Semplificazione dei modelli matematici

- Modelli linearizzati
- Modelli a modo dominante

Modelli linearizzati

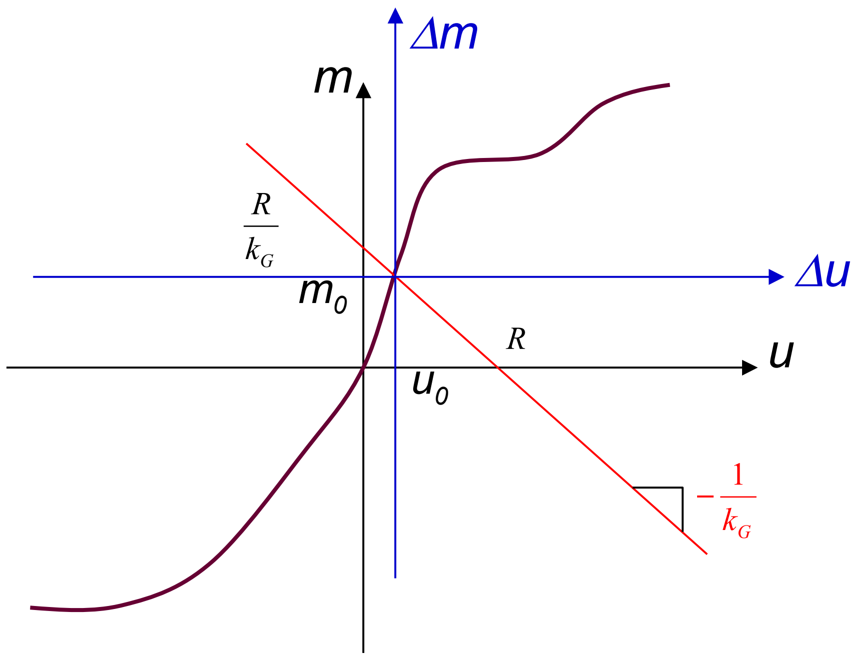
Di un modello generale è possibile definire un modello linearizzato locale attorno ad un punto di lavoro

$$\dot{\boldsymbol{x}} = F(\boldsymbol{x};\boldsymbol{u})$$
$$\boldsymbol{y} = H(\boldsymbol{x};\boldsymbol{u})$$
$$F(\boldsymbol{x}_0;\boldsymbol{u}_0) = \boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{y}_0 = H(\boldsymbol{x}_0;\boldsymbol{u}_0)$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \delta\,\boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 + \delta\,\boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_0 + \delta\,\boldsymbol{y}$$

Modelli linearizzati

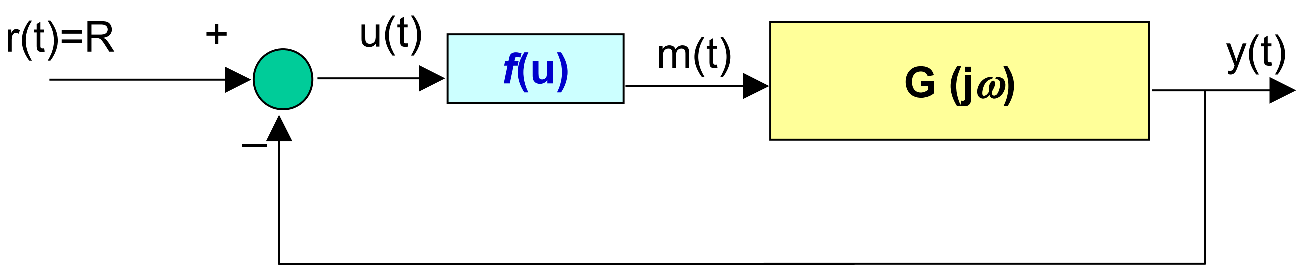
Di un modello generale è possibile definire un modello linearizzato locale attorno ad un punto di lavoro



$$\begin{cases} m_0 = f(u_0) \\ u_0 = R - k_G m_0 \end{cases}$$

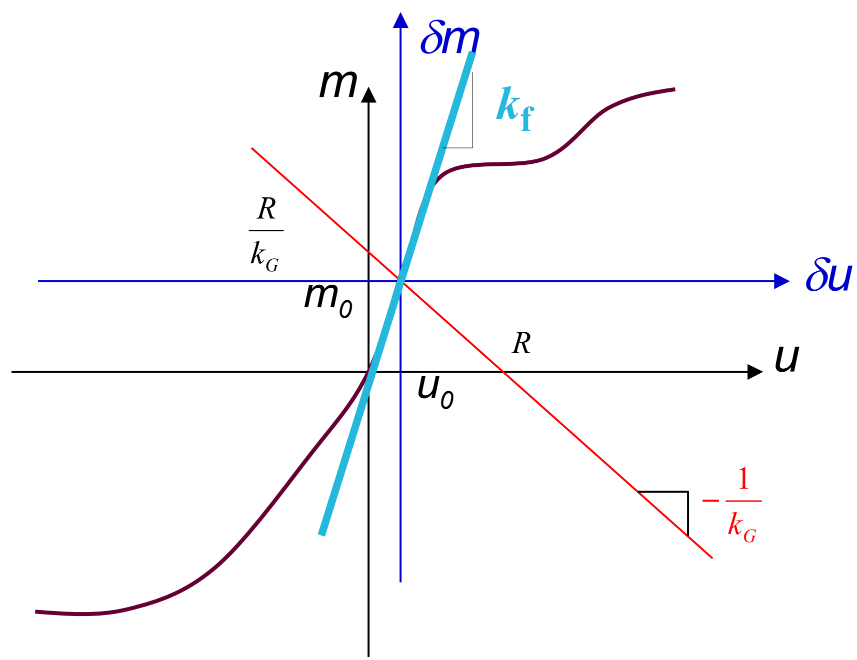
$$\delta y_0 = f'(\Delta u)$$

$$f'(\Delta u_0) = f(u_0 + \Delta u) - m_0$$



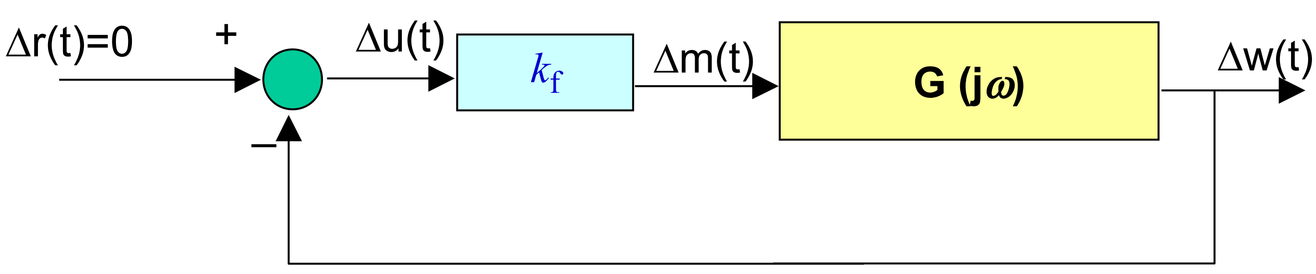
Modelli linearizzati

Di un modello generale è possibile definire un modello linearizzato locale attorno ad un punto di lavoro



$$\begin{cases} m_0 = f(u_0) \\ u_0 = R - k_G m_0 \end{cases}$$

$$\Delta m = k_f \Delta u$$



Modelli linearizzati

Di un modello generale è possibile definire un modello linearizzato locale attorno ad un punto di lavoro

$$\dot{\boldsymbol{x}} = F(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{u})$$

$$\boldsymbol{y} = H(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{u})$$

$$F(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{u}_0) = \boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{y}_0 = H(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{u}_0)$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \Delta\boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 + \Delta\boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_0 + \Delta\boldsymbol{y}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \Delta\dot{\boldsymbol{x}}$$

$$\Delta\dot{\boldsymbol{x}} = F(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{u}_0) + \left.\frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{x}}\right|_0 \Delta\boldsymbol{x} + \left.\frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{u}}\right|_0 \Delta\boldsymbol{u} + O\left(\Delta\boldsymbol{x}^T \Delta\boldsymbol{x}; \Delta\boldsymbol{u}^T \Delta\boldsymbol{u}\right)$$

$$\boldsymbol{y}_0 + \Delta\boldsymbol{y} = H(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{u}_0) + \left.\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{x}}\right|_0 \Delta\boldsymbol{x} + \left.\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{u}}\right|_0 \Delta\boldsymbol{u} + O\left(\Delta\boldsymbol{x}^T \Delta\boldsymbol{x}; \Delta\boldsymbol{u}^T \Delta\boldsymbol{u}\right)$$

Modelli linearizzati

Di un modello generale è possibile definire un modello linearizzato locale attorno ad un punto di lavoro

$$\dot{\boldsymbol{x}} = F(\boldsymbol{x};\boldsymbol{u})$$

$$\boldsymbol{y} = H(\boldsymbol{x};\boldsymbol{u})$$

$$\underline{F(\boldsymbol{x}_0;\boldsymbol{u}_0) = \boldsymbol{0}} \qquad \underline{\boldsymbol{y}_0 = H(\boldsymbol{x}_0;\boldsymbol{u}_0)}$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \Delta\boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 + \Delta\boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_0 + \Delta\boldsymbol{y}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \Delta\dot{\boldsymbol{x}}$$

$$\Delta\dot{\boldsymbol{x}} = \cancel{F(\boldsymbol{x}_0;\boldsymbol{u}_0)} + \left.\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_0 \Delta\boldsymbol{x} + \left.\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_0 \Delta\boldsymbol{u} + \cancel{O\left(\Delta\boldsymbol{x}^T\Delta\boldsymbol{x};\Delta\boldsymbol{u}^T\Delta\boldsymbol{u}\right)}$$

$$\cancel{\boldsymbol{y}_0} + \Delta\boldsymbol{y} = \cancel{H(\boldsymbol{x}_0;\boldsymbol{u}_0)} + \left.\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_0 \Delta\boldsymbol{x} + \left.\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_0 \Delta\boldsymbol{u} + \cancel{O\left(\Delta\boldsymbol{x}^T\Delta\boldsymbol{x};\Delta\boldsymbol{u}^T\Delta\boldsymbol{u}\right)}$$

Modelli linearizzati

Di un modello generale è possibile definire un modello linearizzato locale attorno ad un punto di lavoro

$$\Delta \dot{\boldsymbol{x}} = A \Delta \boldsymbol{x} + B \Delta \boldsymbol{u}$$
$$\Delta \boldsymbol{y} = C \Delta \boldsymbol{x} + D \Delta \boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \Delta \boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 + \Delta \boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_0 + \Delta \boldsymbol{y}$$
$$F(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{u}_0) = \boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{y}_0 = H(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{u}_0)$$

$$A = \frac{\partial F(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{u}_0)}{\partial \boldsymbol{x}} \qquad B = \frac{\partial F(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{u}_0)}{\partial \boldsymbol{u}}$$
$$C = \frac{\partial H(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{u}_0)}{\partial \boldsymbol{x}} \qquad D = \frac{\partial H(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{u}_0)}{\partial \boldsymbol{u}}$$

Modelli a modo dominante

In alcuni casi è possibile ridurre l'ordine del modello trascurando gli effetti dinamici caratterizzati da modi poco influenti sulla risposta del sistema: caso senza zeri

$$G(s)=\frac{K'}{s^2+a_1 s+a_0}=\frac{K'}{(s-p_1)(s-p_1)}=\frac{K'}{p_1 p_2(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}=.$$

$$.=\frac{R_1}{(s-p_1)}+\frac{R_2}{(s-p_2)}$$

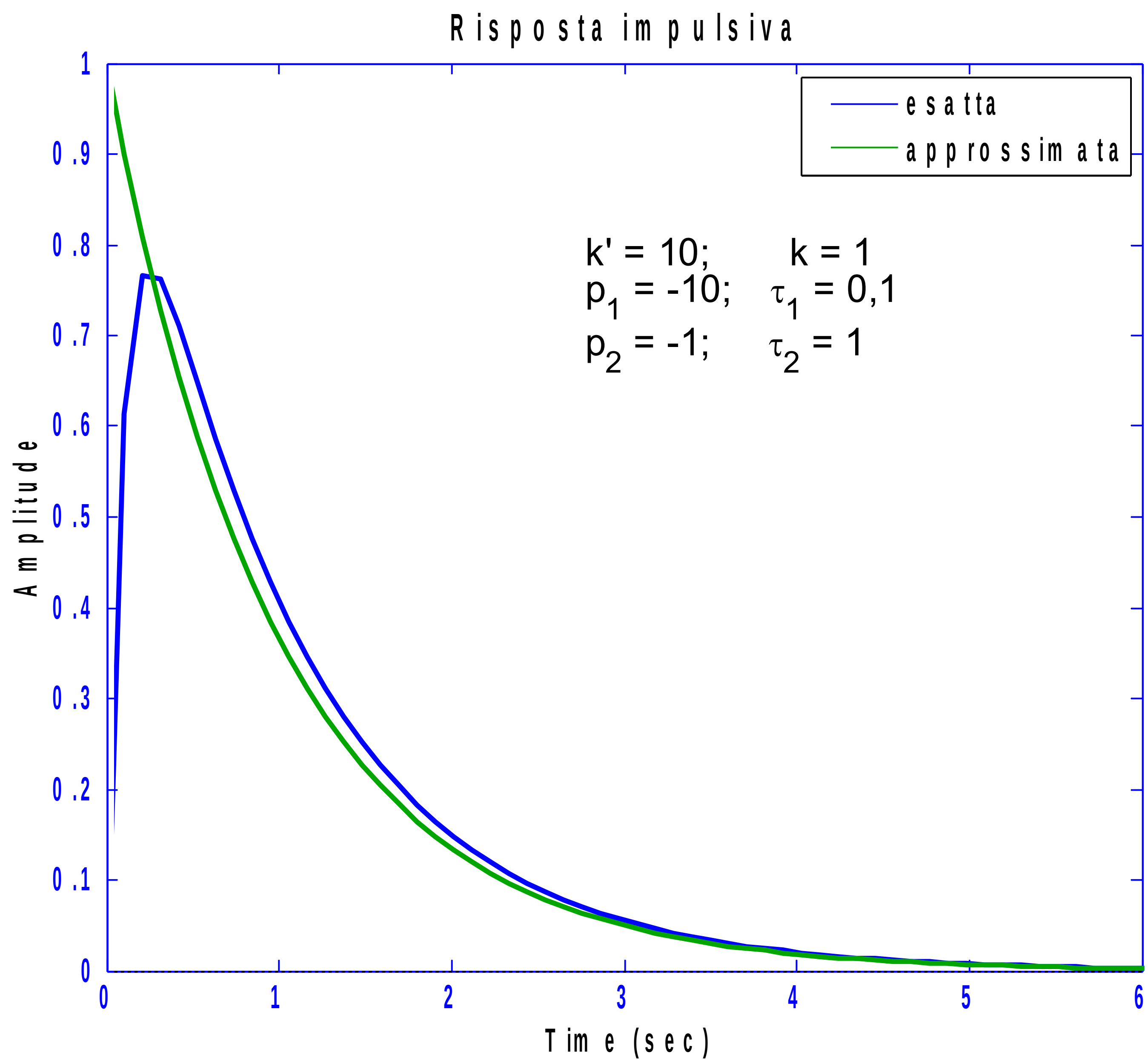
La sua risposta impulsiva è

$$w(t)=L^{-1}\{G(s)*1\}=\{R_1 e^{p_1 t}+R_2 e^{p_2 t}\}\delta_{-1}(t)$$

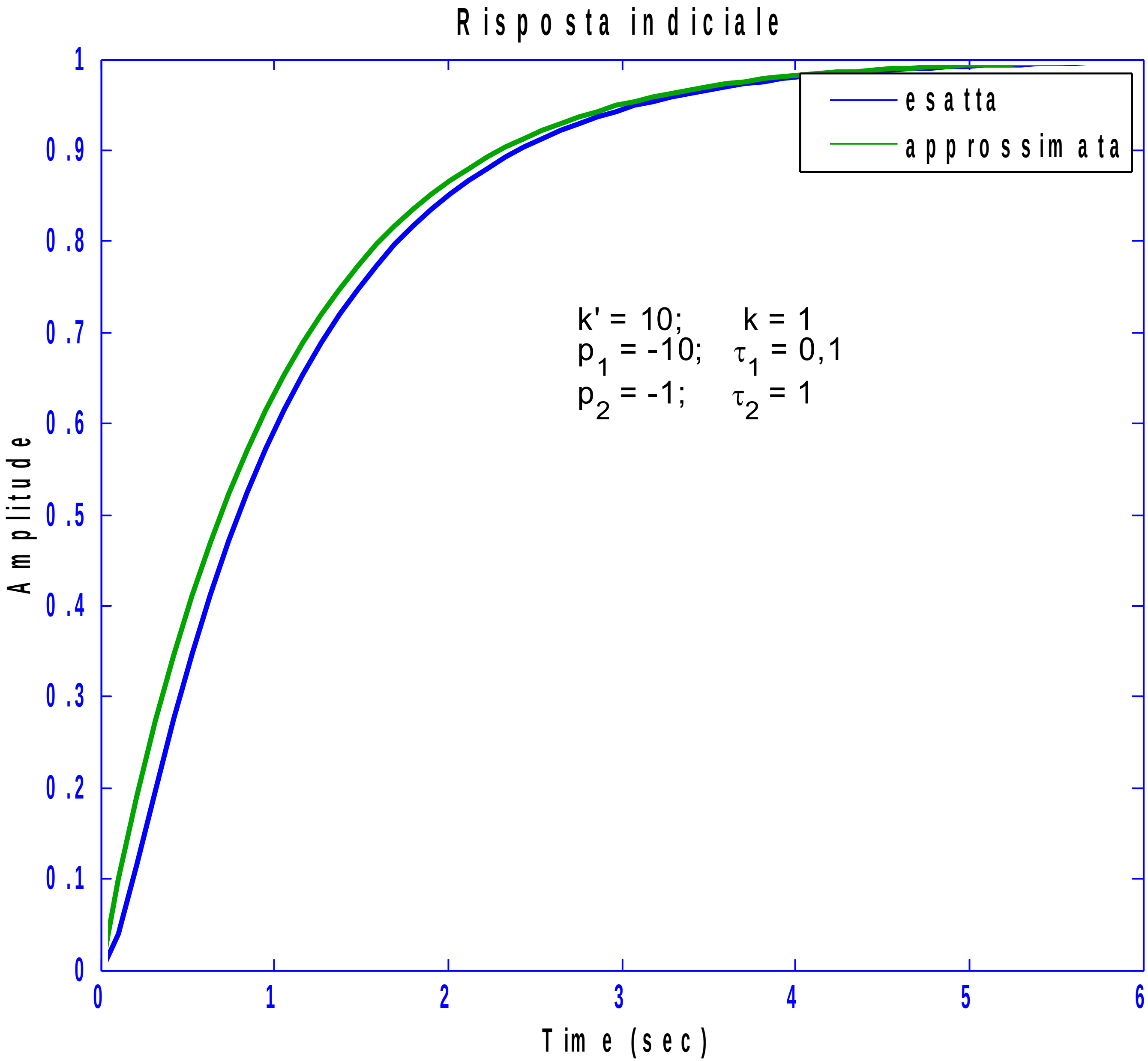
$$|R_1|\ll|R_2|\vee p_1\ll p_2 \quad\Rightarrow\quad w(t)\approx\{R_2 e^{p_2 t}\}\delta_{-1}(t)$$

$$G(s)\approx\frac{K'}{p_1 p_2(\tau_2 s+1)}$$

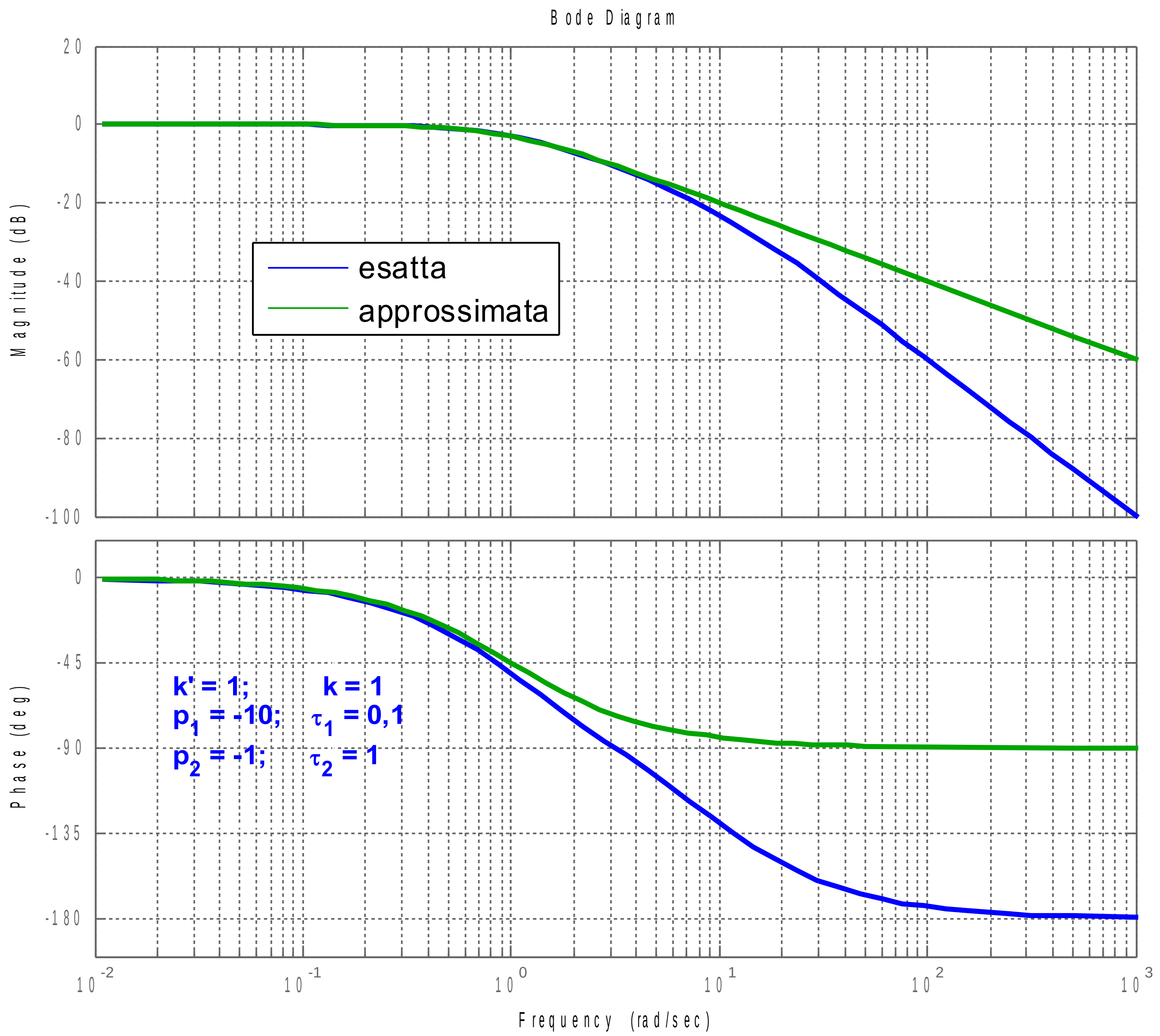
Modelli a modo dominante



Modelli a modo dominante



Modelli a modo dominante



Modelli a modo dominante

In alcuni casi è possibile ridurre l'ordine del modello trascurando gli effetti dinamici caratterizzati da modi poco influenti sulla risposta del sistema: caso con zeri

$$G(s) = K'\frac{s - z_1}{(s - p_1)(s - p_2)} = K\frac{\mu_1 s + 1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} = \frac{R_1}{(s - p_1)} + \frac{R_2}{(s - p_2)}$$

$$R_1 = \lim_{s \to p_1} G(s)(s - p_1) = K'\frac{p_1 - z_1}{p_1 - p_2}; \qquad R_2 = \lim_{s \to p_2} G(s)(s - p_2) = K'\frac{p_2 - z_1}{p_2 - p_1}$$

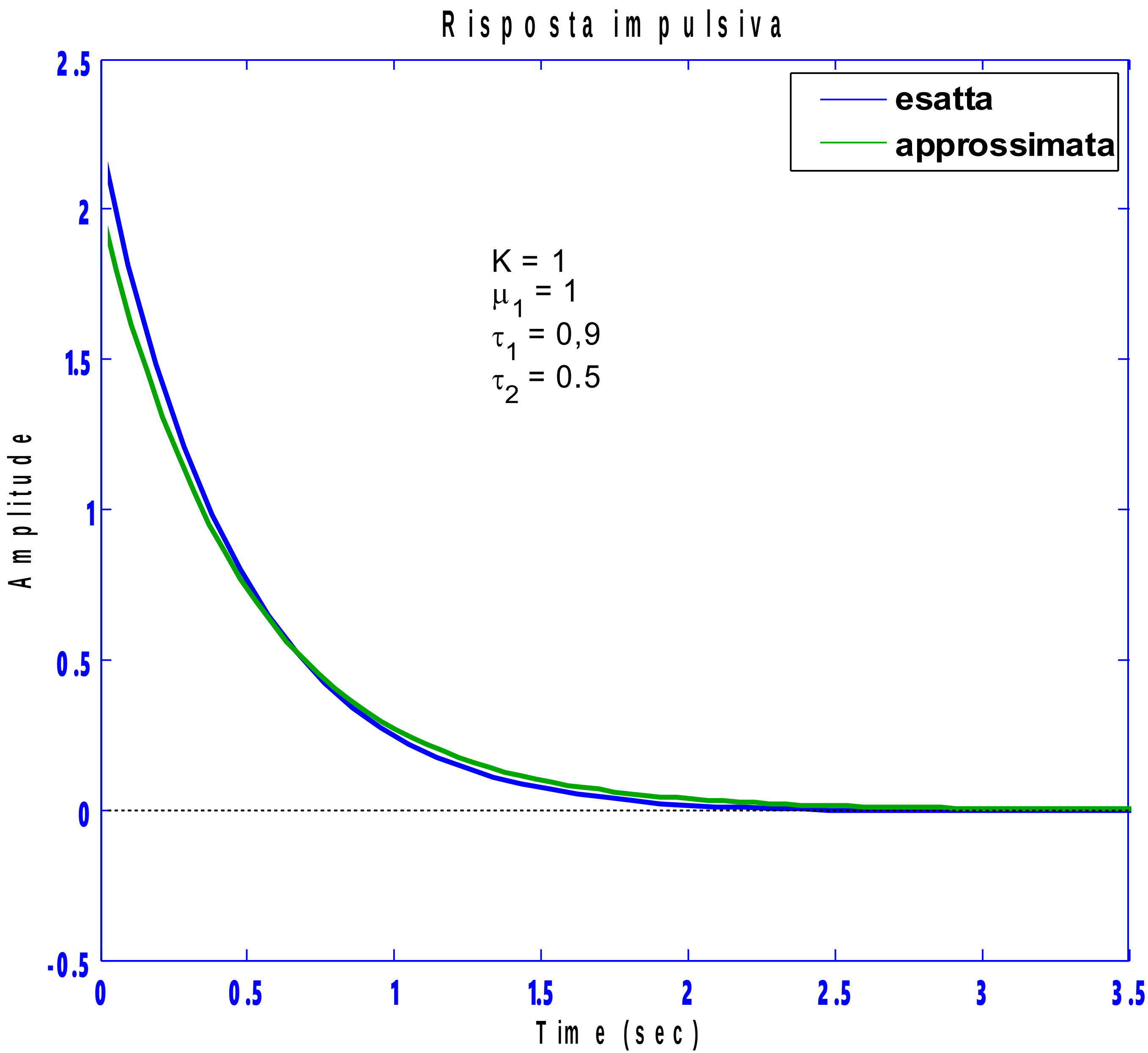
La sua risposta impulsiva è

$$w(t) = L^{-1}\{G(s) * 1\} = \{R_1 e^{p_1 t} + R_2 e^{p_2 t}\}\delta_{-1}(t)$$

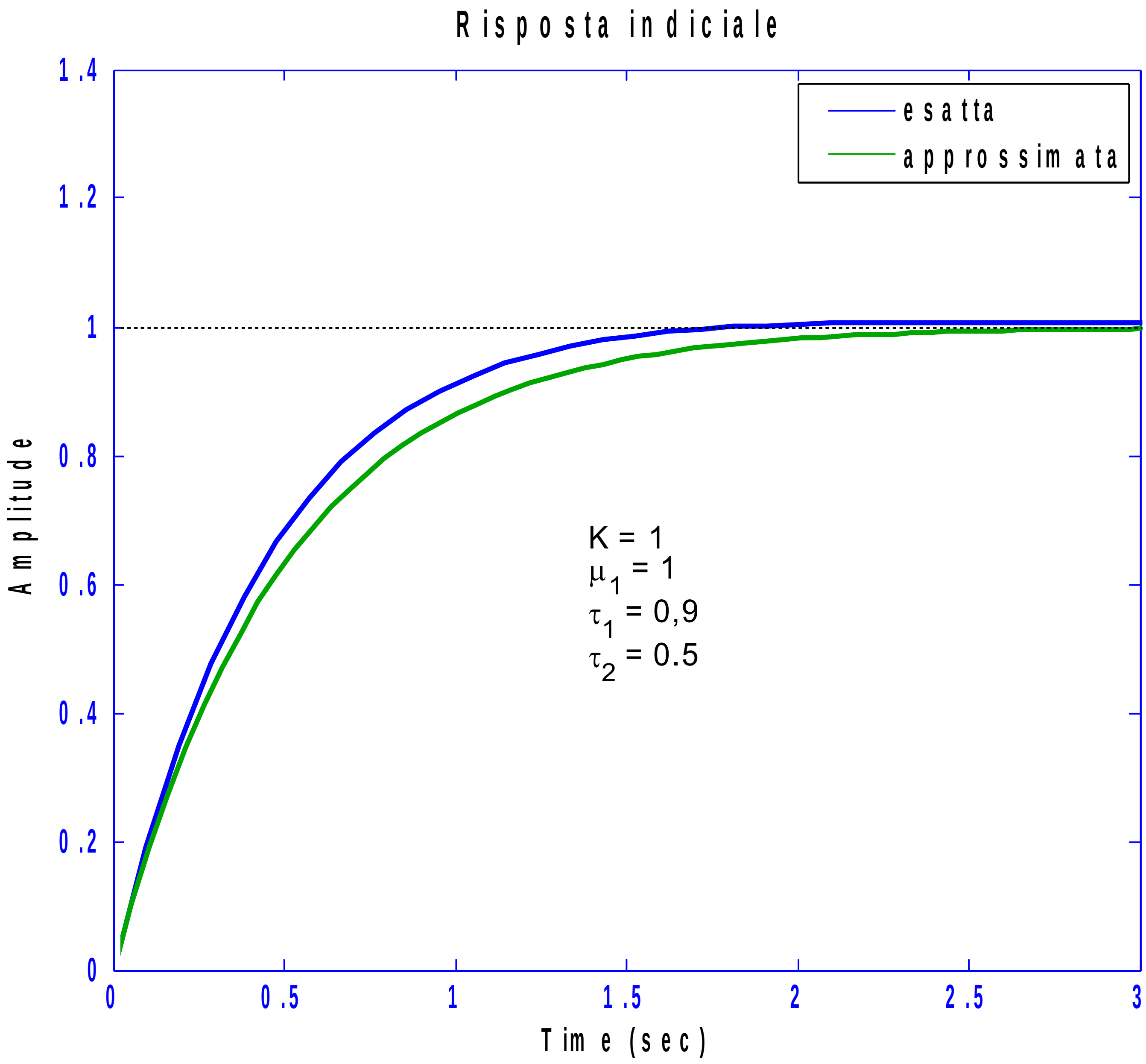
$$|R_1| \ll |R_2| \wedge p_1 \neq p_2 \quad \Rightarrow \quad w(t) \approx \{R_2 e^{p_2 t}\}\delta_{-1}(t)$$

$$G(s) \approx \frac{K}{\tau_2 s + 1}$$

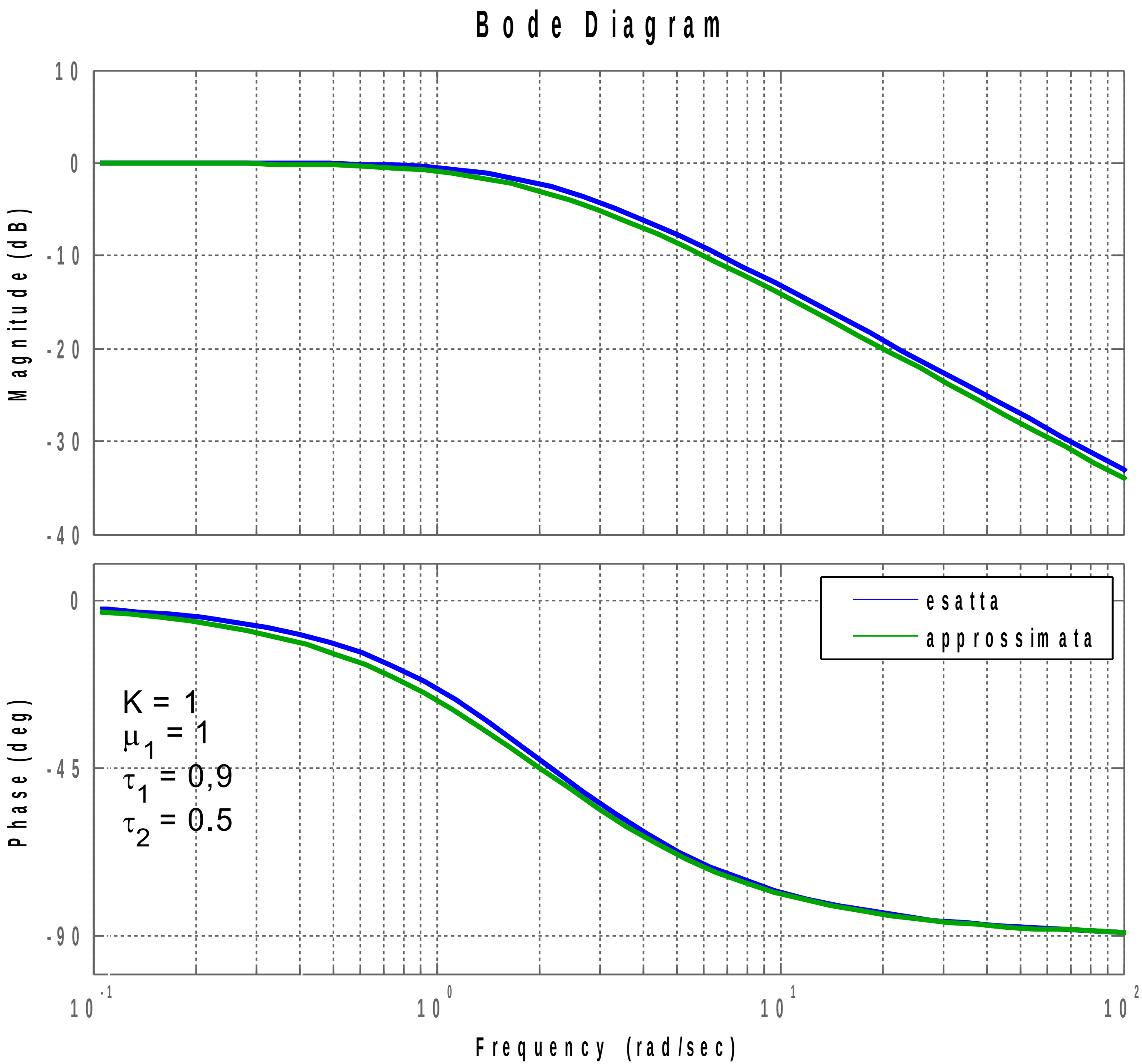
Modelli a modo dominante



Modelli a modo dominante



Modelli a modo dominante



Modelli a modo dominante

La verifica di riducibilità di un modello di un sistema dinamico ad una funzione di trasferimento senza zeri e con un un unico modo prevede due passi:

- Cancellare tutte le coppie polo-zero *(p_i;z_j)* a parte reale negativa tali che

$$\frac{|p_i - z_j|}{|p_i + z_j|} < 0{,}1$$

L'effetto della coppia polo zero vicini nel diagramma di Bode della funzione di trasferimento è trascurabile

Modelli a modo dominante

La verifica di riducibilità di un modello di un sistema dinamico ad una funzione di trasferimento senza zeri e con un un unico modo prevede due passi:

- Cancellare tutte le coppie polo-zero $(p_i;z_j)$ a parte reale negativa tali che

$$\frac{|p_i - z_j|}{|p_i + z_j|} < 0{,}1$$

- Considerare il polo (p_h) a parte reale negativa di modulo minimo diverso da zero ed eliminare tutti i poli (p_k) a parte reale negativa tali che

$$\frac{|\Re(p_h)|}{|\Re(p_k)|} < 0{,}2$$

Modelli a modo dominante

La verifica di riducibilità di un modello di un sistema dinamico ad una funzione di trasferimento senza zeri e con un un unico modo prevede due passi:

- Cancellare tutte le coppie polo-zero *(p_i;z_j)* a parte reale negativa tali che

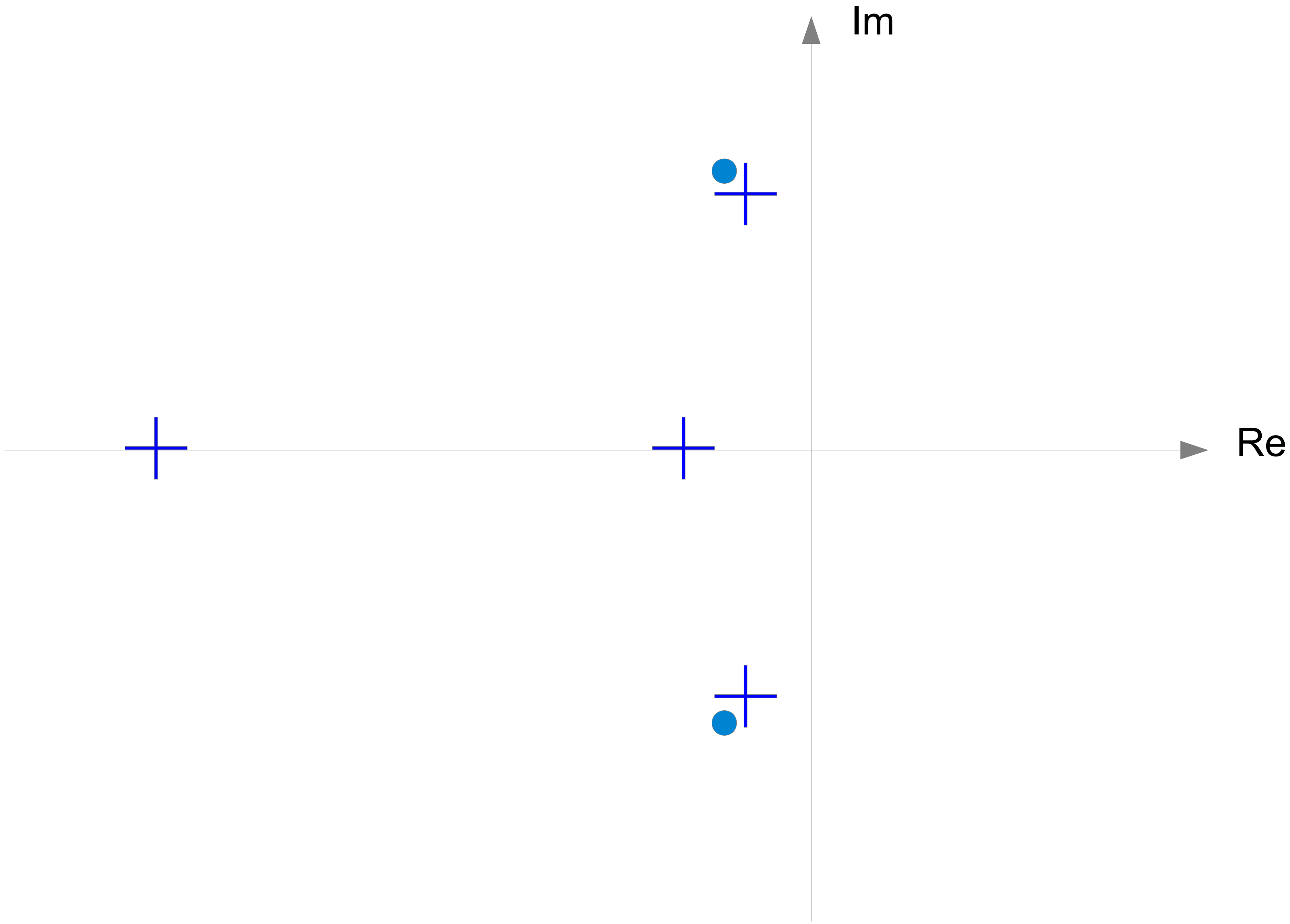
$$\frac{|p_i - z_j|}{|p_i + z_j|} < 0{,}1$$

- Considerare il polo *(p_h)* a parte reale negativa di modulo minimo diverso da zero ed eliminare tutti i poli *(p_k)* a parte reale negativa tali che

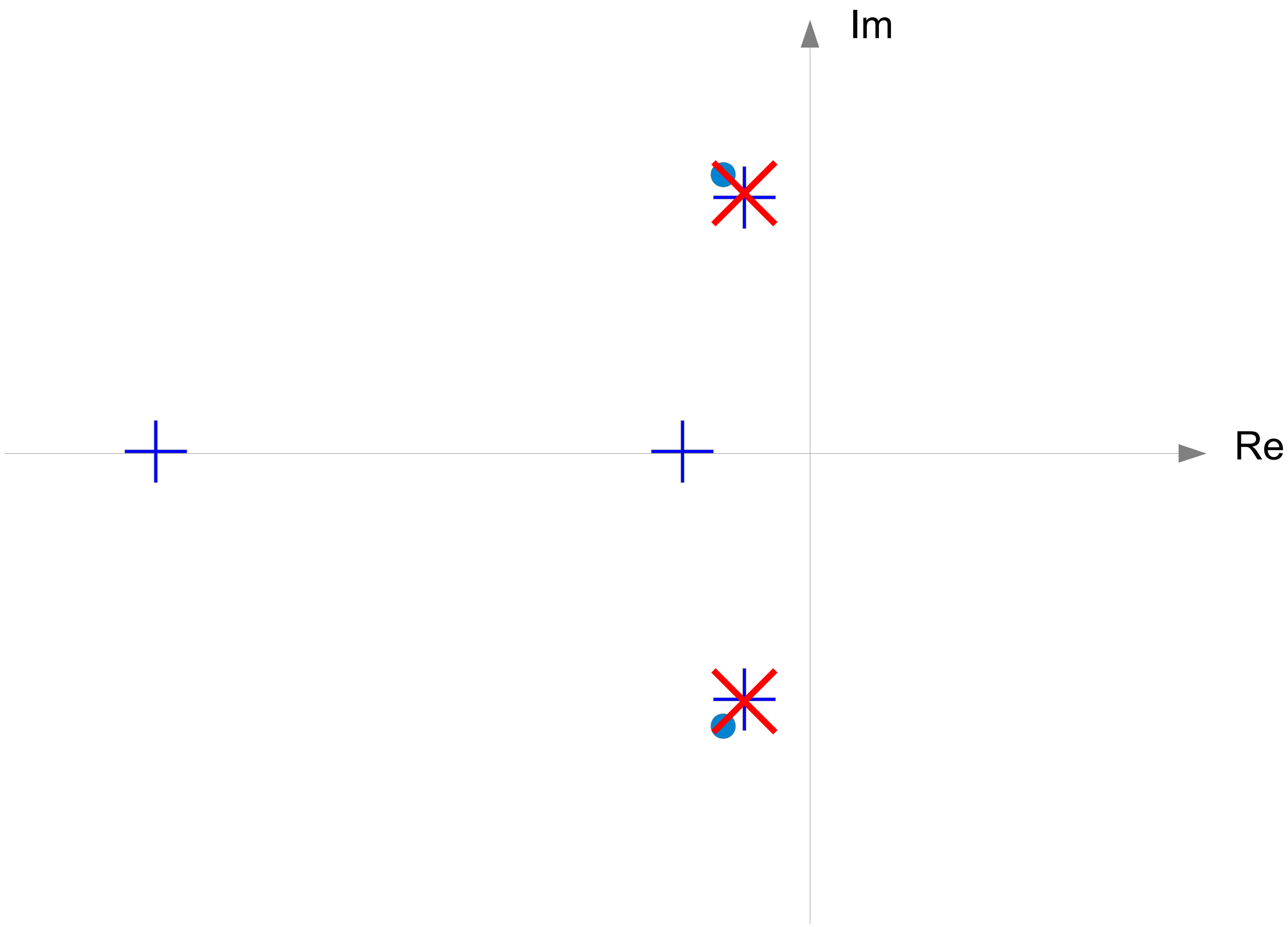
$$\frac{|\Re(p_h)|}{|\Re(p_k)|} < 0{,}2$$

Dopo τ_h secondi il modo associato al polo p_k contribuisce alla risposta solo per l'1% mentre quello associato al polo p_k contribuisce per il 37%

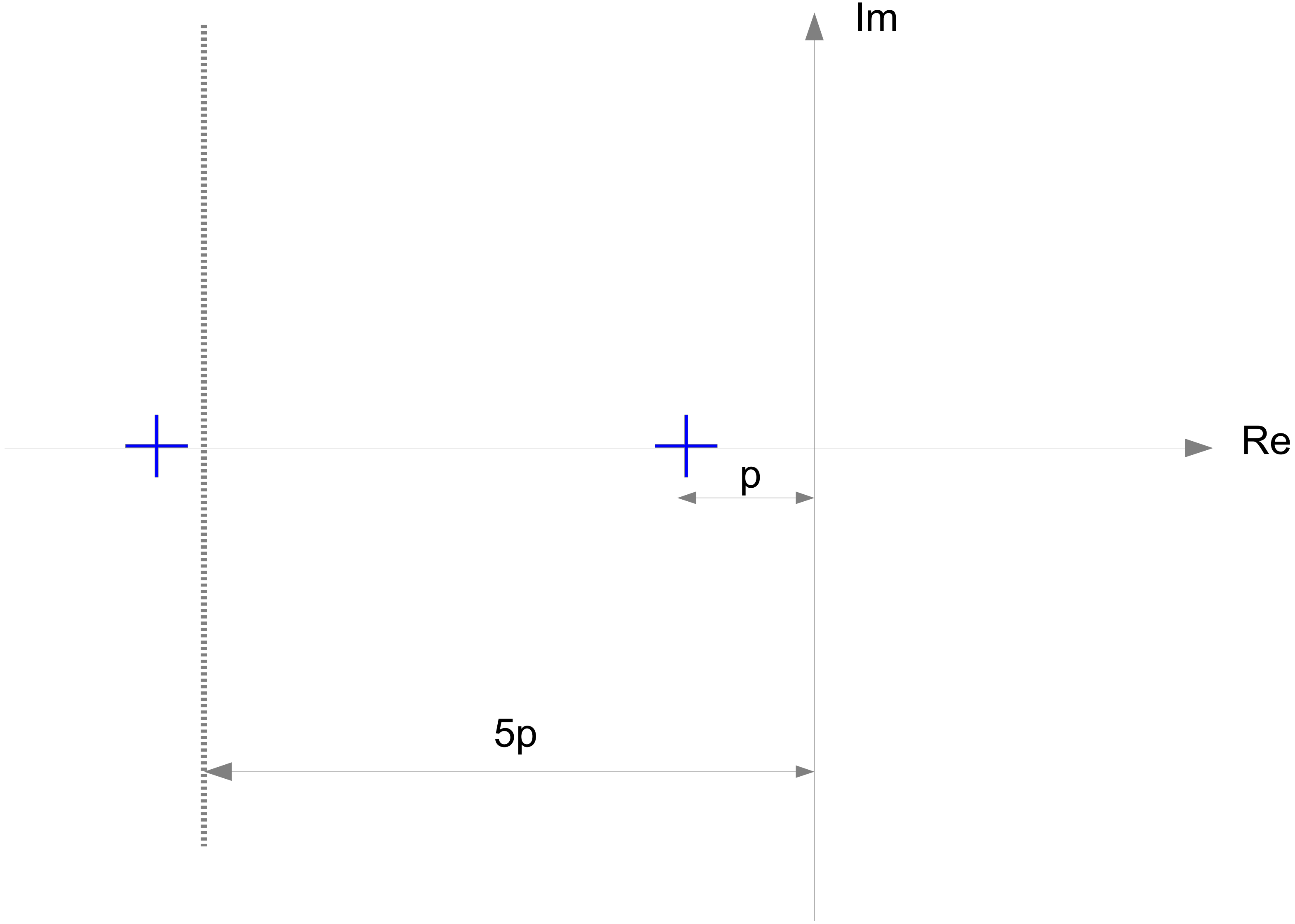
Modelli a modo dominante



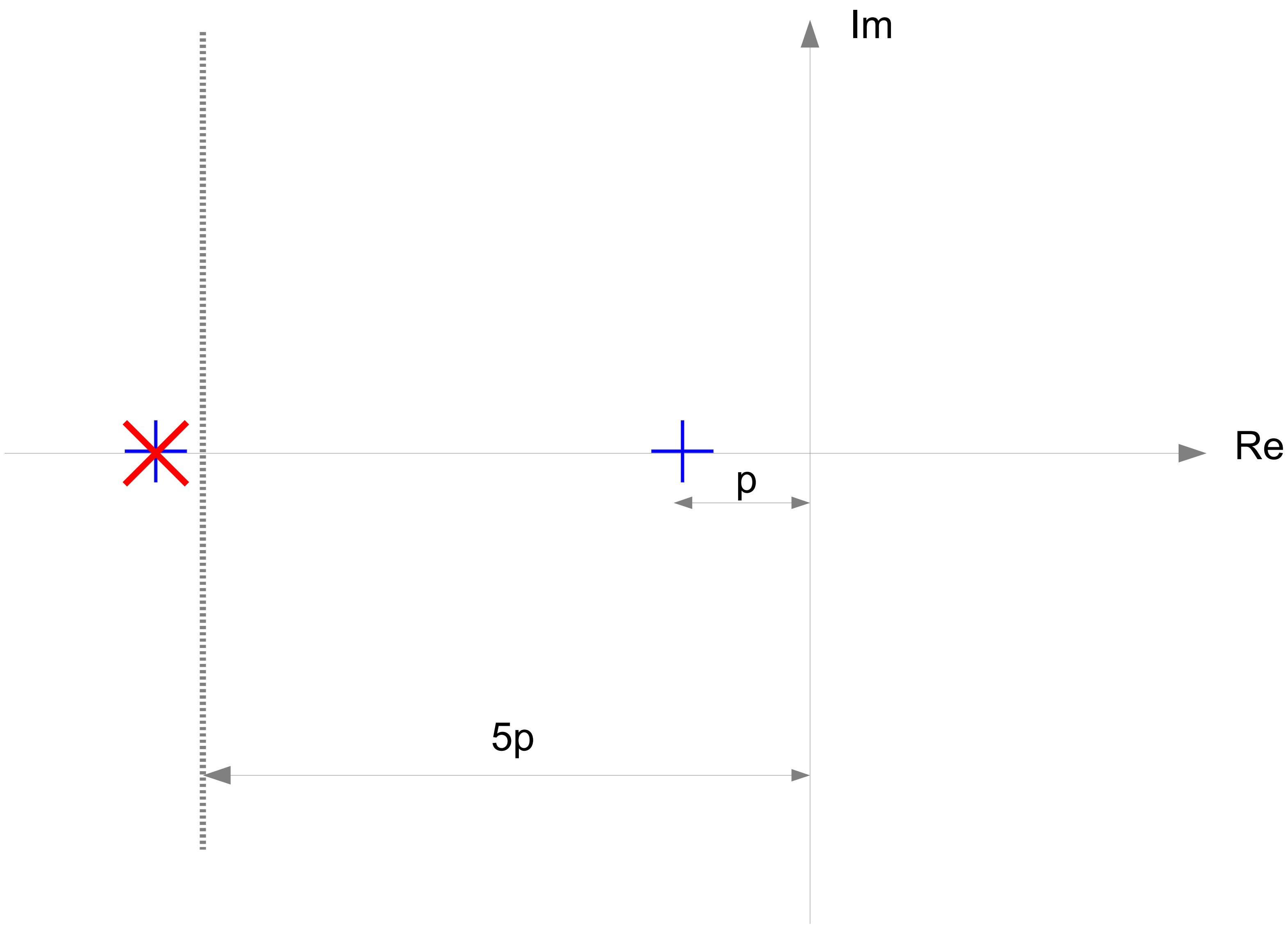
Modelli a modo dominante



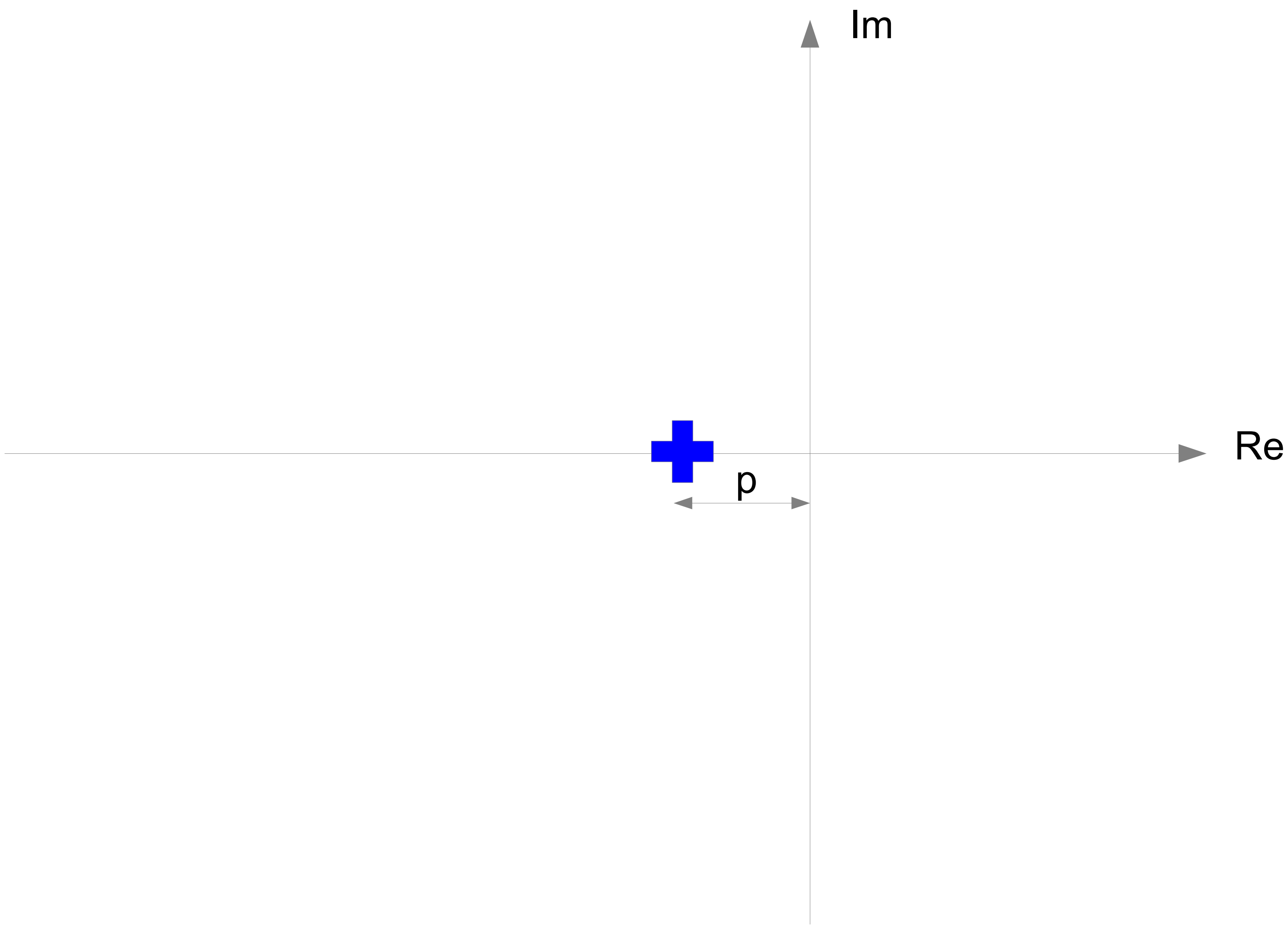
Modelli a modo dominante



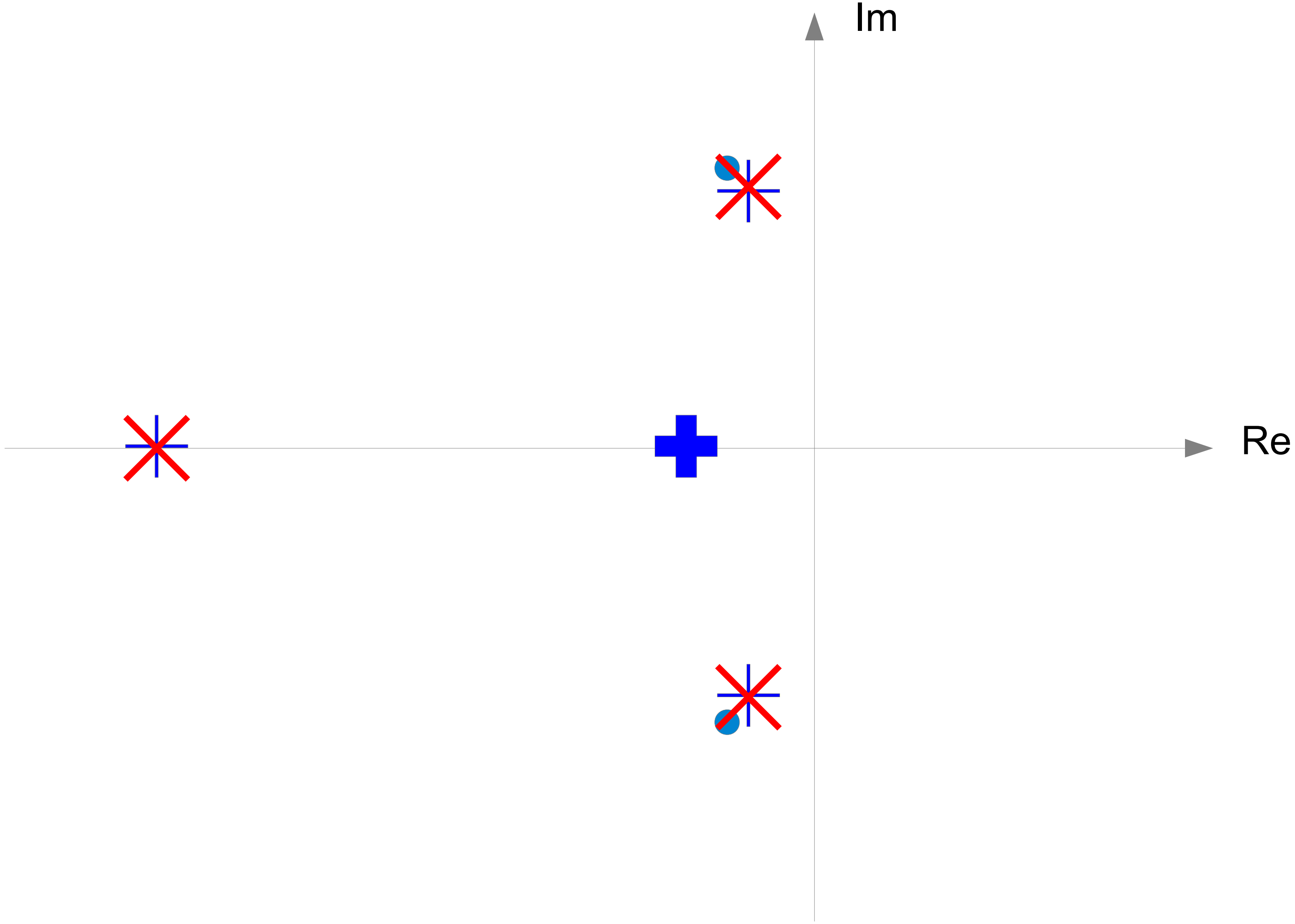
Modelli a modo dominante



Modelli a modo dominante



Modelli a modo dominante



Modelli a modo dominante

Una volta proceduto alle operazioni di riduzione si verifica che il modello sia ricondotto ad una funzione di trasferimento senza zeri e con un polo reale negativo o una coppia di poli complessi-coniugati a parte reale negativa.

La presenza di poli a parte reale positiva comporta che il sistema sia caratterizzato da un comportamento instabile e quindi i modi relativi a tali poli sono “dominanti”.

Non è ammissibile eliminare dal modello una coppia polo-zero a parte reale positiva in quanto il residuo associato, pur piccolo, è moltiplicativo di una funzione crescente nel tempo e quindi “dominante”.