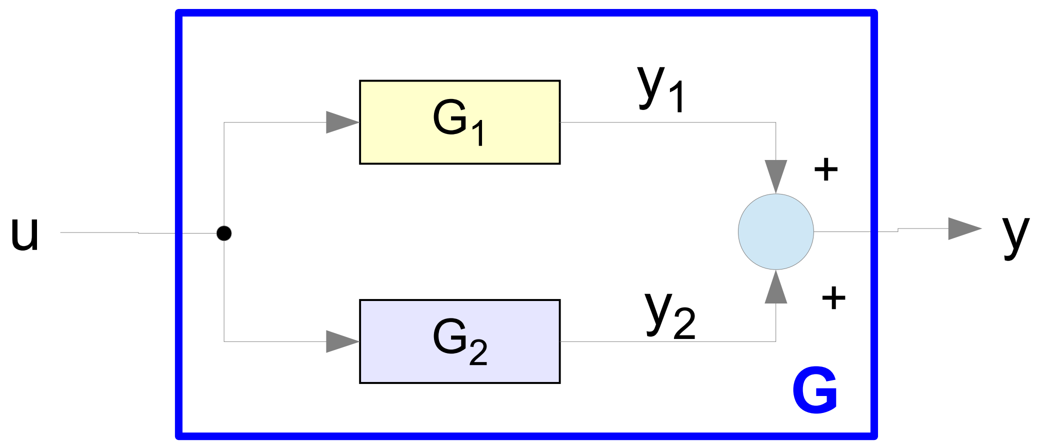
Luogo delle radici

- Combinazione lineare di due polinomi
- Radici di un polinomio al variare di un parametro
- Tracciamento del luogo delle radici
- Taratura del luogo delle radici
- Esempi di tracciamento
- Caratterizzazione modale
- Conclusioni

Combinazione lineare di due polinomi

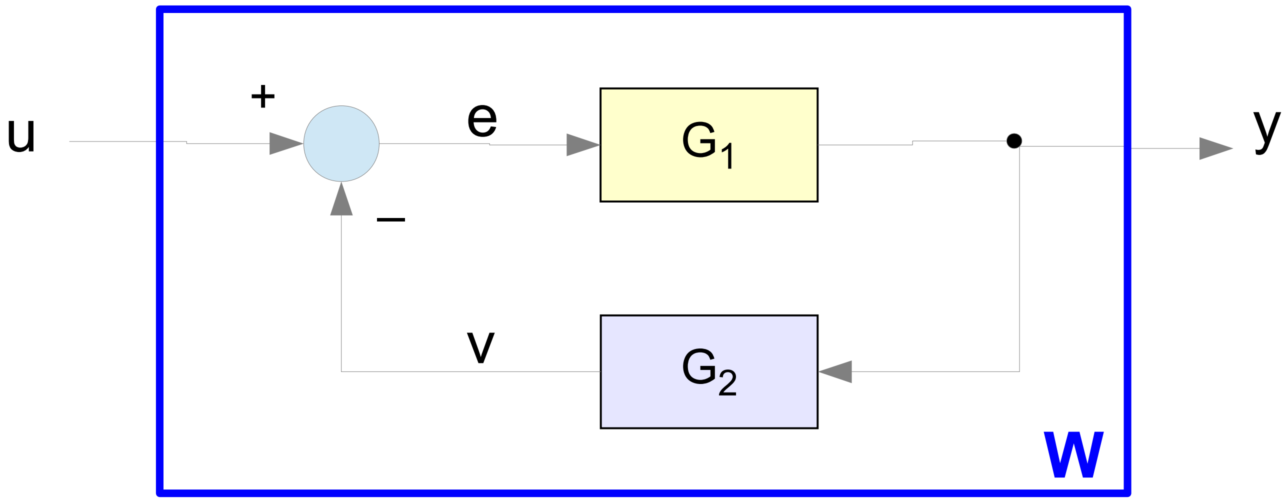


$$Y(s)=G(s)U(s)$$

$$G(s)=G_1(s)+G_2(s)=\frac{N_1(s)}{D_1(s)}+\frac{N_2(s)}{D_2(s)}=\frac{N_1(s)D_2(s)+N_2(s)D_1(s)}{D_1(s)D_2(s)}$$

$$N_G(s)=N_1(s)D_2(s)+N_2(s)D_1(s)=R(s)+Q(s)$$

Combinazione lineare di due polinomi



$$Y(s)=W(s)U(s)$$

$$W(s)=\frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}=\frac{\dfrac{N_1(s)}{D_1(s)}}{1+\dfrac{N_1(s)}{D_1(s)}\dfrac{N_2(s)}{D_2(s)}}=\frac{N_1(s)D_2(s)}{D_1(s)D_2(s)+N_1(s)N_2(s)}$$

$$D_W(s)=D_1(s)D_2(s)+N_1(s)N_2(s)=R(s)+Q(s)$$

Radici di un polinomio al variare di un parametro

I polinomi costituenti possono avere un coefficiente moltiplicativo fattorizzante i polinomi

$$P(s) = R(s) + k\,Q(s)$$

Con riferimento alla analisi dei sistemi dinamici, la ricerca delle radici di un polinomio combinazione lineare di due polinomi con radici note è un problema che si presenta nella individuazione di:

- Zeri di due sistemi noti in parallelo
- Poli di due sistemi a ciclo chiuso

Radici di un polinomio al variare di un parametro

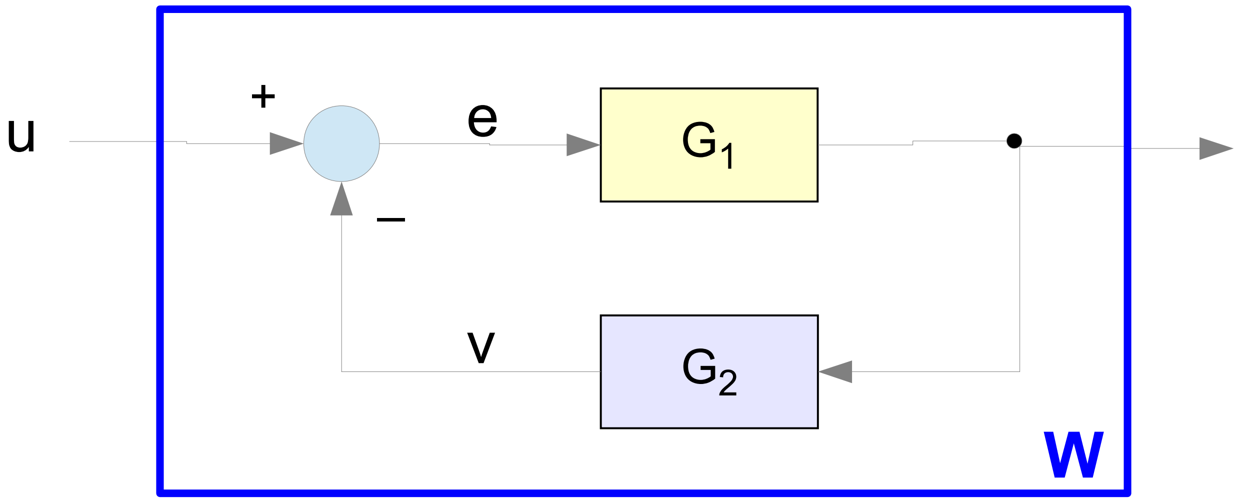
I polinomi costituenti possono avere un coefficiente moltiplicativo fattorizzante i polinomi

$$P(s) = R(s) + k\,Q(s)$$

L'insieme dei punti del piano complesso che rappresentano le radici del polinomio $P(s)$ al variare del coefficiente k della combinazione lineare definisce un luogo geometrico:

Il luogo delle radici del polinomio $P(s)$

Radici di un polinomio al variare di un parametro



$$Y(s)=W(s)U(s)$$

$$W(s)=\frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}=\frac{\frac{N_1(s)}{D_1(s)}}{1+F(s)}=\frac{N_1(s)D_2(s)}{D_F(s)+N_F(s)}=\frac{N_W(s)}{D_F(s)+N_F(s)}$$

$$F(s)=k'\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}=k'\frac{N_F(s)}{D_F(s)}$$

$$D_W(s)=D_F(s)+k'N_F(s)$$

Radici di un polinomio al variare di un parametro

$$D_W(s) = D_F(s) + k'N_F(s) = \prod_{i=1}^{n}(s - p_i) + k'\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)$$

L'insieme dei punti del piano complesso che rappresentano le radici del polinomio $D_W(s)$ al variare del coefficiente reale k' della combinazione lineare definisce

Il luogo delle radici del polinomio caratteristico del sistema a ciclo chiuso

Luogo delle radici positivo: radici del polinomio $D_W(s)$ al variare del coefficiente reale $k' \geq 0$

Luogo delle radici negativo: radici del polinomio $D_W(s)$ al variare del coefficiente reale $k' \leq 0$

Tracciamento del luogo delle radici

Regola 1

Nell'ipotesi di sistema causale, il luogo delle radici del polinomio $D_W(s)$ al variare del coefficiente reale k' è costituito da n rami

$$ord\left\{D_W(s)\right\} = max\left\{n, m\right\} = n$$

Tracciamento del luogo delle radici

Regola 1

Nell'ipotesi di sistema causale, il luogo delle radici del polinomio $D_W(s)$ al variare del coefficiente reale k' è costituito da n rami

$$ord\left\{D_W(s)\right\} = max\left\{n, m\right\} = n$$

Regola 2

Nell'ipotesi di polinomi a coefficienti reali, il luogo delle radici del polinomio $D_W(s)$ al variare del coefficiente reale k' è simmetrico rispetto all'asse reale

$$D_W(\alpha + j\omega) = 0 \rightarrow D_W(\alpha - j\omega) = 0$$

Tracciamento del luogo delle radici

Regola 1

Nell'ipotesi di sistema causale, il luogo delle radici del polinomio $D_W(s)$ al variare del coefficiente reale k' è costituito da n rami

$$ord\left\{D_W(s)\right\}=max\left\{n,m\right\}=n$$

Regola 2

Nell'ipotesi di polinomi a coefficienti reali, il luogo delle radici del polinomio $D_W(s)$ al variare del coefficiente reale k' è simmetrico rispetto all'asse reale

$$D_W(\alpha+j\omega)=0\rightarrow D_W(\alpha-j\omega)=0$$

Tracciamento del luogo delle radici

Regola 3

I rami del luogo delle radici del polinomio $D_W(s)$ al variare del coefficiente reale k' partono, $k' = 0$, dai poli della funzione di trasferimento $F(s)$

$$\left[D_W(s)\right]_{k'=0} = \left[D_F(s) + k' N_F(s)\right]_{k'=0} = D_F(s) = \prod_{i=1}^{n}\left(s - p_i\right)$$

Tracciamento del luogo delle radici

Poiché la variabile s assume valori in campo complesso ed i polinomi $D_F(s)$ e $N_F(s)$ non hanno radici in comune, l'equazione

$$D_W(s) = D_F(s) + k' N_F(s) = 0$$

è equivalente all'equazione in campo complesso

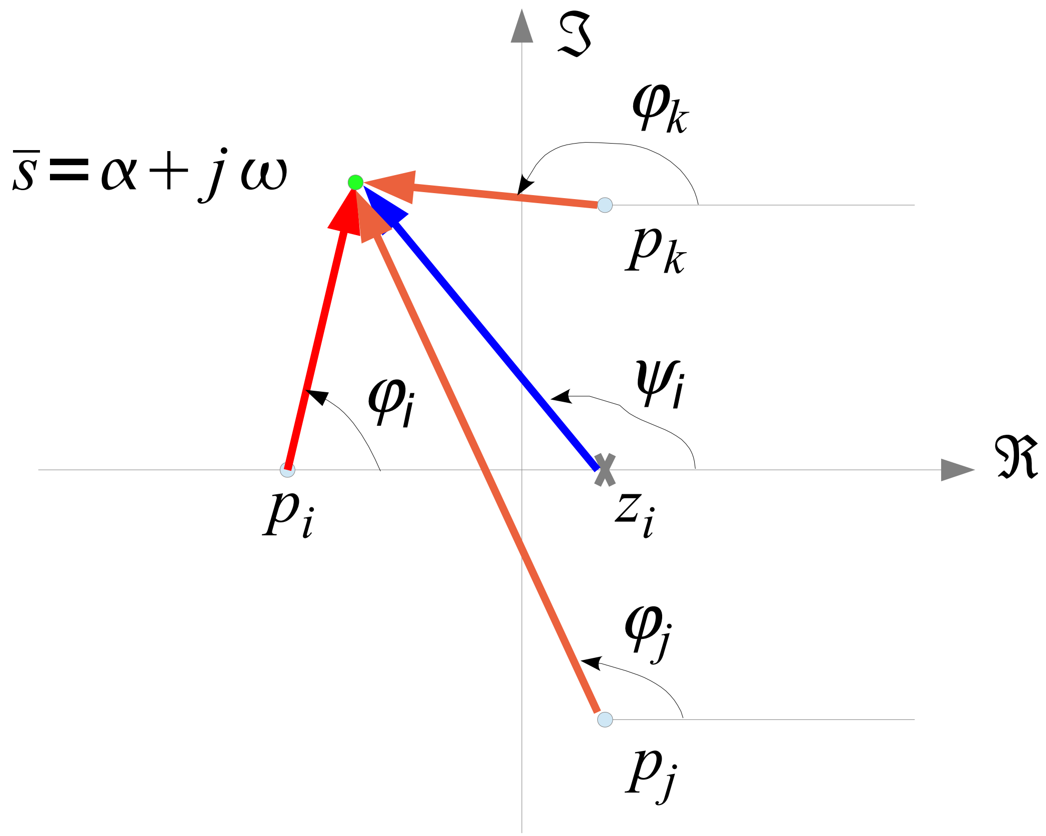
$$k' \frac{N_F(s)}{D_F(s)} = -1$$

che viene suddivisa in due equazioni algebriche

$$arg\{k'\} + \sum_{i=1}^{m} arg\{s - z_i\} - \sum_{i=1}^{n} arg\{s - p_i\} = (2\mathrm{h}+1)\pi; \qquad h = 0, 1, \ldots$$ condizione di fase

$$|k'| \frac{\prod_{i=1}^{m} |s - z_i|}{\prod_{i=1}^{n} |s - p_i|} = 1$$ condizione di modulo

Tracciamento del luogo delle radici

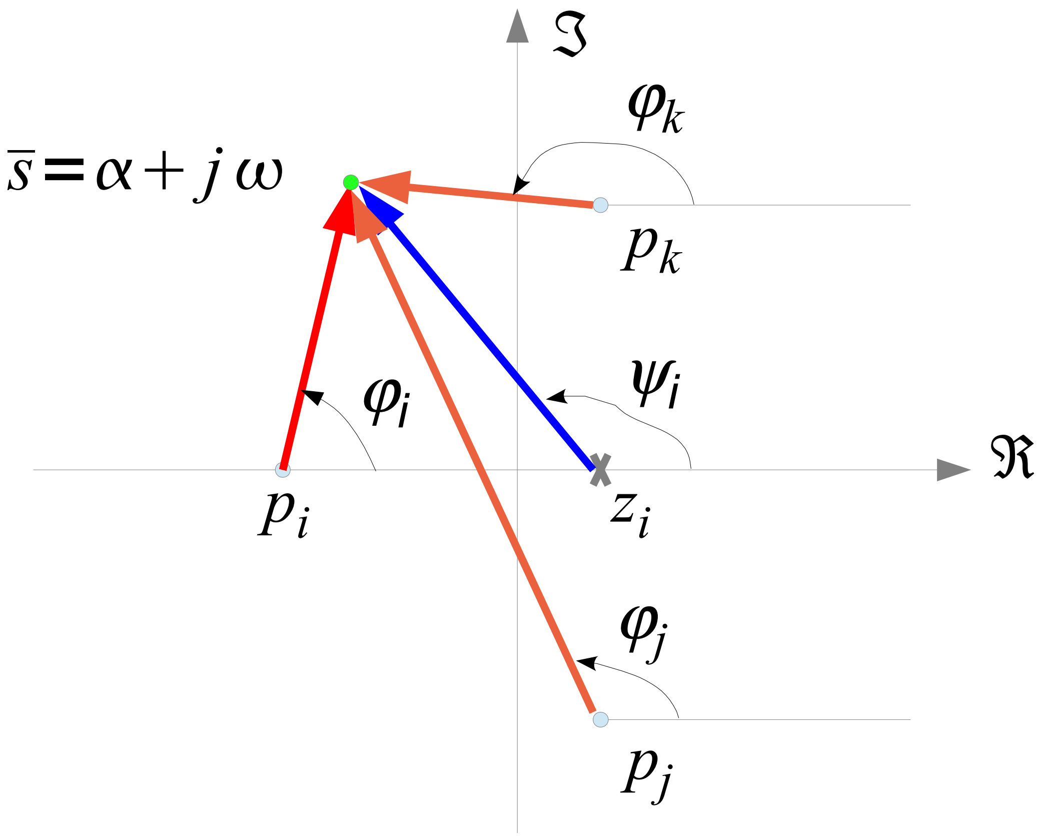


Il punto $\bar{s}$ del piano complesso appartiene al luogo se soddisfa la condizione di fase

$$\sum_{i=1}^{m} \psi_i - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = \begin{cases} (2h+1)\pi; & k' \geq 0 \\ 2h\pi; & k' \leq 0 \end{cases} \qquad (h = 0, 1, \ldots)$$

La condizione di fase permette di tracciare il luogo partendo dai poli della funzione di trasferimento a ciclo aperto

Tracciamento del luogo delle radici



Il punto $\bar{s}$ del piano complesso appartiene al luogo se soddisfa la condizione di fase

La condizione di modulo permette di tarare il luogo

$$\left|k'\right|_{s=\bar{s}} = \frac{\prod_{i=1}^{n} \left|\bar{s} - p_i\right|}{\prod_{i=1}^{m} \left|\bar{s} - z_i\right|}$$

Regola 4

I rami del luogo delle radici del polinomio $D_W(s)$ al variare del coefficiente reale k' tendono verso gli zeri della funzione di trasferimento $F(s)$ per $k' \to \infty$, e verso $(n\text{-}m)$ punti impropri all'infinito

$$\lim_{k'\to\infty}\left[D_W(s)=0\right] \to \lim_{k'\to\infty}\left[D_F(s)+k'N_F(s)=0\right] \to$$

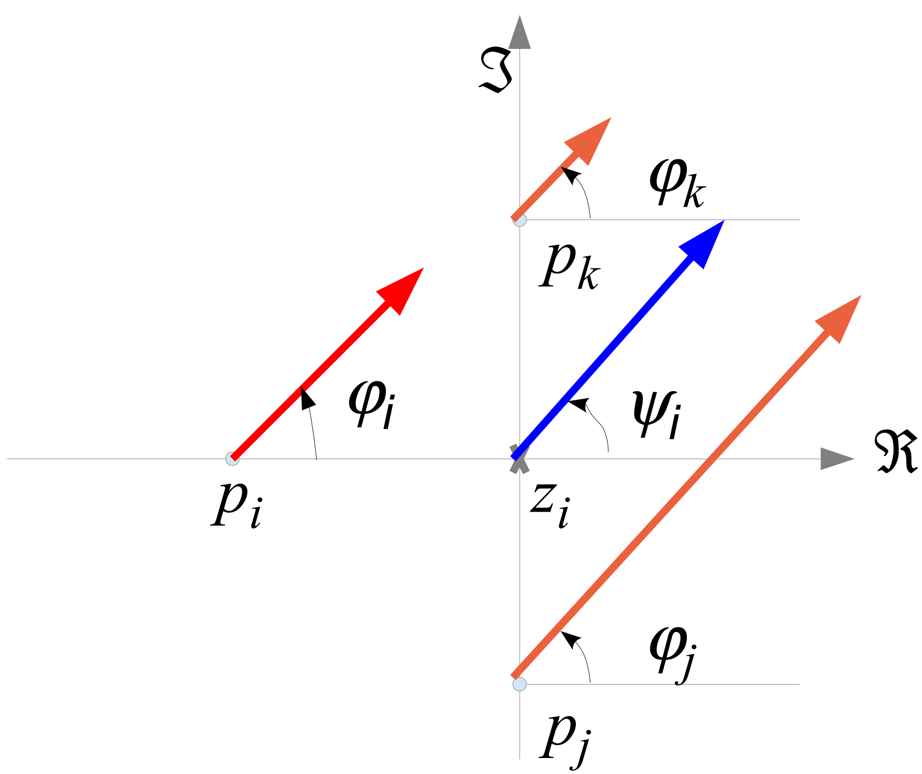
$$\to \left[N_F(s)=0\right] \to \left[\prod_{i=1}^{m}\left(s-z_i\right)=0\right]$$

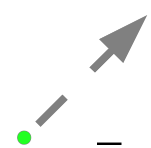
Tracciamento del luogo delle radici

Regola 5a

Le direzioni asintotiche a cui tendono i punti impropri del luogo delle radici sono

$$\varphi_{s_h} = \begin{cases} \dfrac{(2h+1)\pi}{n-m}; & k' \geq 0 \\[2ex] \dfrac{2h\pi}{n-m}; & k' \leq 0 \end{cases} \qquad (h = 0, 1, \ldots, n-m-1)$$





$$\bar{s} = \alpha + j\omega \to \infty$$

$$\varphi_i = \psi_j = \varphi_s \qquad \forall\, i,\, j$$

$$\Downarrow$$

$$(m-n)\,\varphi_s = -arg\{k'\} + (2h+1)\pi$$

Tracciamento del luogo delle radici

Regola 5b

Gli asintoti a cui tendono i punti impropri del luogo delle radici si intersecano in un punto dell'asse reale

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m}$$

Tracciamento del luogo delle radici

Regola 5b

Gli asintoti a cui tendono i punti impropri del luogo delle radici si intersecano in un punto dell'asse reale

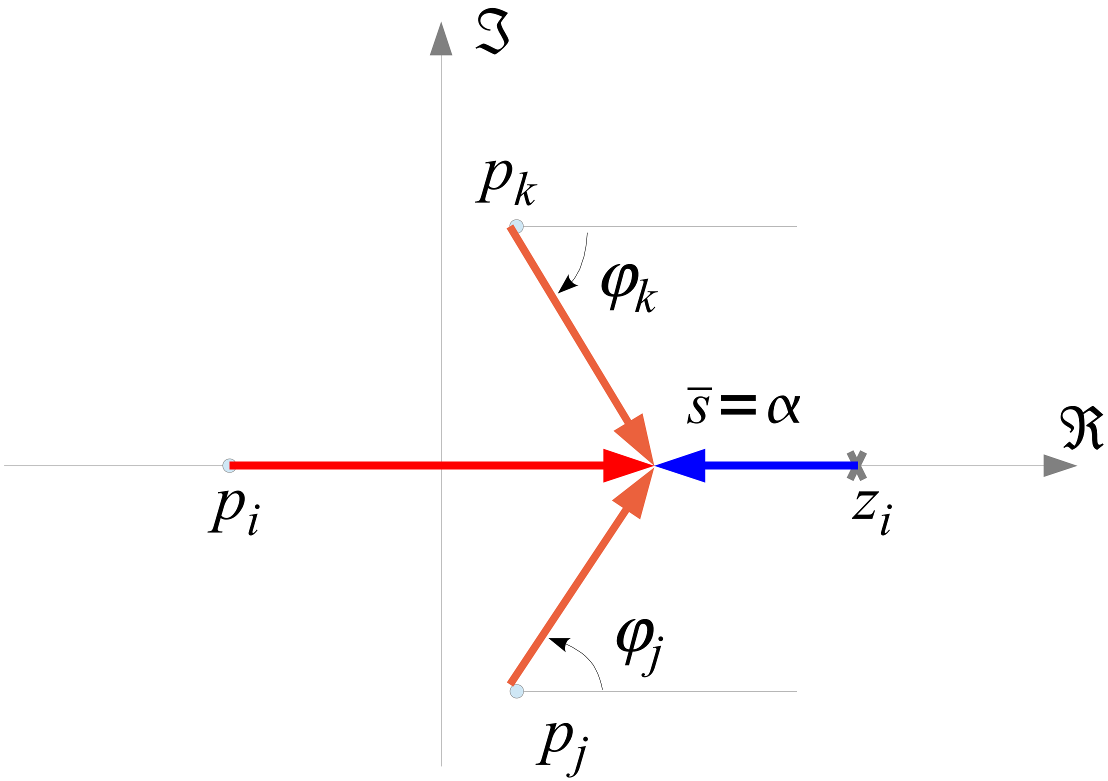
$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m}$$

Regola 6

Appartengono al luogo delle radici positivo tutti i punti dell'asse reale che lasciano alla loro destra un numero dispari di poli e zeri, contati con la loro molteplicità.

Appartengono al luogo delle radici negativo tutti i punti dell'asse reale che lasciano alla loro destra un numero pari di poli e zeri, contati con la loro molteplicità.

Tracciamento del luogo delle radici



I poli e zeri reali danno un contributo di fase o nullo o di π.

Una coppia di poli o zeri complessi e coniugati dà un contributo complessivo o nullo o di 2π.

Tracciamento del luogo delle radici

Regola 7

I punti doppi del luogo delle radici, in cui si incontrano e si diramano almeno due rami del luogo sono soluzioni dell'equazione

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s-p_i} - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{s-z_i} = 0$$

Tracciamento del luogo delle radici

Regola 7

I punti doppi del luogo delle radici, in cui si incontrano e si diramano almeno due rami del luogo sono soluzioni dell'equazione

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s-p_i} - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{s-z_i} = 0$$

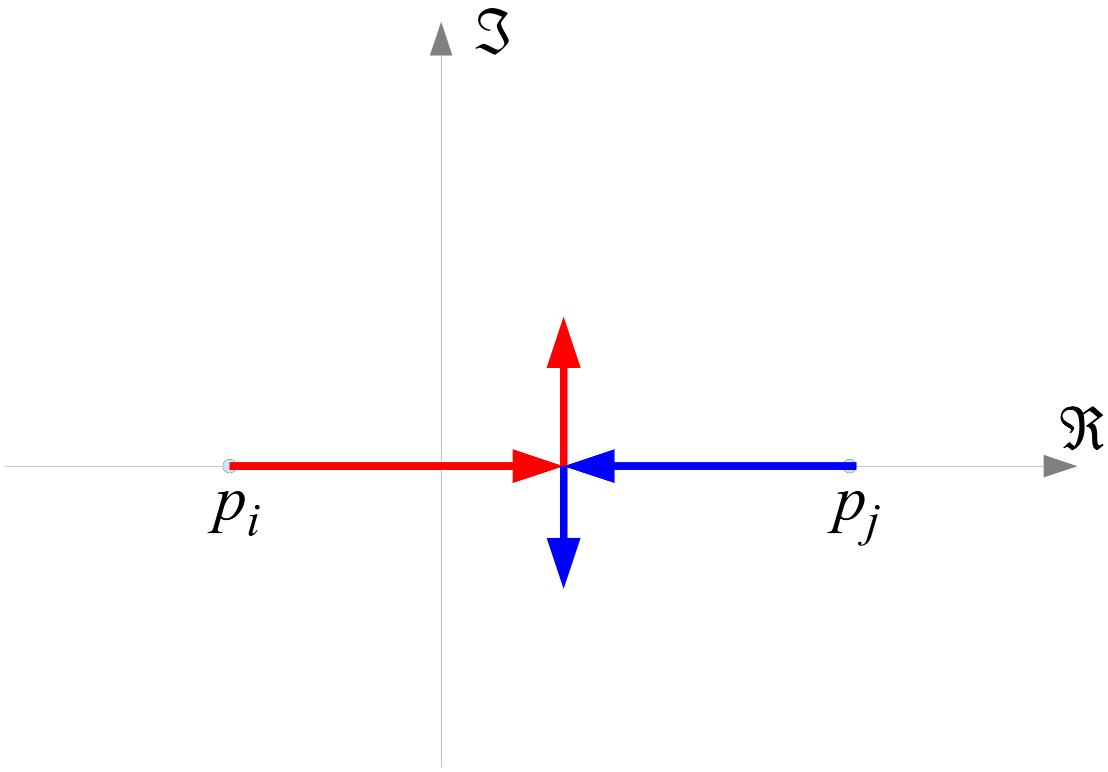
Corollario 7a

I rami del luogo sono alternativamente entranti ed uscenti da un punto doppio e formano una stella

Tracciamento del luogo delle radici

Corollario 7b

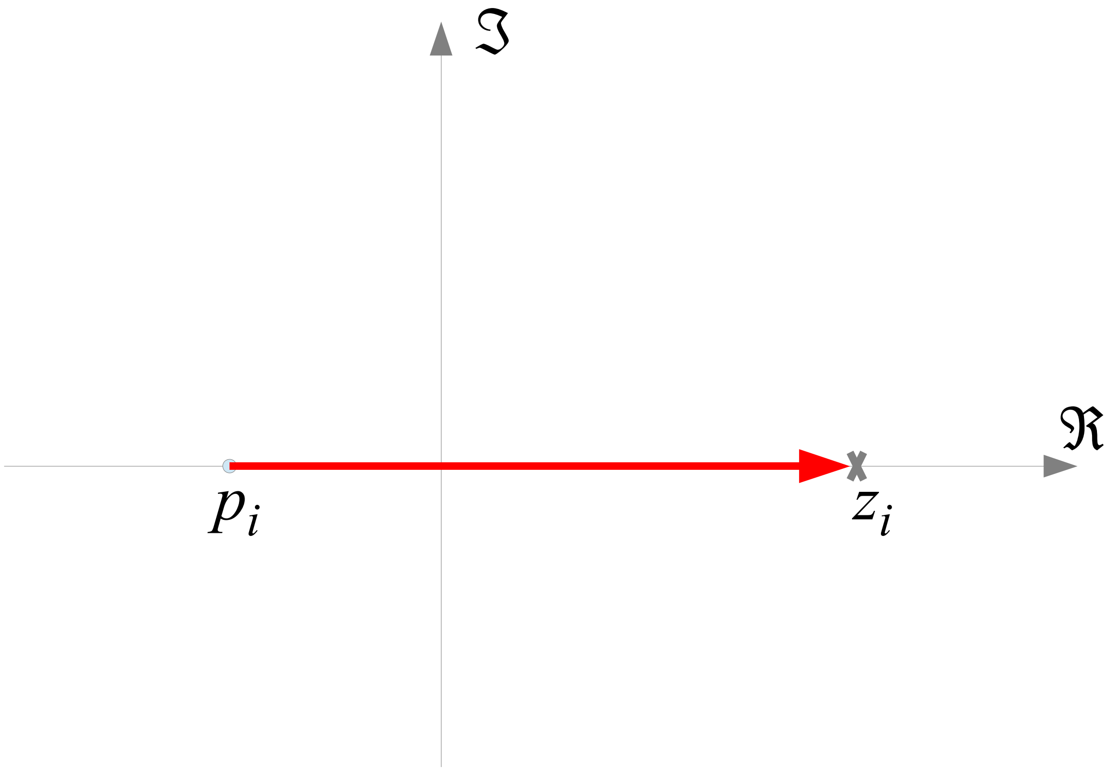
Se un segmento dell'asse reale compreso tra due zeri o due poli appartiene all'asse reale, allora conterrà anche un numero dispari di punti doppi



Tracciamento del luogo delle radici

Corollario 7c

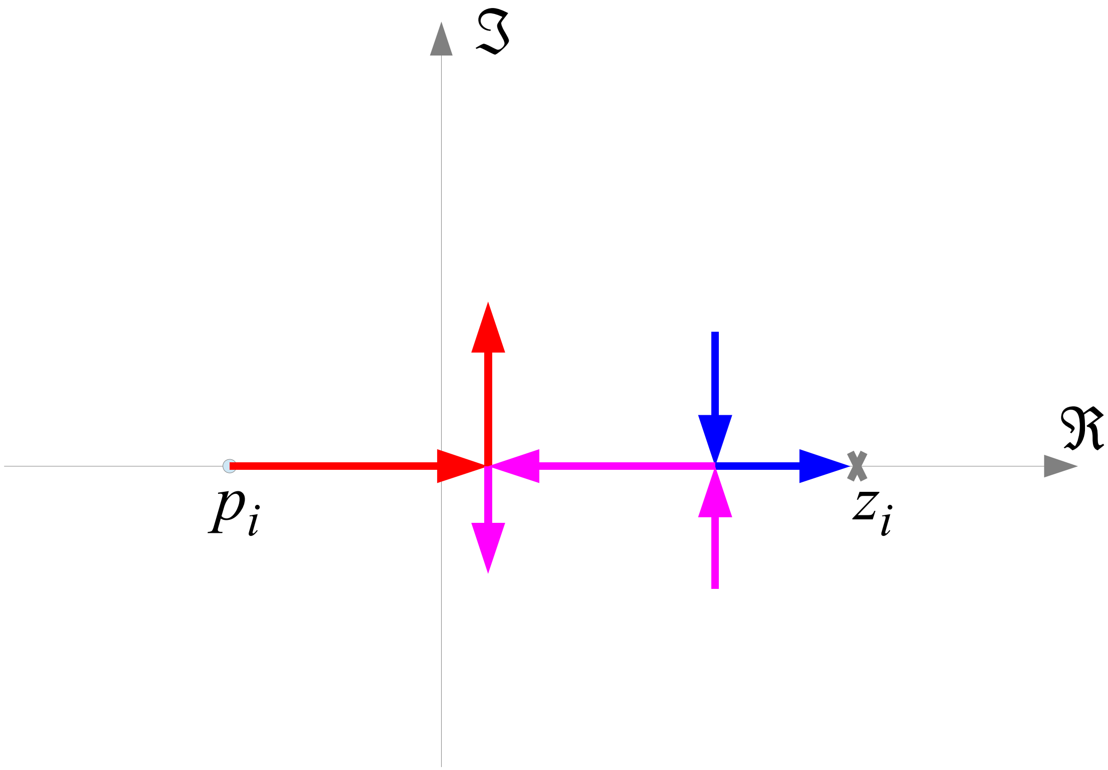
Se un segmento dell'asse reale compreso tra un polo ed uno zero appartiene all'asse reale, allora conterrà anche un numero pari, compreso lo zero, di punti doppi



Tracciamento del luogo delle radici

Corollario 7c

Se un segmento dell'asse reale compreso tra un polo ed uno zero appartiene all'asse reale, allora conterrà anche un numero pari, compreso lo zero, di punti doppi



Tracciamento del luogo delle radici

1. Posizionare i poli (con un cerchio) e gli zeri (con una croce) della funzione di trasferimento a ciclo aperto sul piano complesso
2. Evidenziare i punti dell'asse reale che appartengono al luogo utilizzando la Regola 6
3. Individuare il centro degli asintoti utilizzando la Regola 5b
4. Tracciare le direzioni asintotiche utilizzando la Regola 5a
5. Individuare i punti doppi utilizzando la Regola 7, eventualmente anche approssimativamente facendo ricorso ai corollari
6. Collegare in modo coerente i vari punti caratteristici rispettando la simmetria del luogo, Regola 2, e le direzioni di variazione del parametro k' sui rami, Regole 1, 3 e 4

Taratura del luogo delle radici

Una volta tracciato il luogo delle radici utilizzando la condizione di fase, è possibile procedere alla sua taratura

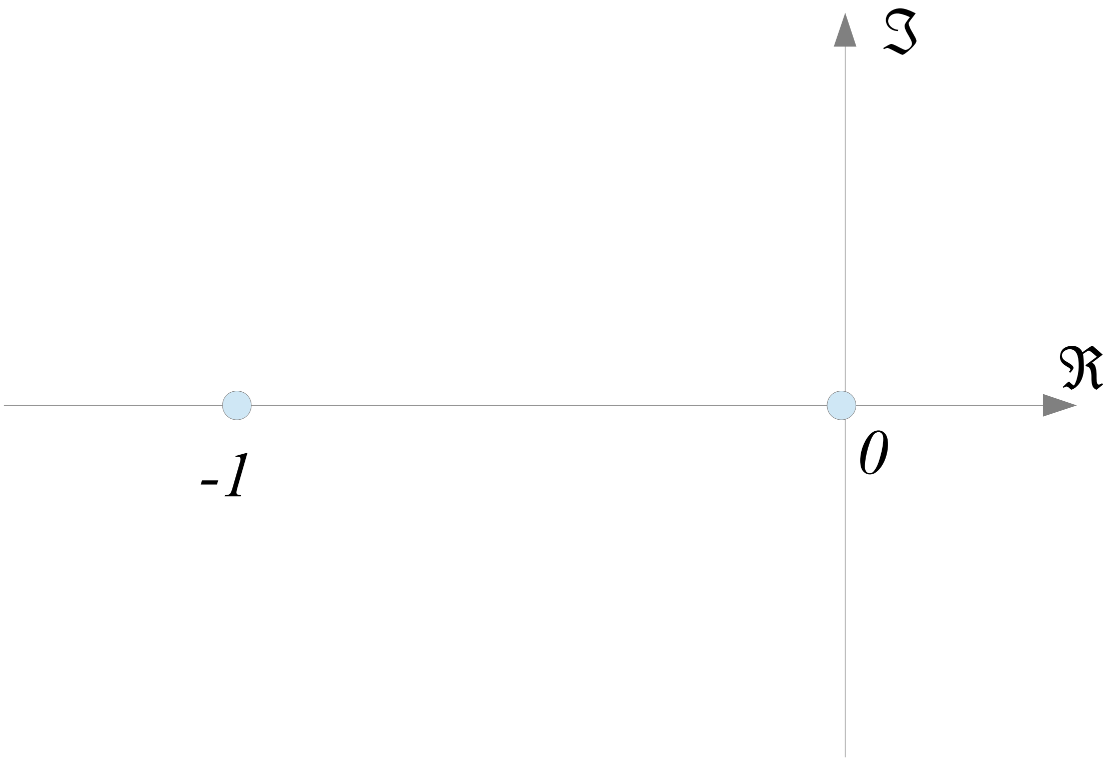
Attribuire ad ogni punto del luogo delle radici il corrispondente valore del parametro k' utilizzando la formula

$$\left|k'\right|_{s=\bar{s}} = \frac{\prod_{i=1}^{n} \left|\bar{s} - p_i\right|}{\prod_{i=1}^{m} \left|\bar{s} - z_i\right|}$$

Ad ogni valore del parametro k' corrispondono n punti del luogo delle radici, uno per ramo

Esempi di tracciamento

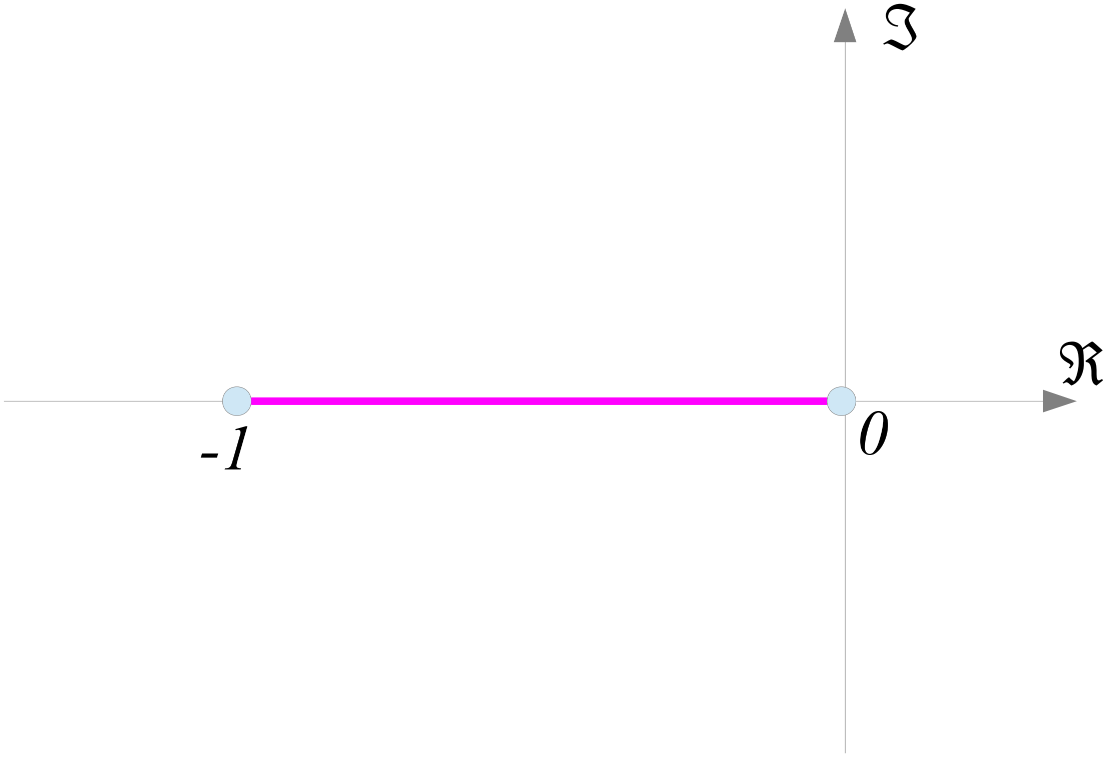
$$F(s) = k' \frac{1}{s(s+1)} \qquad k' \geq 0$$



Indicare i poli della $F(s)$

Esempi di tracciamento

$$F(s) = k' \frac{1}{s(s+1)} \qquad k' \geq 0$$



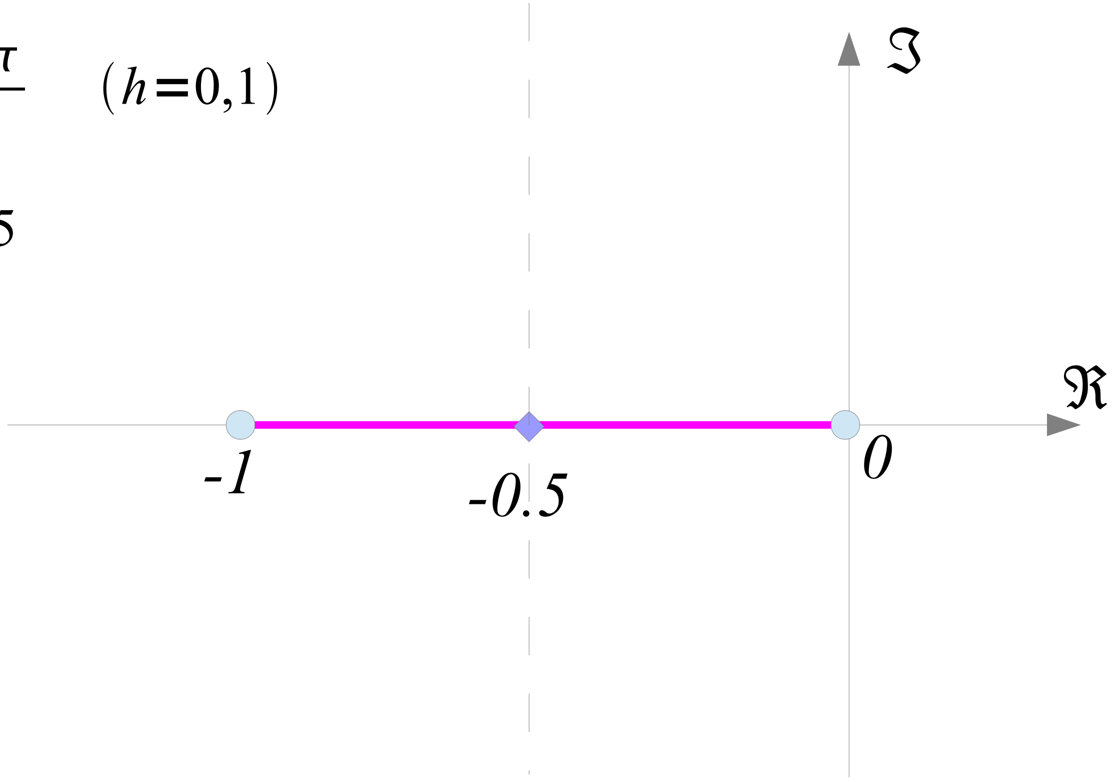
Evidenziare i punti dell'asse reale che appartengono al luogo

Esempi di tracciamento

$$F(s) = k' \frac{1}{s(s+1)} \qquad k' \geq 0$$

$$\varphi_{s_h} = \frac{(2h+1)\pi}{2} \qquad (h=0,1)$$

$$x_s = \frac{1+0}{2} = 0.5$$



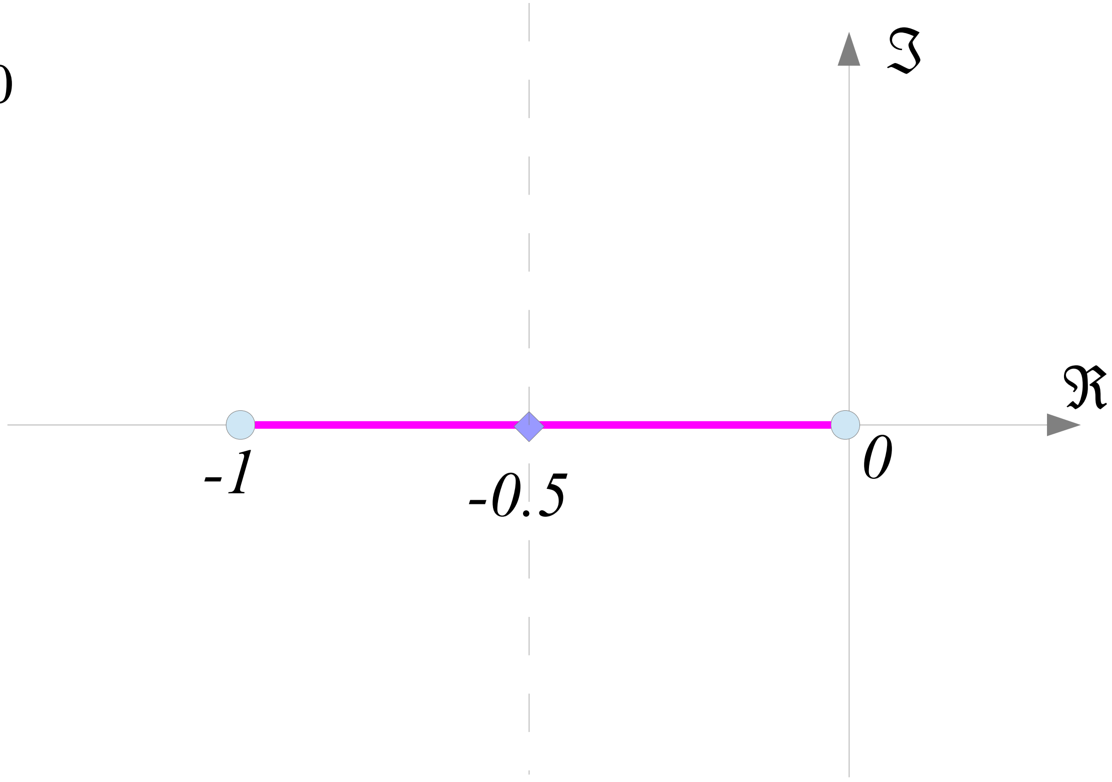
Tracciare gli asintoti del luogo delle radici

Esempi di tracciamento

$$F(s) = k' \frac{1}{s(s+1)} \qquad k' \geq 0$$

$$\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s} = 0$$

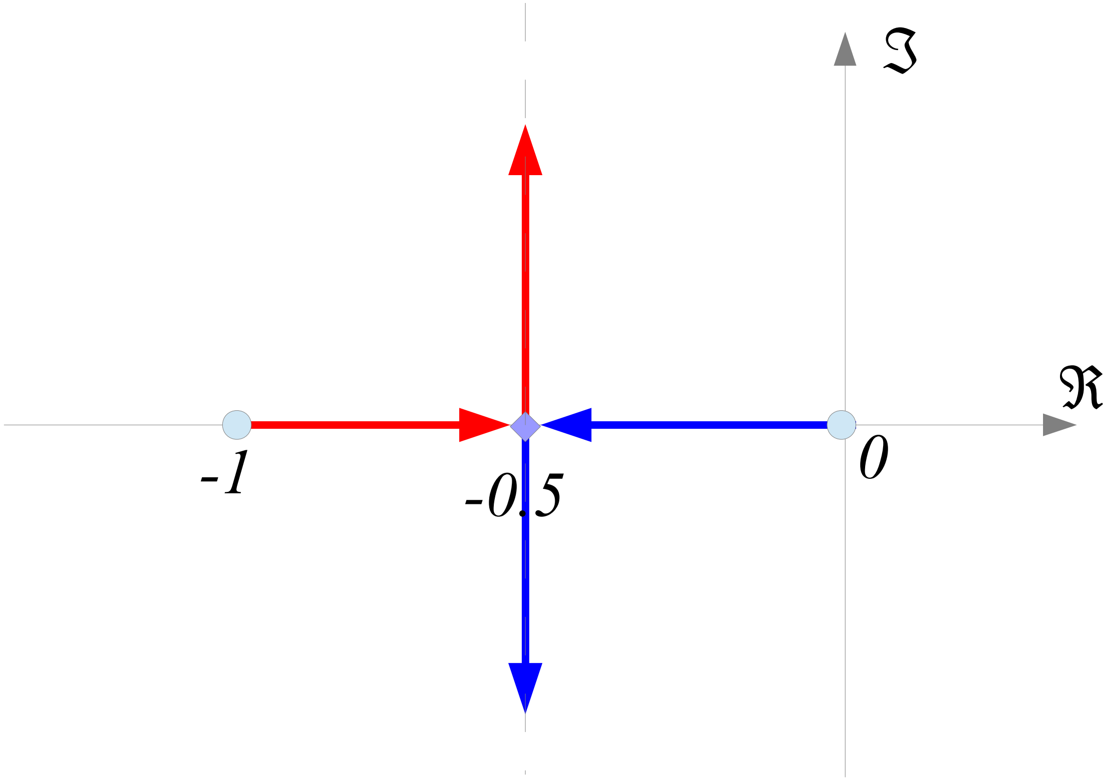
$$\frac{s+s+1}{s(s+1)} = 0$$



Evidenziare i punti doppi sull'asse reale ed appartenenti al luogo

Esempi di tracciamento

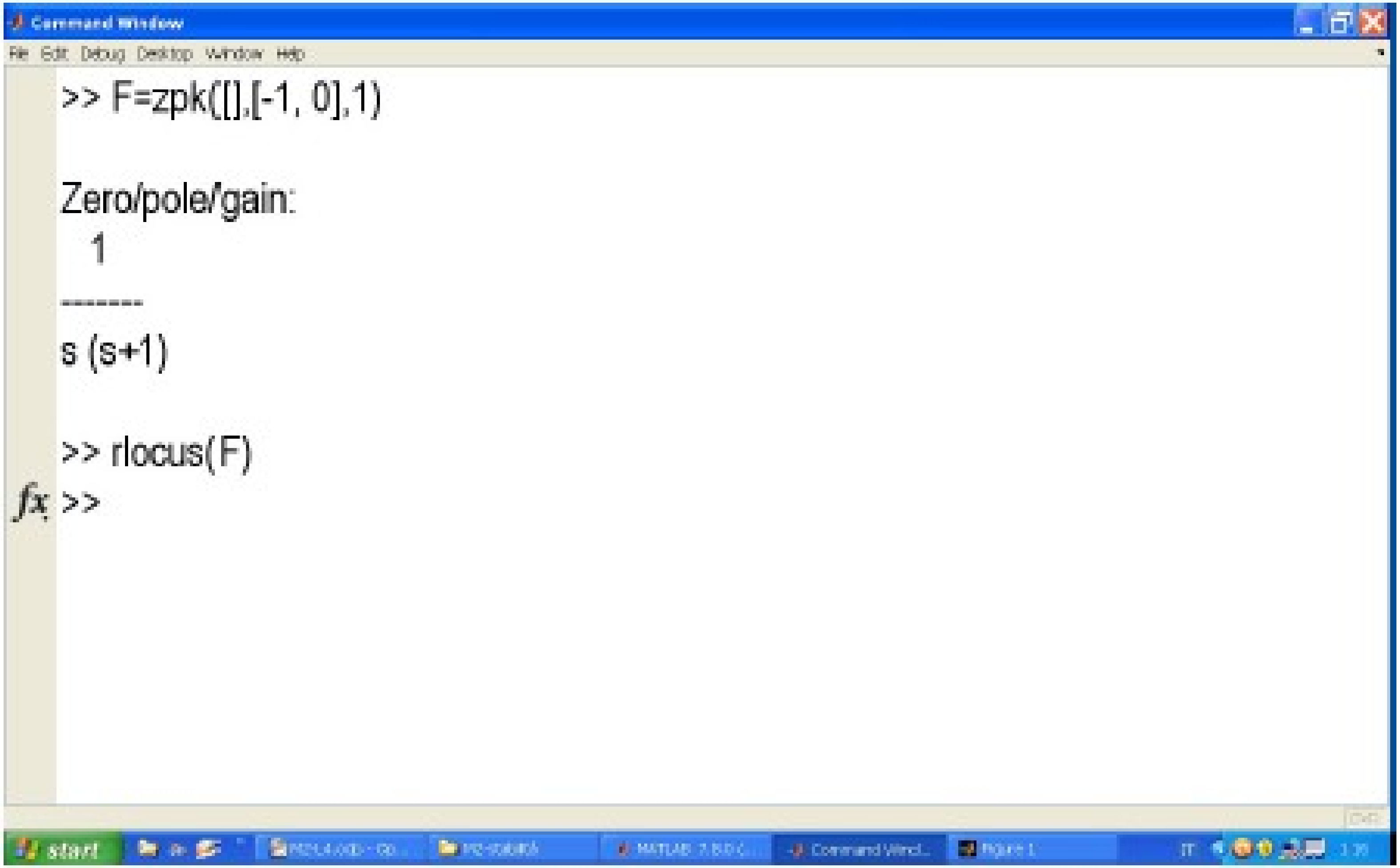
$$F(s) = k' \frac{1}{s(s+1)} \qquad k' \geq 0$$



Completare il tracciamento unendo i punti caratteristici, indicando con la freccia il senso dei valori crescenti per il parametro k'

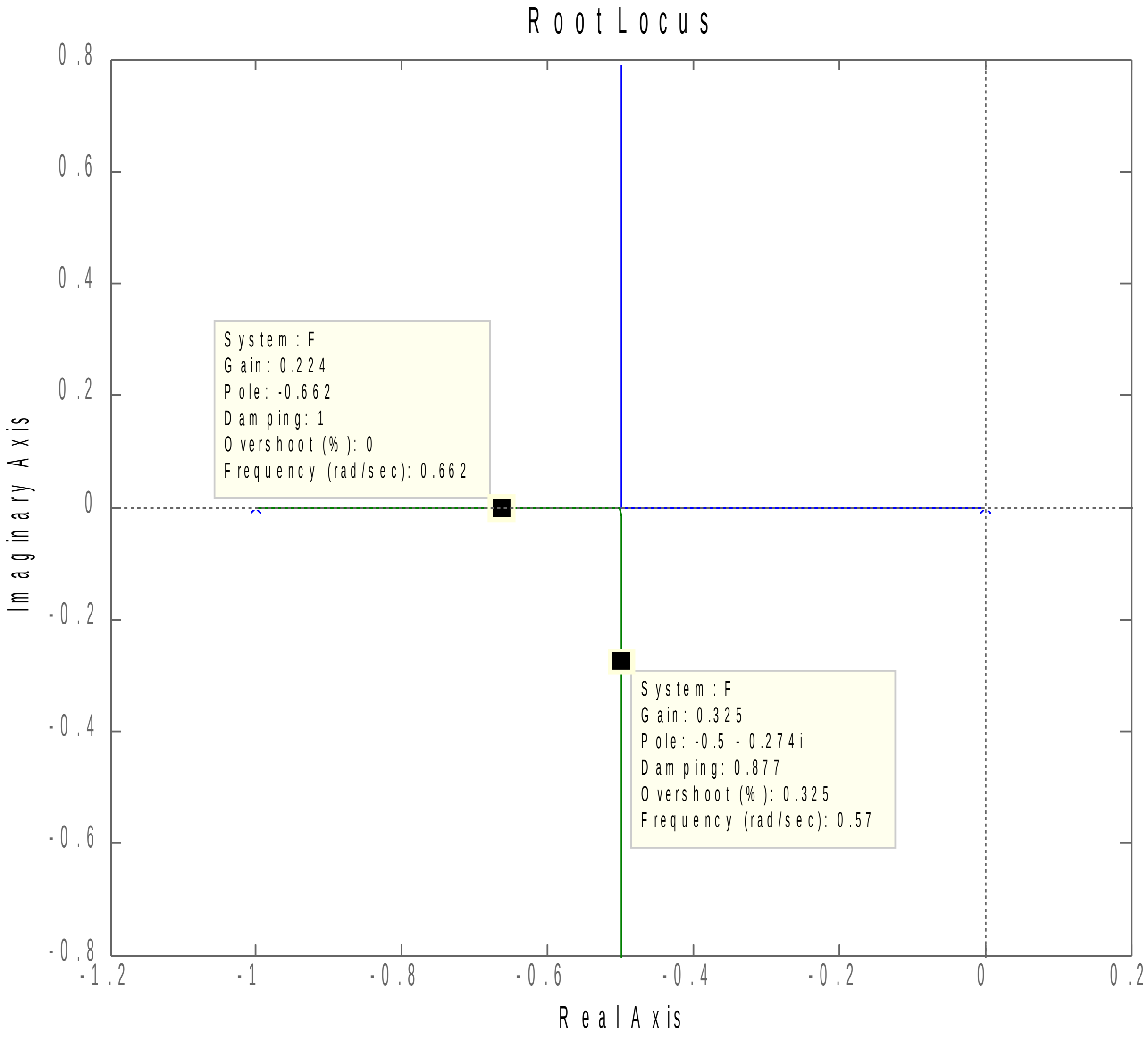
Esempi di tracciamento

$$F(s)=k'\frac{1}{s(s+1)} \qquad k'\geq 0$$



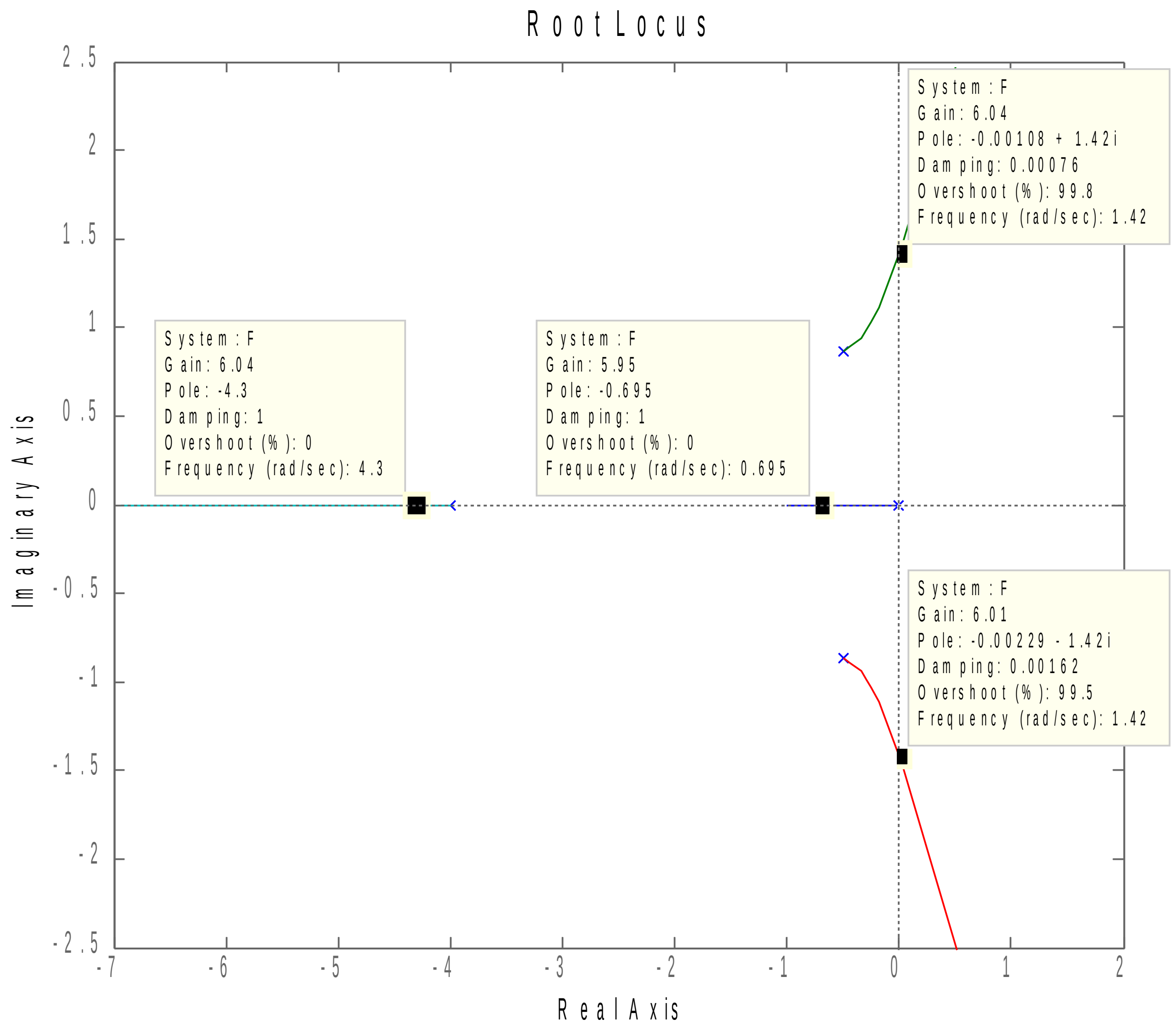
Esempi di tracciamento

$$F(s)=k'\frac{1}{s(s+1)} \qquad k'\geq 0$$



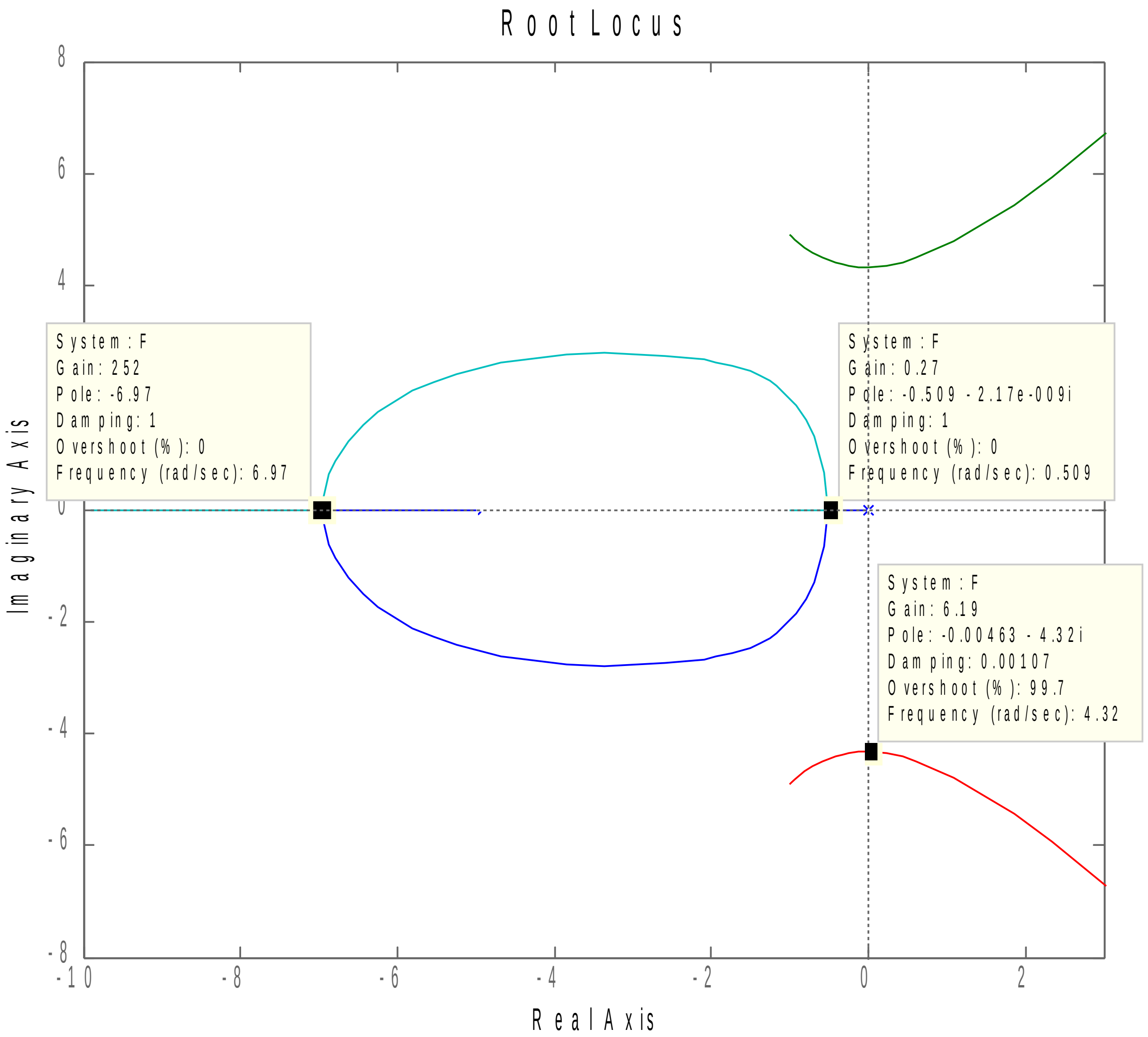
Esempi di tracciamento

$$F(s) = k' \frac{(s+1)}{s(s^2+s+1)(s+4)} \qquad k' \geq 0$$



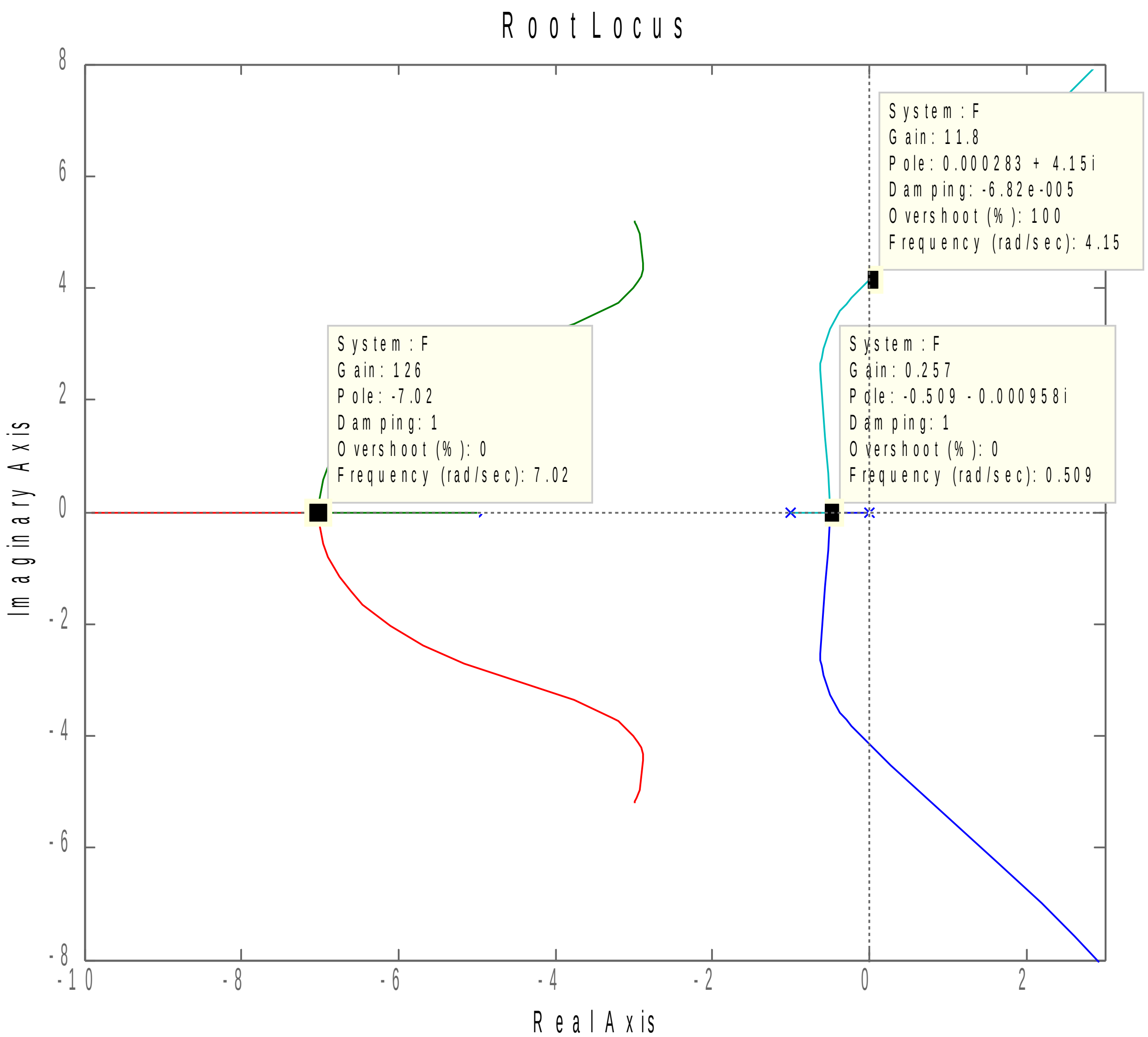
Esempi di tracciamento

$$F(s)=k'\frac{(0.2s+1)}{s(0.04s^2+0.08s+1)(s+1)} \qquad k'\geq 0$$



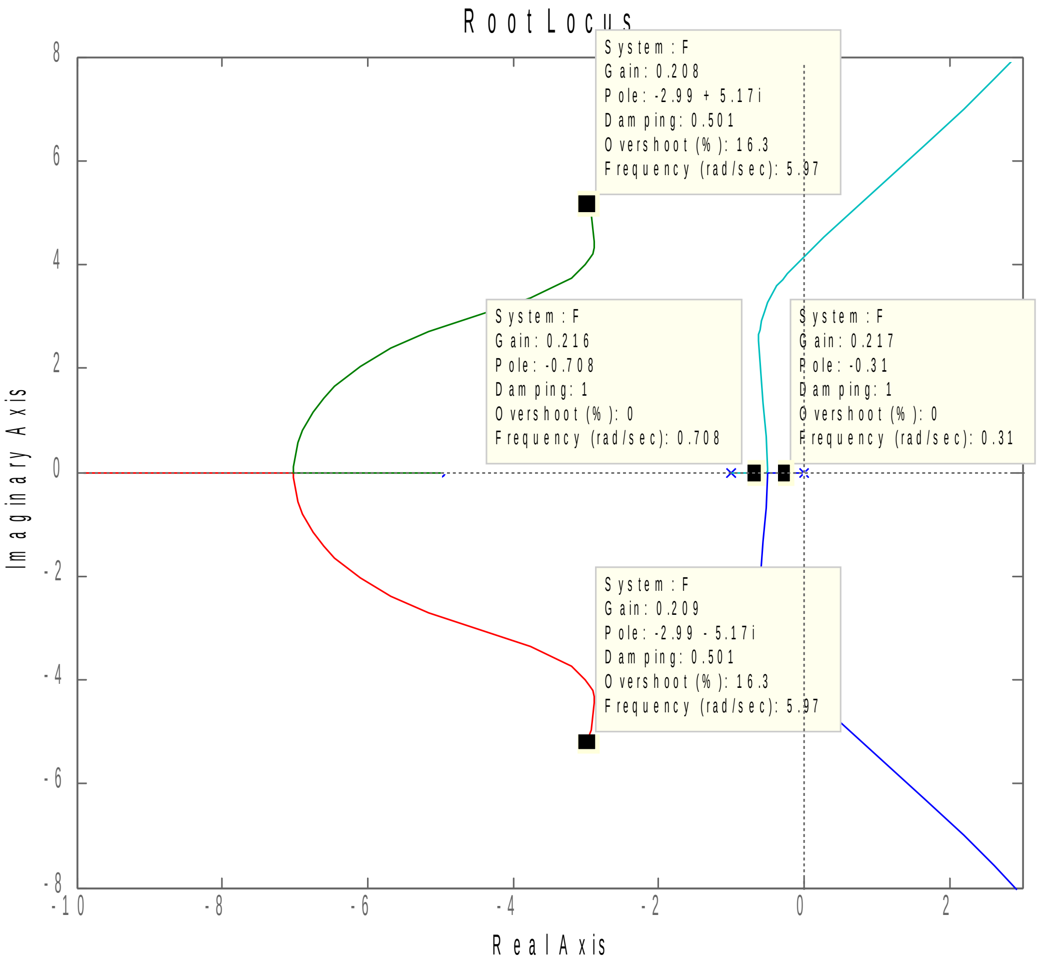
Esempi di tracciamento

$$F(s) = k' \frac{(0.2\,s+1)}{s\left(0.0278\,s^2+0.1667\,s+1\right)(s+1)} \qquad k' \geq 0$$



Caratterizzazione modale

$$F(s) = k' \frac{(0.2s+1)}{s\left(0.0278s^2+0.1667s+1\right)(s+1)} \qquad k' \geq 0$$



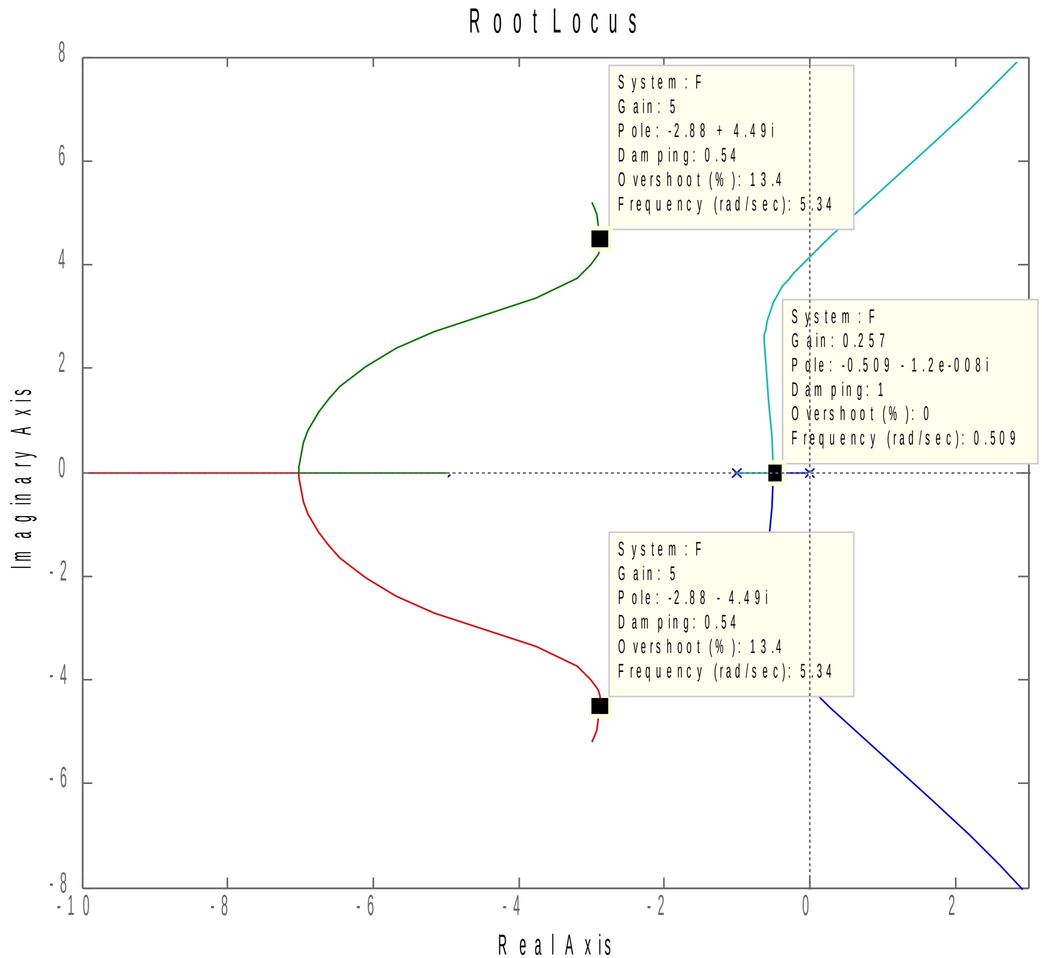
$$0 < k' < 0.257$$

2 modi aperiodici stabili

1 modo pseudoperiodico stabile

Caratterizzazione modale

$$F(s) = k' \frac{(0.2s+1)}{s(0.0278s^2+0.1667s+1)(s+1)} \qquad k' \geq 0$$



$$k' = 0.257$$

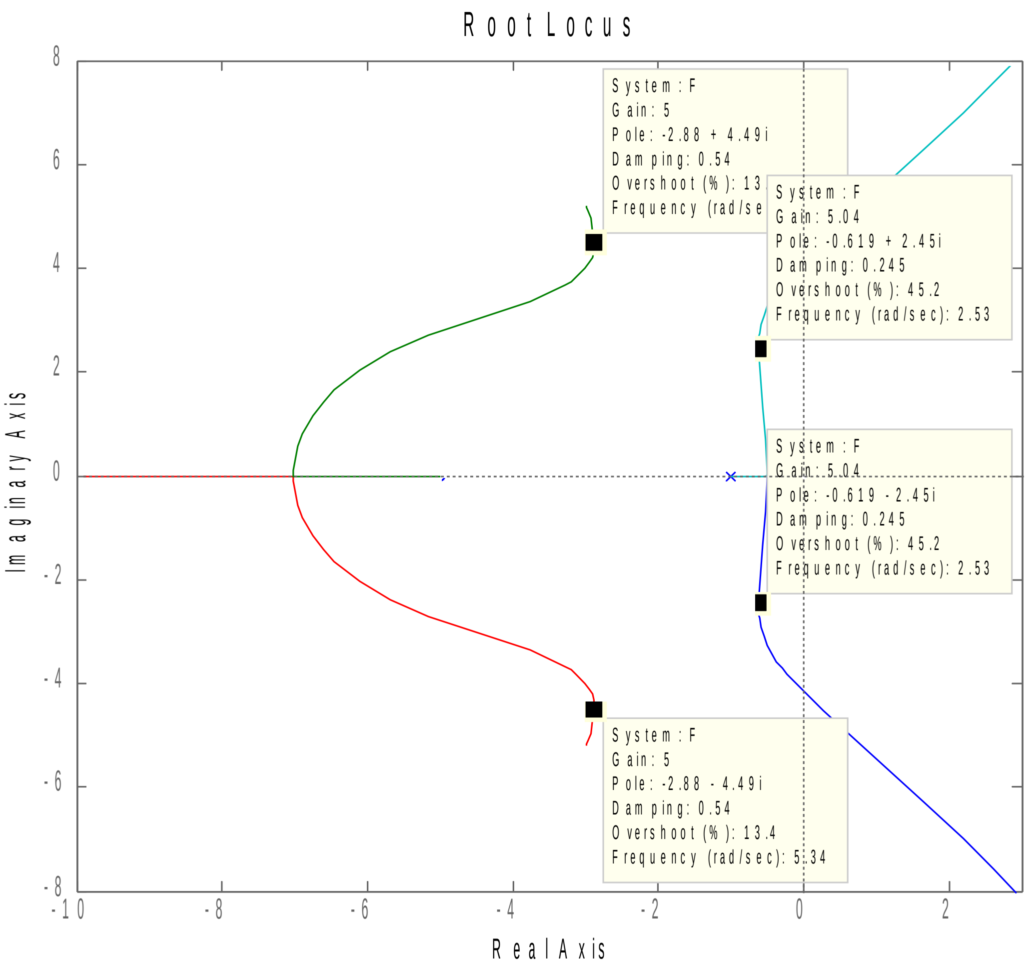
1 modo aperiodico stabile

1 modo cisoidale stabile

1 modo pseudoperiodico stabile

Caratterizzazione modale

$$F(s) = k' \frac{(0.2s+1)}{s(0.0278s^2+0.1667s+1)(s+1)} \qquad k' \geq 0$$

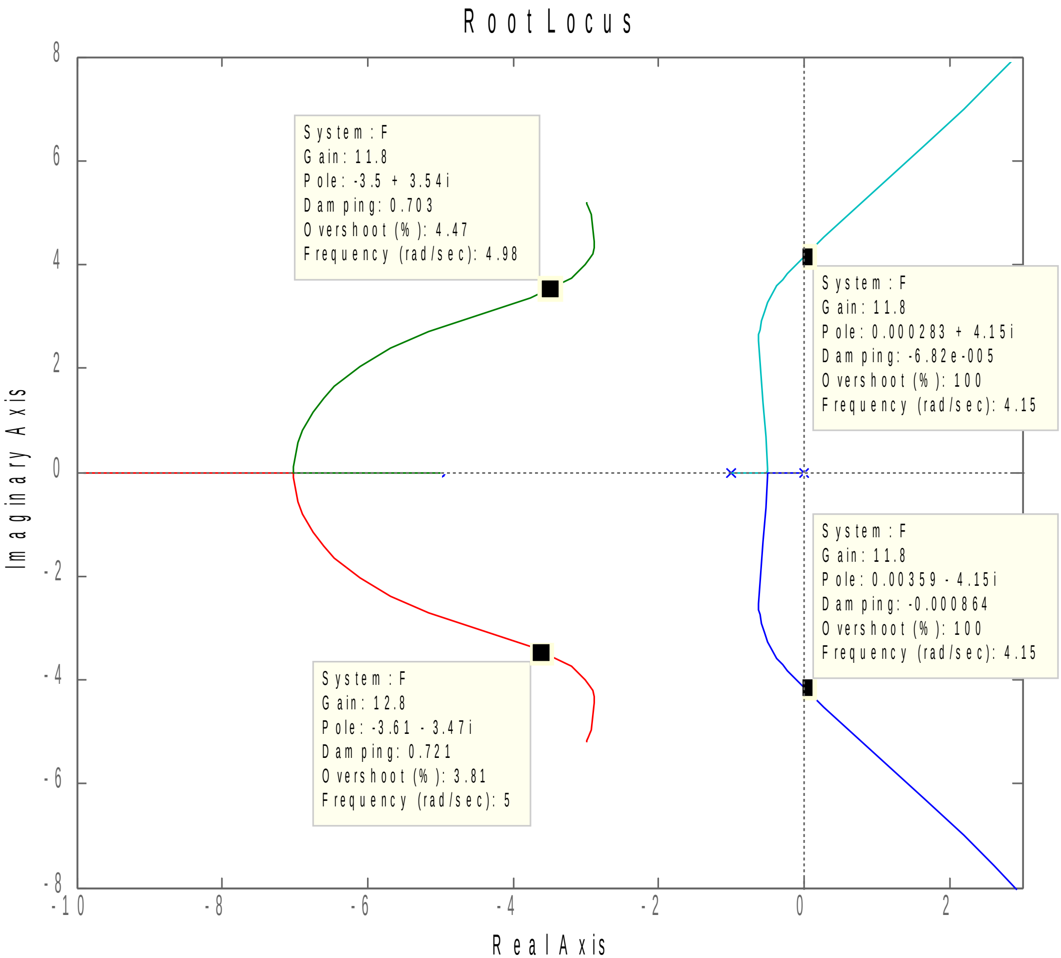


$$0.257 < k' < 11.8$$

2 modi pseudoperiodici stabili

Caratterizzazione modale

$$F(s) = k' \frac{(0.2s+1)}{s(0.0278s^2+0.1667s+1)(s+1)} \qquad k' \geq 0$$



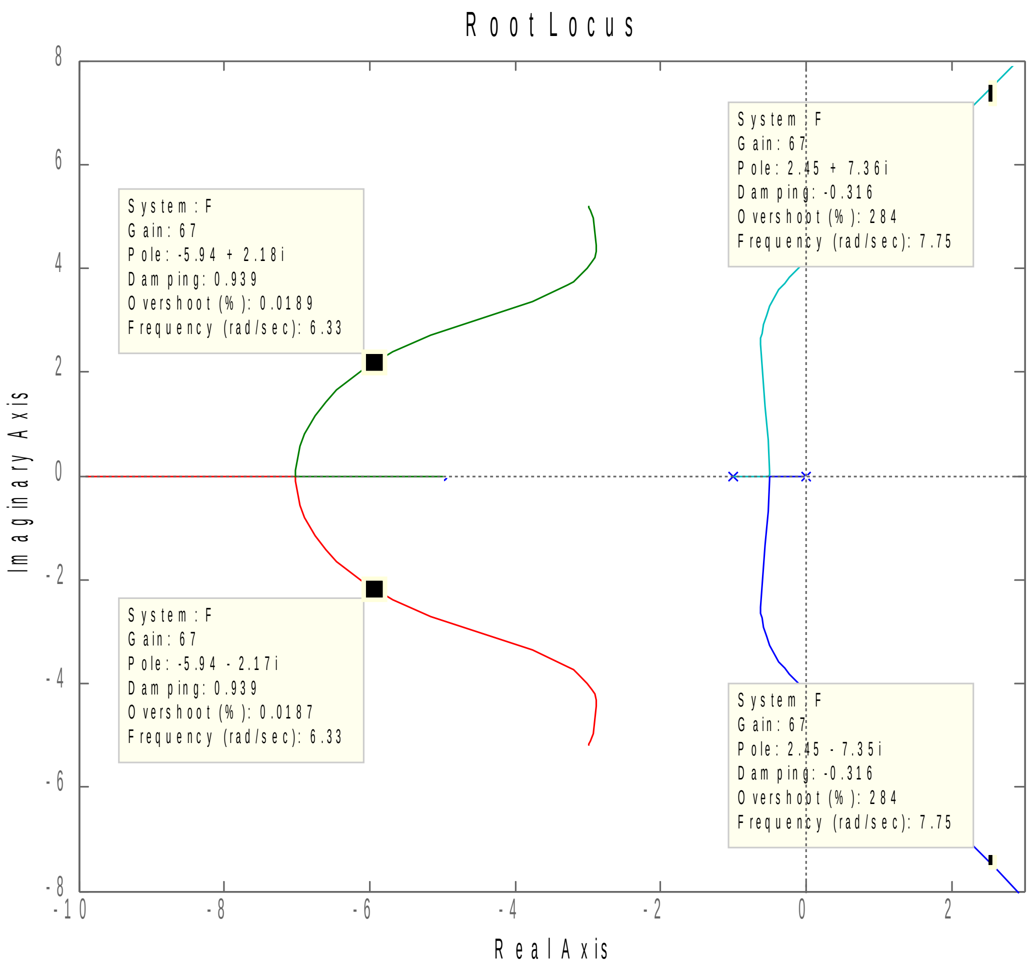
$$k' = 11.8$$

1 modo periodico

1 modo pseudoperiodico stabile

Caratterizzazione modale

$$F(s)=k'\frac{(0.2s+1)}{s\left(0.0278s^2+0.1667s+1\right)(s+1)} \qquad k'\geq 0$$



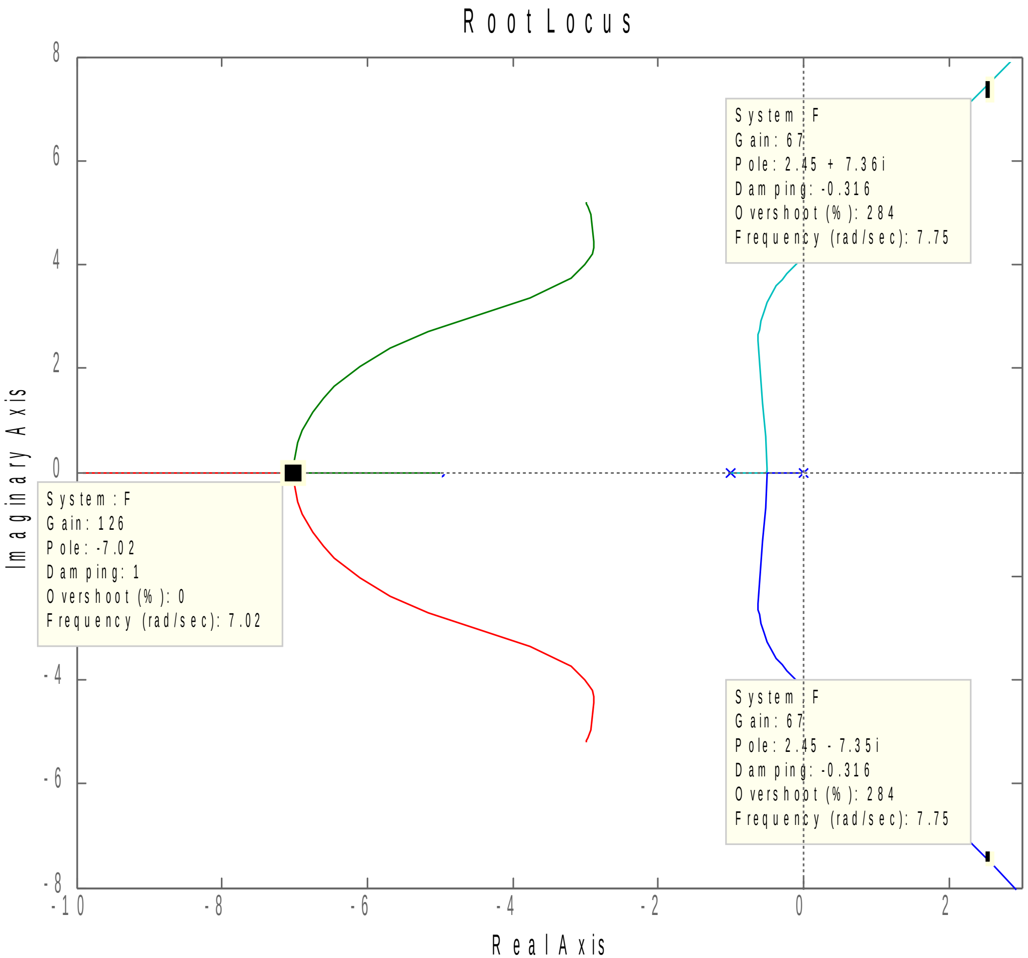
$$11.8 < k' < 126$$

1 modo pseudoperiodico instabile

1 modo pseudoperiodico stabile

Caratterizzazione modale

$$F(s) = k' \frac{(0.2s+1)}{s(0.0278s^2+0.1667s+1)(s+1)} \qquad k' \geq 0$$



$$k' = 126$$

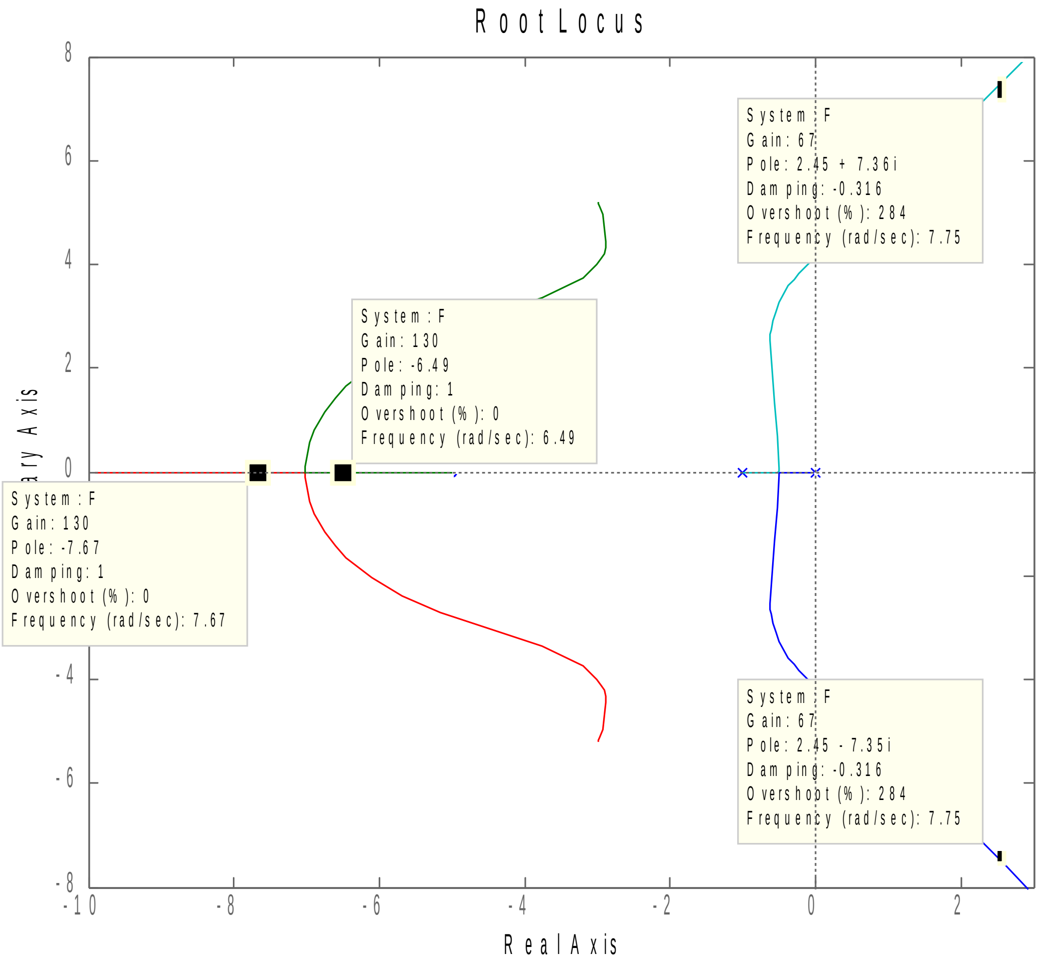
1 modo pseudoperiodico instabile

1 modo aperiodico stabile

1 modo cisoidale stabile

Caratterizzazione modale

$$F(s) = k' \frac{(0.2s+1)}{s(0.0278s^2+0.1667s+1)(s+1)} \qquad k' \geq 0$$



$$k' > 126$$

1 modo pseudoperiodico instabile

2 modi aperiodici stabili

Conclusioni

- Il luogo delle radici è uno strumento grafico che permette di valutare le radici di un polinomio costituito dalla somma pesata di due polinomi con radici note mediante un parametro variabile

- L'utilizzo del luogo delle radici sulla base dei poli e zeri della funzione di trasferimento a ciclo aperto consente di valutare i poli del sistema a ciclo chiuso

- Effettuando la taratura del luogo delle radici è possibile valutare il guadagno critico del sistema, ed in generale il suo campo di variabilità che garantisce la stabilità del sistema a ciclo chiuso

- Dalla conoscenza dei poli a ciclo chiuso si possono valutare le sue caratteristiche modali