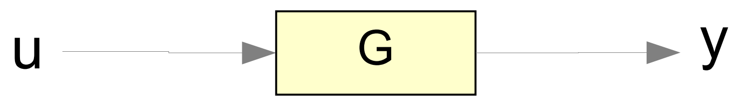
Specifiche nel transitorio – risposta indiciale

- Comportamento iniziale
- Modelli di riferimento
- Caratteristiche della risposta indiciale

Comportamento iniziale

Un qualunque sistema dinamico lineare può essere rappresentato mediante la sua funzione di trasferimento: un rapporto di polinomi nella variabile complessa s



$$Y(s)=G(s)\,U(s)$$

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)};\qquad N(s)=\sum_{i=0}^{i=m} b_i s^i = b_m \prod_{i=1}^{m}(s-z_i)$$

$$D(s)=s^n+\sum_{i=0}^{i=n-1} a_i s^i=\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)$$

z_i: zeri del sistema

p_i: poli del sistema

La trasformata di Laplace della risposta indiciale

$$Y(s)=G(s)\frac{1}{s}=K'\frac{(s)^m+\sum_{i=0}^{i=m-1}\bar{b}_i(s)}{(s)^n+\sum_{i=0}^{i=n-1}a_i(s)^i}\frac{1}{s}$$

Comportamento iniziale

Applicando i teoremi di derivazione, tenendo conto delle condizioni iniziali nulle, e del valore iniziale è possibile valutare l'andamento iniziale della risposta indiciale,

$$Y(s)=G(s)\frac{1}{s}=K'\frac{(s)^m+\sum_{i=0}^{i=m-1}\bar{b}_i(s)}{(s)^n+\sum_{i=0}^{i=n-1}a_i(s)^i}\frac{1}{s}$$

$$L\left\{\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\}=s^k Y(s)=s^k K'\frac{(s)^m+\sum_{i=0}^{i=m-1}\bar{b}_i(s)}{(s)^n+\sum_{i=0}^{i=n-1}a_i(s)^i}\frac{1}{s}$$

$$\left[\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right]_{t=0}=\lim_{t\to 0^+}\frac{d^k y(t)}{dt^k}=\lim_{s\to\infty}s^{k+1}Y(s)=\lim_{s\to\infty}s^k K'\frac{(s)^m+\sum_{i=0}^{i=m-1}\bar{b}_i(s)}{(s)^n+\sum_{i=0}^{i=n-1}a_i(s)^i}$$

Comportamento iniziale

Applicando i teoremi di derivazione, tenendo conto delle condizioni iniziali nulle, e del valore iniziale è possibile valutare l'andamento iniziale della risposta indiciale,

$$\left[\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right]_{t=0} = \lim_{s\to\infty} s^k K' \frac{(s)^m + \sum_{i=0}^{i=m-1} \bar{b}_i (s)}{(s)^n + \sum_{i=0}^{i=n-1} a_i (s)^i} = \lim_{s\to\infty} K' \frac{1}{s^{n-m-k}} = \begin{cases} 0 & k < n-m \\ K' & k = n-m \end{cases}$$

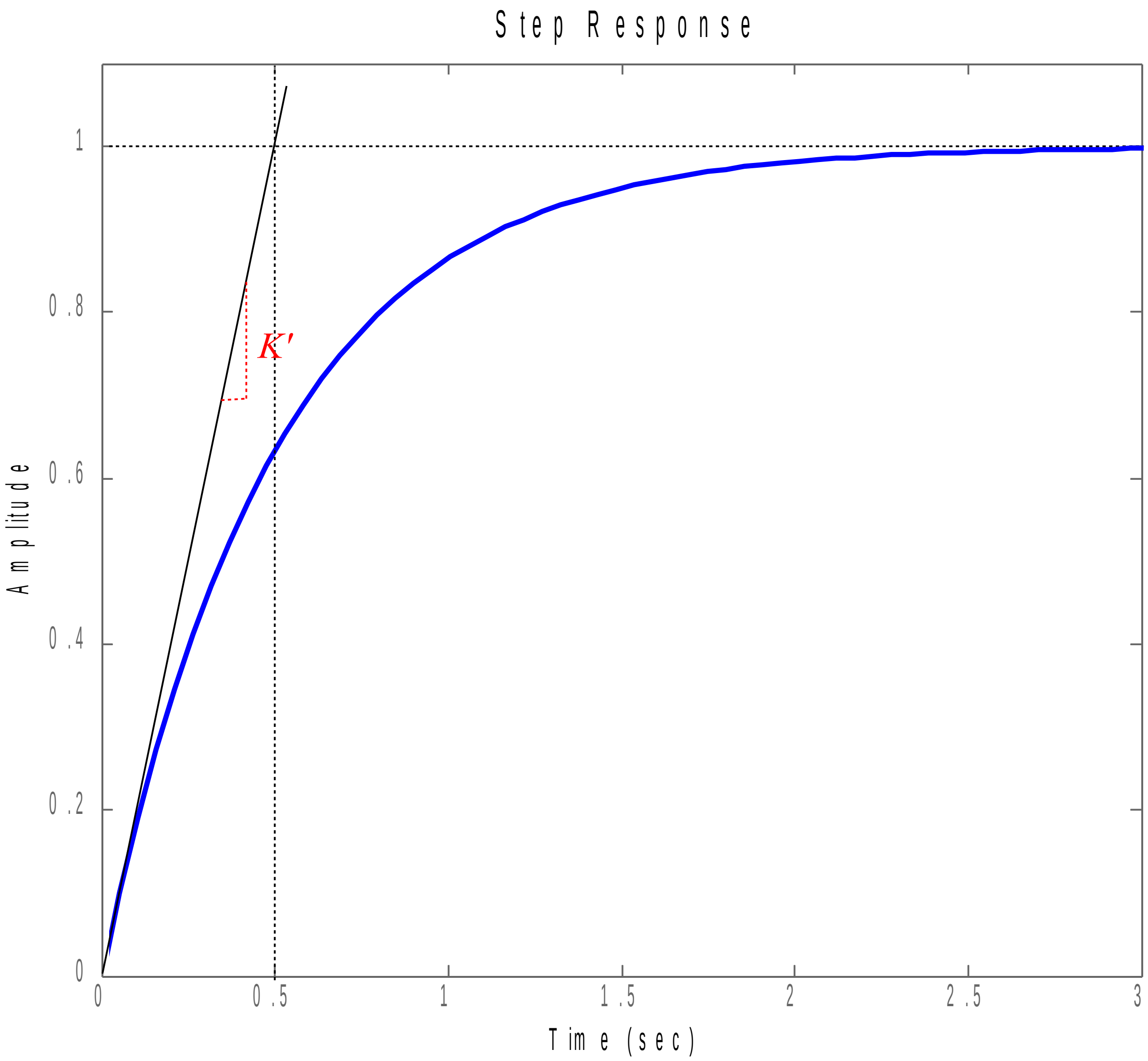
La risposta indiciale è nulla nell'origine con le sue (n-m-1) derivate

Comportamento iniziale

La risposta indiciale è nulla nell'origine con le sue (n-m-1) derivate

$$G(s) = 2\frac{1}{(s+2)}$$

$$n - m = 1$$

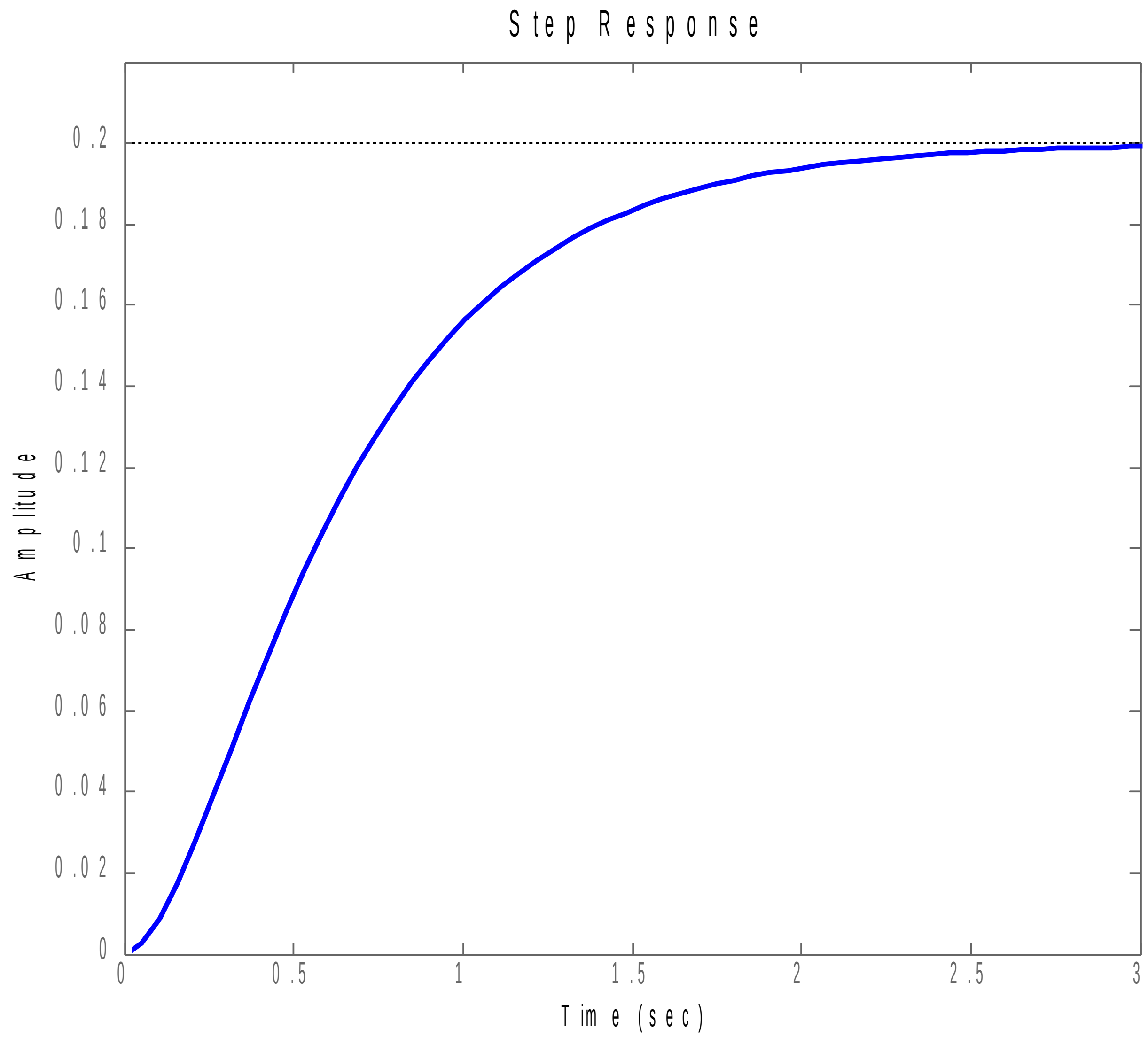


Comportamento iniziale

La risposta indiciale è nulla nell'origine con le sue (n-m-1) derivate

$$G(s)=2\frac{1}{(s+2)(s+5)}$$

$$n-m=2$$

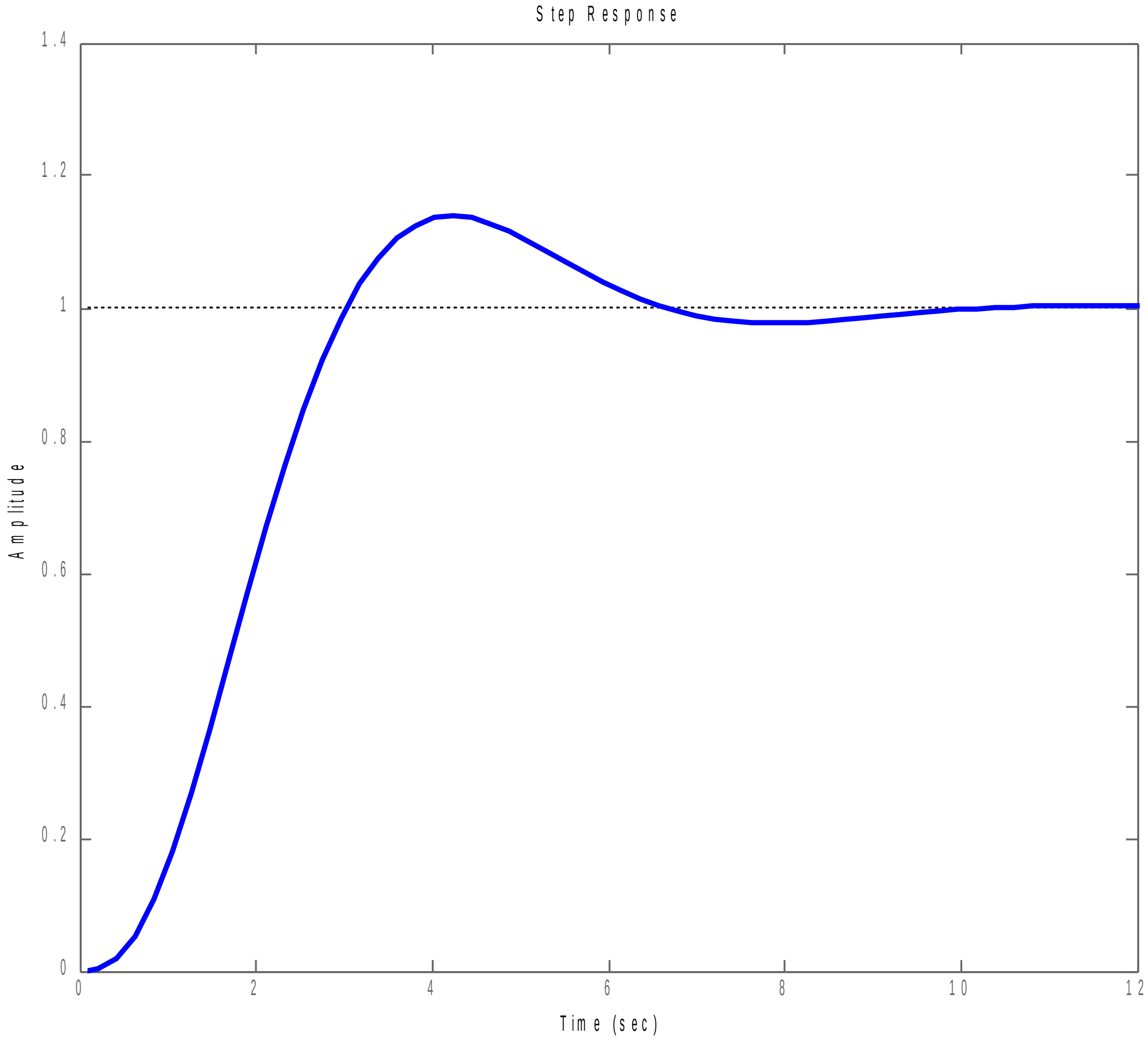


Comportamento iniziale

La risposta indiciale è nulla nell'origine con le sue $(n\text{-}m\text{-}1)$ derivate

$$G(s)=2\frac{1}{(s+2)(s^2+s+1)}$$

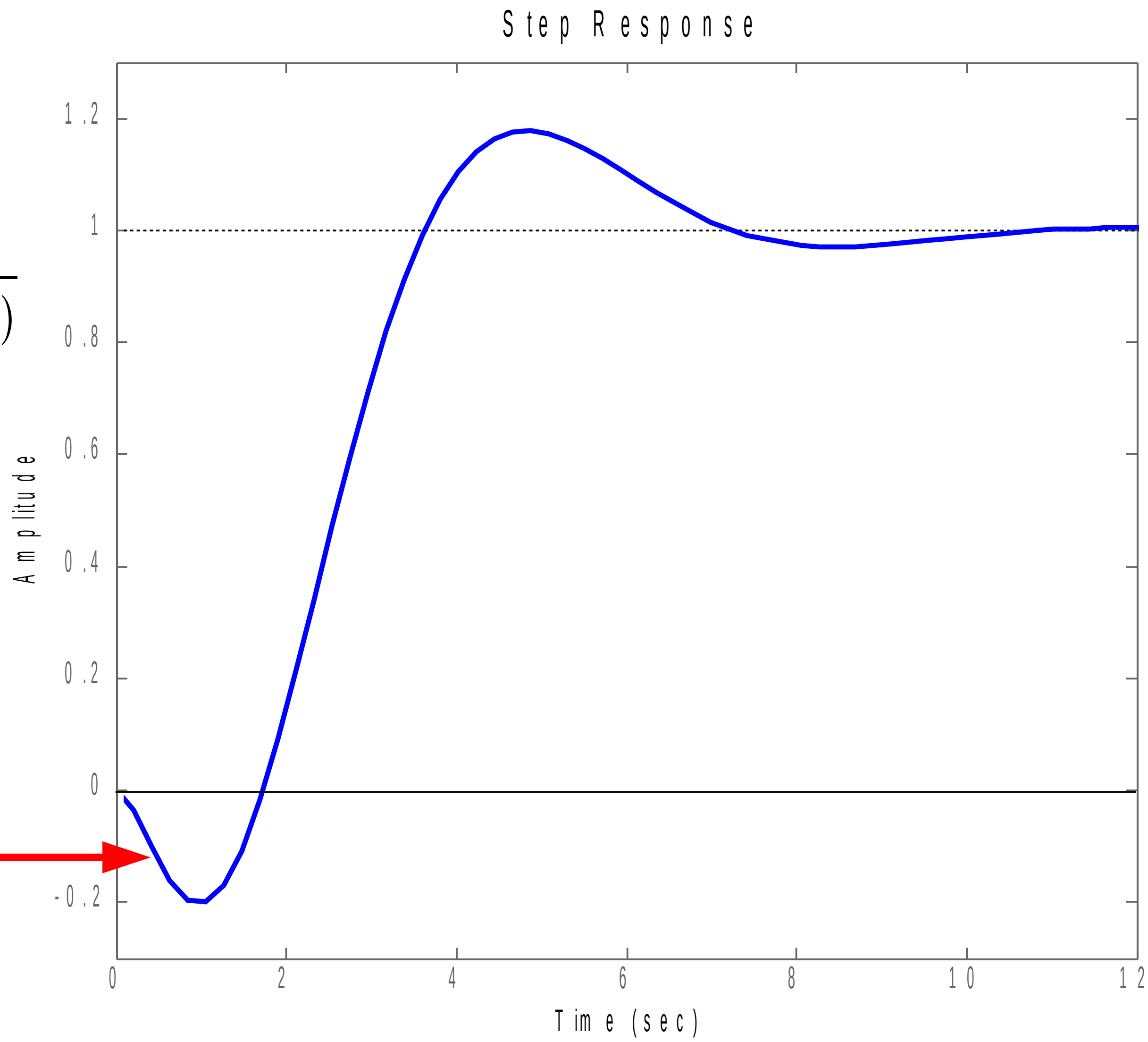
$$n-m=3$$



Comportamento iniziale

La risposta indiciale è nulla nell'origine con le sue (n-m-1) derivate

$$G(s) = -2\frac{(s-1)}{(s+2)(s^2+s+1)}$$

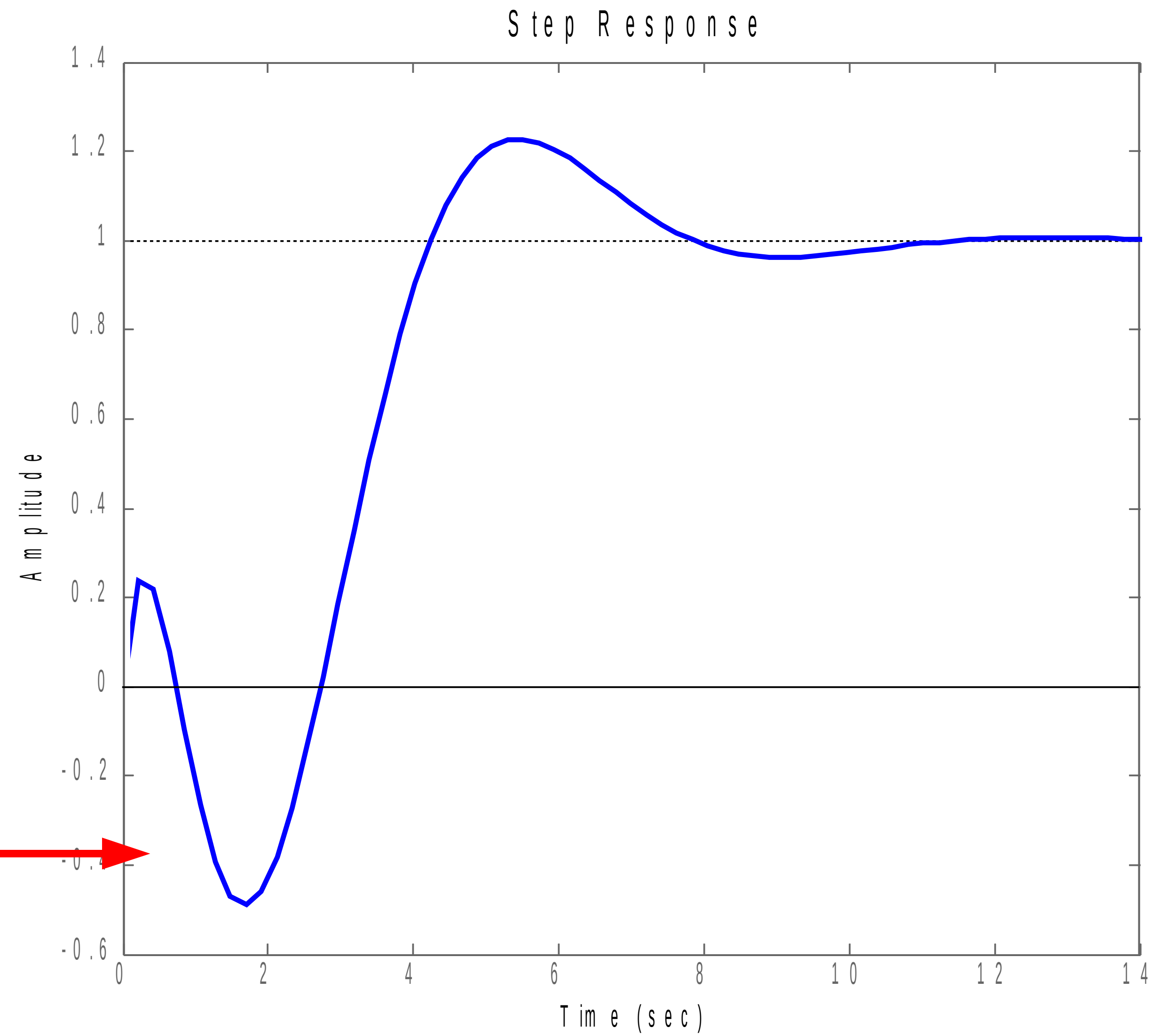


Sottoelongazione

Comportamento iniziale

La risposta indiciale è nulla nell'origine con le sue (n-m-1) derivate

$$G(s) = 2\frac{(s-1)^2}{(s+2)(s^2+s+1)}$$



Sottoelongazione

Modelli di riferimento

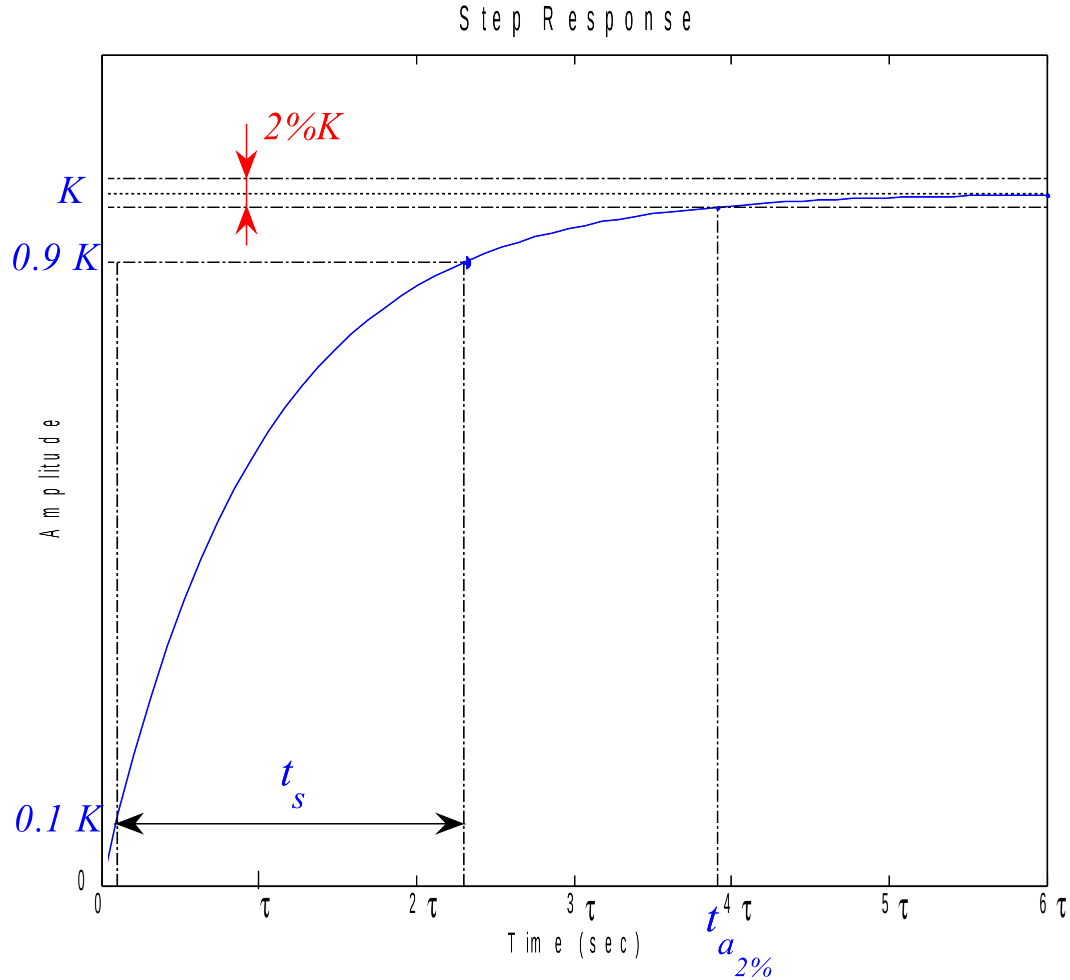
Faremo riferimento a modelli del primo e secondo ordine a modo dominante

$$y(t) = K\left\{1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right\}\delta_{-1}$$

$t_{a_{2\%}}$:
tempo di assestamento al *2%*

t_r:
tempo di salita

K:
guadagno in bassa frequenza (di *Bode*)



Modelli di riferimento

Faremo riferimento a modelli del primo e secondo ordine a modo dominante

$$y(t) = K\left\{1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t + \arccos(\xi)\right)\right\}\delta_{-1}$$

$t_{a_{2\%}}$:
tempo di assestamento al *2%*

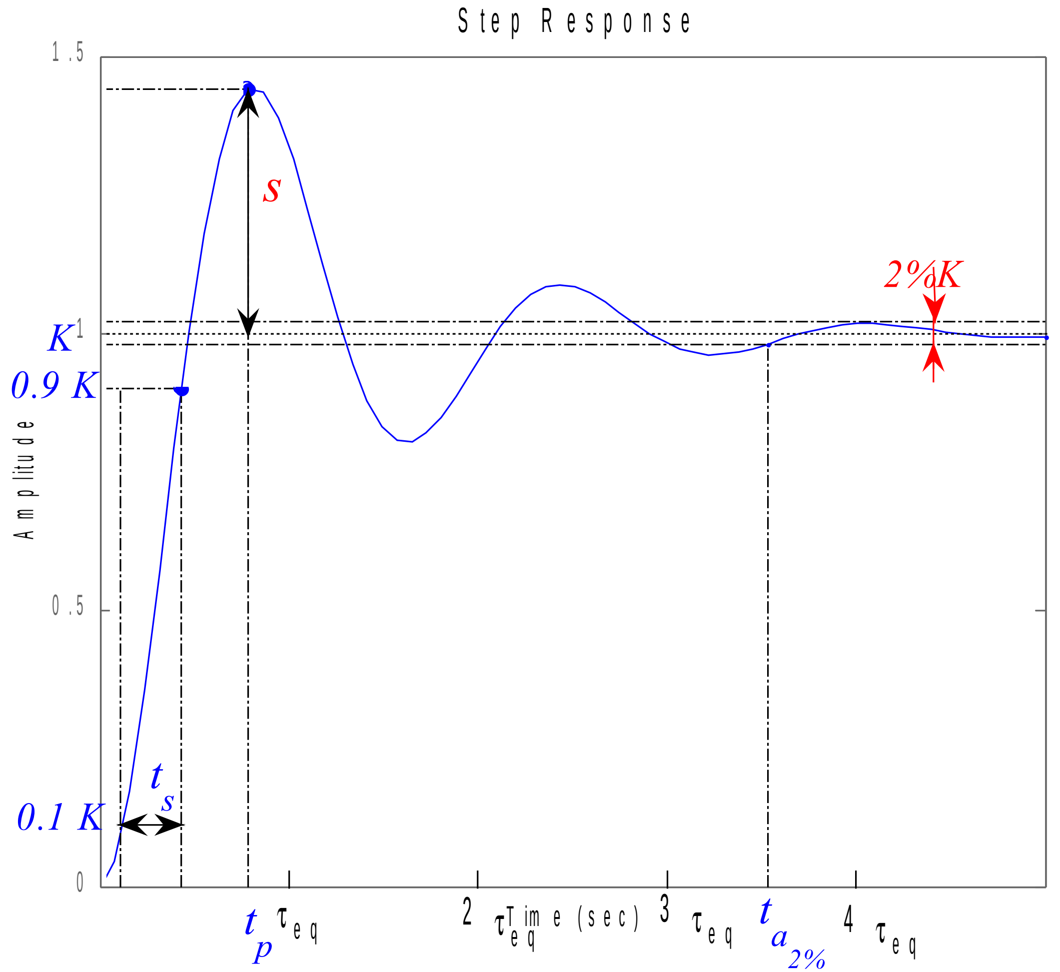
t_r:
tempo di salita

t_p:
tempo di picco

$t_{eq}=1/(\xi\,\omega_n)$:
costante di tempo equivalente

K:
guadagno in bassa frequenza (di *Bode*)

s:
sovraeleongazione



Caratteristiche della risposta indiciale

Sovraelongazione: differenza tra valore massimo e di regime della risposta indiciale.

Faremo riferimento a modelli a modo dominante pseudoperiodico

$$y(t) = K\left\{1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t + \arccos(\xi)\right)\right\}\delta_{-1}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = K\omega_n e^{-\xi\omega_n t}\left\{\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t + \arccos(\xi)\right) - \cos\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t + \arccos(\xi)\right)\right\}\delta_{-1}$$

Il valore massimo si verifica in corrispondenza del primo massimo

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \tan\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t + \arccos(\xi)\right) = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \tan\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t + \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right) = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

Caratteristiche della risposta indiciale

Sovraelongazione:
faremo riferimento a modelli a modo dominante pseudoperiodico

$$y(t) = K\left\{1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t + \arccos(\xi)\right)\right\}\delta_{-1}$$

Il valore massimo si verifica in corrispondenza del primo massimo

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \tan\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t + \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right) = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t = h\pi \Rightarrow t = \frac{h\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\boxed{t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Caratteristiche della risposta indiciale

Sovraelongazione:
faremo riferimento a modelli a modo dominante pseudoperiodico

$$y(t) = K\left\{1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t + \arccos(\xi)\right)\right\}\delta_{-1}$$

Il valore massimo si verifica in corrispondenza del primo massimo

$$s = y(t_p) - K = -K\,\frac{e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}{\sqrt{1-\xi^2}}\left\{\sin\left(\pi + \arcsin\left(\sqrt{1-\xi^2}\right)\right)\right\}\delta_{-1} = K\,e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$\boxed{t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Caratteristiche della risposta indiciale

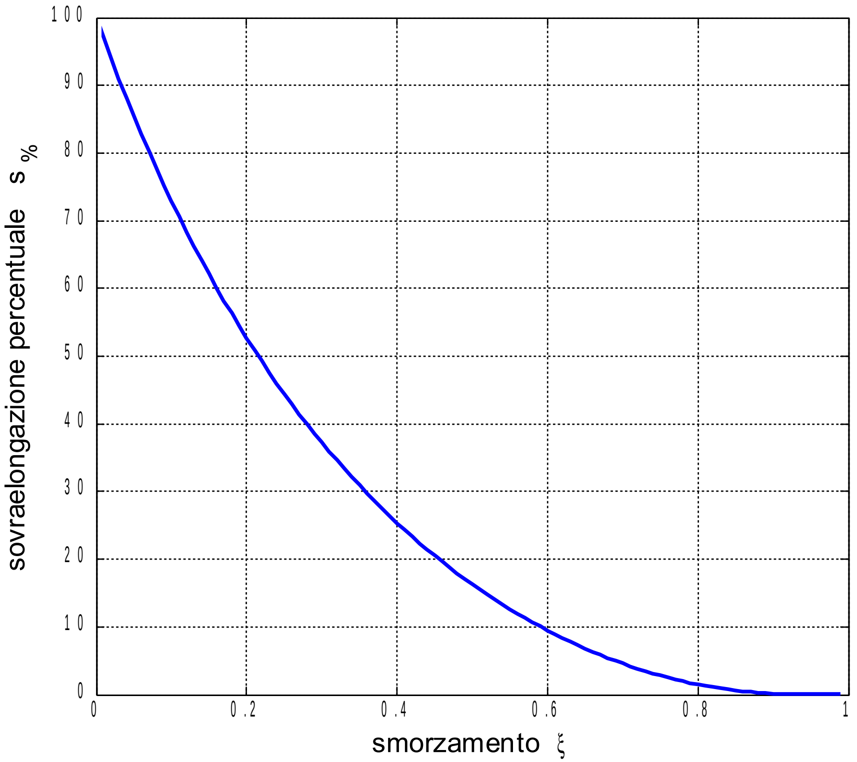
Sovraelongazione: differenza tra valore massimo e di regime della risposta indiciale.

$$s = K\, e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$s_{\%} = 100\,\frac{s}{K} = 100\, e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$s_{\%} \le \bar{s}_{\%} \Leftrightarrow \xi \ge \bar{\xi}$$



Caratteristiche della risposta indiciale

Tempo di assestamento: intervallo di tempo necessario affinché la risposta indiciale si compresa in una fascia $\pm\varepsilon$ K del valore di regime.

Faremo riferimento a modelli a modo dominante aperiodico

$$y(t) = K\left\{1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right\}\delta_{-1}$$

Le relazioni individuate potranno essere considerate valide anche per sistemi a modo dominante pseudo periodico in quanto le oscillazioni sono comprese tra due inviluppi esponenziali con costante di tempo equivalente

$$\tau_{eq} = \frac{1}{\xi\omega_n}$$

$$y(t) = K\left\{1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t + \arccos(\xi)\right)\right\}\delta_{-1}$$

Caratteristiche della risposta indiciale

Tempo di assestamento: intervallo di tempo necessario affinché la risposta indiciale si compresa in una fascia $\pm\varepsilon$ K del valore di regime.

$$\left|y(t)-K\right| y(t) \leq K\varepsilon; \qquad \forall t \geq t_{a_{\varepsilon\%}}$$

$$K \mathrm{e}^{\frac{-t_{a_{\varepsilon\%}}}{\tau_{eq}}} = K\varepsilon$$

$$\boxed{t_{a_{\varepsilon\%}} = \tau_{eq} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$$

$$\boxed{t_{a_{\varepsilon\%}} \leq \bar{t}_a \Rightarrow \tau_{eq} \leq \bar{\tau}}$$

$\varepsilon\,\%$	ta%
5 $\%$	3 τ_{eq}
2 $\%$	4 τ_{eq}
1 $\%$	5 τ_{eq}

Caratteristiche della risposta indiciale

Tempo di salita: intervallo di tempo necessario affinchè la risposta indiciale passi dal 10% al 90% del suo valore di regime. Per semplicità faremo riferimento a modelli a modo dominante aperiodico

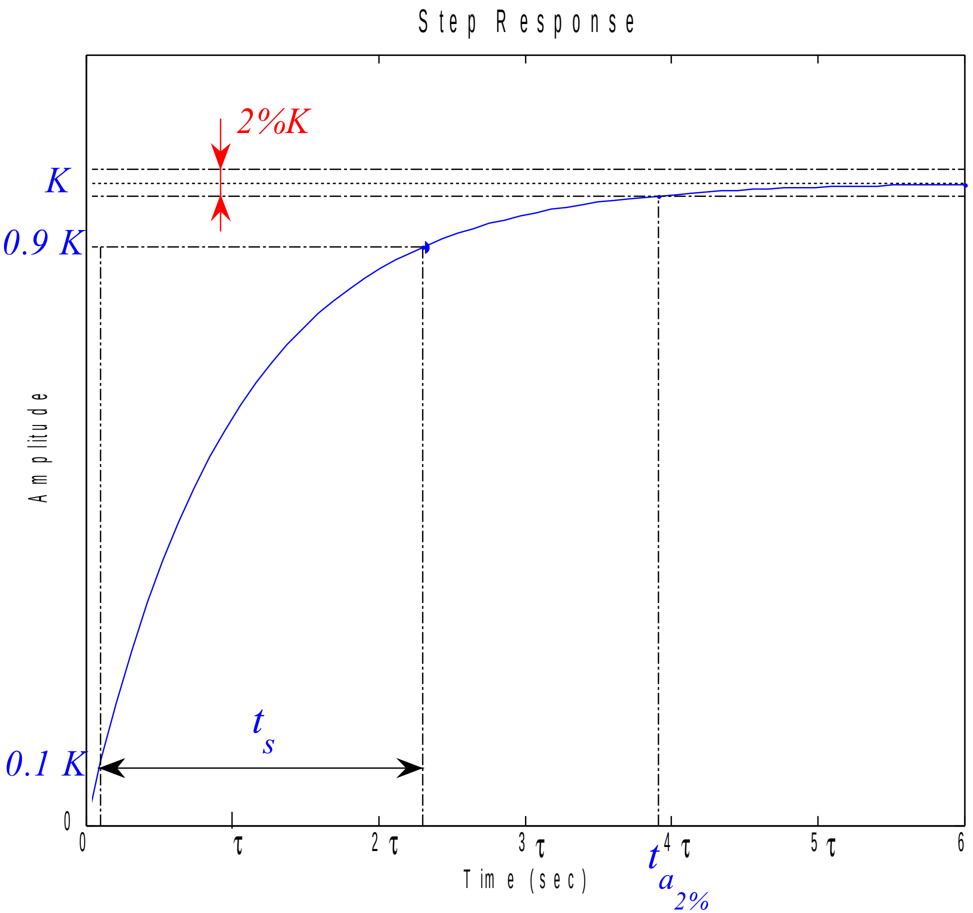
$$y(t) = K\left\{1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right\}\delta_{-1}$$

Nei sistemi a modo dominante pseudoperiodico il t_s dipende in modo abbastanza rilevante dal coefficiente di smorzamento

$$1 - e^{\frac{-t_2}{\tau}} = 0,9$$

$$1 - e^{\frac{-t_1}{\tau}} = 0,1$$

$$t_s = t_2 - t_1$$



Caratteristiche della risposta indiciale

Tempo di salita: intervallo di tempo necessario affinchè la risposta indiciale passi dal 10% al 90% del suo valore di regime.

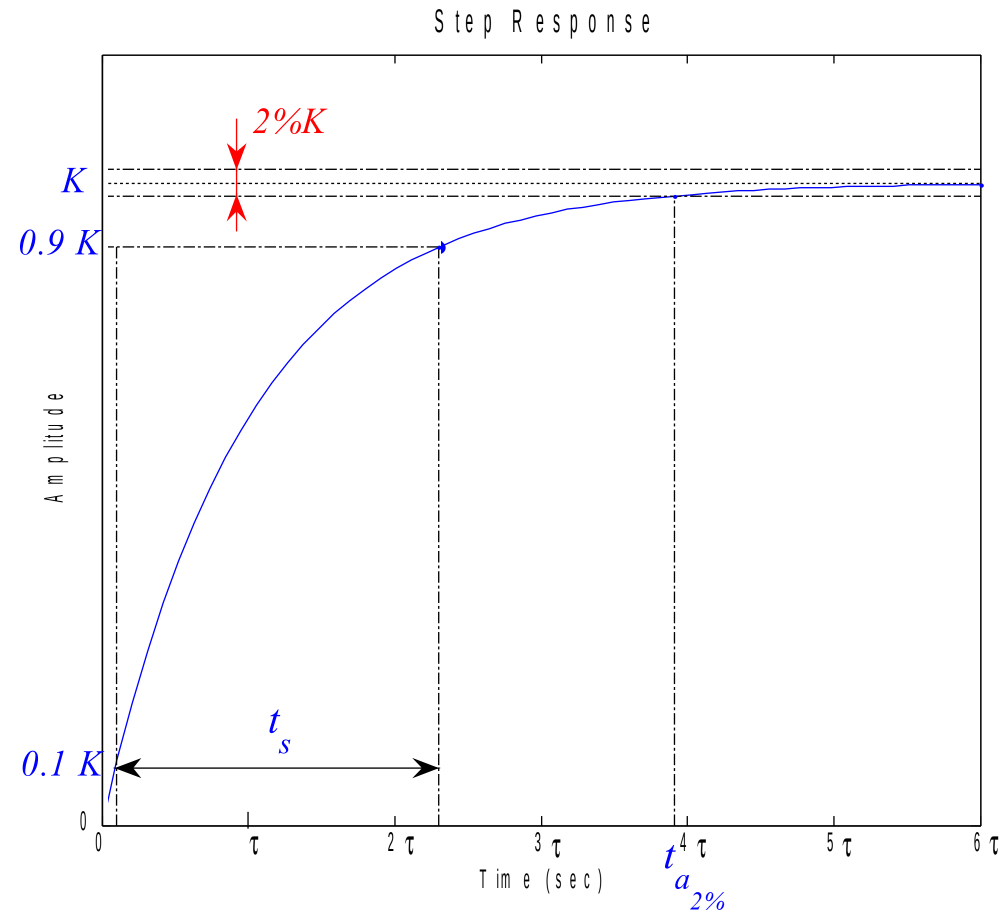
$$e^{\frac{-t_2}{\tau}} = 0{,}1 \qquad\qquad e^{\frac{-t_1}{\tau}} = 0{,}9$$

$$e^{\frac{t_2}{\tau}} e^{\frac{-t_1}{\tau}} = \frac{0{,}9}{0{,}1} = 9$$

$$e^{\frac{t_2 - t_1}{\tau}} = e^{\frac{t_s}{\tau}} = 9$$

$$\boxed{t_s = \tau \ln(9)}$$

$$\boxed{t_s \le \bar{t}_s \Rightarrow \tau_{eq} \le \bar{\tau}}$$



Riepilogo

- ✔ Si è valutato il comportamento di un sistema dinamico nei primi istanti del transitorio sulla base della differenza pilo-zeri
- ✔ Sono state valutate le prestazioni della risposta indiciale di un sistema sulla base dei parametri di modelli a modo dominante
- ✔ Sono state definite le specifiche sui parametri dei modelli a modo dominante in relazione alle specifiche sul transitorio della risposta indiciale