Criterio di Nyquist

- Variazione di fase di un polinomio
- Variazione di fase di un rapporto di polinomi
- Criterio di Nyquist
- Esempi di applicazione del Criterio di Nyquist
- Conclusioni

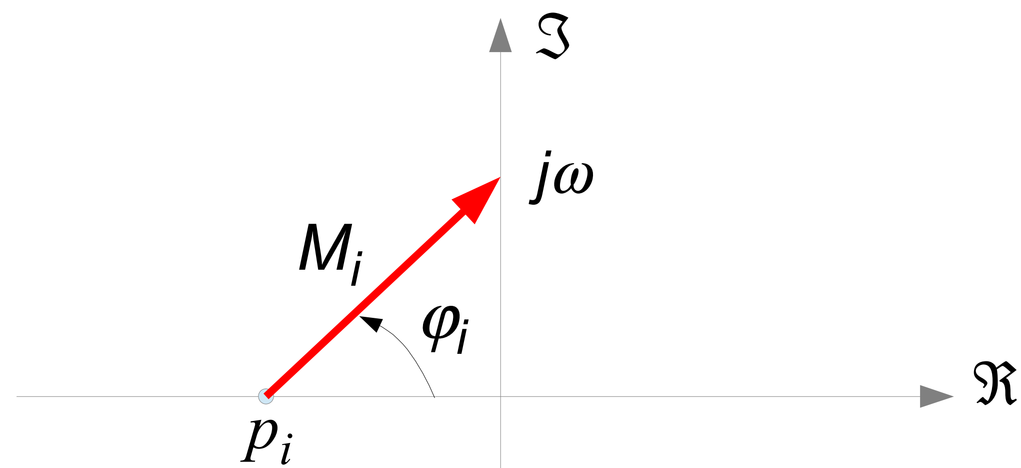
Variazione di fase di un polinomio

Si consideri un polinomio nella variabile complessa s,valutata lungo l'asse immaginario: $s = j\omega$

$$P(j\omega) = (j\omega)^n + \sum_{i=0}^{i=n-1} a_i (j\omega)^i = \prod_{i=1}^{n} (j\omega - p_i)$$

p_i: radici del polinomio

Ogni termine binomio $(j\omega - p_i)$ nel piano complesso può essere interpretato come un vettore, caratterizzato da modulo e fase



$$M_i(\omega) = |j\omega - p_i|$$
$$\varphi_i(\omega) = arg\{j\omega - p_i\}$$

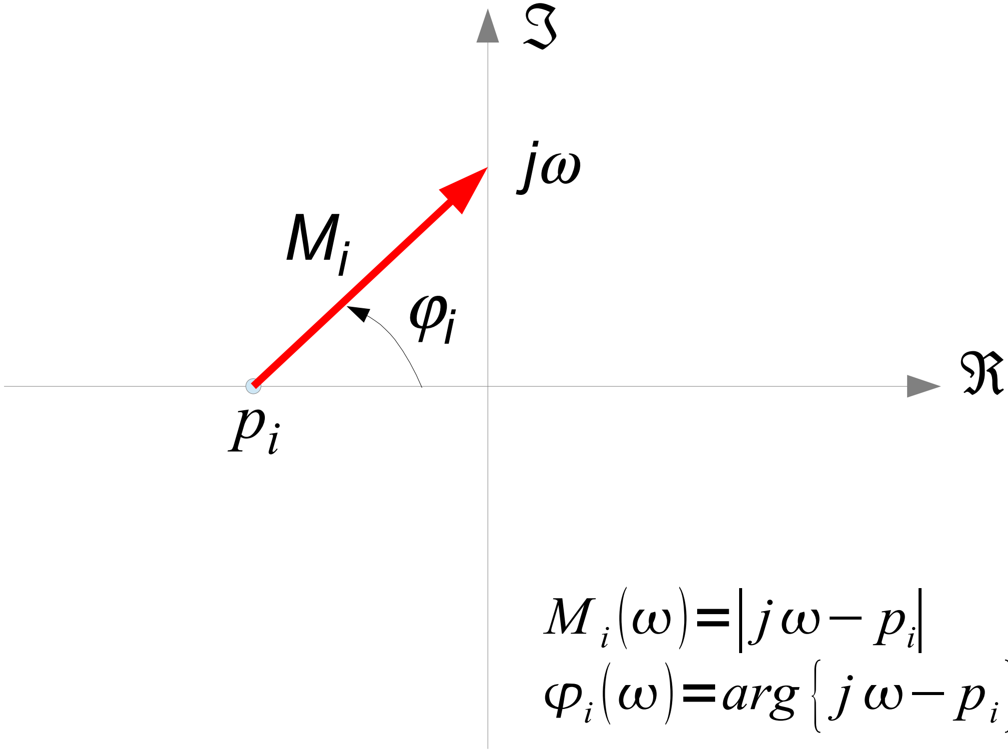
Variazione di fase di un polinomio

Si consideri un polinomio nella variabile complessa s,valutata lungo l'asse immaginario: $s = j\omega$

$$P(j\omega) = (j\omega)^n + \sum_{i=0}^{i=n-1} a_i (j\omega)^i = \prod_{i=1}^{n} (j\omega - p_i)$$

p_i: radici del polinomio

La fase del numero complesso associato al valore del polinomio per una data pulsazione ω è



$$\arg\{P(j\omega)\} = \Phi_P = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\omega)$$

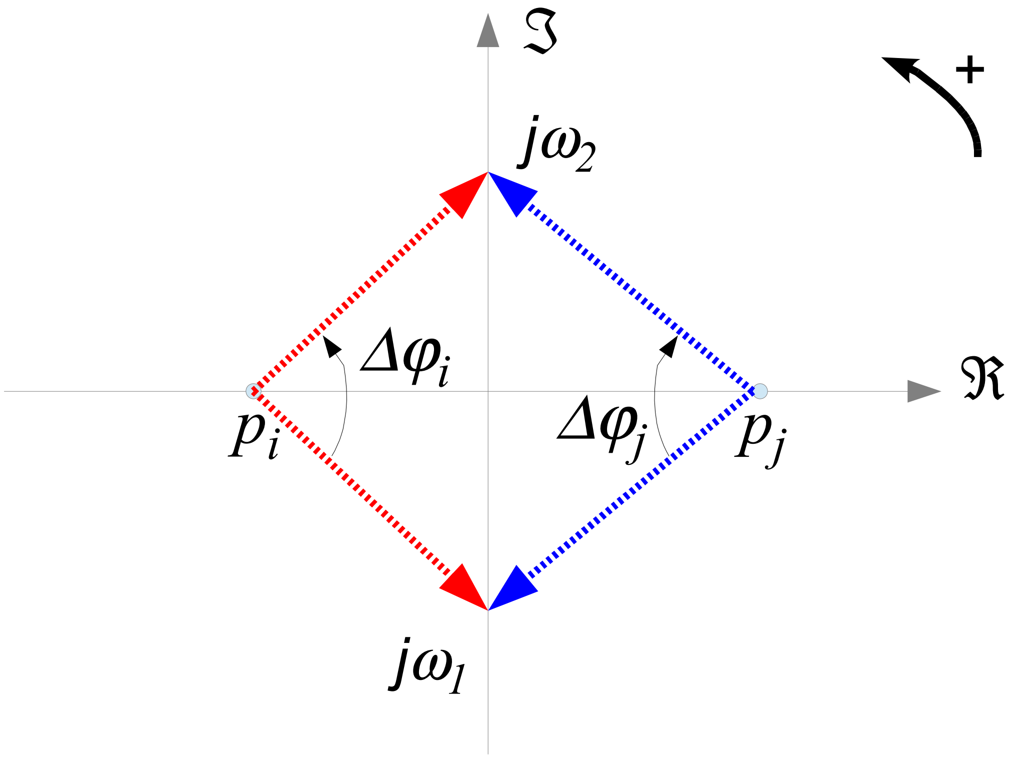
$$M_i(\omega) = |j\omega - p_i|$$
$$\varphi_i(\omega) = \arg\{j\omega - p_i\}$$

Variazione di fase di un polinomio

Si consideri un polinomio nella variabile complessa s,valutata lungo l'asse immaginario: $s = j\omega$

La variazione di fase del polinomio quando la pulsazione varia tra -∞ e +∞

$$\left[\Delta\Phi_P\right]_{-\infty}^{+\infty} = \sum_{i=1}^{n}\left[\Delta\varphi_i\right]_{-\infty}^{+\infty} =$$
$$= \pi\left(n_n - n_p\right) =$$
$$= \pi\left(n - 2n_p\right)$$



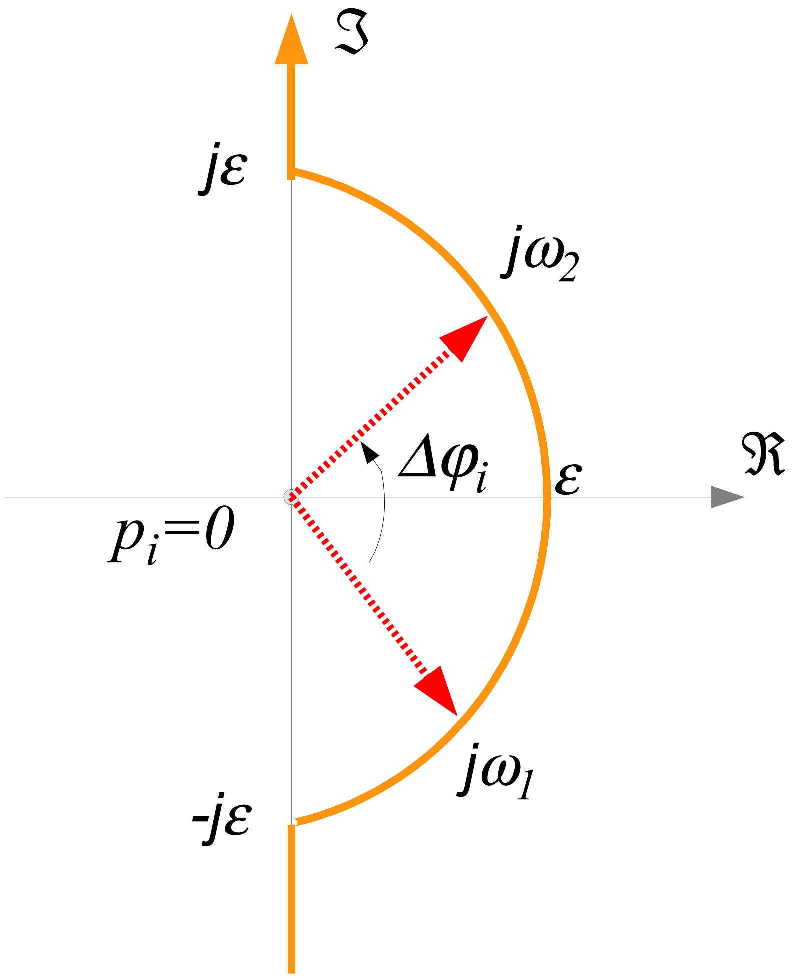
n_n: numero di radici a parte reale negativa

n_p: numero di radici a parte reale positiva

Variazione di fase di un polinomio

Un caso particolare sono le radici a parte reale nulla che possono essere considerate a parte reale negativa con una deformazione locale dell'asse immaginario

La variazione di fase del termine relativo ai poli nell'origine, quando la pulsazione varia tra -∞ e +∞, è pari a $+\pi$



Variazione di fase di un rapporto di polinomi

Considerando la funzione di trasferimento come un rapporto di polinomi è possibile calcolare la variazione di fase di una funzione di trasferimento quando la pulsazione varia tra -∞ e +∞

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)};$$

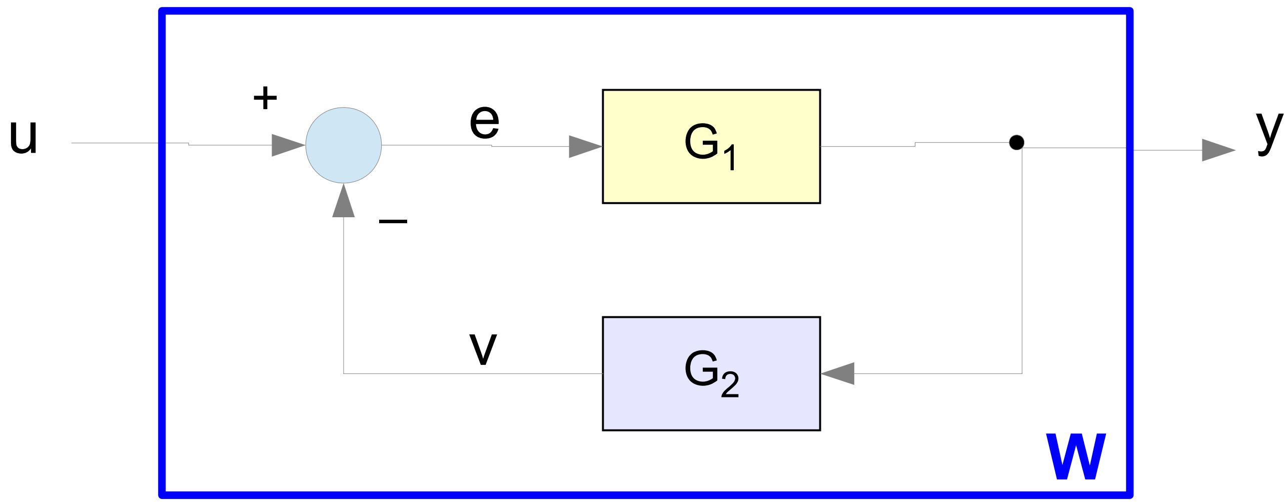
$$N(s)=\sum_{i=0}^{i=m} b_i s^i = b_m \prod_{i=1}^{m}(s-z_i)$$

$$D(s)=s^n+\sum_{i=0}^{i=n-1} a_i s^i = \prod_{i=1}^{n}(s-p_i)$$

$$\begin{aligned}
\left[\Delta\Phi_G\right]_{-\infty}^{+\infty} &= \left[\Delta\Phi_N\right]_{-\infty}^{+\infty}-\left[\Delta\Phi_D\right]_{-\infty}^{+\infty}= \\
&=\left[\pi\left(m_n-m_p\right)\right]-\left[\pi\left(n_n-n_p\right)\right]= \\
&=\left[\pi\left(m-2m_p\right)\right]-\left[\pi\left(n-2n_p\right)\right]= \\
&=\pi(m-n)-2\pi\left(m_p-n_p\right)
\end{aligned}$$

Criterio di Nyquist

Considerando la funzione di trasferimento di un sistema a ciclo chiuso



$$W(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \frac{\dfrac{N_1(s)}{D_1(s)}}{1 + \dfrac{N_1(s)}{D_1(s)}\dfrac{N_2(s)}{D_2(s)}} = \frac{N_1(s)D_2(s)}{D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s)}$$

La sua stabilità dipenderà dalla presenza o meno di poli a parte reale positiva nel polinomio al denominatore della funzione di trasferimento

Criterio di Nyquist

Considerando la funzione di trasferimento di un sistema a ciclo chiuso

$$W(s)=\frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}=\frac{\dfrac{N_1(s)}{D_1(s)}}{1+\dfrac{N_1(s)}{D_1(s)}\dfrac{N_2(s)}{D_2(s)}}=\frac{N_1(s)D_2(s)}{D_1(s)D_2(s)+N_1(s)N_2(s)}$$

$$F(s)=G_1(s)G_2(s)=\frac{N_1(s)}{D_1(s)}\frac{N_2(s)}{D_2(s)}=\frac{N_F(s)}{D_F(s)}$$

Funzione di trasferimento a ciclo aperto

$$P(s)=D_1(s)D_2(s)+N_1(s)N_2(s)$$

polinomio caratteristico della funzione di trasferimento a ciclo chiuso

$$V(s)=1+F(s)=\frac{D_1(s)D_2(s)+N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)}=\frac{P(s)}{D_F(s)}$$

Criterio di Nyquist

Considerando la funzione di trasferimento di un sistema a ciclo chiuso

$$W(s)=\frac{G_1(s)}{1+F(s)}=\frac{G_1(s)}{V(s)}$$

$$V(s)=1+F(s)=\frac{D_1(s)D_2(s)+N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)}=\frac{P(s)}{D_F(s)}$$

Nell'ipotesi che tutti i blocchi costituenti il sistema a ciclo chiuso siano causali

$$ord\{P(s)\}=ord\{D_F(s)\}=n$$

$$\left[\Delta\Phi_V\right]_{-\infty}^{+\infty}=\left[\Delta\Phi_P\right]_{-\infty}^{+\infty}-\left[\Delta\Phi_{D_F}\right]_{-\infty}^{+\infty}=\left[\pi\left(n-2n_p^P\right)\right]-\left[\pi\left(n-2n_p^{D_F}\right)\right]=$$
$$=2\pi\left(n_p^{D_F}-n_p^P\right)$$

Criterio di Nyquist

Considerando la funzione di trasferimento di un sistema a ciclo chiuso

$$W(s)=\frac{G_1(s)}{1+F(s)}=\frac{G_1(s)}{V(s)}$$

$$V(s)=1+F(s)=\frac{D_1(s)D_2(s)+N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)}=\frac{P(s)}{D_F(s)}$$

Nell'ipotesi che tutti i blocchi costituenti il sistema a ciclo chiuso siano causali

$$ord\{P(s)\}=ord\{D_F(s)\}=n$$

$$\left[\Delta\Phi_V\right]_{-\infty}^{+\infty}=\left[\Delta\Phi_P\right]_{-\infty}^{+\infty}-\left[\Delta\Phi_{D_F}\right]_{-\infty}^{+\infty}=\left[\pi\left(n-2n_p^P\right)\right]-\left[\pi\left(n-2n_p^{D_F}\right)\right]=$$
$$=2\pi\left(n_p^{D_F}-n_p^P\right)$$

poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo aperto

Criterio di Nyquist

Considerando la funzione di trasferimento di un sistema a ciclo chiuso

$$W(s)=\frac{G_1(s)}{1+F(s)}=\frac{G_1(s)}{V(s)}$$

$$V(s)=1+F(s)=\frac{D_1(s)D_2(s)+N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)}=\frac{P(s)}{D_F(s)}$$

Nell'ipotesi che tutti i blocchi costituenti il sistema a ciclo chiuso siano causali

$$ord\{P(s)\}=ord\{D_F(s)\}=n$$

$$\left[\Delta\Phi_V\right]_{-\infty}^{+\infty}=\left[\Delta\Phi_P\right]_{-\infty}^{+\infty}-\left[\Delta\Phi_{D_F}\right]_{-\infty}^{+\infty}=\left[\pi\left(n-2n_p^P\right)\right]-\left[\pi\left(n-2n_p^{D_F}\right)\right]=$$
$$=2\pi\left(n_p^{D_F}-n_p^P\right)$$

poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso

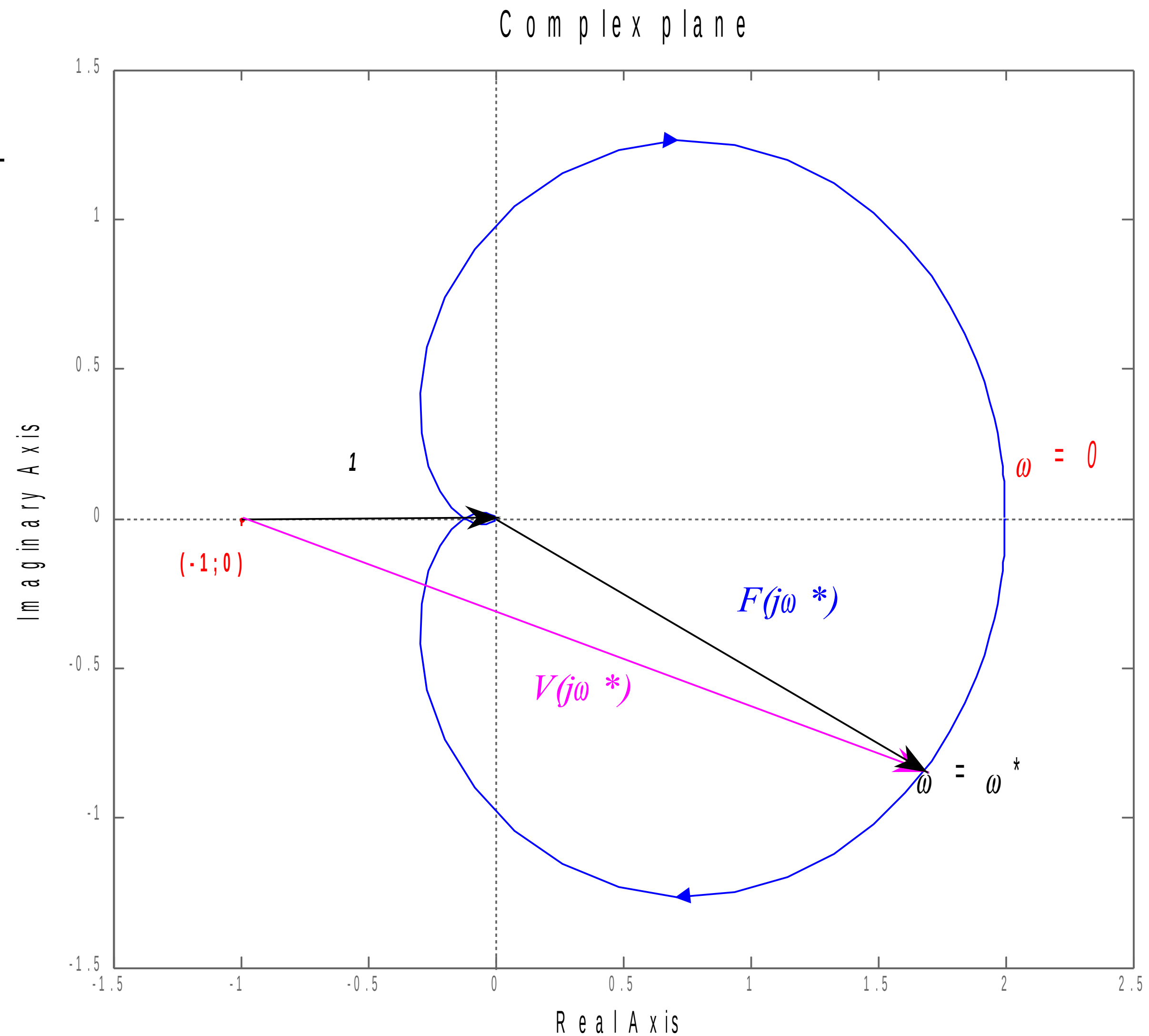
Criterio di Nyquist

Considerando la funzione di trasferimento di un sistema a ciclo chiuso

$$W(j\omega)=\frac{G_1(j\omega)}{1+F(j\omega)}=\frac{G_1(j\omega)}{V(j\omega)}$$

$$V(j\omega)=1+F(j\omega)=\frac{P(j\omega)}{D_F(j\omega)}$$

$$\left[\Delta\Phi_V\right]_{-\infty}^{+\infty}=2\pi\left(n_p^{D_F}-n_p^{P}\right)$$



Criterio di Nyquist

Considerando la funzione di trasferimento di un sistema a ciclo chiuso:

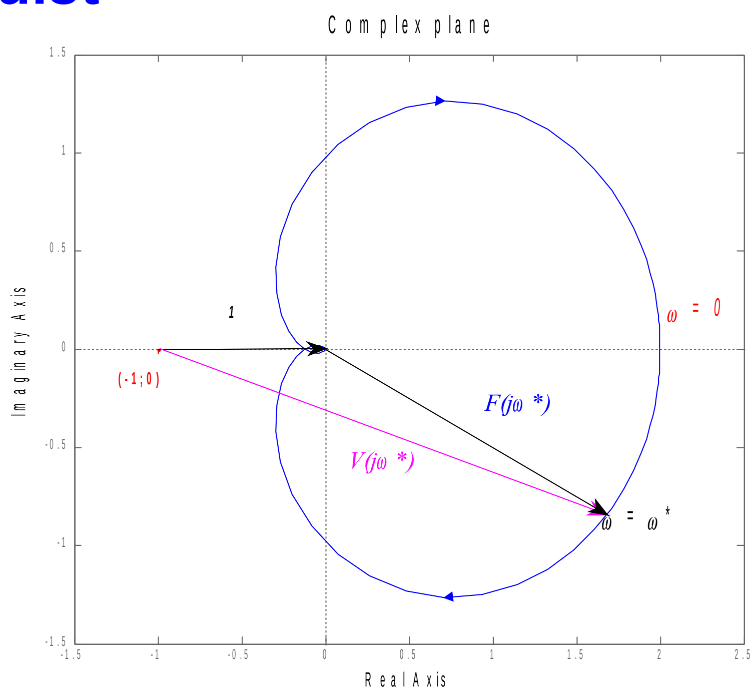
il numero di rotazioni, positive in senso antiorario, del diagramma di Nyquist, percorso da $\omega = -\infty$ a $\omega = +\infty$, della funzione di trasferimento a ciclo aperto attorno al punto *(-1;0)* è pari alla differenza tra poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo aperto e poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso.

Teorema di Nyquist

$$W(j\omega) = \frac{G_1(j\omega)}{1+F(j\omega)} = \frac{G_1(j\omega)}{V(j\omega)}$$

$$V(j\omega) = 1 + F(j\omega) = \frac{P(j\omega)}{D_F(j\omega)}$$

$$\left[\overset{\curvearrowleft}{N}{}^{F}_{(-1;0)}\right]_{-\infty}^{+\infty} = n_p^{D_F} - n_p^{P}$$



Criterio di Nyquist

Un sistema a ciclo chiuso è stabile se il numero di rotazioni, positive in senso antiorario, del diagramma di Nyquist, percorso da $\omega = -\infty$ a $\omega = +\infty$, della funzione di trasferimento a ciclo aperto attorno al punto *(-1;0)* è pari al numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo aperto

$$\left[\hat{N}^{F}_{(-1;0)}\right]_{-\infty}^{+\infty} = n_p^{D_F}$$

$$W(j\omega) = \frac{G_1(j\omega)}{1+F(j\omega)} = \frac{G_1(j\omega)}{V(j\omega)}$$

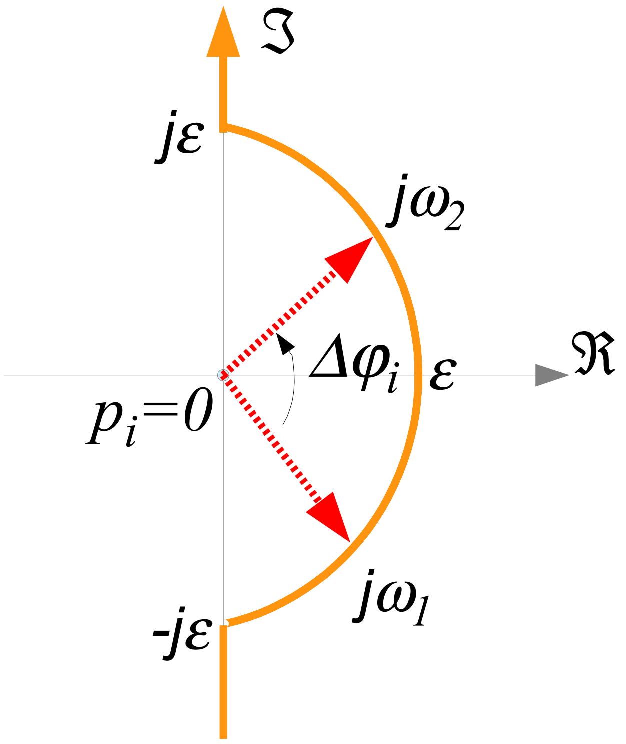
$$V(j\omega) = 1 + F(j\omega) = \frac{P(j\omega)}{D_F(j\omega)}$$

$$\left[\hat{N}^{F}_{(-1;0)}\right]_{-\infty}^{+\infty} = n_p^{D_F} - \cancel{n_p^{P}}$$

Criterio di Nyquist

Nel caso di funzione di trasferimento a ciclo aperto con poli a parte reale nulla, il suo diagramma di Nyquist è "*aperto*" presentando dei punti all'infinito in corrispondenza di tali poli.

Per completare il diagramma è necessario introdurre "*richiusure all'infinito*" in senso orario, se i poli a parte reale nulla sono considerati come a parte reale negativa, di mezzo giro per ogni polo a parte reale nulla



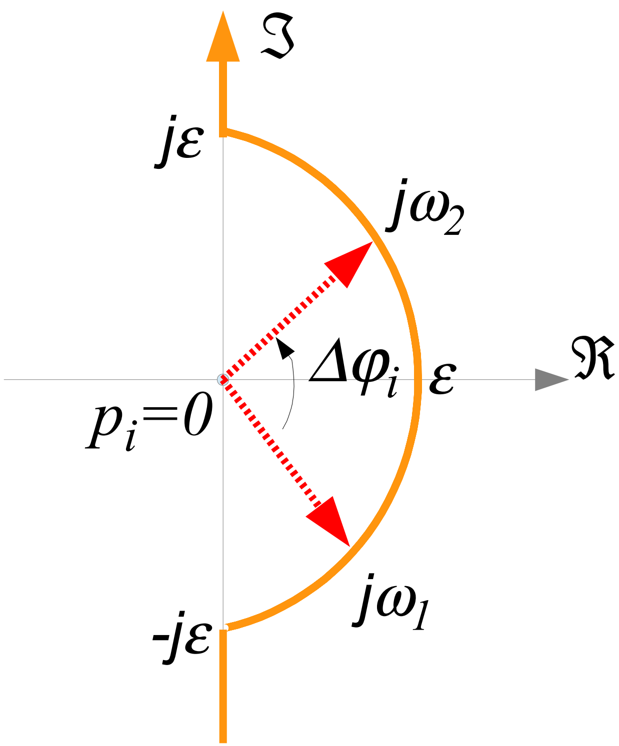
$$\left[\Delta\Phi\left\{\frac{1}{j\omega}\right\}\right]_{-\infty}^{+\infty}=\left[\Delta\Phi\left\{\frac{1}{j\omega}\right\}\right]_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}=-\pi$$

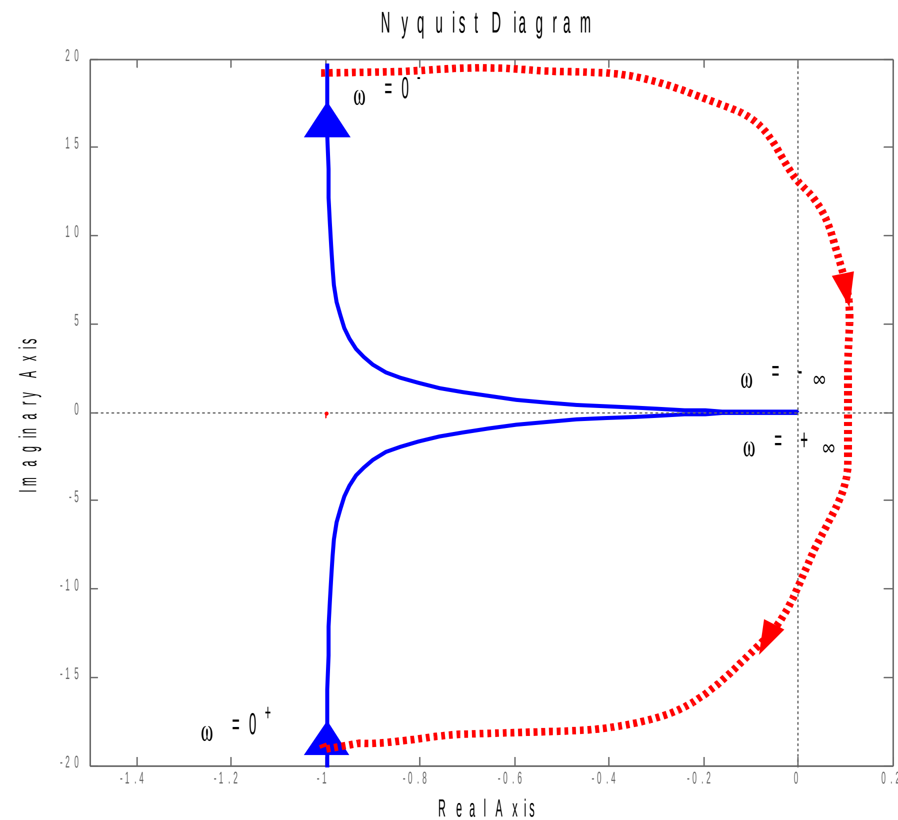
rotazione all'infinito con $\varepsilon \rightarrow 0$

Criterio di Nyquist

Nel caso di funzione di trasferimento a ciclo aperto con poli a parte reale nulla, il suo diagramma di Nyquist è “aperto” presentando dei punti all'infinito in corrispondenza di tali poli.

Per completare il diagramma è necessario introdurre “richiusure all'infinito” in senso orario, se i poli a parte reale nulla sono considerati come a parte reale negativa, di mezzo giro per ogni polo a parte reale nulla





Esempi di applicazione del Criterio di Nyquist

Un sistema a ciclo chiuso è stabile se il numero di rotazioni, positive in senso antiorario, del diagramma di Nyquist, percorso da $\omega = -\infty$ a $\omega = +\infty$, della funzione di trasferimento a ciclo aperto attorno al punto *(-1;0)* è pari al numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo aperto

$$\left[\hat{N}^{F}_{(-1;0)}\right]_{-\infty}^{+\infty} = n_p^{D_F} - n_p^{P}$$

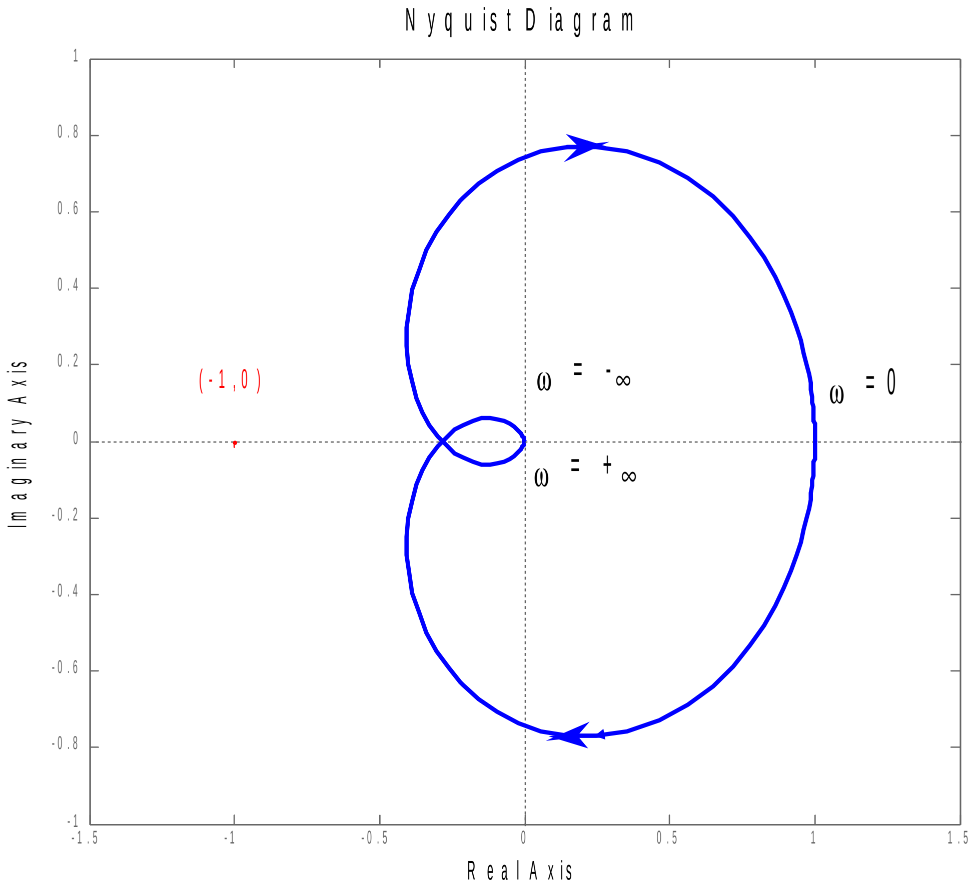
$$F(j\omega) = \frac{1}{(1+j2\omega)\left(1+2(0,5)\left(\frac{j\omega}{1}\right)+\left(\frac{j\omega}{1}\right)^2\right)}$$

$$n_p^{D_F} = 0$$

$$\left[N^{F}_{(-1;0)}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

$$n_p^{P} = 0$$

Sistema stabile a ciclo chiuso



Esempi di applicazione del Criterio di Nyquist

Un sistema a ciclo chiuso è stabile se il numero di rotazioni, positive in senso antiorario, del diagramma di Nyquist, percorso da $\omega = -\infty$ a $\omega = +\infty$, della funzione di trasferimento a ciclo aperto attorno al punto *(-1;0)* è pari al numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo aperto

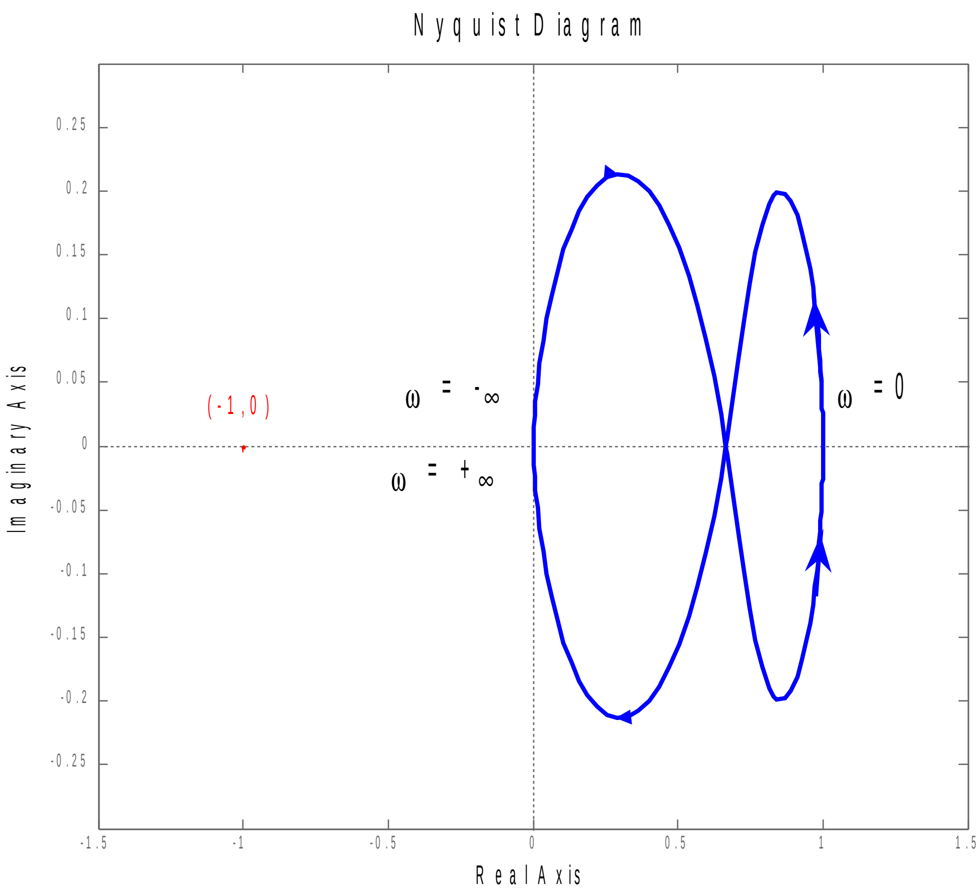
$$\left[\hat{N}^{F}_{(-1;0)}\right]^{+\infty}_{-\infty} = n_p^{D_F} - n_p^{P}$$

$$F(j\omega) = \frac{1}{(1-j2\omega)\left(1+2(0{,}5)\left(\frac{j\omega}{1}\right)+\left(\frac{j\omega}{1}\right)^2\right)}$$

$$n_p^{D_F} = 1$$

$$\left[N^{F}_{(-1;0)}\right]^{+\infty}_{-\infty} = 0$$

$$n_p^{P} = 1$$



Sistema instabile a ciclo chiuso
1 polo a parte reale positiva

Esempi di applicazione del Criterio di Nyquist

Un sistema a ciclo chiuso è stabile se il numero di rotazioni, positive in senso antiorario, del diagramma di Nyquist, percorso da $\omega = -\infty$ a $\omega = +\infty$, della funzione di trasferimento a ciclo aperto attorno al punto *(-1;0)* è pari al numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo aperto

$$\left[\hat{N}^{F}_{(-1;0)}\right]_{-\infty}^{+\infty} = n_p^{D_F} - n_p^{P}$$

$$F(j\omega) = \frac{K}{(1+j2\omega)\left(1+2(0{,}5)\left(\frac{j\omega}{1}\right)+\left(\frac{j\omega}{1}\right)^2\right)}$$

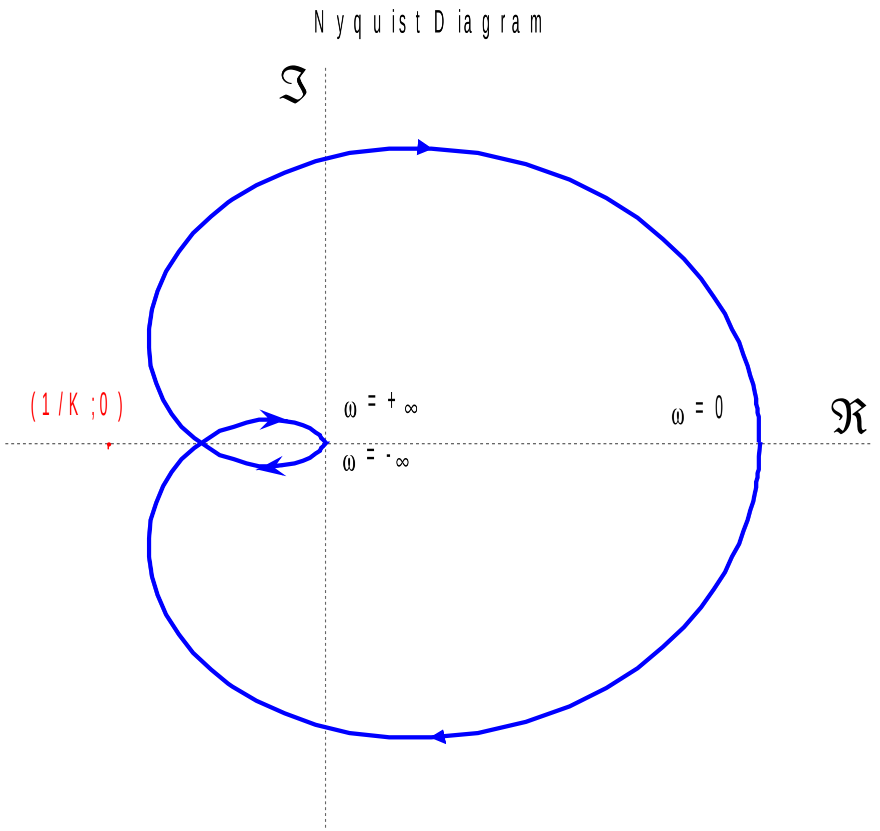
$$n_p^{D_F} = 0$$

$$\left[N^{F}_{(-1;0)}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

$$n_p^{P} = 0$$

$K < K_c$

Sistema stabile a ciclo chiuso



Esempi di applicazione del Criterio di Nyquist

Un sistema a ciclo chiuso è stabile se il numero di rotazioni, positive in senso antiorario, del diagramma di Nyquist, percorso da $\omega = -\infty$ a $\omega = +\infty$, della funzione di trasferimento a ciclo aperto attorno al punto *(-1;0)* è pari al numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo aperto

$$\left[\hat{N}^{F}_{(-1;0)}\right]_{-\infty}^{+\infty} = n_p^{D_F} - n_p^{P}$$

$$F(j\omega) = \frac{K}{(1+j2\omega)\left(1+2(0{,}5)\left(\frac{j\omega}{1}\right)+\left(\frac{j\omega}{1}\right)^2\right)}$$

$$n_p^{D_F} = 0$$

$$\left[N^{F}_{(-1;0)}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

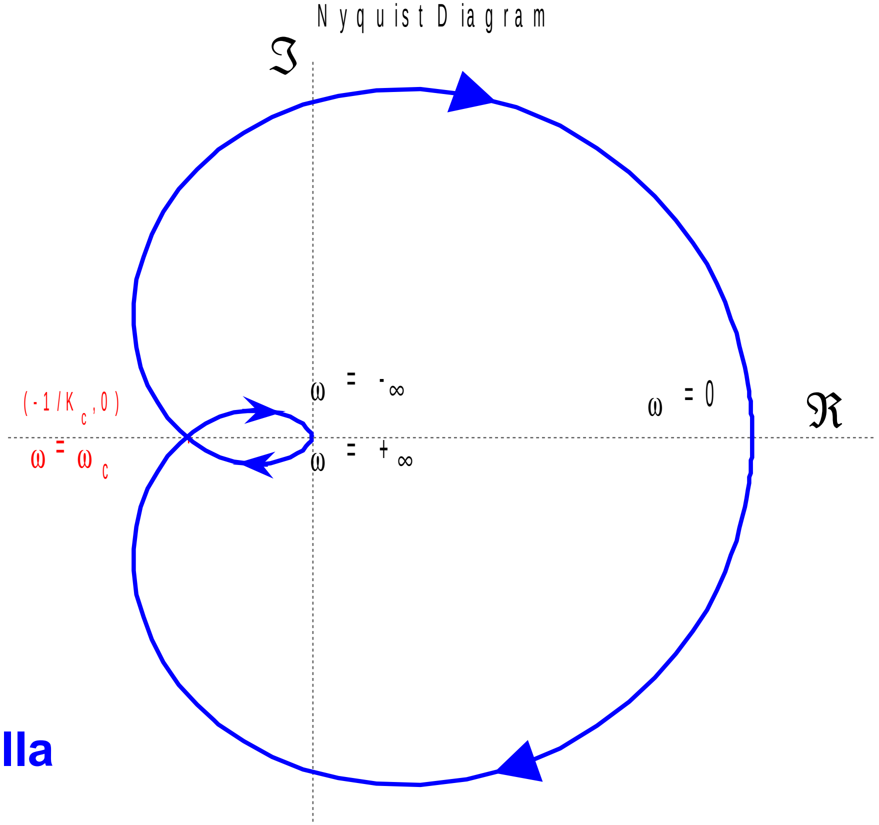
$$n_p^{P} = 0$$

$K = K_c$

Sistema al limite di stabilità a ciclo chiuso

2 poli complessi e coniugati a parte reale nulla

e pulsazione ω_c



Esempi di applicazione del Criterio di Nyquist

Un sistema a ciclo chiuso è stabile se il numero di rotazioni, positive in senso antiorario, del diagramma di Nyquist, percorso da $\omega = -\infty$ a $\omega = +\infty$, della funzione di trasferimento a ciclo aperto attorno al punto *(-1;0)* è pari al numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo aperto

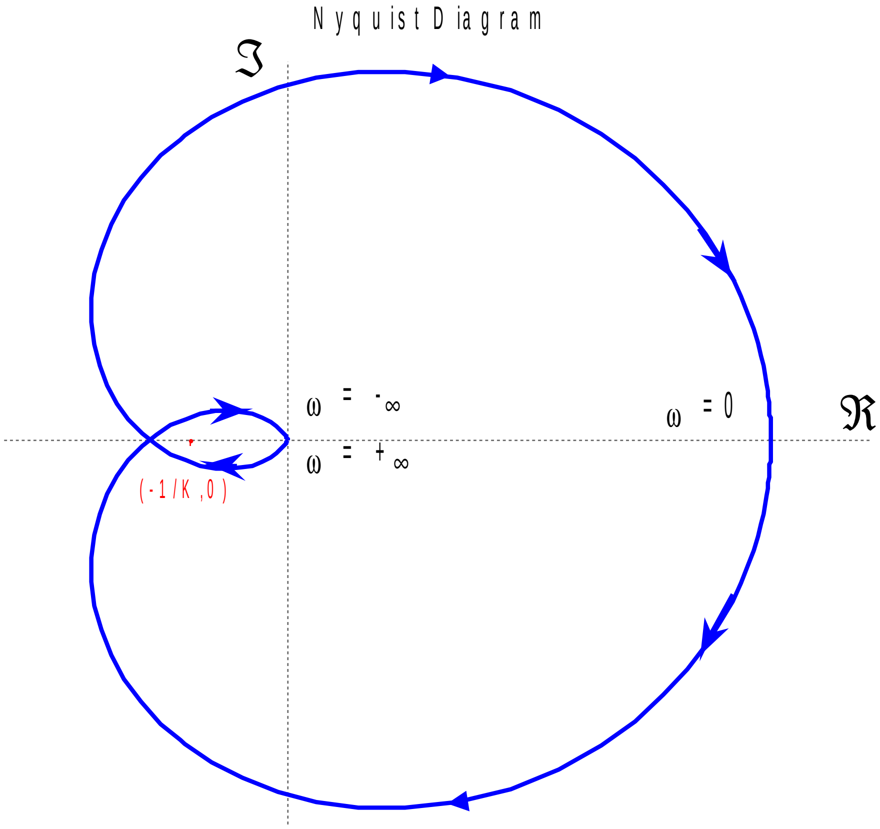
$$\left[\hat{N}^{F}_{(-1;0)}\right]_{-\infty}^{+\infty} = n_p^{D_F} - n_p^{P}$$

$$F(j\omega) = \frac{K}{(1+j2\omega)\left(1+2(0{,}5)\left(\frac{j\omega}{1}\right)+\left(\frac{j\omega}{1}\right)^2\right)}$$

$$n_p^{D_F} = 0$$

$$\left[N^{F}_{(-1;0)}\right]_{-\infty}^{+\infty} = -2$$

$$n_p^{P} = 2$$



K > K$_c$

Sistema instabile a ciclo chiuso
2 poli a parte reale positiva

Esempi di applicazione del Criterio di Nyquist

Un sistema a ciclo chiuso è stabile se il numero di rotazioni, positive in senso antiorario, del diagramma di Nyquist, percorso da $\omega = -\infty$ a $\omega = +\infty$, della funzione di trasferimento a ciclo aperto attorno al punto *(-1;0)* è pari al numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo aperto

$$\left[\hat{N}^{F}_{(-1;0)}\right]_{-\infty}^{+\infty} = n_p^{D_F} - n_p^{P}$$

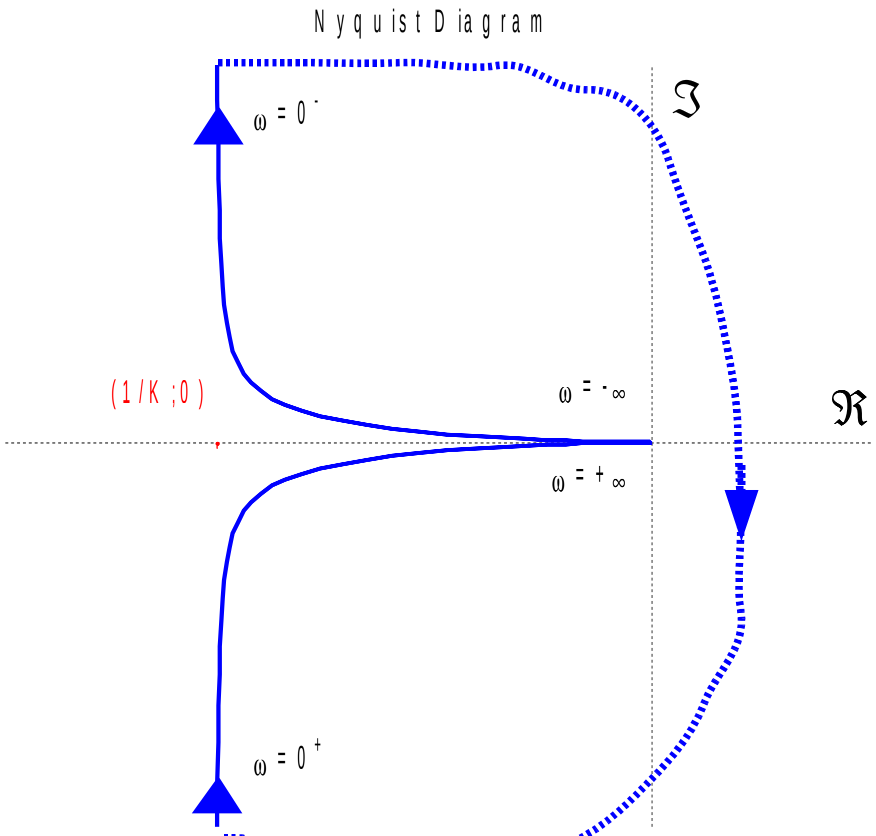
$$F(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1 + j2\omega)}$$

$$n_p^{D_F} = 0$$

$$\left[N^{F}_{(-1;0)}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

$$n_p^{P} = 0$$

Sistema stabile a ciclo chiuso per qualunque K



Esempi di applicazione del Criterio di Nyquist

Un sistema a ciclo chiuso è stabile se il numero di rotazioni, positive in senso antiorario, del diagramma di Nyquist, percorso da $\omega = -\infty$ a $\omega = +\infty$, della funzione di trasferimento a ciclo aperto attorno al punto *(-1;0)* è pari al numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo aperto

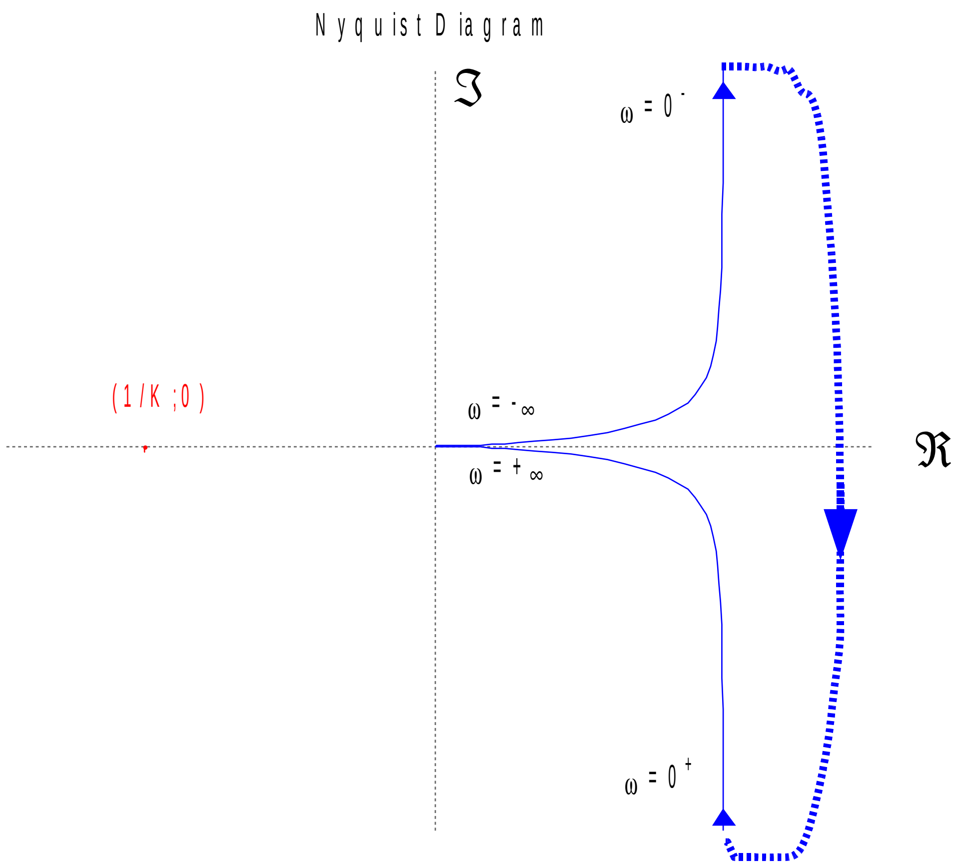
$$\left[\hat{N}^{F}_{(-1;0)}\right]_{-\infty}^{+\infty} = n_p^{D_F} - n_p^{P}$$

$$F(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1 - j2\omega)}$$

$$n_p^{D_F} = 1$$

$$\left[N^{F}_{(-1;0)}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

$$n_p^{P} = 1$$



Sistema instabile a ciclo chiuso
1 polo a parte reale positiva
per qualunque K

Esempi di applicazione del Criterio di Nyquist

Un sistema a ciclo chiuso è stabile se il numero di rotazioni, positive in senso antiorario, del diagramma di Nyquist, percorso da $\omega = -\infty$ a $\omega = +\infty$, della funzione di trasferimento a ciclo aperto attorno al punto *(-1;0)* è pari al numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo aperto

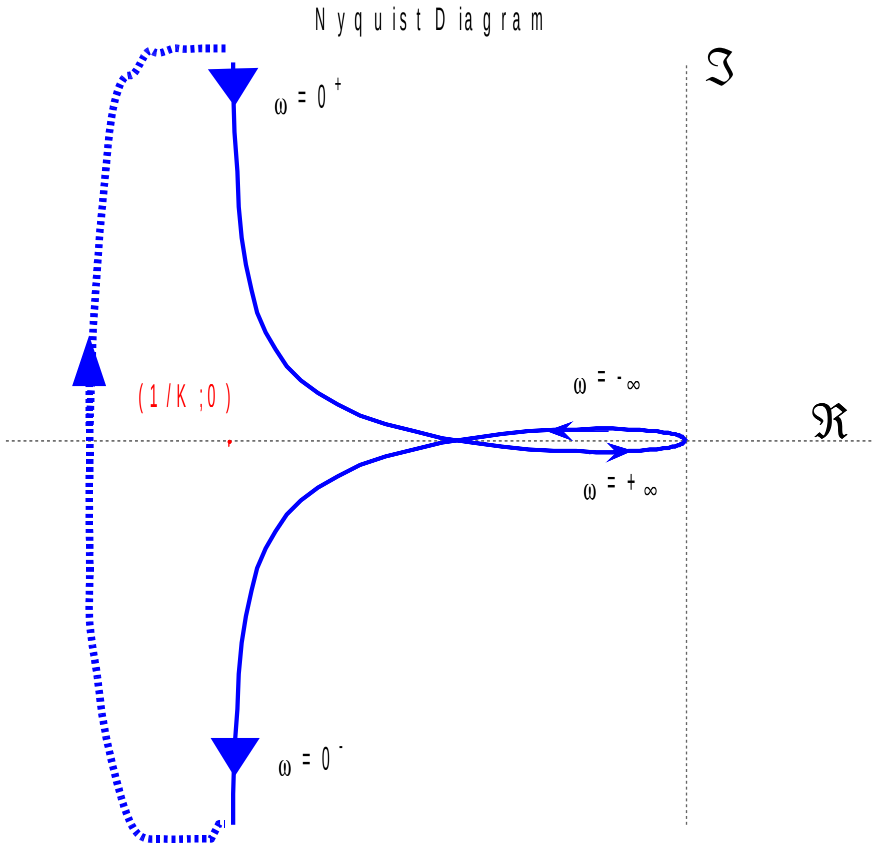
$$\left[\hat{N}^{F}_{(-1;0)}\right]_{-\infty}^{+\infty} = n_p^{D_F} - n_p^{P}$$

$$F(j\omega) = \frac{-K(1+j\omega)}{j\omega(1-j2\omega)}$$

$$n_p^{D_F} = 1$$

$$\left[N^{F}_{(-1;0)}\right]_{-\infty}^{+\infty} = -1$$

$$n_p^{P} = 2$$



Sistema instabile a ciclo chiuso
2 poli a parte reale positiva
$K < K_c$

Esempi di applicazione del Criterio di Nyquist

Un sistema a ciclo chiuso è stabile se il numero di rotazioni, positive in senso antiorario, del diagramma di Nyquist, percorso da $\omega = -\infty$ a $\omega = +\infty$, della funzione di trasferimento a ciclo aperto attorno al punto *(-1;0)* è pari al numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo aperto

$$\left[\hat{N}^{F}_{(-1;0)}\right]_{-\infty}^{+\infty} = n_p^{D_F} - n_p^{P}$$

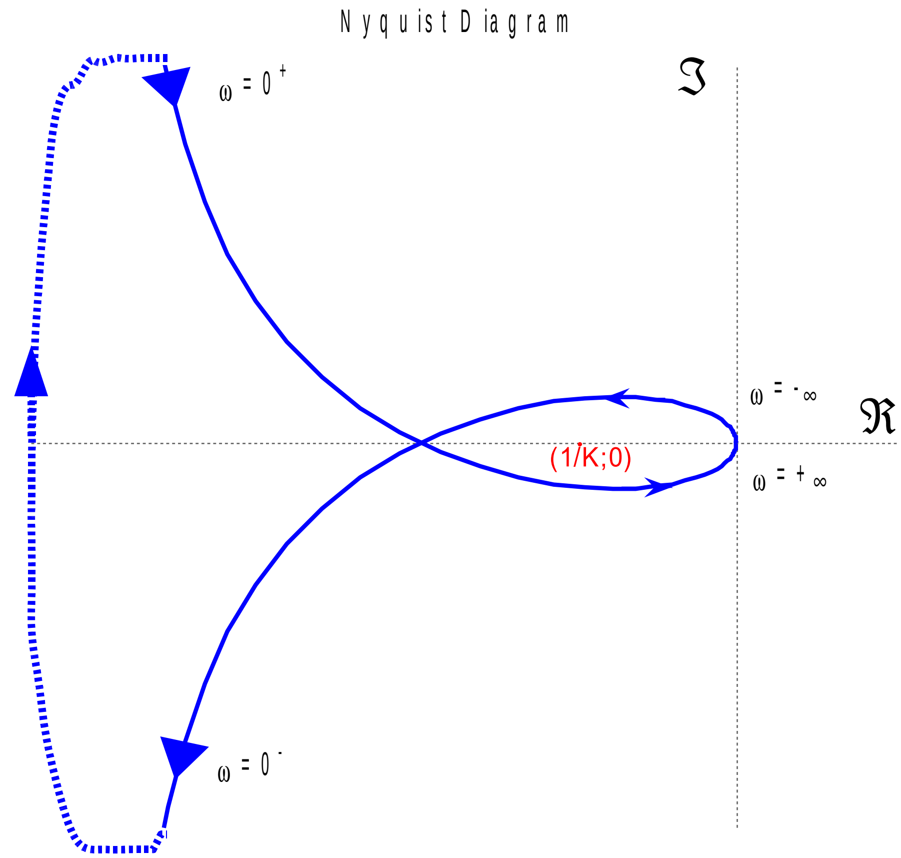
$$F(j\omega) = \frac{-K(1+j\omega)}{j\omega(1-j2\omega)}$$

$$n_p^{D_F} = 1$$

$$\left[N^{F}_{(-1;0)}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 1$$

$$n_p^{P} = 0$$

Sistema stabile a ciclo chiuso
$K > K_c$



Esempi di applicazione del Criterio di Nyquist

Un sistema a ciclo chiuso è stabile se il numero di rotazioni, positive in senso antiorario, del diagramma di Nyquist, percorso da $\omega = -\infty$ a $\omega = +\infty$, della funzione di trasferimento a ciclo aperto attorno al punto *(-1;0)* è pari al numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo aperto

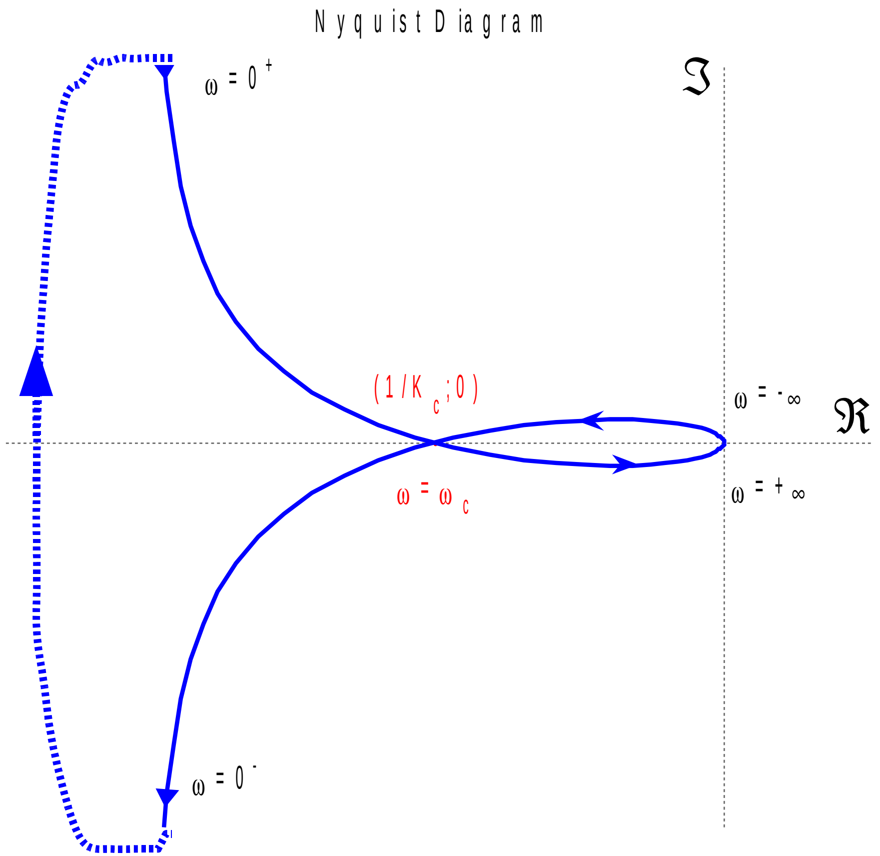
$$\left[\overset{\curvearrowleft}{N}{}^{F}_{(-1;0)}\right]_{-\infty}^{+\infty} = n_p^{D_F} - n_p^{P}$$

$$F(j\omega) = \frac{-K(1+j\omega)}{j\omega(1-j2\omega)}$$

$$n_p^{D_F} = 1$$

$$\left[N^{F}_{(-1;0)}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 1$$

$$n_p^{P} = 0$$



Sistema al limite di stabilità a ciclo chiuso
2 poli a parte reale nulla
$K = K_c$

Conclusioni

- Il criterio di Nyquist permette di valutare la stabilità del sistema a ciclo chiuso sulla base del conoscenza della risposta armonica del sistema a ciclo aperto

- Dal criterio di Nyquist è noto il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso

- Nei sistemi a stabilità regolare, incrementando il guadagno del sistema a ciclo aperto si passa dalla condizione di stabilità a quella di instabilità a ciclo chiuso

- Nei sistemi a stabilità paradossale, incrementando il guadagno del sistema a ciclo aperto si passa dalla condizione di instabilità a quella di stabilità a ciclo chiuso

- Nei sistemi a stabilità condizionata, la stabilità del sistema a ciclo chiuso dipende dall'appartenenza del guadagno del sistema a ciclo aperto a specifici campi di valori