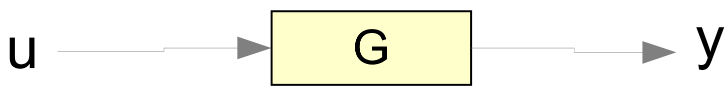
Risposta armonica

- Risposta forzata con ingresso armonico
- Rilevazione sperimentale della risposta armonica
- Identificazione del modello nel dominio della frequenza

Risposta forzata con ingresso armonico

La risposta forzata di un qualunque sistema dinamico lineare può essere valutata a partire dalla sua funzione di trasferimento: un rapporto di polinomi nella variabile complessa s



$$Y(s)=G(s)U(s)$$

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)};\qquad N(s)=\sum_{i=0}^{i=m} b_i s^i = b_m \prod_{i=1}^{m}(s-z_i)\qquad D(s)=s^n+\sum_{i=0}^{i=n-1} a_i s^i = \prod_{i=1}^{n}(s-p_i)$$

z_i: zeri del sistema

p_i: poli del sistema

La variabile complessa s può essere valutata lungo l'asse immaginario: $s = j\omega$

$$G(j\omega)=K'\frac{(j\omega)^m+\sum_{i=0}^{i=m-1} b_i(j\omega)}{(j\omega)^n+\sum_{i=0}^{i=n-1} a_i(j\omega)^i}=K\frac{(j\omega)^{\kappa}\prod_{i=1}^{m_1}(1+j\omega\mu_i)\prod_{i=1}^{m_2}\left(1+2\zeta_i\frac{j\omega}{\varpi_{n_i}}+\left(\frac{j\omega}{\varpi_{n_i}}\right)^2\right)}{(j\omega)^{\upsilon}\prod_{i=1}^{n_1}(1+j\omega\tau_i)\prod_{i=1}^{n_2}\left(1+2\xi_i\frac{j\omega}{\omega_{n_i}}+\left(\frac{j\omega}{\omega_{n_i}}\right)^2\right)}$$

Risposta forzata con ingresso armonico

La risposta forzata di un qualunque sistema dinamico lineare può essere valutata a partire dalla sua funzione di trasferimento: un rapporto di polinomi nella variabile complessa s

$$u \longrightarrow \boxed{G} \longrightarrow y \qquad\qquad Y(s)=G(s)\,U(s)$$

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)};\qquad N(s)=\sum_{i=0}^{i=m} b_i s^i = b_m \prod_{i=1}^{m}(s-z_i) \qquad D(s)=s^n+\sum_{i=0}^{i=n-1} a_i s^i=\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)$$

z_i: zeri del sistema

p_i: poli del sistema

$$u(t)=\sin(\omega t) \qquad\qquad U(s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$Y(s)=\frac{\sum_{i=0}^{i=m} b_i s^i}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}\,\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Risposta forzata con ingresso armonico

La risposta forzata di un qualunque sistema dinamico lineare può essere valutata mediante l'antitrasformata di Laplace del suo sviluppo in fratti semplici

$$Y(s) = G(s)\frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{\sum_{i=0}^{i=m} b_i s^i}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}\frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \sum_{i=0}^{i=n}\frac{R_i}{s-p_i} + \frac{R_u}{s-j\omega} + \frac{R'_u}{s+j\omega}$$

Nell'ipotesi di poli distinti

$$R_i = \lim_{s=p_i}\frac{\sum_{k=0}^{k=m} b_k s^k}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(s-p_j)}\frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \lim_{s=p_i} G(s)\frac{\omega(s-p_i)}{s^2+\omega^2}$$

$$R_u = \lim_{s=j\omega} G(s)\frac{\omega}{s+j\omega} = \frac{G(j\omega)}{2j}$$

$$R'_u = \lim_{s=-j\omega} G(s)\frac{\omega}{s-j\omega} = \frac{G(-j\omega)}{-2j}$$

Risposta forzata con ingresso armonico

La risposta forzata di un qualunque sistema dinamico lineare può essere valutata mediante l'antitrasformata di Laplace del suo sviluppo in fratti semplici

$$G(j\omega)=|G(j\omega)|\mathrm{e}^{j\,arg\{G(j\omega)\}}=M(\omega)\mathrm{e}^{j\varphi(\omega)}$$

$$G(-j\omega)=|G(-j\omega)|\mathrm{e}^{j\,arg\{G(-j\omega)\}}=M(\omega)\mathrm{e}^{-j\varphi(\omega)}$$

$$Y(s)=\sum_{i=0}^{i=n}\frac{R_i}{s-p_i}+\frac{M(\omega)\mathrm{e}^{j\varphi(\omega)}}{2j(s-j\omega)}+\frac{M(\omega)\mathrm{e}^{-j\varphi(\omega)}}{-2j(s+j\omega)}=$$

$$=\sum_{i=0}^{i=n}\frac{R_i}{s-p_i}+\frac{M(\omega)}{s^2+\omega^2}\left[s\,\frac{\mathrm{e}^{j\varphi(\omega)}-\mathrm{e}^{-j\varphi(\omega)}}{2j}+\omega\,\frac{\mathrm{e}^{j\varphi(\omega)}+\mathrm{e}^{-j\varphi(\omega)}}{2}\right]=$$

$$=\sum_{i=0}^{i=n}\frac{R_i}{s-p_i}+\frac{M(\omega)}{s^2+\omega^2}\left[s\sin(\varphi(\omega))+\omega\cos(\varphi(\omega))\right]$$

Risposta forzata con ingresso armonico

La risposta forzata di un qualunque sistema dinamico lineare può essere valutata mediante l'antitrasformata di Laplace del suo sviluppo in fratti semplici

$$G(j\omega)=|G(j\omega)|\mathrm{e}^{j\,arg\{G(j\omega)\}}=M(\omega)\mathrm{e}^{\varphi(j\omega)}$$

$$Y(s)=\sum_{i=0}^{i=n}\frac{R_i}{s-p_i}+M(\omega)\left[\sin(\varphi(\omega))\frac{s}{s^2+\omega^2}+\cos(\varphi(\omega))\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right]$$

La risposta forzata è composta da un termine dipendente dai poli del sistema ed un termine dipendente dall'ingresso

$$y(t)=y_G(t)+M(\omega)[\sin(\varphi(\omega))\cos(\omega t)+\cos(\varphi(\omega))\sin(\omega t)]$$

$$y(t)=y_G(t)+M(\omega)\sin(\omega t+\varphi(\omega))$$

Risposta forzata con ingresso armonico

Nell'ipotesi di sistema asintoticamente stabile, il termine della risposta forzata dipendente dal sistema tende ad esaurirsi

$$u \longrightarrow \boxed{G} \longrightarrow y \qquad\qquad Y(s) = G(s)\,U(s)$$

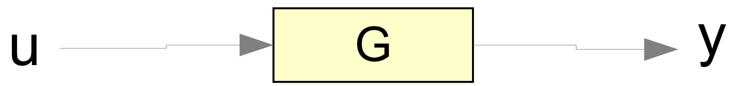
$$G(j\omega) = |G(j\omega)|\,\mathrm{e}^{j\,arg\{G(j\omega)\}} = M(\omega)\,\mathrm{e}^{\varphi(j\omega)}$$

$$\left[y(t)\right]_{u=\sin(\omega t)} = y_G(t) + M(\omega)\sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

$$\boxed{\left[y_\infty(t)\right]_{u=\sin(\omega t)} = M(\omega)\sin(\omega t + \varphi(\omega))}$$

Rilevazione sperimentale della risposta armonica

Sottoponendo il sistema a varie prova di risposta armonica e rilevando l'uscita a regime è possibile valutare alcuni punti del diagramma di risposta armonica



$$Y(s)=G(s)U(s)$$

$$G(j\omega)=|G(j\omega)|e^{j\,arg\{G(j\omega)\}}=M(\omega)e^{\varphi(j\omega)}$$

$$u_k(t)=U_k\sin(\omega_k t)$$

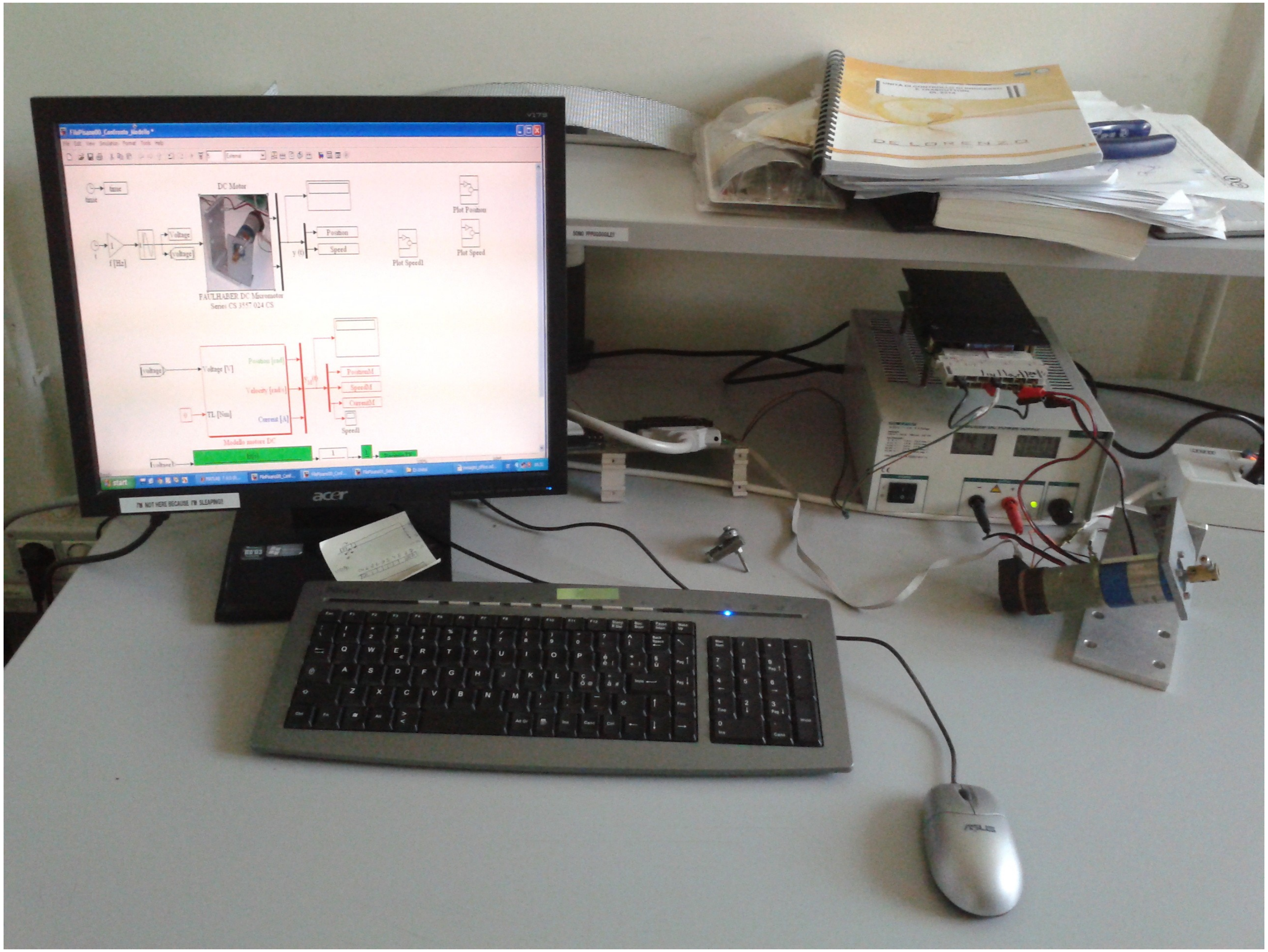
$$\Downarrow$$

$$y_{k_\infty}(t)=M(\omega_k)U_k\sin(\omega_k t+\varphi(\omega_k))=Y_k\sin(\omega(t+\Delta t_k))$$

$$M(\omega_k)=\frac{Y_k}{U_k} \qquad \varphi(\omega_k)=\omega_k\Delta t_k$$

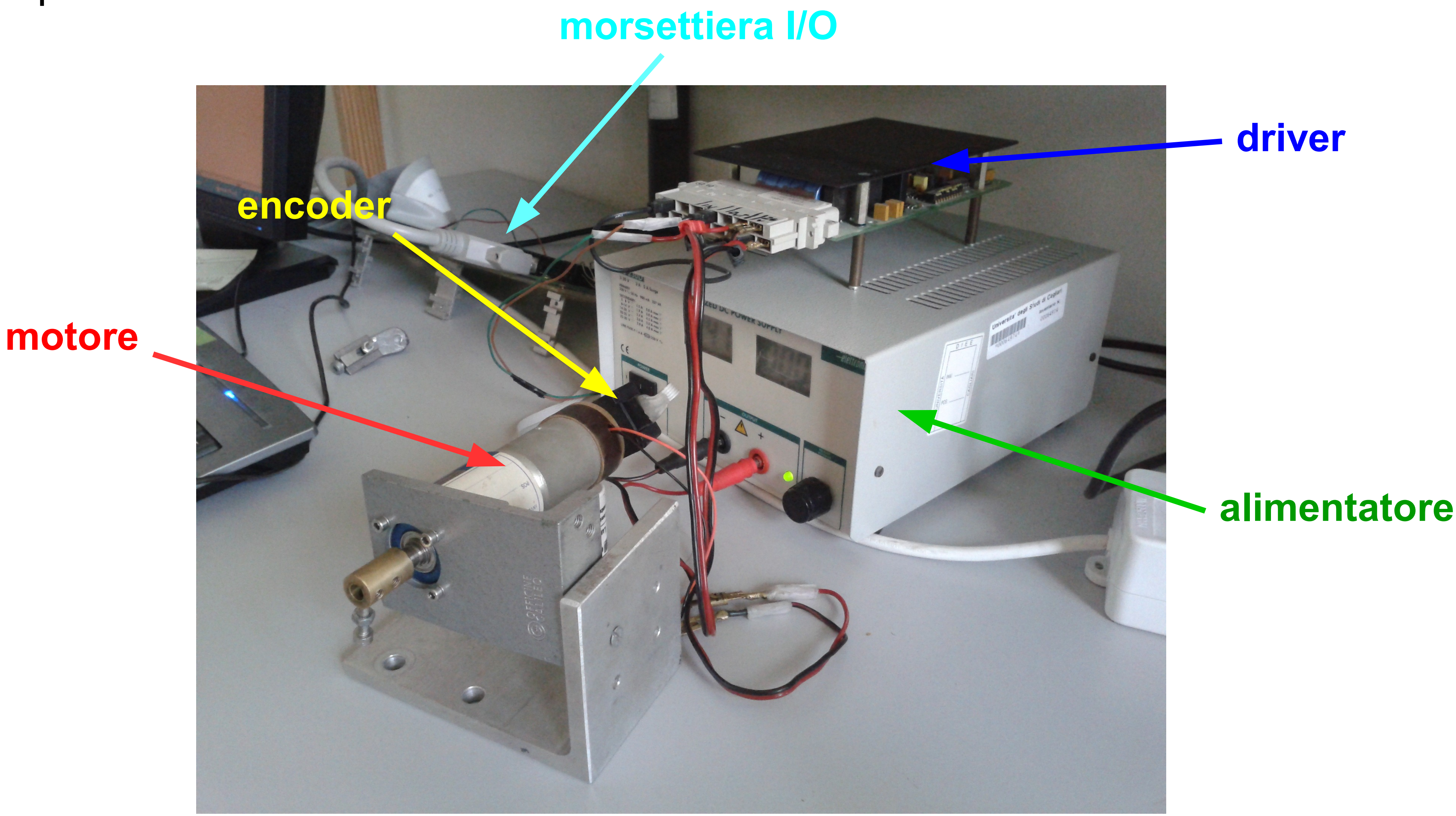
Rilevazione sperimentale della risposta armonica

Sottoponendo il sistema a varie prova di risposta armonica e rilevando l'uscita a regime è possibile valutare alcuni punti del diagramma di risposta armonica



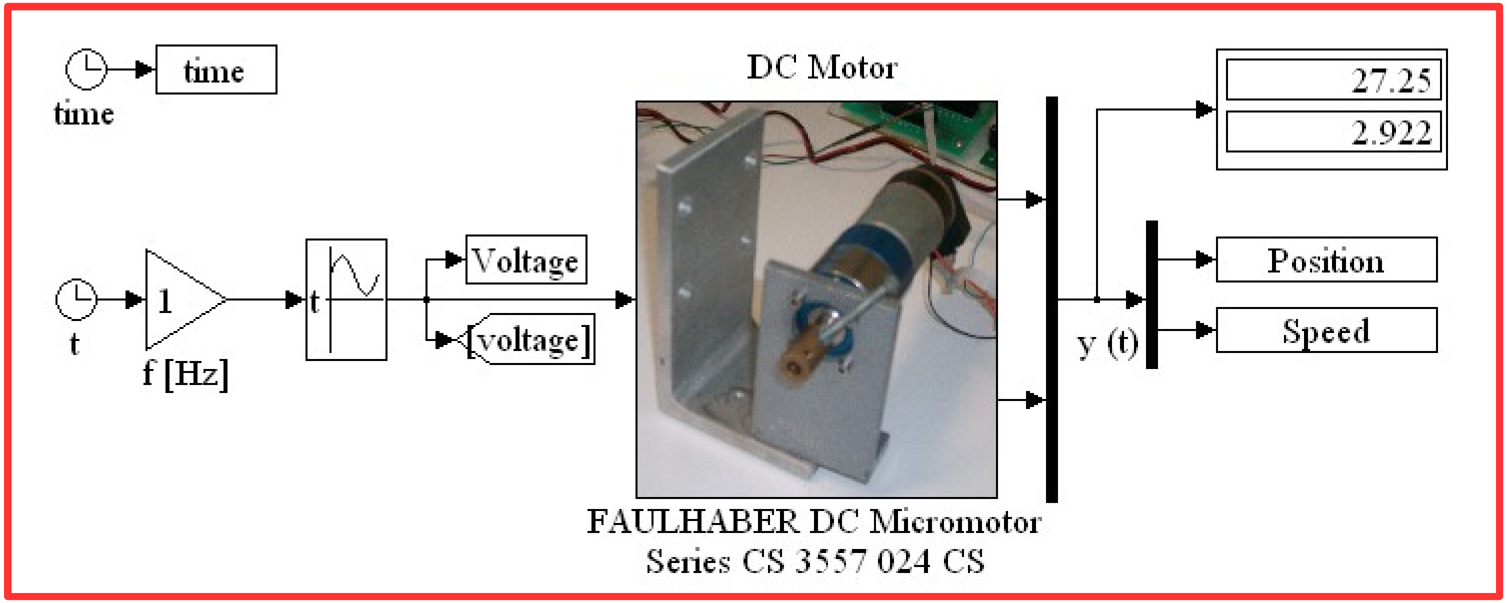
Rilevazione sperimentale della risposta armonica

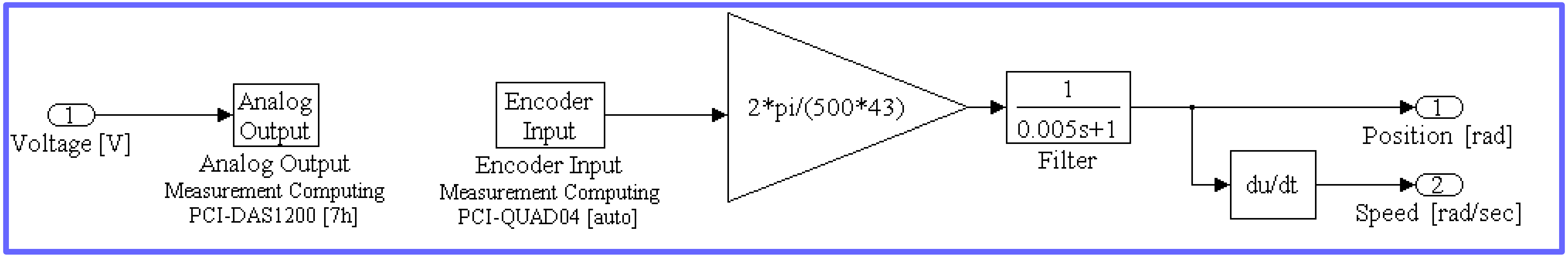
Sottoponendo il sistema a varie prova di risposta armonica e rilevando l'uscita a regime è possibile valutare alcuni punti del diagramma di risposta armonica



Rilevazione sperimentale della risposta armonica

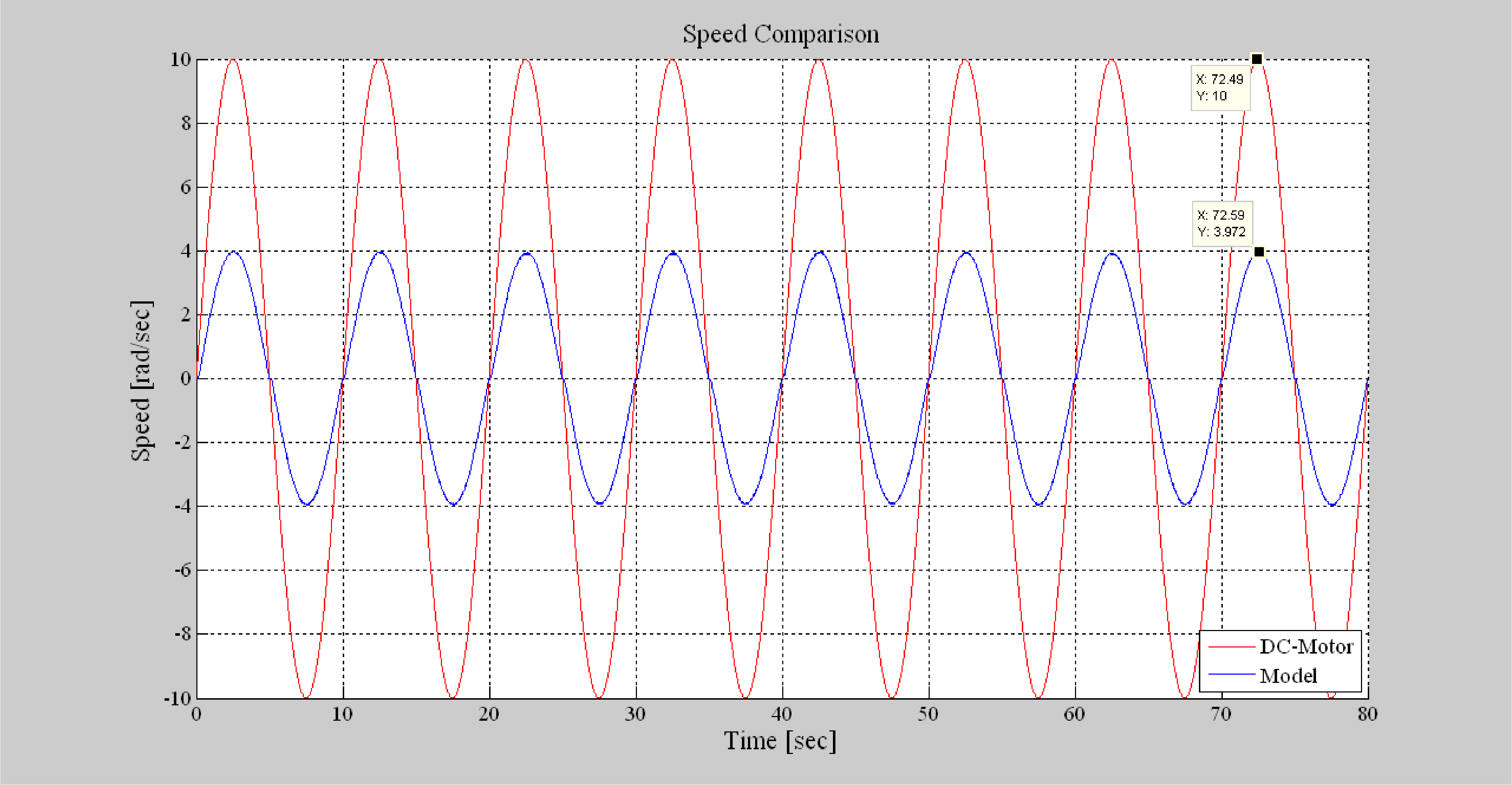
Sottoponendo il sistema a varie prova di risposta armonica e rilevando l'uscita a regime è possibile valutare alcuni punti del diagramma di risposta armonica





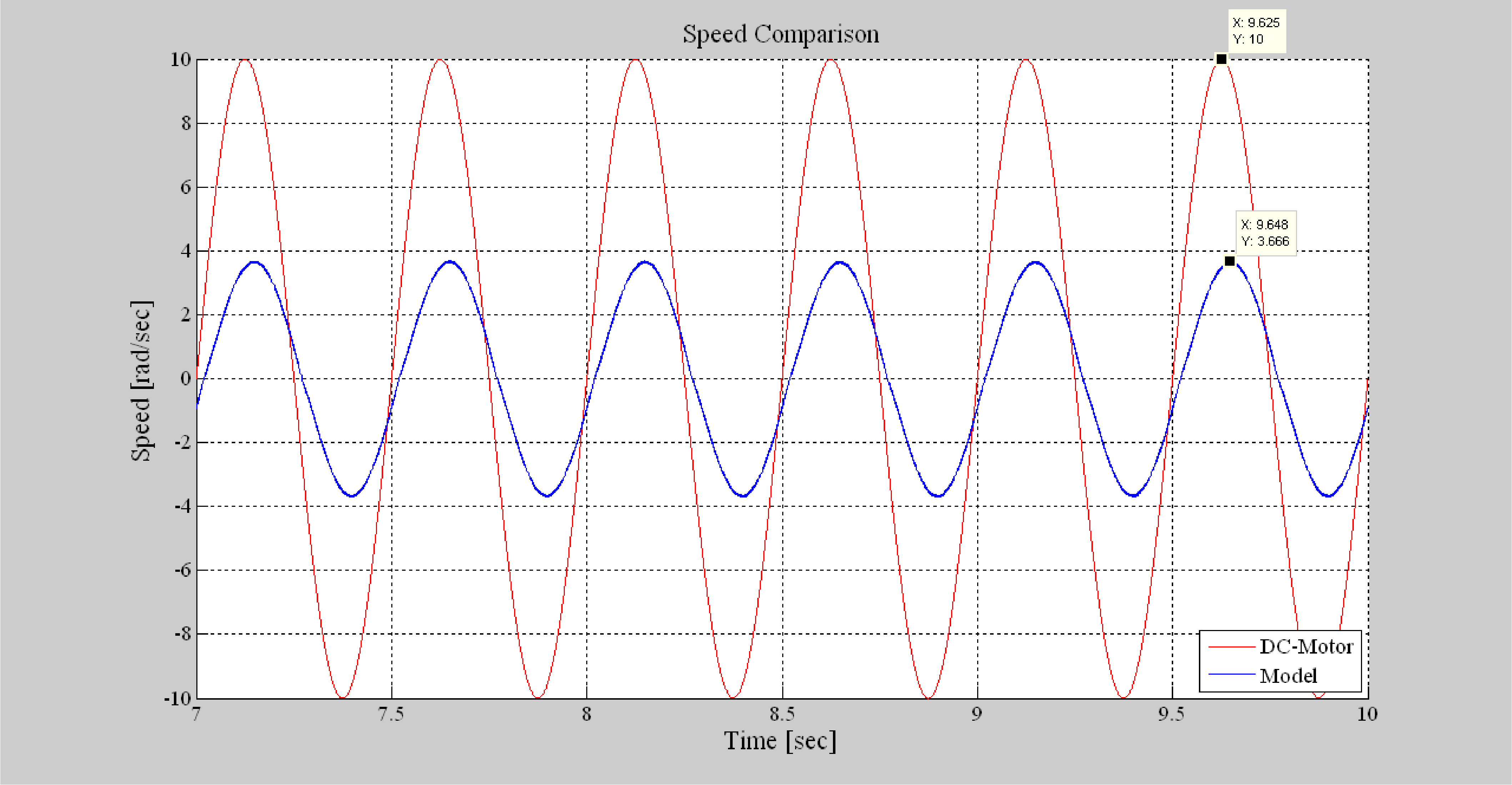
Rilevazione sperimentale della risposta armonica

Sottoponendo il sistema a varie prova di risposta armonica e rilevando l'uscita a regime è possibile valutare alcuni punti del diagramma di risposta armonica



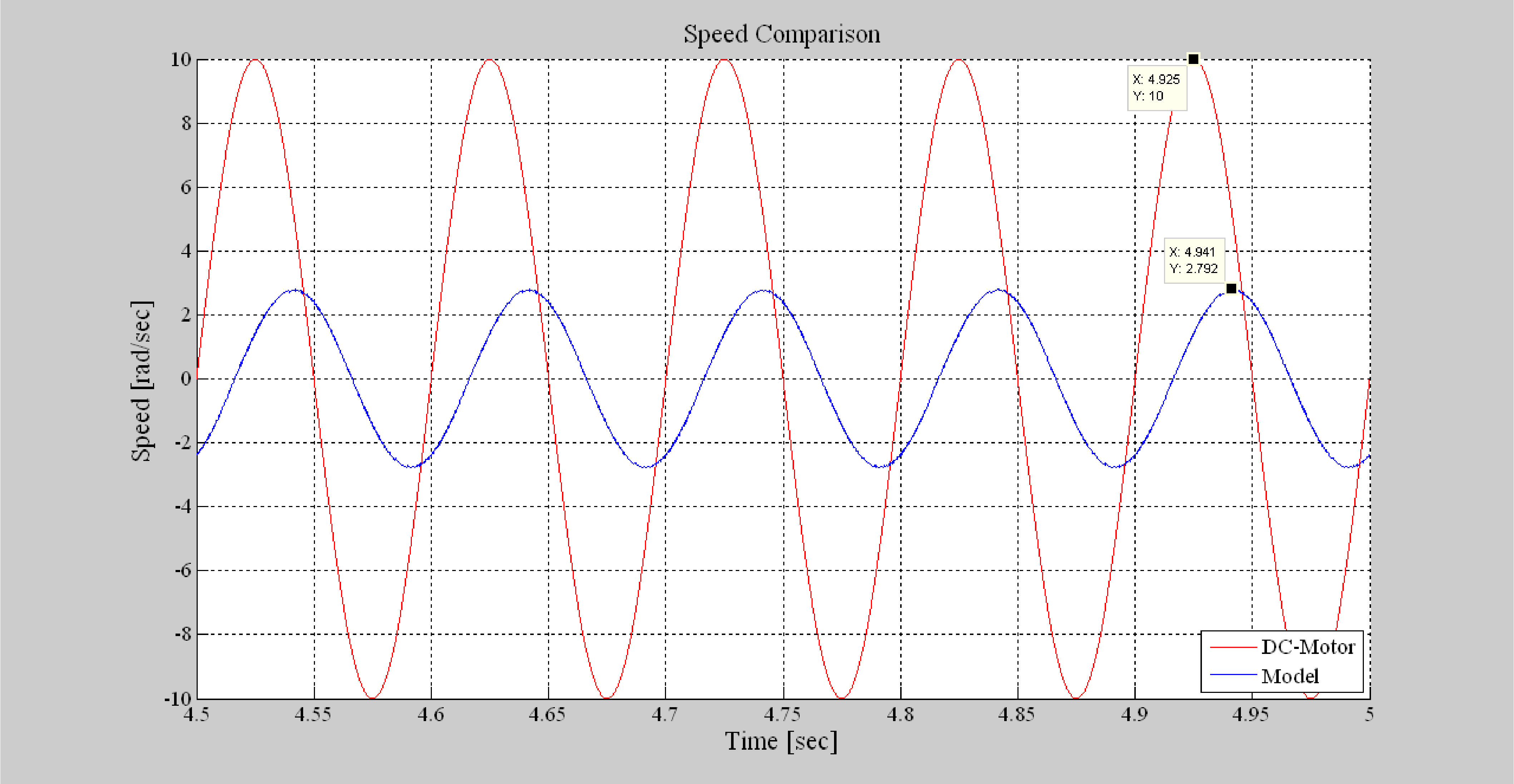
Rilevazione sperimentale della risposta armonica

Sottoponendo il sistema a varie prova di risposta armonica e rilevando l'uscita a regime è possibile valutare alcuni punti del diagramma di risposta armonica



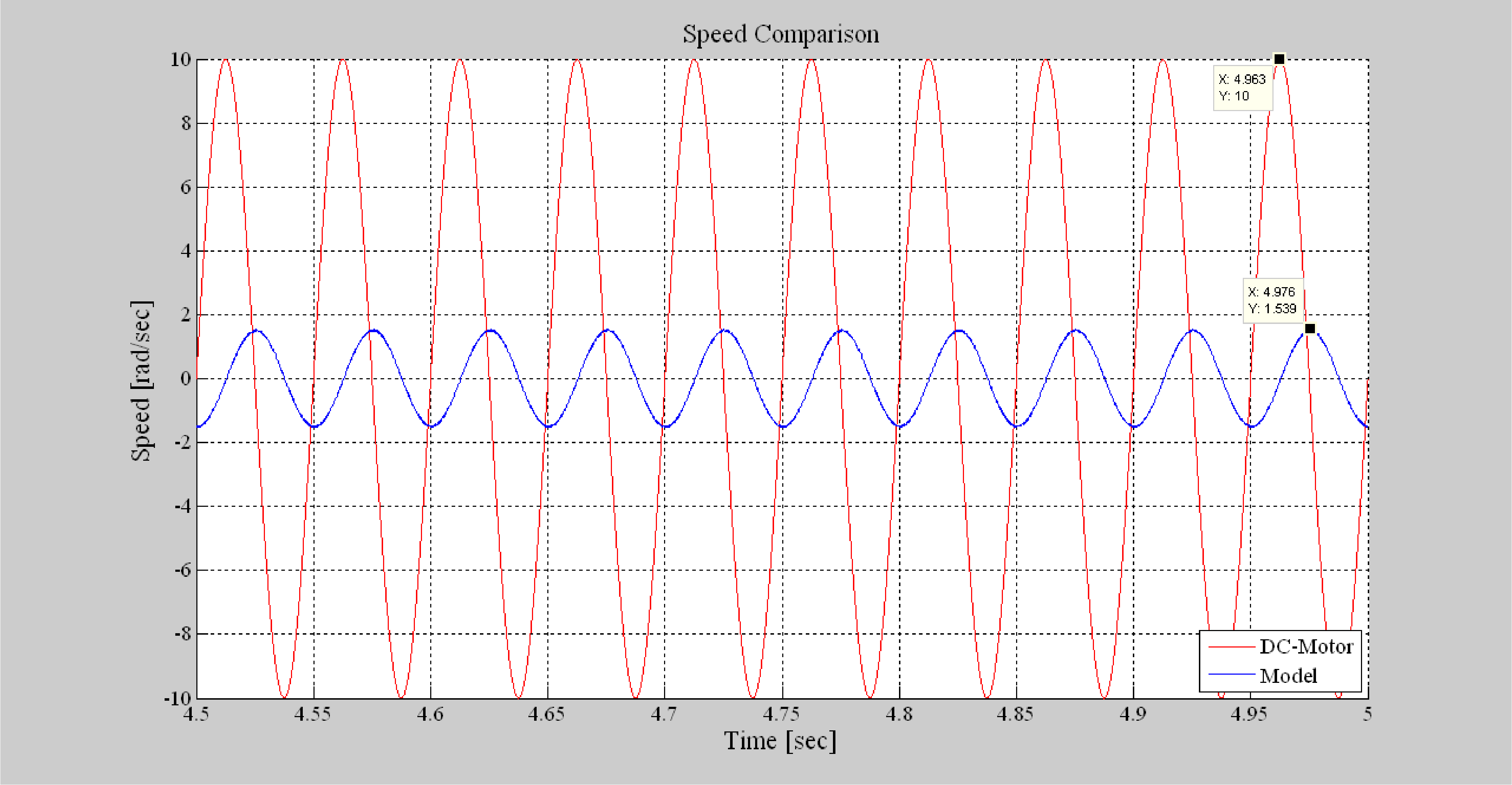
Rilevazione sperimentale della risposta armonica

Sottoponendo il sistema a varie prova di risposta armonica e rilevando l'uscita a regime è possibile valutare alcuni punti del diagramma di risposta armonica



Rilevazione sperimentale della risposta armonica

Sottoponendo il sistema a varie prova di risposta armonica e rilevando l'uscita a regime è possibile valutare alcuni punti del diagramma di risposta armonica



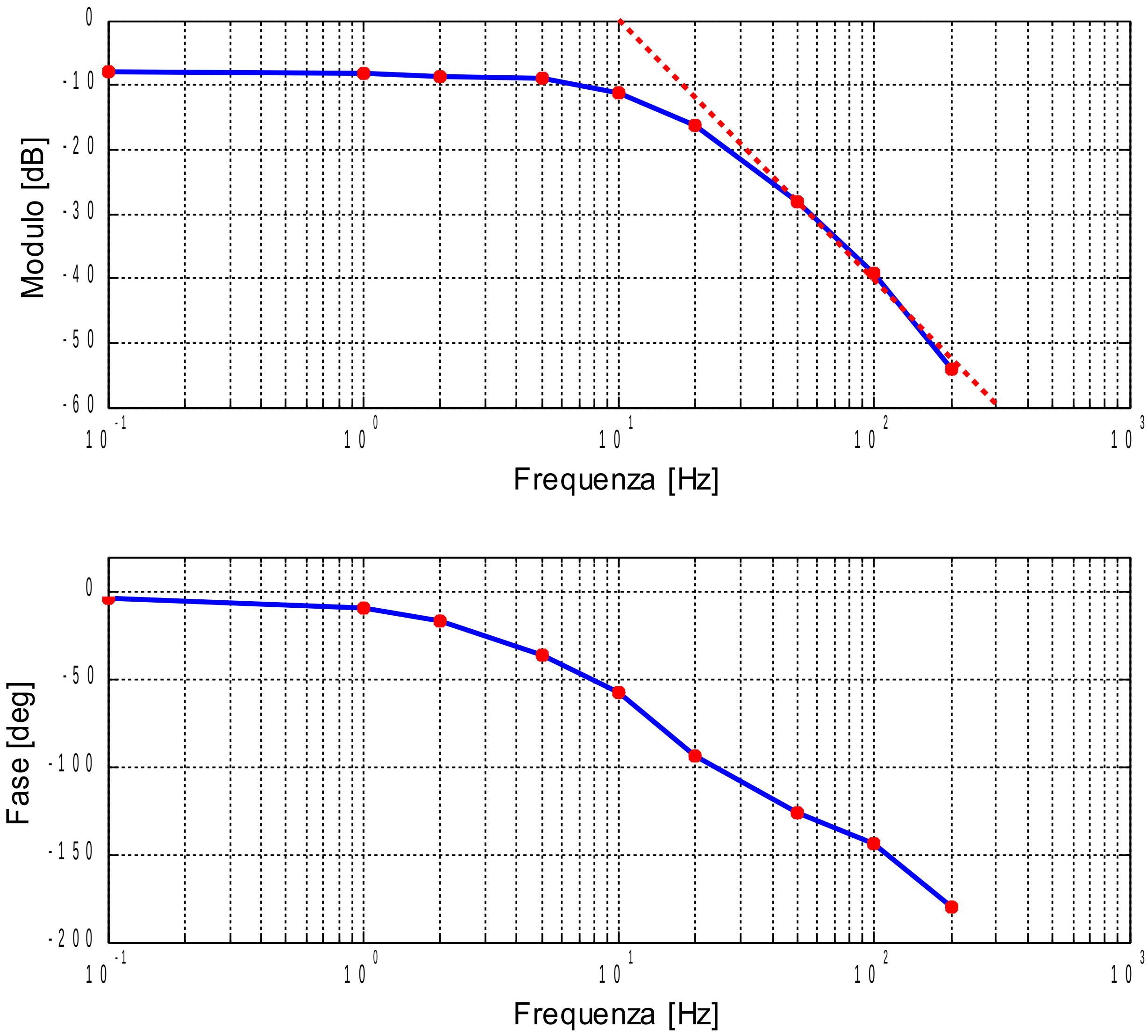
Rilevazione sperimentale della risposta armonica

Sottoponendo il sistema a varie prova di risposta armonica e rilevando l'uscita a regime è possibile valutare alcuni punti del diagramma di risposta armonica

F [Hz]	U	Y	M=Y/U	Δt [s]	φ [deg]
0,10	10,00	3,9720	0,3972	-0,1000	-3,60
1,00	10,00	3,9410	0,3941	-0,0250	-9,00
2,00	10,00	3,6660	0,3666	-0,0230	-16,56
5,00	10,00	3,5300	0,3530	-0,0200	-36,00
10,00	10,00	2,7290	0,2729	-0,0160	-57,60
20,00	10,00	1,5390	0,1529	-0,0130	-93,59
50,00	10,00	0,3951	0,0395	-0,0070	-125,90
100,00	10,00	0,1110	0,0111	-0,0040	-143,90
200,00	9,98	0,0200	0,0020	-0,0025	-179,99

Rilevazione sperimentale della risposta armonica

Sottoponendo il sistema a varie prova di risposta armonica e rilevando l'uscita a regime è possibile valutare alcuni punti del diagramma di risposta armonica



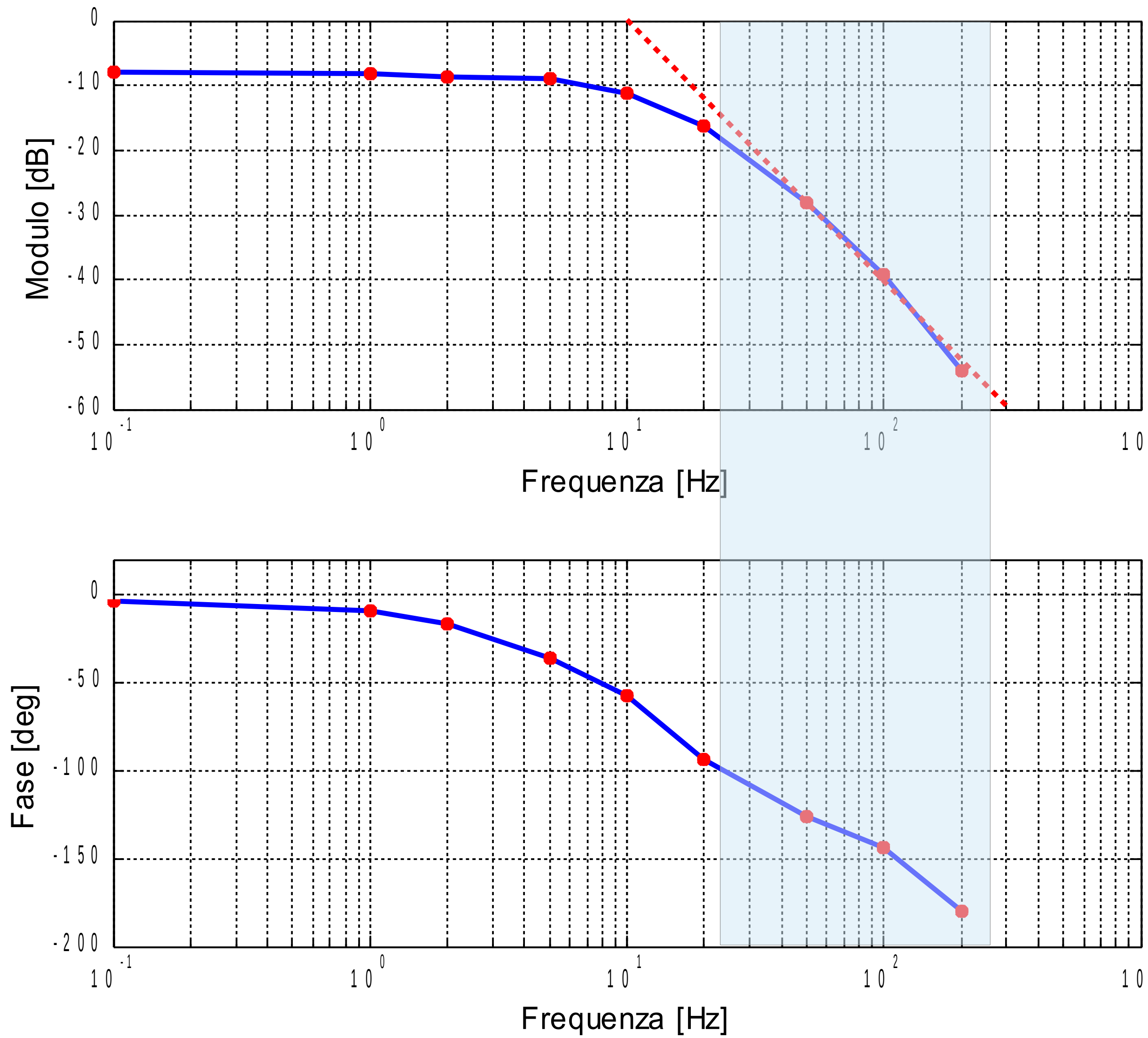
Rilevazione sperimentale della risposta armonica

Sottoponendo il sistema a varie prova di risposta armonica e rilevando l'uscita a regime è possibile valutare alcuni punti del diagramma di risposta armonica

Incrementando la frequenza si evidenziano fenomeni non lineari non rappresentati dal modello

$$G(s) = \frac{K}{a_2 s^2 + a_1 s + 1}$$

$$K = 0{,}4$$



Identificazione del modello nel dominio della frequenza

La funzione di risposta armonica può essere identificata una volta individuata la sua struttura (ordine dei polinomi al numeratore e denominatore) con metodi di ottimizzazione

$$G(j\omega)=\frac{0{,}4}{a_2(j\omega)^2+a_1 j\omega+1}$$

$$M(\omega, a_1, a_2)=\frac{0{,}4}{\sqrt{(1-a_2\omega^2)^2+a_1^2\omega^2}} \qquad \varphi(\omega, a_1, a_2)=-\arctan\left(\frac{a_1^2\omega}{1-a_2\omega^2}\right)$$

La funzione di errore quadratico deve essere minimizzata rispetto ai parametri

$$J(a_1, a_2)=\sum_{k=1}^{N}\left(M(\omega_k, a_1, a_2)-\hat{M}_k\right)^2+\sum_{k=1}^{N}\left(\varphi(\omega_k, a_1, a_2)-\hat{\varphi}_k\right)^2$$

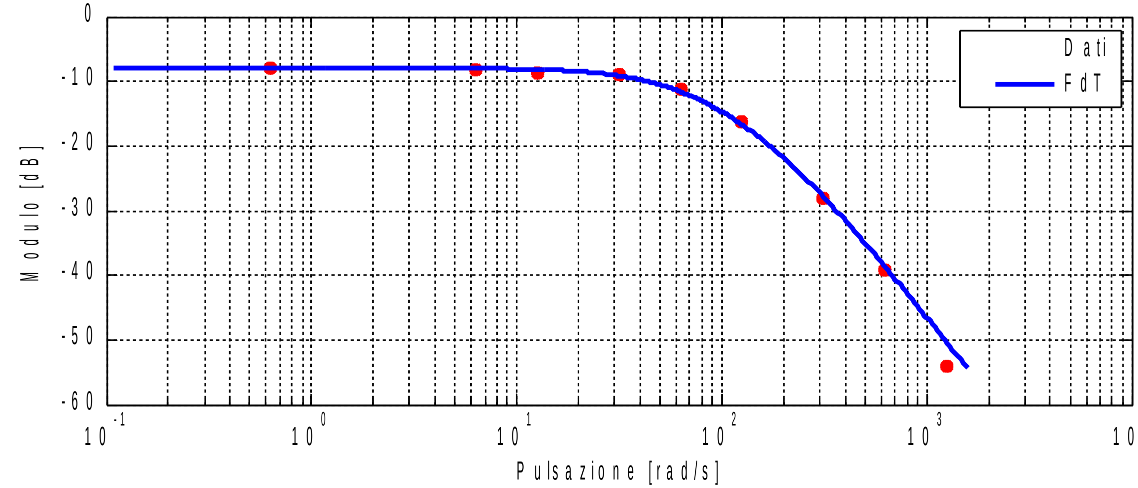
$$J(\bar{a}_1, \bar{a}_2)=min\left\{J(a_1, a_2)\right\}$$

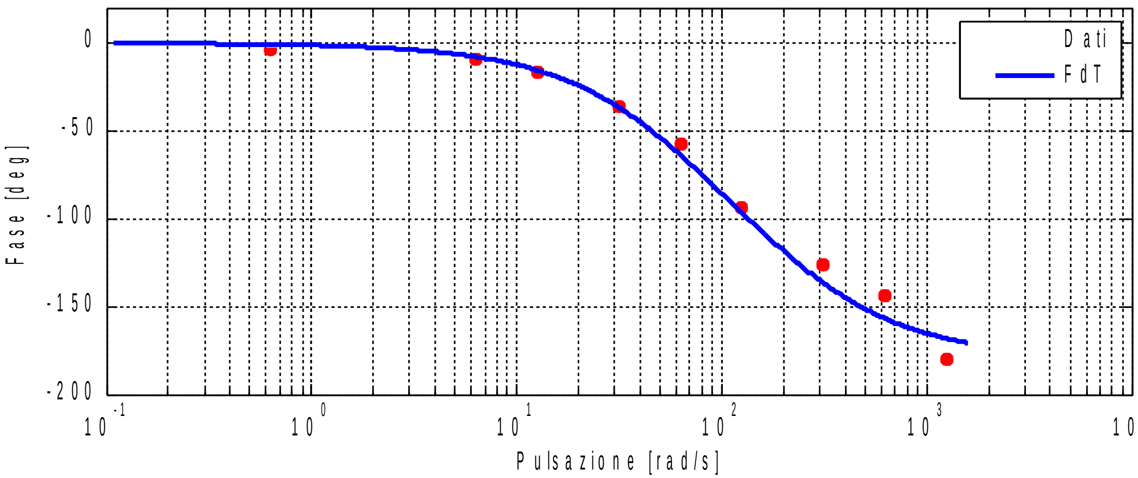
Identificazione del modello nel dominio della frequenza

La funzione di risposta armonica può essere identificata una volta individuata la sua struttura (ordine dei polinomi al numeratore e denominatore) con metodi di ottimizzazione

$$G(j\omega)=\frac{0{,}4}{a_2(j\omega)^2+a_1 j\omega+1}$$

$$a_1=2{,}167*10^{-2}$$
$$a_2=8{,}3*10^{-5}$$
$$p_1=-60$$
$$p_2=-200$$





Riepilogo

- È stata analizzata la risposta di un sistema dinamico soggetto ad un segnale di ingresso armonico
- Si è messa in relazione la funzione di trasferimento del sistema con il suo comportamento a regime in presenza di un ingresso armonico
- È stata presentata una procedura per la identificazione della funzione di trasferimento di un sistema sulla base di una serie di prove di risposta armonica