

## Specifiche nel transitorio – risposta indiciale

- Comportamento iniziale
- Modelli di riferimento
- Caratteristiche della risposta indiciale

## Comportamento in alta frequenza

Un qualunque sistema dinamico lineare può essere rappresentato mediante la sua funzione di trasferimento: **un rapporto di polinomi nella variabile complessa  $s$**



$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)};$$
$$N(s) = \sum_{i=0}^{m} b_i s^i = b_m \prod_{i=1}^m (s - z_i) \quad z_i: \text{zeri del sistema}$$
$$D(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i = \prod_{i=1}^n (s - p_i) \quad p_i: \text{poli del sistema}$$

Valutando la funzione di trasferimento lungo punti dell'asse immaginario si ottiene la risposta armonica del sistema

$$G(j\omega) = K' \frac{(j\omega)^m + \sum_{i=0}^{m-1} \bar{b}_i (j\omega)^i}{(j\omega)^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i (j\omega)^i}$$

## Comportamento in alta frequenza

Applicando i teoremi di derivazione, tenendo conto delle condizioni iniziali nulle, e del valore iniziale è possibile valutare l'andamento iniziale della risposta indiciale,

$$\left[ \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right]_{t=0} = \lim_{s \rightarrow \infty} s^k K' \frac{(s)^m + \sum_{i=0}^{i=m-1} \bar{b}_i(s)}{(s)^n + \sum_{i=0}^{i=n-1} a_i(s)^i} = \lim_{s \rightarrow \infty} K' \frac{1}{s^{n-m-k}} = \begin{cases} 0 & k < n-m \\ K' & k = n-m \end{cases}$$

La pendenza “finale” della risposta armonica dà informazioni sull'andamento della risposta indiciale nell'origine:

nulla con le sue  $(n-m-1)$  derivate

# Modelli di riferimento

Faremo riferimento a modelli del primo e secondo ordine a modo dominante

$$G(j\omega) \approx \frac{K}{1 + \tau j\omega}$$

$$\omega_n = 1/\tau$$

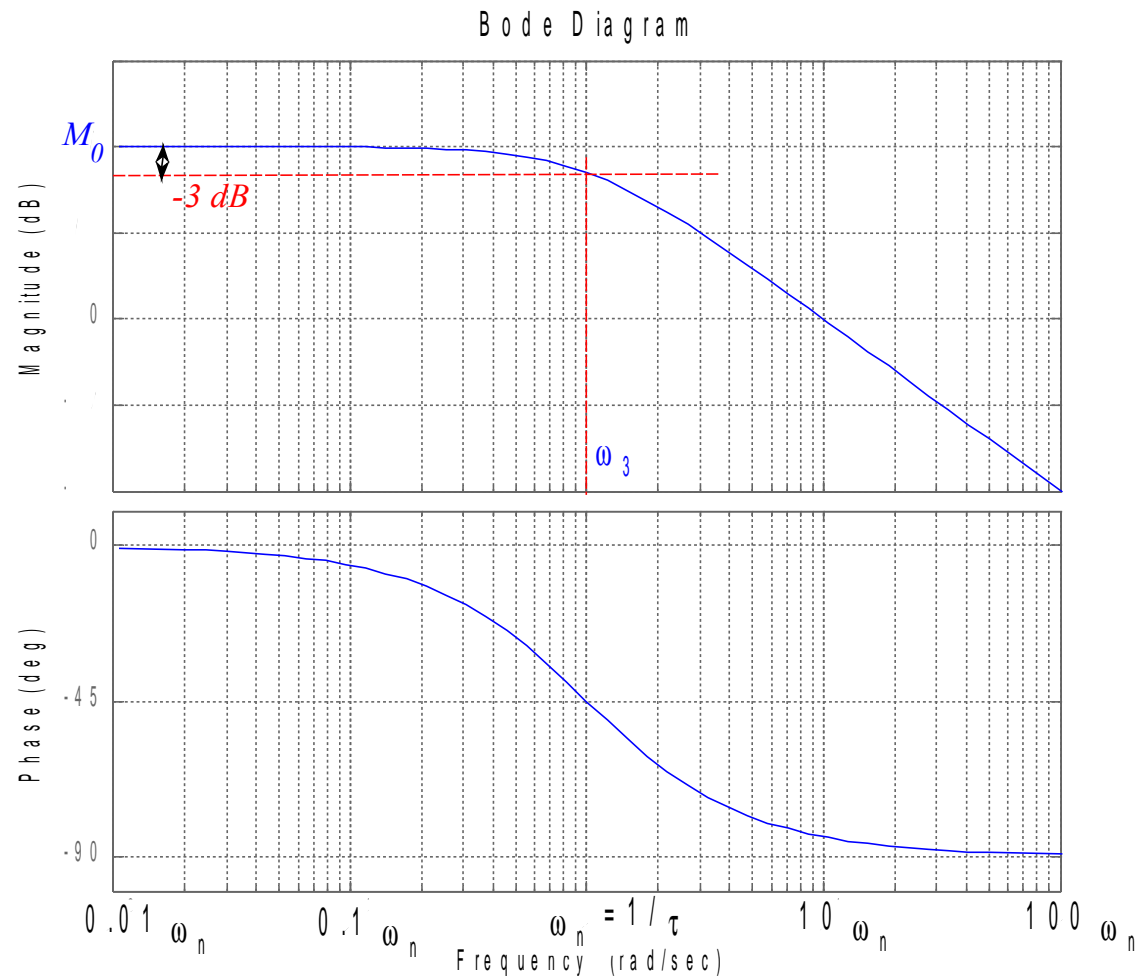
pulsazione di rottura

$$\omega_3 = 1/\tau = 2\pi B_3$$

pulsazione Banda -3dB

$$M_0 = 20 \log(K):$$

modulo a frequenza 0

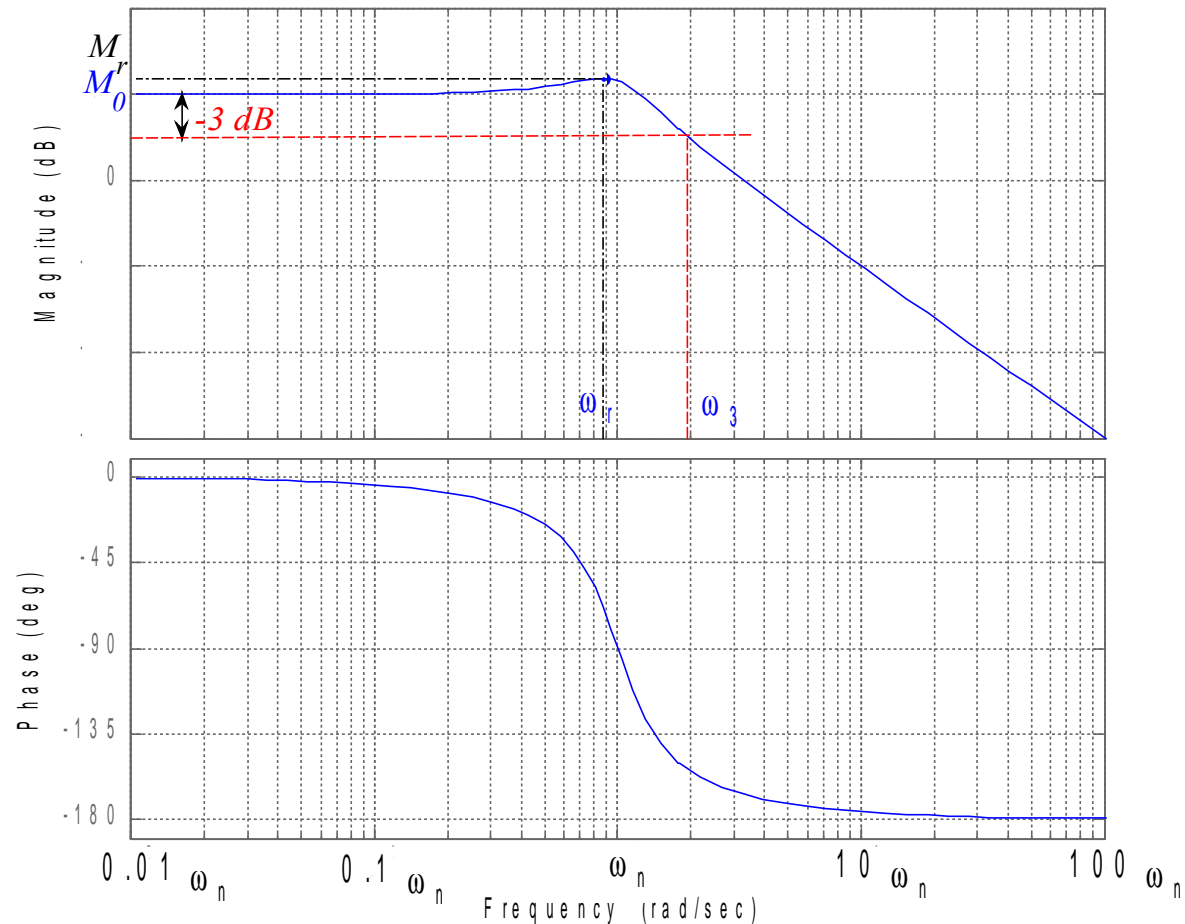


# Modelli di riferimento

Faremo riferimento a modelli del primo e secondo ordine a modo dominante

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + 2\xi\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Bode Diagram



$\omega_n$ :

pulsazione naturale

$\omega_r$ :

pulsazione di risonanza

$\omega_3 = 2\pi B_3$

pulsazione Banda -3dB

$M_{0dB} = 20\text{Log}(K)$ :

modulo a frequenza 0

$M_{rdB}$

modulo di risonanza

## Caratteristiche della risposta armonica

**Modulo alla risonanza: valore massimo del modulo della risposta armonica.**

Faremo riferimento a modelli a modo dominante pseudoperiodico

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + 2\xi\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2} = \frac{K}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}$$

Il valore massimo si verifica in corrispondenza del primo massimo

$$\max_{\omega} \{|G(j\omega)|\} \Rightarrow \min_{\omega} \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left( 2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right\}$$

## Caratteristiche della risposta armonica

**Modulo alla risonanza:** valore massimo del modulo della risposta armonica.

$$\min_{\omega} \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left( 2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right\} \Rightarrow \frac{d}{d\omega} \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left( 2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right\} = 0$$

$$\frac{d}{d\omega} \left\{ \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^4 - 2 \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 + 1 + 4\xi^2 \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right\} = 0$$

$$4 \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^3 - 4 \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right) + 8\xi^2 \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right) = 0$$

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

$$0 \leq \xi \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

# Caratteristiche della risposta armonica

**Modulo alla risonanza:** valore massimo del modulo della risposta armonica.

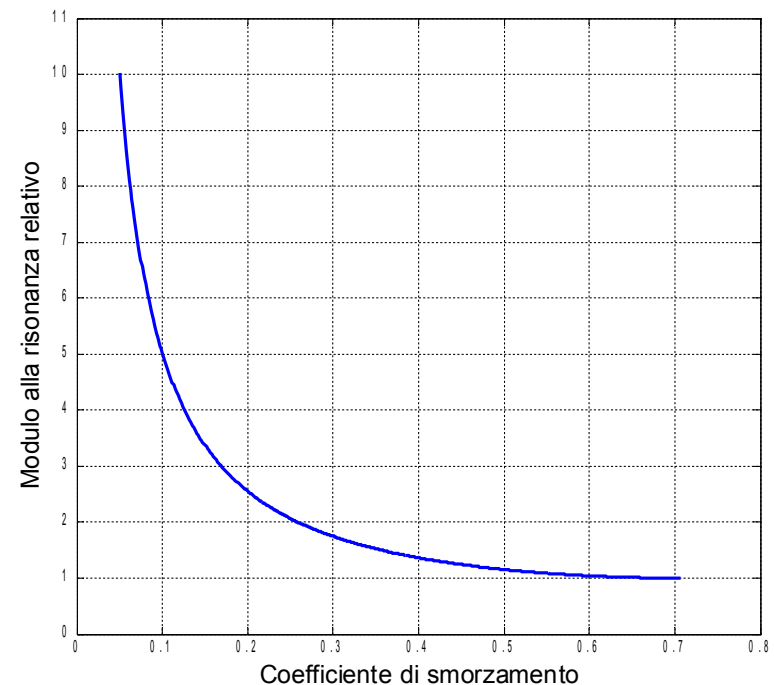
$$M_r = |G(j\omega_r)| = \frac{K}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega_r}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega_r}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

$$M_r = |G(j\omega_r)| = \frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\frac{M_r}{K} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$M_r \leq \bar{M}_r \Leftrightarrow \xi \geq \bar{\xi}$$





## Caratteristiche della risposta armonica

**Banda passante:** intervallo di frequenze in cui il modulo del diagramma di risposta armonica non è inferiore di -3dB rispetto ad un modulo di riferimento ( $M_0$  per i filtri passa basso).

Sistemi a modo dominante aperiodico

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + \tau j\omega}$$

$$\left| G\left(j\frac{1}{\tau}\right) \right| = \frac{K}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left| G\left(j\frac{1}{\tau}\right) \right|_{dB} - 20\log(K) = -3\text{ dB}$$

$$\omega_3 = 2\pi B_3 = \frac{1}{\tau}$$

$$B_3 = \frac{1}{2\pi\tau}$$

## Caratteristiche della risposta armonica

**Banda passante:** intervallo di frequenze in cui il modulo del diagramma di risposta armonica non è inferiore di -3dB rispetto ad un modulo di riferimento ( $M_0$  per i filtri passa basso).

Sistemi a modo dominante pseudoperiodico

$$|G(j\omega_3)| = \frac{K}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega_3}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega_3}{\omega_n}\right)^2}} = \frac{K}{\sqrt{2}}$$

$$\left[1 - \left(\frac{\omega_3}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega_3}{\omega_n}\right)^2 = \left(\frac{\omega_3}{\omega_n}\right)^4 - 2\left(\frac{\omega_3}{\omega_n}\right)^2 + 1 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega_3}{\omega_n}\right)^2 = 2$$

$$\left(\frac{\omega_3}{\omega_n}\right)^4 - 2(1 - 2\xi^2) \left(\frac{\omega_3}{\omega_n}\right)^2 - 1 = 0$$

## Caratteristiche della risposta armonica

**Banda passante:** intervallo di frequenze in cui il modulo del diagramma di risposta armonica non è inferiore di -3dB rispetto ad un modulo di riferimento ( $M_0$  per i filtri passa basso).

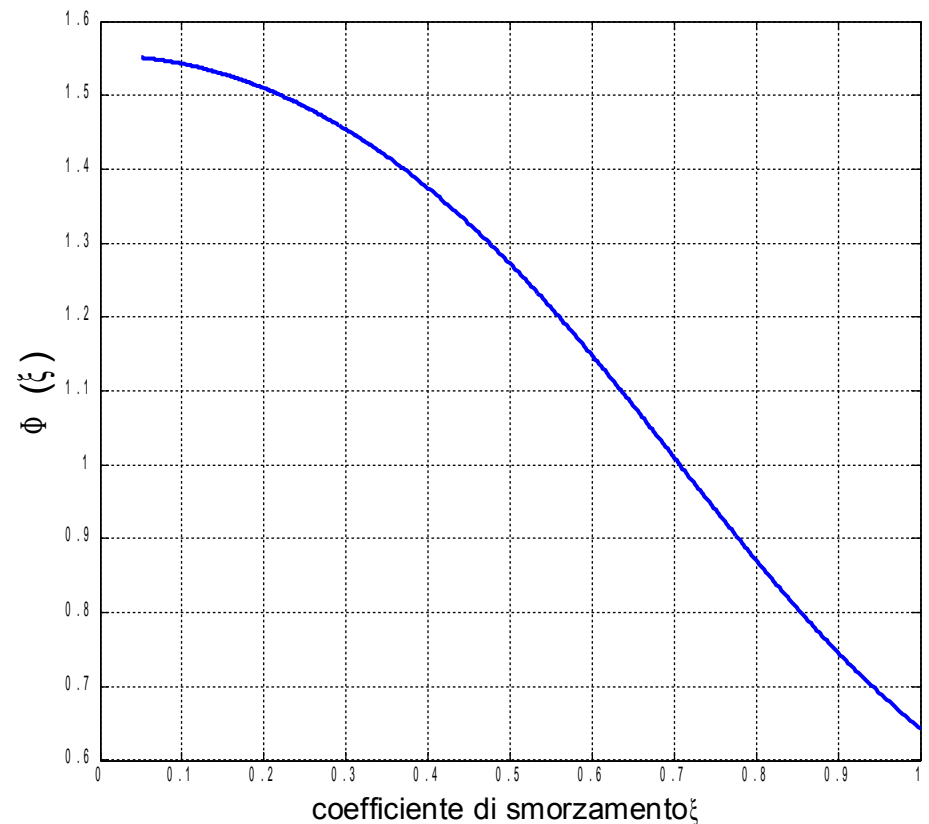
Sistemi a modo dominante pseudoperiodico

$$\left(\frac{\omega_3}{\omega_n}\right)^2 = (1 - 2\xi^2) \pm \sqrt{(1 - 2\xi^2)^2 + 1}$$

$$B_3 = \frac{\omega_n}{2\pi} \sqrt{(1 - 2\xi^2) + \sqrt{(1 - 2\xi^2)^2 + 1}}$$

$$B_3 = \frac{\omega_n}{2\pi} \Phi(\xi)$$

$$B_3 \approx \bar{B}_3 \Leftrightarrow \omega_n \approx \bar{\omega}_n$$



## Caratteristiche della risposta armonica

**Banda passante:** intervallo di frequenze in cui il modulo del diagramma di risposta armonica non è inferiore di -3dB rispetto ad un modulo di riferimento ( $M_0$  per i filtri passa basso).

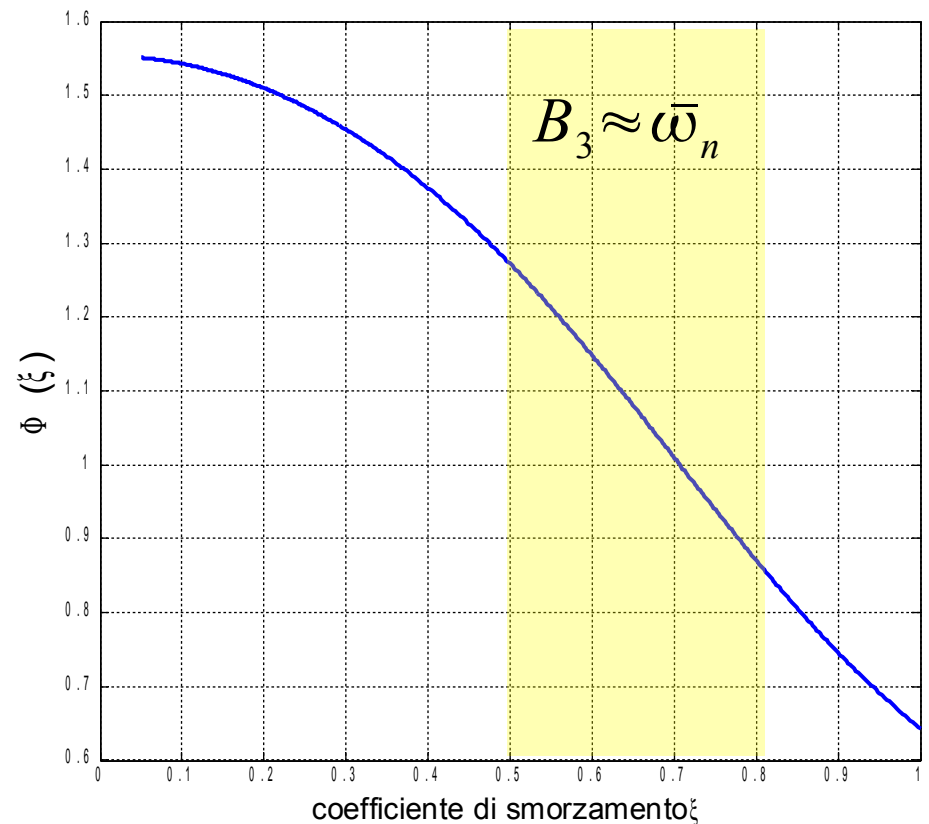
Sistemi a modo dominante pseudoperiodico

$$\left(\frac{\omega_3}{\omega_n}\right)^2 = (1 - 2\xi^2) \pm \sqrt{(1 - 2\xi^2)^2 + 1}$$

$$B_3 = \frac{\omega_n}{2\pi} \sqrt{(1 - 2\xi^2) + \sqrt{(1 - 2\xi^2)^2 + 1}}$$

$$B_3 = \frac{\omega_n}{2\pi} \Phi(\xi)$$

$$B_3 \approx \bar{B}_3 \Leftrightarrow \omega_n \approx \bar{\omega}_n$$



## Caratteristiche della risposta armonica

**Modulo alla  $\omega_n$ :**

Sistemi a modo dominante pseudoperiodico

$$M_n = |G(j\omega_n)| = \frac{K}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega_n}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega_n}{\omega_n}\right)^2}} = \frac{K}{2\xi}$$

$$\frac{M_n}{K} = \frac{1}{2\xi}$$

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_3 = \omega_n$$

# Relazioni risposta armonica – risposta indiciale

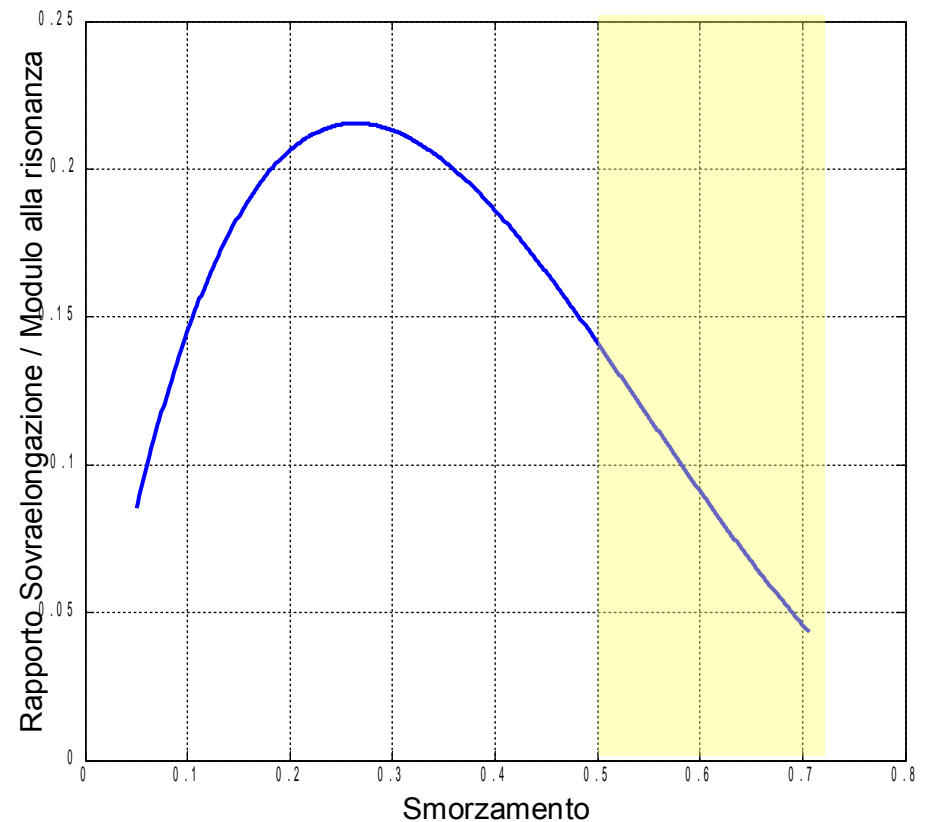
## Sovraelongazione vs Modulo alla risonanza

$$\frac{s}{K} = e^{\frac{-\xi \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$\frac{M_r}{K} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\frac{s}{M_r} = 2\xi\sqrt{1-\xi^2} e^{\frac{-\xi \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$M_r \leq \bar{M}_r \Leftrightarrow s \leq \bar{s} \Leftrightarrow \xi \geq \bar{\xi}$$



## Relazioni risposta armonica – risposta indiciale

**Tempo di risposta vs Banda passante**

$$t_s = \tau \ln(9)$$

$$B_3 = \frac{1}{2\pi\tau}$$

Sistemi a modo dominante aperiodico

$$t_s B_3 = \frac{\ln(9)}{2\pi} = 0,35$$

$$t_s \leq \bar{t}_s \Leftrightarrow B_3 \geq \bar{B}_3$$

# Relazioni risposta armonica – risposta indiciale

**Tempo di assestamento vs Banda passante**

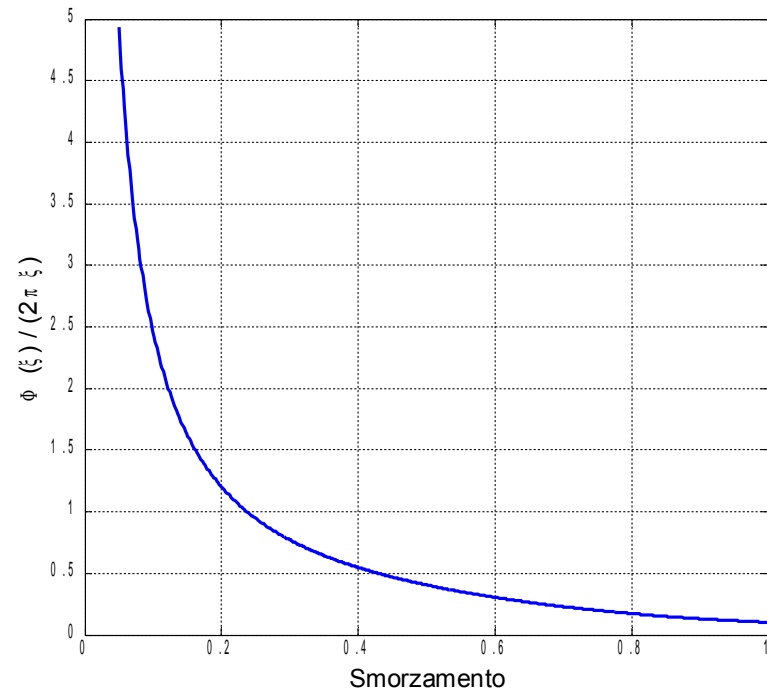
$$t_{a_{\varepsilon\%}} = \frac{1}{\xi \omega_n} \ln \left( \frac{1}{\varepsilon} \right)$$

$$B_3 = \frac{\omega_n}{2\pi} \sqrt{(1-2\xi^2)} + \sqrt{(1-2\xi^2)^2 + 1}$$

Sistemi a modo dominante pseudoperiodico

$$t_{a_{\varepsilon\%}} B_3 = \frac{\Phi(\xi)}{2\pi \xi} \ln \left( \frac{1}{\varepsilon} \right)$$

$$t_{a_{\varepsilon\%}} \leq \bar{t}_a \Leftrightarrow B_3 \geq \bar{B}_3$$





## Riepilogo

- ✓ Si è messo in relazione il comportamento di un sistema dinamico nei primi istanti del transitorio con la pendenza in alta frequenza del diagramma dei moduli della risposta armonica
- ✓ Sono state valutate le caratteristiche della risposta armonica di un sistema sulla base dei parametri di modelli a modo dominante
- ✓ Sono state definiti le relazioni tra le specifiche sul transitorio della risposta indiciale e quelle sul diagramma di risposta armonica (*di Bode*)