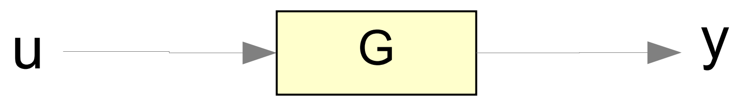
Sistemi interconnessi elementari

- Sistemi in parallelo
- Sistemi in serie
- Sistemi a ciclo chiuso
- Cancellazioni polo-zero

Sistemi interconnessi elementari

Un qualunque sistema dinamico lineare può essere rappresentato mediante la sua funzione di trasferimento: un rapporto di polinomi nella variabile complessa s



$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}; \qquad Y(s)=G(s)U(s)$$

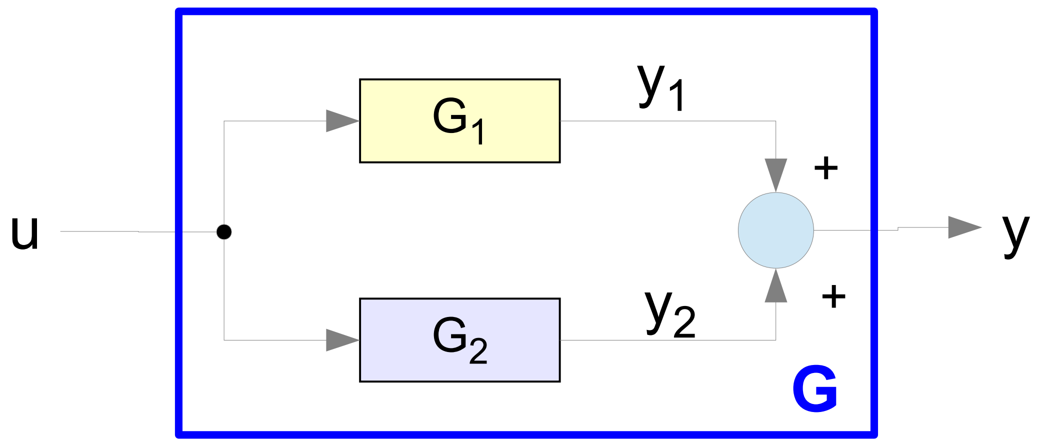
$$N(s)=\sum_{i=0}^{i=m} b_i s^i = b_m \prod_{i=1}^{m} (s-z_i)$$

z_i: zeri del sistema

$$D(s)=s^n+\sum_{i=0}^{i=n-1} a_i s^i = \prod_{i=1}^{n} (s-p_i)$$

p_i: poli del sistema

Sistemi in parallelo



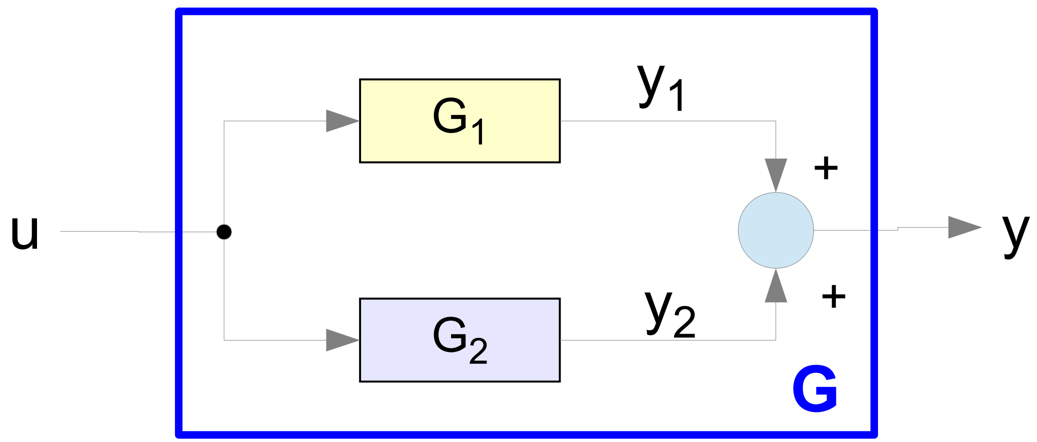
$$Y(s)=G(s)U(s)$$

$$G(s)=G_1(s)+G_2(s)=\frac{N_1(s)}{D_1(s)}+\frac{N_2(s)}{D_2(s)}=\frac{N_1(s)D_2(s)+N_2(s)D_1(s)}{D_1(s)D_2(s)}$$

Un sistema costituito da sotto-sistemi connessi in parallelo è stabile solo e solo se tutti i sistemi sono stabili.

L'insieme dei poli del sistema complessivo è l'unione degli insiemi dei poli dei sotto-sistemi costituenti.

Sistemi in parallelo

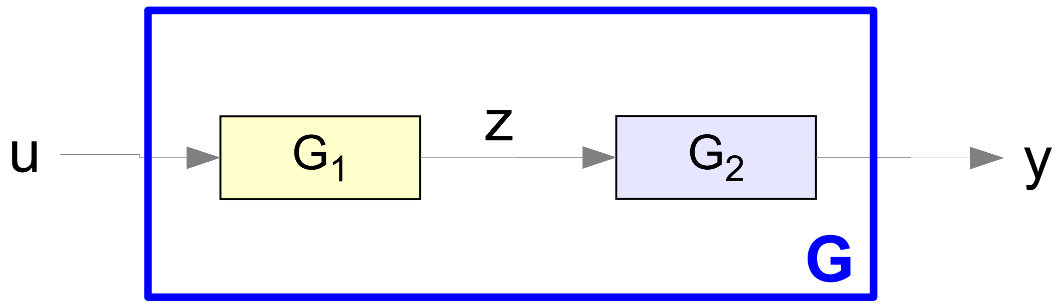


$$Y(s)=G(s)U(s)$$

$$G(s)=G_1(s)+G_2(s)=\frac{N_1(s)}{D_1(s)}+\frac{N_2(s)}{D_2(s)}=\frac{N_1(s)D_2(s)+N_2(s)D_1(s)}{D_1(s)D_2(s)}$$

Gli zeri del sistema complessivo non corrispondono con alcuno degli zeri e dei poli dei sotto-sistemi costituenti

Sistemi in serie



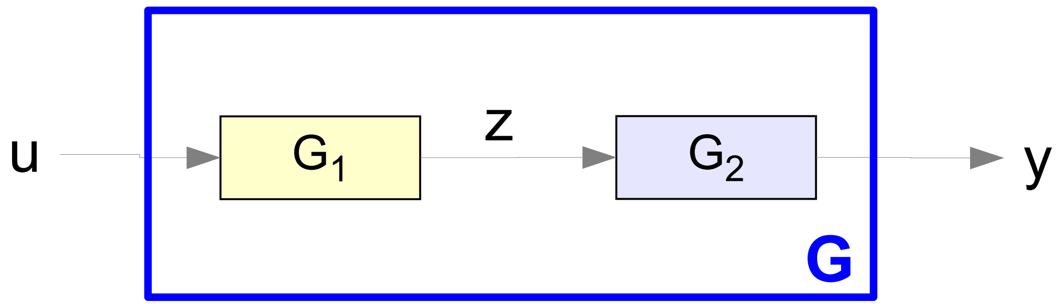
$$Y(s) = G(s)\,U(s)$$

$$G(s) = G_1(s)\,G_2(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)}\,\frac{N_2(s)}{D_2(s)}$$

Un sistema costituito da sotto-sistemi connessi in serie è stabile solo e solo se tutti i sistemi sono stabili.

L'insieme dei poli del sistema complessivo è l'unione degli insiemi dei poli dei sotto-sistemi costituenti.

Sistemi in serie



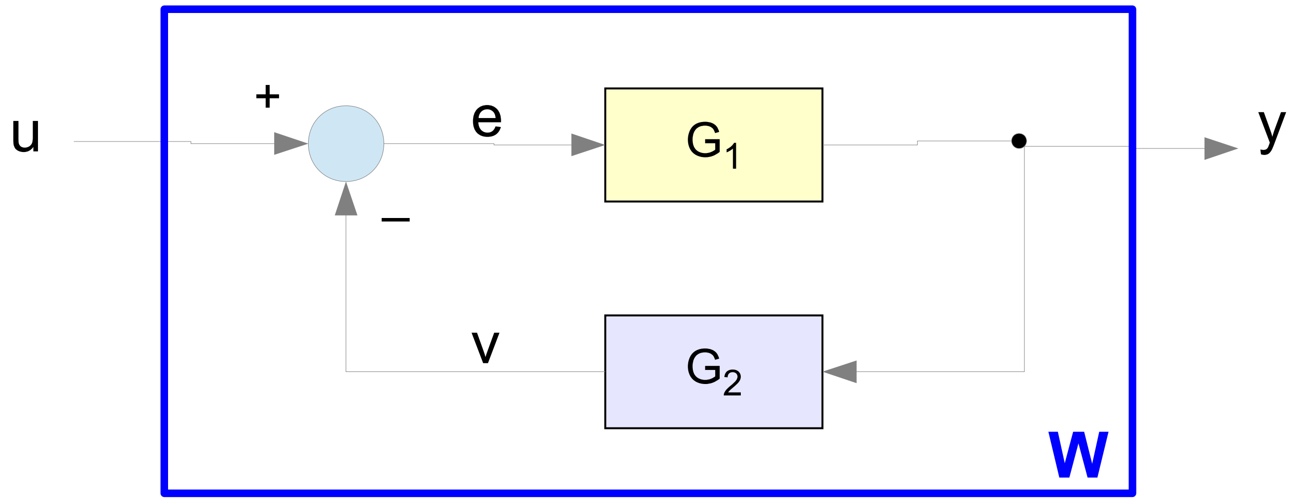
$$Y(s) = G(s)\,U(s)$$

$$G(s) = G_1(s)\,G_2(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)}\,\frac{N_2(s)}{D_2(s)}$$

L'insieme degli zeri del sistema complessivo è l'unione degli insiemi degli zeri dei sotto-sistemi costituenti.

È possibile la cancellazione polo-zero tra radici comuni del polinomio al numeratore di un sotto-sistema e del polinomio a denominatore di un altro sotto-sistema (da considerare con attenzione)

Sistemi a ciclo chiuso



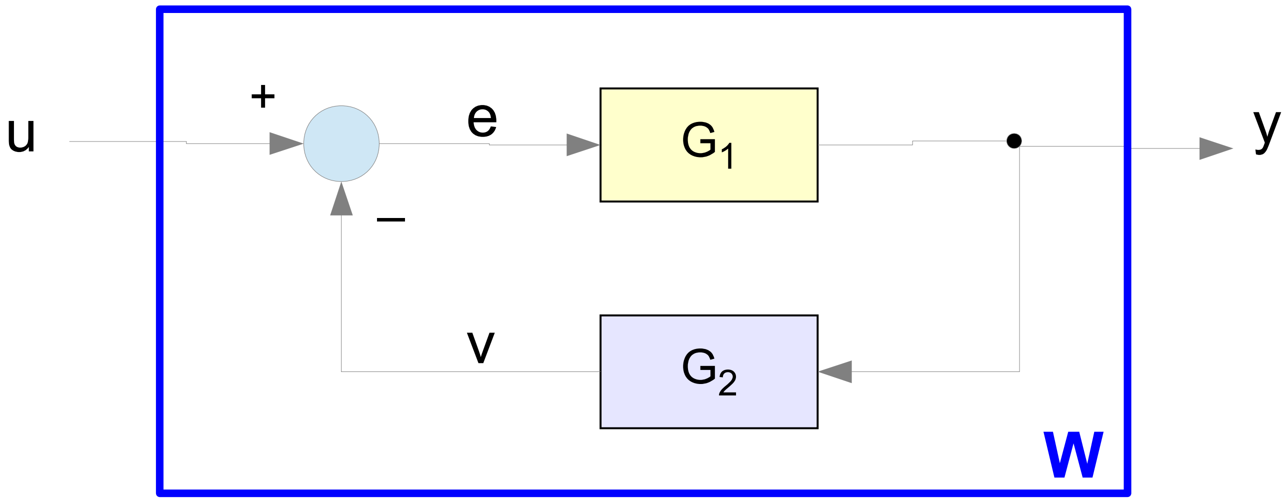
$$Y(s)=W(s)U(s)$$

$$W(s)=\frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}=\frac{\dfrac{N_1(s)}{D_1(s)}}{1+\dfrac{N_1(s)}{D_1(s)}\dfrac{N_2(s)}{D_2(s)}}=\frac{N_1(s)D_2(s)}{D_1(s)D_2(s)+N_1(s)N_2(s)}$$

La stabilità di un sistema costituito da sotto-sistemi connessi a ciclo chiuso è indipendente dalla stabilità dei sotto-sistemi componenti.

I poli del sistema complessivo non corrispondono con alcuno degli zeri e dei poli dei sotto-sistemi costituenti, a meno di fattori comuni.

Sistemi a ciclo chiuso

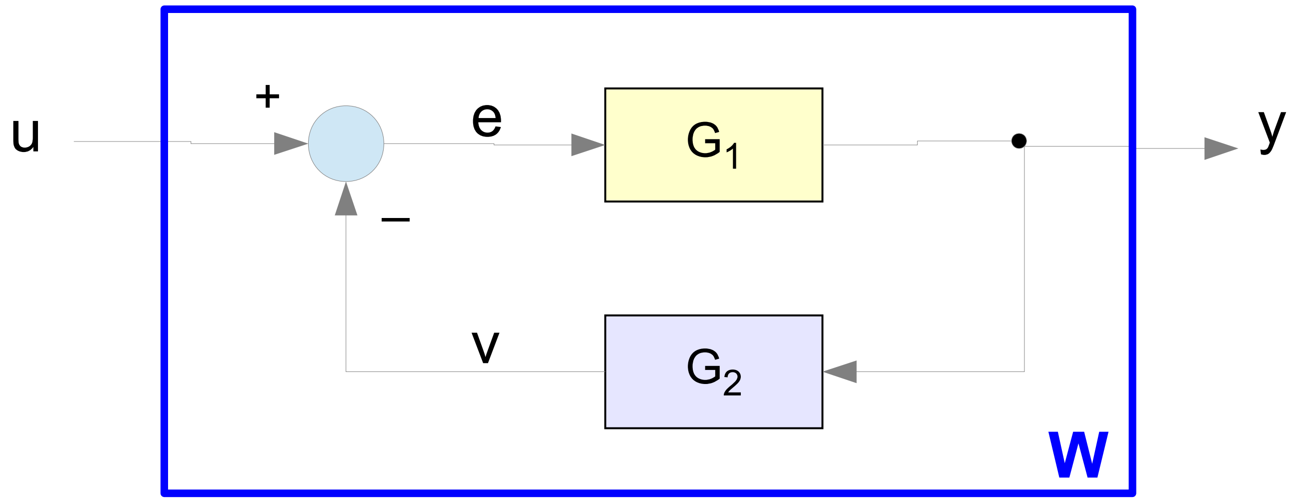


$$Y(s)=W(s)U(s)$$

$$W(s)=\frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}=\frac{\dfrac{N_1(s)}{D_1(s)}}{1+\dfrac{N_1(s)}{D_1(s)}\dfrac{N_2(s)}{D_2(s)}}=\frac{N_1(s)D_2(s)}{D_1(s)D_2(s)+N_1(s)N_2(s)}$$

L'insieme degli zeri del sistema complessivo è l'unione degli insiemi degli zeri del sotto-sistema di catena diretta e dell'insieme dei poli del sotto-sistema in retroazione.

Sistemi a ciclo chiuso



$$Y(s) = W(s)\,U(s)$$

$$G_1(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}$$

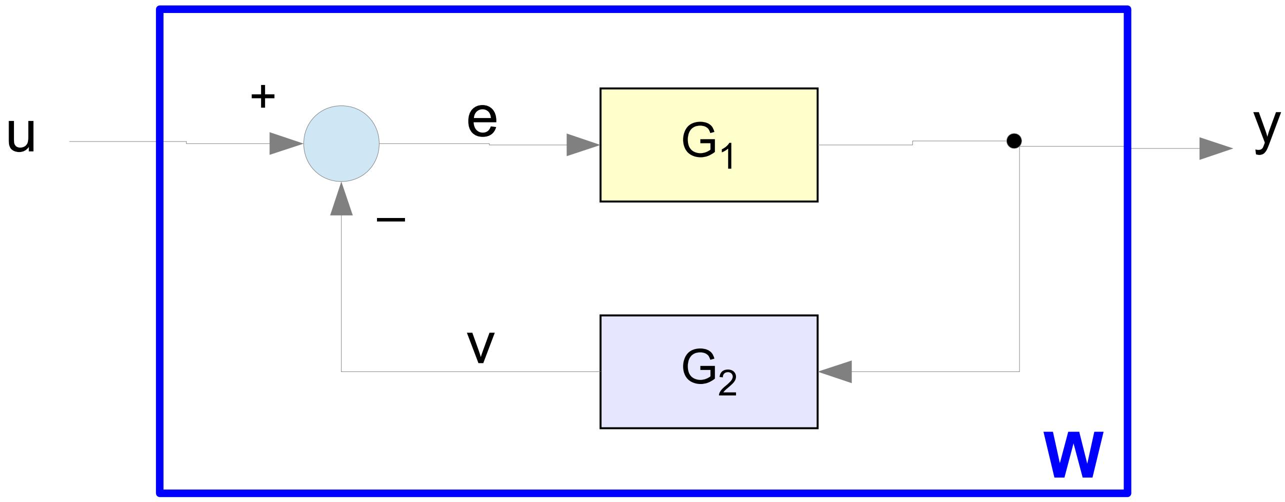
$$G_2(s) = \frac{10}{s+5}$$

$$W(s) = \frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)} = \frac{(s+1)(s+5)}{s(s+2)(s+5)+10(s+1)} = \frac{(s+1)(s+5)}{s^3+7s^2+20s+10}$$

$$p_1 = -0{,}6264\,; \qquad p_{2,3} = -3{,}1879 \pm j\,2{,}4202$$

I poli del sistema complessivo non corrispondono con alcuno degli zeri e dei poli dei sotto-sistemi costituenti.

Sistemi a ciclo chiuso



$$Y(s) = W(s)\,U(s)$$

$$G_1(s) = \frac{10}{s(s+2)}$$

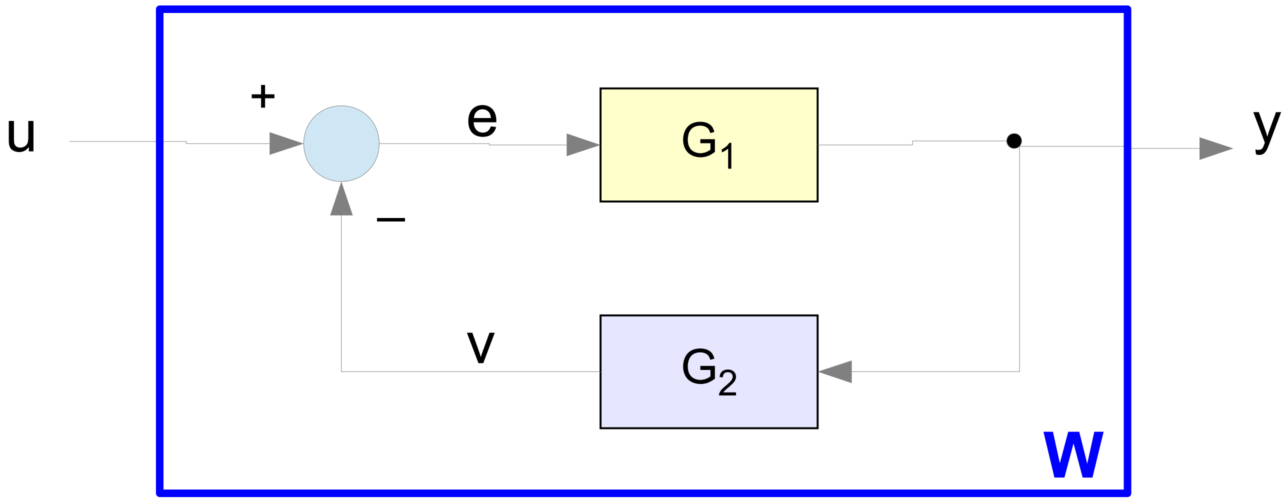
$$G_2(s) = \frac{10}{s+5}$$

$$W(s) = \frac{G_1(s)}{1+G_1(s)\,G_2(s)} = \frac{10(s+5)}{s(s+2)(s+5)+100} = \frac{10(s+5)}{s^3+7s^2+10s+100}$$

$$p_1 = -7{,}4572\,; \qquad p_{2,3} = +0{,}2286 \pm j\,3{,}6548$$

La stabilità di un sistema costituito da sotto-sistemi connessi a ciclo chiuso è indipendente dalla stabilità dei sotto-sistemi componenti.

Cancellazioni polo-zero



$$Y(s)=W(s)U(s)$$

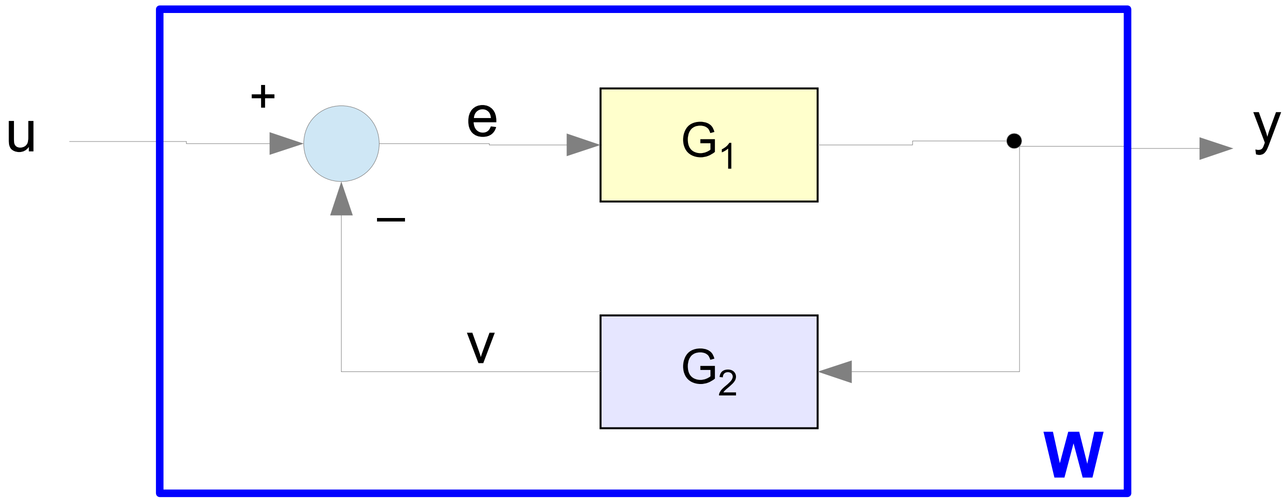
$$G_1(s)=\frac{(s-a)N'_1(s)}{D_1(s)}$$

$$G_2(s)=\frac{N_2(s)}{(s-a)D'_2(s)}$$

$$W(s)=\frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}=\frac{\dfrac{(s-a)N'_1(s)}{D_1(s)}}{1+\dfrac{\cancel{(s-a)}N'_1(s)}{D_1(s)}\dfrac{N_2(s)}{\cancel{(s-a)}D'_2(s)}}=\frac{(s-a)N'_1(s)D'_2(s)}{D_1(s)D'_2(s)+N_1'(s)N_2(s)}$$

La cancellazione si verifica nel sistema a ciclo aperto ma lo zero della catena diretta comune con un polo della retroazione è invariante

Cancellazioni polo-zero



$$Y(s) = W(s)U(s)$$

$$G_1(s) = \frac{N_1(s)}{(s-a)D'_1(s)}$$

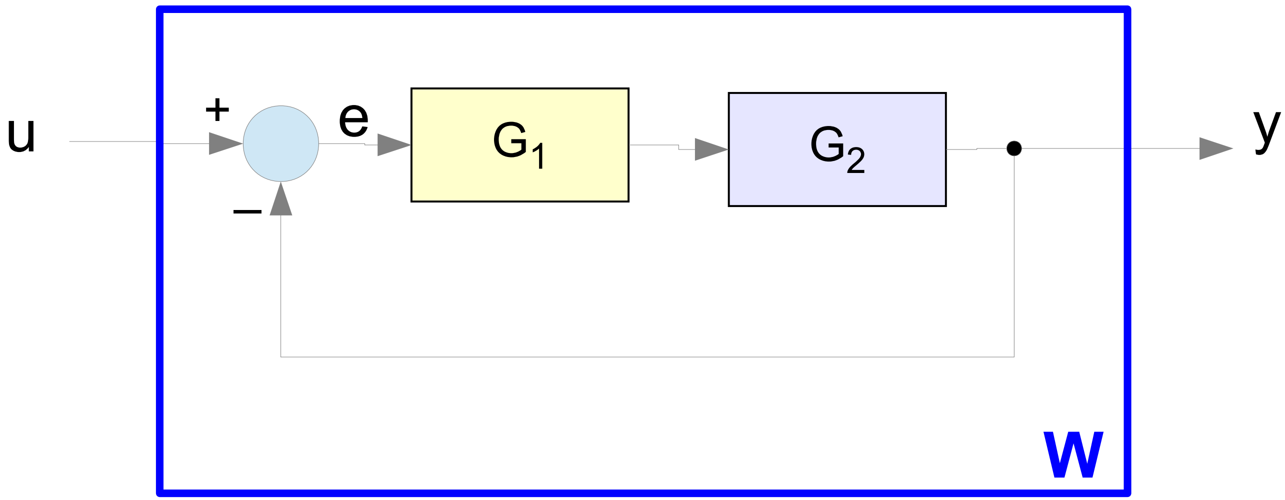
$$G_2(s) = \frac{(s-a)N'_2(s)}{D_2(s)}$$

$$W(s) = \frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)} = \frac{\dfrac{N_1(s)}{(s-a)D'_1(s)}}{1+\dfrac{N_1(s)}{\cancel{(s-a)}D'_1(s)}\,\dfrac{\cancel{(s-a)}N'_2(s)}{D_2(s)}} =$$

$$= \frac{N_1(s)D_2(s)}{(s-a)\left(D_1'(s)D_2(s)+N_1(s)N_2'(s)\right)}$$

La cancellazione si verifica nel sistema a ciclo aperto ma il polo della catena diretta comune con uno zero della retroazione è invariante

Cancellazioni polo-zero



$$Y(s) = W(s)U(s)$$

$$G_1(s) = \frac{N_1(s)}{(s-a)D'_1(s)}$$

$$G_2(s) = \frac{(s-a)N'_2(s)}{D_2(s)}$$

$$W(s) = \frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)} = \frac{\dfrac{N_1(s)}{\cancel{(s-a)}D'_1(s)}\dfrac{\cancel{(s-a)}N'_2(s)}{D_2(s)}}{1+\dfrac{N_1(s)}{\cancel{(s-a)}D'_1(s)}\dfrac{\cancel{(s-a)}N'_2(s)}{D_2(s)}} =$$

$$= \frac{N_1(s)N_2(s)}{D_1'(s)D_2(s)+N_1(s)N_2'(s)}$$

La cancellazione si verifica nel sistema in catena diretta e non compare nel sistema a ciclo chiuso

Cancellazioni polo-zero

$$u \longrightarrow \boxed{G_1} \xrightarrow{\;z\;} \boxed{G_2} \longrightarrow y$$

$$Y(s)=W(s)\,U(s)$$

$$G_1(s)=\frac{N_1(s)}{(s-a)\,D'_1(s)}$$

$$G_2(s)=\frac{(s-a)\,N'_2(s)}{D_2(s)}$$

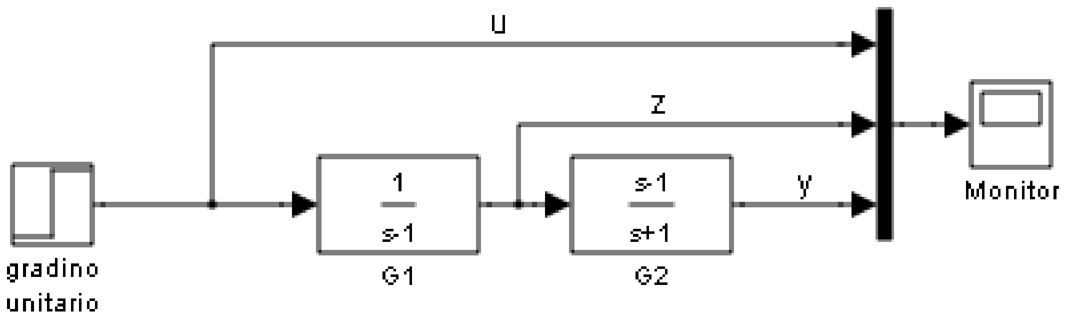
$$G(s)=\frac{N_1(s)}{\cancel{(s-a)}\,D'_1(s)}\,\frac{\cancel{(s-a)}\,N'_2(s)}{D_2(s)}==\frac{N_1(s)\,N_2(s)}{D_1'(s)\,D_2(s)}$$

Il modo corrispondente alla copia polo-zero cancellata scompare nel legame ingresso-uscita ma non nella dinamica interna, dello stato, del sistema

- Dal punto di vista pratico non è sensato immaginare una cancella perfetta e quindi il modo permane con coefficiente di residuo piccolo

- Dal punto di vista teorico il modo, anche cancellato perfettamente, è relativo ad una variabile di stato non osservabile/controllabile e quindi non può comparire nel legame ingresso-uscita del sistema

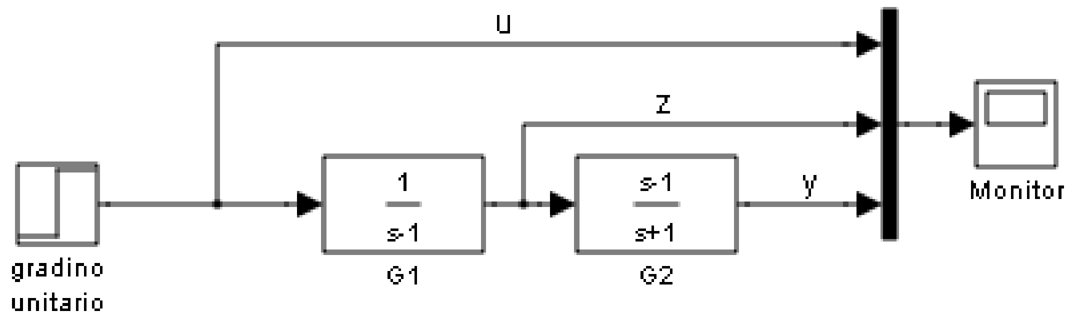
Cancellazioni polo-zero

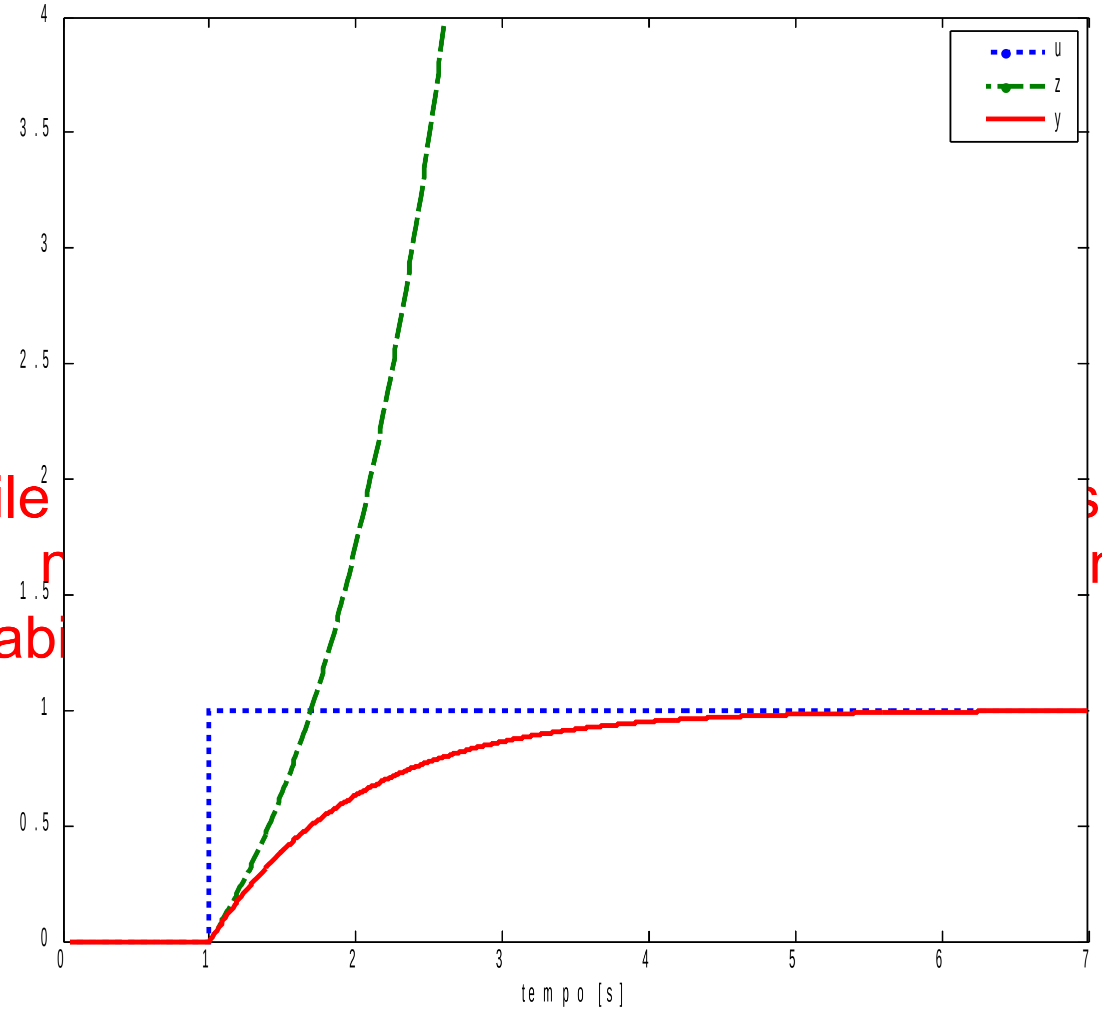


$$G(s) = \frac{1}{(s-1)} \frac{(s-1)}{s+1} = \frac{1}{s+1}$$

Il modo instabile del blocco G1 cancellato dallo zero positivo del blocco G2 scompare nel legame ingresso-uscita ma non nella dinamica interna, la variabile z, del sistema

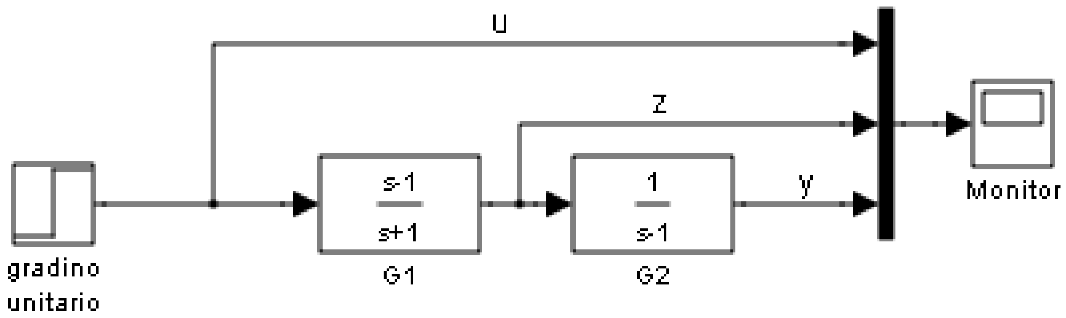
Cancellazioni polo-zero





Il modo instabile … sitivo del blocco
G2 scompare n… nella dinamica
interna, la variabi…

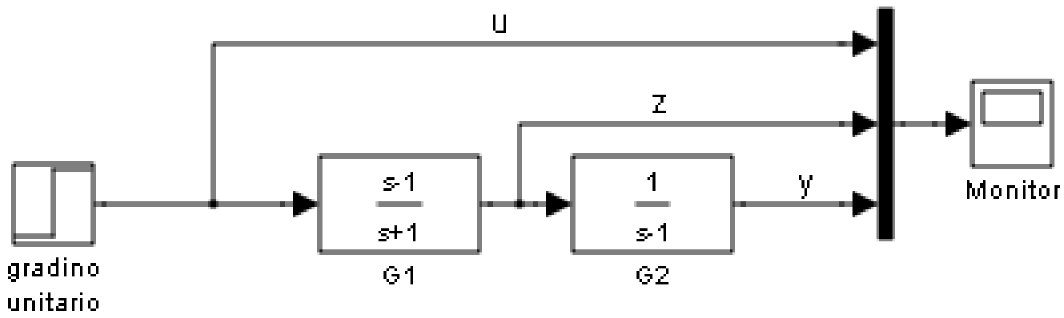
Cancellazioni polo-zero

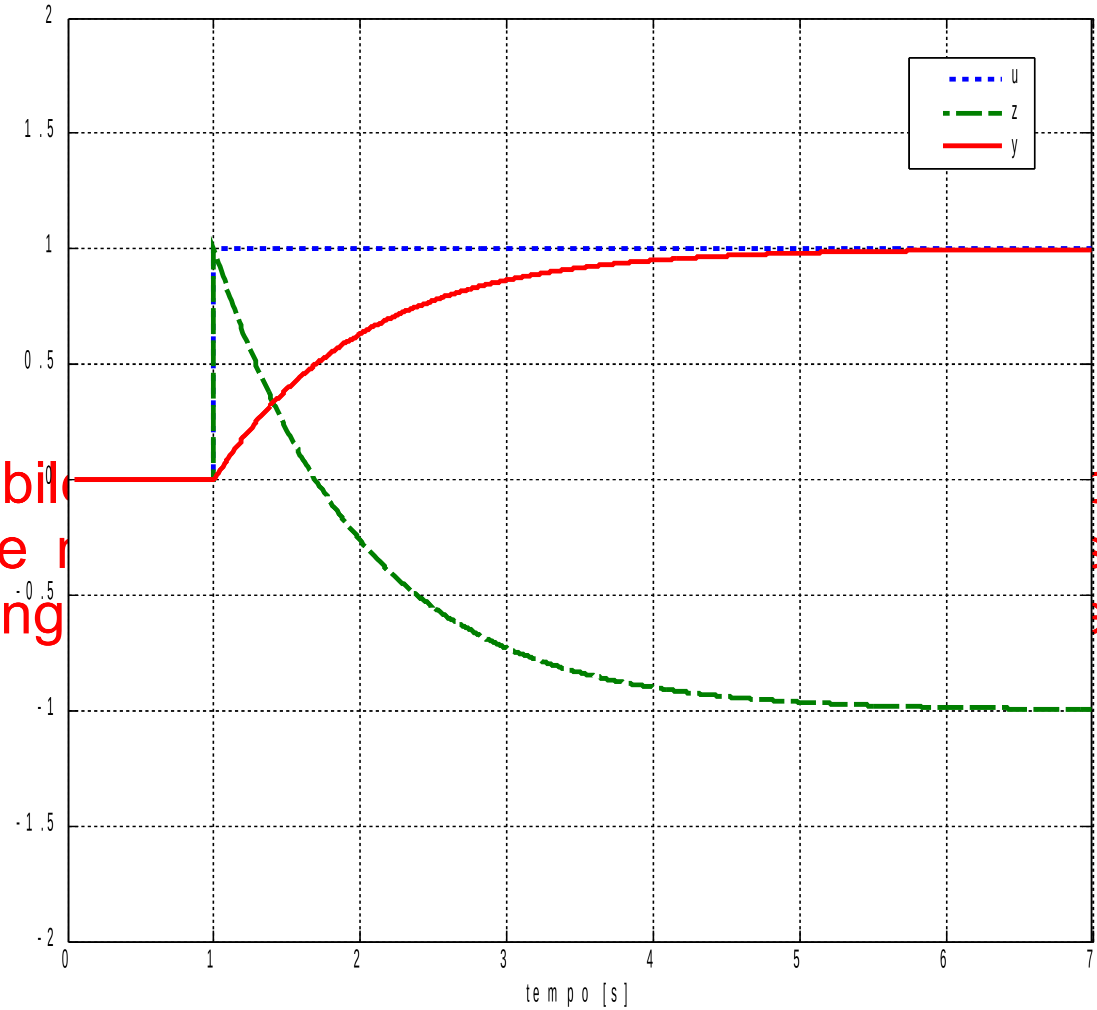


$$G(s)=\frac{(s-1)}{s+1}\frac{1}{(s-1)}=\frac{1}{s+1}$$

Il modo instabile del blocco G1 cancellato dallo zero positivo del blocco G2 scompare nel legame ingresso-uscita e, pur presente, non viene eccitato dall'ingresso per la proprietà bloccante degli zeri

Cancellazioni polo-zero





Il modo instabil … ositivo del blocco
G2 scompare r … sente, non viene
eccitato dall'ing … eri

Cancellazioni polo-zero

MAI

procedere ad una cancellazione polo-zero se a parte reale positiva *(nel semipiano destro del piano complesso)*