Margini di stabilità

- Criterio di Nyquist ridotto
- Margini di guadagno e di fase
- Criterio di Bode
- Conclusioni

Criterio di Nyquist ridotto

Considerando la condizione di stabilità di un sistema a ciclo chiuso nel caso di funzione di trasferimento a ciclo aperto stabile, il criterio di Nyquist può essere particolarizzato:

Se la funzione di trasferimento a ciclo aperto non ha poli a parte reale positiva, il sistema a ciclo chiuso è stabile se il numero di rotazioni, positive in senso antiorario, del diagramma di Nyquist, percorso da $\omega = -\infty$ a $\omega = +\infty$, della funzione di trasferimento a ciclo aperto attorno al punto *(-1;0)* è nullo

$$\left[\overset{\curvearrowleft}{N}{}^{F}_{(-1;0)} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

Criterio di Nyquist ridotto

$$W(j\omega) = \frac{G_1(j\omega)}{1+F(j\omega)} = \frac{G_1(j\omega)}{V(j\omega)} \qquad V(j\omega) = 1+F(j\omega) = \frac{P(j\omega)}{D_F(j\omega)}$$

Criterio di Nyquist ridotto

Nel caso di sistema a ciclo aperto stabile, la verifica del criterio ridotto è particolarmente semplice:

- tracciare il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento a ciclo aperto;

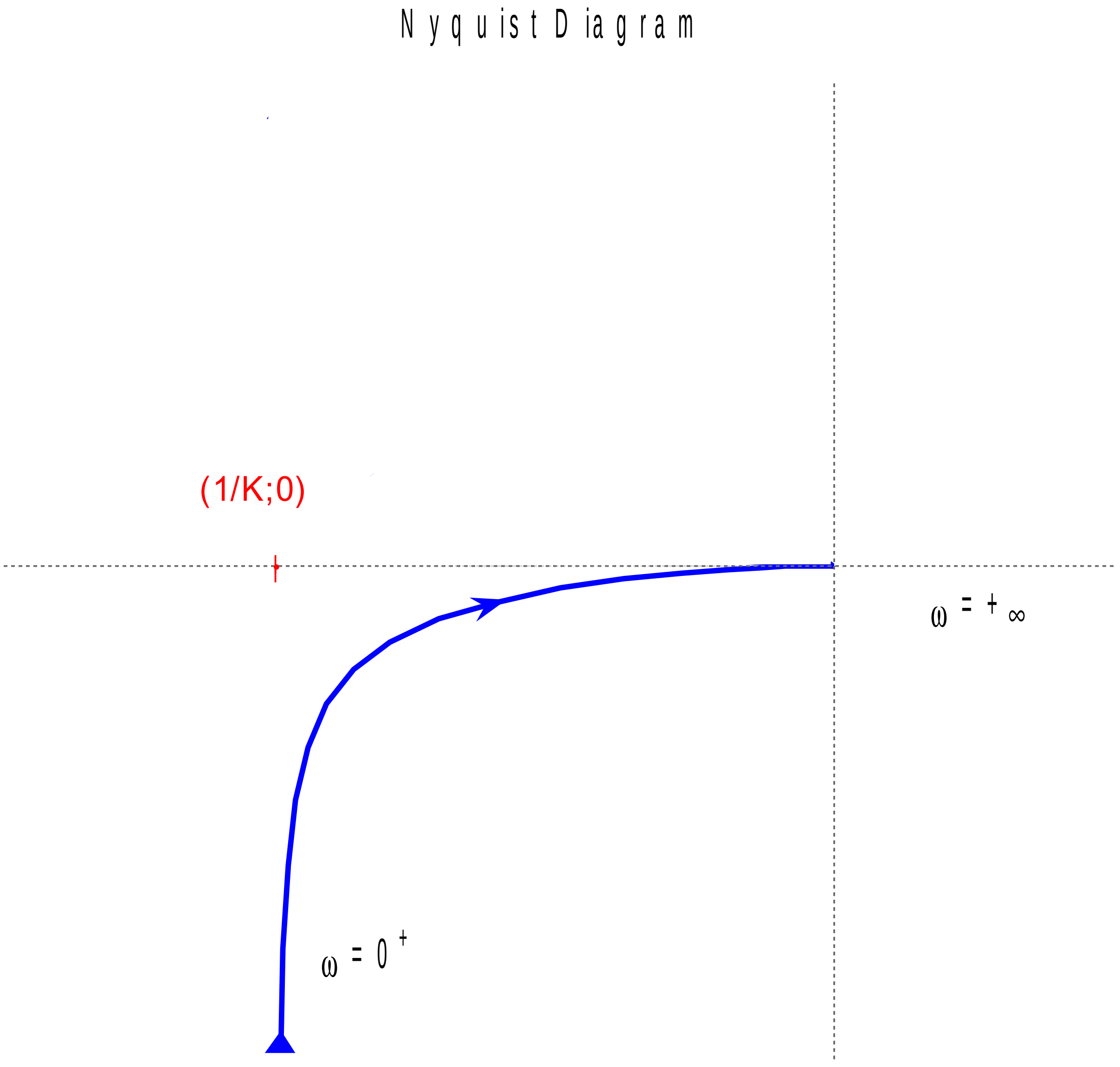
- percorrere il diagramma di Nyquist per ω crescenti da 0 a +∞;

- il sistema a ciclo chiuso è stabile se il punto $(-1;0)$ del piano complesso viene lasciato sulla sinistra: il punto $(-1;0)$ è esterno al diagramma di Nyquist);

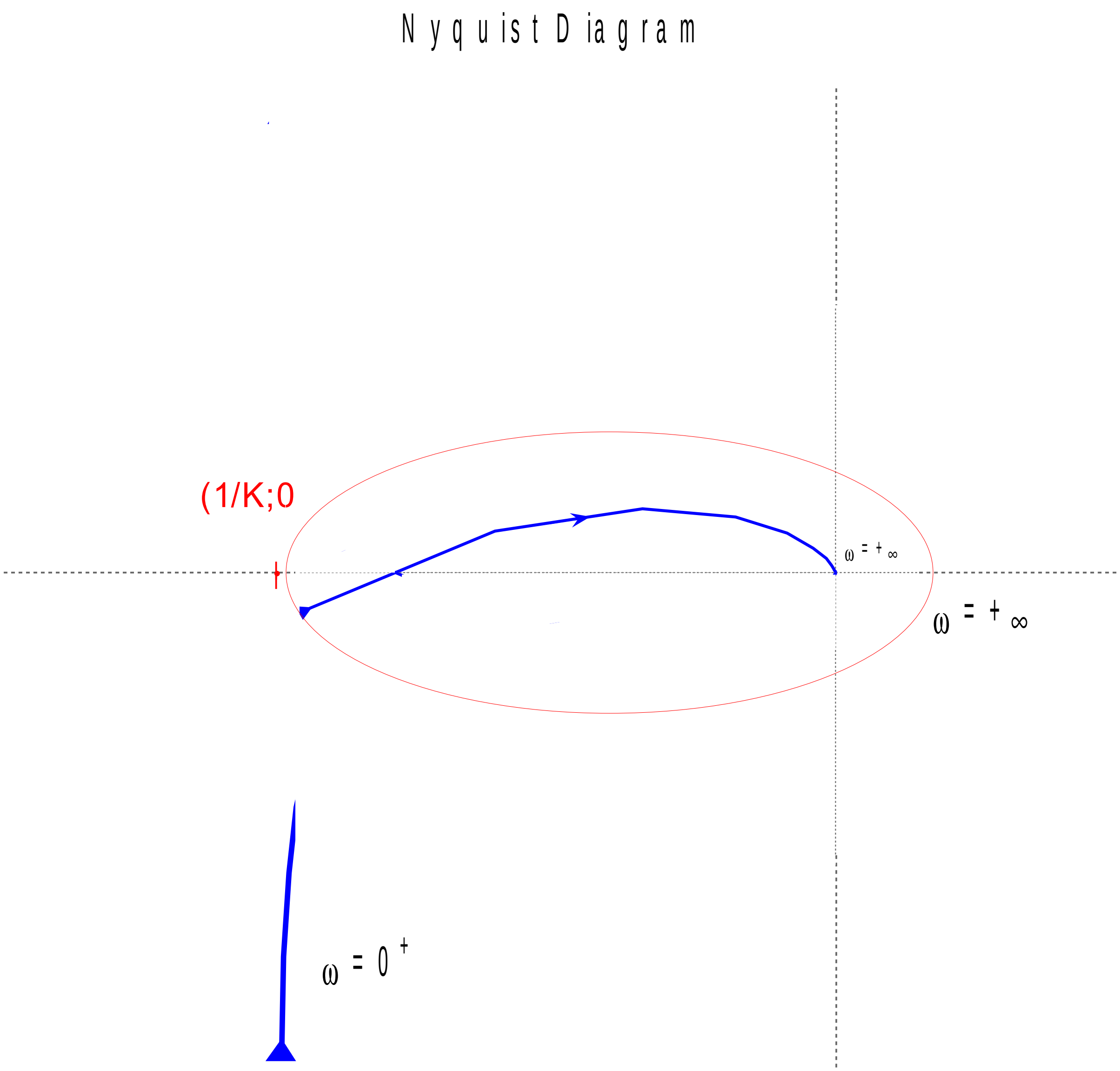
- il sistema a ciclo chiuso è instabile se il punto $(-1;0)$ del piano complesso viene lasciato sulla destra: il punto $(-1;0)$ è interno al diagramma di Nyquist);

- il sistema a ciclo chiuso è al limite di stabilità se il punto $(-1;0)$ del piano complesso appartiene al diagramma di Nyquist);

Criterio di Nyquist ridotto

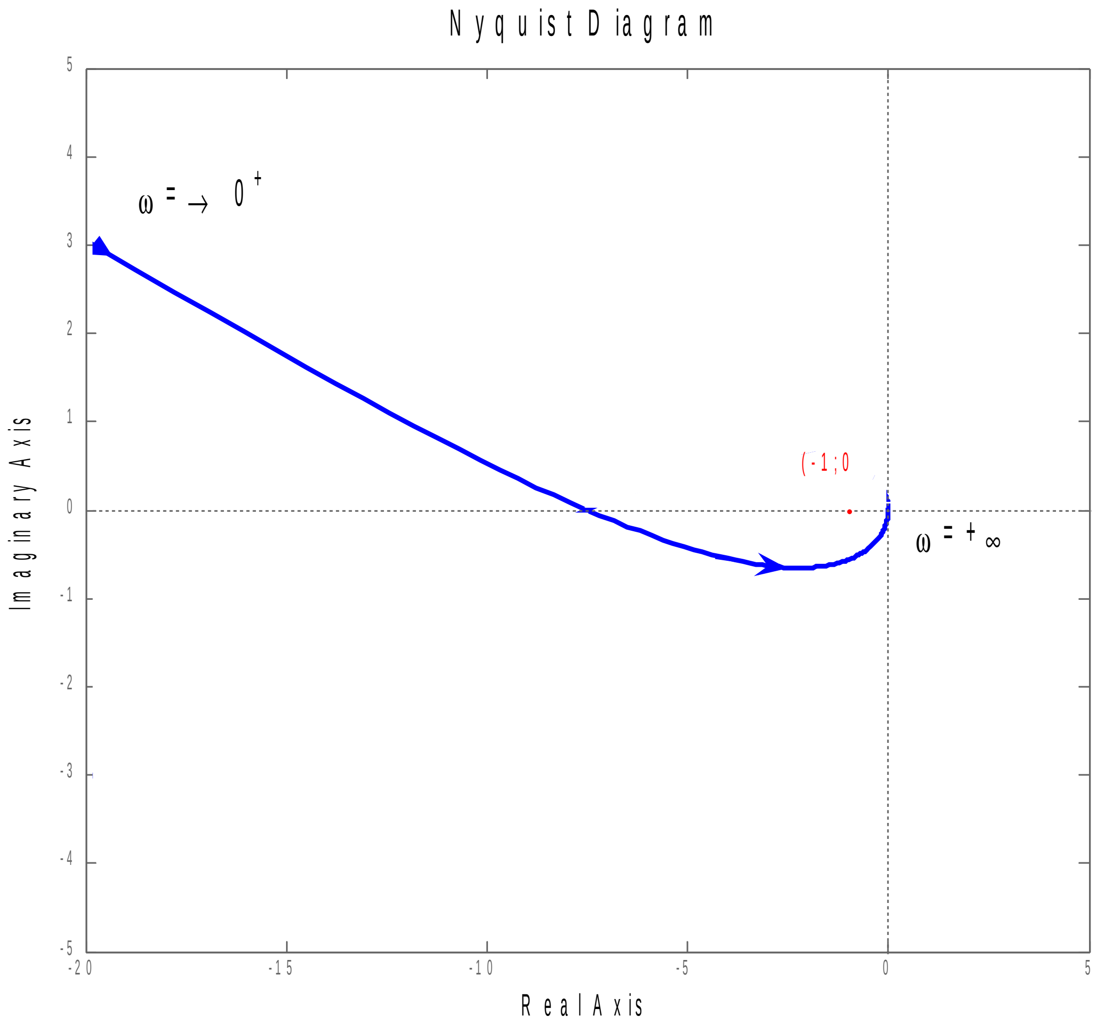


Criterio di Nyquist ridotto



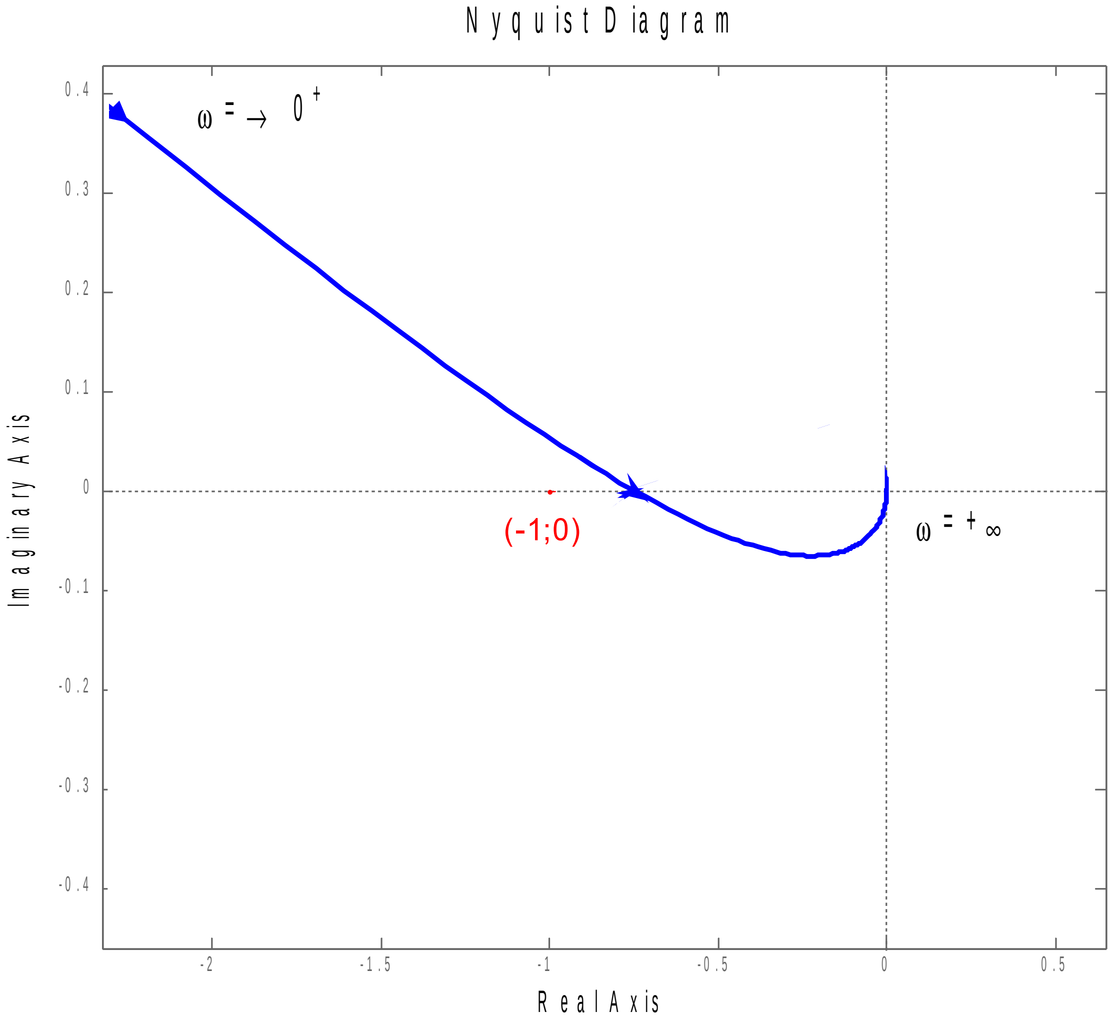
Criterio di Nyquist ridotto

$$F(j\omega)=\frac{(1+5j\omega)(1+j\omega)}{(j\omega)^2(1+10j\omega)}$$



Criterio di Nyquist ridotto

$$F(j\omega)=0{,}1\,\frac{(1+5\,j\omega)(1+j\omega)}{(j\omega)^2(1+10\,j\omega)}$$

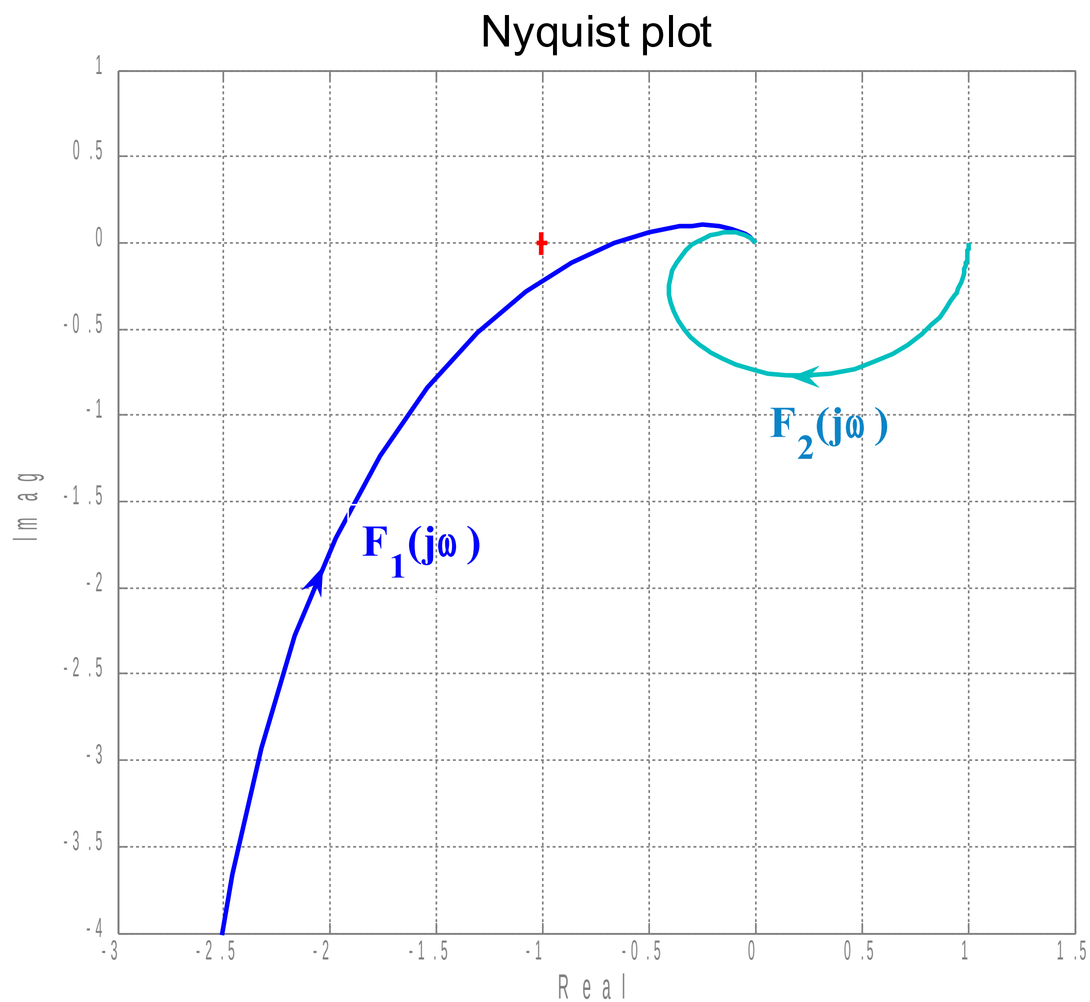


Margini di guadagno e di fase

L'analisi di stabilità applicando il criterio di Nyquist fornisce solo una informazione binaria (stabile/instabile) ma non dà indicazioni sulla potenziale **robustezza** del sistema a ciclo chiuso rispetto a variazioni dei parametri.

Il diagramma di F_1 è più vicino al punto *(-1;0)* di quello di F_2.

Analoghe variazioni relative dei parametri delle due funzioni di trasferimento possono causare l'instabilità del sistema a ciclo chiuso caratterizzato da F_1 e non di quello caratterizzato da F_2



Margini di guadagno e di fase

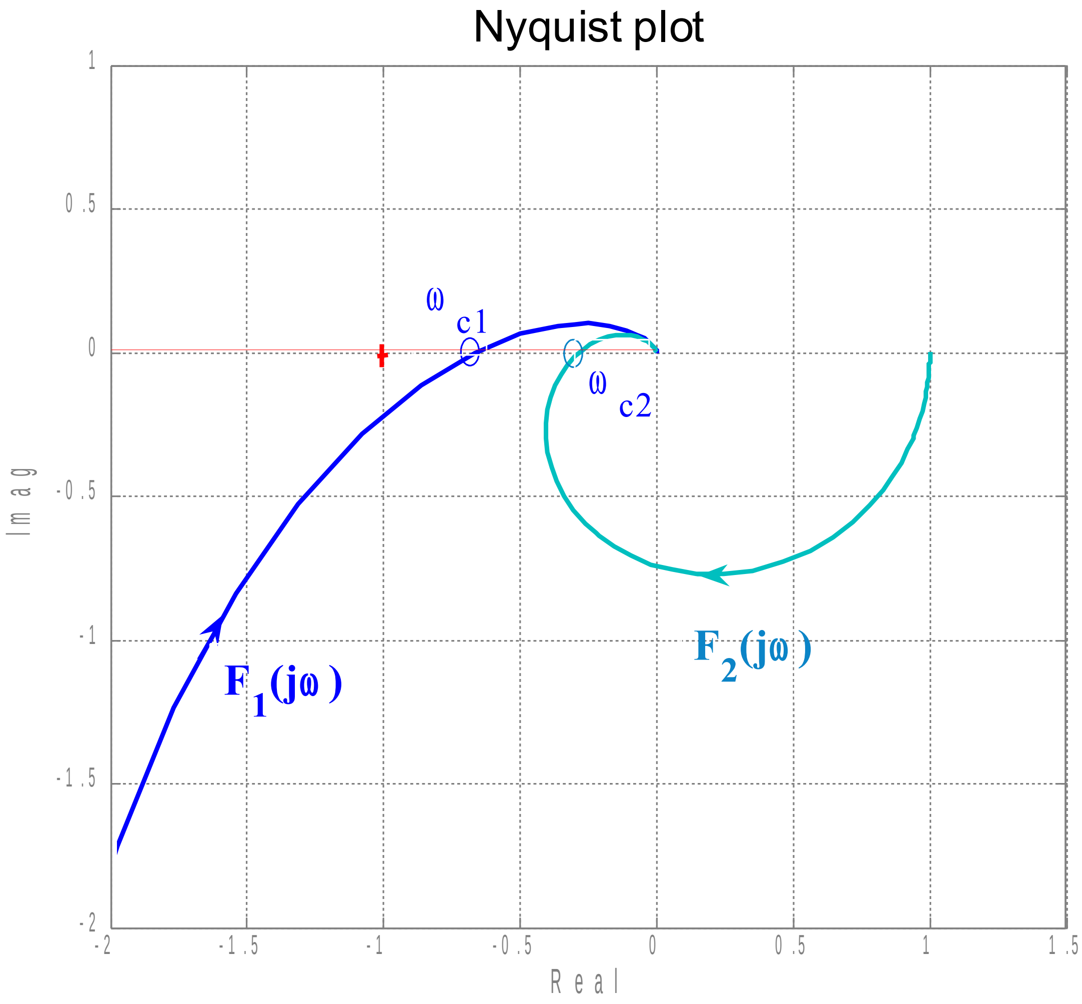
Definita la **pulsazione critica** della funzione di trasferimento a ciclo aperto come la pulsazione a cui la sua fase è pari a -π.

$$arg\left\{F\left(j\omega_c\right)\right\}=-\pi$$

Il **margine di guadagno** di un sistema a ciclo chiuso è il reciproco del modulo della funzione di trasferimento a ciclo aperto alla pulsazione critica

$$m_g=\frac{1}{\left|F\left(j\omega_c\right)\right|}$$

Il margine guadagno di F_1 è inferiore a quello di F_2.



Margini di guadagno e di fase

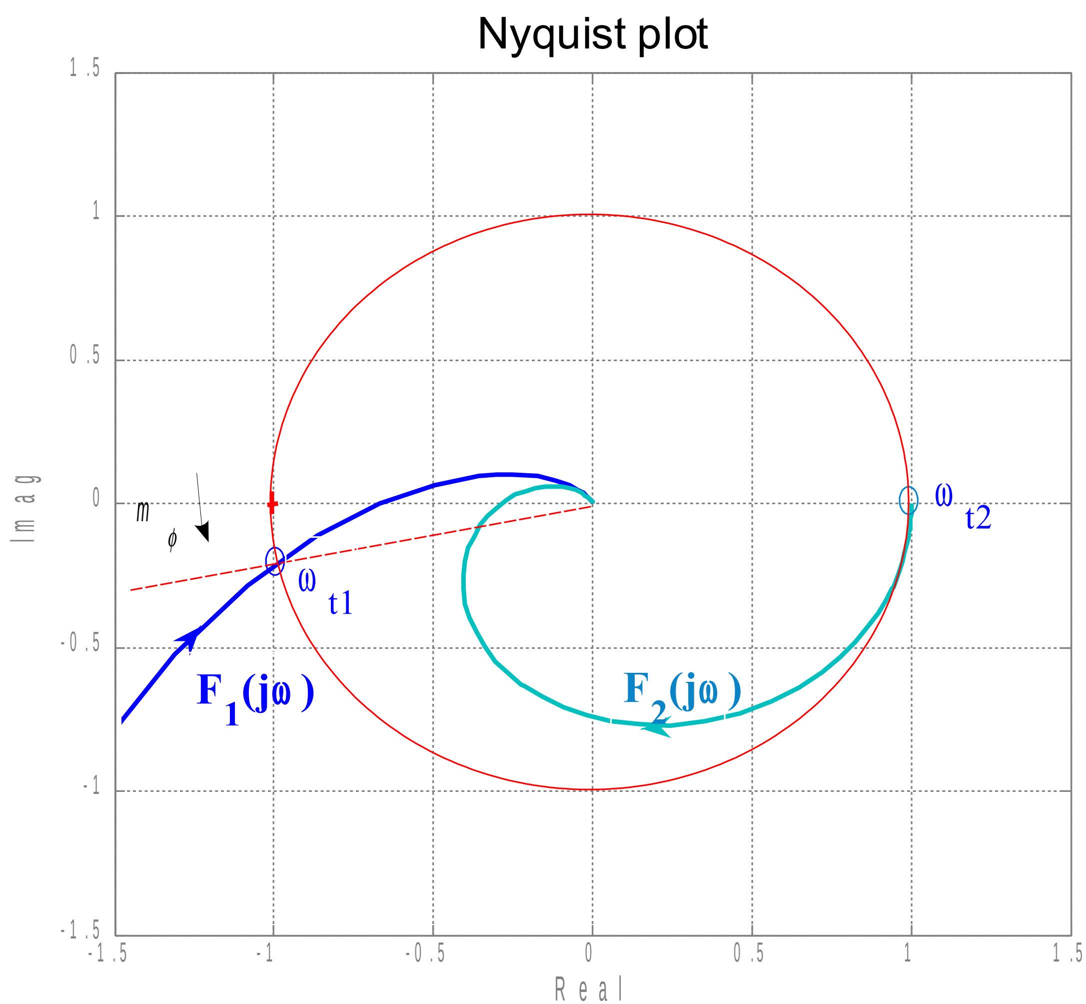
Definita la **pulsazione di attraversamento** della funzione di trasferimento a ciclo aperto come la pulsazione a cui il suo modulo è pari a 1.

$$\left|F\left(j\omega_t\right)\right| = 1$$

Il **margine di fase** di un sistema a ciclo chiuso è la differenza tra π e la fase della funzione di trasferimento a ciclo aperto alla pulsazione di attraversamento

$$m_\varphi = \pi + arg\left\{F\left(j\omega_t\right)\right\}$$

Il margine fase di F_1 è inferiore a quello di F_2.



Margini di guadagno e di fase

Le definizioni dei margini di stabilità (di guadagno e di fase) fanno riferimento al criterio ridotto di Nyquist, pertanto:

- Sono applicabili semplicemente ai sistemi a stabilità regolare.
- Sono applicabili, con qualche attenzione, ai sistemi a stabilità condizionata con funzione di trasferimento a ciclo aperto senza poli a parte reale positiva.
- Non sono applicabili a sistemi a stabilità paradossale, in quanto in tal caso sono presenti poli a parte reale positiva nella funzione di trasferimento a ciclo aperto

Margini di guadagno e di fase

$$F(j\omega)=\frac{(5s+1)(s+1)(0{,}1\,s+1)}{s^2(10s+1)(0{,}5\,s+1)(0{,}2\,s+1)}$$

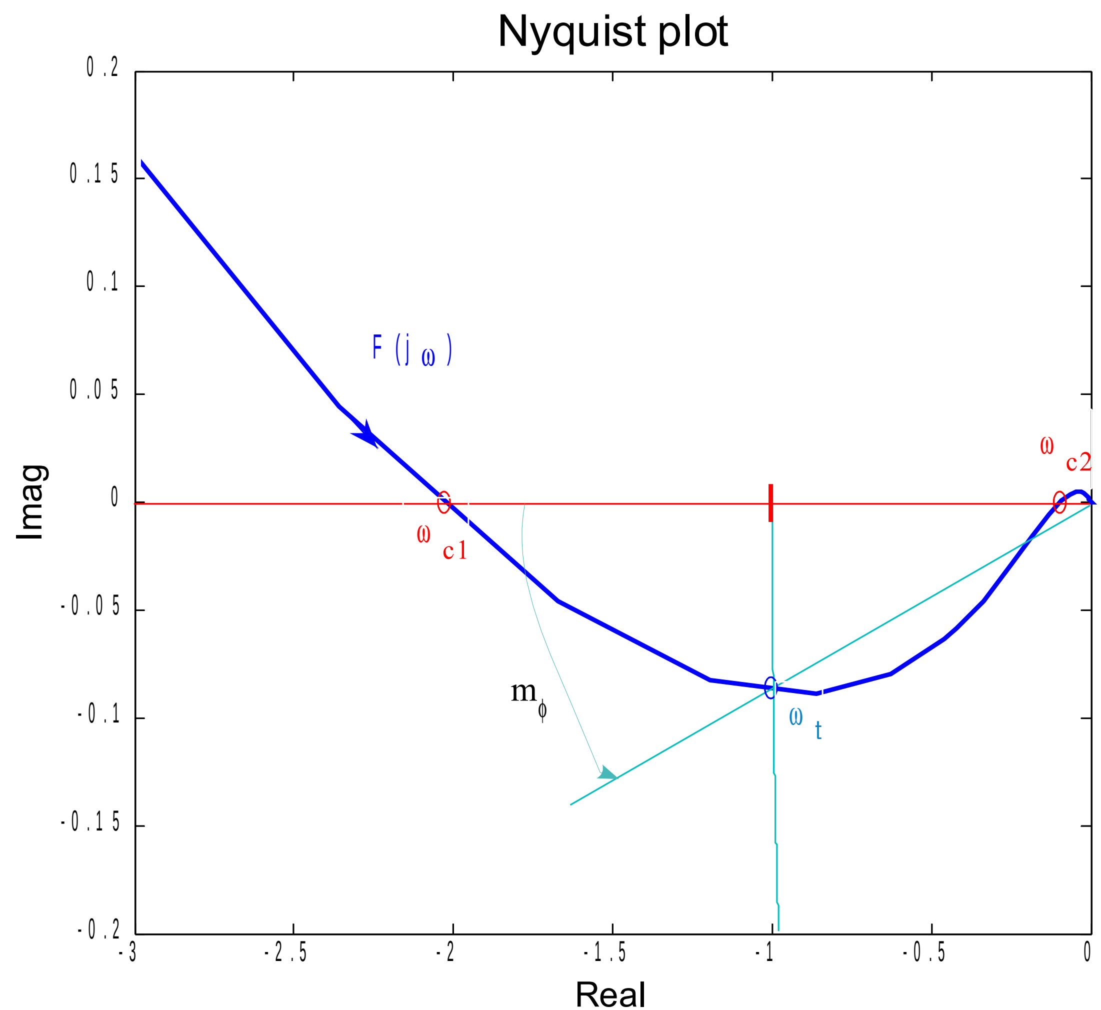
$$m_\varphi=\pi+arg\left\{F\left(j\omega_t\right)\right\}$$

$$m_{g2}=\frac{1}{\left|F\left(j\omega_{c2}\right)\right|}$$

$$m_{g1}=\frac{1}{\left|F\left(j\omega_{c1}\right)\right|}$$

Il sistema a ciclo chiuso rimarrà stabile se il guadagno non varierà al di fuori dell'intervallo

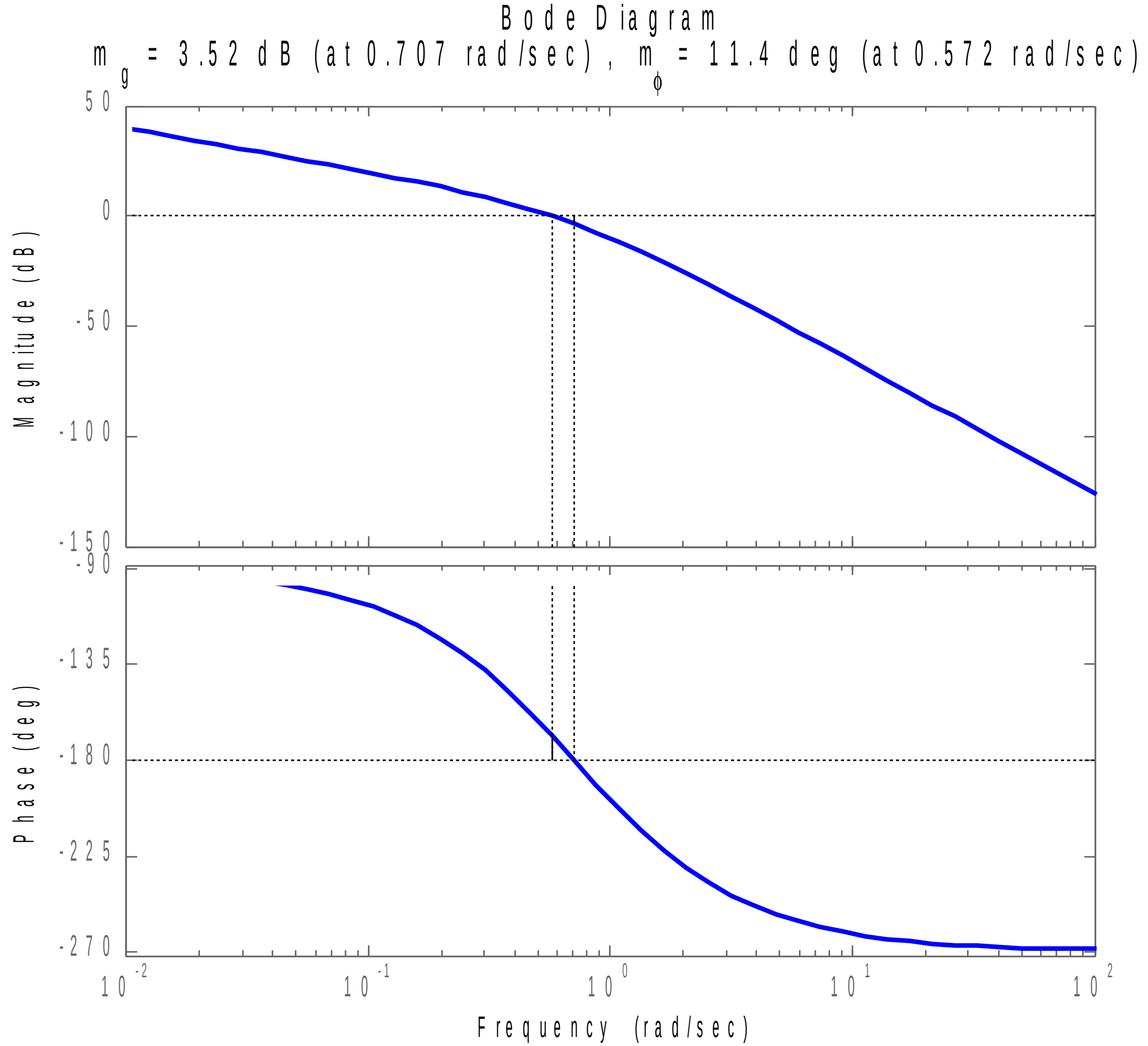
$$m_{g1}\div m_{g2}$$



Margini di guadagno e di fase

La valutazione dei margini di stabilità del sistema a ciclo chiuso può essere effettuata utilizzando i diagrammi di Bode delle funzioni di trasferimento a ciclo aperto

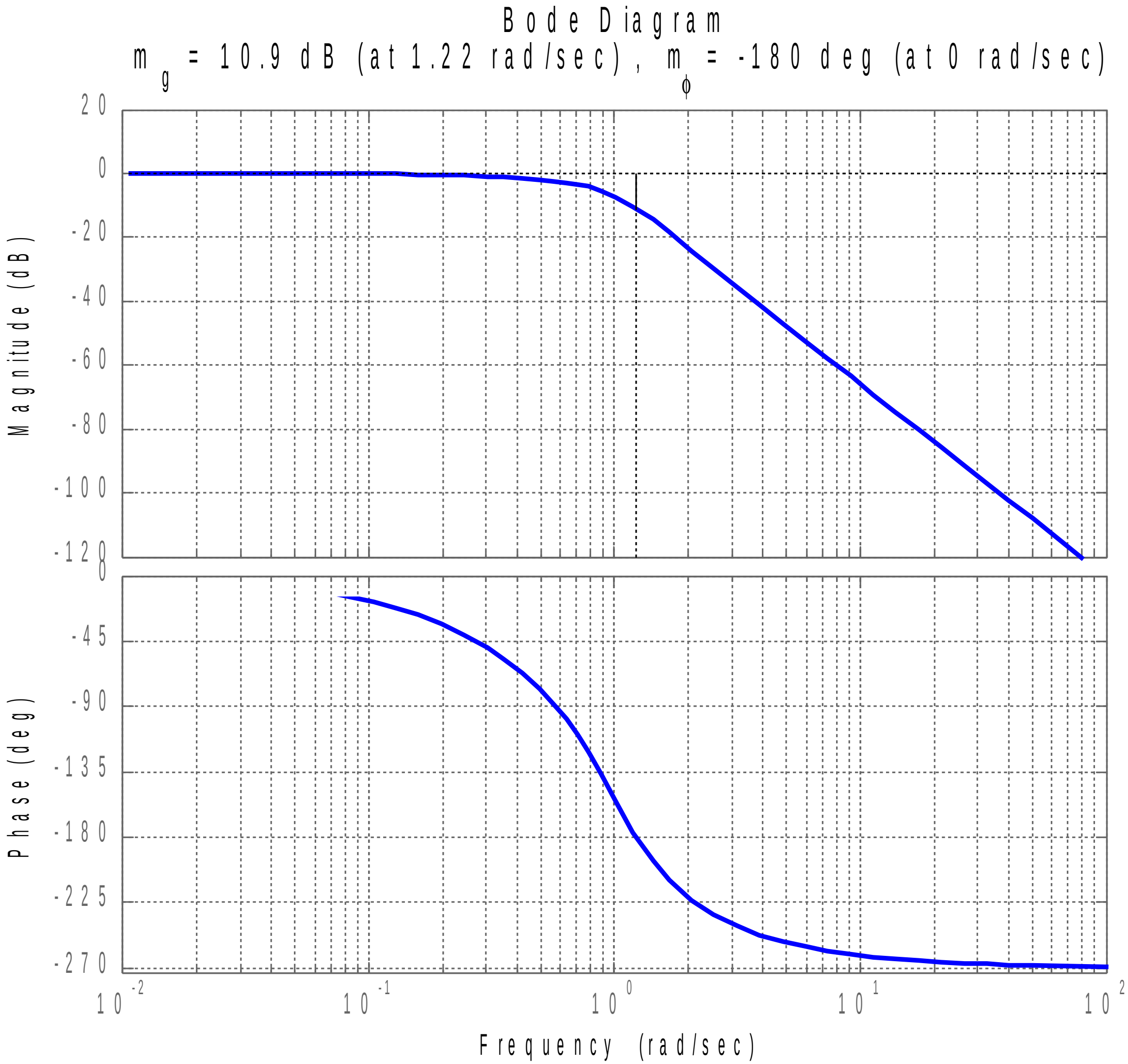
$$F(j\omega) = \frac{1}{s(2s+1)(s+1)}$$



Margini di guadagno e di fase

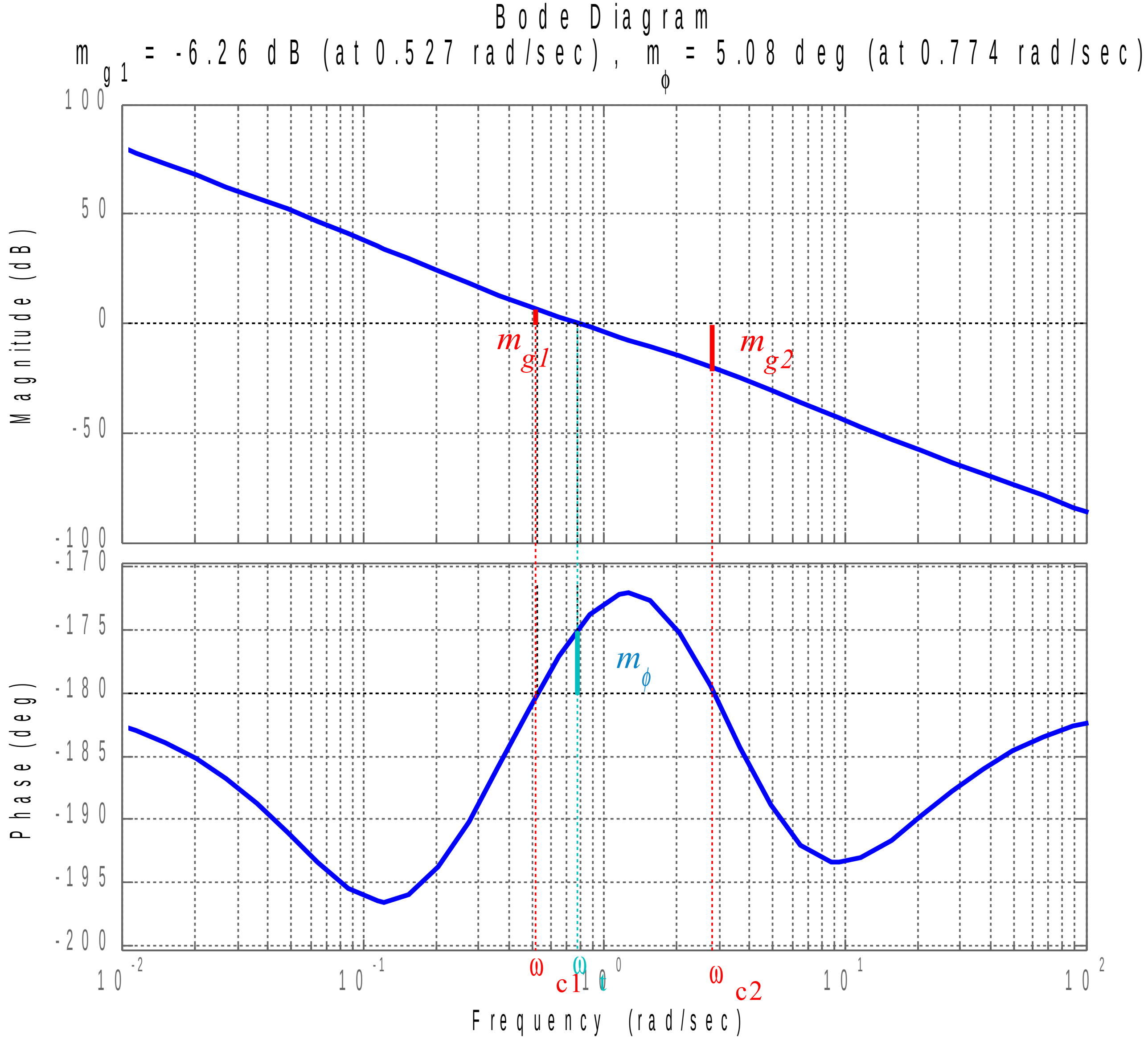
La valutazione dei margini di stabilità del sistema a ciclo chiuso può essere effettuata utilizzando i diagrammi di Bode delle funzioni di trasferimento a ciclo aperto

$$F(j\omega)=\frac{1}{(2s+1)(s^2+s+1)}$$



Margini di guadagno e di fase

$$F(j\omega)=\frac{(5s+1)(s+1)(0.1s+1)}{s^2(10s+1)(0.5s+1)(0.2s+1)}$$



Criterio di Bode

Per i sistemi a stabilità regolare il criterio ridotto di Nyquist è facilmente riconducibile al criterio di Bode che fa riferimento alla valutazione dei margini di stabilità della funzione di trasferimento a ciclo chiuso sulla base del diagramma di Bode della funzione di trasferimento a ciclo aperto.

- Un sistema stabile a ciclo aperto è anche stabile a ciclo chiuso se i margini di stabilità, valutati dal diagramma di Bode della funzione di trasferimento a ciclo aperto, sono positivi.

- In un sistema a stabilità regolare, il sistema è stabile a ciclo chiuso se la pulsazione di attraversamento è inferiore a quella critica.

- Se la pulsazione di attraversamento coincide con la pulsazione critica, il sistema a ciclo chiuso è al limite di stabilità e presenterà un modo periodico con pulsazione pari a quella critica.

Conclusioni

- Il criterio di Nyquist può essere semplificato nel caso di sistemi stabili a ciclo aperto
- Nei sistemi a stabilità regolare ed a stabilità paradossale, la stabilità del sistema a ciclo chiuso è definibile valutando i margini di stabilità
- Nei sistemi a stabilità paradossale, la valutazione dei margini di stabilità può presentare difficoltà
- Nei sistemi a stabilità regolare, la stabilità del sistema a ciclo chiuso è facilmente valutabile valutando i margini di stabilità sul diagramma di Bode della funzione di trasferimento a ciclo aperto.