MATRICE 

$$a'_{iJ} = \langle e'_i | A | e'_J \rangle = \langle e_i | U^+ I A I U | e_J \rangle$$

$$I = \sum_K |e_K\rangle\langle e_K|$$

$$a'_{iJ} = \sum_{K,m} \langle e_i | U^+ | e_K \rangle \langle e_K | A | e_m \rangle \langle e_m | U | e_J \rangle$$

$$= \sum_{Km} u^+_{iK} \, a_{Km} \, u_{mJ}$$

$$\boxed{A' = U^+ A U}$$

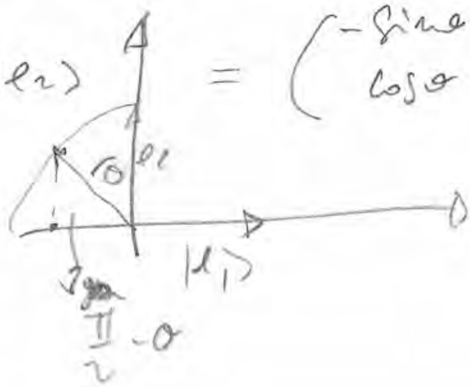
$$A = U A' U^+$$

$$\boxed{A'^+ = U^+ A^+ U}$$

$\mathbb{R}^2$ $\quad |e_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |e_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$


$$R(\theta)|e_1\rangle = \cos\theta|e_1\rangle + \sin\theta|e_2\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$R(\theta)|e_2\rangle = -\sin\theta|e_1\rangle + \cos\theta|e_2\rangle = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$




$$R_{11} = \langle e_1|R(\theta)|e_1\rangle = \cos\theta$$

$$R_{21} = \langle e_2|R(\theta)|e_1\rangle = \sin\theta$$

$$R_{12} = \langle e_1|R(\theta)|e_2\rangle = -\sin\theta$$

$$R_{22} = \langle e_2|R(\theta)|e_2\rangle = \cos\theta$$

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

ATTNE

DA DEFINIZIONE "COME AZIONE SU VETTORI" diverso

$$\tilde{R}(\theta)|x\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

TRASFORMAZIONE INVERSA

PROPRIETÀ DELLE TRASFORMAZIONI UNITARIE

INVARIANTI

- NORMA DI UN VETTORE

$|y\rangle = U|x\rangle$

$\langle y| = \langle x|U^+ \Rightarrow \langle y|y\rangle = \langle x|U^+U|x\rangle \Rightarrow \langle x|x\rangle = \langle y|y\rangle$

- TRACCIA DI UNA MATRICE

$A' = U^+ A U \qquad Tr\, A' = Tr\,(U^+AU) = Tr\,(U^+U)\, Tr\, A = Tr\, A$

- Det A

$\det A' = \det(U^+AU)$
$= (\det U^+) \det U \det A$
$= \det A'$

- MATRICE NORMALE $\rightarrow$ MATRICE NORMALE

IP. $[A, A^+] = 0$

$[A', A'^+] = [U^+AU, U^+A^+U] = U^+AUU^+A^+U - U^+A^+UU^+AU = U^+AA^+U - U^+A^+AU = U^+[A, A^+]U = 0$

HERMITIANE $\rightarrow$ HERMITIANE

- PARAMETRIZZAZIONE ESPONENZIALE DI MATRICE UNITARIA

$U = e^{iT} \qquad T = T^+$

VALIDO SOLO NELL'INTORNO DI $U = \mathbb{1}$, $T = 0$

INFATTI $iT = \ln U$ SINGOLARE IN $U = 0$

## BASI NON ON $\{|u_i\rangle\}$ L. INDIP

$$\langle u_i|u_k\rangle = R_{ik} \neq \delta_{ik}$$

$$|X\rangle = \sum_i a_i |u_i\rangle$$

$$|X\rangle \Rightarrow a_i$$

$$\langle X| = \sum_i \langle u_i| a_i^*$$

$$\boxed{a_i \neq \langle u_i|X\rangle}$$

$$\langle X|X\rangle = \sum_{iJ} a_J^* a_i \langle u_J|u_i\rangle = \sum_{iJ} a_J^* a_i R_{Ji}$$

$$= \sum_i \left(\sum_J a_J^* R_{Ji}\right) a_i = \sum_i a^+_i a_i$$

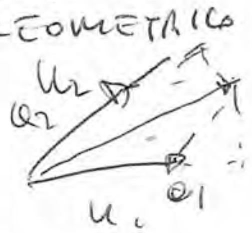
$$a^+_i = \sum_J a_J^* R_{Ji}$$

$$\langle u_K|X\rangle = \sum_i a_i \langle u_K|u_i\rangle$$

$$\langle X| \longrightarrow a^+_i$$

$$= \sum_i R_{Ki} a_i$$

SIGNIFICATO GEOMETRICO




## OPERATORI

$$A|u_i\rangle = \sum_K a_{Ki}|u_K\rangle$$

$$A \to a_{Ki} \neq \langle u_K|A|u_i\rangle$$

## CAMBIAMENTI DI BASE

S NON NECESSARIAMENTE UNITARIA MA DEVE ESSERE INVERTIBILE

$$|u'_i\rangle = S|u_i\rangle = \sum_K S_{Ki}|u_K\rangle$$

MOLTIPLICHIAMO PER $S^{-1}_{iJ}$

$$\sum_i S^{-1}_{iJ}|u'_i\rangle = \sum_{iK} S_{Ki}S^{-1}_{iJ}|u_K\rangle$$

$$= \sum_K \delta_{KJ}|u_K\rangle = |u_J\rangle$$

$$|u_J\rangle = \sum_i S^{-1}_{iJ}|u'_i\rangle$$

$$u = S^{-1}u'$$

$$u' = Su$$

# TRASF. VETTORI

$$|x\rangle = \sum_j a_j |e_j\rangle = \sum_i a'_i |e'_i\rangle$$

$$\sum_j a_j |e_j\rangle = \sum_{ji} a_j S^{-1}_{ij} |e'_i\rangle = \sum_i a'_i |e'_i\rangle$$

$$\Rightarrow \sum_i \left( \sum_j S^{-1}_{ij} a_j - a'_i \right) |e'_i\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad a'_i = S^{-1}_{ij} a_j$$

$$\boxed{a' = S^{-1} a}$$

COMPONENTI CONTROVARIANTI

ANALOGAMENTE

$$\boxed{\begin{aligned} a &= S a' \\ (a^+)' &= a^+ S \\ a^+ &= (a')^+ S^{-1} \end{aligned}}$$

$a^+$ COMPONENTI COVARIANTI

TRASFORMAZIONE MATRICI

$$A|e'_i\rangle = A \sum_k S_{ki} |e_k\rangle = \sum_k S_{ki} A|e_k\rangle$$

$$= \sum_{km} S_{ki}\, a_{mk} |e_m\rangle = \sum_{kmm} S_{ki}\, a_{mk}$$

$$\cancel{S^{-1}_{mm} |e'_m\rangle = \sum_m a'_{mi} |e'_m\rangle}$$

$$\cancel{\Rightarrow \sum_m \left( \sum_{km} S^{-1}_{mm} a_{mk} S_{ki} - a'_{mi} \right) |e'_m\rangle}$$

$$\sum_{km} S_{ki}\, a_{mk} |u_m\rangle = \sum_k a'_{ki} |u'_k\rangle$$

$$= \sum_{km} a'_{ki}\, S_{mk} |u_m\rangle$$

$$\Rightarrow \sum_{km} \left( S_{ki}\, a_{mk} - a'_{ki} S_{mk} \right) |u_m\rangle = 0$$

$$\sum_k S_{ki}\, a_{mk} = \sum_k a'_{ki}\, S_{mk} \quad S^{-1}$$

$$\sum_{mk} S^{-1}_{jm}\, a_{mk} S_{ki} = \sum_{km} a'_{ki}\, \underbrace{S^{-1}_{jm} S_{mk}}_{\delta_{jk}}$$

$$= a'_{ji}$$

$$a'_{ji} = \sum_{mk} S^{-1}_{jm}\, a_{mk}\, S_{ki}$$

$$A' = S^{-1} A S$$

TRASFORMAZIONE DI SIMILITUDINE

# PROPRIETÀ DI SIMILITUDINE

$\boxed{\text{INVARIANTI}}$

- TRACCIA

$$A' = S^{-1} A S \Rightarrow \operatorname{Tr} A' = \operatorname{Tr} S S^{-1} \operatorname{Tr} A$$

$$\Rightarrow \operatorname{Tr} A' = \operatorname{Tr} A$$

- DETERMINANTE $\det A' = \det A$

- NONINVARIANT NORME

CARATTERISTICA NORMALE DI UNA MATRICE

TRE DIVERSE NOTAZIONI

- FORMALE (BASE INDIPENDENTE)

(1) $|v\rangle = U|v'\rangle$ $\quad U \Rightarrow$ OPERATORE UNITARIO

- MATRICIALE (BASE DIPENDENTE)

(2) - SINTETICA

$$V = U V'$$

$U$, $U_{ij} \Rightarrow$ MATRICE UNITARIA

- IN COMPONENTI

(3) $$V_i = \sum_j U_{ji} V_i'$$

ESEMPIO DI USO: NORMA DI UN VETTORE NON CAMBIA

(1) $|v\rangle = U|v'\rangle$

$\langle v| = \langle v'|U^+ \quad \Rightarrow \quad \langle v|v\rangle = \langle v'|U^+U|v'\rangle$

DA $U^+U = I$

$\Rightarrow \langle v|v\rangle = \langle v'|v'\rangle$

(2) $V = U V' \qquad V^+ = V'^+ U^+$

$\Rightarrow V^+V = V'^+ U^+ U V' \Rightarrow$

$V^+V = V'^+ V'$

(3)

$$V_J = \sum_i U_{Ji} V'_i$$

$$V^+_J = \sum_K V'^+_K U^+_{KJ}$$

$$\Rightarrow \sum_J V^+_J V_J = \sum_J \sum_K \sum_i V'^+_K U^+_{KJ} U_{Ji} V'_i =$$

$$\text{MA } \sum_J U^+_{KJ} U_{Ji} = \delta_{Ki}$$

$$= \sum_K \sum_i V'^+_K \delta_{Ki} V'_i = \sum_i V'^+_i V'$$

$$\Rightarrow \sum_J V^+_J V_J = \sum_i V'^+_i V'$$

- UN PROBLEMA CHE SI PRESENTA SPESSO È QUELLO DI SCRIVERE UNA MATRICE IN FORMA **DIAGONALE**

**DIAGONALIZZAZIONE DI UNA MATRICE**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & - & - & - & a_{1N} \\ a_{21} & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{2N} & - & - & - & a_{NN} \end{pmatrix} \to A' = \begin{pmatrix} a & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b \end{pmatrix}$$

- PUÒ ESSERE FATTO CON UNA TRASFORMAZIONE UNITARIA

$$A' = U^{-1} A U$$

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

DOBBIAMO TROVARE UNA MATRICE

UNITARIA $U$

TALE CHE $A'$ SIA DIAGONALE

RISOLVEREMO PIÙ TARDI IL PROBLEMA

AUTOVALORI ED AUTOVETTORI

- TUTTE LE PROPRIETÀ DELL' EQUAZIONE AGLI AUTOVALORI CHE ABBIAMO ESPOSTO NEL CASO DEGLI OPERATORI VALGONO OVVIAMENTE ANCHE PER LE MATRICI (CHE POSSONO ESSERE CONSIDERATE LORO RAPPRESENTAZIONI)

- L' USO DELLE MATRICI CONSENTE PERÒ DI RISOLVERE FACILMENTE L' EQUAZIONE AGLI AUTOVALORI PER UN OPERATORE

$$A|u\rangle = \lambda |u\rangle$$

$$(A - \lambda \mathbb{1})|u\rangle = 0$$

- QUANDO $A$ È UNA MATRICE L'EQUAZIONE DIVENTA

$$a_{ij} u_j - \delta_{ij} u_j = 0$$

$$(a_{ij} - \lambda \delta_{ij}) u_j = 0 \qquad (1)$$

SISTEMA LINEARE OMOGENEO IN $u_j$

PERCHÈ ABBIA SOLUZIONE È NECESSARIO

$$\det |A - \lambda \mathbb{1}| = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & & & \\ a_{N1} & \cdots & & a_{NN}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\boxed{\text{EQUAZIONE SECOLARE}}$$

- ESPANDENDO IL DETERMINANTE SI TROVA UN'EQUAZIONE DI GRADO N IN $\lambda$ CHE RISOLTA DA GLI N AUTOVALORI $\lambda_1, \lambda_2 - - \lambda_N$

- SOSTITUENDO OGNI SINGOLO AUTOVALORE $\lambda$ NELLA (1) SI TROVANO I CORRISPONDENTI AUTOVETTORI $u(\lambda)$ $|u(\lambda)\rangle$

- ESSENDO IL SISTEMA IL SISTEMA OMOGENEO GLI AUTOVETTORI SONO DETERMINATI A MENO DI UNA COSTANTE ARBITRARIA CHE VIENE DETERMINATA IN MODO CHE GLI $|u(\lambda)\rangle$ ABBIANO MODULO 1

$$\langle u(\lambda)|u(\lambda)\rangle = 1$$

- SE LO SPETTRO DELL'OPERATORE È DEGENERE AD UN SINGOLO AUTOVALORE POSSONO CORRISPONDERE PIÙ DI UN AUTOVETTORE

ESISTENZA DI N AUTOVETTORI INDIPENDENTI

# PROPRIETÀ EQUAZIONE AGLI AUTOVALORI

## EQUAZIONE SECOLARE

$$\det(A-\lambda \mathbb{1}) = (-1)^N \lambda^N + (-1)^{N-1} \lambda^{N-1} \, \mathrm{Tr}\, A + (-1)^{N-2} \lambda^{N-2} \sum M_2^D + (-1)^N \lambda^{N-3} \sum M_3^D + \dots \det A$$

$\sum M_3^D \rightarrow$ DET. MINORE ORDINE 3

## DIMOSTRAZIONE INTUITIVA

$$\det(A-\lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{N1} & & & \end{vmatrix}$$

# POLINOMIO CARATTERISTICO

$$P_N(\lambda) = (-1)^N \lambda^N + (-1)^{N-1} \lambda^{N-1} \operatorname{Tr} A + \dots \det A$$

$P_N(\lambda) = 0 \Rightarrow$ EQUAZIONE SECOLARE

## TEOREMA DI CALEY

$$P_N(A) = 0$$

DIMOSTRAZIONE SEMPLICE SE A È DIAGONALIZZABILE $\exists S$ TALE CHE $S A S^{-1} = A_D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_N \end{pmatrix}$

$$P_N(A) = c_N A^N + c_{N-1} A^{N-1} + \dots c_0 =$$

$$= c_N \underbrace{SAS^{-1}SA \dots}_{N \text{ VOLTE}} + c_{N-1} \dots + c_0 =$$

$$= c_N A_D^N + c_{N-1} A_D^{N-1} + \dots c_0 = 0$$

$$= \begin{pmatrix} P_N(\lambda_1) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & P_N(\lambda_2) & 0 & \\ 0 & \dots & & \\ & & & \end{pmatrix} = 0$$

- FATTORIZZAZIONE POLINOMIO CARATTERISTICO

$$P_N(\lambda) = (-1)^N (\lambda-\lambda_1)^{m_1} + (\lambda-\lambda_2)^{m_2} + \dots (\lambda-\lambda_N)^{m_N}$$

TEOREMA FOND. ALGEBRA

- $\lambda_1 \dots \lambda_N$ AUTOVALORI

$m_1, m_2 \dots m_N$ CON $m_1+m_2+\dots m_N = N$

MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA DELLE SOLUZIONI (AUTOVALORI)

- CASO NON DEGENERE

EQUAZIONE SECOLARE HA $N$ SOLUZIONI $\boxed{\text{DISTINTE}}$

$m_1 = m_2 = \dots m_N = 1$

MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA DEGLI AUTOVALORI = 1

DATO CHE AD OGNI AUTOVALORE DISTINTO CORRISPONDE AUTOVETTORE LIN. INDIPENDENTE

L'EQUAZIONE $A u_i = \lambda_i u_i$ AMMETTE $N$ AUTOVETTORI LIN. INDIPENDENTI

MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA = MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA = 1

# CASO DEGENERE

SUPPONIAMO CI SIANO AUTOVALORI CON MOLTEPLICITÀ

$m_1, m_2 \ldots m_N \neq 1$

$H_{\lambda_i} \subseteq V_N$ AUTOSPAZIO RELATIVO AUTOVALORE $\lambda_i$

$\forall |u_i\rangle \in H_{\lambda_i} \Rightarrow H|u_i\rangle = \lambda_i |u_i\rangle$

- VETTORI $\in$ AD AUTOSPAZI DIVERSI SOLO LINEARMENTE INDIPENDENTI
- CONSIDERIAMO QUINDI L'AUTOSPAZIO RELATIVO AD UN SINGOLO AUTOVALORE DEGENERE $\lambda$ $H_\lambda$ CON $\lambda$ AVENTE MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA $m$

QUAL È LA DIMENSIONE DI $H_\lambda$ ?

PER RISPONDERE A QUESTA DOMANDA RICORDIAMO CHE GLI AUTOVETTORI DI A RELATIVI AD AUTOVALORE $\lambda$ SONO VETTORI $\in$ KERNEL DELL'OPERATORE

$$M(\lambda) = A - \lambda \mathbb{1}$$

INFATTI $M(\lambda)u = 0 \Rightarrow Au = \lambda u$

$$\Rightarrow \boxed{\dim H_\lambda = \dim K(M(\lambda))}$$

**TEOREMA**

$$\boxed{1 \leq \dim K(M(\lambda)) \leq m}$$

PER IL TEOREMA IMMAGINE

$$\dim K(M(\lambda)) = N - \dim \mathrm{IM}(M(\lambda)) =$$

$$= N - \mathrm{RANGO}(M(\lambda))$$

DATO CHE $\det M(\lambda) = 0 \Rightarrow$

$$\mathrm{RANGO}(M(\lambda)) \leq N-1$$

$$\Rightarrow \dim K(M(\lambda)) \geq 1$$

INOLTRE DATO CHE AD AUTOVALORI DISTINTI CORRISPONDONO AUTOVETTORI LIN. INDIPENDENTI $\dim(K(M(\lambda)) \leq m$

QUINDI $\boxed{1 \leq \text{DIM } H_\lambda \leq m}$

- QUANDO LA DISEGUAGLIANZA È SATURATA
  - $\boxed{\text{DIM } H_\lambda = m}$

MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA = MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA $\Rightarrow$ A AMMETTE N AUTOVETTORI LIN. INDIPENDENTI

$\boxed{\text{MATRICI NORMALI}}$

- TEOREMA SPETTRALE $\Rightarrow$ SE $[A^+, A] = 0$.

A AMMETTE N AUTOVETTORI ORTOGONALI TRA LORO QUINDI LIN. INDIPENDENTI

$\Rightarrow$ PER UNA MATRICE NORMALE

$$\boxed{\text{DIM } H_\lambda = m}$$

SOMMARIO

MATRICI NORMALI A

1. SPETTRO NON DEGENERE

EQUAZIONE SECOLARE N SOLUZIONI DISTINTE

$\Rightarrow$ GLI N AUTOVETTORI DI A

$A|e_i\rangle = \lambda_i|e_i\rangle$ VI DANNO AUTOMATICAMENTE UNA BASE ON DI $V_N$

2. SPETTRO DEGENERE

- AUTOVETTORI CORRISPONDENTI AD AUTOVALORI DISTINTI AUTOMATICAMENTE ORTOGONALI

- AUTOVETTORI CORRISPONDENTI AD AUTOVALORE DEGENERE POSSONO ESSERE ORTONORMALIZZATI USANDO GRAHAM-SCHMIDT

SI PUÒ QUINDI SEMPRE COSTRUIRE UNA BASE O.N DI $V^N$ DAGLI AUTOVETTORI DI A

$\{|e_i\rangle\}$ $\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}$

MATRICE GENERICA A (NON NORMALE)

(1) CASO NON DEGENERE N AUTOVETTORI LIN. INDIPENDENTI MA NON NECESSARIAMENTE ON.

AUTOVETTORI DI A FORNISCONO BASE NON ON DI $V^N$ $\{|u_i\rangle\}$

N.B.: $\boxed{\text{NON}}$ È POSSIBILE USARE GRAHAM-SCHMIDT PER COSTRUIRE UNA BASE ON $\{|e_i\rangle\}$ PARTENDO DA $\{|u_i\rangle\}$.

COMBINAZIONE LINEARE DI $\{|u_i\rangle\}$ NON È PIÙ AUTOVETTORE DI A

$$|e_i\rangle = \sum_j c_{ij} |u_i\rangle$$

$$A|e_i\rangle = \sum_i c_{ij} A|u_i\rangle$$

$$= \sum_i c_{ij} \lambda_i |u_i\rangle \neq \lambda |e_i\rangle$$

② CASO DEGENERE

A AMMETTE $M \leq N$ AUTOVETTORI LIN. INDIPENDENTI. SOLO NEL CASO IN CUI DIM ALGEBRICA = DIM. GEOMETRICA $\Rightarrow$ BASE NON ON DI $V^N$

$\boxed{\text{AUTOVALORI}}$

- VALGONO TUTTE LE PROPRIETÀ DIMOSTRATE PER GLI AUTOVALORI DEGLI OPERATORI

ESEMPIO (1)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = A^{+}$$

EQUAZIONE SECOLARE

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda \left( \lambda^2 - 1 \right) = 0$$

AUTOVALORI

$\lambda = 0 \qquad \lambda = 1 \qquad \lambda = -1$

AUTOVETTORI

$$\left( a_{ij} - \lambda \delta_{ij} \right) u_j = 0$$

$$\begin{cases} -\lambda u_1 + u_2 = 0 \\ u_1 - \lambda u_2 = 0 \\ -\lambda u_3 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\lambda = 0}$$

$$\begin{cases} u_2 = 0 \\ u_1 = 0 \\ u_3 = a \end{cases}$$

$$u(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda = 1}$$

$$-u_1 + u_2 = 0 \qquad u_1 = u_2 = b$$

$$u_1 - u_2 = 0 \qquad u_3 = 0$$

$$-u_3 = 0$$

$$u(1) = b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -1$$

$$\begin{matrix} u_1 + u_2 = 0 \\ u_1 + u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} u_1 = -u_2 = c \\ u_3 = 0 \end{matrix}$$

$$u(-1) = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a, b, c VANNO DETERMINATE

AFFINCHE GLI AUTOVETTORI ABBIANO NORMA 1

SEGUE

$$\boxed{\lambda = 0}$$

$$a^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a^2 = 1$$

$$a = 1$$

$$u(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda = 1}$$

$$b^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = b^2 \cdot 2 = 1$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$u(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -1$$

$$c^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$u(-1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$A = A^+ \Longrightarrow$ AUTOVALORI REALI, AUTOVETTORI ORTOGONALI

ESEMPIO (2)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^+ = A$$

AUTOVALORI REALI

AUTOVETTORI ORTOGONALI

$\lambda^2 - \lambda \operatorname{TR} A + \det A = 0 \Longrightarrow \lambda^2 - 1 = 0$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \qquad \lambda = \pm 1$$

AUTOVETTORI

$$-\lambda u_1 + i u_2 = 0$$

$$-i u_1 - \lambda u_2 = 0$$

$$\boxed{\lambda = 1}$$

$$-u_1 + i u_2 = 0$$
$$-i u_1 - u_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 = i u_2$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda = -1}$$

$$u_1 + i u_2 = 0$$
$$-i u_1 + u_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 = -i u_2$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$\langle u(1) | u(-1) \rangle = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = 1 - 1 = 0$$

# AUTOVALORI DEGENERI

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = A^{+}$$

$$(A - \lambda \mathbb{1})\,|u\rangle = 0$$

EQUAZIONE SECOLARE

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(1-\lambda^2) = 0 \qquad \lambda = 1, -1, 1$$

$\lambda = 1$ È DEGENERE $m = 2$

AUTOVETTORI

$\lambda = -1$

$$+2u_1 = 0 \qquad u_1 = 0$$

$$+u_2 + u_3 = 0 \qquad u_2 = -u_3$$

$$u_2 + u_3 = 0$$

$$u(-1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1$$

$$\begin{matrix} -u_2 + u_3 = 0 \\ u_2 - u_3 = 0 \end{matrix} \Rightarrow u_2 = u_3$$

$u_1 \Rightarrow$ INDETERMINATO

$\langle u(1) | u(-1) \rangle = 0$

$$u(1) = \begin{pmatrix} a \\ c \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow u_1^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_1^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

POSSIAMO DETERMINARE $c, a$ IN MODO DA AVERE 3 AUTOSTATI ORTONORMALI

$\langle u(-1) | u(1) \rangle = 0 \Rightarrow$ IDENTICAMENTE

$$u = \begin{pmatrix} a \\ c \\ c \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} a_1 \\ c_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

$\langle u | v \rangle = 0 \Rightarrow a^* a_1 + 2 c^* c_1 = 0$

$\langle u\, u \rangle = 1 \Rightarrow |a|^2 + 2|c|^2 = 1$

ESEMPIO

$$A=\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ 4i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix} \qquad A^{+}=\begin{pmatrix} 0 & -4i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix}$$

$[A^{+},A]\neq 0$ A NON È NORMALE

$$M=A-\lambda\mathbb{1}=\begin{pmatrix} -\lambda & i & 0 \\ 4i & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2i \end{pmatrix}$$

$$\det M=0 \Rightarrow (\lambda-2i)\begin{vmatrix} \lambda & i \\ 4i & -\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=(\lambda-2i)(\lambda^{2}+4)=0 \Rightarrow (\lambda-2i)^{2}(\lambda+2i)=0$$

$\lambda=2i \quad m=2$

$\lambda=-2i \quad m=1$

$$M(\lambda=2i)=\begin{vmatrix} -2i & i & 0 \\ 4i & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

RANGO $M(\lambda=2i)=1$ $\qquad$ $\dim H(\lambda=2i)=3-1=2$

M AMMETTE 3 AUTOVETTORI L. IND

CALCOLO AUTOVETTORI

$$\begin{pmatrix} -\lambda & i & 0 \\ 4i & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -\lambda u_1 + i u_2 = 0 & (1) \\ 4i u_1 - \lambda u_2 = 0 & (2) \\ (\lambda - 2i) u_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

$\boxed{\lambda = -2i}$

(3) $\Rightarrow u_3 = 0$

(1) $\Rightarrow u_2 = 2i$ $\Rightarrow u^- = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{\lambda = 2i}$

(3) $\Rightarrow \forall u_3$

(1) $\Rightarrow u_2 = 2u_1$

$$u^+ = \begin{pmatrix} u_1 \\ 2u_1 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$\langle u^+ | u^- \rangle \neq 0$ NON ORTOGONALI

AUTOSPAZIO $\lambda = 2i$

$$u^+_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad u^+_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle u^+_1 | u^+_2 \rangle = \langle u^- | u^+_2 \rangle = 0$$

$$\langle u^+_1 | u^- \rangle \neq 0$$

3 AUTOVETTORI LIN. IND. MA NON ON

CASO DEGENERE ⇒ AUTOVETTORI DI MATRICI HERMITIANE NON AUTOMATICAMENTE ORTOGONALI

MATRICE 4X4

$$B = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \qquad B = B^{+}, \qquad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$$

EQ. SECOLARE

$$(1-\lambda)^2(\lambda^2-1) = 0$$

$$(1-\lambda)^3(1+\lambda) = 0$$

$\lambda = 1 \quad m = 3$

$\lambda = -1 \quad m = 1$

AUTOVETTORI

$\forall a, b \in \mathbb{C}$

$$\boxed{\lambda = 1} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ u_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1 \end{pmatrix} \qquad u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda = -1} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

DIM KER $(\lambda = 1) = 3$

DIM IM = RANGO $(B - \lambda \mathbb{1}) = 1$

DIM KER $(\lambda = -1) = 1$

NEL SOTTOSPAZIO $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ POSSIAMO SCEGLIERE DUE VETTORI ORTOGONALI

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ABBIAMO QUINDI 4 VETTORI ORTONORMALI

$$\lambda = 1 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u_1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u_1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -1 \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{BASE ON SU } \mathbb{C}^4$$

VALGONO GLI STESSI TEOREMI DIMOSTRATI PER GLI OPERATORI

$\Rightarrow$ SE $(A - \lambda \mathbb{1}) X = 0$

ALLORA $\left( f(A) - f(\lambda) \mathbb{1} \right) X = 0$

STESSI AUTOVETTORI AUTOVALORI $f(\lambda)$

ESEMPIO

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_1 = \sigma_1^+$$

$$(\sigma_1 - \lambda \mathbb{1}) X = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow P(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \pm 1$$

$$-\lambda x_1 + x_2 = 0 \qquad x_2 = \frac{x_1}{\lambda}$$

$$X(\lambda) = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{x_1}{\lambda} \end{pmatrix} \qquad X(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X(2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$B = e^{i\alpha\sigma_1}$$

$$(B - \mu \mathbb{1}) X = 0 \qquad X = \text{STESSI}$$

$$\begin{cases} \mu_1 = e^{i\alpha} & X(1) \\ \mu_2 = e^{-i\alpha} & X(2) \end{cases}$$

# DIAGONALIZZAZIONE

UNA MATRICE $A$ $10 \times 10$

HA 100 COMPONENTI

- CI CHIEDIAMO: C'È RIDONDANZA? POSSIAMO RIDURRE IL NUMERO DI COMPONENTI SENZA PERDERE L'INFORMAZIONE?

$\boxed{\text{IDEA}}$

PROVIAMO AD USARE UNA TRASFORMAZIONE UNITARIA TALE CHE

$$A' = U^T A U = A_D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_N \end{pmatrix}$$

PIÙ IN GENERALE $A' = S^{-1} A S$ (SIMILITUDINE)

<u>GEOMETRICAMENTE</u>

BASE ON $\{|e_n\rangle\} \xrightarrow{U} \{|e'_n\rangle\}$

TALE CHE NELLA NUOVA BASE

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_N \end{pmatrix}$$

# DIAGONALIZZAZIONE MATRICI

CONDIZIONE NEC. E SUFF. AFFINCHÉ UNA MATRICE $A_{(n \times n)}$ SIA DIAGONALIZZABILE CON UNA TRASFORMAZIONE UNITARIA È CHE ESSA AMMETTA N AUTOVETTORI ON

$$A'_D = U^+ A U$$

GEOMETRICAMENTE

CAMBIAMO BASE

$$|e_i\rangle \rightarrow |e'_i\rangle = U|e_i\rangle$$

TALE CHE

$$A'_D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \; \lambda_n \end{pmatrix}$$

COND. NECESSARIA

IPOTESI $\exists\, U$ TALE CHE $U^+ = U^{-1}$

TALE CHE

$U^+ A U = A'_D$ MA $[A'_D, A'^+_D] = 0$

ESSENDO DIAGONALE. QUINDI $A'_D$ NORMALE

MA CARATTERE NORMALE INVARIANTE PER TRASFORMAZIONI UNITARIE

$\Rightarrow$ A NORMALE $\Rightarrow$ AMMETTE N AUTOVETTORI ON

$\boxed{\text{CONDIZIONE SUFFICIENTE}}$

IPOTESI: A AMMETTE N AUTOVETTORI

ON $\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}$ , $A|e_i\rangle = \lambda_i |e_i\rangle$

- FORMIAMO UNA MATRICE AVENTE $|e_i\rangle$ COME VETTORI COLONNA

$$U = \begin{pmatrix} |e_1\rangle & |e_2\rangle & \cdots & |e_N\rangle \\ | & | & & | \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

- LA MATRICE U È UNITARIA

$$U^+ = \begin{pmatrix} \langle e_1| \\ \langle e_2| \\ \vdots \\ \langle e_N| \end{pmatrix} \quad ; \quad U^+U = \begin{pmatrix} \langle e_1| \\ \langle e_2| \\ \vdots \\ \langle e_N| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |e_1\rangle & |e_2\rangle & \cdots & |e_N\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

TRASFORMIAMO $A$ CON LA MATRICE UNITARIA $U$

$$U^{+} A U = A' \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \langle e_1| \\ \langle e_2| \\ \vdots \\ \langle e_N| \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} |e_1\rangle & |e_2\rangle & \dots & |e_N\rangle \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \langle e_1| \\ \langle e_2| \\ \vdots \\ \langle e_N| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 |e_1\rangle & \lambda_2 |e_2\rangle & \dots & \lambda_N |e_N\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 \langle e_1|e_1\rangle & \lambda_2 \langle e_1|e_2\rangle & \dots & \lambda_N \langle e_1|e_N\rangle \\ \lambda_1 \langle e_2|e_1\rangle & \lambda_2 \langle e_2|e_2\rangle & \dots & \vdots \\ & & & \lambda_N \langle e_N|e_N\rangle \\ \dots & \dots & \dots & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \lambda_N \end{pmatrix} = A'_D$$

ABBIAMO DIAGONALIZZATO LA MATRICE NORMALE $A$

$$A_D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N \end{pmatrix}$$

AUTOVALORI LUNGO LA DIAGONALE

IN COMPONENTI

$A \Rightarrow a_{ik}$ $\qquad |e_m\rangle \Rightarrow u_{k(m)}$ ON

$A|e_m\rangle = \lambda_m |e_m\rangle \Rightarrow$

$$\sum_k \left(a_{ik} - \lambda_m \delta_{ik}\right) u_{k(m)} = 0$$

$u_{k(m)} = \left(u_{k1} \quad u_{k2} \quad u_{kN}\right)$

$k \to R$, $(m) \to C$

$\langle e_m | e_n \rangle = \sum_k u^{+}_{(m)k} \, u_{k(n)} = \delta_{mn}$ UNITARIA

$A' = U^{+} A U \Rightarrow$

$$a'_{ij} = \sum_{ks} u^{+}_{ik} a_{ks} u_{sj} = \sum_k u^{+}_{ik} \sum_s a_{ks} u_{sj}$$

$$= \sum_k \sum_s u^{+}_{ik} \lambda_k \delta_{ks} u_{sj}$$

$$= \sum_k \lambda_k u^{+}_{ik} u_{kj} = \lambda_i \delta_{ij} = A'_D$$

COND. NECC. SUFF. AFFINCHÉ UNA MATRICE $A$ SIA DIAGONALIZZABILE TRAMITE CAMBIAMENTO DI BASE GENERICO $A'_D = S^{-1} A S$ È CHE ESSA AMMETTA $n$ AUTOVETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI

$$\{|u_i\rangle\}$$

$$A|u_i\rangle = \lambda_i |u_i\rangle$$

$$A'_D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

INOLTRE

$$S = (|u_1\rangle \; \ldots \; |u_n\rangle)$$

$|u_i\rangle$ DIAGONALIZZAZIONE MATRICE GENERICA — COND. SUFF

VETT. LIN. IND

$$\sum_J A_{KJ} u_{J m} = \lambda u_K$$

$$\exists S^{-1} \quad S_{J(m)} = (|u_1\rangle \; \ldots \; |u_m\rangle \; \ldots)$$

$$\sum_J A_{KJ} S_{J(m)} = \lambda_{(m)} S_{K(m)}$$

$$A' = S^{-1} A S \Rightarrow \sum_{KJ} (S^{-1})_{iK} A_{KJ} S_{Jm} = a'_{im}$$

$$= \sum_K \lambda_m S^{-1}_{iK} S_{Km} = a'_{im}$$

$$= \boxed{\lambda_m \delta_{im} = a'_{im}}$$

$$\sum_K S^{-1}_{iK} S_{Km} = \delta_{im}$$

- ABBIAMO DIMOSTRATO LA CONDIZIONE SUFFICIENTE:
  SE A AMMETTE $n$ $|u_i\rangle$ L. IND
  $\Rightarrow$ A DIAGONALIZZABILE

- $\boxed{\text{COND. NECESSARIA}}$
  A DIAG. $\exists S$ TALE CHE
  $$S^{-1} A S = A_D \Rightarrow A_D |u'_i\rangle = \lambda_i |u'_i\rangle$$
  $$|u'_1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\end{pmatrix} \quad |u'_2\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\end{pmatrix}$$ AUTOVETTORI NELLA NUOVA BASE

  MA $|u'_i\rangle = S|u_i\rangle \quad |u_i\rangle = S^{-1}|u'_i\rangle$

  AUTOVETTORI NELLA VECCHIA BASE

$$A = S A_D S^{-1} \quad A|u_i\rangle = S A_D S^{-1} |u_i\rangle = S A_D |u'_i\rangle = \lambda_i S |u'_i\rangle = \lambda_i |u_i\rangle$$

## COND. SUFF

IP. $A|u_i\rangle = \lambda_i |u_i\rangle$ $\quad i=1 \dots N$

L. IND.

$$S = \left( |u_1\rangle \dots |u_i\rangle \dots |u_N\rangle \right)$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \langle v_1| \\ \vdots \\ \langle v_i| \\ \langle v_N| \end{pmatrix}$$

TALI CHE $S^{-1}S = \mathbb{1} \Rightarrow \langle v_i | u_j \rangle = \delta_{ij}$

NB: $\langle v_i| \neq \langle u_i|$

ALTRIMENTI $S^{-1} = S^T$

PROCEDIAMO ALLO STESSO MODO COME CON LE TRASF. UNITARIE

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \langle v_1| \\ \vdots \\ \langle v_N| \end{pmatrix} A \left( |u_1\rangle \dots |u_N\rangle \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \langle v_1| \\ \vdots \\ \langle v_N| \end{pmatrix} \left( \lambda_1 |u_1\rangle \dots \lambda_N |u_N\rangle \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 \langle v_1|u_1\rangle & \dots & \lambda_N \langle v_1|u_N\rangle \\ \lambda_1 \langle v_2|u_1\rangle & \dots & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_N \end{pmatrix}$$

N.B $\Rightarrow$ UNA MATRICE NORMALE È SEMPRE DIAG. ED AMETTE N AUT. ON QUINDI PUÒ ESSERE DIAG. DA UNA TRASF. UNITARIA

$$A_D = U^+ A U$$

$\Rightarrow$ PER IL TEOREMA SPETTRALE UNA MATRICE CHE AMETTE N. AUT. ON È NECC. NORMALE

$\Rightarrow$ CI POSSONO ESSERE MATRICI CHE SONO DIAG. MA NON SONO NORMALI. IN QUESTO CASO PERÒ NON AMETTONO AUT. ON MA SOLO LIN. IND.

DA NOTARE SE HO N AUT LIN IND $\{|u_\lambda\rangle\}$ NON POSSO USARE GRAHM SCHMDT PER ON, INFATTI $\alpha|u_1\rangle + \beta|u_2\rangle$ NON È PIÙ AUTOV. DI A

POSSO USARE G.S SOLO DENTRO L'AUTOSP. DI UN CERTO AUTOVALORE $\lambda$

RAPPRESENTAZIONE SPETTRALE
DI UN OPERATORE HERMITIANO

$A = A^\dagger$ , $\lambda_n$ , $|e_n\rangle$ $n = 1, \dots, m$ NON. DEG.

$P_n = |e_n\rangle\langle e_n|$ proiettore sulla direzione dell'A.vettore n-esimo

$$\sum_n P_n = \sum_{1}^{m} |e_n\rangle\langle e_n| = I$$

segue

$$A|V\rangle = A\,I\,|V\rangle =$$

$$= A \sum_n |e_n\rangle\langle e_n|V\rangle$$

$$= \sum_n A|e_n\rangle \langle e_n|V\rangle$$

$$= \sum_n \lambda_n |e_n\rangle\langle e_n|V\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \sum_n \lambda_n |e_n\rangle\langle e_n|}$$

## AUTOVETTORI ED AUTOVALORI DI FUNZIONI DI OPERATORI

- DATO UN OPERATORE $A$ CON $|u_\lambda\rangle$, $\lambda$ AUTOVETTORI ED AUTOVALORI

$$A|u_\lambda\rangle = \lambda |u_\lambda\rangle$$

SI DIMOSTRA FACILMENTE SVILUPPANDO IN SERIE CHE

$$F(A)|u_\lambda\rangle = F(\lambda)|u_\lambda\rangle$$

$\rightarrow$ $|u_\lambda\rangle$ SONO ANCHE AUTOVETTORI DELL'OPERATORE $B = F(A)$

GLI AUTOVALORI CORRISPONDENTI SONO $F(\lambda)$

ESEMPIO

$$A|u_\lambda\rangle = \lambda|u_\lambda\rangle$$

$$B = e^{A} \qquad e^{A}|u_\lambda\rangle = e^{\lambda}|u_\lambda\rangle$$

$\Rightarrow$ INFATTI $[A, B] = [A, F(A)] = 0$

(UN OPERATORE COMMUTA SEMPRE CON UNA FUNZIONE DI SE STESSO)

QUINDI $A$, $F(A)$ AMMETTONO UN SET DI AUTOVETTORI COMUNI $\Leftarrow$

QUINDI PER CALCOLARE FUNZIONI DI OPERATORI CONVIENE SPESSO USARE LA BASE IN CUI A È DIAGONALE $\Rightarrow$ ANCHE F(A) SARÀ DIAGONALE

ESEMPIO:

SIA $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ E $\lambda_1, \lambda_2$ I SUOI AUTOVALORI.

NELLA BASE DEGLI AUTOVETTORI A È DIAGONALE

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

QUINDI IN QUESTA BASE OGNI F(A) È ANCHE DIAGONALE

$$B = F(A) = \begin{pmatrix} F(\lambda_1) & 0 \\ 0 & F(\lambda_2) \end{pmatrix}$$

PER ES $B = F(A) = e^{A}$

$$B = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

## MATRICI DI PAULI



- $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

- $\sigma_i^2 = \mathbb{1}$ $\quad$ • $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \sum_k \varepsilon_{ijk} \sigma_k$

- $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$

$\sigma_i = \sigma_i^\dagger$

**Autovalori**: $\sigma_1$

$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \lambda = \pm 1$ $\qquad$ Idem per $\sigma_2, \sigma_3$

**Autovettori**

$\sigma_1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\sigma_2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$

$\sigma_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

AUTOVETTORI

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad -\lambda(\lambda^2-1) + \lambda = -\lambda(\lambda^2-2)$$

$$\begin{cases} -\lambda x + y = 0 \\ x - \lambda y + z = 0 \\ y - \lambda z = 0 \end{cases}$$

$\lambda = 0 \quad y = 0$

$x = -z$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$y = \pm\sqrt{2}\, x$

$y = \pm\sqrt{2}\, z$

$x = z \quad y = \pm\sqrt{2}\, x$

$$u_\pm = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = A^2 \Rightarrow [A, B] = 0$$

$$\det(A - \lambda 1) = \begin{vmatrix} -\lambda & i/\sqrt{2} & 0 \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & -\lambda & i/\sqrt{2} \\ 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\right) - \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\lambda \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = -\lambda(\lambda^2 - 1)$$

$\lambda = 0 \qquad \lambda = \pm 1$

$$A \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \pm 1 \end{cases}$$

$$B: \begin{cases} \omega = 0 \\ \omega = 1 \end{cases}$$

$$|B - \lambda 1| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 (1-\lambda) - (1-\lambda)\frac{1}{4}$$

$$= (1-\lambda)\left[\lambda^2 - \lambda\right] = -\lambda(1-\lambda)^2$$

$$B \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

Autovettori

$A$:

$$-\lambda x + \frac{i}{\sqrt{2}} y = 0$$
$$-\frac{i}{\sqrt{2}} x - \lambda y + \frac{i}{\sqrt{2}} z = 0$$
$$-\frac{i}{\sqrt{2}} y - \lambda z = 0$$

$\lambda = 0 \Rightarrow y = 0,\ x = z \quad u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x = \frac{i}{\lambda\sqrt{2}} y$

$z = -x$

$$u_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

B:

$$\left(\tfrac{1}{2}-\lambda\right)x \quad -\tfrac{1}{2}z=0$$
$$(1-\lambda)y=0$$
$$-\tfrac{1}{2}x \quad +\left(\tfrac{1}{2}-\lambda\right)z=0$$

$\lambda=0 \Rightarrow y=0$

$x=z \quad v_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\lambda=1$

$$-\frac{x}{2} - \frac{1}{2}z=0$$
$$-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z=0$$
$$\Rightarrow z=-x$$

[illegible]

$$u=\begin{pmatrix}x\\y\\-x\end{pmatrix} \qquad 2D$$

$y=\frac{1}{2}, \quad x=\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\1\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

$y=\frac{1}{2} \quad x=-\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\1\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

ESEMPIO: VOGLIAMO DIAGONALIZZARE

$$B = e^{i\alpha A} \qquad \alpha \in \mathbb{R} \qquad \sigma_y \; A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{NOTARE} \quad A = A^{+} \quad B^{+} = B^{-1} \quad A \text{ HERMITIANO} \quad B \text{ UNITARIO}}$

1° MODO:

$$e^{i\alpha A} = \mathbb{1} + i\alpha A + \frac{1}{2!}(i\alpha)^2 A^2 + \dots \frac{1}{M!}(i\alpha)^M A^M$$

MA $A^2 = \mathbb{1} \quad A^3 = A \quad \dots \quad A^{2M} = \mathbb{1}$ ,

$A^{2M+1} = A$

$$e^{i\alpha A} = \mathbb{1} + i\alpha A + \frac{1}{2}(i\alpha)^2 + \frac{1}{3}(i\alpha)^3 A + \dots$$

$$= \mathbb{1}\left(1 + \frac{1}{2}(i\alpha)^2 + \frac{1}{4!}(i\alpha)^4 \dots + \frac{1}{2M!}(i\alpha)^{2M} + \dots\right)$$

$$+ A\left(i\alpha + \frac{1}{3!}(i\alpha)^3 + \dots \frac{1}{(2M+1)!}(i\alpha)^{2M+1}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2!}\alpha^2 + \frac{1}{4!}\alpha^4 - \right)\mathbb{1} +$$

$$+ iA\left(\alpha - \frac{1}{3!}\alpha^3 + \frac{1}{5!}\alpha^5 + \dots\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 \\ 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

DOVREMMO DIAGONALIZZARE QUESTA MATRICE

AUTOVALORI:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha-\lambda & i\sin\alpha \\ i\sin\alpha & \cos\alpha-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1 = 0$$

$$\lambda \begin{cases} e^{i\alpha} \\ e^{-i\alpha} \end{cases} \qquad B_D = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}$$

AUTOVETTORI: - - - - -

NOTARE: AUTOVALORI MODULO 1

SECONDO MODO:

- TROVIAMO AUTOVALORI DI $A$:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \qquad \lambda = \pm 1$$

- SEGUE CHE AUTOVALORI DI $B = e^{i\alpha A}$ SARANNO $e^{i\alpha}$, $e^{-i\alpha}$

(DATO CHE AUTOVALORI DI $F(A)$ SONO $F(\lambda)$)

- QUINDI $B_D = e^{i\alpha A_D} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}$
- AUTOVETTORI DI $B$ SARANNO GLI STESSI DI $A$

NOTARE: $B_D^\dagger = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix} = B_D^{-1}$

ESEMPIO: VOGLIAMO DIAGONALIZZARE LA MATRICE

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

- ABBIAMO GIÀ VISTO CHE GLI AUTOVARORI SONO $\lambda = \pm 1$ E GLI AUTOVETTORI

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

- LA MATRICE UNITARIA SARÀ

$$U = \begin{pmatrix} |u_1\rangle & |u_2\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

$$U^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

$$U^+ A U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

RAPPRESENTAZIONE SPETTRALE OPERATORE NORMALE $A|u_i\rangle = \lambda|u_{i}\rangle$

$\langle u_i|u_j\rangle = \delta_{ij}$

$$A = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \, |u_i\rangle\langle u_i|$$

- SE USIAMO COME BASE DI $V^N$ $\{|u_i\rangle\}$

$$A|x\rangle = \sum_i \lambda_i \, \langle u_i|x\rangle \, |u_i\rangle = \sum_i c_i \lambda_i |u_i\rangle$$

$$= A \sum_i c_i |u_i\rangle = \sum_i c_i \lambda_i |u_i\rangle$$

- OVVIAMENTE POSSIAMO USARE ANCHE ALTRA BASE ON $\{|e_i\rangle\}$

ESPRESSIONE $\mathrm{Tr}\, A$ e $\det A$ IN TERMINI AUTOV.
ESSENDO $\mathrm{Tr}\, A$ e $\det A$ INVARIANTI PER TRASFORMAZIONI UNITARIE (SIM.)

$$\mathrm{Tr}\, A = \mathrm{Tr}\, U^{+} A U = \mathrm{tr}\, A_D = \sum_i \lambda_i$$

$$\det A = \det U^{+} A U = \det A_D = \prod_i \lambda_i$$

# DIAGONALIZZAZIONE SIMULTANEA DI MATRICI

- DUE MATRICI $A, B$ AMMETTONO UN SET (COMPLETO (BASE)) DI AUTOVETTORI COMUNI SE E SOLO SE $[A,B]=0$

INFATTI:

SUPPONIAMO $[A,B]=0$

SIA $|u_A\rangle$ AUTOVETTORE DI $A \Rightarrow A|u_A\rangle = \lambda_A |u_A\rangle$

ABBIAMO

$$[A,B]\,|u_A\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad AB|u_A\rangle - BA|u_A\rangle = 0$$

$$AB|u_A\rangle = \lambda_A B|u_A\rangle$$

$$A(B|u_A\rangle) = \lambda_A (B|u_A\rangle)$$

$\Rightarrow$ $B|u_A\rangle$ È ANCORA AUTOVETTORE DI $A$ CORRISPONDENTE A $\lambda_A$

$$\Rightarrow \quad B|u_A\rangle = \lambda_B |u_A\rangle$$

$|u_A\rangle$ È ANCHE AUTOVETTORE DI $B$

AL CONTRARIO SUPPONIAMO CHE A, B AMMETTANO UN SET DI AUTOVETTORI COMUNI $|u\rangle$

$$A|u\rangle = \lambda_A |u\rangle$$

$$B|u\rangle = \lambda_B |u\rangle$$

SEGUE

$$[AB - BA]|u\rangle = 0$$

DATO CHE $|u\rangle$ È UN SET COMPLETO QUESTO VARRÀ PER UN GENERICO VETTORE

- SEGUE CHE UN INSIEME DI MATRICI A, B, C ...

SARANNO DIAGONALIZZABILI SIMULTANEAMENTE SE ESSE COMMUTANO

$$[A,B] = [A,C] \ldots = 0$$

MECC. QUANTISTICA

⇒ LABEL PER GLI STATI

$\psi_{n\ell m}$ ≙ SET COMPLETO

# SOMMARIO

| MATRICE | AUTOVALORI | AUTOVETTORI |
|---|---|---|
| NORMALE | $\lambda$ (DI A) $\lambda^*$ (DI $A^+$) | ORTOGONALI (STESSI PER $A, A^+$) |
| HERMITIANA | REALI | ORTOGONALI |
| ANTIHERMITIANA | IMMAGINARI PURI | // |
| UNITARIA | MODULO = 1 | // |

PER ESEMPIO:

$$A = -A^+$$

$$A|u\rangle = \lambda |u\rangle$$

$$A^+|u\rangle = \lambda^* |u\rangle \Rightarrow A|u\rangle = -\lambda^* |u\rangle$$

$$\Rightarrow \lambda = -\lambda^* \Rightarrow \lambda \text{ IMMAGINARIO PURO}$$

OPPURE

$$A^+ = A^{-1}$$

$$A|u\rangle = \lambda |u\rangle$$

$$A^+|u\rangle = \lambda^* |u\rangle \Rightarrow A^{-1}|u\rangle = \lambda^* |u\rangle$$

$$\Rightarrow AA^{-1}|u\rangle = \lambda^* A|u\rangle$$

$$\Rightarrow |u\rangle = |\lambda|^2 |u\rangle$$

$$\Rightarrow |\lambda|^2 = 1$$

ESEMPI FISICI

DINAMICA LINEARE

N COORDINATE $X_i(t)$ $i = 1 \ldots N$

$X_i(t) \in \mathbb{R}^N$

$$\frac{d X_i(t)}{dt} = \sum_j Q_{ij} X_j \qquad (1)$$

- DETERMINA EVOLUZIONE TEMPORALE DEL SISTEMA NOTE LE CONDIZIONI INIZIALI

$X_i(t = t_0) = X_i^0$ $\qquad X_i^0(t=0) \longrightarrow X_i(t)$

SOLUZIONE DI (1) PUÒ ESSERE RICONDOTTO AD UN'EQUAZIONE AGLI AUTOVALORI

POSTO $X_i(t) = C_i e^{\alpha t} \Rightarrow \boxed{\text{MODI NORMALI}}$

(1)

$$\alpha C_i \cancel{e^{\alpha t}} = \left( \sum_j Q_{ij} C_j \right) \cancel{e^{\alpha t}}$$

$$\boxed{\sum_j Q_{ij} C_j = \alpha C_i}$$

$AC = \alpha C$ ⊙ NELLA NOTAZIONE DI DIRAC

$$A|C_K\rangle = \alpha_K |C_K\rangle$$

$\alpha_K \rightarrow$ AUTOVALORI

$|C_K\rangle \Rightarrow$ AUTOVETTORI

SOLUZIONE GENERALE $\rightarrow$ COMBINAZIONE LINEARE DEI MODI NORMALI

$$|X\rangle = \sum_K a_K e^{\alpha_K t} |C_K\rangle$$

$\Downarrow$

DETERMINATI DALLE CONDIZIONI INIZIALI

PUNTI FISSI (EQUILIBRIO)

$$\frac{dX_i}{dt} = 0 \Rightarrow \sum_j a_{ij} X_j = 0$$

COMPETIZIONE TRA DUE SPECIE (1)

(REGIME LINEARE)

$X_1(t) = POP_1(t) - POP(EQUI)$

$X_2(t) = POP(t) - POP(EQ)$

$\alpha, \beta > 0$

$\alpha$ TASSO NAT.

$\beta$ COEF. COMP.

$$\begin{cases} \dfrac{dX_1}{dt} = \alpha X_1 - \beta X_2 \\ \dfrac{dX_2}{dt} = \alpha X_2 - \beta X_1 \end{cases}$$

PUNTI FISSI

$X_1 = X_2 =$

$(\alpha = \beta$ ; $X_1 = X_2)$

PUNTO FISSO $\frac{dX_1}{dt} = \frac{dX_2}{dt} = 0$ $\quad X_1 = \frac{\alpha}{\beta} X_2$, $X_1 = \frac{\beta}{\alpha} X_2 \Rightarrow \beta = \alpha \quad X_1 = X_2$

$$\frac{dX_i}{dt} = \sum_j A_{ij} X_j \qquad A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda 1\!\!1)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha-\lambda & -\beta \\ -\beta & \alpha-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda = \alpha \pm \beta}$$

$$\det(A - \lambda 1\!\!1) = (\alpha - \lambda)^2 - \beta^2 = 0$$

$$(\alpha - \lambda) u_1 - \beta u_2 = 0 \qquad u_2 = \left(\frac{\alpha - \lambda}{\beta}\right) u_1$$

$\lambda = \alpha + \beta \qquad u_2 = -u_1 \qquad u^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda = \alpha - \beta \qquad u_2 = u_1 \qquad u^- = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} u^+(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{(\alpha+\beta)t} \\ u^- = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{(\alpha-\beta)t} \end{cases}$$

MODI NORMALI

se $\alpha = \beta$

$u^- \to$ EQUILIBRIO

2

SOLUZIONE GENERALE

$$X = C_1 u^+ + C_2 u^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} C_1 e^{(\alpha+\beta)t} + C_2 e^{(\alpha-\beta)t} \\ -C_1 e^{(\alpha+\beta)t} + C_2 e^{(\alpha-\beta)t} \end{pmatrix}$$

$$X_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ C_1 e^{(\alpha+\beta)t} + C_2 e^{(\alpha-\beta)t} \right]$$

$$X_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ -C_1 e^{(\alpha+\beta)t} + C_2 e^{(\alpha-\beta)t} \right]$$

DIPENDE FORTEM. DALLE COND INIZIAL.

$t = 0$

$$X_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (C_1 + C_2)$$

$$X_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-C_1 + C_2)$$

$$X_1(0) - X_2(0) = \sqrt{2}\, C_1$$

$$X_1(0) + X_2(0) = \sqrt{2}\, C_2$$

I λ INI UNA

per $t \to \infty$

$$X_1(t) \sim C_1 e^{(\alpha+\beta)t}$$

$$X_2(t) \sim -C_1 e^{(\alpha+\beta)t}$$

se $X_2 < X_1$ $\quad C_1 > 0$ $\quad$ 2 SI ESTINGUE

se $X_2 > X_1$ $\quad C_1 < 0$ $\quad$ 1 SI ESTINGUE

SOLO SE $X_2 = X_1$ a $t = 0$

$C_1 = 0$ C

$$X_1 = \frac{C_2}{\sqrt{2}} e^{(\alpha-\beta)t}$$

$$X_2 = \frac{C_2}{\sqrt{2}} e^{(\alpha-\beta)t} \qquad X_2(t) = X_1(t)$$

ENTRAMBE LE SPECIE

SOPRAVVIVONO se $\alpha > \beta$

ESTINGUONO SE $\alpha < \beta$

SE $\alpha = \beta$ $\quad X_1 = \frac{C_2}{\sqrt{2}} = X_2$

EQUILIBRIO

## OSCILLATORI ACCOPPIATI

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = - \sum_k a_{ik} x_k \quad (1)$$

PUÒ ESSERE TRASFORMATA IN EQUAZIONE AGLI AUTOVALORI PONENDO

$$x_i = C_i \sin(\omega t + \delta)$$ MODI NORMALI

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = - \omega^2 x_i$$

$$(1) \Rightarrow \quad + \omega^2 x_i = \sum_k a_{ik} x_k$$

$$\boxed{\sum_k a_{ik} x_k = \omega^2 x_i}$$

$$A |x_i\rangle = \lambda |x_i\rangle \qquad \lambda = \omega^2$$

③ MOLECOLA DI $CO_2$ OSCILLATORI ACCOPPIATI

(Modello modi vibrazionali)


$$\begin{cases} m\ddot{u}_1 = -k(u_1 - u_2) \\ m\ddot{u}_3 = -k(u_3 - u_2) \\ M\ddot{u}_2 = -k(u_2 - u_1 + u_2 - u_3) \end{cases}$$

$u_1 = C_1 \sin(\omega t + \delta)$

MODI NORMALI

Sostituendo Troviamo eq. agli autovalori.

$$AC = \omega^2 C \qquad A = \begin{pmatrix} \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & 0 \\ -\frac{k}{M} & \frac{2k}{M} & -\frac{k}{M} \\ 0 & -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} \end{pmatrix}$$

$A = K - I\omega^2 \qquad \omega^2 = \lambda$

$$\det A = \left(\frac{k}{m} - \lambda\right) \begin{vmatrix} \frac{2k}{M} - \lambda & -\frac{k}{M} \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} - \lambda \end{vmatrix} + \frac{k}{m} \begin{vmatrix} -\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ 0 & \frac{k}{m} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda\left(\frac{k}{m} - \lambda\right)\left(\lambda - \frac{2k}{M} - \frac{k}{m}\right) = 0$$

$\lambda = 0 \Rightarrow \omega_1 = 0 \qquad \lambda = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\bar{C}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{C}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

# FORME QUADRATICHE E FORME HERMITIANE

## FORME QUADRATICHE SU $\mathbb{R}$

$X \to$ VETTORE
$A \to$ MATRICE

$$S = XAX = \sum_{KJ=1}^{N} a_{KJ} X_K X_J = a_{11} X_1^2 + a_{12} X_1 X_2 \dots$$

## GENERALIZZAZIONE SU $\mathbb{C}$

FORME HERMITIANE

$$A = A^+$$

$$S = \langle X | A | X \rangle$$

$$= \sum_{KJ} a_{KJ} X_K^* X_J$$

$$S^* = \langle X | A^+ | X \rangle = \langle X | A | X \rangle \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{REALE}$$

O SE SI VUOLE

ESSENDO $a^*_{KJ} = a_{JK}$

$$S^* = \sum_{KJ} a^*_{KJ} X_K X_J^* = \sum_{KJ} a_{JK} X_K X_J^* = S$$

$\Rightarrow$ S SCALARE INVARIANTE PER TRASF. UNITARIE

$$A' = U^+ A U \quad |X'\rangle = U^+ |X\rangle$$
$$\langle X'| = \langle X | U$$

$$S' = \langle X' | A' | X' \rangle = \langle X | U U^+ A U U^+ | X \rangle = \langle X | A | X \rangle$$
$$= S$$

$\Rightarrow$ IN PARTICOLARE PASSANDO ALLA BASE IN CUI A È DIAGONALE

$$A | e_K \rangle = \lambda_K | e_K \rangle$$

$$S' = \langle X|A|X\rangle = \sum_{KJ} \lambda_K \delta_{KJ} X_K^* X_J$$

$$= \sum_K \lambda_K |X_K|^2$$

<u>ESEMPI</u> RIDUZIONE CONICA AGLI ASSI PRINCIPALI

EQ. CONICA

$$S = Q_{11}X_1^2 + 2Q_{12}X_1X_2 + Q_{22}Y^2 = \sum_{KJ=1}^{2} Q_{KJ} X_K X_J = 0$$

$$= \sum_K \lambda_K X_K^2$$

ELLISSE $\lambda_K > 0$

IPERBOLE $\lambda_1$ OPP. $\lambda_2$

CERCHIO $\lambda_1 = \lambda_2$

MOMENTO DI INERZIA

- SE SI CONOSCE L'ASSE DI ROTAZIONE DI UN CORPO RIGIDO ALLORA

$$\bar{L} = I\bar{\omega} \qquad T = \frac{1}{2} I \bar{\omega}^2$$

MOMENTO INERZIA RISPETTO ALL'ASSE




- NEL CASO GENERICO

$$L_1 = \sum_K I_{1K}\,\omega_K$$ → TENSORE INERZIA

SE $\bar{m}$ VERSORE ASSE ROTAZIONE

$$I = \langle m | I | m \rangle = \sum_{kl} m_k m_l I_{kl}$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{kl} I_{kl} \omega_k \omega_l$$

$$I_{kl} = \sum_{a} m_a \left( X_k^a X_l^a - \delta_{kl} \sum_m X_m^a X_m^a \right)$$

- DIAGONALIZZANDO $I$

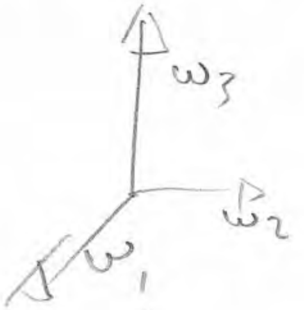
RIDUZIONE ASSI PRINCIPALI

$I\omega = \lambda \omega$ AUTOVALORI $I_x, I_y, I_z$

// VETTORI $\omega_x, \omega_y, \omega_z$

- SE ORIENTIAMO ASSE ROTAZIONE LUNGO ASSE PRINCIPALE

$$L_x = I_x \omega_x \quad L_y = I_y \omega_y \quad L_z = I_z \omega_z$$




$$T = \frac{1}{2} \left( I_x^2 \omega_x^2 + I_y^2 \omega_y^2 + I_z^2 \omega_z^2 \right)$$

$\Rightarrow$ TANTISSIMI ALTRI ESEMPI TENSORE SFORZI

$$F_i = \sum_k T_{ik} m_k \to \text{NORMALE}$$

Forza di superficie.

APPLICAZIONE ALLA M.Q

- VALORI MEDI DI UNA GRANDEZZA FISICA IN UNO STATO $\psi$

$$\langle \psi | A | \psi \rangle = \langle A \rangle$$ FORMA HERMITIANA

- DEVIAZIONE STANDARD

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1$$

$$\langle \psi | (A - \langle A \rangle)^2 | \psi \rangle = \Delta A^2$$

$$= \langle \psi | A^2 \psi \rangle - 2 \langle A \rangle \langle \psi | A | \psi \rangle$$

$$- \langle A \rangle^2 = \langle \psi | A^2 | \psi \rangle - \langle A \rangle^2$$

$$= \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$$