OPERATORI SU SPAZI VETTORIALI

SPAZI VETTORIALI: PRIMO PEZZO LINEARITÀ

$$|z\rangle = \alpha|x\rangle + \beta|y\rangle$$

SECONDO PEZZO:

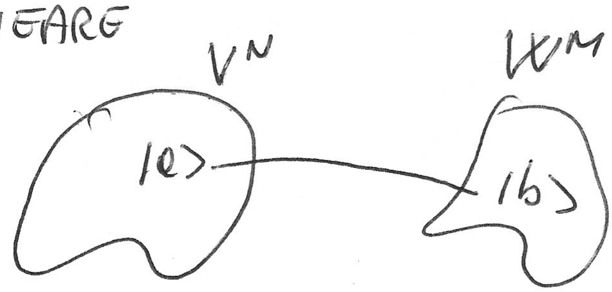
TRASFORMAZIONI LINEARI
OPERATORI

$$T(\alpha|x\rangle + \beta|y\rangle) = \alpha T(|x\rangle) + \beta T(|y\rangle)$$

RIPASSO TRASFORMAZIONI (APPLICAZIONI) LINEARI (GEOMETRIA)

V^N, W^M, SPAZI VETTORIALI LINEARI

TRASFORMAZIONE LINEARE



$T: V^N \to W^M$

ASSOCIA a $\forall |a\rangle \in V^N$ $|b\rangle \in W^M$

$|a\rangle \to |b\rangle$ $T(|a\rangle) = |b\rangle$

TALE CHE:

$$\boxed{T(\alpha|a\rangle + \beta|c\rangle) = \alpha T(|a\rangle) + \beta T(|c\rangle)}$$

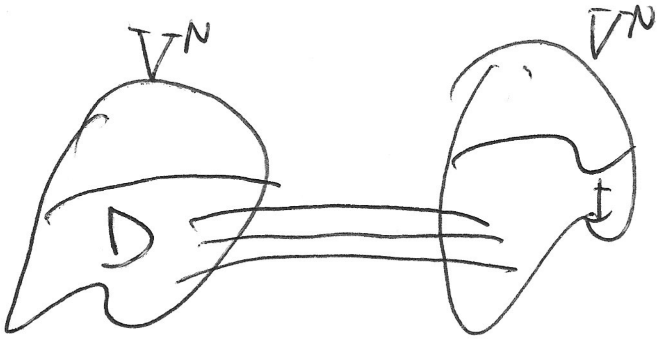
$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

D'ORA INPO CONSIDERIAMO SOLO ENDOMORFISMI : $W^M = V^N$

$T: V^N \to V^N$

DOMINIO D $D \subseteq V^N$ SU CUI È DEFINITA T

IMMAGINE I $I \subseteq V^N$ INSIEME DI TUTTI GLI ELEMENTI $T(|a\rangle)$



NUCLEO K INSIEME DEGLI ELEMENTI $|a\rangle$ DI V^N MAPPATI IN $|0\rangle$

$$T(|a\rangle) = |0\rangle$$

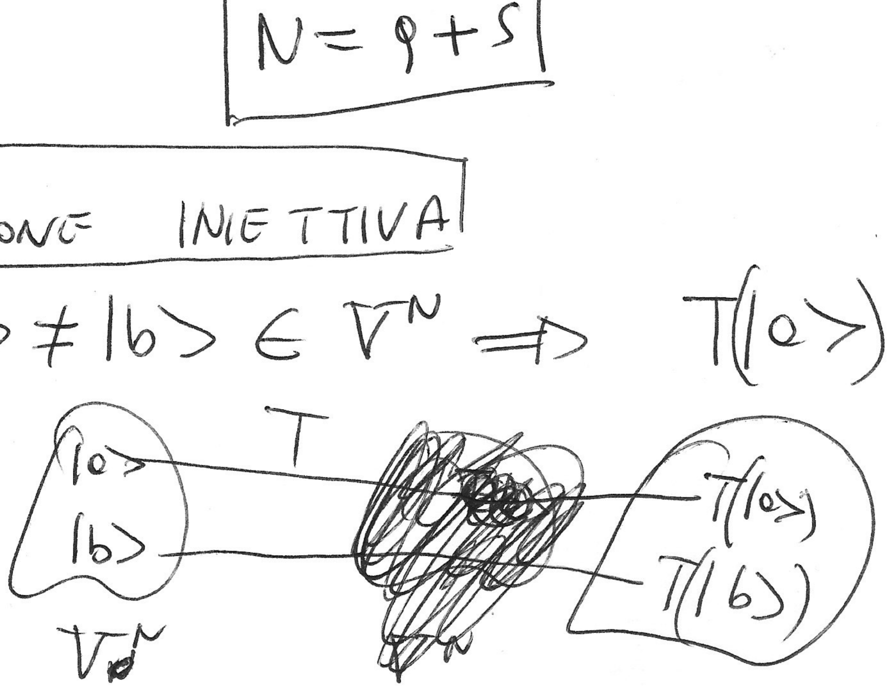
TEOREMA DELL'IMMAGINE

SE $q = \dim(I)$ E $s = \dim(K)$ SI HA

$$\boxed{N = q + s}$$

APPLICAZIONE INIETTIVA

$$\forall\, |a\rangle \neq |b\rangle \in V^N \Rightarrow T(|a\rangle) \neq T(|b\rangle)$$



$T(|a\rangle) \neq T(|b\rangle)$

APPLICAZIONE SURIETTIVA

$I = V^N$

- UN' APPLICAZIONE È INIETTIVA SE E SOLO SE $K = \{|0\rangle\}$

- ## APPLICAZIONE IDENTICA

$I : |a\rangle \rightarrow |a\rangle \quad \forall |a\rangle \in V^N$

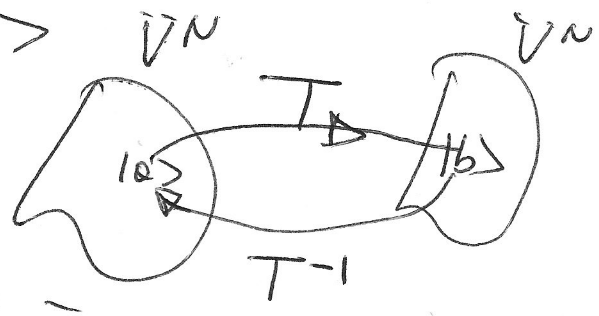
TRASFORMA TUTTI I VETTORI IN SE STESSI

APPLICAZIONE INVERSA

T^{-1}

SE $T|a\rangle = |b\rangle$ CIOÈ $T : |a\rangle \rightarrow |b\rangle$

$T^{-1}|b\rangle = |a\rangle$



- UN' APPLICAZIONE LINEARE È INVERTIBILE SE E SOLO SE ESSA È INIETTIVA E SURIETTIVA

NB. $T^{-1}(T(|a\rangle)) = |a\rangle$

ESEMPIO 1

$T: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \qquad |a\rangle = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$

$T(|a\rangle) = |b\rangle = \begin{pmatrix} \alpha z_1 \\ \alpha z_2 \end{pmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{C} \neq 0$

$D = \mathbb{C}^2$

$I = \mathbb{C}^2$

$K = \{ |0\rangle \}$

INFATTI

$\begin{pmatrix} \alpha z_1 \\ \alpha z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Downarrow$

$z_1 = z_2 = 0$

$\mathrm{DIM}(K) = 0$

$\mathrm{DIM}(I) = \mathrm{DIM}(D) = 2$

INIETTIVA E SURIETTIVA $\Rightarrow$ INVERTIBILE

$T^{-1}: \quad T^{-1}(y) = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

ESEMPIO 2.

$T: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \qquad T: \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$D = \mathbb{C}^2 \quad I = \mathbb{C}^2$

$K = \begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \end{pmatrix}$

$\mathrm{DIM}(I) = 2 \quad \mathrm{DIM}\,K = 1$

NON INIETTIVA ~~[illegible]~~ E NON SURIETTIVA

NON INVERTIBILE

PROIEZIONE

APPLICAZIONI LINEARI COME OPERATORI

DEFINIAMO UN OPERATORE T SU UNO SPAZIO VETTORIALE V^N COME UNA APPLICAZIONE CHE ASSOCIA AD OGNI $|x\rangle \in V^N$ UN $|y\rangle \in V^N$

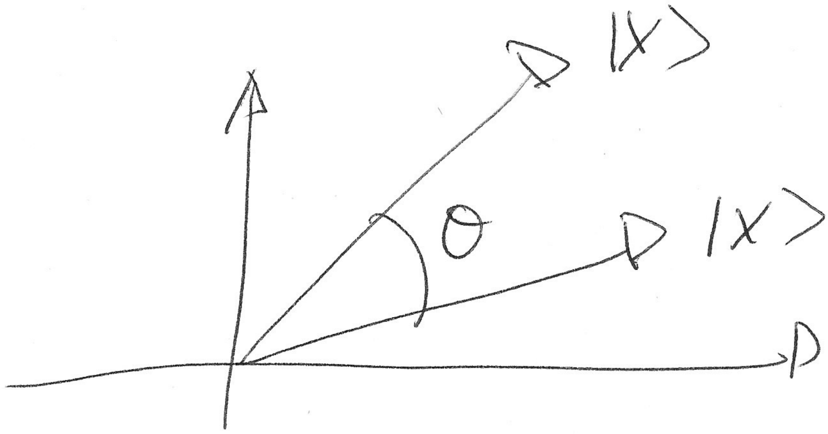
$$T: T(|x\rangle) = |y\rangle$$

- INTUITIVAMENTE T AGENDO SU $|x\rangle$ LO TRASFORMA IN $|y\rangle$

$$T|x\rangle = |y\rangle$$

ESEMPIO ROTAZIONE $R(\theta)$ NEL PIANO

$$|y\rangle = R(\theta)\,|x\rangle$$



OPERATORI LINEARI

$$T(\alpha|x\rangle+\beta|z\rangle)=\alpha\, T|x\rangle+\beta\, T|z\rangle$$
$$\forall\, |x\rangle, |z\rangle \in \bar{V}^n \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

ESEMPIO:
$$T=\frac{d}{dx}$$

- PER GLI OPERATORI SI USANO LE STESSE DEFINIZIONI DELLE APPLICAZIONI LINEARI
  - DOMINIO D
  - IMMAGINE I
  - NUCLEO K
  - INIETTIVO
  - SURIETTIVO

ALGEBRA DEGLI OPERATORI

- SOMMA $\quad C=A+B \Rightarrow$
$$C|x\rangle=A|x\rangle+B|x\rangle, \forall |x\rangle \in D$$
- PRODOTTO PER UNO SCALARE
$$C=\alpha A \Rightarrow C|x\rangle=\alpha\, A|x\rangle$$

- CONSENTONO DI COSTRUIRE COMBINAZIONI LINEARI $C = \alpha A + \beta B$
- PRODOTTO DI DUE OPERATORI

$$C = AB \Rightarrow C|u\rangle = AB|u\rangle$$

OPERATORE IDENTITÀ : $I|x\rangle = |x\rangle$
N.B : $\forall |x\rangle \in V^n$

IN GENERE $\boxed{AB \neq BA}$

SI INTRODUCE IL $\boxed{\text{COMMUTATORE}}$

(PARENTESI DI COMMUTAZIONE)

$$C = [A, B] = AB - BA$$

- DUE OPERATORI TALI CHE

$$[A, B] = 0$$

SI DICE CHE COMMUTANO

- SI DEFINISCE ANCHE LA PARENTESI DI ANTICOMMUTAZIONE

$$C = \{A, B\} = AB + BA$$

PROPRIETÀ DEI COMMUTATORI

(1) SE A, B SONO OPERATORI LINEARI AB, $[A,B]$, $\{A,B\}$

SONO ANCH'ESSI LINEARI

ES. $C = [A,B]$

$$C(\alpha|u\rangle + \beta|y\rangle) =$$

$$[A,B](\alpha|u\rangle + \beta|y\rangle) =$$

$$= (AB - BA)(\alpha|u\rangle + \beta|y\rangle)$$

$$= \alpha C|u\rangle + \beta C|y\rangle$$

(2) $[A,B] = -[B,A]$

(3) $[A,BC] = B[A,C] + [A,B]C$

(4) IDENTITÀ DI JACOBI

$$[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0$$

- UNA VOLTA DEFINITO IL PRODOTTO POSSIAMO ANCHE DEFINIRE LA POTENZA ENNESIMA

$$A^N = A \cdot A \cdot A \dots A \qquad N \text{ VOLTE}$$

- E QUINDI UNA FUNZIONE GENERICA DI A $F(A)$ TRAMITE IL SUO SVILUPPO IN SERIE

$F(A) \Rightarrow$ INF. DERIVABILE IN $x=0$

$F \in C^\infty$

$$F(A) = F(0)I + F'(0)\,A + \frac{1}{2!}F''(0)A^2 + \dots$$

ES.

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

$$= \sum_{M=0}^{\infty} \frac{A^M}{M!}$$

ATTENZIONE:
QUANDO SI PRENDONO FUNZIONI DI SOMME DI PIÙ OPERATORI NON COMMUTATIVI IN GENERE NON VALGONO LE REGOLE USUALI

ES: $[A, B] \neq 0$

$$e^{A+B} \neq e^{A} e^{B}$$

INFATTI

$$e^{A+B} = I + (A+B) + \frac{1}{2}(A+B)(A+B) + \dots$$

$$= I + A + B + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}BA + \frac{1}{2}B^2 + \dots$$

$$e^{A} e^{B} = \left(I + A + \frac{1}{2}A^2\right)\left(I + B + \frac{1}{2}B^2\right) + \dots$$

$$= I + A + B + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}B^2 + AB + \dots$$

OPERATORE INVERSO

- INIETTIVO E SURIETTIVO

SI INDICA CON A^{-1}

ED È DEFINITO DA

$$\boxed{A^{-1}A = AA^{-1} = I}$$

N.B. POSSONO ESISTERE OPERATORI CHE $\boxed{\text{NON SONO INVERTIBILI}}$

ES. $\boxed{\text{OPERATORI DI PROIEZIONE}}$

PROPRIETÀ:

(1) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

SEGUE DA $(AB)^{-1}(AB) = I$

MOLTIPLICANDO A SIN. PER $B^{-1}A^{-1}$

$$(AB)^{-1}(AB)(B^{-1}A^{-1}) = B^{-1}A^{-1}$$

$A = I + B$

$$\Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{I+B} = I - B + B^2 \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B^n$$

OPERATORE AGGIUNTO

- ABBIAMO DEFINITO GLI OPERATORI TRAMITE LA LORO AZIONE SUI KET

$$A|x\rangle = |z\rangle$$

POSSIAMO ANCHE DEFINIRE LA LORO AZIONE SUI BRA

$$\langle x|A = \langle y|$$

$$\boxed{\text{IN GENERE PERÒ } \langle y| \text{ NON È IL DUALE DI } \langle z|.}$$

PER ESEMPIO

$$A = \alpha I$$

$$|z\rangle = \alpha |u\rangle$$

$$\langle y| = \langle u| \alpha$$

MA

$$\langle z| = \langle u| \alpha^* \neq \langle u| \alpha$$

$\Rightarrow$ DEFINIAMO L' $\boxed{\text{AGGIUNTO}}$ O HERMITIANO CONIUGATO DI A, E LO INDICHIAMO CON

$$A^+$$

L' OPERATORE TALE CHE

$\langle u| A^+$ È IL DUALE DI

$$A|u\rangle$$

QUINDI

$$\langle u | A^+ = \langle z |$$

$$A | u \rangle = | z \rangle$$

SEGUE

$$\langle u | A^+ | y \rangle = \langle z | y \rangle$$

$$\langle y | A | u \rangle = \langle y | z \rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle u | A^+ | y \rangle = \langle y | A | u \rangle^*}$$

PROPRIETÀ

(1) $(A^+)^+ = A$

ABBIAMO

$$\langle u | (A^+)^+ | y \rangle = \langle y | A^+ | u \rangle^* =$$

$$= \left(\langle u | A | y \rangle^* \right)^* = \langle u | A | y \rangle$$

(2) $(A+B)^+ = A^+ + B^+$

(3) $(AB)^+ = B^+ A^+$

(4) SE $A = \alpha B \Rightarrow A^+ = \alpha^* B^+$

DIMOSTRAZIONE DELLA 3

$$B|x\rangle = |z\rangle \Rightarrow \langle z| = \langle x|B^{+}$$

$$\langle y|A = \langle u| \Rightarrow A^{+}|y\rangle = |u\rangle$$

DALLA DEFINIZIONE DI AGGIUNTO

$$\langle x|(AB)^{+}|y\rangle = \langle y|AB|x\rangle^{*}$$

$$= \langle u|z\rangle^{*} = \langle z|u\rangle = \langle x|B^{+}A^{+}|y\rangle$$

$$\Rightarrow (AB)^{+} = B^{+}A^{+}$$

OPERATORI HERMITIANI

- UN OPERATORE SI DICE $\boxed{\text{HERMITIANO}}$

~~AUTOAGGIUNTO SE~~

$$\boxed{A^+ = A}$$

$$\langle u | A | y \rangle = \langle y | A | u \rangle^*$$

- SE A, B SONO HERMITIANI

$C = AB$ È HERMITIANO SOLO

SE $[A, B] = 0$

- UN OPERATORE SI DICE ANTIHERMITIANO SE

$$C^+ = -C$$

- $C = [A, B]$ È ANTIHERMITIANO SE A, B SONO HERMITIANI

$$C^+ = (AB - BA)^+ = B^+ A^+ - A^+ B^+$$

$$= BA - AB = -C$$

COND. NEC. E SUFF.

$$C^+ = -C \Rightarrow A^+ = A \quad B^+ = B$$

OPERATORI UNITARI

UN OPERATORE U È UNITARIO SE

$$U^\dagger U = I$$

SE $\exists\ U^{-1} \Rightarrow U^\dagger = U^{-1}$

- UN OPERATORE UNITARIO CONSERVA LA NORMA DEI VETTORI SU CUI AGISCE

$$|y\rangle = U|u\rangle$$

$$\langle y|y\rangle = \langle u|U^\dagger U|u\rangle = \langle u|u\rangle.$$

OPERATORI DI PROIEZIONE

SI CHIAMANO OPERATORI DI PROIEZIONI OPERATORI

(1) HERMITIANI $P^\dagger = P$

(2) IDEMPOTENTI $P^2 = P$

NON AMMETTONO INVERSO

ESEMPIO

SIA $|e\rangle$ UN VETTORE UNITARIO

$$\langle e|e\rangle = 1$$

COSTRUIAMO

$$P = |e\rangle\langle e|$$

(a) P È HERMITIANO

$$\langle u|P|y\rangle = \langle u|e\rangle\langle e|y\rangle$$

$$= \langle e|u\rangle^* \langle y|e\rangle^* = \left(\langle y|e\rangle\langle e|u\rangle\right)^*$$

$$= \langle y|P|u\rangle^*$$

(b) IDEMPOTENTE

$$P^2 = |e\rangle\underbrace{\langle e|e\rangle}_{=1}\langle e| =$$

$$= \cancel{1}|e\rangle\langle e| = P$$

P PROIETTA $|u\rangle$ NELLA DIREZIONE DI $|e\rangle$

FORMA OPERATORIALE DELLA RELAZIONE DI COMPLETEZZA

$c_i = \langle e_i | a \rangle$

$$|a\rangle = \sum_i c_i |e_i\rangle = \sum_i |e_i\rangle c_i$$

$$= \sum_i |e_i\rangle\langle e_i | a\rangle \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{N} |e_i\rangle\langle e_i| = I$$

$$\sum_{i=1}^{M} |e_i\rangle\langle e_i| = P$$

$M < N$

$P \Rightarrow$ PROIEZIONE

OPERATORI NORMALI

- UN OPERATORE SI DICE NORMALE SE COMMUTA CON IL SUO AGGIUNZ

$$[A, A^{\dagger}] = 0$$

- SONO OPERATORI NORMALI
  (a) OPERATORI HERMITIANI $H = H^{\dagger}$
  E ANTIHERMITIANI $H = -H^{\dagger}$
- UNITARI $U^{\dagger} = U^{-1}$

EGUAGLIANZE TRA OPERATORI

$\Rightarrow$ VALGONO LE REGOLE USUALI

ATTENZIONE QUANDO SI MOLTIPLICA DESTRA $\neq$ SINISTRA

$A = B \Rightarrow AC = BC$ (DESTRA)

$\Rightarrow CA = CB$ (SIN.)

$\Rightarrow$ SCRIVERE $A=B$ SIGNIFICA

$A|n\rangle = B|n\rangle$ ~~PER OGNI~~

$\forall |n\rangle \in$ DOMINIO

QUINDI

$A=0 \Rightarrow A|n\rangle = 0$

$\forall n \in$ DOMINIO

SE $A|n\rangle=0$ SOLTANTO PER ALCUNI $|n\rangle$

$\Rightarrow$ EQUAZIONE ~~≠~~

ESEMPI

- $U = e^{iA}$ $\qquad U^{+} = e^{-iA^{+}}$

IN GENERALE SE $f(x) \in \mathbb{R}$

$$F^{+}(A^{+}) = F(A^{+})$$

SI DIMOSTRA USANDO LO SVILUPPO IN SERIE

- SE INOLTRE $A^{+} = A$

$$U^{+} = e^{-iA} = U^{-1}$$ DATO CHE

$$e^{-iA} e^{iA} = I$$

- $U^{+} A U = I \Longrightarrow \underbrace{U U^{+}}_{I} A \underbrace{U U^{+}}_{I} = U U^{+} = I$

$\Longrightarrow A = I$

$U^{+} U = I \overset{?}{\Longrightarrow} U^{+} = U^{-1}$

$U|x\rangle = |y\rangle \qquad \forall |x\rangle \in V^{N}$

$\Downarrow$

$U^{+} U |x\rangle = U^{+}|y\rangle \Longrightarrow |x\rangle = U^{+}|y\rangle$

SE $\exists\, U^{-1}$ $\qquad \underbrace{U^{-1} U}_{I} |x\rangle = U^{-1}|y$

$|x\rangle = U^{-1}|y\rangle = U^{+}|y\rangle \Longrightarrow U^{+} = U^{-1}$

• EQUAGLIANZE OPERATORIALI E VETTORIALI

$P = Q \Rightarrow P|x\rangle = Q|x\rangle \quad \forall x \in \mathcal{V}$

IDENTITÀ

$P|x\rangle = Q|x\rangle$

EQUAZIONE SE VERIFICATA PER ALCUNI $|x\rangle \in \mathcal{V}$

• VALGONO USUALI REGOLE MA:
MOLTIPLICAZIONE NON COMMUTATIVA

$$AB = C$$

$$ABB^{-1} = CB^{-1} \qquad A = CB^{-1}$$

$$A^{-1}AB = A^{-1}C \Rightarrow B = A^{-1}C$$

• Se $\{|e_k\rangle\}_{k=1 \dots N}$ BASE

$$P|e_k\rangle = 0 \Rightarrow P = 0$$

DATO CHE $\forall x \in \mathcal{V}$

$$|x\rangle = \sum_{k=1}^{N} c_k |e_k\rangle$$

$$P|x\rangle = \sum_{k=1}^{N} c_k P|e_k\rangle$$

$$P|e_k\rangle = 0 \quad \forall k \Rightarrow P|x\rangle = 0$$

• Se $\langle e_k | P | e_l \rangle = 0 \quad \forall l, k$

$P = 0$ INFATTI $P|e_l\rangle = |e\rangle$
CON $\langle e_k | e \rangle = 0 \Rightarrow |e\rangle = 0$

EQUAZIONE AGLI AUTOVALORI

$$\boxed{A|x\rangle = \lambda |x\rangle}$$

SOLUZIONI $\lambda \in \mathbb{C}$ AUTOVALORI

$|x\rangle \in V$ AUTOVETTORI

PROPRIETÀ

1) EQUAZIONE LINEARE ED OMOGENEA

$\Downarrow$

SE $|x\rangle$ SOLUZIONE

$|y\rangle = \alpha |x\rangle$ È ANCORA SOLUZIONE

$\alpha \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ AUTOVETTORE DETERMINATO
A MENO DI UNA COSTANTE

IN GENERE SI USA QUESTA LIBERTÀ
PER NORMALIZZARE AD UNO

$$\langle x|x\rangle = \|x\|^2 = 1$$

2) $M(\lambda) := (A - \lambda I)$ $\quad M(\lambda)|x\rangle = 0$

$|x\rangle \in$ KERNEL DI $M(\lambda)$

AUTOSPAZIO RELATIVO AD AUTOVALORE λ

- TEOREMA AUTOVETTORI CORRISPONDENTI AD AUTOVALORI DISTINTI SONO LIN. IND.

INFATTI ~~+~~ASSUMIAMO PER ASSURDO CHE

$$A|X_1\rangle = \lambda_1 |X_1\rangle \qquad |X_2\rangle = c|X_1\rangle$$

$$A|X_2\rangle = \lambda_2 |X_2\rangle$$

$$\cancel{c}A|X_1\rangle = \cancel{c}\lambda_2 |X_2\rangle$$

SOTTRAENDO $\lambda_1 = \lambda_2$

- QUESTO CI CONSENTE DI DEFINIRE L'AUTOSPAZIO RELATIVO ALL'AUTOVALORE λ. $A_\lambda \subset V^N$

$A_\lambda^{(M)}$ È GENERATO DAGLI AUTOVETTORI COMUNI DI λ

$$A|X_1\rangle = \lambda |X_1\rangle$$

$$|v\rangle = \sum_{\lambda=1}^{M} c_\lambda |X_\lambda\rangle$$

$$M = \dim A_\lambda^{(M)} \qquad M(\lambda) = (A - \lambda I)$$

$$1 \leq M \leq N$$

$$\boxed{M = \mathrm{DIM}\ K(M(\lambda)) = N - \mathrm{DIM}\ I(M(\lambda))}$$

AUTOVALORI ED AUTOVETTORI DI OPERATORI HERMITIANI

- GLI AUTOVALORI DI UN OPERATORE HERMITIANO SONO SEMPRE REALI

- AUTOVETTORI DI UN OPERATORE HERMITIANO CORRISPONDENTI AD AUTOVALORI DISTINTI SONO TRA LORO ORTOGONALI

$$\langle u_\lambda | H | u_\lambda \rangle = \lambda_\lambda \langle u_\lambda | u_\lambda \rangle$$

$$\langle u_\lambda | H^+ | u_\lambda \rangle = \lambda^*_\lambda \langle u_\lambda | u_\lambda \rangle$$

ESSENDO $H^+ = H$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\lambda_\lambda = \lambda^*_\lambda}$$

- PARLEREMO DI **SPETTRO DISCRETO** DELL' OPERATORE H SE $\{\lambda_\lambda\}$ SONO UN INSIEME NUMERABILE

- PARLEREMO DI **SPETTRO CONTINUO** SE $\lambda \in [a, b] \subset \mathbb{R}$

- PARLEREMO DI SPETTRO **DEGENERE** SE AD UN AUTOVALORE λ CORRISPONDONO PIÙ DI UN AUTOVETTORE $|u_\lambda\rangle$ LINEARMENTE INDIPENDENTI

- AUTOVETTORI DI UN OPERATORE HERMITIANO CHE APPARTENGONO AD AUTOVALORI DISTINTI SONO TRA LORO ORTOGONALI

$$H|u_i\rangle = \lambda_i |u_i\rangle$$

$$H|u_j\rangle = \lambda_j |u_j\rangle$$

SEGUE

$$\langle u_j|H|u_i\rangle = \lambda_i \langle u_j|u_i\rangle \quad (1)$$

$$\langle u_i|H|u_j\rangle = \lambda_j \langle u_i|u_j\rangle \quad (2)$$

PRENDIAMO IL COMPLESSO CONIUGATO DELLA (2)

$$\langle u_i|H|u_j\rangle^* = \lambda_j \langle u_j|u_i\rangle$$

$$\Rightarrow \langle u_j|H^+|u_i\rangle = \lambda_j \langle u_j|u_i\rangle$$

$$\Rightarrow \langle u_j|H|u_i\rangle = \lambda_j \langle u_j|u_i\rangle$$

SOTTRAENDO

$$(\lambda_i - \lambda_j) \langle u_j|u_i\rangle = 0$$

SE $\lambda_i \neq \lambda_j$

$$\Rightarrow \langle u_j|u_i\rangle = 0$$

$|u_j\rangle$ E $|u_i\rangle$ SONO ORTOGONALI

TEOREMA SPETTRALE

UN OPERATORE A SU UNO SPAZIO VETTORIALE N-DIM. AMMETTE N AUTOVETTORI ORTOGONALI QUINDI ON SE E SOLO SE ESSO E NORMALE

$$[A, A^\dagger] = 0$$

COROLLARIO

IN UNO SPAZIO VETT. N-DIM POSSIAMO TROVARE UNA BASE ON.

RISOLVENDO L'EQUAZIONE AGLI AUTOVETTORI PER UN OPERATORE NORMALE

$$A|l_i\rangle = \lambda_i |l_i\rangle$$

CNS TE AFFINCHE UN OPERATORE A AMMETTA N AUTOVETTORI ORTOGONALI SU UN È CHE A SIA NORMALE $[A, A^+]=0$

$\boxed{1}$ (1)

$\boxed{CN}$

IP: $\exists \{|e_k\rangle\}$ $k=1 \dots N$

TALI CHE $\langle e_k|e_l\rangle = \delta_{kl}$

$A|e_k\rangle = \lambda_k |e_k\rangle$

$\langle e_l| A^+ = \lambda_l^* \langle e_l|$

$\langle e_l|A^+A|e_k\rangle = \lambda_l^* \lambda_k \langle e_l|e_k\rangle = \lambda_l^* \lambda_k \delta_{lk} = |\lambda_k|^2 \delta_{lk}$

$\sum_{m=1}^{M} |e_m\rangle\langle e_m| = I$ REL. COMPL

$\langle e_l|AA^+|e_k\rangle = \sum_m \langle e_l|A|e_m\rangle \langle e_m|A^+|e_k\rangle$

$= \sum_m \lambda_m \delta_{lm} \lambda_m^* \delta_{mk} = |\lambda_k|^2 \delta_{lk}$

$\langle e_l|A^+A - AA^+|e_k\rangle = 0$

$\langle e_l|[A^+, A]|e_k\rangle = 0$

$\Rightarrow$ Se $\langle e_l|C|e_k\rangle = 0$ Per N vettori ON

ALLORA $C=0$

INFATTI

$\boxed{2}$ 2

$$\langle e_i | C | e_k \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad C|e_k\rangle = 0 + |a\rangle$$

$|a\rangle$ ort simultaneamente ad a tutti gli $|e_k\rangle$. Ma se $|e_k\rangle$ sono base $|a\rangle = 0$

$$C|x\rangle = 0 \qquad \forall |x\rangle \in \mathcal{H}$$

C. SUFF

3 32

IP $[A, A^\dagger] = 0$ CON $A|e_K\rangle = \lambda_K |e_K\rangle$

AUTOVETTORE GENERICO

ABBIAMO $AA^\dagger|e_K\rangle - A^\dagger A|e_K\rangle = 0$

$$A(A^\dagger|e_K\rangle) = \lambda_K (A^\dagger|e_K\rangle)$$

$A^\dagger|e_K\rangle$ autovettore di A corrispondente a λ_K

$$A^\dagger|e_K\rangle = \alpha_K |e_K\rangle$$

• SI DIMOSTRA FACILMENTE CHE

$$\alpha_K = \lambda_K^*$$

$$\langle e_K|A^\dagger|e_K\rangle = \alpha_K \langle e_K|e_K\rangle$$

MA $\langle e_K|A^\dagger = \lambda_K^* \langle e_K|$

segue $\lambda_K^* \langle e_K|e_K\rangle = \alpha_K \langle e_K|e_K\rangle$

$$\boxed{\lambda_K^* = \alpha_K}$$

ADESSO SI PROCEDE COME NEL CASO DI OPERATORI HERMITIANI

$$A|e_K\rangle = \lambda_K |e_K\rangle$$

$$A^\dagger|e_J\rangle = \lambda_J^* |e_J\rangle$$

$$\langle e_J|A|e_K\rangle = \lambda_K \langle e_J|e_K\rangle \quad (1)$$

$$\langle e_K|A^\dagger|e_J\rangle = \lambda_J^* \langle e_K|e_J\rangle$$

$$\langle e_K|A^\dagger|e_J\rangle^* = \lambda_J \langle e_K|e_J\rangle^*$$

$$\langle e_J|A|e_K\rangle = \lambda_J \langle e_J|e_K\rangle \quad (2)$$

$(\lambda_K - \lambda_J)(\langle e_J | e_K \rangle) = 0$

$\Rightarrow \langle e_J | e_K \rangle = 0$ se $\lambda_K \neq \lambda_J$

se $\boxed{\lambda_K = \lambda_J}$

Suppon. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_m$ ALTRI DISTINTI

$\lambda_e \neq \lambda_K$ $e, K = m+1 \dots N$

$A|e_1\rangle = \lambda_1 |e_1\rangle$, $A|e_2\rangle = \lambda_1 |e_2\rangle \dots$

$A|e_m\rangle = \lambda_1 |e_m\rangle$

$A|e_K\rangle = \lambda_K |e_K\rangle$ $K = m+1 \dots N$

PER $\boxed{l > m}$

$\langle e_i | e_1 \rangle = \langle e_i | e_2 \rangle = \dots \langle e_i | e_m \rangle = 0$

AUTOSPAZIO DI λ_1 $\perp$ agli $|e_i\rangle$

$V_\perp$

POSSIAMO SCEGLIERE QUINDI m autovettori

L. IND $v_i \in V_\perp$ CHE GENERANO

$V_\perp$ CIOÈ $|x\rangle = \sum_{i=1}^{m} c_i |v_i\rangle$

TALI CHE $A|v_i\rangle = \mu_i |v_i\rangle$

USANDO G. SMIDT POSSIAMO

COSTRUIRE m autovettori

ON $|e_i\rangle$

OPERATORI NORMALI

$[A, A^+] = 0$ CASI PARTICOLARI

(1) $A = A^+$ HERMITIANI AUTOVALORI REALI

(2) $A = -A^+$ ANTI HERMITIANI IMMAGINARI PURI

(3) $A^+ = A^{-1}$ UNITARI $|\lambda|^2 = 1$

$\boxed{A = -A^+}$

$$A|u_1\rangle = \lambda |u_1\rangle$$
$$\langle u_1 | A^+ = \lambda^* \langle u_1|$$
$$\langle u_1|A|u_1\rangle = \lambda \langle u_1|u_1\rangle$$
$$\langle u_1|A^+|u_1\rangle = \lambda^* \langle u_1|u_1\rangle = -\langle u_1|A|u_1\rangle$$
$$\Rightarrow \lambda + \lambda^* = 0 \qquad \lambda \in \mathrm{Im}$$

$A^+ = A^{-1}$

$$A|u_1\rangle = \lambda |u_1\rangle$$
$$\langle u_1| A^+ = \lambda^* \langle u_1|$$
$$\langle u_1|A^+A|u_1\rangle = \lambda\lambda^* \langle u_1|u_1\rangle$$
$$\langle u_1|u_1\rangle = |\lambda|^2 \langle u_1|u_1\rangle$$
$$\Rightarrow |\lambda|^2 = 1$$

AUTOVETTORI ED AUTOVALORI DI FUNZIONI DI OPERATORI

- SE $|u_i\rangle$ e λ_i SONO AUTOVETTORI ED AUTOVALORI DI A

$$A|u_i\rangle = \lambda_i |u_i\rangle$$

ALLORA DATA UNA GENERICA $F(A)$ $|u_i\rangle$ SARANNO AUTOVETTORI DI $F(A)$ E $F(\lambda_i)$ GLI AUTOVALORI CORRISPONDENTI

$$F(A)|u_i\rangle = F(\lambda_i)|u_i\rangle$$

- PER DIMOSTRARLO DIMOSTRIAMO PRELIMINARMENTE

$$A^m|u_i\rangle = \lambda_i^m |u_i\rangle$$

$$A^m|u_i\rangle = A^{m-1}A|u_i\rangle = \lambda_i A^{m-2}A|u_i\rangle = \dots = \lambda^m|u_i\rangle$$

- SEGUE $F(A)|u_i\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{F^{(m)}(0)}{m!} A^m |u_i\rangle$

$$= \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{F^{m}(0)}{m!} \lambda^m\right)|u_i\rangle = F(\lambda_i)|u_i\rangle$$

ESEMPIO N° 2

$V \sim \mathbb{C}^2$ SPAZIO DELLE SOLUZIONI

DELLA EDO $\frac{d^2y}{dx^2} + m^2 y = 0$

BASE DI V $|e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx}$ $|e_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-imx}$

OPERATORE LINEARE

$P = -i \frac{d}{dx}$

EQUAZIONE AGLI AUTOVALORI

$P|u\rangle = \lambda |u\rangle \Rightarrow -i \frac{d}{dx} u = \lambda u$

$\frac{u'}{u} = i\lambda\, dx$ $\qquad u = c\, e^{i\lambda x}$

$\lambda = \pm m$ $\qquad c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

$|e_1\rangle$, $|e_2\rangle$ AUTOVETTORI DI P

CORRISPONDENTI AD AUTOVALORI

$\pm m$

MECCANICA QUANTISTICA

- STATO DI UN SISTEMA DESCRITTO DA

$$|\psi\rangle \in V^N \qquad (N = \text{FINITO O INFINITO})$$

VETTORE IN UNO SPAZIO VETTORIALE LINEARE NORMALIZZATO AD 1

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1$$

- PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

$$\forall\, |u_i\rangle \in V^N \qquad c_i \in \mathbb{C}$$

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{M} c_i |u_i\rangle \in V^N$$

- INTERPRETAZIONE FISICA DEI c_i

$|c_i|^2 = P \rightarrow$ PROBABILITÀ DI TROVARE SISTEMA NELLO STATO $|u_i\rangle$

- OSSERVABILI FISICHE A

OPERATORE HERMITIANO $A = A^+$

- $\boxed{\text{PROCESSO DI MISURA}}$

$$A|\psi\rangle = |\varphi\rangle$$

SE USIAMO UNA BASE DI AUTOVETTORI DI A

$$A|u_i\rangle = \lambda_i |u_i\rangle \qquad |\psi\rangle = \sum_i c_i |u_i\rangle$$

ALLORA $A|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} c_i A|u_i\rangle = \sum_{i=1}^{N} c_i \lambda_i |u_i\rangle$

$|c_i|^2 \Rightarrow$ PROBABILITÀ P_i CHE MISURANDO A TROVIAMO RISULTATO λ_i

- SE $\{|u_i\rangle\}$ BASE (SISTEMA COMPLETO)

LA RELAZIONE DI COMPLETEZZA

$$\sum_i |c_i|^2 = \langle\psi|\psi\rangle \Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{N} P_i = 1}$$

$\boxed{\text{UNITARIETÀ DELLA MECCANICA QUANTISTICA}}$

ESEMPIO STATI DI PARTICELLA CON SPIN $= \frac{1}{2}$

- MISURANDO LO SPIN S DI UNA PARTICELLA POSSIAMO TROVARE 2 VALORI $\pm \frac{\hbar}{2}$, ABBIAMO CIOÈ DUE AUTOVETTORI $\{ |\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle \}$ (UP, DOWN)

$$S|\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle$$

$$S|\downarrow\rangle = -\frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle$$

- IL GENERICO STATO $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$

$$|\psi\rangle = c_1|\uparrow\rangle + c_2|\downarrow\rangle$$

$$|c_1|^2 = P(\uparrow) \qquad |c_2|^2 = P(\downarrow)$$

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$$