Algebra degli schemi a blocchi

- Influenza delle connessioni nelle proprietà del sistema
- Proprietà dell'algebra degli schemi a blocchi
- Esempio di calcolo della funzione di trasferimento

Influenza delle connessioni nelle proprietà del sistema

Un sistema è "***un insieme di elementi che cooperano per svolgere una funzione altrimenti impossibile per ciascuno dei singoli componenti***".

Un qualunque sistema sistema dinamico può essere rappresentato mediante l'interconnessione di un insieme di blocchi/funzioni elementari, ciascuno dei quali può essere identificato come un sotto-sistema.

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}\,u(t)\\ y(t) &= \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x}(t)+d\,u(t)\end{aligned}$$

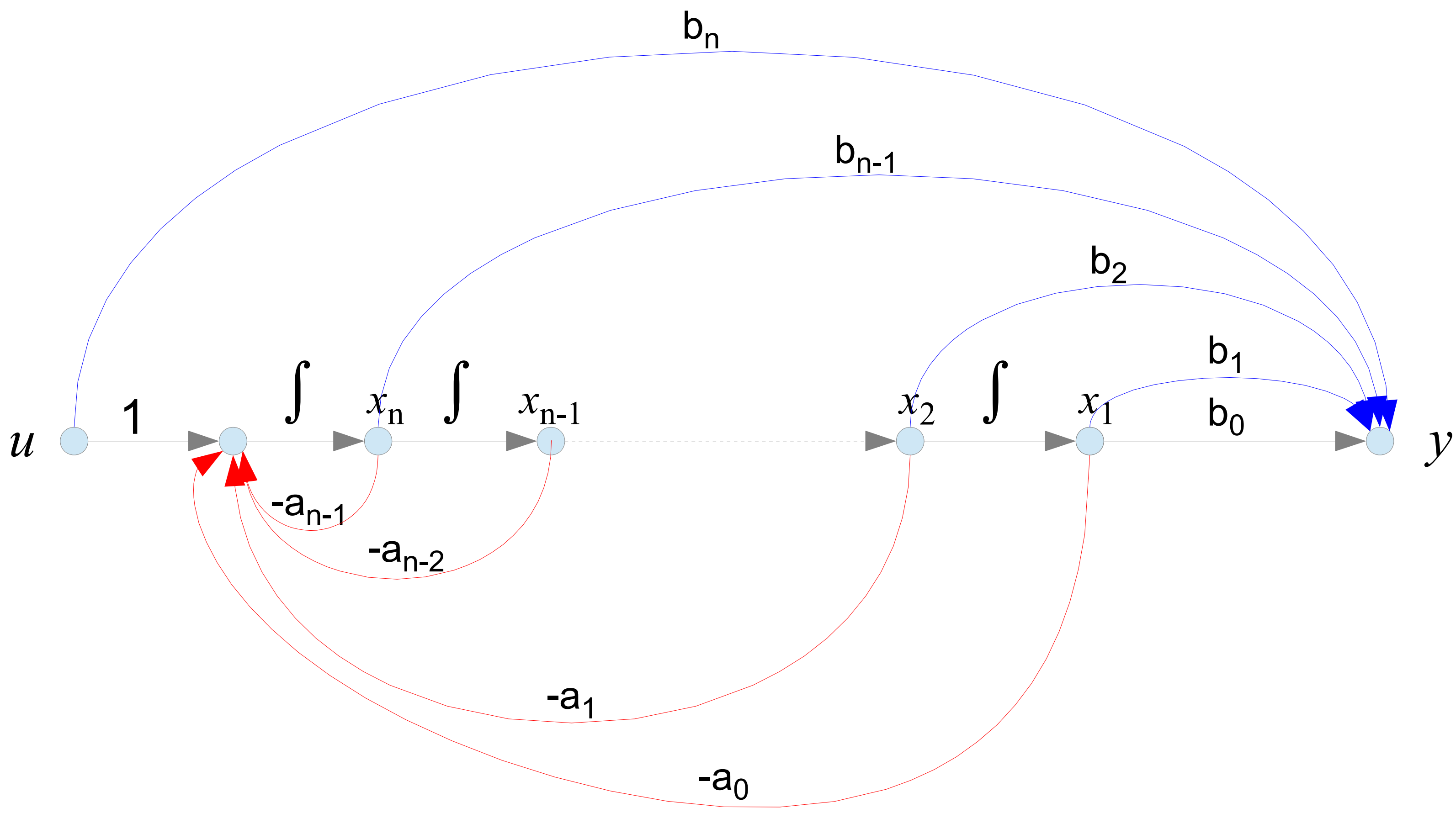
$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{0}_{(n-1)x1} & \boldsymbol{I}_{n-1} \\ \hline -a_0 \quad -a_1 & \cdots \quad -a_{n-1}\end{array}\right]; \qquad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ 1\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1}\end{bmatrix}; \qquad d=b_n$$

$$Y_f(s)=\left[\boldsymbol{c}\left(s\,\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{b}+d\right]U(s)=\frac{\sum_{i=0}^{i=n} b_i s^i}{s^n+\sum_{i=0}^{i=n-1} a_i s^i}U(s)=G(s)\,U(s)$$

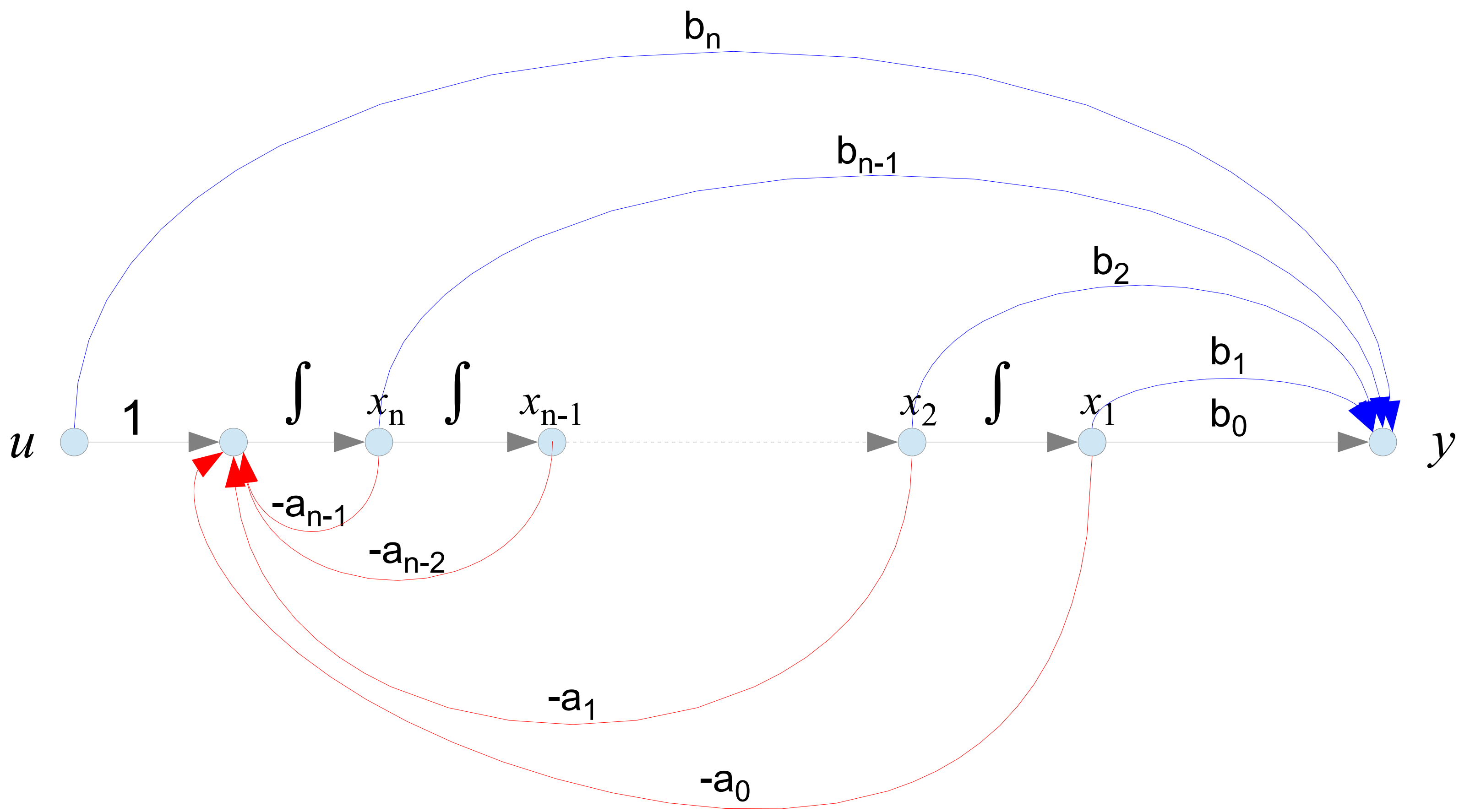
Influenza delle connessioni nelle proprietà del sistema

Un qualunque sistema sistema dinamico può essere rappresentato mediante l'interconnessione di un insieme di blocchi/funzioni elementari, ciascuno dei quali può essere identificato come un sotto-sistema.



Influenza delle connessioni nelle proprietà del sistema

La stabilità del sistema complessivo dipende dalle interconnessioni tra i blocchi dinamici (*gli integratori*) e può essere modificata inserendo ulteriori blocchi/connessioni o eliminando alcune delle esistenti (*modificando i coefficienti* a_i).



Influenza delle connessioni nelle proprietà del sistema

La stabilità del sistema complessivo dipende dalle interconnessioni tra i blocchi dinamici (*gli integratori*) e può essere modificata inserendo ulteriori blocchi/connessioni o eliminando alcune delle esistenti (*modificando i coefficienti* a_i).

$$Y_f(s)\frac{a}{a+s}U(s) \quad \Rightarrow \quad \dot{y}(t)+a\,y(t)=u(t)$$

Definiamo la variabile di controllo come proporzionale alla variabile di uscita

$$u(t)=K\,y(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{y}(t)+(a-K)\,y(t)=0$$

La stabilità del sistema modificato dipende dal segno di $(a\text{-}K)$

$(a\text{-}K) > 0$	sistema asintoticamente stabile
$(a\text{-}K) = 0$	sistema al limite di stabilità
$(a\text{-}K) < 0$	sistema instabile

Proprietà dell'algebra degli schemi a blocchi

Il comportamento di un sistema lineare con un ingresso ed una uscita (SISO-Single Input Single Output) è descrivibile mediante la sua funzione di trasferimento

$$y_f(t) = \int_{-\infty}^{t} g(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau$$

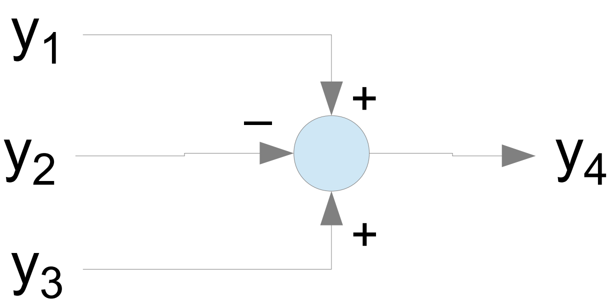
$g(t)$ è la risposta impulsiva del sistema

$$Y_f(s)\,G(s)\,U(s) \quad ; \quad \begin{aligned} Y_f(s) &= L^{-1}\{y_f(t)\} \\ U(s) &= L^{-1}\{u(t)\} \\ G(s) &= L^{-1}\{g(t)\} \end{aligned}$$

Proprietà dell'algebra degli schemi a blocchi

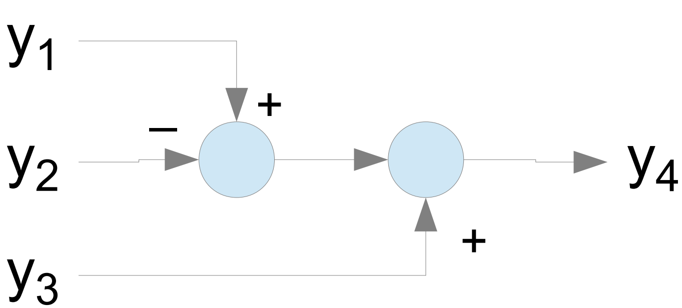
La trasformata di Laplace è un operatore lineare

Nodo sommatore/comparatore



$$y_4(t) = y_1(t) - y_2(t) + y_3(t)$$
$$Y_4(s) = Y_1(s) - Y_2(s) + Y_3(s)$$

Proprietà associativa

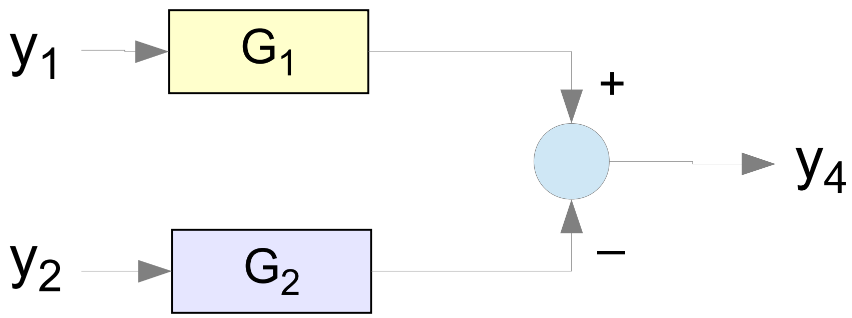


$$y_4(t) = w(t) + y_3(t) = \big(y_1(t) - y_2(t)\big) + y_3(t) =$$
$$= y_1(t) + \big(y_3(t) - y_2(t)\big)$$
$$Y_4(s) = Y_1(s) - Y_2(s) + Y_3(s)$$

Proprietà dell'algebra degli schemi a blocchi

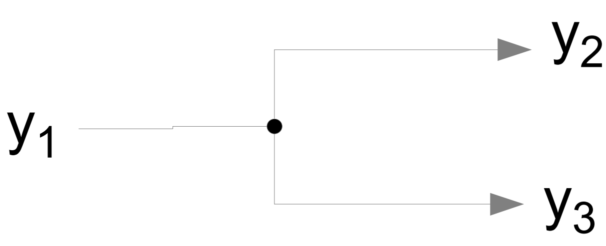
La trasformata di Laplace è un operatore lineare

Combinazione lineare



$$Y_4(s) = G_1(s)Y_1(s) - G_2(s)Y_2(s)$$

Nodo diramazione

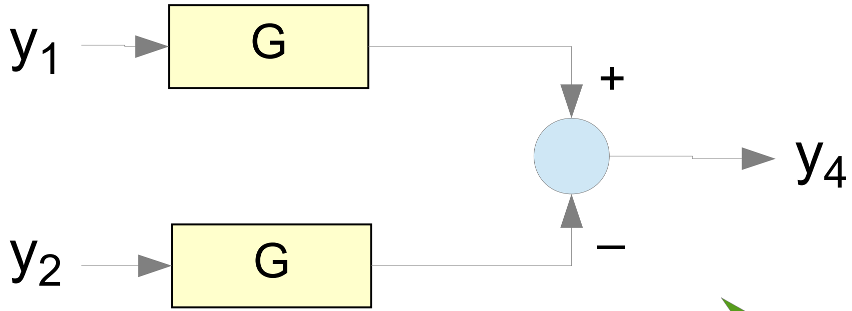


$$y_2(t) = y_3(t) = y_1(t)$$
$$Y_2(s) = Y_3(s) = Y_1(s)$$

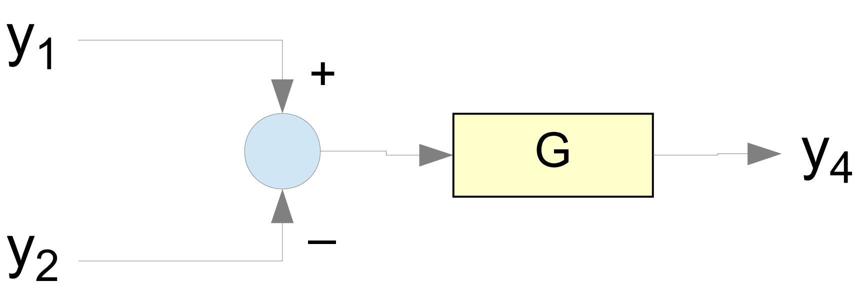
Proprietà dell'algebra degli schemi a blocchi

La trasformata di Laplace è un operatore lineare

Proprietà distributiva



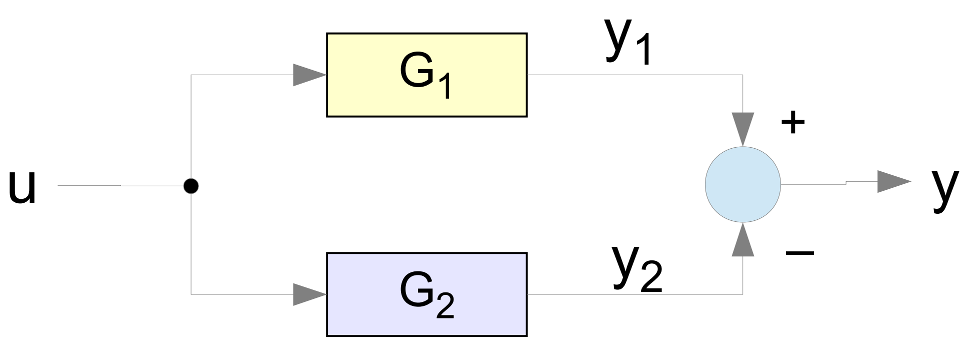
$$Y_4(s) = G(s)Y_1(s) - G(s)Y_2(s) =$$
$$= G(s)\left(Y_1(s) - Y_2(s)\right)$$



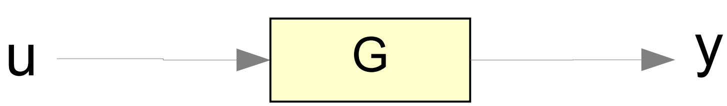
Proprietà dell'algebra degli schemi a blocchi

La trasformata di Laplace è un operatore lineare

Parallelo



$$Y(s) = Y_1(s) - Y_2(s) = G_1(s)U(S) - G2(s)U(s) =$$
$$= \left(G_1(s) - G_2(s)\right)U(s) = G(s)U(s)$$



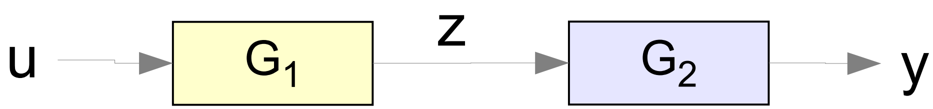
$$G(s) = G_1(s) - G_2(s)$$

La funzione di trasferimento di blocchi in parallelo è la somma algebrica delle funzioni di trasferimento di ciascun blocco

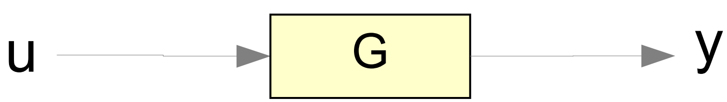
Proprietà dell'algebra degli schemi a blocchi

La trasformata di Laplace è un operatore lineare

Serie



$$Y(s) = G_2(s)\,Z(s) = G_2(s)\big(G_1(s)\,U(s)\big) = G(s)\,U(s)$$



$$G(s) = G_1(s)\,G_2(s)$$

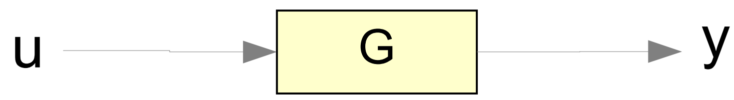
La funzione di trasferimento di blocchi in serie è il prodotto delle funzioni di trasferimento di ciascun blocco

ma solo sotto opportune condizioni da verificare

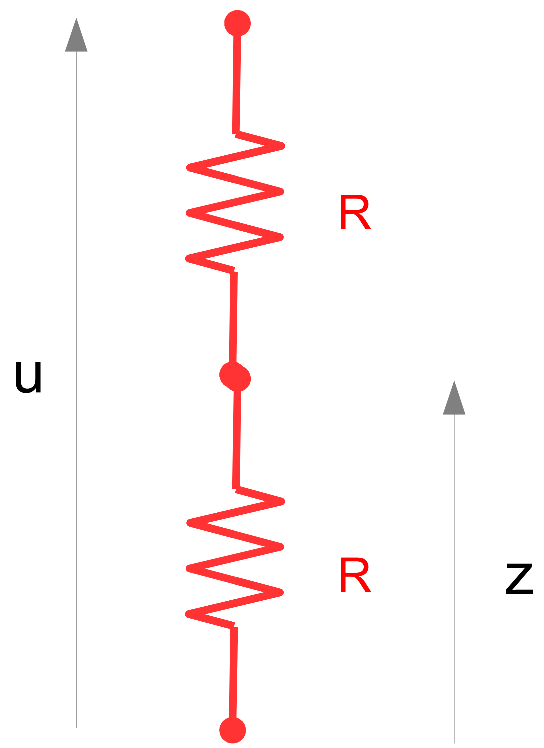
Proprietà dell'algebra degli schemi a blocchi

Effetti di carico

Serie



$$G(s) = G_1(s)\,G_2(s)$$



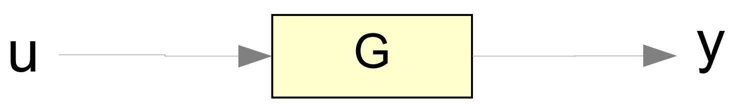
$$Z(s) = \frac{1}{2}U(s)$$

$$G(s) = \frac{1}{2}$$

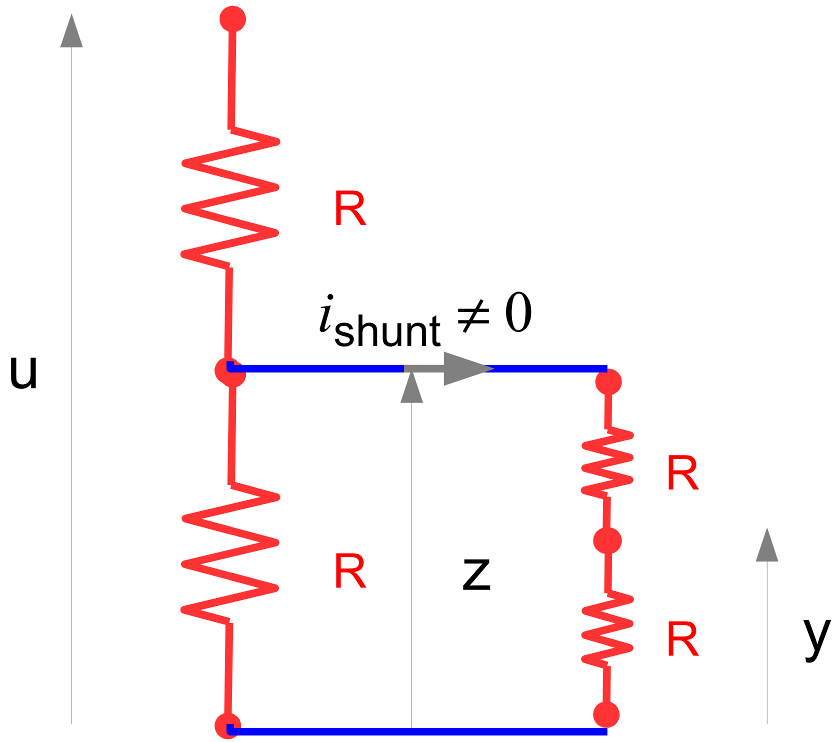
Proprietà dell'algebra degli schemi a blocchi

Effetti di carico

Serie



$$G(s)=G_1(s)\,G_2(s)$$



$$G_1(s)=G_2(s)=\frac{1}{2}$$

$$Y(s)=\frac{R//2R}{R+R//2R}\,U(s)=\frac{1}{5}\,U(s)$$

$$G(s)\neq G_1(s)\,G_2(s)$$

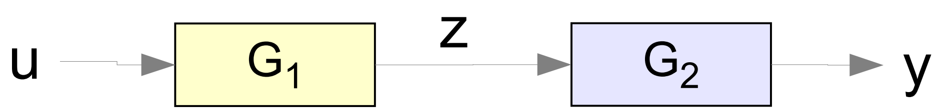
Effetti di carico

$i_{\text{shunt}} \neq 0$

Proprietà dell'algebra degli schemi a blocchi

Effetti di carico

Serie



$$Y(s) = G(s)\,U(s) \qquad\qquad G(s) = G_1(s)\,G_2(s)$$

La funzione di trasferimento di blocchi in serie è il prodotto delle funzioni di trasferimento di ciascun blocco **se non sono presenti effetti di carico**

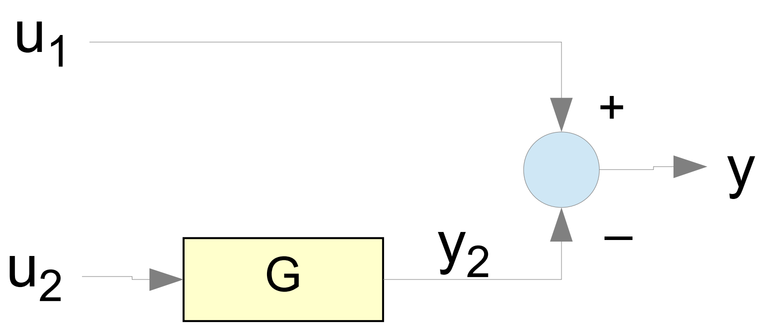
Gli effetti di carico sono trascurabili se l'impedenza di uscita (Z_{out}) dei blocchi a monte è molto inferiore di quella di ingresso (Z_{in}) dei blocchi a valle.

Nei circuiti elettronici ciò si può ottenere, eventualmente, collegando i sistemi mediante amplificatori operazionali in configurazione non invertente.

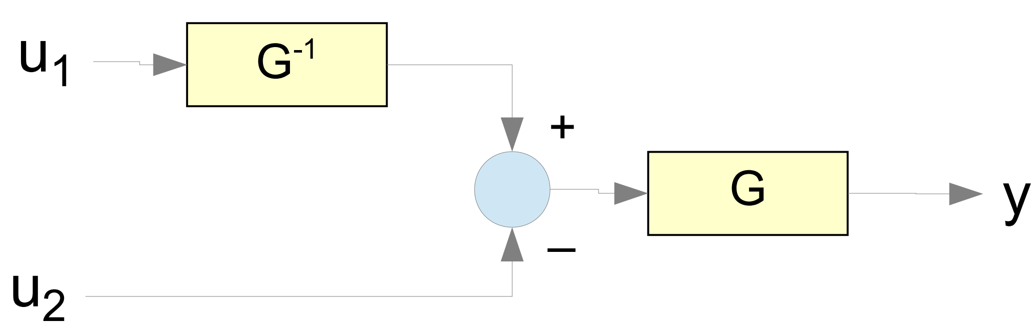
Proprietà dell'algebra degli schemi a blocchi

La trasformata di Laplace è un operatore lineare

Spostamento di un blocco o di un sommatore/comparatore



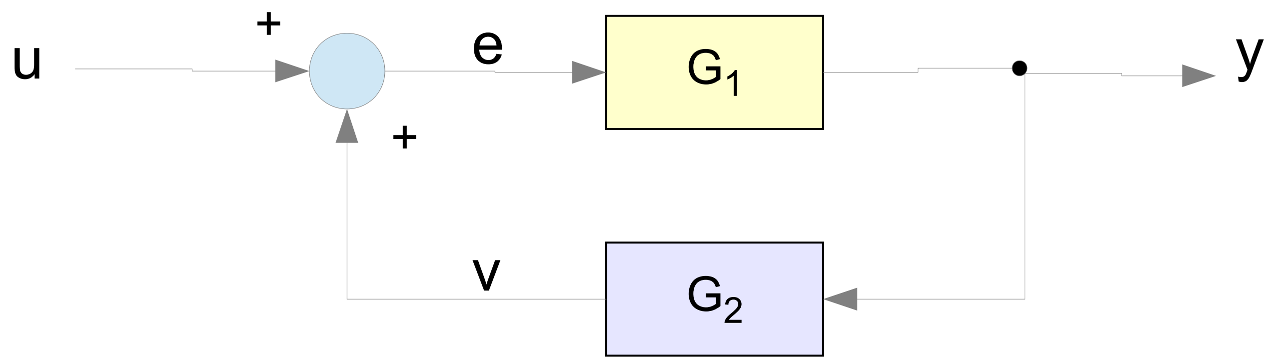
$$Y(s) = U_1(s) - Y_2(s) = U_1(s) - G(s)\,U_2(s) =$$
$$= G(s)\left(G^{-1}(s)\,U_1(s) - U_2(s)\right)$$



Proprietà dell'algebra degli schemi a blocchi

La trasformata di Laplace è un operatore lineare

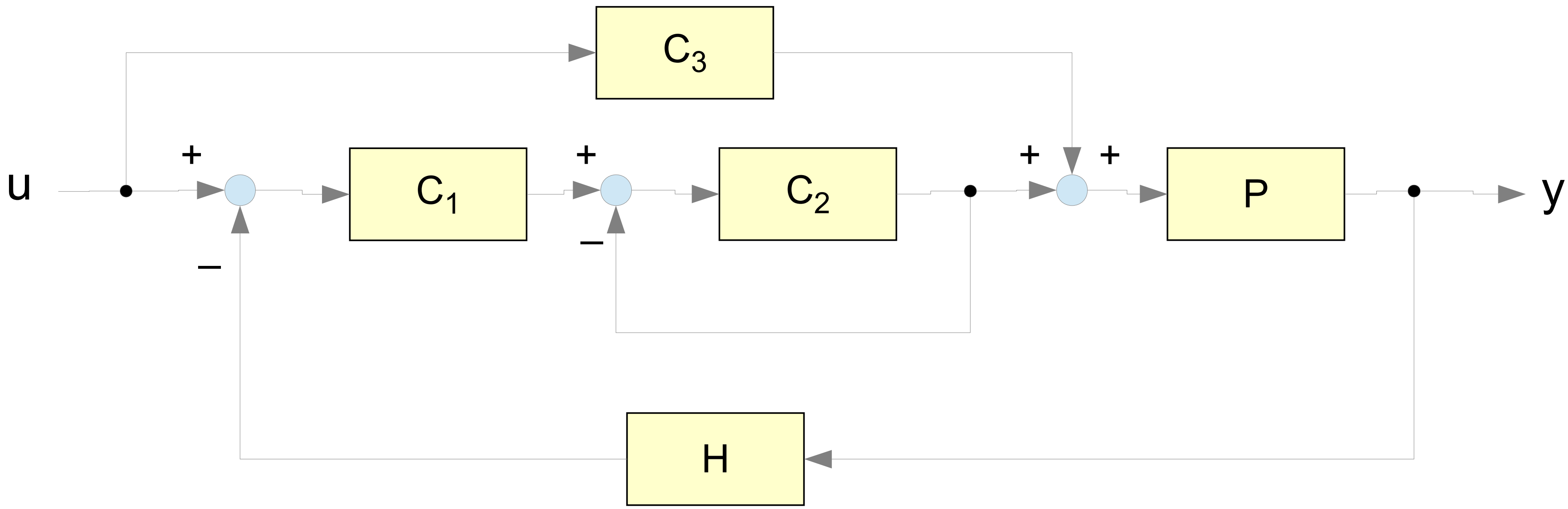
ciclo



$$Y(s) = G_1(s)\big(U(s) + V(s)\big) = G_1(s)\big(U(s) + G_2(s)\,Y(s)\big) =$$
$$= G_1(s)\,U(s) + G_1(s)\,G_2(s)\,Y(s)$$
$$Y(s)\big(1 - G_1(s)\,G_2(s)\big) = G_1(s)\,U(s)$$
$$Y(s) = \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s)\,G_2(s)}\,U(s)$$

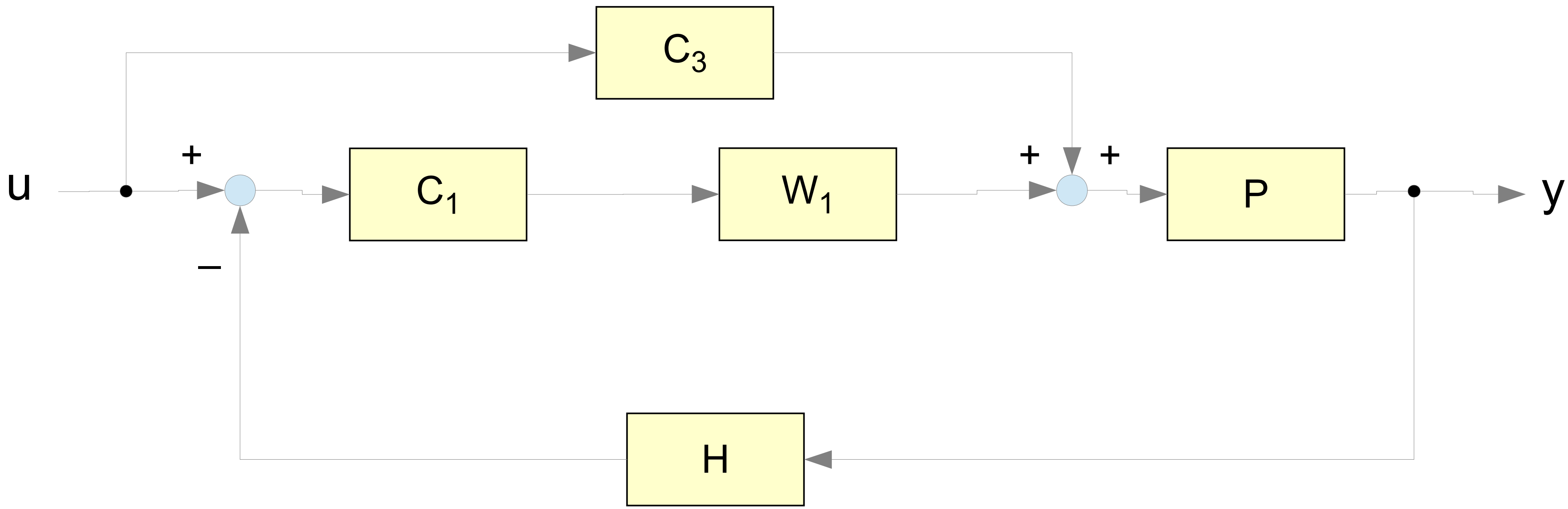
$$Y(s) = W(s)\,U(s) \qquad W(s) = \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s)\,G_2(s)}$$

Esempio di calcolo della funzione di trasferimento



$$Y(s) = W(s)\,U(s) \qquad W(s) = \ ?$$

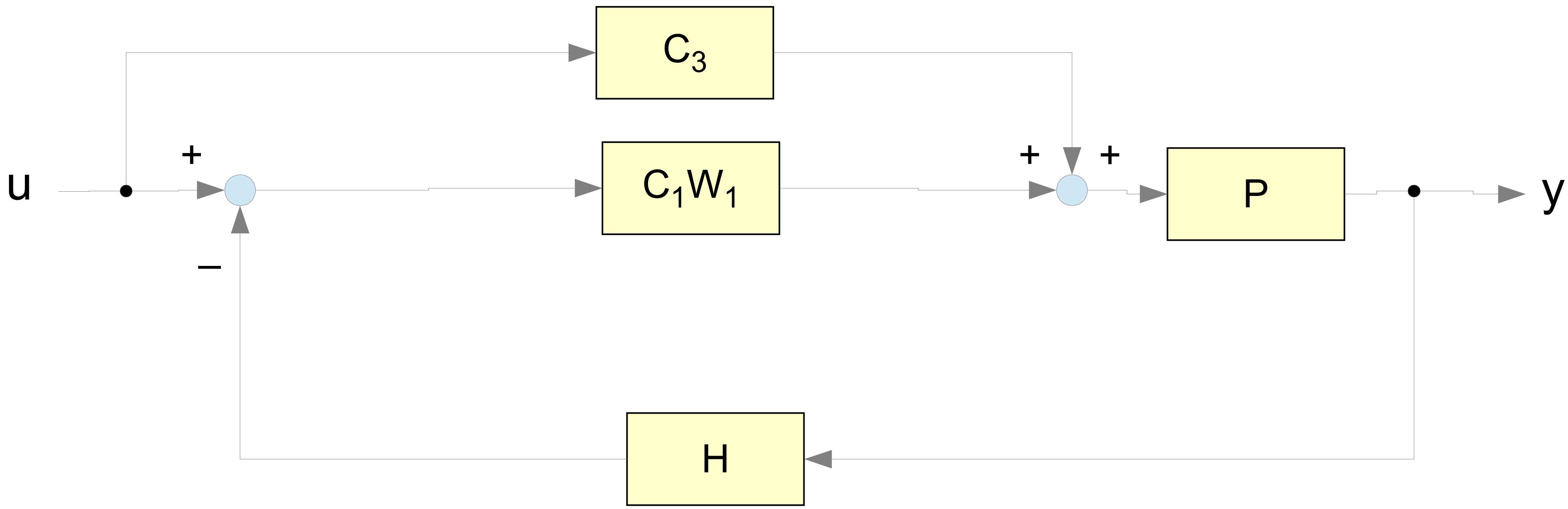
Esempio di calcolo della funzione di trasferimento



$$W_1 = \frac{C_2}{1 + C_2}$$

$$Y(s) = W(s)\,U(s) \qquad W(s) = \,?$$

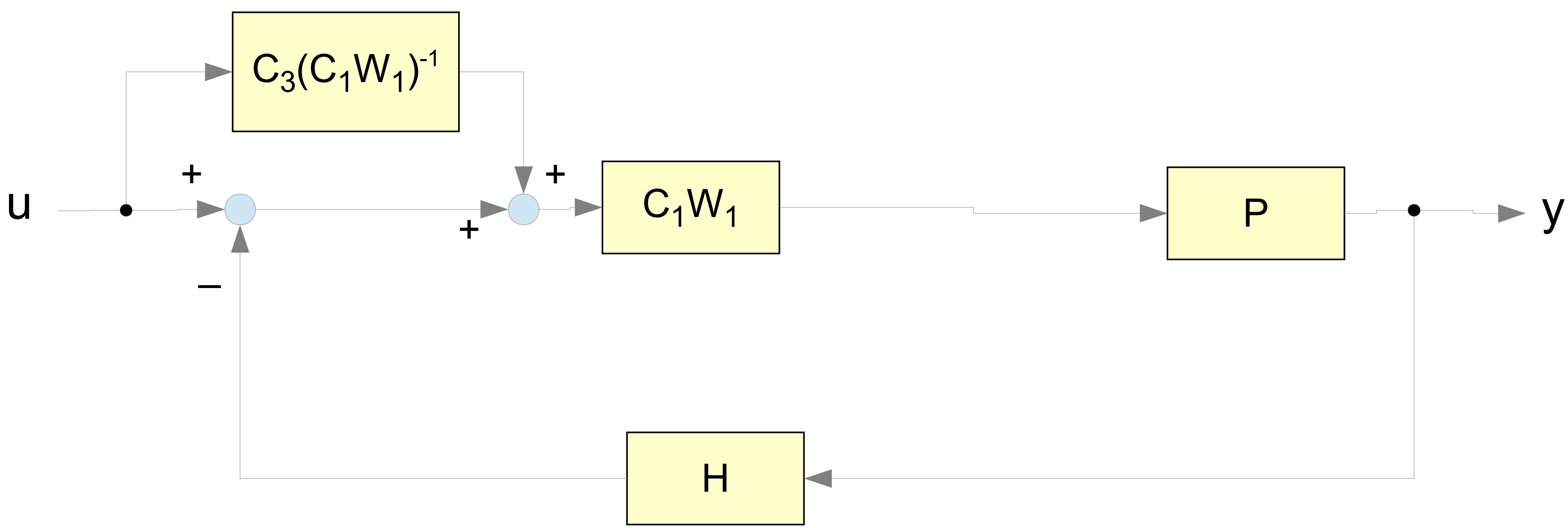
Esempio di calcolo della funzione di trasferimento



$$W_1 = \frac{C_2}{1+C_2}$$

$$Y(s) = W(s)\,U(s) \qquad W(s) = \;?$$

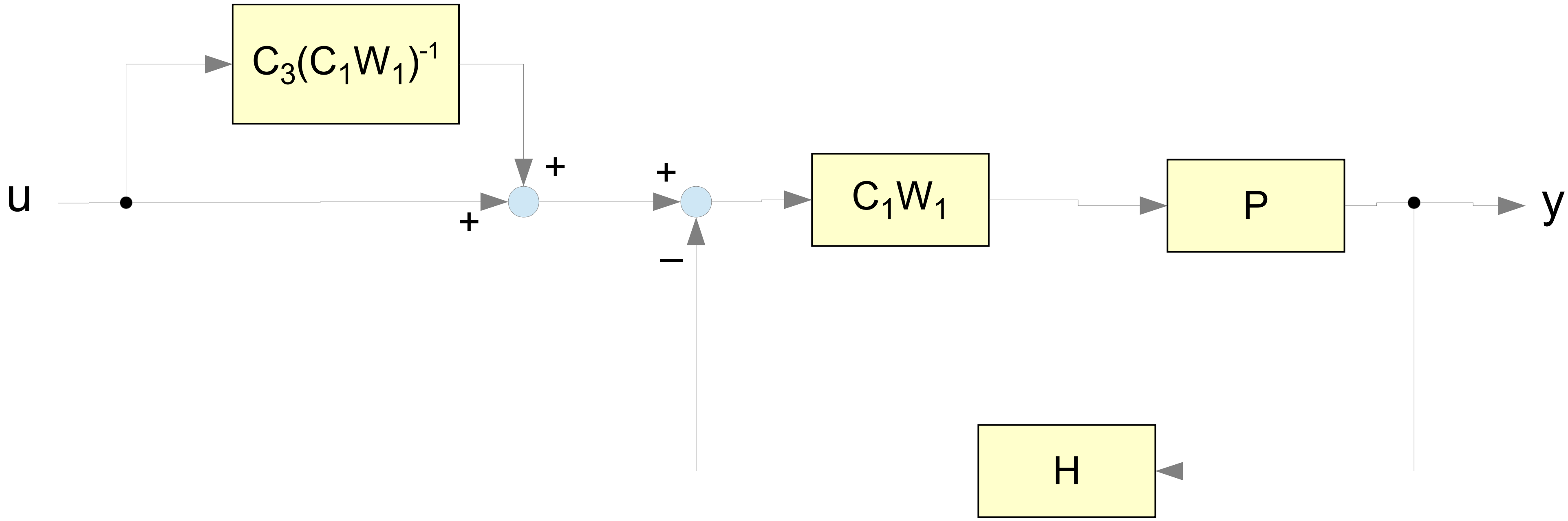
Esempio di calcolo della funzione di trasferimento



$$W_1 = \frac{C_2}{1+C_2}$$

$$Y(s) = W(s)\,U(s) \qquad W(s) = \;?$$

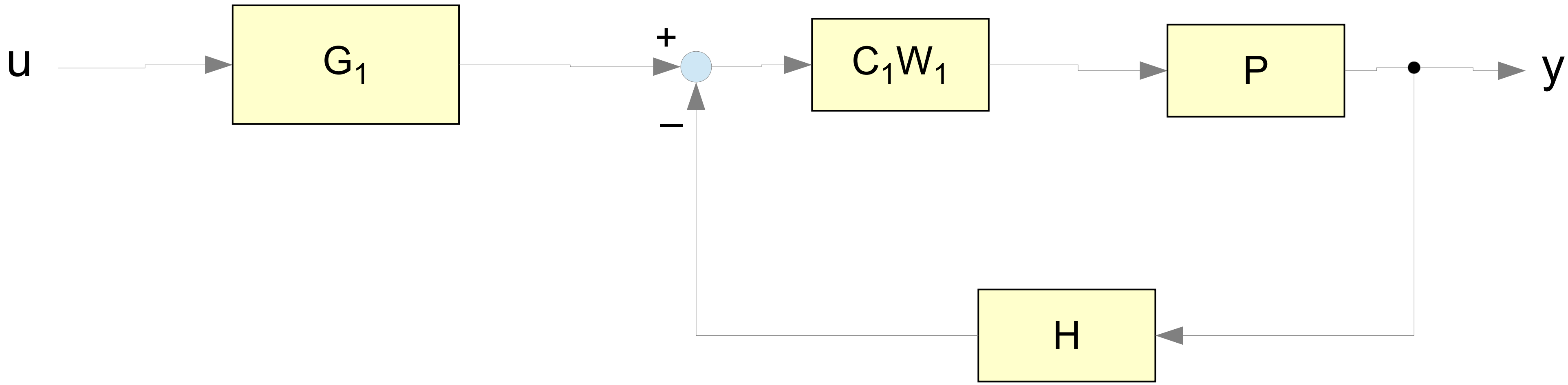
Esempio di calcolo della funzione di trasferimento



$$W_1 = \frac{C_2}{1+C_2}$$

$$Y(s) = W(s)\,U(s) \qquad W(s) = \ ?$$

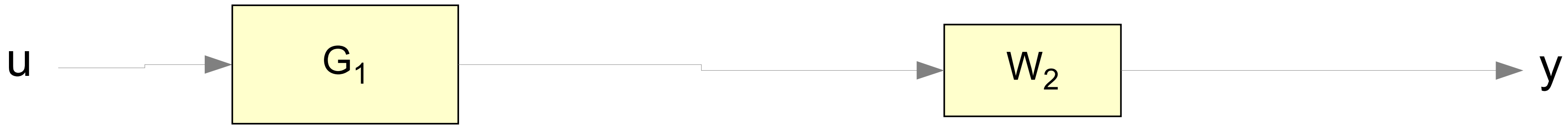
Esempio di calcolo della funzione di trasferimento



$$G_1 = \frac{C_1 W_1 + C_3}{C_1 W_1} \qquad W_1 = \frac{C_2}{1 + C_2}$$

$$Y(s) = W(s)\,U(s) \qquad W(s) = \; ?$$

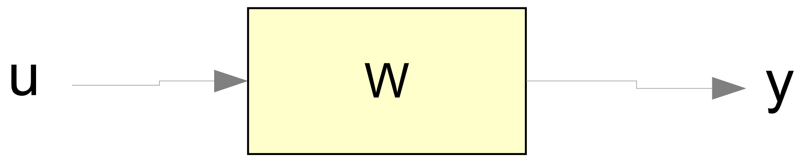
Esempio di calcolo della funzione di trasferimento



$$G_1 = \frac{C_1 W_1 + C_3}{C_1 W_1} \qquad W_1 = \frac{C_2}{1 + C_2} \qquad W_2 = \frac{C_1 W_1 P}{1 + C_1 W_1 P H}$$

$$Y(s) = W(s)\,U(s) \qquad W(s) = \;?$$

Esempio di calcolo della funzione di trasferimento



$$Y(s) = W(s)\,U(s)$$
$$W(s) = G_1 W_2$$

$$G_1 = \frac{C_1 W_1 + C_3}{C_1 W_1} \qquad W_1 = \frac{C_2}{1 + C_2} \qquad W_2 = \frac{C_1 W_1 P}{1 + C_1 W_1 P H}$$

$$W = \frac{C_1 W_1 + C_3}{C_1 W_1} \frac{C_1 W_1 P}{1 + C_1 W_1 P H} = \frac{(C_1 W_1 + C_3) P}{1 + C_1 W_1 P H} =$$
$$= \frac{(C_3 + C_3 C_2 + C_1 C_2) P}{1 + C_2 + C_1 C_2 P H}$$