

Indice

1	Modi TEM	4
1.1	Campi TEM	4
1.2	Proprietà di un campo TEM	7
1.3	Potenziali coniugati	8
1.4	Cavo coassiale	10
2	Modi QUASI-TEM	12
3	Propagazione nelle strutture a più conduttori	15
3.1	Corrente e impedenza - modi pari e dispari	17
4	Valutazione numerica dei parametri di una linea	21
4.1	Il metodo delle differenze finite	21
4.2	Un metodo variazionale nel dominio trasformato	26
5	Guide d'onda	30
5.1	Potenziali di Hertz-Debye	30
5.2	Decomposizione in campi TE e TM	31
5.3	Modi TE	32
5.4	Modi TM	35
5.5	Guida rettangolare	35
5.6	Caratteristiche della propagazione	37
5.7	Diagramma di Brillouin	38
5.8	Potenza nelle guide	39
5.9	Proprietà espansione modale	40
5.10	Perdite nelle guide	41
6	Spazi di Hilbert e serie di Fourier	47
6.1	Spazi vettoriali	47

6.2	Funzioni integrabili	47
6.3	Spazi normati	48
6.4	Convergenza	48
6.5	Spazi di Hilbert	49
6.6	Serie di Fourier	50
6.7	Sistemi completi	51
7	Circuiti in guida d'onda	53
7.1	Eccitazione di un campo in guida	53
7.2	Mode Matching	55
7.3	Slot in guida d'onda rettangolare	60
7.4	Accoppiamento tramite fori	63
7.5	Teoria di Bethe	64
7.6	Foro in una parete trasversa	65
7.7	Foro in una parete longitudinale	68
7.8	Teoria di Collin	69
7.9	Foro in una parete trasversa (teoria di Collin)	71
7.10	Foro in una parete longitudinale (teoria di Collin)	72
8	Cavità risonanti	74
8.1	Cavità ideali nel dominio della frequenza	76
8.2	Risuonatore coassiale	77
8.3	Il metodo della risonanza longitudinale	78
8.4	Cavità reali	79
8.5	Cavità alimentate	83
8.6	Accoppiamento guida-cavità tramite fori	85
8.7	Dimostrazioni	87
8.7.1	Gli autovalori del laplaciano sono reali positivi	87
8.7.2	Completezza dei vettori di base	88
8.7.3	Solenoidalità del campo elettrico	88
9	Strutture guidanti inhomogenee	90
9.1	Modi ibridi	90
9.2	Piastra dielettrica	92
9.3	Modi leaky	96
9.4	Modi leaky in una piastra dielettrica	97
10	Fibre ottiche	100
10.1	Modi di una fibra ottica	100
10.2	Modi guidati in una fibra ottica	100
10.3	Dispersione nelle fibre ottiche	105

11 Matrice di trasmissione	107
11.1 Definizione e proprietà	107
11.2 Impedenza di ingresso	109
12 Strutture periodiche	111
12.1 Propagazione in strutture periodiche	111
12.2 Struttura periodica finita	114
12.3 Esempi	117
12.4 Modi di Floquet	119

CAPITOLO 1

Modi TEM

1.1 Campi TEM

Consideriamo le equazioni di Maxwell nel DF per un mezzo omogeneo:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E} \end{cases} \quad (1.1)$$

Poichè ci interessa studiare la propagazione in una struttura guidante, la direzione di propagazione, che assumiamo come direzione z di un sistema di riferimento, risulterà essere una direzione preferenziale del problema. Convienne quindi decomporre tutti i vettori in un componente trasverso e uno lungo z : $\vec{E} = \vec{E}_t + E_z\vec{i}_z$, e analogamente per H . Allo stesso modo conviene separare la parte trasversa e quella longitudinale dell'operatore ∇ : $\nabla = \nabla_t + \frac{\partial}{\partial z}\vec{i}_z$.

Possiamo sostituire queste posizioni nelle equazioni di Maxwell, tenendo conto che nelle operazioni vettoriali si comportano come vettori ordinari, ottenendo:

$$\begin{cases} \nabla_t \times \vec{E}_t + \nabla_t \times (E_z\vec{i}_z) + \vec{i}_z \times \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial z} = -j\omega\mu\vec{H}_t - j\omega\mu H_z\vec{i}_z \\ \nabla_t \times \vec{H}_t + \nabla_t \times (H_z\vec{i}_z) + \vec{i}_z \times \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial z} = j\omega\epsilon\vec{E}_t + j\omega\epsilon E_z\vec{i}_z \end{cases} \quad (1.2)$$

La forma (1.2) delle Equazioni di Maxwell è quella che utilizzeremo nel seguito.

Cominciamo qui ad occuparci di campi TEM (Trasversi ElettroMagnetici), ovvero campi per cui

$$E_z = 0 \quad H_z = 0 \quad (1.3)$$

Per tali campi le (1.2) forniscono:

$$\begin{cases} \nabla_t \times \vec{E}_t + \vec{i}_z \times \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial z} = -j\omega\mu\vec{H}_t \\ \nabla_t \times \vec{H}_t + \vec{i}_z \times \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial z} = j\omega\epsilon\vec{E}_t \end{cases} \quad (1.4)$$

In ogni equazione il primo termine è longitudinale, mentre gli altri sono trasversi. Separando le componenti, segue:

$$\begin{cases} \nabla_t \times \vec{E}_t = 0 \\ \nabla_t \times \vec{H}_t = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

Deriviamo la prima equazione restante rispetto a z :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_t}{\partial z^2} = -j\omega\mu \frac{\partial}{\partial z} (\vec{H}_t \times \vec{i}_z) \quad (1.6)$$

e sostituiamo l'altra (\vec{i}_z è costante e può essere scambiato con la derivata):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \vec{E}_t}{\partial z^2} + j\omega\mu(-j\omega\epsilon\vec{E}_t) = 0 \\ \frac{\partial^2 \vec{E}_t}{\partial z^2} + k^2\vec{E}_t = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

con $k^2 = \omega^2\epsilon\mu$ costante di propagazione del mezzo.

La soluzione di queste equazioni è ovviamente:

$$\vec{E}_{t0}^+ e^{-jkz} + \vec{E}_{t0}^- e^{jkz} \quad (1.8)$$

con \vec{E}_{t0}^\pm vettori costanti.

Segue immediatamente che, se il dielettrico non è trasversalmente omogeneo, non esistono campi TEM (la diversa velocità di propagazione ai due lati dell'interfaccia produrrebbe lo scorrimento dei campi e quindi il non soddisfacimento delle condizioni al contorno).

Resta la possibilità che nella sezione trasversa vi siano dei CEP¹, su cui deve essere:

$$\vec{E}_t \cdot \vec{i}_c = 0 \quad (1.9)$$

¹O anche dei CMP, di cui però considereremo solo un esempio più avanti, lasciando la trattazione generale per il caso dei soli CEP.

In assenza di conduttori, l'unica soluzione è un'onda piana generica in direzione z , soluzione che qui non interessa. Pertanto possiamo sempre supporre che vi siano uno o più conduttori.

Per determinare la soluzione notiamo che da $\nabla_t \times \vec{E}_t = 0$ segue:

$$\vec{E}_t = -\nabla_t \Phi(\vec{t}, z) \quad (1.10)$$

e da $\nabla \cdot \vec{E} = \nabla_t \cdot \vec{E}_t = 0$ si ottiene:

$$\nabla_t^2 \Phi(\vec{t}, z) = 0 \quad (1.11)$$

Le equazioni così trovate sono esattamente le equazioni per la determinazione del campo elettrostatico bidimensionale nella medesima struttura. Il potenziale Φ ha lo stesso ruolo del potenziale elettrostatico, ed è quindi ovviamente definito a meno di una costante. Per mantenere l'analogia sceglieremo $\Phi = 0$ sul contorno dell'infinito (nel caso di problemi aperti) e, ovviamente, su tutti i conduttori che si estendono all'infinito². Per problemi chiusi, invece, assumeremo $\Phi = 0$ sul conduttore di chiusura del problema (conduttore di massa).

Per quanto riguarda gli altri conduttori, se esistono, occorre imporre la condizione (1.9) che, in termini di Φ , diventa, sul contorno:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0 \quad (1.12)$$

L'equazione (1.11) prende il nome di equazione di Laplace, e le sue soluzioni sono dette funzioni armoniche.

Una funzione $f(\vec{t})$ armonica in un dominio \mathbb{D} , gode di una proprietà tra cui:

1. Se P è un punto interno a \mathbb{D} , allora $f(P)$ è la media dei valori di $f(\vec{t})$ su di una circonferenza (interna a \mathbb{D}) di centro P .
2. In conseguenza del punto precedente, il massimo e il minimo di $f(\vec{t})$ in \mathbb{D} sono punti di $\partial\mathbb{D}$.

La condizione (1.12) implica che Φ è costante separatamente su ogni conduttore del contorno.

Se il contorno è singolo, allora su di esso $\Phi = 0$. Ma allora massimo e minimo

²Nel seguito il contorno all'infinito verrà considerato equivalente ad un conduttore.

di Φ sono entrambi nulli e quindi Φ è nullo ovunque e non vi sono campi TEM. Se invece i conduttori sono due o più, vi è almeno un conduttore su cui $\Phi \neq 0$ e quindi esistono campi TEM.

Se i conduttori sono $N + 1$, possiamo fissare ad arbitrio N valori di potenziale sui conduttori, ottenendo N diversi campi TEM, tra loro linearmente indipendenti.

Poichè ogni campo TEM ha la stessa costante di propagazione (1.8), questi N campi costituiscono una base dello spazio vettoriale di tutti i campi TEM.

Nel seguito considereremo prima un singolo campo TEM e poi vedremo la relazione tra gli N campi di un caso con $N + 1$ conduttori.

1.2 Proprietà di un campo TEM

Consideriamo un campo TEM in cui $\Phi \neq 0$ solo su di un conduttore, C_1 . La soluzione è allora proporzionale, per ogni z , al valore di Φ su quel conduttore. Posto allora:

$$\Phi|_{C_1} = V(z) \quad (1.13)$$

si trova come soluzione di (1.11):

$$\Phi(\vec{t}, z) = V(z)\phi(\vec{t}) \quad (1.14)$$

dove $\phi(\vec{t})$ è la funzione armonica (reale) corrispondente a $\Phi = 1$ su C_1 . Di conseguenza:

$$\vec{E}_t = V(z)\vec{e}(\vec{t}) \quad (1.15)$$

(con $\vec{e}(\vec{t}) = -\nabla_t\phi(\vec{t})$) e dalla (1.4) segue che anche \vec{H}_t è fattorizzato:

$$\vec{H}_t = I(z)\vec{h}(\vec{t}) \quad (1.16)$$

Sostituendo nella (1.4) si ha:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dz}\vec{i}_z \times \vec{e} = -j\omega\mu I\vec{h} \\ \frac{dI}{dz}\vec{i}_z \times \vec{h} = j\omega\epsilon V\vec{e} \end{cases} \quad (1.17)$$

I vettori \vec{e} e $\vec{i}_z \times \vec{h}$ sono pertanto paralleli, e quindi esiste una costante A tale che:

$$\vec{e} = A\vec{h} \times \vec{i}_z \quad (1.18)$$

Sostituendo si ottengono le equazioni delle linee di trasmissione:

$$\begin{cases} -\frac{dV}{dz} = j\omega\frac{\mu}{A}I \\ -\frac{dI}{dz} = j\omega\epsilon AV \end{cases} \quad (1.19)$$

in cui ϵ e μ possono anche essere funzioni di z . Se sono costanti, le (1.19) diventano le equazioni standard dei telegrafisti, con:

$$\begin{cases} C = \epsilon A \\ L = \frac{\mu}{A} \end{cases} \quad (1.20)$$

Per determinare la costante A possiamo richiedere che il flusso di potenza:

$$P = \int_{S_t} \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H} \cdot \vec{i}_z dS = \frac{1}{2} VI^* \int_{S_t} \vec{e} \times \vec{h} \cdot \vec{i}_z dS \quad (1.21)$$

sia calcolabile sulla linea di trasmissione. Questo richiede:

$$\int_{S_t} \vec{e} \times \vec{h} \cdot \vec{i}_z dS = 1 \quad (1.22)$$

Dalla (1.18) segue $h = \frac{1}{A} \vec{i}_z \times \vec{e}$ e, sostituendo:

$$1 = \int_{S_t} (\vec{i}_z \times \vec{e}) \cdot \left(\frac{1}{A} \vec{i}_z \times \vec{e} \right) dS = \frac{1}{A} \int_{S_t} |\vec{i}_z \times \vec{e}|^2 dS \quad (1.23)$$

e poichè \vec{i}_z e \vec{e} sono perpendicolari, si ha:

$$A = \int_{S_t} |e|^2 dS = \int_{S_t} |\nabla_t \phi|^2 dS \quad (1.24)$$

A dipende quindi solo dalla geometria dei conduttori.

1.3 Potenziali coniugati

Dalla (1.5), sostituendo le equazioni (1.15) e (1.16), segue che:

$$\begin{cases} \nabla_t \times \vec{e} = 0 \\ \nabla_t \times \vec{h} = 0 \end{cases} \quad (1.25)$$

e quindi:

$$\begin{cases} \vec{e} = -\nabla_t \phi \\ \vec{h} = -\nabla_t \left(\frac{\Psi}{A} \right) \end{cases} \quad (1.26)$$

con le condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial c} |_{cont} = 0 \\ \frac{\partial \Psi}{\partial n} |_{cont} = 0 \end{cases} \quad (1.27)$$

Sembra quindi che si possano costruire i modi TEM partendo equivalentemente da \vec{e} (ovvero ϕ) o da \vec{h} (ovvero Ψ). In realtà il potenziale Ψ è discontinuo, oppure polidromo (a più valori) e questo lo rende di difficile utilizzo.

Infatti ricordiamo che, dalla legge di Ampere per campi TEM:

$$\int_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad (1.28)$$

con la circuitazione fatta su di un percorso chiuso ortogonale a z (figura 1.1), e I corrente che passa all'interno di Γ . Sostituendo la (1.16):

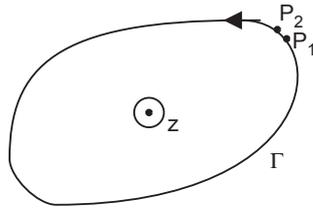


Figura 1.1: Circuitazione sul percorso Γ

$$\int_{\Gamma} \vec{h} \cdot d\vec{l} = 1 \quad (1.29)$$

e la (1.26b):

$$1 = - \lim_{P_2 \rightarrow P_1} \int_{P_1}^{P_2} \nabla_t \frac{\Psi}{A} \cdot d\vec{l} = - \lim_{P_2 \rightarrow P_1} [\Psi(P_2) - \Psi(P_1)] \frac{1}{A} \quad (1.30)$$

da cui, se Ψ fosse continua e ad un solo valore, il secondo membro sarebbe nullo.

ϕ e Ψ sono connesse. Infatti da (1.18) si ha:

$$\nabla_t \phi = \nabla_t \Psi \times \vec{i}_z \quad (1.31)$$

ovvero:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{cases} \quad (1.32)$$

La funzione $\phi(x, y) + j\Psi(x, y)$ è quindi una funzione analitica, e ϕ e Ψ sono dette armoniche (o potenziali) coniugate.

1.4 Cavo coassiale

ϕ è indipendente da φ (campo elettrostatico), quindi:

$$\nabla_t^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0 \quad (1.33)$$

dove r è diverso da zero. Moltiplicando per r e integrando si trova:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{K_1}{r} \quad (1.34)$$

con K_1 costante. Integrando ancora:

$$\phi = K_1 \log_e r + K_2 \quad (1.35)$$

con K_2 costante. Assumendo $\phi(a) = 1$, $\phi(b) = 0$, si trova:

$$\begin{cases} K_1 \log_e a + K_2 = 1 \\ K_1 \log_e b + K_2 = 0 \end{cases} \quad (1.36)$$

ovvero $K_1 = \frac{1}{\log_e \frac{a}{b}}$ (K_2 è inutile determinarlo), e quindi:

$$\vec{e} = -\nabla_t \phi = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{1}{\log_e \frac{b}{a}} \vec{i}_r \quad (1.37)$$

La costante A si trova da:

$$A = \left[\int_{S_t} \frac{1}{r^2} r dr d\varphi \frac{1}{\log_e \frac{b}{a}} \right] = \left[\frac{1}{\log_e \frac{b}{a}} 2\pi \int_a^b \frac{1}{r} dr \right] = \frac{2\pi}{\log_e \frac{b}{a}} \quad (1.38)$$

e quindi:

$$\vec{h} = \frac{1}{2\pi r} \vec{i}_\varphi \quad (1.39)$$

Per determinare Ψ conviene partire da \vec{h} :

$$\frac{1}{2\pi r} \vec{i}_\varphi = -\frac{\log_e \frac{b}{a}}{2\pi} \nabla_t \Psi \quad (1.40)$$

Quindi Ψ deve dipendere solo da φ (e questo, tra l'altro, è sufficiente per avere $\frac{\partial \Psi}{\partial n} = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0$ sui due contorni. Imponendo cioè:

$$\begin{cases} -\log_e \frac{b}{a} \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} \\ \Psi = -\frac{\varphi}{\log_e \frac{b}{a}} \end{cases} \quad (1.41)$$

o Ψ è discontinua, oppure è polidroma (figura 1.2).

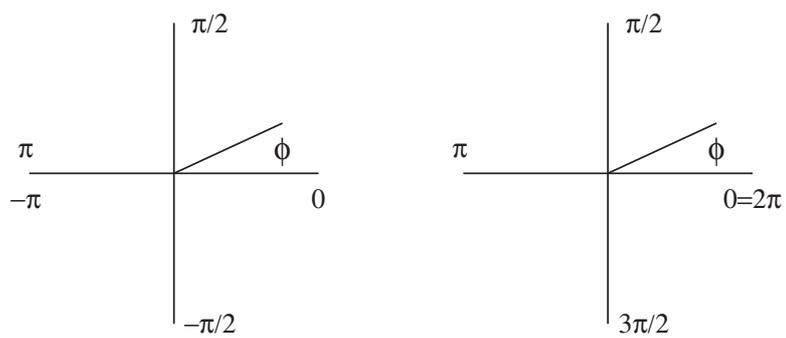


Figura 1.2: Discontinuità e polidromia di Ψ

CAPITOLO 2

Modi QUASI-TEM

Nelle strutture con dielettrico non omogeneo, come ad esempio le microstrip, non sono possibili campi TEM, eccetto che per $\omega = 0$.

E' però ragionevole supporre che, per "basse" frequenze, il campo sia molto simile ad un campo TEM, ovvero che abbia le caratteristiche trasverse di questo, e una parte longitudinale sufficientemente piccola da poter essere trascurata.

Per studiare tale caso, torniamo alle equazioni di Maxwell, di cui però cerchiamo direttamente soluzioni che varino con z come $e^{-j\beta z}$ in modo che:

$$\frac{\partial}{\partial z} \longrightarrow -j\beta \quad (2.1)$$

La costante β è ovviamente da determinare. Le equazioni di Maxwell diventano allora:

$$\begin{cases} \nabla_t \times \vec{E}_t = -j\omega\mu H_z \vec{i}_z & \vec{i}_z \times (-j\beta \vec{E}_t) - \nabla_t E_z \times \vec{i}_z = -j\omega\mu \vec{H}_t \\ \nabla_t \times \vec{H}_t = j\omega\epsilon E_z \vec{i}_z & \vec{i}_z \times (-j\beta \vec{H}_t) - \nabla_t H_z \times \vec{i}_z = j\omega\epsilon \vec{E}_t \end{cases} \quad (2.2)$$

Per semplificare, sia pure in modo approssimato, queste equazioni, occorre valutare l'ordine di grandezza delle derivate spaziali rispetto alle coordinate trasverse.

Consideriamo ad esempio: $\frac{d}{dx}f(x) \simeq \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, avendo scelto come Δx un intervallo in cui $f(x)$ varia in maniera significativa:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = O[f(x)] \quad (2.3)$$

Allora segue:

$$\frac{d}{dx}f(x) = O\left[\frac{f(x)}{\Delta x}\right] \quad (2.4)$$

Se, in particolare $f(x) = \sin \frac{2\pi x}{\lambda}$, un intervallo Δx è una frazione significativa di λ , ad esempio $\frac{\lambda}{8}$. Pertanto l'ordine di grandezza di $f'(x)$, valutato tramite la (2.4), è $\frac{\lambda}{8}$. In realtà $f'(x) = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \frac{2\pi x}{\lambda}$ con ordine di grandezza $\frac{2\pi}{\lambda}$, che è perfettamente coerente con la stima (2.4).

Nel caso di una microstrip, la scala di variazione è dell'ordine di grandezza di una frazione di w , o di h . Detta s tale scala di variazione, allora:

$$\nabla_t \times \vec{E}_t = O\left(\frac{|E_t|}{s}\right) \quad , \quad \nabla_t E_z = O\left(\frac{|E_z|}{s}\right) \quad (2.5)$$

Nelle (2.2) per le componenti longitudinali, ricordando che $\vec{H}_t = O\left(\frac{1}{s}|E_t|\right)$, si trova che il primo membro è $O\left(\frac{|E_t|}{s}\right)$ e il secondo è $O\left(\frac{|E_t|}{\lambda}\right)$, che è un valore molto più piccolo se assumiamo:

$$w, h \ll \lambda \quad (2.6)$$

Analogamente nelle componenti longitudinali resta solo il secondo membro e quindi si trova, se vale la (2.6)

$$\begin{cases} \nabla_t \times \vec{E}_t = 0 \\ \nabla_t \times \vec{H}_t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla_t E_z = 0 \\ \nabla_t H_z = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Dal secondo gruppo di (2.7) segue che E_z e H_z sono costanti, e quindi nulle (sono nulle all'infinito), mentre \vec{E}_t e \vec{H}_t sono separatamente irrotazionali.

Poichè le equazioni alle divergenze forniscono, con la stessa analisi:

$$\begin{cases} \nabla_t \cdot \vec{E}_t = 0 \\ \nabla_t \cdot \vec{H}_t = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

allora \vec{E}_t può essere calcolato risolvendo lo stesso problema elettrostatico del caso TEM, ovviamente in una struttura con dielettrico non omogeneo. Allo stesso modo andrebbe calcolato \vec{H}_t , in quanto non vi è alcuna connessione con \vec{E}_t . Tuttavia se, oltre al problema reale in esame, consideriamo un problema con gli stessi conduttori, ma con un dielettrico omogeneo (vuoto), scopriamo che il campo \vec{H}_t (magnetostatico) è lo stesso nei due casi, non dipendendo da ϵ :

$$\vec{H}_t = \vec{H}_t^a \quad (2.9)$$

avendo usato l'apice "a" per il caso di dielettrico omogeneo.

Ma con dielettrico omogeneo il campo è TEM, e quindi \vec{H}_t^a è legato ad \vec{E}_t^a :

$$\vec{H}_t^a = -\frac{1}{\zeta} \vec{E}_t^a \times \vec{i}_z \quad (2.10)$$

e quindi è possibile ottenere \vec{H}_t risolvendo un secondo problema elettrostatico.

CAPITOLO 3

Propagazione nelle strutture a più conduttori

Nel caso di strutture a più conduttori, le equazioni delle linee di trasmissione vanno scritte considerando vettori numerici di tensione e corrente a N componenti $\vec{V}(z)$ e $\vec{I}(z)$, introducendo le matrici di capacità \mathbf{C} e induttanza \mathbf{L} statiche della struttura:

$$\begin{cases} -\frac{d\vec{V}}{dz} = j\omega\mathbf{L}\vec{I} \\ -\frac{d\vec{I}}{dz} = j\omega\mathbf{C}\vec{V} \end{cases} \quad (3.1)$$

Per risolvere tali equazioni possiamo derivare la prima e sostituire la seconda ottenendo:

$$-\frac{d^2\vec{V}}{dz^2} = \omega^2\mathbf{LC}\vec{V} \quad (3.2)$$

Cerchiamo una soluzione del tipo $\vec{V}(z) = \vec{V}^+e^{-j\beta z}$, con \vec{V}^+ vettore costante e β da determinare.

Una tale soluzione costituisce un modo, ovvero una configurazione di campo che:

1. può esistere da sola nella struttura
2. si propaga con una unica velocità di propagazione

Il vettore \vec{V}^+ descrive la configurazione trasversa del modo, in quanto è proporzionale alle condizioni al contorno usate per calcolare \vec{e} .

Sostituendo si trova:

$$\mathbf{LC}\vec{V}^+ = \frac{\beta^2}{\omega^2}\vec{V}^+ \quad (3.3)$$

Poichè stiamo cercando vettori \vec{V}^+ diversi da zero, la precedente è un'equazione agli autovalori.

Ad ogni autovalore $\frac{\beta^2}{\omega^2}$ e autovettore \vec{V}^+ della matrice (di ordine N) \mathbf{LC} corrisponde un modo della struttura. Tale modo ha una configurazione di campo trasverso, determinabile da \vec{V}^+ , e una costante di propagazione β . Ovviamente ogni modo è definito a meno della sua ampiezza, e ha entrambi i versi di propagazione.

A questo punto occorre distinguere il caso TEM dal caso QUASI-TEM. Se la struttura accetta campi TEM (ovvero il dielettrico è trasversalmente omogeneo), allora $\beta = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ per ogni modo. Pertanto la matrice \mathbf{LC} ha tutti gli autovalori uguali (e ogni vettore è un autovettore). Ne segue che \mathbf{LC} è proporzionale alla matrice identità:

$$\mathbf{LC} = \epsilon\mu \quad (3.4)$$

e quindi la sola conoscenza di \mathbf{C} consente di calcolare tutte le grandezze di interesse, essendo:

$$\mathbf{L} = \epsilon\mu\mathbf{C}^{-1} \quad (3.5)$$

Nel caso QUASI-TEM, invece, esistono N soli modi (definiti sempre a meno di una costante), ciascuno con la sua costante di propagazione¹.

Anche in questo caso, comunque, basta la conoscenza delle sole matrici di capacità. Infatti, se sostituiamo tutti i dielettrici con aria, otteniamo una struttura, di matrici \mathbf{C}_A e \mathbf{L}_A , che accetta modi TEM. Quindi:

$$\mathbf{L}_A = \epsilon_0\mu_0\mathbf{C}_A^{-1} \quad (3.6)$$

D'altra parte \mathbf{L} non dipende dal dielettrico (è una matrice di induttanze statiche) e quindi $\mathbf{L} = \mathbf{L}_A$. La equazione agli autovalori diventa:

$$\mathbf{C}_A^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{V}^+ = \frac{\beta^2}{\beta_0^2} \vec{V}^+ = \epsilon_{eff} \vec{V}^+ \quad (3.7)$$

dove $\beta_0^2 = \omega^2\epsilon_0\mu_0$ è la costante di propagazione del vuoto e l'autovalore fornisce direttamente la costante dielettrica efficace del modo.

¹La somma di due modi QUASI-TEM non è un modo in quanto i due modi componenti hanno ciascuno la loro propria velocità di propagazione.

3.1 Corrente e impedenza - modi pari e dispari

La corrente può facilmente essere ricavata dalle equazioni delle linee:

$$\vec{I} = -\frac{1}{j\omega} \mathbf{L}^{-1} \cdot \frac{d\vec{V}}{dz} \implies \vec{I}^+ = \frac{\beta}{\omega} \mathbf{L}^{-1} \cdot \vec{V}^+ = \frac{\beta}{\omega \epsilon_0 \mu_0} \mathbf{C}_A \cdot \vec{V}^+ \quad (3.8)$$

Nel solo caso TEM la relazione precedente diventa, essendo $\mathbf{C}_A = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \mathbf{C}$ e $\beta = \omega \sqrt{\epsilon \mu_0}$:

$$\vec{I}^+ = \frac{\omega \beta}{\omega^2 \epsilon \mu_0} \mathbf{C} \cdot \vec{V}^+ = \frac{\omega}{\beta} \mathbf{C} \cdot \vec{V}^+ \quad (3.9)$$

Invece l'impedenza caratteristica ha natura matriciale (dovendo collegare il vettore \vec{V}^+ al vettore \vec{I}^+), e quindi di difficile utilizzo.

Fanno eccezione due casi; nel primo solo un conduttore è alimentato (possibile in genere solo nel caso TEM). Allora una ragionevole definizione di impedenza è il rapporto tensione-corrente per quel conduttore. Nel caso TEM, per il conduttore P :

$$Z_P = \frac{V_P^+}{I_P^+} = \frac{\beta}{\omega C_{PP}} \quad (3.10)$$

Nel secondo, invece, la struttura ha due conduttori simmetrici; in tal caso tutte le matrici coinvolte sono non solo simmetriche, ma hanno i due elementi della diagonale principale uguali. I due autovettori sono allora $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e anche la corrente è, per i due modi, proporzionale a questi vettori. Questi modi prendono il nome di modo pari e modo dispari della struttura.

Per essi il rapporto tensione-corrente ha (a parte un segno) lo stesso valore per entrambi i conduttori, e quel valore viene assunto come impedenza caratteristica del modo. Nel caso TEM, ad esempio, si ha $\vec{V}^+ = \mathbf{Z} \vec{I}^+$, ovvero:

$$\mathbf{Z} = \frac{\beta}{\omega} \mathbf{C}^{-1} \quad (3.11)$$

La matrice \mathbf{C} si ottiene dalla rete di condensatori (figura 3.1) come:

$$\begin{bmatrix} C_e + C_m & -C_m \\ -C_m & C_e + C_m \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

e quindi la matrice \mathbf{Z} vale:

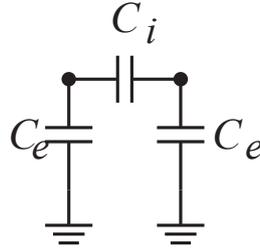


Figura 3.1: Rete di condensatori

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \frac{\beta}{\omega} \frac{1}{(C_e + C_m)^2 - C_m^2} \begin{bmatrix} C_e + C_m & C_m \\ C_m & C_e + C_m \end{bmatrix} = \\ &= \frac{\beta}{\omega} \frac{1}{C_e(C_e + 2C_m)} \begin{bmatrix} C_e + C_m & C_m \\ C_m & C_e + C_m \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Nel modo pari si ha allora:

$$\vec{V}^+ = \mathbf{Z} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_e + 2C_m \\ C_e + 2C_m \end{bmatrix} \frac{\beta}{\omega C_e(C_e + 2C_m)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\beta}{\omega C_e} \quad (3.14)$$

e in quello dispari:

$$\vec{V}^+ = \mathbf{Z} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{\beta}{\omega(C_e + 2C_m)} \quad (3.15)$$

Le due quantità $\frac{\beta}{\omega C_e}$ e $\frac{\beta}{\omega(C_e + 2C_m)}$ prendono il nome di impedenze del modo pari e del modo dispari o, più semplicemente, di impedenza pari Z_p e dispari Z_d . Risulta evidentemente:

$$Z_p > Z_d \quad (3.16)$$

Z_p risulta prossima a Z_d se $C_m \ll C_e$, ovvero se i conduttori sono molto distanziati. Se invece C_m è grande (conduttori vicini) allora Z_p risulterà molto più grande di Z_d .

Nel caso QUASI-TEM, si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_A^{-1} \cdot \mathbf{C} &= \frac{1}{C_{Ae}(C_{Ae} + 2C_{Am})} \begin{bmatrix} C_{Ae} + C_{Am} & C_{Am} \\ C_{Am} & C_{Ae} + C_{Am} \end{bmatrix} \cdot \\ &\cdot \begin{bmatrix} C_e + C_m & -C_m \\ -C_m & C_e + C_m \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.17)$$

I valori di ϵ_{eff} dei vari modi si ottengono moltiplicando questa matrice per $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, ottenendo per il modo pari:

$$\begin{aligned} \epsilon_{eff}^p \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \mathbf{C}_A^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{C_{Ae}(C_{Ae} + 2C_{Am})} \begin{bmatrix} C_{Ae} + C_{Am} & C_{Am} \\ C_{Am} & C_{Ae} + C_{Am} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_e \\ C_e \end{bmatrix} = \\ &= \frac{C_e}{C_{Ae}(C_{Ae} + 2C_{Am})} \begin{bmatrix} C_{Ae} + 2C_{Am} \\ C_{Ae} + 2C_{Am} \end{bmatrix} = \frac{C_e}{C_{Ae}} \end{aligned} \quad (3.18)$$

e per il modo dispari, analogamente:

$$\epsilon_{eff}^d = \frac{C_e + 2C_m}{C_{Ae} + 2C_{Am}} \quad (3.19)$$

Per l'impedenza si procede nella stessa maniera.

Essendo $\mathbf{Z}^{-1} = \frac{\beta}{\omega\epsilon_0\mu_0} \mathbf{C}_A = \frac{\sqrt{\epsilon_{eff}}\beta_0}{\omega\epsilon_0\mu_0} \mathbf{C}_A$, segue:

$$\mathbf{Z} = \frac{\beta_0}{\omega\sqrt{\epsilon_{eff}}} \mathbf{C}_A^{-1} \quad (3.20)$$

L'impedenza di modo pari o dispari si ottiene moltiplicando \mathbf{Z} per $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ oppure $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Analogamente al caso TEM, quindi:

$$Z_p = \frac{\beta_0}{\omega\sqrt{\epsilon_{eff}^p}} \frac{1}{C_{Ae}} = \frac{\beta_0}{\omega\sqrt{C_{Ae}C_e}} \quad (3.21)$$

$$Z_d = \frac{\beta_0}{\omega\sqrt{\epsilon_{eff}^d}} \frac{1}{C_{Ae} + 2C_{Am}} = \frac{\beta_0}{\omega\sqrt{(C_{Ae} + 2C_{Am})(C_e + 2C_m)}} \quad (3.22)$$

Si noti che le espressioni di ϵ_{eff} e Z per i modi pari e dispari sono del tutto analoghe a quelle di una linea a un conduttore, a patto di usare C_e e $C_e + 2C_m$ come capacità. Ciò segue anche dalla manipolazione del diagramma di capacità, mostrato nelle figure 3.2, 3.3 e 3.4.

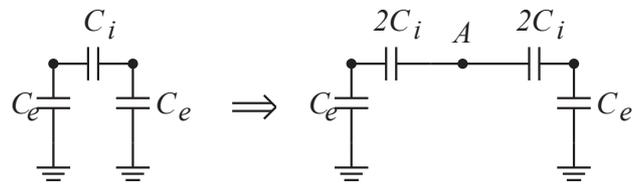


Figura 3.2: Diagramma di capacità

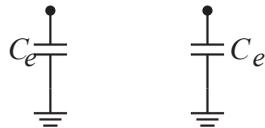


Figura 3.3: Modo pari (il circuito viene aperto nel punto A)

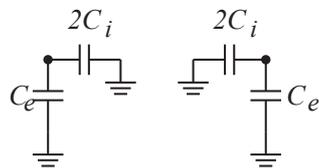


Figura 3.4: Modo dispari (il punto A viene messo a massa)

CAPITOLO 4

Valutazione numerica dei parametri di una linea

4.1 Il metodo delle differenze finite

Per calcolare il campo, e quindi le caratteristiche di una stripline (figura 4.1), occorre risolvere l'equazione:

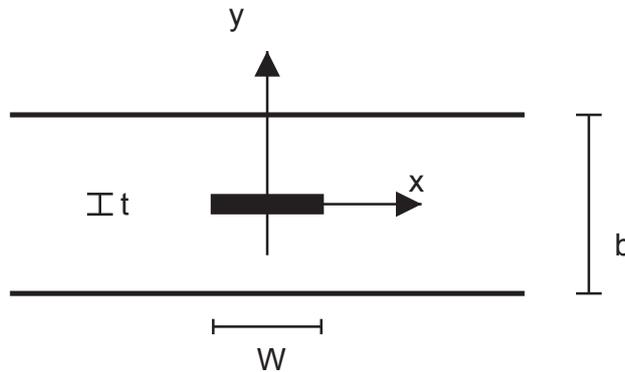


Figura 4.1: Geometria di una stripline

$$\begin{cases} \nabla_t^2 \phi = 0 \\ \phi = 1 \text{ sul conduttore interno} \\ \phi = 0 \text{ sui conduttori esterni} \end{cases} \quad (4.1)$$

Vogliamo qui discutere una delle tecniche numeriche disponibili per tale soluzione, detta delle differenze finite (FD). La soluzione cercata ϕ è una funzione delle variabili continue x, y . Per prima cosa accettiamo di valutarla solo nei punti di una griglia regolare (figura 4.2) con spaziature Δx e Δy (eventualmente diverse). Dalla formula di Taylor si ha:

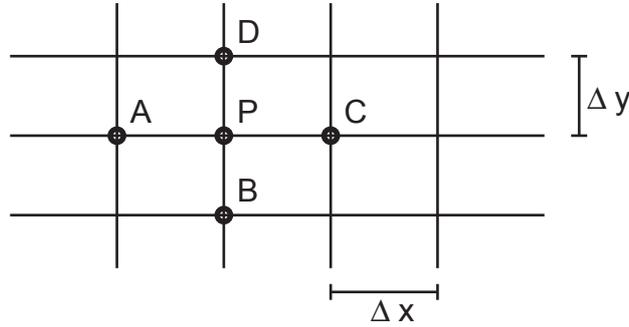


Figura 4.2: Griglia regolare per una stripline

$$\begin{cases} \phi_A = \phi_P + \frac{\partial\phi}{\partial x}\Big|_P (-\Delta x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\Big|_P (-\Delta x)^2 \\ \phi_C = \phi_P + \frac{\partial\phi}{\partial x}\Big|_P (\Delta x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\Big|_P (\Delta x)^2 \end{cases} \quad (4.2)$$

Espressioni analoghe si hanno in direzione y . Sommando si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\Big|_P &= \frac{1}{(\Delta x)^2} \phi_A + \phi_C - 2\phi_P \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\Big|_P &= \frac{1}{(\Delta y)^2} \phi_B + \phi_D - 2\phi_P \end{aligned} \quad (4.3)$$

e quindi:

$$\nabla^2\phi\Big|_P = \frac{1}{\Delta x^2} \phi_A + \phi_C - 2\phi_P + \frac{1}{\Delta y^2} \phi_B + \phi_D - 2\phi_P \quad (4.4)$$

In tutti i punti P interni al dielettrico, quindi, l'equazione di Laplace può essere sostituita dal secondo membro di tale relazione uguagliato a zero (con un errore che dipende dalle derivate quarte di ϕ moltiplicate per Δx^4 e Δy^4).

Se poi i punti di campionamento vengono scelti anche sui conduttori (e quindi Δy è un sottomultiplo sia di t , sia di b), in tali punti i valori di ϕ sono fissati dalle condizioni al contorno. Si è quindi sostituita l'equazione differenziale con un sistema lineare infinito (in quanto il dielettrico è illimitato).

Una riduzione del “numero” di equazioni si può però ottenere sfruttando la simmetria della struttura. Infatti il potenziale ϕ deve essere simmetrico sia rispetto a x , sia rispetto a y , ovvero $\phi(-x, y) = \phi(x, y)$ e $\phi(x, -y) = \phi(x, y)$, $\forall x, y$ ¹. Consideriamo allora un punto P sull'asse x (figura 4.3): per esso $\phi_B = \phi_D$, per cui $\nabla^2\phi_P$ può essere espresso solo in termini di ϕ_A, ϕ_B, ϕ_C .

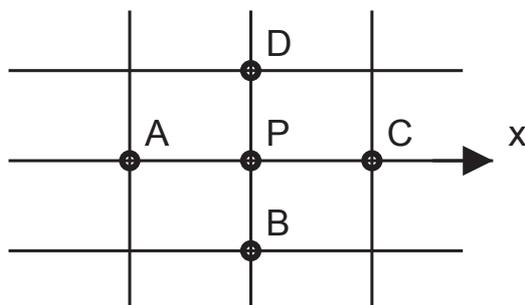


Figura 4.3: Punti nella griglia relativa alla stripline

Analogamente se P è sull'asse y .

Ne segue che se P appartiene ad un certo quadrante (assi inclusi) l'equazione di Laplace in quel punto riguarda solo i valori di ϕ nello stesso quadrante. Pertanto basta limitarsi alle sole equazioni di quel quadrante per risolvere il sistema.

Una ulteriore conseguenza di questa simmetria è che in P risulta $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$. Infatti $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\phi_D - \phi_B}{\Delta y} = 0$

Sull'asse x il campo \vec{e} è quindi tutto tangenziale e pertanto l'asse stesso (o più precisamente il piano (x, z)) può essere sostituito da un CMP e lo stesso vale per l'asse y .

Per poter risolvere il sistema occorre poi una ulteriore approssimazione, ovvero occorre trovare le equazioni in modo da averne un numero finito. Ciò si può fare ricordando che il campo decresce al crescere di $|x|$ e quindi si può assegnare $\phi = 0$ ai punti con $|x|$ sufficientemente grande (il che equivale a porre, in quel punto, due punti CEP). Naturalmente, se dopo la soluzione si trova che vicino ai conduttori fittizi il campo è ancora sensibile, occorre ripetere il calcolo allontanando i conduttori stessi.

Una volta calcolata la ϕ , la capacità può essere ottenuta con due tecniche. La prima è di calcolare l'energia elettrica della struttura:

$$W_e = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\epsilon \int |e|^2 dS \Rightarrow C = \epsilon \int |e|^2 dS \quad (4.5)$$

¹Basta quindi calcolare ϕ in un solo quadrante.

L'altra è di valutare la carica come flusso di \vec{D} o sul conduttore centrale, o su quello esterno (che però comprende tutte le superfici su cui si è imposto $\phi = 0$ per chiudere il dominio):

$$C = \frac{Q}{V} = Q = \int \vec{D} \cdot \vec{i}_n dl = \epsilon \int \vec{e} \cdot \vec{i}_n dl = \epsilon \int \frac{\partial \phi}{\partial n} dl \quad (4.6)$$

dove l'integrale va esteso ad un contorno che circonda la strip.

Assumendo per semplicità $\Delta x = \Delta y$, conviene prendere un contorno che disti $\frac{\Delta x}{2}$ dalla strip (figura 4.4). L'integrale va diviso in tanti contributi, uno

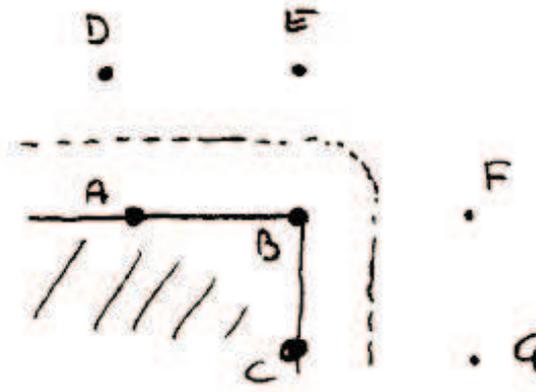


Figura 4.4: Contorno sulla stripline

per punto della strip. Quello relativo a punti non di spigolo (A o C) vale:

$$\Delta x \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_A = \Delta x \frac{\phi_A - \phi_D}{\Delta x} \quad (4.7)$$

Per i punti di spigolo (come B) si ha invece:

$$\left[\frac{\Delta x}{2} + \frac{1}{8} \left(2\pi \frac{\Delta x}{2} \right) \right] = \left\{ \frac{\phi_E - \phi_B}{\Delta x} + \frac{\phi_F - \phi_B}{\Delta x} \right\} \quad (4.8)$$

dove la linea di integrazione comprende metà del quarto di cerchio corrispondente dello spigolo.

Si noti infine che se vi sono dielettrici diversi l'equazione di Laplace va sostituita da $\nabla_t \cdot (\epsilon \nabla_t \phi) = 0$. Applicata ad una superficie (i cui vertici sono punti del reticolo) tagliata a metà dalla superficie di separazione, consente

di ottenere le condizioni di raccordo tra dielettrici.

I parametri di interesse sono C e C_a (necessario a calcolare L) e quindi basta calcolare solo \vec{E}_t^0 . Si trova:

$$\vec{E}_t^0 = -\nabla_t \phi \quad \text{con } \nabla_t \cdot (\epsilon \nabla_t \phi) = 0 \quad (4.9)$$

e le condizioni al contorno o all'interfaccia. Ovviamente $\epsilon = \epsilon_0$ per calcolare C_a e $\epsilon = \epsilon(\vec{t})$ per calcolare C . Si noti che, essendo $L = \frac{k_0^2}{\omega^2 C_a}$, si ha:

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{k_0}{\omega \sqrt{CC_a}} = \frac{1}{v_g \sqrt{CC_a}} = \zeta \left[\frac{\sqrt{CC_a}}{\epsilon_0} \right]^{-1} \quad (4.10)$$

essendo v_g la velocità della luce nel vuoto.

In genere tale equazione non può essere risolta analiticamente ed occorre una soluzione numerica, ad esempio usando le differenze finite. In tal caso le condizioni di raccordo vanno opportunamente imposte, scegliendo la superficie tra i dielettrici intermedia tra due linee del reticolo. Si ha $\int \epsilon \nabla_t \phi d\vec{l}$ esteso al rettangolo tratteggiato (figura 4.5). I valori di $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ necessari sono $(\phi_i - \phi_n) \frac{1}{\Delta x}$

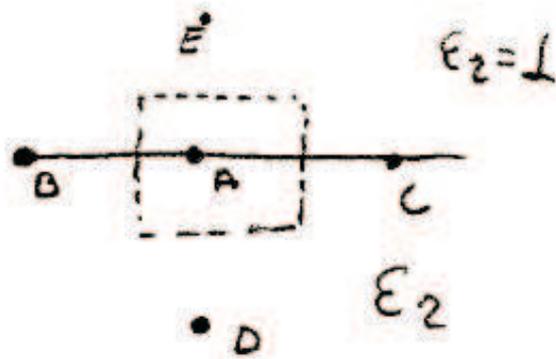


Figura 4.5: Circuitazione della superficie tra i dielettrici

con $i = B, C, D, E$ rispettivamente (per continuità il campo elettrico in AB o AC è lo stesso sia calcolato nel dielettrico, sia nel vuoto). Si ha quindi:

$$(\phi_E - \phi_A) + \frac{1}{2}(\phi_C - \phi_A) + \frac{1}{2}\epsilon_r(\phi_C - \phi_A) + \epsilon_r(\phi_D - \phi_A) + \frac{1}{2}\epsilon_r(\phi_B - \phi_A) + \frac{1}{2}(\phi_B - \phi_A) \quad (4.11)$$

e quindi l'equazione per ϕ_A :

$$\phi_A = \frac{\phi_E + \epsilon_r \phi_D + \frac{\epsilon_r + 1}{2}(\phi_B + \phi_C)}{2(1 + \epsilon_r)} \quad (4.12)$$

che generalizza quella valida per il dielettrico omogeneo.

4.2 Un metodo variazionale nel dominio trasformato

Nella approssimazione TEM (quasi-statica) il potenziale $\phi(x, y)$ per una microstrip (o altra struttura planare) è soluzione di una equazione di Laplace con opportune condizioni al contorno; il problema è quindi analogo al calcolo del campo elettrostatico. Come in quest'ultimo caso è allora possibile sostituire ai CEP le cariche indotte alla superficie. Se, in particolare, questo viene fatto per la striscia centrale, la geometria che si ottiene non presenta variazione lungo x (la densità indotta $\rho(x, y)$ diventa un termine noto e l'equazione si trasforma in quella di Poisson). In tal caso è possibile considerare non le funzioni ma le loro trasformate di Fourier rispetto a x , che risultano essere più facilmente calcolabili.

Consideriamo in particolare una microstrip (figura 4.6) di spessore nullo (ma le difficoltà per casi più generali, come spessore finito, più strati e così via sono solo algoritmiche).

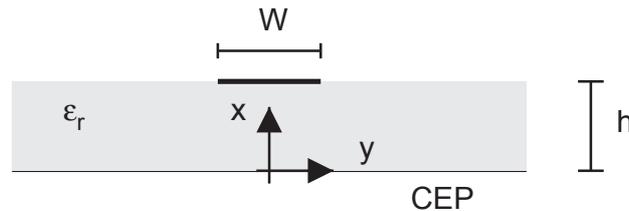


Figura 4.6: Geometria di una microstrip

Il potenziale $\phi(x, y)$ è soluzione della equazione di Laplace con opportune condizioni al limite e di raccordo:

$$\begin{cases} \nabla_t^2 \phi = 0 \\ \phi(x, 0) = \phi(x, \infty) = 0 \\ \phi(x, h^-) = \phi(x, h^+) \end{cases} \quad (4.13)$$

nonchè la condizione di continuità della componente y della induzione:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{x,h^+} = \epsilon_r \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{x,h^-} - \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x, h) \quad (4.14)$$

La soluzione di questa equazione è abbastanza complessa. L'unica cosa che si può dire è che ϕ dipende linearmente da ρ e che tale relazione è anche omogenea rispetto a x . Esiste quindi una funzione $g(x; y, y')$, detta funzione di Green nel dominio spaziale, tale che:

$$\phi(x, y) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{-w/2}^{w/2} \rho(x', h) g(x - x'; y, h) dx' - \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x, h) \quad (4.15)$$

(la funzione g è la risposta impulsiva, ovvero il potenziale per $\rho = \delta(x - x_0)$).

Se invece passiamo al dominio trasformato, indicando con:

$$\tilde{\phi}(\alpha, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y) e^{j\alpha x} dx \quad (4.16)$$

le trasformate di Fourier, l'equazione diventa:

$$-\alpha^2 \tilde{\phi} + \frac{d^2 \tilde{\phi}}{dy^2} = 0 \quad (4.17)$$

d'immediata soluzione:

$$\tilde{\phi}(\alpha, y) = \begin{cases} A \sinh \alpha y & 0 \leq y \leq h \\ B e^{-|\alpha| y} & y \geq h \end{cases} \quad (4.18)$$

avendo imposto le condizioni sul piano di massa e all'infinito. Le condizioni di continuità forniscono poi:

$$\begin{cases} A \sinh \alpha h = B e^{-|\alpha| h} \\ -|\alpha| B e^{-|\alpha| h} = \epsilon_r \alpha A \cosh \alpha h - \frac{1}{\epsilon_0} \tilde{\rho}(\alpha, h) \end{cases} \quad (4.19)$$

Dividendo membro a membro si ha:

$$\alpha \epsilon_r \coth \alpha h - \frac{1}{\epsilon_0 A \sinh \alpha h} \tilde{\rho} = -|\alpha| \quad (4.20)$$

da cui segue ($\alpha \coth \alpha h = |\alpha| \coth |\alpha| h$, essendo α reale e la cotangente dispari):

$$A \sinh \alpha h = B e^{-|\alpha| h} = \frac{\tilde{\rho}(\alpha, h)}{\epsilon_0 |\alpha| [1 + \epsilon_r \coth |\alpha| h]} \quad (4.21)$$

da cui segue $\tilde{\phi}$. Poichè poi:

$$\tilde{\phi}(\alpha, y) = \frac{1}{\epsilon_0} \tilde{\rho}(\alpha, h) \tilde{g}(\alpha, y, h) \quad (4.22)$$

dalla conoscenza di $\tilde{\phi}$ segue anche \tilde{g} , ovvero la funzione di Green nel dominio spettrale.

A questo punto sono possibili varie strade.

1. Se è noto $\rho(x, h)$ si può calcolare $\tilde{\phi}$, antitrasformare e da questo calcolare la capacità C .
2. La densità $\rho(x, h)$ si può calcolare imponendo che $\phi(x, h) = 1$ per $|x| < w/2$. Si ottiene così una equazione integrale in ρ che però richiede il calcolo della antitrasformata di \tilde{g} .
3. Si può utilizzare una espressione variazionale per C che consente di ottenere un buon risultato anche utilizzando una approssimazione ragionevole alla vera ρ , meglio ancora se il calcolo può essere fatto nel dominio trasformato.

Le espressioni variazionali sono tipicamente il rapporto tra due funzionali quadratici. Per ricavarne uno per C partiamo da:

$$Q = C\phi(x, h) \quad |x| < w/2 \quad (4.23)$$

dove $Q = \int_{-w/2}^{w/2} \rho(x, h) dx$; moltiplichiamo per $\rho(x, h)$ e integriamo sulla strip:

$$Q^2 = C \int_{-w/2}^{w/2} \rho(x, h) \phi(x, h) dx \quad (4.24)$$

da cui:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{Q^2} \int_{-w/2}^{w/2} \rho(x, h) \phi(x, h) dx \quad (4.25)$$

Questa relazione è effettivamente variazionale se il differenziale primo di $\frac{1}{C}$ rispetto a ρ si annulla ovvero se, detti N e D numeratore e denominatore:

$$D\Delta N = N\Delta D \quad (4.26)$$

Ora $\Delta D = 2Q\Delta Q = 2Q \int \Delta\rho dx$. Per il numeratore si ha invece:

$$\begin{aligned} \Delta N &= \int [\Delta\rho \cdot \phi + \rho \cdot \Delta\phi] dx = \\ &= \int \left[\Delta\rho(x)\phi(x) + \rho(x) \int \frac{1}{\epsilon_0} \Delta\rho(x')g(x-x')dx' \right] dx \quad (4.27) \end{aligned}$$

Nel secondo termine possiamo invertire l'ordine di integrazione ottenendo:

$$\begin{aligned}\Delta N &= \int \left[\Delta\rho(x)\phi(x) + \frac{1}{\epsilon_0}\Delta\rho(x) \int \rho(x')g(x-x')dx' \right] dx = \\ &= 2 \int \Delta\rho(x)\phi(x)dx\end{aligned}\quad (4.28)$$

dove $\phi(x)$ è il potenziale vero, pari a 1 sulla strip. Pertanto $\Delta N = 2 \int \Delta\rho dx = 2\Delta Q$ e $N = \int \rho(x)dx = Q$ (ovviamente tali risultati valgono se ϕ, ρ sono i valori veri). Ne segue che la formula è effettivamente variazionale.

Se poi utilizziamo l'identità di Parseval, si ha:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2\pi Q^2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(\alpha, h) \tilde{\phi}(\alpha, h) d\alpha \quad (4.29)$$

che consente di calcolare $\frac{1}{C}$ senza antitrasformare $\tilde{\phi}$.

CAPITOLO 5

Guide d'onda

5.1 Potenziali di Hertz-Debye

In assenza di sorgenti sono utili potenziali diversi dalla coppia (\vec{A}, ϕ) , come i due potenziali scalari di Hertz-Debye.

Il potenziale \vec{A} è definito a meno del gradiente di uno scalare. Se il campo \vec{H} è tutto trasverso rispetto ad una direzione (che possiamo individuare come la direzione z) questa libertà consente di scegliere \vec{A} rivolto lungo z . Poniamo $\vec{A} = \vec{A}_t + A_z \vec{i}_z$ e $\nabla = \nabla_t + \frac{\partial}{\partial z} \vec{i}_z$, separando la parte trasversa e quella longitudinale.

La condizione $H_z = 0$ fornisce:

$$\vec{i}_z \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \vec{i}_z \cdot (\nabla_t \times \vec{A}_t) = 0 \quad (5.1)$$

e poichè $\nabla_t \times \vec{A}_t$ ha solo la componente z , allora $\nabla_t \times \vec{A}_t = 0$ e quindi $\vec{A}_t = \nabla_t \chi$. D'altra parte anche $\vec{A}' = \vec{A} - \nabla \Psi'$ è un possibile potenziale e perciò $\vec{A}' = A_z \vec{i}_z + \nabla_t \chi - \nabla_t \Psi' - \vec{i}_z \frac{\partial \Psi'}{\partial z}$. Posto $\Psi' = \chi$, si ha $\vec{A}'_t = 0$ e quindi esiste un potenziale \vec{A} longitudinale:

$$\vec{A} = \vec{i}_z \mu \Psi \quad (5.2)$$

che consente di ottenere qualunque campo TM (con $H_z = 0$). Per esso:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{H}_t = \nabla \times (\Psi \vec{i}_z) = \nabla \Psi \times \vec{i}_z = \nabla_t \Psi \times \vec{i}_z \\ j\omega \epsilon \vec{E} = \nabla \times \vec{H}_t = \nabla \times \nabla \times (\Psi \vec{i}_z) = \nabla \nabla \cdot (\Psi \vec{i}_z) - \nabla^2 \Psi \vec{i}_z = \\ \frac{\partial}{\partial z} \nabla \Psi - \nabla^2 \Psi \vec{i}_z = \frac{\partial}{\partial z} \nabla_t \Psi - \nabla_t^2 \Psi \vec{i}_z \end{array} \right. \quad (5.3)$$

che consente di separare la parte longitudinale e trasversale di \vec{E} .

Per ottenere l'equazione che soddisfa Ψ partiamo dalle equazioni di Maxwell:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon \nabla \times \vec{E} = j\omega\epsilon(-j\omega\mu\vec{H}) = \beta^2\vec{H}$$

e sostituiamo la prima delle (5.3):

$$\nabla \times \nabla \times \nabla \times (\Psi \vec{i}_z) - \beta^2 \nabla \times (\Psi \vec{i}_z) = \nabla \times [\nabla \times \nabla \times (\Psi \vec{i}_z) - \beta^2 \Psi \vec{i}_z] = 0$$

La quantità in parentesi vale:

$$\nabla \nabla \cdot (\Psi \vec{i}_z) - \nabla^2 \Psi \vec{i}_z - \beta^2 \Psi \vec{i}_z = \frac{\partial}{\partial z} \nabla \Psi - \nabla^2 \Psi \vec{i}_z - \beta^2 \Psi \vec{i}_z \quad (5.4)$$

Il rotore del primo termine è nullo e resta:

$$\nabla \times \vec{i}_z [\nabla^2 \Psi + \beta^2 \Psi] = 0 \quad (5.5)$$

Quindi $\vec{i}_z [\nabla^2 \Psi + \beta^2 \Psi] = \nabla \chi'$, dove χ' deve dipendere solo da z . Pertanto $\nabla^2 \Psi + \beta^2 \Psi = f(z)$. La soluzione di tale equazione è la somma di un integrale particolare (e ne esiste una funzione solo di z) e dell'integrale generale della omogenea. L'integrale particolare non contribuisce al campo e resta:

$$\nabla^2 \Psi + \beta^2 \Psi = 0 \quad (5.6)$$

Per dualità ogni campo TE può essere sempre espresso tramite un altro potenziale ϕ tale che $\nabla^2 \phi + \beta^2 \phi = 0$, come:

$$\begin{cases} \vec{E}_t = -\nabla \phi \times \vec{i}_z = -\nabla_t \phi \times \vec{i}_z \\ -j\omega\mu\vec{H} = -\frac{\partial}{\partial z} \nabla_t \phi + \nabla_t^2 \phi \vec{i}_z \end{cases} \quad (5.7)$$

5.2 Decomposizione in campi TE e TM

Ogni campo elettromagnetico in assenza di sorgenti può sempre essere espresso come somma di un campo TE e uno TM. Consideriamo un campo con $E_z \neq 0$, $H_z \neq 0$ e determiniamo una funzione $\tilde{\Psi}$ soluzione della equazione di Poisson:

$$\nabla^2 \tilde{\Psi} = -j\omega\epsilon E_z \quad (5.8)$$

A partire da $\tilde{\Psi}$ possiamo determinare (usandolo come fosse un potenziale di Hertz-Debye) un campo TM, che indichiamo con \vec{E}^{TM} , \vec{H}^{TM} e la cui

componente z coincide con quella del campo assegnato. Ne segue che il campo $\vec{E} - \vec{E}^{TM}$, $\vec{H} - \vec{H}^{TM}$ è un campo TE e pertanto la decomposizione cercata è:

$$\begin{cases} \vec{E} = (\vec{E} - \vec{E}^{TM}) + \vec{E}^{TM} \\ \vec{H} = (\vec{H} - \vec{H}^{TM}) + \vec{H}^{TM} \end{cases} \quad (5.9)$$

Per la componente TM si ha $\nabla^2 \tilde{\Psi} + \beta^2 \tilde{\Psi} = 0$ e quindi:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial z^2} + \beta^2 \tilde{\Psi} = j\omega\epsilon E_z \quad (5.10)$$

Se assumiamo $\tilde{\Psi} = \Psi_t e^{-jk_z z}$ allora $(\beta^2 - k_z^2) \tilde{\Psi} = j\omega\epsilon E_z$ e quindi E_z è utilizzabile direttamente come potenziale, così come H_z nel caso TE.

In ogni caso ogni campo può essere derivato dai potenziali Ψ e ϕ come:

$$\begin{cases} \vec{E}_t = \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial}{\partial z} \nabla_t \Psi - \nabla_t \phi \times \vec{i}_z \\ \vec{H}_t = \nabla_t \Psi \times \vec{i}_z + \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial}{\partial z} \nabla_t \phi \end{cases} \quad \begin{cases} E_z = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla_t^2 \Psi \\ H_z = -\frac{1}{j\omega\mu} \nabla_t^2 \phi \end{cases} \quad (5.11)$$

5.3 Modi TE

La possibilità, nei campi TEM, di separare la variazione longitudinale da quella trasversa semplifica lo studio di tali campi. Nello studio dei campi TE (o TM) conviene vedere se esistono soluzioni esprimibili in forma fattorizzata:

$$\begin{cases} \vec{E}_t = V(z) \vec{e}(\vec{t}) \\ \vec{H}_t = I(z) \vec{h}(\vec{t}) \end{cases} \quad (5.12)$$

dove ora V e I non hanno più significato fisico diretto e quindi anche la scelta di una impedenza sarà solo una questione di convenienza (si noti comunque che anche nel caso TEM la scelta della impedenza caratteristica è arbitraria, pur esistendo una definizione “naturale” che qui manca).

In termini di potenziale di Debye, si ha:

$$\begin{cases} \vec{E}_t = V(z) \vec{e} = -\nabla_t \phi \times \vec{i}_z \\ \vec{H}_t = I(z) \vec{h} = \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial}{\partial z} \nabla_t \phi \\ H_z = -\frac{1}{j\omega\mu} \nabla_t^2 \phi \end{cases} \quad (5.13)$$

La fattorizzazione dei campi implica una uguale fattorizzazione del potenziale $\phi = \frac{1}{k_t} \phi_0(\vec{t}) V(z)$, con k_t costante arbitraria con dimensione m^{-1} , dal che

segue:

$$\begin{cases} \vec{e} = -\frac{1}{k_t} \nabla_t \phi_0 \times \vec{i}_z \\ I(z) \vec{h} = \frac{1}{j\omega\mu} \nabla_t \phi_0 \frac{dV}{dz} \Rightarrow \vec{h} = -\frac{1}{k_t} \nabla_t \phi_0 \Rightarrow \vec{e} = \vec{h} \times \vec{i}_z \\ -\frac{dV}{dz} = j\omega\mu I \end{cases} \quad (5.14)$$

Dalla equazione per ϕ si ha poi:

$$V \nabla_t^2 \phi_0 + \phi_0 V'' + \beta^2 V \phi_0 = 0 \quad (5.15)$$

e separando le variabili si ha $V''(z)$ proporzionale a $V(z)$.

Poniamo allora:

$$V(z) = -\frac{1}{k_z^2} V''(z) = j\omega\mu \frac{1}{k_z^2} \frac{dI}{dz} \quad (5.16)$$

con k_z^2 costante, ottenendo le equazioni delle linee:

$$\begin{cases} -\frac{dV}{dz} = j\omega\mu I \\ -\frac{dI}{dz} = j\frac{k_z^2}{\omega\mu} V \end{cases} \Rightarrow L_{eq} = \mu, \quad C_{eq} = \frac{k_z^2}{\omega^2\mu} \quad (5.17)$$

k_z è quindi la costante di propagazione, mentre l'impedenza vale:

$$Z = \sqrt{\frac{L_{eq}}{C_{eq}}} = \frac{\omega\mu}{k_z} \quad (5.18)$$

Vogliamo notare esplicitamente che tale valore di Z è però frutto di una scelta, quella di porre $\vec{e} = \vec{h} \times \vec{i}_z$. Ponendo più in generale $\vec{e} = A\vec{h} \times \vec{i}_z$ e scegliendo opportunamente A , si può ottenere qualunque valore di Z . Ne segue che Z (e anche V e I) sono grandezze utili nei calcoli ma prive, per campi non TEM, di realtà fisica.

Sostituendo poi $V'' = k_z^2 V$ nella equazione per ϕ , si ha:

$$\nabla_t^2 \phi_0 + (\beta^2 - k_z^2) \phi_0 = 0 \quad (5.19)$$

Poniamo la costante k_t , precedentemente introdotta, pari a $\sqrt{\beta^2 - k_z^2}$, ottenendo l'equazione:

$$\nabla_t^2 \phi_0 + k_t^2 \phi_0 = 0 \quad (5.20)$$

Per quanto riguarda le condizioni al contorno (figura 5.1), si deve avere $\vec{e} \cdot \vec{i}_c \Big|_c = 0$ ovvero $-\vec{h} \times \vec{i}_z \cdot \vec{i}_c \Big|_c = -\vec{h} \cdot \vec{i}_n \Big|_c = -\frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_c = 0$. Quindi si deve

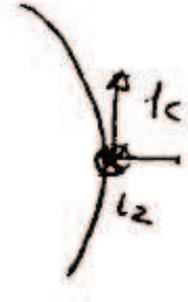


Figura 5.1: Posizionamento dei versori rispetto al contorno del conduttore

avere:

$$\begin{cases} \nabla_t^2 \phi + k_t^2 \phi = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_c = 0 \end{cases} \quad (5.21)$$

e ϕ non identicamente nullo.

Questo problema è detto agli autovalori e le sue soluzioni sono delle coppie (k_{tn}^2, ϕ_n) di “autovalori” ed “autovettori” tali che se $k_t^2 = k_{tn}^2$ l’equazione ha soluzioni non banali proporzionali a ϕ_n mentre se $k_t^2 \neq k_{tm}^2, \forall m$, l’unica soluzione è $\phi = 0$.

In particolare ad un autovalore corrisponde uno spazio vettoriale di soluzioni, la cui dimensione (eventualmente maggiore di 1) è detto molteplicità dell’autovalore.

Si dimostra che gli autovalori di k_t^2 sono reali non negativi, e che le autofunzioni e gli autovalori sono un insieme numerabile ortogonale (o almeno ortogonalizzabile) e completo. Ogni autofunzione ϕ dà luogo ad un modo, ovvero ad un campo che può esistere da solo nella guida. Le funzioni V, I ed i vettori \vec{e}, \vec{h} corrispondenti vengono rispettivamente detti funzioni scalari e vettoriali di modo.

Si noti infine che H_z dipende da $V(z)$:

$$H_z = -\frac{1}{j\omega\mu} \frac{V(z)}{k_t} \nabla_t^2 \phi_0 = \frac{k_t V(z)}{j\omega\mu} \phi_0 \quad (5.22)$$

5.4 Modi TM

Anche per i campi TM è possibile cercare una soluzione fattorizzata. Partiamo da $\Psi = \frac{1}{k_t} I(z) \Psi_0(\vec{t})$, ottenendo:

$$\begin{cases} \vec{H}_t = I(z) \vec{h} = \frac{1}{k_t} I(z) \nabla_t \Psi_0 \times \vec{i}_z \Rightarrow \vec{h} = \frac{1}{k_t} \nabla_t \Psi_0 \times \vec{i}_z \\ \vec{E}_t = V(z) \vec{e} = \frac{1}{j\omega\mu} \frac{dI}{dz} \frac{1}{k_t} \nabla_t \Psi_0 \Rightarrow \vec{e} = -\frac{1}{k_t} \nabla_t \Psi_0 \Rightarrow \vec{h} = -\vec{e} \times \vec{i}_z \end{cases} \quad (5.23)$$

Per quanto riguarda le funzioni scalari di modo, si ha:

$$\begin{cases} -\frac{dI}{dz} = j\omega\epsilon V \\ I'' \Psi_0 + I \nabla_t^2 \Psi_0 + \beta^2 I \Psi_0 = 0 \Rightarrow I'' = k_z^2 I \end{cases} \quad (5.24)$$

e quindi le equazioni delle linee:

$$\begin{cases} -\frac{dI}{dz} = j\omega\epsilon V \\ -\frac{dV}{dz} = \frac{1}{j\omega\epsilon} (-k_z^2 I) = j \frac{k_z^2}{\omega\epsilon} I \end{cases} \quad (5.25)$$

con $L_{eq} = \frac{k_z^2}{\omega^2\epsilon}$, $C_{eq} = \epsilon$, $Z = \frac{k_z}{\omega\epsilon}$.

Infine:

$$\nabla_t^2 \Psi_0 + (\beta^2 - k_z^2) \Psi_0 = \nabla_t^2 \Psi_0 + k_t^2 \Psi_0 = 0 \quad (5.26)$$

Le condizioni al contorno sono ora due, in quanto $\vec{i}_n \times \vec{E}$ ha due componenti, una trasversa e una lungo z . Da $\vec{e} \cdot \vec{i}_c \Big|_c = 0$ segue $\frac{\partial \Psi_0}{\partial c} \Big|_c = 0$, ovvero Ψ_0 costante sul contorno.

D'altra parte $E_z = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{I(z)}{k_t} \nabla_t^2 \Psi_0 = -\frac{k_t I}{j\omega\epsilon} \Psi_0$ e quindi da $E_z \Big|_c = 0$ segue $\Psi_0 \Big|_c = 0$, che è la condizione da imporre (si noti che $k_t \neq 0$, altrimenti il modo è TEM).

La discussione è analoga al caso TE. Si vuole solo notare che il modo col $k_t \neq 0$ più piccolo è sempre un modo TE.

5.5 Guida rettangolare

Consideriamo un guida rettangolare (figura 5.2); per risolvere l'equazione di Helmholtz:

$$\nabla_t^2 u + k_t^2 u = 0 \quad (5.27)$$

utilizziamo ancora la separazione di variabili $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Si ha $X''Y + Y''X + k_t^2 XY = 0$, ovvero $\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + k_t^2 = 0$.

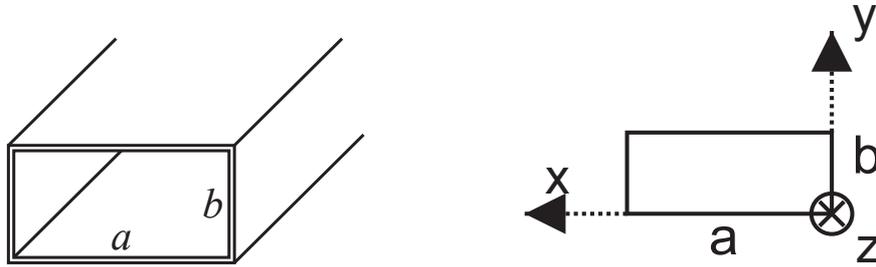


Figura 5.2: Guida rettangolare

Separando la dipendenza da x e y , si ha, se $k_t^2 = k_x^2 + k_y^2$:

$$\begin{cases} X'' + k_x^2 X = 0 \Rightarrow X = A_x \cos k_x x + B_x \sin k_x x \\ Y'' + k_y^2 Y = 0 \Rightarrow Y = A_y \cos k_y y + B_y \sin k_y y \end{cases} \quad (5.28)$$

A questo punto occorre imporre le condizioni al contorno, che sono diverse nei due casi.

Caso TE $u = \Psi$, $\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0$, ovvero:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{dX}{dx} = 0 & x = 0, a \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{dY}{dy} = 0 & y = 0, b \end{cases} \quad (5.29)$$

Le condizioni a zero richiedono $B_x = B_y = 0$. Resta allora $X = A_x \cos k_x x$, $\frac{dX}{dx} = -k_x A_x \sin k_x x$ e quindi l'altra condizione fissa:

$$k_x a = n\pi \quad n \geq 0 \quad (5.30)$$

e analogamente per l'altra in y . In definitiva:

$$\Psi_{nm} = F_{nm} \cos \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} \quad (5.31)$$

con n ed m non entrambi nulli:

$$k_t^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \quad (5.32)$$

Caso TM $u = \phi$, con $\phi = 0$, ovvero:

$$\begin{cases} \phi = X = 0 & x = 0, a \\ \phi = Y = 0 & y = 0, b \end{cases} \quad (5.33)$$

Le condizioni a zero richiedono $A_x = A_y = 0$, e le altre:

$$\begin{cases} k_x a = n\pi & n \geq 0 \\ k_y b = m\pi & m \geq 0 \end{cases} \quad (5.34)$$

In definitiva:

$$\phi_{nm} = F_{nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi x}{b} \quad (5.35)$$

con n ed m entrambi maggiori di zero:

$$k_t^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \quad (5.36)$$

5.6 Caratteristiche della propagazione

Abbiamo visto che, per una guida rettangolare, esistono una duplice infinità di modi TE e TM (tale proprietà è vera in generale). Vogliamo studiare le caratteristiche propagative di uno di tali modi.

Dalle equazioni delle linee segue: $k_z Z_0 = \omega \mu_0 \Rightarrow \frac{k_z}{Z_0} = \omega \epsilon_0 \left(1 - \frac{k_t^2}{k^2}\right) \Rightarrow Z_0 = \frac{\omega \mu_0}{k_z}$ per il caso TE, e $k_z Z_0 = \omega \mu_0 \left(1 - \frac{k_t^2}{k^2}\right) \Rightarrow \frac{k_z}{Z_0} = \omega \epsilon_0 \Rightarrow Z_0 = \frac{k_z}{\omega \epsilon_0}$ per il caso TM. Il problema è quindi il calcolo di k_z .

Si trova, in entrambi i casi:

$$k_z^2 = k^2 - k_t^2 \quad (5.37)$$

e possiamo quindi distinguere due casi (assumiamo, e lo dimostreremo, che k_t^2 è reale):

1. $k^2 > k_t^2$. In tal caso k_z è reale e crescente con la frequenza; in particolare $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{k_z}{\omega} = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$. Si ha quindi una normale propagazione del modo.
2. $k^2 < k_t^2$. In tal caso $k_z^2 < 0$ e $k_z = -j\alpha$ è immaginario puro. Il modo si trova quindi in condizioni di cut-off (analogamente ad un plasma con $\epsilon_r < 0$).

L'impedenza caratteristica è reale nel primo caso, mentre è immaginaria pura nel secondo (in particolare, essendo $\alpha > 0$, capacitiva per i modi TM e induttiva per quelli TE).

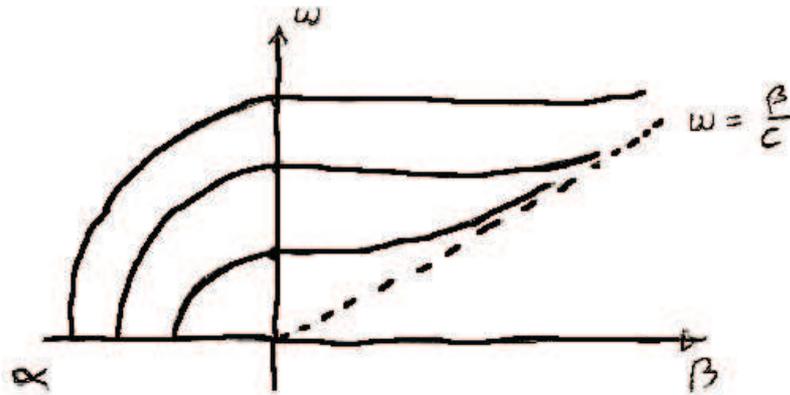


Figura 5.3: Diagramma di Brillouin

5.7 Diagramma di Brillouin

Per rappresentare le caratteristiche di propagazione di una guida, si usa il diagramma di Brillouin (figura 5.3). Infatti, per $k < k_t$, ovvero al di sotto di una frequenza, detta frequenza di taglio del modo f_c , si ha: $-\alpha^2 = k^2 - k_t^2$, ovvero un arco di cerchio. La massima attenuazione è $\alpha = k_t$. Al di sopra della frequenza di taglio invece, si ha $\beta^2 = k^2 - k_t^2$, ovvero una iperbole con asintoto $\omega = \frac{\beta}{c}$. La guida si comporta pertanto come un filtro passa-alto (invece i modi TEM non hanno frequenza di taglio).

Ovviamente, se si vuole utilizzare la guida per trasmettere (potenza o informazioni) è necessario utilizzarla al di sopra della frequenza di taglio. Se in particolare si vogliono trasmettere informazioni, è necessario utilizzare un solo modo, altrimenti il segnale si divide in parti con diversa velocità di fase e perde immediatamente la sua forma. Inoltre è necessario evitare le zone di forte dispersione, dove v_g varia molto con ω . Poiché v_g è la tangente trigonometrica dell'angolo che la tangente geometrica alla curva forma con l'asse β , occorre evitare la zona vicino alla f_c del modo. In pratica, se f_1 e f_2 sono le frequenze di taglio del modo fondamentale e del primo modo superiore, la zona utile è $1.2f_1 \div 0.8f_2$.

E' anche possibile usare la guida a $f \gg f_1$. In tal caso tutti i modi di ordine basso hanno $v_g \simeq c$ (quindi senza dispersione) e, per sorgenti opportune, gli altri sono praticamente non eccitati. Si parla allora di guide multimodo e si usano a frequenze elevate, dove le dimensioni per guide monomodo sono troppe piccole.

Il modo scelto è evidentemente quello con la f_c più bassa (modo fondamentale). Per una guida rettangolare, con $a > b$, tale modo è il TE_{10} . E' comunque possibile con artifici particolari (filtri modali) far funzionare la guida su un solo modo superiore.

5.8 Potenza nelle guide

Consideriamo un campo generico:

$$\vec{E}_t = \sum V_n(z) \vec{e}_n(\vec{t}) \quad \vec{H}_t = \sum I_m(z) \vec{h}_m(\vec{t}) \quad (5.38)$$

dove la somma è su modi TE e TM.

Il flusso di potenza attraverso la guida vale:

$$P = \int \vec{S} \cdot \vec{i}_z dS = \sum_{n,m} \frac{1}{2} V_n I_m^* \int \vec{e}_n \times \vec{h}_m \cdot \vec{i}_z dS \quad (5.39)$$

Dimostriamo che l'integrale vale δ_{nm} . Cominciamo a considerare \vec{e}_n, \vec{h}_m appartenenti a modi dello stesso tipo (ad esempio TE). Allora:

$$\int \vec{e}_n \times \vec{h}_m \cdot \vec{i}_z dS = \int \vec{i}_z \times \vec{e}_n \cdot \vec{h}_m dS = \int \vec{h}_n \cdot \vec{h}_m dS = \int \frac{\nabla_t \Psi_n \cdot \nabla_t \Psi_m}{k_{tn} k_{tm}} dS \quad (5.40)$$

Dall'identità di Green, tale integrale vale:

$$\frac{1}{k_{tn} k_{tm}} \left[\int \Psi_n \frac{\partial \Psi_m}{\partial n} dl - \int \Psi_n \nabla_t^2 \Psi_m dS \right] = -\frac{1}{k_{tn} k_{tm}} \int \Psi_n \nabla_t^2 \Psi_m dS \quad (5.41)$$

in quanto la superficie laterale è un CEP. Usando l'equazione di Helmholtz, la ortonormalizzazione delle Ψ segue la tesi.

Se \vec{e}_n è di un modo TM e \vec{h}_m di un modo TE allora (il viceversa si riconduce a questo):

$$\begin{aligned} \int \vec{e}_n \times \vec{h}_m \cdot \vec{i}_z dS &= \frac{1}{k_{tn} k_{tm}} \int \nabla_t \phi_n \times \nabla_t \Psi_m \cdot \vec{i}_z dS = \\ &= \frac{1}{k_{tn} k_{tm}} \left[\int \nabla_t \times (\phi_n \nabla_t \Psi_m) \cdot d\vec{S} + \right. \\ &\quad \left. - \int \phi_n \nabla_t \times \nabla_t \Psi_m \cdot \vec{i}_z dS \right] \end{aligned} \quad (5.42)$$

Il secondo integrale è nullo. Nel primo si può usare il teorema di Stokes e si riduce a $\int_{\delta S} \phi_n \nabla_t \Psi_m \cdot \vec{i}_c dl = 0$, essendo ϕ_n nullo sulla frontiera. Ne consegue che in una guida a pareti CEP risulta:

$$P = \sum_n \frac{1}{2} V_n I_n^* \quad (5.43)$$

ovvero i modi sono disaccoppiati in potenza. Come conseguenza le linee di trasmissione relative a ciascun modo si accoppiano solo in presenza di ostacoli (trasversalmente inhomogenei).

Si noti però che in presenza di modi degeneri, per ottenere modi disaccoppiati è necessario scegliere una base ortonormale nel relativo ortospazio.

Per una guida illimitata si ha $I_n = \frac{V_n}{Z_n}$, $V_n = V_n^+ e^{-jk_z z}$, e la potenza vale:

$$P = \sum_n \frac{1}{2Z_n} |V_n|^2 = \sum_{\text{modi prop}} \frac{1}{2Z_n} |V_n^+|^2 + \sum_{\text{modi cut-off}} \frac{1}{2jZ_n} |V_n^+|^2 e^{-2\alpha_z z} \quad (5.44)$$

Si vede quindi che la potenza reale dipende dai modi sopra cut-off ed è costante, mentre la potenza reattiva dipende solo dai modi in cut-off e decade con z .

5.9 Proprietà espansione modale

1. Gli autovalori k_t^2 sono positivi (escluso i modi TEM). Infatti da $\nabla^2 \Psi = -k_t^2 \Psi$ segue $k_t^2 |\Psi|^2 = \Psi^* \nabla^2 \Psi = \nabla \cdot (\Psi^* \nabla \Psi) - |\nabla \Psi|^2$. Integrando si ha:

$$k_t^2 = \frac{\int_S |\nabla \Psi|^2 dS - \int_c \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial n} dl}{\int_S |\Psi|^2 dS} \quad (5.45)$$

Ma su C risulta $\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0$ (modi TE), oppure $\Psi = 0$ (modi TM con $E_z \neq 0$), per cui $k_t^2 \geq 0$. D'altra parte $k_t^2 = 0$ non è un autovalore. Se lo fosse, per un modo TE si avrebbe $\nabla^2 \Psi = 0$ ovvero, moltiplicando per Ψ^* e integrando:

$$\int_S |\nabla \Psi|^2 - \int_c \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial n} dl = 0 \quad (5.46)$$

Il secondo integrale è nullo e resta $\nabla \Psi = 0$, ovvero campo nullo. Per un modo TM, invece, $k_t^2 = 0$ implica $\nabla^2 \Psi = \nabla \cdot \vec{e} = 0$. Ma E_z è proporzionale a $\nabla \cdot (\vec{h} \times \vec{i}_c) = \nabla \cdot \vec{e}$ e quindi il modo sarebbe TEM. Poichè k_t^2

è reale, possiamo scegliere autofunzioni reali (parte reale e coefficiente dell'immaginario di ortofunzioni complesse sono separatamente autofunzioni). Nel seguito quindi considereremo solo autofunzioni e modi reali.

2. Si hanno poi i seguenti risultati per l'equazione agli autovalori (escludendo sempre il caso TEM):

- Ad ogni autovalore corrisponde un autospazio di dimensione finita, in cui possiamo scegliere una base ortonormale.
- Autofunzioni corrispondenti ad autovalori diversi sono ortogonali.
- Esiste sempre una successione ortogonale di autofunzioni.
- Se definiamo il prodotto scalare tra due campi:

$$\int_S \vec{e} \times \vec{h}^* \cdot d\vec{S} \quad (5.47)$$

allora modi corrispondenti ad autofunzioni ortonormali sono ortonormali.

- Modi TE e TM sono mutuamente ortogonali.
 - Le autofunzioni corrispondenti ai modi TE o TM costituiscono separatamente un sistema completo (sulla sezione).
 - L'insieme dei modi TE e TM costituisce un sistema completo sulla sezione, fatto salvo l'eventuale modo TEM. Tale completezza vale anche per campi che non rispettano le condizioni al contorno.
 - L'espressione di un campo che rispetta le condizioni al contorno converge uniformemente in S , altrimenti solo nell'interno di S .
3. Dato un campo nella guida, questo è univocamente determinato dalle condizioni su due sezioni trasverse. Tali condizioni sono espandibili in modi:

$$E_t^{(i)} = \sum A_n^{(2)} \vec{e}_n \quad i = 1, 2 \quad (5.48)$$

Poichè ogni modo trasverso dà luogo ad un campo in guida, il campo può essere espresso in modi su tutta la guida e, poichè tale espressione è unica, l'insieme dei modi è completo.

5.10 Perdite nelle guide

Finora abbiamo supposto che la guida fosse costituita da un CEP e fosse vuota all'interno. In realtà le pareti sono costituite da conduttore non perfetto e

all'interno può essere contenuto un dielettrico con perdite. Entrambe le cause provocano una dissipazione di potenza e quindi una attenuazione dei modi.

La presenza di un dielettrico di costante $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$ che riempie totalmente la guida può essere trattata senza alcuna variazione. Solo la definizione di k_z diventa:

$$k_z = \sqrt{\omega^2(\epsilon' - j\epsilon'')\mu_0 - k_t^2} = \sqrt{(\omega^2\epsilon'\mu_0 - k_t^2) - j\omega^2\epsilon''\mu_0} \quad (5.49)$$

Indichiamo con ω_{c0} la frequenza di taglio per perdite nulle: $\omega_{c0} = \frac{k_t}{\sqrt{\epsilon'\mu_0}}$ e supponiamo $\epsilon'' \ll \epsilon'$.

Se ω è maggiore di ω_{c0} , in modo che $\epsilon'' \ll \epsilon' - \frac{k_t^2}{\omega^2\mu_0}$, allora si può sviluppare in serie ottenendo:

$$k_z = \beta_0 - j\frac{\omega^2\epsilon''\mu_0}{2(\omega^2\epsilon'\mu_0 - k_t^2)} \quad (5.50)$$

in cui β_0 è il valore di k_z per $\epsilon'' = 0$ e $\alpha = -j\frac{\epsilon''}{2\epsilon'}\frac{1}{\mu_0(\omega^2 - \omega_c^2)}$.

Se ω è minore di ω_{c0} , in modo che $\epsilon'' \ll \left|\epsilon' - \frac{k_t^2}{\omega^2\mu_0}\right|$, si può ancora sviluppare in serie ottenendo:

$$k_z = -j\alpha_0 + \frac{\omega^2\epsilon''\mu_0}{2(k_t^2 - \omega^2\epsilon'\mu_0)} \quad (5.51)$$

dove α_0 è il valore di attenuazione (per cut-off) in assenza di perdite. Si vede quindi che la presenza di $\epsilon'' \neq 0$ fa sì che vi sia sempre $\beta, \alpha \neq 0$, ma lontano dal cut-off l'effetto di α (β) è molto piccolo.

Invece, al cut-off, si ha:

$$k_z = \sqrt{-j\omega^2\epsilon''\mu_0} = \frac{1-j}{2}\sqrt{\omega^2\epsilon''\mu_0} \quad (5.52)$$

ovvero α e β sono uguali.

Il diagramma di Brillouin diventa (anche se la scala non è corretta) come in figura 5.4. Inoltre, salvo che molto vicino al cut-off, si può sempre assumere che l'impedenza caratteristica sia quella imperturbata.

La presenza di una conducibilità finita delle pareti provoca invece problemi maggiori, in quanto la condizione $\vec{E}_{tan} = 0$ non vale più. Essa può essere sostituita, se $\frac{\sigma}{\omega\epsilon_p} \gg 1$ (essendo σ la conducibilità ed ϵ_p la costante dielettrica delle pareti) con la condizione di Leontovich:

$$\vec{E}_{tan} = Z_s \vec{H}_{tan} \times \vec{i}_n \quad (5.53)$$

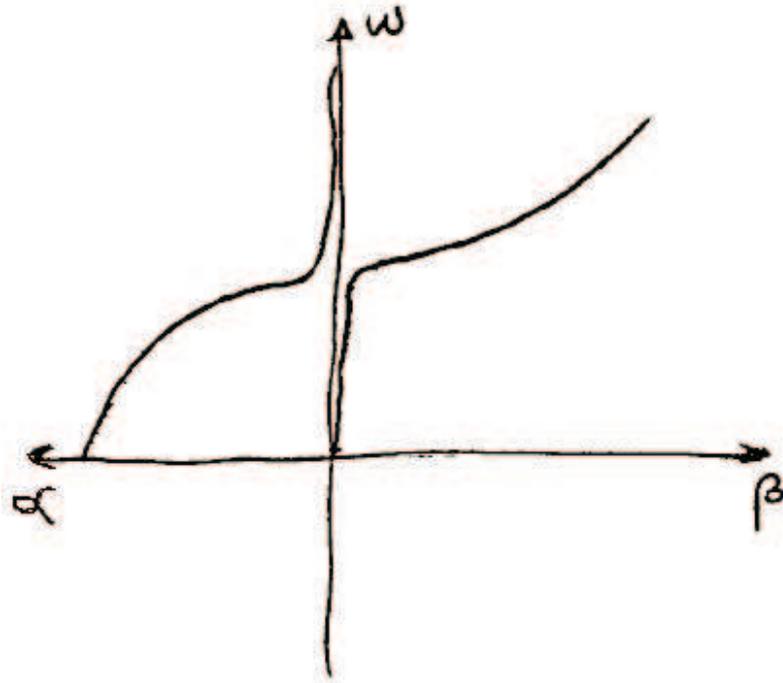


Figura 5.4: Diagramma di Brillouin

dove $Z_s = \frac{1+j}{\sigma\delta}$, essendo δ la profondità di penetrazione nel conduttore.

Da tale conclusione si vede immediatamente che non esistono nè modi TE, nè modi TM. Infatti la presenza, nei modi TE, di \vec{h} con componente tangenziale dà luogo ad una E_z tramite la condizione di Leontovich. Analogamente nei modi TM è la presenza di una \vec{e} tangenziale a dar luogo ad una H_z . Ne segue che la propagazione può, a rigori, essere descritta solo dallo sviluppo modale completo. Se però la conducibilità è molto elevata, allora Z_s è dell'ordine dei $m\Omega$ ed è possibile utilizzare un approccio perturbativo.

Possiamo cioè assumere che, fissate le sorgenti, il campo nella guida ideale (ovvero con $\sigma = \infty$) e in quella perturbata (ovvero con $\sigma \neq \infty$) sia praticamente lo stesso, ad eccezione di due punti:

- i. Un campo che nella guida ideale è nullo, non può essere considerato ancora nullo nella guida perturbata, ma occorre calcolarlo;
- ii. La presenza di perdite nella guida perturbata produrrà una attenuazione del campo, attenuazione che va necessariamente calcolata.

Consideriamo allora un insieme di sorgenti che, nella guida ideale, produ-

cano un singolo modo progressivo. Le stesse sorgenti, nella guida perturbata, produrranno un campo simile a questo (che però ora non è più un modo della guida perturbata), ad eccezione dei due punti precedenti.

In particolare il campo \vec{E}_{tan} sulle pareti della guida sarà ora diverso da zero, e potrà essere calcolato dalla condizione di Leontovich a partire dal campo magnetico tangente imperturbato (che, essendo diverso da zero, coincide con quello perturbato). Nascerà inoltre una attenuazione α che va aggiunta alla k_z del modo.

Per calcolare tale attenuazione applichiamo il teorema di Poynting alla zona di guida compresa tra le sezioni z e $z + \Delta z$ (figura 5.5). Posto $P(z) =$

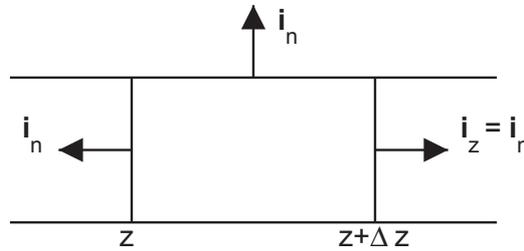


Figura 5.5: Teorema di Poynting applicato alla guida

$\frac{1}{2Z_0}|V(z)|^2$, si ha:

$$-P(z + \Delta z) + P(z) = \Re \int_{S_{lat}} \vec{S} \cdot \vec{i}_n dS \quad (5.54)$$

D'altra parte $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{E}_{tan} \times \vec{H}_{tan}^*$, dove \vec{H}_{tan} è quello imperturbato e \vec{E}_{tan} segue dalla condizione di Leontovich:

$$\vec{S} \cdot \vec{i}_n = \frac{1}{2}Z_s(\vec{H}_{tan} \times \vec{i}_n) \times \vec{H}_{tan}^* \cdot \vec{i}_n = \frac{Z_s}{2}|\vec{H}_{tan}|^2 \quad (5.55)$$

per cui (se Δz tende a zero):

$$-\frac{dP}{dz} = \frac{R_s}{2} \int_C |\vec{H}_{tan}|^2 dl \quad (5.56)$$

essendo C il contorno e $R_s = \Re(Z_s) = \frac{1}{\sigma\delta}$.

D'altra parte se $k_z = \beta - j\alpha$, allora $P(z) = P(0)e^{-2\alpha z}$, per cui $-\frac{dP}{dz} = 2\alpha P(z) = 2\alpha \frac{1}{2}Z_0 |I(z)|^2$. Segue allora:

$$\alpha = \frac{1}{2\sigma\delta} \frac{\int_C |\vec{H}_{tan}|^2 dl}{Z_0 |I(z)|^2} \quad (5.57)$$

Consideriamo separatamente i modi TE e TM, e in particolare la dipendenza di α dalla frequenza.

Per i modi TM (TEM inclusi): $\vec{H}_{tan} = I(z)\vec{h}$ e quindi¹:

$$\alpha = \frac{1}{2\sigma\delta Z_0} \int_C |\vec{h}|^2 dl = \frac{1}{2\sigma\delta Z_0 k_t^2} \int_C |\nabla_t \phi|^2 dl \quad (5.58)$$

L'integrale non dipende dalla frequenza per cui, a parte una costante, la dipendenza è del tipo $\sqrt{\omega} \left(\frac{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_t^2}}{\omega} \right)^{-1}$, ovvero, normalizzando ad ω_c , del tipo $\alpha \propto \sqrt{\frac{(\frac{\omega}{\omega_c})^3}{(\frac{\omega}{\omega_c})^2 - 1}}$. Si ha quindi un minimo per $\omega = \sqrt{3}\omega_c$ (figura 5.6).

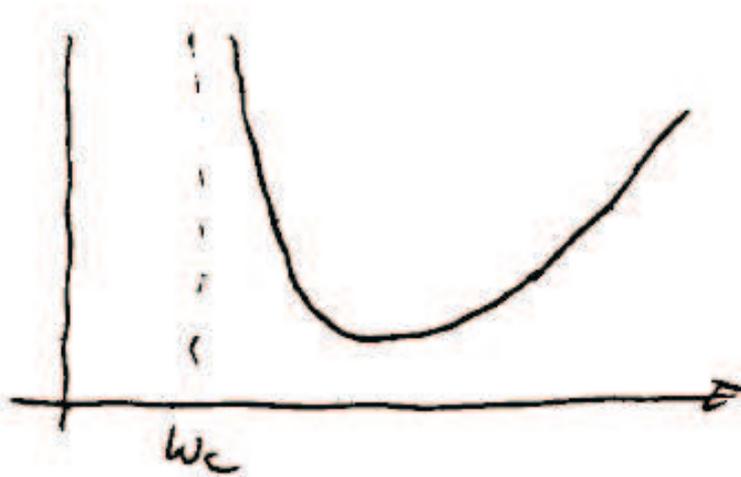


Figura 5.6: Dipendenza di α dalla frequenza (modi TM)

Per i modi TE: $|\vec{H}_{tan}|^2 = |I(z)\vec{h}|^2 + |H_z|^2 = |I(z)\vec{h}|^2 + \left| \frac{V(z)}{j\omega\mu} \nabla_t \cdot \vec{h} \right|^2 = \left| \frac{I(z)}{k_t} \nabla_t \Psi \right|^2 + \left| Z_0 \frac{I(z) - k_t^2 \Psi}{j\omega\mu - k_t} \right|^2$, poichè $\nabla_t \cdot \vec{h} = \frac{\nabla_t^2 \Psi}{-k_t}$. Sostituendo², si ha:

$$\alpha = \frac{1}{2\sigma\delta} \left\{ \frac{1}{k_t^2 Z_0} \int_C |\nabla_t \Psi|^2 dl + \frac{Z_0 k_t^2}{\omega^2 \mu_0^2} \int_C |\Psi|^2 dl \right\} =$$

¹Poichè $\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0$ sulla frontiera, il primo integrale è $\int_C \frac{1}{k_t^2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial C} \right) dl$.

² $|\vec{h}|^2 = |\vec{h} \times \vec{i}_z|^2 = |\vec{e}|^2$. Inoltre la componente di $\nabla_t \phi$ su \vec{i}_c è nulla, per cui $|\nabla_t \phi|^2 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)^2$.

$$= \frac{1}{2\sigma\delta Z_0} \left\{ \int_C \frac{\nabla_t \Psi}{k_t^2} dl + \frac{k_t^2}{k_z^2} \int_C |\Psi|^2 dl \right\} \quad (5.59)$$

La dipendenza da ω è ora del tipo:

$$\sqrt{\omega} \frac{k_z}{\omega} \left\{ A' + \frac{B'}{k_z \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_t^2}} \right\} = A \frac{\sqrt{\frac{\omega}{\omega_c} - 1}}{\sqrt{\frac{\omega}{\omega_c}}} + B \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega}{\omega_c}} \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 - 1}} \quad (5.60)$$

dove A e B sono costanti. Il primo termine cresce con ω mentre il secondo diminuisce. Si ha quindi ancora un minimo (figura 5.7) che però ora dipende da A e B . Si noti che per i modi TE per cui $\frac{\partial \Psi}{\partial c} = 0$ l'attenuazione dimi-

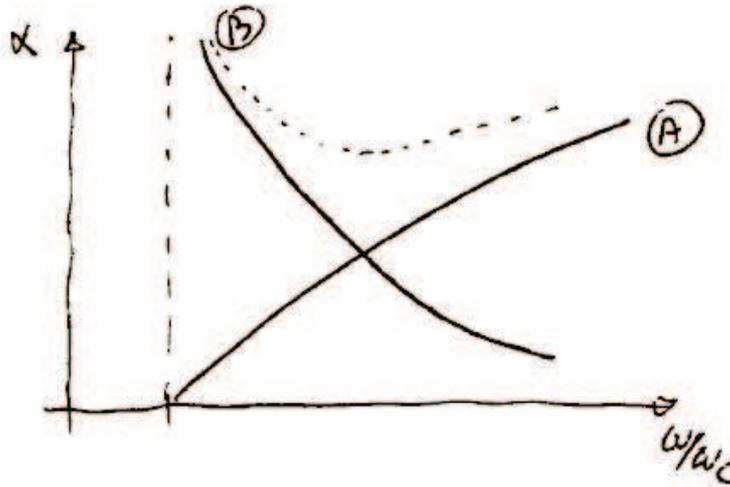


Figura 5.7: Dipendenza di α dalla frequenza (modi TE)

nuisce con ω . E' questo il caso del modo TE_{01} di una guida circolare. Tale modo viene talvolta utilizzato per trasmissione a grande distanza anche se il suo impiego, non essendo il modo fondamentale, richiede l'uso di particolari accorgimenti (filtri modali) per evitare che vi siano altri modi.

Finora abbiamo esaminato i due tipi di perdite separatamente. Quando sono presenti entrambe e sono entrambe piccole, si può assumere che la attenuazione totale sia $\alpha = \alpha_d + \alpha_p$, dove α_d è calcolato per pareti CEP e α_p assumendo il dielettrico senza perdite. Se così facendo uno dei due termini domina sull'altro, allora il secondo si può trascurare e la valutazione di α è decisamente attendibile. Se sono invece confrontabili, la precisione su α è più bassa ma comunque (per dielettrici e pareti usate nella pratica) buona.

CAPITOLO 6

Spazi di Hilbert e serie di Fourier

6.1 Spazi vettoriali

Un insieme X si chiama spazio vettoriale se in esso sono definiti una addizione e una moltiplicazione per uno scalare, ovvero se $\forall x, y \in X, \forall c \in \mathbb{C} \Rightarrow x + y \in X, cx \in X$, dove l'addizione è commutativa ed associativa e le due operazioni sono l'una distributiva rispetto all'altra. Se $c \in \mathbb{R}$, lo spazio si dice reale. Un insieme di vettori $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$, linearmente indipendenti, viene detto una base se ogni elemento di X può essere espresso come combinazione lineare finita di elementi della base. Il numero di elementi di una base è detto dimensione dello spazio.

Esempi: l'insieme dei vettori dello spazio (dimensione pari a 3), l'insieme dei polinomi, l'insieme delle funzioni continue, di quelle derivabili, e così via. Tranne il primo, gli altri sono tutti spazi a dimensione infinita e, salvo che per il caso dei polinomi (una cui base è $\{1, x, x^2, \dots\}$), non è facile (e fortunatamente non necessario) costruirne una base.

6.2 Funzioni integrabili

L'insieme delle funzioni per cui è finito¹ $\int_{\Omega} |f(x)|^p dx$, è uno spazio vettoriale ($p \geq 1$).

Per $p = 1$, da $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ discende che la somma di funzioni sommabili è sommabile. Per $p > 1$, occorre invece la disuguaglianza

¹L'integrale va inteso nel senso di Lebesgue.

di Minkowski:

$$\left[\int_{\Omega} |f + g|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int_{\Omega} |f|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_{\Omega} |g|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \quad (6.1)$$

Tale spazio vettoriale si indica con $L^p(\Omega)$. Se $\Omega = \mathbb{R}$ in genere si omette. Particolare interesse hanno gli spazi L^1 e L^2 . Se Ω ha misura finita, allora $L^1 \subset L^2$, altrimenti non vi è alcuna connessione tra L^1 e L^2 . Si noti infine che due funzioni che differiscono su insiemi di misura nulla sono considerate, come elementi di L^p , coincidenti.

6.3 Spazi normati

Una funzione $X \rightarrow [0, +\infty[$, indicata con $\|x\|$, che gode delle seguenti proprietà:

- i. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- ii. $\|cx\| = |c| \cdot \|x\|$
- iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

viene detta una norma e X viene detto spazio normato.

Esempi: L^p con la norma $\|f\| = \left[\int_{\Omega} |f|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$ (in forza della disuguaglianza di Minkowski). L'insieme $C^0(\Omega)$ delle funzioni continue sull'insieme compatto Ω con la norma $\|f\| = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$.

Si noti che ad uno stesso opposto si possono associare più norme (ad esempio $\int_{\Omega} |f| dx$ è una norma per l'insieme delle funzioni continue nel compatto Ω) ottenendo però spazi normati distinti.

6.4 Convergenza

Dati due punti di uno spazio normato possiamo definire distanza tra essi:

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad (6.2)$$

e utilizzare quindi tutte le definizioni dell'analisi (rifrasate in termini di distanza). Ad esempio si dirà che $\lim_n x_n = x$ in X se $\lim_n d(x_n, x) = 0$, ovvero se $\lim_n \|x_n - x\| = 0$.

In particolare, si dimostra ancora che la condizione di convergenza di Cauchy è condizione necessaria per la convergenza:

$$\lim_n x_n = x \Rightarrow \forall \epsilon \quad \exists N : \forall n, m > N \|x_n - x_m\| < \epsilon \quad (6.3)$$

Gli spazi in cui essa è anche sufficiente vengono detti completi o di Banach; L^0 e C^0 sono spazi di Banach.

6.5 Spazi di Hilbert

Una funzione $(x, y) : X \rightarrow C$ che gode delle seguenti proprietà:

i) $(x, x) \geq 0$ e $(x, x) = 0 \iff x = 0$

ii) $(cx, y) = c(x, y)$

iii) $(x, y) = (y, x)^*$

iv) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$

è detta prodotto scalare. Se esiste un prodotto scalare in X allora $\sqrt{(x, x)}$ è una norma per X come segue dalla seguente:

Disuguaglianza di Schwartz $\forall x, y \in X \quad |(x, y)|^2 \leq (x, x) \cdot (y, y)$.

Dimostrazione: la quantità $(x + \alpha(x, y)y, x + \alpha(x, y)y)$ è non negativa e reale. Sviluppando:

$$(x, x) + \alpha(x, y)(y, x) + \alpha^*(x, y)^*(x, y) + |\alpha|^2 |(x, y)|^2 (y, y) \geq 0 \quad (6.4)$$

Assumiamo α reale: si ha allora $(x, x) + 2\alpha |(x, y)|^2 + \alpha^2 |(x, y)|^2 (y, y) \geq 0$ e poichè il coefficiente di α^2 è positivo ciò è possibile se e solo se il discriminante del trinomio è non positivo, da cui segue la tesi. Si noti che l'uguaglianza tra $|(x, y)|^2$ e $(x, x) \cdot (y, y)$ equivale a dire che il trinomio in α è un quadrato perfetto, che si annulla per $\alpha = -\frac{1}{(y, y)}$. Ne segue allora (proprietà è) che x e y sono proporzionali. In altri termini:

$$|(x, y)|^2 = (x, x) \cdot (y, y) \iff \exists c \in C : x = cy \quad (6.5)$$

Proprietà triangolare $\sqrt{(x + y, x + y)} \leq \sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)} \quad \forall x, y \in X$.

Dimostrazione: usando il simbolo di norma il primo membro diventa (elevando al quadrato) $(x + y, x + y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re(x, y) \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|(x, y)| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$, da cui la tesi.

Se lo spazio normato corrispondente a X è completo, X viene detto uno spazio di Hilbert.

Esempi: L^2 è uno spazio di Hilbert con prodotto scalare:

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g^*(x)dx \tag{6.6}$$

mentre C^0 e L^p , con $p \neq 2$, lo sono. Tutti gli spazi a dimensione finita sono invece spazi di Hilbert, con prodotto scalare $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1^* + \dots + x_Ny_N^*$, dove $\vec{x} = (x_1, \dots, x_N)$ ed $\vec{y} = (y_1, \dots, y_N)$. Tale ultima relazione può essere generalizzata ad una opportuna classe di successioni (vettori a infiniti termini) ponendo:

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_ny_n^* \tag{6.7}$$

purchè la serie converga. Si dimostra che tale serie converge se $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2$ convergono. Tali successioni formano uno spazio di Hilbert che viene indicato con l_2 , di cui il precedente è il prodotto scalare.

Una importante proprietà del prodotto scalare è che può essere invertito col simbolo di limite e quindi di somma infinita: se $\lim x_n = x$ e $\lim y_n = y \Rightarrow \lim(x_n, y_n) = (\lim x_n, \lim y_n) = (x, y)$.

Dimostrazione: $|(x_n, y_n) - (x, y)| = |(x_n - x, y_n) + (x, y_n - y)| \leq \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \rightarrow 0$, essendo $\|y_n\|$ limitata (e avendo utilizzato la disuguaglianza di Schwartz).

6.6 Serie di Fourier

In uno spazio di Hilbert X è possibile definire l'ortogonalità tra vettori: due vettori si dicono ortogonali se il loro prodotto scalare è nullo. Sia ora $\{u_n\}$ una famiglia numerabile di vettori di norma unitaria a due a due ortogonali e sia S il sottoinsieme di X costituito da tutti i vettori $\sum_{n=1}^{\infty} c_nu_n$, con $\{c_n\}$ tale che la serie converga e per altro qualsiasi. Tale sottoinsieme si costruisce scegliendo $\{c_n\} \in l_2$. Infatti la convergenza richiede che $\forall N, M > \bar{N}, \|\sum_{n=N}^{N+M} c_nu_n\|^2 < \epsilon$ (criterio di Cauchy).

Ma:

$$\begin{aligned} \|\sum c_nu_n\|^2 &= \left(\sum c_nu_n, \sum c_nu_n\right) = \\ &= \sum_{n=N}^{N+M} \sum_{n'=N}^{N+M} c_nc_{n'}^*(u_n, u_{n'}) = \sum_{n=N}^{N+M} |c_n|^2 \end{aligned} \tag{6.8}$$

in quanto $(u_n, u_{n'}) = \delta_{nm}$. L'ultimo termine è minore di ϵ se e solo se $\{c_n\} \in l_2$.

Dato $x \in X$ vogliamo determinare $x_s \in S$ tale che $\|x - y\| \geq \|x - x_s\|$, $\forall y \in S$ (x_s è l'elemento di S più vicino ad x , che viene detto proiezione di x su S). Consideriamo $\|x - y\|^2 = (x - \sum y_n u_n, x - \sum y_{n'} u_{n'}) = \|x\|^2 - 2\Re(x, \sum y_n u_n) + (\sum y_n u_n, \sum y_{n'} u_{n'}) = \|x\|^2 - 2\Re \sum y_n^* x_n + \sum |y_n|^2$, dove $x_n = (x, u_n)$ sono detti coefficienti di Fourier di x rispetto al sistema $\{u_n\}$. La distanza è quindi espressa tramite una serie di termini tra loro indipendenti. Basta quindi, $\forall n$, scegliere y_n che minimizza $|y_n|^2 - 2\Re x_n y_n^*$. Esprimendo x_n, y_n in termini di parte reale ed immaginaria, si trova $y_n = x_n$.

Ne segue che $x_s = \sum_{n=1}^{\infty} (x, u_n) u_n$ purchè la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |(x, u_n)|^2$ converga, e ciò discende dalla disuguaglianza di Bessel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x, u_n)|^2 \leq \|x\|^2 \tag{6.9}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \forall N : \quad 0 &\leq \|x - \sum_{n=1}^N x_n u_n\|^2 = & (6.10) \\ &= \left(x, x - \sum_{n=1}^N x_n u_n \right) - \sum_{n=1}^N x_n (u_n, x) + \sum_{n=1}^N \left(x_n u_n, \sum_{m=1}^N x_m u_m \right) = \\ &= \|x\|^2 - \sum_{n=1}^N x_n^* x_n - \sum_{n=1}^N x_n x_n^* + \sum_{n=1}^N x_n x_n^* = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^N |x_n|^2 \end{aligned}$$

La successione $\sum_{n=1}^N |x_n|^2$ è monotona e limitata e quindi convergente (ovvero $\{x_n\} \in l_2$) e segue quindi la disuguaglianza di Bessel. Si noti che $\|x_s\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, u_n)|^2$.

Si dimostra anche che $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n u_n \iff \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ (uguaglianza di Parseval). L'implicazione si ottiene direttamente. D'altra parte essendo $\|x\|^2 - \sum_{n=1}^N |x_n|^2 = \|x - \sum_{n=1}^N x_n u_n\|^2$ se il limite del primo membro è nullo, è nullo anche quello del secondo e quindi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n u_n$ (detta serie di Fourier di x rispetto a $\{u_n\}$) converge a x .

6.7 Sistemi completi

Un sistema ortonormale $\{u_n\}$ si dice completo in X se la serie di Fourier di qualunque $x \in X$ converge ad x . Dimostriamo che $\{u_n\}$ è completo se e solo

se l'unico elemento ortogonale a tutti gli u_n è $x = 0$.

Dimostrazione: se u_n è completo da $(x, u_n) = 0$ segue $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, u_n)|^2 = 0$ ovvero $x = 0$. Viceversa assumiamo che $(x, u_n) = 0$ implichi $x = 0$, e prendiamo $y \in X$. La sua serie di Fourier converge a $z \in X$. Ora $(y - z, u_n) = (y, u_n) - \sum_{m=0}^{\infty} (y_m u_m, u_n) = (y, u_n) - y_n = 0, \forall n$, da cui $y = z$.

Si dimostra ad esempio che, in $L^2(0, T)$, è completo il sistema trigonometrico $\{1, \cos n \frac{2\pi}{T} x, \sin n \frac{2\pi}{T} x\}$.

Consideriamo ora due sistemi di funzioni: $\{f_n(x)\}$ e $\{g_m(y)\}$ completi rispettivamente in $L^2(\Omega_x)$ e in $L^2(\Omega_y)$. Sorge spontaneo chiedersi se il sistema $u_{nm}(x, y) = f_n(x)g_m(y)$ sia completo in $L^2(\Omega_x \times \Omega_y)$. La risposta è positiva. Dimostrazione: sia $H(x, y)$ tale che, $\forall n, m \quad \int H(x, y) u_{nm}^*(x, y) dx dy = \int_{\Omega_x \times \Omega_y} H(x, y) f_n(x) g_m(y) dx dy = 0$. Poichè la funzione integranda è sommabile, si può dividere l'integrale doppio in integrali singoli (teorema di Fubini) ottenendo $\int_{\Omega_x} f_n(x) \int_{\Omega_y} H(x, y) g_m(y) dy dx = 0$ e, per la completezza di f_n , $\int_{\Omega_y} H(x, y) g_m(y) dy = 0$ quasi ovunque rispetto a x , ovvero per la completezza di g_m , $H(x, y) = 0$ (ancora quasi ovunque, ma ciò è sufficiente).

CAPITOLO 7

Circuiti in guida d'onda

7.1 Eccitazione di un campo in guida

Calcoliamo il campo prodotto, in guida d'onda indefinita, da una generica distribuzione \vec{J}, \vec{M} di sorgenti (figura 7.1). Ci limitiamo al solo campo all'e-

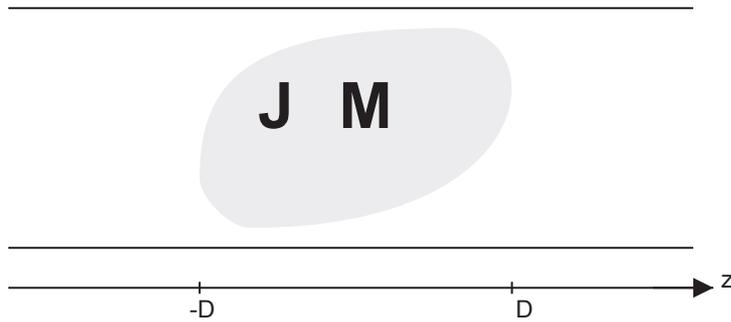


Figura 7.1: Generica distribuzione di sorgenti

sterno della zona delle sorgenti, che può sempre essere scritto come espansione modale:

$$\begin{aligned} z \geq D & \begin{cases} \vec{E} = \sum C_n e^{-j\beta_n z} (\vec{e}_n + e_{zn} \vec{i}_z) \\ \vec{H} = \sum \frac{1}{Z_n} C_n e^{-j\beta_n z} (\vec{h}_n + h_{zn} \vec{i}_z) \end{cases} \\ z \leq -D & \begin{cases} \vec{E} = \sum B_n e^{j\beta_n z} (\vec{e}_n - e_{zn} \vec{i}_z) \\ \vec{H} = \sum \frac{1}{Z_n} B_n e^{j\beta_n z} (-\vec{h}_n + h_{zn} \vec{i}_z) \end{cases} \end{aligned} \quad (7.1)$$

essendo β_n e Z_n costanti di propagazione e impedenza del modo n -esimo. La serie comprende sia modi TE, sia modi TM, e ovviamente solo i primi hanno $h_{zn} \neq 0$ e solo i secondi hanno $e_{zn} \neq 0$. Risulta naturalmente $\vec{e}_n = \vec{h}_n \times \vec{i}_z \quad \forall n$, mentre le componenti longitudinali vanno opportunamente normalizzate.

Per calcolare C_m applichiamo il teorema di reciprocità al volume interno della guida compreso tra $-D$ e D . I due campi sono il campo (7.1) dovuto alle sorgenti e un modo m riflesso di ampiezza unitaria:

$$\begin{cases} \vec{E}_2^- = e^{j\beta_m z}(\vec{e}_m - e_{zm}\vec{i}_z) \\ \vec{H}_2^- = \frac{1}{Z_m}e^{j\beta_m z}(-\vec{h}_m + h_{zm}\vec{i}_z) \end{cases} \quad (7.2)$$

L'integrale di superficie va esteso alle sole sezioni trasverse e si ha:

$$\begin{aligned} \int_{z=D} (\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \times \vec{H}_1) \cdot \vec{i}_z dS + \int_{z=-D} (\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \times \vec{H}_1) \cdot (-\vec{i}_z) dS = \\ = \int_V (\vec{E}_2 \cdot \vec{J} - \vec{H}_2 \cdot \vec{M}) dV \end{aligned} \quad (7.3)$$

Sostituiamo le espressioni dei campi e consideriamo il primo integrale. Poichè occorrono solo i campi trasversi e la serie (7.1) è integrabile:

$$\sum_n \frac{C_n}{Z_m} e^{-j\beta_n D} \int \vec{e}_n \times e^{j\beta_n D} (-\vec{h}_m) \cdot \vec{i}_z dS - \sum_n \frac{C_n}{Z_n} e^{-j\beta_n D} \int e^{j\beta_n D} \vec{e}_m \times \vec{h}_n \cdot \vec{i}_z dS \quad (7.4)$$

Portando fuori gli esponenziali, restano gli integrali di normalizzazione che valgono rispettivamente $-\delta_{nm}$ e δ_{nm} . Si ottiene così infine:

$$-2 \frac{C_m}{Z_m} \quad (7.5)$$

Allo stesso modo per l'altro integrale si ha:

$$\begin{aligned} \sum_n \frac{B_n}{Z_m} e^{j\beta_n(-D)} \int \vec{e}_n \times e^{j\beta_n(-D)} (-\vec{h}_m) \cdot (-\vec{i}_z) dS + \\ - \sum_n \frac{B_n}{Z_n} e^{j\beta_n(-D)} \int e^{j\beta_n(-D)} \vec{e}_m \times (-\vec{h}_n) \cdot (-\vec{i}_z) dS \end{aligned} \quad (7.6)$$

e, a parte gli esponenziali, i due integrali valgono entrambi δ_{nm} . Tale termine è pertanto nullo. Segue:

$$C_n = -\frac{Z_n}{2} \int (\vec{E}_2^- \cdot \vec{J} - \vec{H}_2^- \cdot \vec{M}) dV \quad (7.7)$$

e analogamente:

$$B_n = -\frac{Z_n}{2} \int (\vec{E}_2^+ \cdot \vec{J} - \vec{H}_2^+ \cdot \vec{M}) dV \quad (7.8)$$

Pertanto l'eccitazione è tanto maggiore quanto più le sorgenti sono simili al campo del modo.

Assumiamo ora $\vec{J} = \vec{J}_s \delta(z)$, $\vec{M} = 0$ e $\vec{J}_s = \vec{J}_t + J_z \vec{i}_z$. Allora:

$$\begin{cases} C_n = -\frac{Z_n}{2} \int_S \vec{e}_m \cdot \vec{J}_t dS - \frac{Z_n}{2} \int e_{zn} J_z dS \\ B_n = -\frac{Z_n}{2} \int_S \vec{e}_m \cdot \vec{J}_t dS - \frac{Z_n}{2} \int (-e_{zn}) J_z dS \end{cases} \quad (7.9)$$

e quindi una \vec{J} impulsiva trasversa fornisce $B_n = C_n$ e una longitudinale $B_n = -C_n$ (e dualmente per \vec{M}). La prima è quindi un generatore di tensione sulla linea equivalente e il secondo un generatore di corrente.

Notiamo infine che l'ipotesi di guida illimitata non limita l'applicabilità di quanto derivato. Il caso tipico è quello di sorgenti che irradiano in presenza di un ostacolo esterno alla zona delle sorgenti stesse. L'analisi di un ostacolo può essere fatta considerando il campo incidente sull'ostacolo. Tale campo incidente è il campo in assenza dell'ostacolo, ovvero calcolato in guida illimitata, e quindi mediante le (7.7,7.8).

7.2 Mode Matching

La presenza di una soluzione generale per il campo in una guida d'onda, sotto forma di una serie di Fourier, consente di risolvere molti problemi di discontinuità in guida, e di giunzioni tra le guide, utilizzando il metodo detto *Mode Matching*, che risulta equivalente alla risoluzione delle equazioni di Maxwell nella struttura scelta ¹.

Per mostrare tale tecnica consideriamo un caso semplice, come il cambio di larghezza di una guida d'onda rettangolare (figura 7.2).

La struttura viene alimentata col modo fondamentale TE_{10} da uno dei due lati. La presenza di una discontinuità produce ovviamente una riflessione del TE_{10} , e una trasmissione del TE_{10} della altra guida oltre la discontinuità. Tuttavia occorre notare che alla discontinuità, il solo TE_{10} non soddisfa più le condizioni al contorno, e nascono quindi anche modi superiori, che sono concentrati vicino alla discontinuità stessa. In taluni casi, comunque, uno o più modi superiori possono anche essere in propagazione. Ad esempio se la alimentazione avviene dalla guida piccola, e l'altra è molto più larga. I modi

¹Una tale tecnica viene classificata come tecnica di soluzione *full-wave*, in contrapposizione alle soluzioni che usano modelli. Una idea della differenza tra le due categorie può essere ottenuta esaminando come sono state ricavate le equazioni delle linee di trasmissione nel corso di propagazione e in questo corso. Nel primo caso si è utilizzato un modello, quello delle celle LC, e nel secondo si sono ricavate tali equazioni dalle equazioni di Maxwell, ovvero con un approccio full-wave

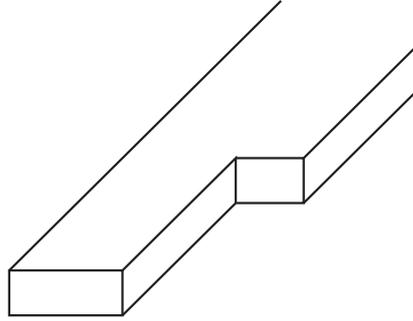


Figura 7.2: Cambio di larghezza di una guida rettangolare

superiori (e quello fondamentale) sono prodotti alla discontinuità e quindi se ne allontanano.

Il campo totale nella guida di alimentazione è quindi costituito dal TE_{10} incidente e dalla somma di tutti i modi riflessi, quello nell'altra dalla somma di tutti i modi trasmessi. Naturalmente le ampiezze di tutti i modi che sono prodotti dalla discontinuità, e quindi se ne allontanano, sono incognite, e vanno calcolate.

Imponendo le condizioni di continuità alla interfaccia, è possibile ricavare tali incognite e quindi risolvere completamente il problema.

Applichiamo questa strategia al caso di figura 7.2. Il campo nelle due strutture risulta

$$\begin{aligned}
 z \leq 0 \quad & \begin{cases} \vec{E}^A = V_i e^{-j\beta_1^A z} (\vec{e}_1^A + e_{z1}^A \vec{i}_z) + \sum B_n e^{j\beta_n^A z} (\vec{e}_n^A - e_{zn}^A \vec{i}_z) \\ \vec{H}^A = \frac{1}{Z_1^A} V_i e^{-j\beta_1^A z} (\vec{h}_1^A + h_{z1}^A \vec{i}_z) + \sum \frac{1}{Z_n^A} B_n e^{j\beta_n^A z} (-\vec{h}_n^A + h_{zn}^A \vec{i}_z) \end{cases} \\
 z \geq 0 \quad & \begin{cases} \vec{E}^B = \sum C_n e^{-j\beta_n^B z} (\vec{e}_n^B + e_{zn}^B \vec{i}_z) \\ \vec{H}^B = \sum \frac{1}{Z_n^B} C_n e^{-j\beta_n^B z} (\vec{h}_n^B + h_{zn}^B \vec{i}_z) \end{cases}
 \end{aligned} \tag{7.10}$$

dove la somma è estesa a tutti i modi, ordinati in maniera arbitraria. La serie modale di Fourier è quindi in realtà bidimensionale.

Poichè le due guide sono diverse, saranno diverse le funzioni modali, e le costanti dei vari modi. Se ne è tenuto conto usando l'apice A per la guida di alimentazione e l'apice B per l'altra.

Nel caso in esame, diversamente dal caso generale, è possibile una ulteriore semplificazione. La struttura è infatti omogenea verticalmente, e anche il campo incidente lo è. Ne segue che tutti i campi coinvolti devono essere costanti verticalmente, e quindi devono essere costituiti solo da modi col secondo indice nullo, ovvero solo da modi del tipo TE_{n0} , con $n > 0$. La

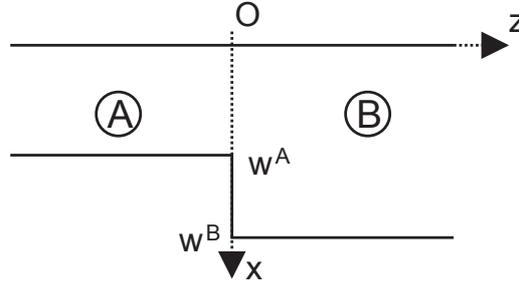


Figura 7.3: Geometria del problema

serie di Fourier corrispondente è quindi monodimensionale. Continuiamo, comunque, col caso generale fin dove possibile.

Alla interfaccia (vedi geometria di figura 7.3), deve risultare:

$$\begin{aligned} \vec{E}_t^A(x, 0) &= \vec{E}_t^B(x, 0) & x \in [0, w^A] \\ \vec{H}_t^A(x, 0) &= \vec{H}_t^B(x, 0) & x \in [0, w^A] \end{aligned} \quad (7.11)$$

e inoltre il campo elettrico deve annullarsi sulla parete di conduttore perfetto, ovvero

$$\vec{E}_t^B(x, 0) = 0 \quad x \in [w^A, w^B] \quad (7.12)$$

I campi delle (7.11,7.12) si ottengono dalle (7.10) e valgono

$$\begin{aligned} \vec{E}_t^A(x, 0) &= V_i \vec{e}_1^A + \sum B_n \vec{e}_n^A \\ \vec{E}_t^B(x, 0) &= \sum C_n \vec{e}_n^B \\ \vec{H}_t^A(x, 0) &= \frac{1}{Z_1^A} V_i \vec{h}_1^A + \sum \frac{1}{Z_n^A} B_n (-\vec{h}_n^A) \\ \vec{H}_t^B(x, 0) &= \sum \frac{1}{Z_n^B} C_n \vec{h}_n^B \end{aligned} \quad (7.13)$$

Possiamo definire una funzione $\vec{f}(x)$ data da

$$\vec{f}(x) = \begin{cases} \vec{E}_t^A(x, 0) & x \in [0, w^A] \\ 0 & x \in [w^A, w^B] \end{cases} \quad (7.14)$$

e riscrivere le condizioni di continuità nella forma

$$\vec{f}(x) = \vec{E}_t^B(x, 0) \quad x \in [0, w^B] \quad (7.15)$$

$$\vec{H}_t^A(x, 0) = \vec{H}_t^B(x, 0) \quad x \in [0, w^A] \quad (7.16)$$

Le (7.15,7.16) sono delle uguaglianze tra funzioni. Se due funzioni sono uguali, dovranno essere uguali i relativi coefficienti di Fourier rispetto a qualunque sistema ortonormale. Se il sistema è anche completo, vale il viceversa: l'uguaglianza dei coefficienti di Fourier implica l'uguaglianza delle funzioni.

Poichè l'insieme dei modi è completo sulla sezione, possiamo sostituire alle (7.15,7.16) l'uguaglianza tra i relativi coefficienti di Fourier calcolati sui modi della guida. In tal modo si sotituisce una equazione funzionale (che deve essere verificata su tutti i punti, che formano un insieme continuo) con l'uguaglianza tra due successioni, che deve essere verificata solo su di un insieme numerabile di punti.

Occorre però scegliere opportunamente l'insieme dei modi, in quanto ci sono due guide.

Cominciamo dalla (7.16). Poichè tale relazione deve essere valida in $[0, w^A]$, dobbiamo utilizzare i modi della guida A .

Per calcolare i coefficienti di Fourier, quindi, moltiplichiamo ambo i membri della (7.16) per \vec{h}_q^A , con q qualunque, e integriamo sulla sezione della guida A

$$\int_{S_A} \vec{H}_t^A(x, 0) \cdot \vec{h}_q^A dS = \int_{S_A} \vec{H}_t^B(x, 0) \cdot \vec{h}_q^A dS \quad (7.17)$$

Per calcolare la (7.17) inseriamo le espressioni (7.13) dei campi. Poichè queste sono delle serie di Fourier, possono essere integrate termine a termine. Si ottiene così

$$\begin{aligned} \int_{S_A} \left[\frac{1}{Z_1^A} V_i \vec{h}_1^A + \sum_n \frac{1}{Z_n^A} B_n (-\vec{h}_n^A) \right] \cdot \vec{h}_q^A dS &= \int_{S_A} \left[\sum_m \frac{1}{Z_m^B} C_m \vec{h}_m^B \right] \cdot \vec{h}_q^A dS \\ \frac{1}{Z_1^A} V_i \int_{S_A} \vec{h}_1^A \cdot \vec{h}_q^A dS - \sum_n \frac{1}{Z_n^A} B_n \int_{S_A} \vec{h}_n^A \cdot \vec{h}_q^A dS &= \sum_m \frac{1}{Z_m^B} C_m \int_{S_A} \vec{h}_m^B \cdot \vec{h}_q^A dS \end{aligned}$$

Utilizziamo ora la ortogonalità delle funzioni modali sulla sezione S_A . Gli integrali al primo membro valgono quindi 0 oppure 1 e segue

$$\frac{1}{Z_1^A} V_i \delta_{1,q} - \frac{1}{Z_q^A} B_q = \sum_m \frac{1}{Z_m^B} C_m \int_{S_A} \vec{h}_m^B \cdot \vec{h}_q^A dS \quad (7.18)$$

Passiamo alla (7.15). Poichè tale relazione deve essere valida in $[0, w^B]$, dobbiamo utilizzare i modi della guida B . Pertanto moltiplichiamo ambo i membri della (7.15) per \vec{e}_p^B , con p qualunque, e integriamo sulla sezione della guida B :

$$\int_{S_B} \vec{E}_t^B(x, 0) \cdot \vec{e}_p^B dS = \int_{S_B} \vec{f}(x) \cdot \vec{e}_p^B dS = \int_{S_A} \vec{f}(x) \cdot \vec{e}_p^B dS + \int \vec{f}(x) \cdot \vec{e}_p^B dS \quad (7.19)$$

dove il secondo integrale è esteso sulla differenza tra S_B ed S_A , ovvero sulla parte di S_B costituita da $C.E.P.$. Dalla (7.14) segue che $\vec{f}(x)$ è nulla su tale superficie, e quindi l'ultimo integrale della (7.19) è nullo. Invece su S_A risulta $\vec{f}(x) = \vec{E}_t^A(x, 0)$ e quindi la (7.19) diventa (sostituendo le serie di Fourier (7.13) al posto dei campi)

$$\begin{aligned} \int_{S_B} \vec{E}_t^B(x, 0) \cdot \vec{h}_p^B dS &= \int_{S_A} E_t^A(x, 0) \cdot \vec{e}_p^B dS \\ \int_{S_B} \sum_m C_m \vec{e}_m^B \cdot \vec{e}_p^B dS &= \int_{S_A} \left[V_i \vec{e}_1^A + \sum_n B_n \vec{e}_n^A \right] \cdot \vec{e}_p^B dS \\ \sum_m C_m \int_{S_B} \vec{e}_m^B \cdot \vec{e}_p^B dS &= V_i \int_{S_A} \vec{e}_1^A \cdot \vec{e}_p^B dS + \sum_n B_n \int_{S_A} \vec{e}_n^A \cdot \vec{e}_p^B dS \end{aligned}$$

e usando ancora la ortogonalità segue

$$C_p = V_i \int_{S_A} \vec{e}_1^A \cdot \vec{e}_p^B dS + \sum_n B_n \int_{S_A} \vec{e}_n^A \cdot \vec{e}_p^B dS \quad (7.20)$$

L'insieme delle (7.18,7.20) costituisce un sistema lineare nelle incognite B_q e C_p . Questo sistema può essere

1. risolto direttamente, sfruttando eventualmente la forma della matrice, che risulta avere due blocchi diagonali;
2. risolto per via iterativa (metodo di Gauss-Seidel) calcolando alternativamente una nuova approssimazione di B_q dalla (7.18) e di C_p dalla (7.20);
3. ridotto a un sistema di metà dimensioni sostituendo le B_q nell (7.20) o le C_p nelle (7.18).

In ogni caso il sistema risulta infinito e si pone il problema del troncamento. La prima cosa da notare è che gli stessi modi sono utilizzati (separatamente nelle due guide) per rappresentare il campo (vedi le (7.10)) e per calcolare i coefficienti di Fourier (vedi (7.17, 7.19)). Quindi la scelta del troncamento implica il decidere se un dato modo (es e_Q^A) è da considerare *utile* oppure no. Nel caso, occorre includerlo sia nella serie di Fourier, sia nelle equazioni. La conseguenza di questo approccio è che il numero di equazioni e quello delle incognite risultano comunque uguali.

A questo punto, quindi, ci troviamo ad aver incluso i modi della guida A da 1 a Q e quelli della guida B da 1 a P . Sembra ragionevole pensare che, al crescere di P e Q , assieme al costo computazionale, aumenti anche la precisione. In realtà, però, la precisione potrebbe anche diminuire, e in maniera significativa, se P e Q non sono scelti in modo coerente (fenomeno della *convergenza relativa*).

Consideriamo in dettaglio il caso di figura 7.2. Fissare P e Q significa fissare la massima banda spaziale delle funzioni usate per rappresentare i campi e le condizioni di continuità. Poichè però le guide sono diverse, le funzioni con la massima variazione spaziale sono, rispettivamente

$$\sin \frac{Q\pi x}{w^A}$$

nella guida A e

$$\sin \frac{P\pi x}{w^B}$$

nella guida B .

Se le bande spaziali di queste due funzioni sono diverse, nasce il fenomeno della *convergenza relativa*, e la precisione può diventare scadente anche al crescere di P e Q .

Quindi uno dei due valori, ad es. P può essere scelto in base a considerazioni di precisione e costo computazionale, ma l'altro deve soddisfare a

$$\frac{Q\pi}{w^A} = \frac{P\pi}{w^B} \quad (7.21)$$

In tal modo la precisione aumenta effettivamente al crescere di P .

7.3 Slot in guida d'onda rettangolare

Aperture fatte nella parete di una guida d'onda possono ovviamente irradiare verso l'esterno. Tuttavia per avere una buona efficienza di irradiazione

le aperture devono avere dimensioni confrontabili con la lunghezza d'onda. Inoltre è utile avere aperture lunghe e sottili in modo che la corrente magnetica ad essa equivalente abbia essenzialmente una sola componente (allineata con l'apertura) e quindi la cross-polarizzazione sia piccola.

Si usano quindi fessure (o slot) sottili e lunghe, di forma rettangolare e variamente disposte e orientate, in genere costituenti un array. Il caso più comune è quello di slot longitudinali (figura 7.4) che, essendo allineate, non irradiano sostanzialmente alcuna componente cross-polare. Se il rapporto tra

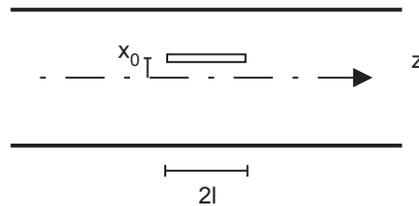


Figura 7.4: Slot longitudinale

lunghezza e larghezza è pari o superiore a 7, la corrente magnetica equivalente ha solo componente z e può, per lunghezze della slot prossime a $\frac{\lambda_0}{2}$, essere approssimata con una distribuzione del tipo:

$$\vec{M}_S = \frac{V_S}{w} \cos \frac{\pi z}{2l} \vec{i}_z \quad (7.22)$$

con V_S parametro di ampiezza della slot, e w larghezza della stessa.

Una slot taglia le linee di corrente elettrica (figura 7.5) sulla superficie della guida. Il campo tangenziale che si sviluppa sulla slot deve garantire la con-

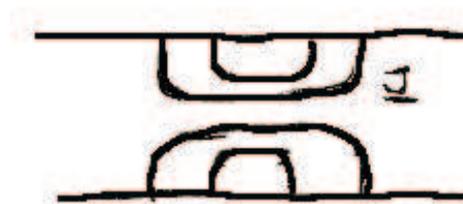


Figura 7.5: Linee della corrente elettrica

tinuità della corrente totale ($\vec{J} + j\omega\vec{D}$) ed è quindi tanto più grande quanto maggiore è l'offset x_0 della slot medesima. In particolare, la dipendenza da

x_0 è la stessa della corrente J_x (ovvero di H_z) e cioè $\sin \frac{\pi x_0}{a}$.

Dal punto di vista del circuito equivalente, la potenza irradiata viene dissipata su Y . Applicando il teorema di Poynting si ha allora:

$$\frac{1}{2}G_{10} (|A|^2 - |B|^2) = P_{irr} + \frac{1}{2}G_{10} |A + C|^2 \quad (7.23)$$

Sviluppando segue:

$$\frac{1}{2}G_{10} [|A|^2 - |B|^2] = P_{irr} + \frac{1}{2}G_{10} [|A|^2 + |B|^2 + 2\Re(A \cdot B^*)] \quad (7.24)$$

essendo $C = B$. Inoltre $A = \frac{1}{\Gamma}B$ e in definitiva:

$$P_{irr} = \frac{1}{2}G_{10} \left[-2|B|^2 - 2\Re\left(\frac{1}{\Gamma}BB^*\right) \right] = \frac{1}{2}G_{10} \left[-2|B|^2 \left(1 + \Re\left(\frac{1}{\Gamma}\right)\right) \right] \quad (7.25)$$

La potenza irradiata può essere calcolata notando che il campo di una slot (essendo $k_0 w \ll 1$) è sostanzialmente quello di un dipolo, con guadagno $2 \cdot 1.64$ (a causa del piano di massa). Poichè il campo elettrico nella direzione di massimo vale:

$$|E| = \frac{1}{4\pi} \frac{2V_S}{w} w \frac{2}{k_0} \frac{1}{r} k_0 = \frac{V_S}{\pi r} \quad (7.26)$$

sovrapposto a questo effetto vi è quello della lunghezza. La slot risona ad una lunghezza prossima (ma leggermente minore) a $\frac{\lambda_0}{2}$ e, al variare della frequenza, mostra una tipica risposta risonante.

Se per semplicità assumiamo la lunghezza di risonanza pari a $\frac{\lambda_0}{2}$ (teoria di Stevenson), possiamo ricavare il circuito equivalente della slot alla risonanza.

La forma simmetrica di \vec{M} assicura che il campo diffuso (figura 7.6) dalla slot sia simmetrico ($B = C$) e quindi che la slot sia rappresentabile da una ammettenza Y in parallelo (figura 7.7). Applicando il teorema di equivalenza, e quello di reciprocità, si trova che:

$$B = C = \frac{j}{\pi} \sqrt{\frac{2a}{b}} \cos \beta_{10} l \sin \frac{\pi x_0}{a} V_S \frac{k}{\beta_{10}} \quad (7.27)$$

D'altra parte:

$$B = \Gamma A \quad \text{con } \Gamma = \frac{G_{10} - (Y + G_{10})}{G_{10} + (Y + G_{10})} = \frac{-Y}{2G_{10} + Y} \quad (7.28)$$

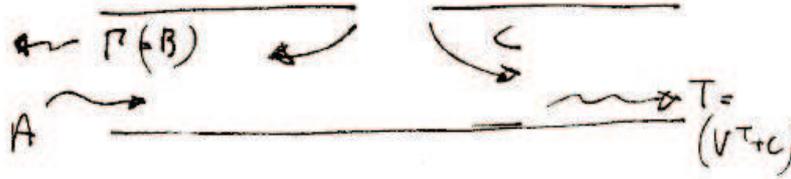


Figura 7.6: Campo diffuso dalla slot

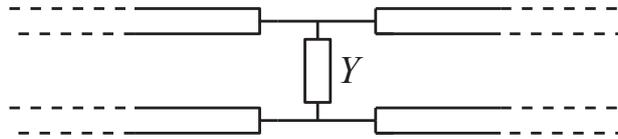


Figura 7.7: Ammettenza equivalente

dove G_{10} è la ammettenza equivalente del TE_{10} in guida.

Segue:

$$P_{irr} = \frac{4\pi r^2 S}{G} = \frac{\frac{4}{\pi} |V_S|^2 \frac{1}{2\zeta}}{3.28} = \frac{1}{2\zeta} |V_S|^2 \cdot 0.388 \quad (7.29)$$

da cui:

$$1 + \Re\left(\frac{1}{\Gamma}\right) = -\frac{0.388 \frac{1}{2\zeta} |V_S|^2}{G_{10} \frac{1}{\pi^2} \frac{2a}{b} \cos^2 \beta_{10} l \sin^2 \frac{\pi x_0}{a} |V_S|^2 \frac{k^2}{\beta_{10}^2}} \quad (7.30)$$

D'altra parte $\frac{1}{\Gamma} = -1 - \frac{2G_{10}}{Y}$ e quindi:

$$-2G_{10} \Re\left(\frac{1}{Y}\right) = -\frac{b}{2a} \frac{1}{G_{10} \zeta} \cdot 1.915 \frac{1}{\cos^2 \beta_{10} l \sin^2 \frac{\pi x_0}{a}} \frac{\beta_{10}^2}{k_0^2} \quad (7.31)$$

Poichè per ipotesi la slot è risonante, segue infine:

$$\frac{G}{G_{10}} = 2.09 \frac{a}{b} G_{10} \zeta \cos^2 \beta_{10} l \sin^2 \frac{\pi x_0}{a} \frac{k_0^2}{\beta_{10}^2} = 2.09 \frac{k_0 a}{\beta_{10} b} \cos^2 \beta_{10} l \sin^2 \frac{\pi x_0}{a} \quad (7.32)$$

essendo $G_{10} \zeta = \frac{\beta_{10} \omega \mu}{\omega \mu k_0} = \frac{\beta_{10}}{k_0}$. Ricordando che la slot ha $2l \simeq \frac{\lambda_0}{2}$, si ha infine:

$$\frac{G}{G_{10}} = 2.09 \frac{k_0 a}{\beta_{10} b} \cos^2 \frac{\beta_{10} \lambda_0}{4} \sin^2 \frac{\pi x_0}{a} \quad (7.33)$$

7.4 Accoppiamento tramite fori

L'utilizzo di fori consente di trasferire potenza tra due strutture guidanti, o tra questa e altre strutture, ad esempio una cavità, in modo controllabile.

Consideriamo allora un foro, per semplicità circolare, in uno schermo infinitamente sottile. Dal teorema di equivalenza segue che tale foro può essere sostituito da due distribuzioni opposte di corrente magnetica, poste sui due lati dello schermo totalmente chiuso (figura 7.8). Se il foro è piccolo rispetto

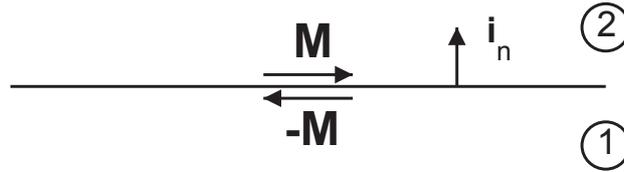


Figura 7.8: Correnti magnetiche sui lati dello schermo

a λ , l'effetto di tali correnti può essere sostituito con quello di sorgenti dipolari poste al centro del foro. In particolare si ha un dipolo magnetico di ampiezza \vec{M}_0 dovuto alla risultante delle \vec{M}_f . Se poi vi fossero (e in genere è così) anche delle correnti magnetiche ad anello, allora queste sono equivalenti a un dipolo elettrico ortogonale (teorema di Ampere) la cui ampiezza J_0 è proporzionale a ϵ (figura 7.9). Si noti che deve risultare:

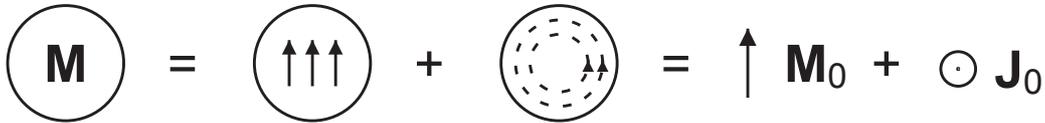


Figura 7.9: Rappresentazione dei vettori

$$\begin{cases} \vec{M}_1 = -\vec{M}_2 \\ \frac{\vec{J}_1}{\epsilon_1} = -\frac{\vec{J}_2}{\epsilon_2} \end{cases} \quad (7.34)$$

Spesso i dipoli sono espressi in termini di vettori polarizzazione:

$$\begin{cases} \vec{P}_e = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = \frac{1}{j\omega} \vec{J} \\ \vec{P}_m = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{H} = \frac{1}{j\omega\mu_0} \vec{M} \end{cases} \quad (7.35)$$

7.5 Teoria di Bethe

La causa delle correnti equivalenti, e quindi dei dipoli, è il campo che arriva sul foro, e in particolare il campo \vec{E}_g, \vec{H}_g , che esiste nella zona 1 in assenza di foro. Tale campo viene detto campo generatore.

Se il foro è piccolo, e le due regioni 1 e 2 sono identiche, possiamo calcolare i dipoli come esattamente proporzionali ai campi generatori \vec{E}_g, \vec{H}_g (approssimazione di Bethe). Ovviamente tale approssimazione è opposta a quella di Kirchhoff in quanto ci troviamo all'estremo opposto per quanto riguarda le dimensioni del foro.

Se il foro è circolare (o se \vec{H}_g ha solo componente in una delle direzioni di simmetria del foro) si ha (teoria di Bethe):

$$\begin{cases} \vec{M}_2 = j\omega\mu_0 \left[-\alpha_m \vec{H}_g \right]_t \\ \vec{J}_2 = j\omega\epsilon_0 \left[\alpha_e \vec{E}_g \right]_n \end{cases} \quad (7.36)$$

dove i pedici t e n stanno per componenti tangenziale e normale ed è richiesto che $\epsilon_1 = \epsilon_2$.

Le due quantità α_e e α_m sono dette polarizzabilità del foro e dipendono dalla geometria del foro stesso. Il nome *polarizzabilità* deriva dal fatto che si considera come se il foro, sotto l'azione del campo esterno, si polarizzi in maniera equivalente alla polarizzazione di un dielettrico.

Per foro circolare si trova:

$$\begin{cases} \alpha_m = \frac{4}{3}r_0^3 \\ \alpha_e = -\frac{2}{3}r_0^3 \end{cases} \quad (7.37)$$

dove r_0 è il raggio del foro.

7.6 Foro in una parete trasversa

Consideriamo una guida rettangolare interrotta da un CEP contenente un foro, e calcoliamo il coefficiente di trasmissione e riflessione del foro, per il modo TE_{10} . Dalla teoria di Bethe sappiamo che possiamo sostituire al foro una coppia di dipoli per lato. In particolare, essendo $E_z = 0$, non vi è dipolo elettrico. Se l'onda incidente ha ampiezza V^+ , il campo sul foro è:

$$\vec{H} = \frac{2V^+}{Z} \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{\pi x_0}{a} \vec{i}_x \quad (7.38)$$

dove (x_0, y_0) sono le coordinate del foro (figura 7.10), in quanto sul CEP il campo \vec{H} raddoppia rispetto all'onda progressiva. Il dipolo nella zona 2 vale

$$\vec{M}_2 = -\alpha_m j\omega\mu_0 \frac{2V^+}{Z} \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{\pi x_0}{a} \vec{i}_x \delta(\vec{r} - \vec{r}_P) \quad (7.39)$$

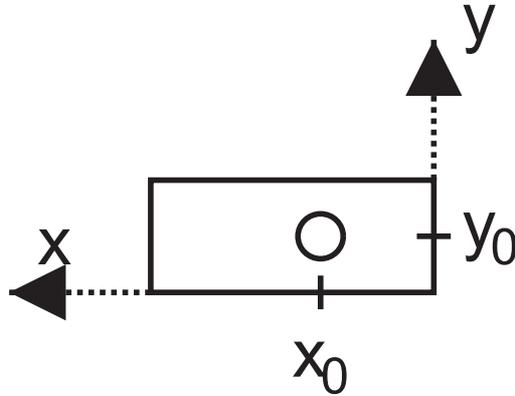


Figura 7.10: Sezione della guida

e irradia appoggiata su di un piano di massa. Possiamo tenerne conto col teorema delle immagini, e quindi la sorgente da utilizzare per il calcolo del campo trasmesso sarà pari al doppio di M_2 ,

$$\vec{M} = 2\vec{M}_2 = -\alpha_m j\omega\mu_0 \frac{2V^+}{Z} \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{\pi x_0}{a} 2\vec{i}_x \delta(\vec{r} - \vec{r}_P) \quad (7.40)$$

ma irradierà nella guida indefinita.

L'ampiezza del TE_{10} trasmesso è allora:

$$\begin{aligned} A_{10}^+ &= -\frac{1}{2} \int_V -(\vec{M} \cdot \vec{h}_{10}^-) dV = \int_V (\vec{M}_2 \cdot \vec{h}_{10}^-) dV = \\ &= [M_2] \cdot \left[-\sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{\pi x_0}{a} \right] = \\ &= \left[-\alpha_m j\omega\mu_0 \frac{2V^+}{Z} \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{\pi x_0}{a} \right] \cdot \left[-\sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{\pi x_0}{a} \right] = \\ &= \alpha_m \frac{j\omega\mu_0}{Z} \frac{4}{ab} \sin^2 \frac{\pi x_0}{a} V^+ \end{aligned} \quad (7.41)$$

Allo stesso modo il TE_{10} riflesso prodotto dal foro vale:

$$A_{10}^- = -\frac{1}{2} \int \int \int_V -(\vec{M} \cdot \vec{h}_{10}^+) dV = A_{10}^+ \quad (7.42)$$

in quanto sia \vec{M} che \vec{h}_{10} cambiano segno. A questo campo va aggiunto (per ottenere il campo riflesso) quello riflesso dal foro, di ampiezza $-V^+$. Si ha così:

$$\begin{cases} T = \frac{4j\beta\alpha_m}{ab} \sin^2 \frac{\pi x_0}{a} \\ \Gamma = -1 + \frac{4j\beta\alpha_m}{ab} \sin^2 \frac{\pi x_0}{a} \end{cases} \quad (7.43)$$

Il risultato (7.43) fornisce una buona approssimazione del campo trasmesso, ma ha un difetto: risulta $|\Gamma| > 1$ e quindi non rispetta la conservazione della potenza. Il motivo è che A_{10}^- risulta sfasato di 90° rispetto a V^+ , e quindi *non trasporta via potenza*.

In questo caso particolare è possibile ottenere un risultato fisicamente significativo utilizzando un modello della parete con foro.

Una parete infinitamente sottile con un foro equivale infatti ad una ammettenza in parallelo, di valore pari a Y (normalizzato) (figura 7.11), in quanto il campo elettrico tangente *totale* ai due lati della parete è uguale in tutti i punti². Ne segue che le tensioni sulla linea devono essere le stesse.

Poichè la parete è supposta di conduttore elettrico perfetto, non vi è dissipazione, e l'ammettenza in questione deve essere puramente reattiva.

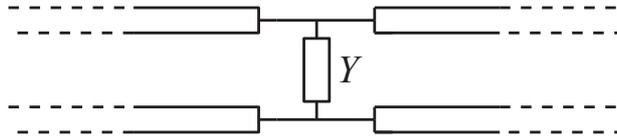


Figura 7.11: Ammettenza tra due linee indefinite

Possiamo ottenere il valore di Y utilizzando i risultati della teoria di Bethe (7.43).

Il valore di Γ per il circuito equivalente di figura 7.11 vale:

$$\Gamma = \frac{1 - (1 + Y)}{1 + (1 + Y)} = \frac{-Y}{2 + Y} \quad (7.44)$$

e se $|Y| \gg 1$ (prossimo ad un corto circuito) allora:

$$\Gamma = -\frac{1}{1 + \frac{2}{Y}} \simeq -1 + \frac{2}{Y} \quad (7.45)$$

da cui segue che l'ammettenza (puramente immaginaria) vale:

$$Y = -j \frac{ab}{2\alpha_m \beta} \left(\sin \frac{\pi x_0}{a} \right)^{-2} \quad (7.46)$$

A partire da questo valore di Y , si può calcolare il valore non approssimato di Γ e si ottiene $|\Gamma| < 1$.

²Che il diaframma equivalga a un componente in parallelo è confermato anche dal fatto che $A_{10}^+ = A_{10}^-$

7.7 Foro in una parete longitudinale

Consideriamo ora due guide sovrapposte (figura 7.12), con accoppiamento tramite un foro in una parete longitudinale.

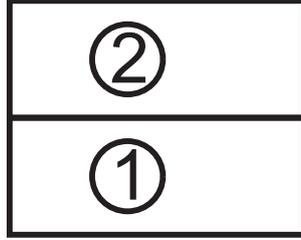


Figura 7.12: Schematizzazione delle guide

Sia x_0 l'offset del foro rispetto al centro delle due guide (figura 7.13).

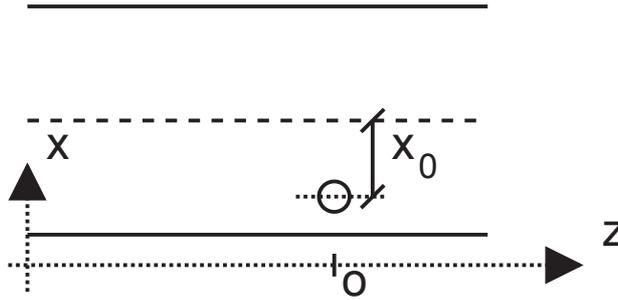


Figura 7.13: Geometria del foro

I campi incidenti sono:

$$\begin{cases} E_y = V^+ \sqrt{\frac{2}{ab}} \cos \frac{\pi x_0}{a} \\ H_x = -\frac{1}{Z_{10}} V^+ \sqrt{\frac{2}{ab}} \cos \frac{\pi x_0}{a} \\ H_z = j \frac{\pi}{\omega \mu_0 a} V^+ \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{\pi x_0}{a} \end{cases} \quad (7.47)$$

e quindi i dipoli nella guida 2 sono tre.

Detti B^+ e B^- le ampiezze dei campi diffusi nella guida 2, si ha:

$$\begin{aligned} B_{P_y}^- &= -\frac{1}{2} j \omega \epsilon_0 \alpha_e Z_{10} \left(V^+ \sqrt{\frac{2}{ab}} \cos \frac{\pi x_0}{a} \right) \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{ab}} \cos \frac{\pi x_0}{a} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} j \omega \epsilon_0 \alpha_e Z_{10} \frac{2}{ab} \cos^2 \frac{\pi x_0}{a} V^+ = B_{P_y}^+ \end{aligned} \quad (7.48)$$

$$\begin{aligned}
B_{M_x}^- &= \frac{1}{2} j \omega \mu (-\alpha_m) \left(-\frac{1}{Z_0} V^+ \sqrt{\frac{2}{ab}} \cos \frac{\pi x_0}{a} \right) \cdot \left(-\sqrt{\frac{2}{ab}} \cos \frac{\pi x_0}{a} \right) = \\
&= \frac{1}{2} j \omega \mu (-\alpha_m) \frac{1}{Z_{10}} \frac{2}{ab} \cos^2 \frac{\pi x_0}{a} V^+ = -B_{M_x}^+ \quad (7.49)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{M_z}^- &= \frac{1}{2} j \omega \mu (-\alpha_m) \left(j \frac{\pi}{\omega \mu a} V^+ \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{\pi x_0}{a} \right) \cdot \left(j \frac{\pi Z_{10}}{\omega \mu a} \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{\pi x_0}{a} \right) = \\
&= -\frac{1}{2} j \omega \mu (-\alpha_m) \left(\frac{\pi}{\omega \mu a} \right)^2 \frac{2 Z_{10}}{ab} \sin^2 \frac{\pi x_0}{a} V^+ = B_{M_z}^+ \quad (7.50)
\end{aligned}$$

Estraendo le ampiezze dei momenti si ha allora:

$$\begin{cases} B^+ = -\frac{1}{2} \left[Z_{10} \cos \frac{\pi x_0}{a} P_0 - \cos \frac{\pi x_0}{a} M_{x0} - j \frac{\pi Z_{10}}{\omega \mu a} \sin \frac{\pi x_0}{a} M_{z0} \right] \sqrt{\frac{2}{ab}} \\ B^- = -\frac{1}{2} \left[Z_{10} \cos \frac{\pi x_0}{a} P_0 + \cos \frac{\pi x_0}{a} M_{x0} - j \frac{\pi Z_{10}}{\omega \mu a} \sin \frac{\pi x_0}{a} M_{z0} \right] \sqrt{\frac{2}{ab}} \end{cases} \quad (7.51)$$

E' possibile annullare B^+ (oppure B^-) realizzando un accoppiatore direzionale. Si ha infatti:

$$-\epsilon_0 \alpha_e Z_{10} \cos^2 \frac{\pi x_0}{a} - (-\alpha_m) \mu \frac{1}{Z_{10}} \cos^2 \frac{\pi x_0}{a} + \alpha_m \mu \left(\frac{\pi}{\omega \mu a} \right)^2 Z_{10} \sin^2 \frac{\pi x_0}{a} = 0 \quad (7.52)$$

da cui segue:

$$\tan^2 \frac{\pi x_0}{a} = \frac{\mu \alpha_m \frac{1}{Z_{10}} - \epsilon_0 \alpha_e Z_{10}}{-\mu \alpha_m Z_{10} \left(\frac{\pi}{\omega \mu a} \right)^2} \quad (7.53)$$

e l'accoppiamento diventa:

$$C = -\mu \alpha_m \frac{1}{Z_{10}} \cos^2 \frac{\pi x_0}{a} \frac{1}{2} j \frac{2}{ab} \omega \quad (7.54)$$

7.8 Teoria di Collin

Come visto negli esempi, la teoria di Bethe non consente di rispettare la conservazione delle potenze. Inoltre non tiene conto dell'ambiente in cui i dipoli irradiano e quindi richiede la perfetta simmetria delle strutture.

Per tenere conto di tali effetti si può includere, tra le cause dei dipoli \vec{J} , \vec{M} equivalenti al foro anche i campi di reazione, ovvero i campi prodotti dai dipoli stessi.

Detti \vec{E}_r^1 e \vec{E}_r^2 i due campi di reazione, presenti rispettivamente nella zona 1 e 2, si pone allora:

$$\begin{cases} \vec{M}_2 = j\omega\mu_0 \left\{ -\alpha_m \left(\vec{H}_g + \vec{H}_r^1 - \vec{H}_r^2 \right)_t \right\} \\ \vec{J}_2 = j\omega\epsilon_0 \left\{ \alpha_e \left(\vec{E}_g + \vec{E}_r^1 - \vec{E}_r^2 \right)_n \right\} \end{cases} \quad (7.55)$$

Dimostriamo che vale la conservazione dell'energia:

$$\begin{aligned} P_{inc} - P_{rifl} &= -\frac{1}{2} \Re \left\{ \vec{E}_1 \cdot \vec{J}_1^* + \vec{H}_1 \cdot \vec{M}_1^* \right\} = \frac{1}{2} \Re \left\{ \vec{E}_1 \cdot \vec{J}_2^* + \vec{H}_1 \cdot \vec{M}_2^* \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \Re \left\{ -j\omega\epsilon_0\alpha_e \vec{E}_1 \cdot \left(\vec{E}_g + \vec{E}_r^1 - \vec{E}_r^2 \right)^* + \right. \\ &\quad \left. + j\omega\mu_0\alpha_m \vec{H}_1 \cdot \left(\vec{H}_g + \vec{H}_r^1 - \vec{H}_r^2 \right)^* \right\} \end{aligned} \quad (7.56)$$

Ma $\vec{E}_1 = \vec{E}_g + \vec{E}_r^1$ e quindi rimane:

$$\begin{aligned} P_{inc} - P_{rifl} &= -\frac{1}{2} \Re \left\{ j\omega\epsilon_0\alpha_e \left(\vec{E}_g + \vec{E}_r^1 \right) \cdot \left(\vec{E}_r^2 \right)^* + \right. \\ &\quad \left. - j\omega\mu_0\alpha_m \left(\vec{H}_g + \vec{H}_r^1 \right) \cdot \left(\vec{H}_r^2 \right)^* \right\} \end{aligned} \quad (7.57)$$

in quanto gli altri termini sono immaginari puri.

Allo stesso modo:

$$\begin{aligned} P_{trasm} &= -\frac{1}{2} \Re \left\{ \vec{E}_2 \cdot \vec{J}_2^* + \vec{H}_2 \cdot \vec{M}_2^* \right\} = \\ &= -\frac{1}{2} \Re \left\{ \left(\vec{E}_r^2 \right) \cdot \left[j\omega\epsilon_0\alpha_e \left(\vec{E}_g + \vec{E}_r^1 \right) \right]^* + \right. \\ &\quad \left. + \left(\vec{H}_r^2 \right) \cdot \left[-j\omega\mu_0\alpha_m \left(\vec{H}_g + \vec{H}_r^1 \right) \right]^* \right\} = \\ &= -\frac{1}{2} \Re \left[-j\omega\epsilon_0\alpha_e \left(\vec{E}_r^2 \right) \cdot \left(\vec{E}_g + \vec{E}_r^1 \right)^* + \right. \\ &\quad \left. + j\omega\mu_0\alpha_m \left(\vec{H}_r^2 \right) \cdot \left(\vec{H}_g + \vec{H}_r^1 \right)^* \right] \end{aligned} \quad (7.58)$$

e quindi $P_{inc} - P_{rifl} = P_{trasm}$ (le grandezze di cui si calcola la parte reale sono coniugate).

LA mancanza della conservazione di potenza nella teoria di Bethe è dovuta ai dipoli che sono in quadratura con i campi incidenti e non forniscono quindi potenza. I termini aggiuntivi dovuti al campo di reazione sono proporzionali ai dipoli e, almeno in parte, in fase con essi. L'equazione che se ne ottiene

fornisce così un dipolo non più in quadratura col campo incidente.

Ovviamente i campi di reazione sono piccoli rispetto a quelli incidenti. Quindi solo i termini in fase con i dipoli sono necessari per la conservazione della potenza. Pertanto solo questi vengono conservati. Nel caso di una guida, ad esempio, basta inserire in \vec{E}^r e \vec{H}^r solo i modi che si propagano. Si noti infine che il calcolo del campo di reazione richiede il calcolo di un campo nel punto dove c'è la sorgente. Tale campo, al contrario del campo generatore, è fortemente variabile sul foro e quindi attribuirgli un *valore* unico non è ovvio. Poiché quello che interessa è l'effetto polarizzatore del campo di reazione, si considera come campo di reazione solo la parte simmetrica del campo prodotto dal dipolo. In particolare se tale campo è simmetrico sul foro, lo si include, mentre se è antisimmetrico non contribuisce al dipolo, ovvero non viene incluso nelle (7.62).

Ad esempio, per un foro sulla parete longitudinale (vedi figura 7.13) di una guida rettangolare il campo elettrico del TE₁₀ prodotto dal dipolo viene incluso nel campo di reazione (essendo simmetrico rispetto ai due lati del foro), così come il campo magnetico longitudinale, mentre il campo magnetico trasverso, che è antisimmetrico, non contribuisce al campo di reazione.

7.9 Foro in una parete trasversa (teoria di Collin)

Riesaminiamo il caso del foro in una parete trasversa alla luce della teoria di Collin. Indichiamo con M_0 il dipolo nella zona 2, in modo che quello della zona 1 sia $-M_0$. Dalla analisi di Bethe (7.42) sappiamo che:

$$A_{10}^+ = A_{10}^- = -\sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{\pi x_0}{a} M_0 \quad (7.59)$$

e quindi:

$$M_0 = j\omega\mu_0(-\alpha_m) \left[H_g - 2\sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{\pi x_0}{a} M_0 \left(-\sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{\pi x_0}{a} \right) \frac{1}{Z_{10}} \right] \quad (7.60)$$

da cui segue:

$$M_0 = \frac{M_0^{Bethe}}{1 - 2\frac{j\omega\mu_0}{Z_{10}}\alpha_m \frac{2}{ab} \sin^2 \frac{\pi x_0}{a}} \quad (7.61)$$

e:

$$\Gamma = -1 + \frac{\frac{4j\beta\alpha_m}{ab} \sin^2 \frac{\pi x_0}{a}}{1 - 2j\beta\alpha_m \frac{2}{ab} \sin^2 \frac{\pi x_0}{a}} = \frac{-1}{1 - \frac{4j\beta\alpha_m}{ab} \sin^2 \frac{\pi x_0}{a}} \quad (7.62)$$

e quindi il circuito equivalente corretto è quello di una ammettenza:

$$Y = \frac{2}{\frac{4j\beta\alpha_m}{ab} \sin^2 \frac{\pi x_0}{a}} = -j \frac{ab}{2\beta\alpha_m} \sin^{-2} \frac{\pi x_0}{a} \quad (7.63)$$

che coincide con quella ricavata dalla teoria di Bethe, ma utilizzando il modello della ammettenza in parallelo.

Notiamo anche che se sviluppiamo la (7.62) in serie di Taylor rispetto ad α_m , ritroviamo, al primo ordine, la (7.43) della teoria di Bethe. Appare da questo che la teoria di Bethe è una approssimazione di ordine più basso di quella di Collin.

7.10 Foro in una parete longitudinale (teoria di Collin)

In questo caso, rispetto alla teoria di Bethe, occorrono anche i campi nella guida 1. Se indichiamo con A^+ e A^- le relative ampiezze, troviamo immediatamente:

$$\begin{cases} A^+ = -B^+ \\ A^- = -B^- \end{cases} \quad (7.64)$$

poichè le sorgenti sono opposte e la struttura è simmetrica.

Sorge però il problema di calcolare i campi sul dipolo, in quanto alcuni campi sono discontinui. In tal caso occorre conservare solo i campi pari. Quindi:

$$\begin{cases} E_y = (B^+ + B^-) \sqrt{\frac{2}{ab}} \cos \frac{\pi x_0}{a} \\ H_x = (B^+ + B^-) \left[-\sqrt{\frac{2}{ab}} \cos \frac{\pi x_0}{a} \right] \frac{1}{Z_{10}} \\ E_y = (B^+ + B^-) \left[j \frac{\pi}{\omega\mu a} \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{\pi x_0}{a} \right] \end{cases} \quad (7.65)$$

Il doppio di tali campi va sottratto dai campi incidenti.

$$\begin{aligned} P &= j\omega\epsilon_0\alpha_e \left\{ V^+ \sqrt{\frac{2}{ab}} \cos \frac{\pi x_0}{a} - 2\sqrt{\frac{2}{ab}} \cos \frac{\pi x_0}{a} \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \left[-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{ab}} \left(Z_{10} \cos \frac{\pi x_0}{a} P - j \frac{\pi Z_{10}}{\omega\mu a} \sin \frac{\pi x_0}{a} M_z \right) \right] \right\} \quad (7.66) \\ M_z &= j\omega\mu(-\alpha_m) \left\{ V + j \frac{\pi}{\omega\mu a} \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{\pi x_0}{a} - 2\sqrt{\frac{2}{ab}} j \frac{\pi}{\omega\mu a} \sin \frac{\pi x_0}{a} \cdot \right. \end{aligned}$$

$$\cdot \left[-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{ab}} \left(Z_{10} \cos \frac{\pi x_0}{a} P - j \frac{\pi Z_{10}}{\omega \mu a} \sin \frac{\pi x_0}{a} M_z \right) \right] \} \quad (7.67)$$

$$M_x = j\omega\mu(-\alpha_m) \left\{ -\frac{1}{Z_{10}} v^+ \sqrt{\frac{2}{ab}} \cos \frac{\pi x_0}{a} - 2 \left(-\sqrt{\frac{2}{ab}} \cos \frac{\pi x_0}{a} \frac{1}{Z_{10}} \right) \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{ab}} \left(-\cos \frac{\pi x_0}{a} M_x \right) \right] \right\} \quad (7.68)$$

Si ha quindi un sistema lineare. Una volta risolto si inseriscono i risultati in B^- e B^+ della teoria di Bethe per ottenere la soluzione.

Se per semplicità poniamo $x_0 = 0$, allora:

$$\begin{cases} M_z = 0 \\ M_x = \frac{j\omega\mu\alpha_m \frac{V^+}{Z_{10}} \sqrt{\frac{2}{ab}}}{1 + \frac{2}{ab} j\omega\mu\alpha_m \frac{1}{Z_{10}}} = \frac{j\beta\alpha_m \sqrt{\frac{2}{ab}} V^+}{1 + \frac{2j\beta\alpha_m}{ab}} \\ P = \frac{j\omega\epsilon\alpha_e V^+ \sqrt{\frac{2}{ab}}}{1 - j\omega\epsilon_0\alpha_e \frac{2}{ab} Z_{10}} \end{cases} \quad (7.69)$$

CAPITOLO 8

Cavit  resonanti

Un volume V vuoto (o riempito di un dielettrico senza perdite) e delimitato da conduttore perfetto (nel seguito saranno considerati quelli elettrici per semplicit ) costituisce un risonatore elettromagnetico, ovvero una struttura in grado di supportare soluzioni libere persistenti non nulle delle equazioni di Maxwell (cavit  ideale).

Nella realt  non esistono cavit  ideali, ma sono sempre presenti perdite nelle pareti e fori di accoppiamento (attraverso i quali pu  fluire energia elettromagnetica) e pertanto le soluzioni libere sono sempre smorzate (cavit  reale).

Tuttavia nelle cavit  reali lo smorzamento   piccolo rispetto al periodo e pertanto il loro funzionamento   spesso simile a quello delle cavit  ideali. Pertanto iniziamo lo studio di queste ultime, inserendo poi come perturbazione l'effetto delle perdite, studio che procede in stretta analogia con quello delle guide.

In una cavit  priva di sorgenti, sia \vec{e} che \vec{h} sono solenoidali e anzi $\vec{i}_n \times \vec{e}|_S = 0$, dove $S = \partial V$. $\forall t$ possiamo sviluppare il campo elettrico in una serie di Fourier generalizzata rispetto ad un opportuno sistema di base \vec{e}_n :

$$\vec{e}(t) = \sum V_n(t) \vec{e}_n \quad (8.1)$$

con $\nabla \cdot \vec{e}_n = 0$, $\vec{i}_n \times \vec{e}|_S = 0$.

Per analogia utilizziamo come base le autofunzioni del laplaciano:

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{e}_n + k_n^2 \vec{e}_n = 0 \\ \nabla \cdot \vec{e}_n = 0 \\ \vec{i}_n \times \vec{e}_n|_S = 0 \end{cases} \quad (8.2)$$

che costituiscono un sistema ortogonale (la dimostrazione   identica a quella per le guide) completo.

Gli autovalori sono reali positivi (e pertanto anche gli autovettori possono essere scelti reali). Se in particolare il contorno della cavità è connesso, allora $k_n^2 > 0$.

Le serie di Fourier possono essere integrate spazialmente termine a termine ma non derivate in quanto possono addirittura non convergere puntualmente. Viceversa le operazioni rispetto a t possono essere eseguite sulla serie se possono esserlo sulla somma della serie. Ad esempio, pur essendo $\nabla \cdot \vec{e}_n = 0$, $\forall n$, non è automatico che $\nabla \cdot \vec{e} = 0$ ma è richiesta la continuità della componente normale della somma \vec{e} anche sulle pareti. Se vi sono dipoli elettrici normali non si può derivare termine a termine ma in tal caso \vec{e} non può essere solenoidale ovunque.

Per quanto riguarda \vec{h} poniamo:

$$\begin{cases} \vec{h}_n = \frac{1}{k_n} \nabla \times \vec{e}_n \\ \vec{h} = \sum I_n^+ \vec{h}_n \end{cases} \quad (8.3)$$

in quanto l'insieme $\nabla \times \vec{e}_n$ è ortogonale e completo. Inoltre, essendo $\nabla \cdot \vec{h}_n = 0$, segue $\nabla \cdot \vec{h} = 0$.

Restano da determinare le equazioni per $V_n(t)$ e $I_n(t)$, sostituendo \vec{e} e \vec{h} nelle equazioni di Maxwell. Poichè siamo interessati sia al comportamento transitorio che a quello a regime, utilizziamo le equazioni nel dominio della variabile di Laplace s . Dalla prima equazione di Maxwell:

$$-\mu_0 \sum s I_n \vec{h}_n = \nabla \times \sum V_n \vec{e}_n \quad (8.4)$$

in cui non si può, a secondo membro, derivare termine a termine. Moltiplichiamo per \vec{h}_m e integriamo:

$$\begin{aligned} -\mu_0 s I_m &= \int_V \left(\vec{h}_m \cdot \nabla \times \sum V_n \vec{e}_n \right) dV = \\ &= \int_S \left(\sum V_n \vec{e}_n \right) \times \vec{h}_m \cdot d\vec{S} + \int_V \sum V_n \vec{e}_n \cdot \nabla \times \vec{h}_m dV \end{aligned} \quad (8.5)$$

Il primo integrale vale $\int_S \vec{E} \times \vec{h}_m \cdot d\vec{S}$ mentre il secondo è $\sum V_n \int_V \vec{e}_n \cdot \nabla \times \vec{h}_m dV = \sum V_n \int_S \left[\nabla \cdot (\vec{h}_m \times \vec{e}_n) + \vec{h}_m \cdot \nabla \times \vec{e}_n \right] dS = \sum V_n k_n \int_S \vec{h}_m \cdot$

$\vec{h}_n dS = k_n V_n$ poichè \vec{e}_n ha componente tangenziale nulla sulle pareti (al contrario di \vec{E}). Procedendo analogamente, per la seconda si trova:

$$\begin{cases} -\mu_0 s I_n - k_n V_n = \int_S \vec{E} \times \vec{h}_n \cdot d\vec{S} \\ k_n I_n - \epsilon_0 s V_n = \int_S \vec{e}_n \times \vec{H} \cdot d\vec{S} \end{cases} \quad (8.6)$$

che sono le equazioni base per l'evoluzione libera del modo n-esimo nella cavità (ideale o reale). E' immediato che, per cavità ideale, il secondo membro è nullo in entrambe le equazioni (anzi nella seconda lo è sempre, a meno di modifiche nella geometria, e non verrà quindi più considerato; è importante nel caso di accoppiamento tramite spire o dipoli). L'evoluzione libera del modo n è quindi un'esponenziale non smorzata, con pulsazione data dalla equazione di dispersione $\omega_n = \frac{k_n}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ e dipende quindi solo dalla forma della cavità.

L'ampiezza della oscillazione dipende poi da $V_n(0)$ e $I_n(0)$, ovvero dalle componenti, lungo \vec{e}_n e \vec{h}_n , di $\vec{e}(0)$ e $\vec{h}(0)$ (condizioni iniziali).

8.1 Cavità ideali nel dominio della frequenza

Abbiamo visto che in una cavità ideale sono possibili una infinità sommabile di modi di risonanza (quello a frequenza più bassa è detto fondamentale), e che le ampiezze di campo elettrico e magnetico di questi modi si comportano come tensione e corrente di un circuito risonante a costanti concentrate (ovvero come un oscillatore armonico). Tale analogia è utile per comprendere il comportamento di una cavità risonante. Il calcolo di k_n^2 si ottiene risolvendo l'equazione $\nabla^2 \vec{e} + k_n^2 \vec{e} = 0$, $\nabla \cdot \vec{e} = 0$, $\vec{e} \times \vec{i}_n \Big|_S = 0$ e cercando soluzioni non nulle. Questa equazione è nient'altro che quella che consente di calcolare il campo nella cavità nel dominio della frequenza, alla frequenza ω_n . Pertanto nel dominio della frequenza, in una cavità libera, possono aversi campi solo alle frequenze di risonanza (allora il campo non è unico). Per determinare le frequenze di risonanza occorre allora determinare per quali frequenze vi è campo in cavità. Per cavità ottenute troncando una guida d'onda il calcolo può, più facilmente, essere eseguito sulla linea equivalente (il campo può essere sviluppato in serie di autofunzioni); inoltre gli autovettori si ottengono, previa normalizzazione sul volume, dai campi in guida (inoltre, scelta una direzione di propagazione, si ottengono tutti gli autovettori; si noti che per modi TE è anche possibile avere $V = \text{cost}$ e $I = 0$, e per i modi TM $V = 0$

e $I = \text{cost}$). I coefficienti di espansione sono ora soluzione di:

$$\begin{cases} -j\omega_n\mu_0 I_n - k_n V_n = 0 \\ k_n I_n - j\omega_n\epsilon_0 V_n = 0 \end{cases} \quad (8.7)$$

soluzioni che esistono solo se $\omega_n^2\epsilon_0\mu_0 = k_n^2$ e allora non sono uniche, e soddisfanno la relazione $V_n = -j\frac{\omega_n\mu_0}{k_n}I_n = -j\zeta I_n$. Quindi campo elettrico e magnetico sono ovunque in quadratura.

Notiamo infine che dal teorema di Poynting segue:

$$\int_V \frac{1}{4}\epsilon_0 |E|^2 dV = \int_V \frac{1}{4}\mu_0 |H|^2 dV \quad (8.8)$$

ovvero le energie (o pseudo-energie) elettrica e magnetica in tutto il risuonatore sono uguali. In particolare la normalizzazione dei modi è tale che:

$$W_{tot} = 2 \cdot \frac{1}{4}\epsilon_0 |V_n|^2 = 2 \cdot \frac{1}{4}\mu_0 |I_n|^2 \quad (8.9)$$

8.2 Risuonatore coassiale

Il calcolo di frequenze e modi di risonanza può essere ottenuto a partire dalla linea di trasmissione equivalente (figure 8.1, 8.2). L'andamento del campo



Figura 8.1: Cavità risonante

elettrico trasversale è $\vec{E}_t = V(z)\vec{e}(t)$ dove, con l'asse z come in figura, $V(z) = V(0)\cos k_z z - jZ_0 I(0)\sin k_z z$. Le condizioni al contorno $V(0) = V(\ell) = 0$ impongono $\sin k_z \ell = 0$, ovvero:

$$k_z \ell = p\pi \Rightarrow k_z = \frac{p\pi}{\ell} \quad \text{con } p > 0 \text{ intero} \quad (8.10)$$

In termini di ω si ha $\omega^2 = c^2 k^2 = c^2(k_t^2 + k_z^2) = c^2 \left[k_{t_{nm}}^2 + \left(\frac{p\pi}{\ell}\right)^2 \right]$. La frequenza fondamentale di risonanza corrisponde quindi al modo col k_t più piccolo.

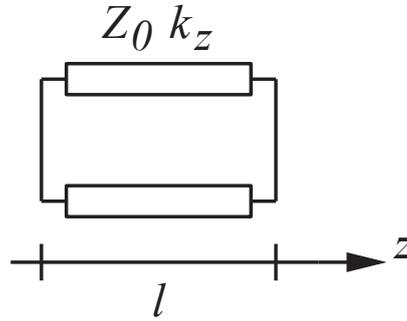


Figura 8.2: Linea di trasmissione equivalente

I campi sono $\vec{e}_1 = A \frac{1}{r} \sin \frac{\pi r}{l} \vec{i}_r$ con A tale che $A^2 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} r dr \int_0^l \sin^2 \frac{\pi z}{l} dz = 1$, ovvero $A^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\log \frac{R_2}{R_1}} \frac{2}{l}$, mentre $\vec{h}_1 = \frac{1}{k_1} \nabla \times \vec{e}_1$, automaticamente normalizzato.

8.3 Il metodo della risonanza longitudinale

Il calcolo diretto degli autovalori e autofunzioni di ∇^2 può essere abbastanza complesso. Esiste tuttavia un metodo che consente di scrivere rapidamente “l’equazione di dispersione”, ovvero l’equazione che ha per soluzioni le frequenze di risonanza, almeno per le risonanze riconducibili a linee di trasmissione. Abbiamo visto che la soluzione libera in un risonatore è $\vec{e}(t) = \sum V_n(t) \vec{e}_n$ e corrisponde ad opportune condizioni iniziali. Tale problema è ovviamente equivalente ad un problema di soluzione forzata, con forzamento impulsivo. Pertanto ogni termine della trasformata di Laplace di $\vec{e}(t)$, che vale (si ricordi la forma delle soluzioni libere per V_n e I_n):

$$\vec{E}(s) = \sum \frac{a_n s + b_n}{s^2 + \omega_n^2} \vec{e}_n \quad (8.11)$$

che nel suo complesso costituisce la soluzione libera, è la componente n -esima della funzione di trasferimento (a meno dei valori di a_n e b_n). Da tale rappresentazione si vede una proprietà delle soluzioni risonanti: se il forzamento è una sorgente a frequenza ω_n , il corrispondente termine cresce linearmente con t e la sua soluzione a regime è infinita. Pertanto le frequenze di risonanza si possono ottenere come le frequenze, nel dominio della frequenza, per cui la risposta è infinita. Sulla linea di trasmissione equivalente tale criterio è di applicazione immediata. Si consideri la sezione AA' della linea (figura 8.3). Se applichiamo in serie un generatore V_G , si ha una corrente pari a $\frac{V_G}{\overline{Z} + \overline{Z}}$, essendo \overline{Z} e \overline{Z} le impedenze di ingresso delle due parti della linea, viste da

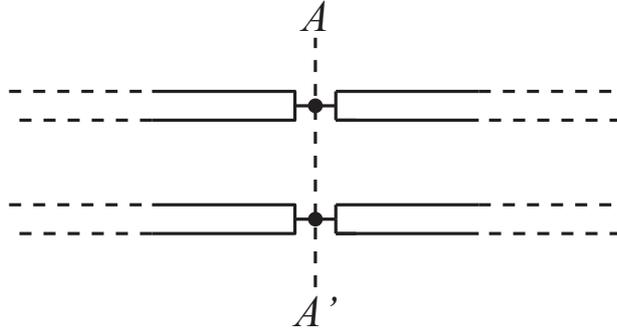


Figura 8.3: Linea di trasmissione equivalente

AA' . Si vede che tali impedenze sono definite dalla convenzione dell'utilizzatore e prescindono dalla scelta del riferimento.

Analogamente collegando un generatore di corrente I_G in parallelo si ha una tensione $\frac{I_G}{\overleftarrow{Y} + \overrightarrow{Y}}$. Le frequenze di risonanza sono quindi quelle per cui:

$$\overleftarrow{Z} + \overrightarrow{Z} = 0 \quad \text{oppure} \quad \overleftarrow{Y} + \overrightarrow{Y} = 0 \quad (8.12)$$

che prendono il nome di condizioni di risonanza longitudinale. Si noti che le due condizioni sono in genere equivalenti. Se infatti sia \overleftarrow{Z} e sia \overrightarrow{Z} sono diverse da zero allora la prima condizione equivale a:

$$0 = \frac{1}{\overleftarrow{Y}} + \frac{1}{\overrightarrow{Y}} = \frac{\overleftarrow{Y} + \overrightarrow{Y}}{\overleftarrow{Y} \cdot \overrightarrow{Y}} \Rightarrow \overleftarrow{Y} + \overrightarrow{Y} = 0 \quad (8.13)$$

e viceversa.

Alle frequenze per cui almeno una delle \overleftarrow{Z} , \overrightarrow{Z} è nulla la condizione sulle ammettenze non può essere verificata. Resta il caso in cui entrambe le \overleftarrow{Z} , \overrightarrow{Z} sono infinite. In tal caso è necessario considerare l'altra equazione che, a quella frequenza, ha uno zero.

Notiamo infine che la sezione AA' può essere scelta ad arbitrio (si veda in proposito la dimostrazione negli appunti di propagazione).

8.4 Cavità reali

Anche nelle cavità reali il campo può essere espanso in serie di Fourier, che però ora non converge fino al bordo in quanto la componente tangenziale del campo elettrico è diversa da zero. Inoltre tale rappresentazione è utile solo

se le perdite sono piccole. Infatti solo in tal caso ad ogni frequenza si eccita al più un solo modo (della cavità ideale). Inoltre l'accoppiamento tra i modi, dovuto alle perdite, è piccolo solo se le perdite sono piccole.

Torniamo alle equazioni del modo n in cavità:

$$\begin{cases} -s\mu_0 I_n - k_n V_n = \int_S \vec{E} \times \vec{h}_n \cdot d\vec{S} \\ k_n I_n - s\epsilon_0 V_n = 0 \end{cases} \quad (8.14)$$

Il campo \vec{E} sulle pareti può essere diverso da zero a causa della conducibilità finita o a causa di aperture. In entrambi i casi tale campo contiene un contributo dipendente da I_n e uno indipendente (nullo nel caso di perdite nelle pareti). Quello dipendente da I_n modifica i poli della risposta e quindi il comportamento della cavità, mentre l'altro è il termine di sorgente.

Cominciamo a considerare il caso di perdite nelle pareti assumendo la condizione di Leontovich:

$$\vec{E}_{tan} = \frac{1+j}{\sigma\delta} \vec{H} \times \vec{i}_n \quad (8.15)$$

essendo σ e δ conducibilità e profondità di penetrazione delle pareti. Come già detto il primo effetto è l'accoppiamento tra i modi. Tuttavia è ragionevole che tale accoppiamento (che è la potenza mutua che fluisce nelle pareti) sia piccolo rispetto alla energia dei modi e quindi possiamo assumere (e lo faremo sempre nel seguito) risonanze indipendenti. Ciò significa che se ω è prossimo a ω_n , allora ha interesse solo il modo n e per esso $\vec{H} \simeq I_n \vec{h}_n$. Il termine di forzamento delle equazioni del modo n diventa allora:

$$\frac{1+j}{\sigma\delta} \int_S \left(I_n \vec{h}_n \times \vec{i}_n \right) \times \vec{h}_n \cdot d\vec{S} = \frac{1+j}{\sigma\delta} I_n \int_S |h_n|^2 dS \quad (8.16)$$

Conviene legare il coefficiente di I_n alla potenza dissipata nelle pareti dal modo n :

$$\begin{aligned} P_{dn} &= \frac{1}{2\sigma\delta} \int_S \left(I_n \vec{h}_n \times \vec{i}_n \right) \times I_n^* \vec{h}_n \cdot d\vec{S} = \\ &= \frac{1}{2\sigma\delta} |I_n|^2 \int_S |h_n|^2 dS = \frac{1}{2\sigma\delta} \frac{2W_n}{\mu_0} \int_S |h_n|^2 dS \end{aligned} \quad (8.17)$$

essendo W_n l'energia immagazzinata. Si ottiene quindi come forzamento $(1+j)\mu_0 I_n \frac{P_{dn}}{W_n}$. Il rapporto $\frac{P_{dn}}{W_n}$ è dimensionalmente una frequenza. Il suo significato segue da:

$$P_{dn} = -\frac{dW_n}{dt} \Rightarrow -\frac{dW_n}{W_n} = \frac{P_{dn}}{W_n} dt = \frac{dt}{\tau_n} \quad (8.18)$$

dove τ_n è la costante di tempo del decadimento di energia del modo n . Conviene adimensionalizzare τ_n introducendo il fattore di merito $Q_n = \omega_n \tau_n$ che è una misura adimensionale delle perdite relative al modo n . Si trova:

$$Q_n = \omega_n \frac{W_n}{P_{dn}} \quad (8.19)$$

dove ω_n e W_n sono calcolati per la cavità ideale e P_{dn} sui campi della medesima. E' evidente che al crescere di Q_n migliorano le approssimazioni introdotte. Le equazioni dei modi diventano:

$$\begin{cases} -s\mu_0 I_n - k_n V_n = (1+j) \frac{\omega_n \mu_0}{Q_n} I_n \\ k_n I_n - s\epsilon_0 V_n = 0 \end{cases} \quad (8.20)$$

L'equazione di dispersione ora cambia e diventa:

$$-s\epsilon_0 \left[-s\mu_0 - (1+j) \frac{\omega_n \mu_0}{Q_n} \right] + k_n^2 = 0 \Rightarrow s^2 + (1+j) \frac{\omega_n}{Q_n} s + \omega_n^2 = 0 \quad (8.21)$$

Finora abbiamo considerato dielettrici ideali, ma la presenza di (piccole) perdite nel dielettrico può essere tenuta in conto molto facilmente sostituendo ovunque ϵ_0 con $\epsilon_0(1-jx)$, con $x > 0$.

L'equazione di dispersione in presenza di perdite sia sulle pareti sia nel dielettrico diventa quindi:

$$s^2 + \frac{(1+j)\omega_n s}{Q_n} + \frac{\omega_n^2}{1-jx} = 0 \quad (8.22)$$

con soluzione:

$$s = -\frac{(1+j)\omega_n}{2Q_n} \mp \sqrt{\frac{2j\omega_n^2}{4Q_n^2} - \frac{\omega_n^2}{1-jx}} = -\frac{(1+j)\omega_n}{2Q_n} \mp (j\omega_n) \sqrt{\frac{1}{1-jx} - \frac{2j}{Q_n^2}} \quad (8.23)$$

Se $x \ll 1$ (piccole perdite nel dielettrico) allora:

$$\sqrt{\frac{1}{1-jx} - \frac{2j}{Q_n^2}} \simeq \sqrt{1+j \left(x - \frac{2}{Q_n^2} \right)} \simeq 1 + j\frac{x}{2} - j\frac{1}{Q_n^2} \quad (8.24)$$

e sostituendo (prendiamo solo il segno positivo):

$$s \simeq j\omega_n - \frac{(1+j)\omega_n}{2Q_n} - \frac{x\omega_n}{2} + \frac{\omega_n}{Q_n^2} \simeq j \left[\omega_n - \frac{\omega_n}{2Q_n} \right] - \omega_n \left[\frac{1}{2Q_n} + \frac{x}{2} - \frac{1}{Q_n^2} \right] \quad (8.25)$$

L'ultimo termine in parentesi quadra può essere trascurato ($Q_n \gg 1$) rispetto al primo. Si vede quindi che ci sono due effetti:

1. Una riduzione della frequenza delle oscillazioni libere, dovuta alle perdite sulle pareti.
2. Uno smorzamento delle oscillazioni, dovuto ad entrambe le perdite.

Può essere utile introdurre un fattore di merito dovuto alle sole perdite nel dielettrico¹:

$$Q_n^d = \frac{1}{x} = \frac{\Re(\epsilon_{eq})}{\Im(\epsilon_{eq})} \quad (8.26)$$

e un fattore di merito totale:

$$\frac{1}{Q_n^T} = \frac{1}{Q_n} + \frac{1}{Q_n^d} \quad (8.27)$$

L'ampiezza del campo in cavità varia come $e^{-\frac{\omega_n}{2Q_n^T}}$, ovvero $\frac{Q_n^T}{\omega_n}$ è la costante di tempo di decadimento della energia in cavità. Si noti esplicitamente che i fattori di merito (se le perdite sono piccole) si calcolano sulla cavità ideale.

La riduzione della frequenza di risonanza a causa della conducibilità finita σ delle pareti può essere facilmente giustificata. Una stima molto grossolana del fattore di merito è

$$Q_n = \omega_n \frac{\frac{1}{2}\mu_0 |I_n|^2 V}{\frac{1}{2}\sigma |E_p|^2 S \delta}$$

essendo V ed S volume e superficie della cavità, δ la profondità di penetrazione nelle pareti ed $|E_p|$ il campo elettrico tangente alle pareti stesse. Essendo

$$|E_p|^2 = \left(\frac{1}{\sigma\delta}\right)^2 |I_n|^2 = \frac{\omega_n \mu_0}{2\sigma}$$

si ottiene

$$Q_n = \frac{V}{2S\delta}$$

La riduzione percentuale della frequenza di risonanza vale

$$\frac{\Delta\omega_n}{\omega_n} = \frac{1}{2Q_n} = \frac{S\delta}{V}$$

Poichè il campo penetra nella parete per una profondità δ , il prodotto $S\delta$ rappresenta l'incremento di volume della cavità a causa delle perdite sulle pareti. Quindi la riduzione della frequenza di risonanza è sostanzialmente proporzionale all'incremento di volume della cavità stessa.

¹Si può dimostrare che $Q_n^d = \omega_n \frac{W_{em}}{P_{dielettrico}^{dm}}$.

8.5 Cavità alimentate

L'analisi di una cavità alimentata richiede la considerazione anche della struttura di alimentazione, la quale carica la cavità medesima (analogamente a quanto visto nel corso di propagazione per i risuonatori in linea di trasmissione). Possiamo comunque suddividere il problema in due parti ed occuparci preliminarmente dell'effetto di una corrente (vera o equivalente) nella cavità chiusa come sorgente. Supponiamo allora di avere, su una parte S' della superficie totale della cavità, una corrente magnetica \vec{M}^2 . Le equazioni per il modo n sono:

$$\begin{cases} -s\mu_0 I_n - k_n V_n = \int_{S-S'} \vec{E}^L \times \vec{h}_m \cdot d\vec{S} + \int_{S'} \vec{E}^M \times \vec{h}_n \cdot d\vec{S} \\ k_n I_n - s\epsilon_0 V_n = 0 \end{cases} \quad (8.28)$$

in cui il vettore $d\vec{S} = \vec{i}_n dS$ esce dal risuonatore.

Su $S - S'$ è presente il campo elettrico \vec{E}^L (dato dalla condizione di Leontovich) del conduttore non perfetto, mentre su S' risulta:

$$\vec{E}_{tan} = \vec{E}_{tan}^M + \vec{E}_{tan}^L \quad (8.29)$$

dove \vec{E}_{tan}^M è il termine di forzamento, legato alla corrente magnetica \vec{M} , tramite la normale **entrante** $-\vec{i}_n$. Riusulta quindi

$$\vec{E}_{tan} = -\vec{i}_n \times \vec{M} + \vec{E}_{tan}^L \quad (8.30)$$

L'integrale di \vec{E}^L vale, assumendo eccitazione monomodale):

$$(1 + j) \frac{\mu_0 \omega_n}{Q_n} I_n \quad (8.31)$$

dove Q_n è il fattore di merito relativo alla conducibilità finita. Il termine di forzamento vale invece:

$$\int_{S'} \vec{E} \times \vec{h}_n \cdot \vec{i}_n dS = \int_{S'} (-\vec{i}_n \times \vec{M}) \cdot (\vec{h}_n \times \vec{i}_n) dS = \int_{S'} \vec{M} \cdot \vec{h}_n dS \quad (8.32)$$

in quanto di \vec{h}_n pesa la sola parte ortogonale a \vec{i}_n . Indicato con G_n tale ultimo integrale, si trova allora, per il modo n :

$$\begin{cases} -\mu_0 \left[j\omega + (1 + j) \frac{\omega_n}{Q_n} \right] I_n - k_n V_n = G_n \\ k_n I_n - j\epsilon_0 \omega V_n = 0 \end{cases} \quad (8.33)$$

²Supponiamo in questo paragrafo il dielettrico ideale. Le eventuali perdite nel dielettrico possono essere tenute in conto modificando la costante dielettrica, come nel paragrafo precedente

in cui si è sostituito $j\omega$ (frequenza di \vec{M}) ad s in quanto il forzamento fissa la frequenza di funzionamento. Risolvendo si trova (il determinante del sistema è $-\epsilon_0\mu_0 D_n(\omega)$):

$$\begin{cases} V_n = \frac{k_n G_n}{D_n(\omega)} c^2 \\ I_n = \frac{j\omega\epsilon_0}{k_n} V_n = \frac{j\omega G_n}{\mu_0 D_n(\omega)} \\ D_n(\omega) = -j\omega \left[j\omega + \frac{(1+j)\omega_n}{Q_n} \right] - \omega_n^2 \end{cases} \quad (8.34)$$

La risposta dipende quindi da $D_n(\omega)$, che possiamo esprimere come:

$$D_n(\omega) = \omega^2 + (1-j)\frac{\omega\omega_n}{Q_n} - \omega_n^2 = (\omega - \omega_n)(\omega + \omega_n) + \frac{\omega\omega_n}{Q_n} - j\frac{\omega\omega_n}{Q_n} \quad (8.35)$$

Se ci limitiamo a considerare la risposta vicino a ω_n allora:

$$D_n(\omega) \simeq 2\omega_n(\omega - \omega_n) + \frac{\omega_n^2}{Q_n} - j\frac{\omega_n^2}{Q_n} = 2\omega_n \left[\omega - \left(\omega_n - \frac{\omega_n}{2Q_n} \right) - j\frac{\omega_n}{2Q_n} \right] \quad (8.36)$$

Il picco della risposta si ha ad una frequenza pari a:

$$\bar{\omega}_n = \omega_n \left[1 - \frac{1}{2Q_n} \right] \quad (8.37)$$

vicina alla frequenza di risonanza libera e pari alla frequenza di risonanza calcolata tenendo conto anche delle perdite. Posto $\bar{D}_n(\omega) = \omega - \bar{\omega}_n - j\frac{\omega_n}{2Q_n}$, si trova:

$$\begin{cases} V_n = \frac{c}{2} \frac{G_n}{\bar{D}_n(\omega)} \\ I_n = j \frac{G_n}{2\mu_0 \bar{D}_n(\omega)} \\ D_n(\omega) = 2\omega_n \bar{D}_n(\omega) \end{cases} \quad (8.38)$$

La risposta è ovviamente risonante, con un picco, per $\omega = \bar{\omega}_n$, dato da:

$$|\bar{D}_n(\omega_n)| = \frac{\omega_n}{2Q_n} \quad (8.39)$$

La frequenza ω_3 per cui la risposta scende di 3dB si trova imponendo:

$$|\bar{D}_n(\omega_3)|^2 = 2 |\bar{D}_n(\omega_n)|^2 = 2 \left(\frac{\omega_n}{2Q_n} \right)^2 \quad (8.40)$$

ed è facile verificare che soddisfa la relazione:

$$(\omega_3 - \omega_n)^2 = \left(\frac{\omega_n}{2Q_n} \right)^2 \quad (8.41)$$

ovvero:

$$\omega_3 = \omega_n \mp \frac{\omega_n}{2Q_n} \quad (8.42)$$

La lunghezza totale di banda a 3dB è quindi $\frac{\omega_n}{Q_n}$ e quella relativa:

$$\frac{\Delta f}{f_n} = \frac{1}{Q_n} \quad (8.43)$$

Per $\omega = \omega_3$ la risposta è anche sfasata di $\mp \frac{\pi}{4}$ rispetto al valore per ω_n (precisamente di $-\frac{\pi}{4}$ per $\omega_3 < \omega_n$ e di $\frac{\pi}{4}$ per $\omega_3 > \omega_n$).

8.6 Accoppiamento guida-cavità tramite fori

Consideriamo una cavità rettangolare (figura 8.4) con fattore di merito pari a Q (in genere molto elevato), accoppiata tramite un foro piccolo ad una guida rettangolare di alimentazione, di dimensioni $a \times b$. Il modo della cavità è:

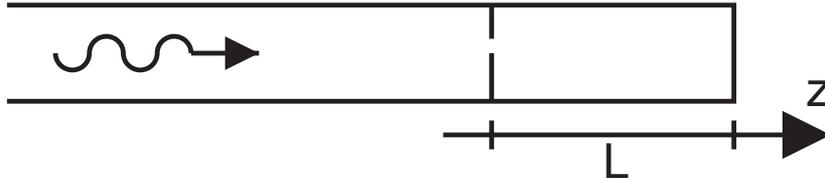


Figura 8.4: Cavità rettangolare

$$\vec{e}_n = \sqrt{\frac{4}{abL}} \sin \frac{\pi z}{L} \sin \frac{\pi x}{a} \vec{i}_y \quad (8.44)$$

con $k_n = \sqrt{\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$ e, di conseguenza:

$$\vec{h}_n = \frac{1}{k_n} \nabla \times \vec{e}_n = \frac{1}{k_n} \sqrt{\frac{4}{abL}} \left[-\frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi z}{L} \sin \frac{\pi x}{a} \vec{i}_x + \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi z}{L} \cos \frac{\pi x}{a} \vec{i}_z \right] \quad (8.45)$$

Mettiamoci ad una frequenza ω prossima a ck_n , e sia V_i l'ampiezza del TE₁₀ incidente. Sia M_0 l'ampiezza del dipolo magnetico lungo i_x nella cavità, e supponiamo, per semplicità, il foro centrato. Allora ³:

$$G_n = -M_0 \frac{1}{k_n} \sqrt{\frac{4}{abL}} \frac{\pi}{L} \quad (8.46)$$

³ M_0 non va raddoppiato per avere G_n , in quanto G_n dipende dalla corrente magnetica nella cavità chiusa.

Noto G_n si ottiene il campo magnetico in cavità, ed in particolare il campo risonante, di interesse per la teoria di Collin. Se calcolato nel foro, tale campo vale:

$$I_n \vec{h}_n = j \frac{G_n}{2\mu_0 \overline{D}_n(\omega)} \vec{h}_n = \frac{j}{2\mu_0 \overline{D}_n(\omega)} (-M_0) (-1) \left(\frac{\pi}{k_n L} \right)^2 \frac{4}{abL} \vec{i}_x \quad (8.47)$$

cui andrebbe aggiunta la componente z , che però non interessa. L'equazione per il dipolo M_0 diventa allora:

$$M_0 = j\omega\mu_0(-\alpha_m) \left[H_g + \frac{2}{ab} M_0 \frac{1}{Z_{10}} - \frac{4}{abL} \left(\frac{\pi}{k_n L} \right)^2 \frac{j}{2\mu_0 \overline{D}_n(\omega)} M_0 \right] \quad (8.48)$$

da cui:

$$M_0 = M_0^b \left\{ 1 + 2 \frac{j\omega\mu_0\alpha_m}{ab} \left[\frac{1}{Z_{10}} - \frac{2j}{2\mu_0 \overline{D}_n(\omega)} \frac{1}{L} \left(\frac{\pi}{k_n L} \right)^2 \right] \right\}^{-1} \quad (8.49)$$

dove:

$$M_0^b = -j\omega\mu_0\alpha_m \frac{2V_L}{Z_{10}} \sqrt{\frac{2}{ab}} \quad (8.50)$$

è il valore che prevederebbe la teoria di Bethe.

La presenza del fattore $\overline{D}_n(\omega)$ in M_0 produce una variazione di M_0 con la frequenza.

Poniamo:

$$M_0 = \frac{M_0^b}{1 + jA\alpha_m + \alpha_m B \frac{1}{\overline{D}_n(\omega)}} = \frac{M_0^b \overline{D}_n(\omega)}{(1 + j\alpha_m A) \overline{D}_n(\omega) + \alpha_m B} \quad (8.51)$$

con $A = \frac{2\overline{\omega}_n \mu_0}{abZ_{10}}$ e $B = \frac{2\overline{\omega}_n}{abL} \left(\frac{\pi}{k_n L} \right)^2$, avendo approssimato, in A e B , ω con $\overline{\omega}_n$. Sostituendo $\overline{D}_n(\omega)$ si ottiene infine:

$$M_0 = \frac{M_0^b \overline{D}_n(\omega)}{(\omega - \overline{\omega}_n) - j \frac{\omega_n}{2Q_n} + j\alpha_m A (\omega - \overline{\omega}_n) + \frac{\alpha_m A \omega_n}{2Q_n} + \alpha_m B} \quad (8.52)$$

L'ultimo termine è molto più grande del penultimo, che può quindi essere trascurato. M_0 ha quindi un picco alla frequenza per cui si annulla la parte reale, che è pari a:

$$\omega_r = \overline{\omega}_n - \alpha_m B \quad (8.53)$$

Essendo $\alpha_m > 0$, si ha quindi una ulteriore riduzione della frequenza cui la risposta è massima, dovuta all'accoppiamento (la cavità è in realtà più grande).

Nel terzo termine possiamo porre $\omega \simeq \omega_r$ e tale termine diventa quindi:

$$j\alpha_m A(\omega_r - \bar{\omega}_n) = j\alpha_m A(-\alpha_m B) \quad (8.54)$$

Quindi

$$M_0 \simeq \frac{M_0^b \bar{D}_n(\omega)}{\omega - (\bar{\omega}_n - \alpha_m B) - j \frac{\omega_n}{2Q_n^A}} \quad (8.55)$$

dove Q_n^A è definito da $\frac{\omega_n}{2Q_n^A} = \frac{\omega_n}{2Q_n} - \alpha_m A(-\alpha_m B)$ ⁴. Allo stesso modo anche l'ampiezza del modo eccitato in cavità risulta risonante:

$$V_n = -\frac{c}{2} \frac{G_n}{\bar{D}_n(\omega)} = \frac{\pi c}{2k_n L} \sqrt{\frac{4}{abL}} \frac{M_0^b}{\omega - (\bar{\omega}_n - \alpha_m B) - j \frac{\omega_n}{2Q_n^A}} \quad (8.56)$$

Il coefficiente di riflessione nella guida può essere calcolato come:

$$\Gamma = -1 + \frac{V_D}{V_i} \quad (8.57)$$

essendo V_D l'ampiezza del TE₁₀ prodotto dal dipolo:

$$V_D = -M_0 \sqrt{\frac{2}{ab}} \quad (8.58)$$

Sostituendo:

$$\Gamma = -1 - \sqrt{\frac{2}{ab}} \frac{M_0^b}{V_i} \frac{\bar{D}_n(\omega)}{\omega - (\bar{\omega}_n - \alpha_m B) - j \frac{\omega_n}{2Q_n^A}} \quad (8.59)$$

con:

$$\frac{M_0^b}{V_i} = -j\omega\mu_0\alpha_m \frac{2}{Z_{10}} \sqrt{\frac{2}{ab}} \quad (8.60)$$

8.7 Dimostrazioni

8.7.1 Gli autovalori del laplaciano sono reali positivi

Gli autovalori del laplaciano in una cavità sono reali positivi (e pertanto anche gli autovettori possono essere scelti reali). Infatti da $\int_V \bar{e}_n^* \cdot \nabla^2 \vec{e}_n dV =$

⁴La presenza dell'accoppiamento riduce quindi il fattore di merito del risuonatore, e pertanto allarga la banda utile.

$-k_n^2 \int_V |e_n|^2 dV$ segue che, essendo il primo membro pari a $-\int_V \vec{e}_n^* \cdot \nabla \times \nabla \times \nabla \times \vec{e}_n dV = \int_S \vec{e}_n \times \nabla \times \vec{e}_n \cdot d\vec{S} - \int_V |\nabla \times \vec{e}_n|^2 dV$, e il primo integrale nullo per le condizioni al contorno, si ha:

$$k_n^2 = \frac{\int_V |\nabla \times \vec{e}_n|^2 dV}{\int_V |e_n|^2 dV} \quad (8.61)$$

Se in particolare il contorno della cavità è connesso, allora $k_n^2 > 0$. Infatti autofunzioni con $k_n^2 = 0$ richiedono che per esse $\nabla \times \vec{e}_n = 0$ (vedi (8.61)). Allora $\vec{e}_n = -\nabla\Phi$ con $\nabla^2\Phi = 0$, essendo per costruzione $\nabla \cdot \vec{e}_n = 0$. Ma le condizioni al contorno (assenza del campo elettrico tangenziale) richiedono

$$\frac{\partial\Phi}{\partial c} = 0$$

e, se il contorno è connesso, questo implica Φ costante sul contorno. Per le proprietà delle funzioni armoniche, la Φ dovrà essere costante dappertutto. Il suo gradiente è nullo, e quindi questa non è una autofunzione.

8.7.2 Completezza dei vettori di base

Dimostriamo che l'insieme dei vettori $\nabla \times \vec{e}_n$, è ortogonale e completo. Per la ortogonalità si ha:

$$\begin{aligned} \int_V (\nabla \times \vec{e}_n) \cdot (\nabla \times \vec{e}_m) dV &= \int_S \vec{e}_n \times \nabla \times \vec{e}_m dS + \int_V \vec{e}_n \cdot \nabla \times \nabla \times \vec{e}_m dV = \\ &= - \int_V \vec{e}_n \cdot \nabla^2 \vec{e}_m dV = \\ &= k_n^2 \int_V \vec{e}_n \cdot \vec{e}_m dV = k_n^2 \delta_{nm} \end{aligned} \quad (8.62)$$

Quindi $\frac{1}{k_n} \nabla \times \vec{e}_n$ è un sistema ortogonale (oltre ad essere ben definito essendo $k_n \neq 0$). Invece, per la completezza, questa è vera solo per campi \vec{h} solenoidali. Infatti se $\int_V \vec{h} \cdot \nabla \times \vec{e}_n dV = 0, \forall n$, segue che è nullo $\int_S \vec{e}_n \times \vec{h} \cdot d\vec{S} + \int_V \vec{e}_n \cdot \nabla \times \vec{h} dV$, ovvero il solo secondo integrale, per le condizioni al contorno. Dalla completezza di \vec{e}_n segue $\nabla \times \vec{h} = 0$, ovvero $\vec{h} = -\nabla\phi$. Poichè anche $\nabla \cdot \vec{h} = 0$, si ha $\nabla^2\phi = 0$. Se le pareti sono di CEP, allora $\vec{i}_n \cdot \vec{h} = 0, \phi = \text{cost}$, e il sistema è completo (altrimenti occorre aggiungere $\nabla\phi$ alla espansione).

8.7.3 Solenoidalità del campo elettrico

Dimostriamo che il campo elettrico è solenoidale.

Consideriamo l'insieme di funzioni ψ_m costituenti un sistema completo, e calcoliamo

$$\nabla \cdot \psi_m \vec{e} = \psi_m (\nabla \cdot \vec{e}) + \nabla \psi_m \cdot \vec{e} \quad (8.63)$$

Integrando sulla cavità, e usando il teorema della divergenza, segue

$$\int_S \psi_m \vec{e} \cdot d\vec{S} = \int_V \psi_m (\nabla \cdot \vec{e}) dV + \sum V_n \int_V (\nabla \psi_m) \cdot \vec{e}_n dV \quad (8.64)$$

avendo usato la (8.1) e integrato termine a termine la serie di Fourier.

Possiamo sviluppare l'ultimo integrale come

$$\int_V (\nabla \psi_m) \cdot \vec{e}_n dV = \int_V \nabla \cdot (\psi_m \vec{e}_n) dV - \int_V \psi_m (\nabla \cdot \vec{e}_n) dV = \int_S \psi_m \vec{e}_n \cdot d\vec{S} \quad (8.65)$$

essendo $\nabla \cdot \vec{e}_n = 0$ e avendo ancora usato il teorema della divergenza.

Sostituendo (8.65) nella (8.64), e scambiando i termini, segue

$$\int_V \psi_m (\nabla \cdot \vec{e}) dV = \int_S \psi_m \vec{e} \cdot d\vec{S} - \sum V_n \int_S \psi_m \vec{e}_n \cdot d\vec{S} \quad (8.66)$$

ovvero

$$\int_V \psi_m (\nabla \cdot \vec{e}) dV = \int_S \psi_m \left[\vec{e} - \sum V_n \vec{e}_n \right] \cdot d\vec{S} = 0 \quad (8.67)$$

se la serie di Fourier (8.1) converge puntualmente sulla superficie S , per il che basta che \vec{e} sia continuo sulla superficie.

Dalla completezza delle ψ_m segue $\nabla \cdot \vec{e} = 0$.

CAPITOLO 9

Strutture guidanti inhomogenee

9.1 Modi ibridi

Nelle guide metalliche esiste una base ortonormale costituita da modi TE e TM rispetto all'asse della guida. In strutture più generali, invece, questo non è più vero in quanto (salvo casi particolari di simmetrie) i campi TE e TM non soddisfano separatamente le condizioni al contorno. I modi di tali strutture sono pertanto modi ibridi, con $E_z \neq 0$ e $H_z \neq 0$. Nel seguito ci limiteremo a considerare strutture omogenee (eventualmente solo a tratti) lungo z ¹. In tal caso i potenziali di Hertz soddisfano all'equazione delle onde:

$$\nabla^2 \begin{Bmatrix} \phi \\ \Psi \end{Bmatrix} + k^2 n^2(\vec{t}) \begin{Bmatrix} \phi \\ \Psi \end{Bmatrix} = 0 \quad (9.1)$$

dove $k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$ è costante e $n(\vec{t})$, indice di rifrazione, è costante a tratti. In ogni parte omogenea, sia ϕ che Ψ variano come onde del tipo $e^{\mp j\beta z}$, dove β è da determinare. Tuttavia il valore di β per uno stesso modo deve essere lo stesso in tutta la sezione trasversale, pena lo "scorrimento" dei campi all'interfaccia e quindi l'impossibilità di soddisfare le condizioni al contorno.

La parte variabile con \vec{t} soddisfa a:

$$\nabla_t^2 \begin{Bmatrix} \phi \\ \Psi \end{Bmatrix} + [n_i^2 k^2 - \beta^2] \begin{Bmatrix} \phi \\ \Psi \end{Bmatrix} = 0 \quad (9.2)$$

¹Non è una vera limitazione in quanto ogni struttura variabile può essere approssimata con una costante a tratti, purchè i tratti siano sufficientemente piccoli.

in ogni regione omogenea dove $n^2(\vec{t}) = n_i^2$, e le condizioni al contorno sui campi:

$$\begin{cases} \vec{E}_t = \frac{1}{j\omega n_i^2 \epsilon} (-j\beta) \nabla_t \Psi - \nabla_t \phi \times \vec{i}_z \\ E_z = -\frac{1}{j\omega n_i^2 \epsilon} \nabla_t^2 \Psi = -\frac{n_i^2 k^2 - \beta^2}{j\omega n_i^2 \epsilon} \Psi \\ \vec{H}_t = \nabla_t \Psi \times \vec{i}_z + \frac{1}{j\omega \mu} (-j\beta) \nabla_t \phi \\ H_z = -\frac{1}{j\omega \mu} \nabla_t^2 \phi = -\frac{n_i^2 k^2 - \beta^2}{j\omega \mu} \phi \end{cases} \quad (9.3)$$

forniranno l'equazione di dispersione, la cui soluzione è $\beta = \beta(\omega)$.

In particolare tali condizioni sono:

1. Continuità di $E_z \Rightarrow$ Continuità di $\frac{n_i^2 k^2 - \beta^2}{n_i^2} \Psi = \frac{1}{n_i^2} \nabla_t^2 \Psi$.
2. Continuità di $H_z \Rightarrow$ Continuità di $n_i^2 k^2 - \beta^2 \phi = \nabla_t^2 \phi$.
3. Continuità (figura 9.1) di $\vec{i}_c \cdot \vec{E}_t \Rightarrow$ Continuità di $-\frac{\beta}{\omega \epsilon n_i^2} \frac{\partial \Psi}{\partial c} + \frac{\partial \phi}{\partial n}$.
4. Continuità di $\vec{i}_c \cdot \vec{H}_t \Rightarrow$ Continuità di $\frac{\partial \Psi}{\partial n} + \frac{\beta}{\omega \mu} \frac{\partial \phi}{\partial c}$.

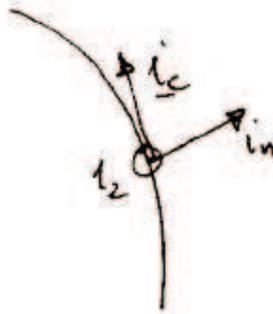


Figura 9.1: Vettori rispetto alla superficie della guida

Ovviamente su un CEP si deve avere $\Psi = 0$, $-\frac{\beta}{\omega \epsilon n_i^2} \frac{\partial \Psi}{\partial c} + \frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0$ (con n_i^2 indice del materiale a contatto col CEP). Inoltre all'infinito è richiesto che Ψ e ϕ siano $o\left(\frac{1}{r}\right)$ in modo da avere modi confinati.

Si hanno quindi in generale quattro condizioni al contorno per ogni interfaccia. D'altra parte la soluzione generale per ϕ e Ψ dipende da quattro costanti per ogni zona omogenea (due per ϕ , due per Ψ) e il sistema è determinato. Nel caso di modi TE o TM puri si avrebbero due costanti e tre condizioni

(un campo longitudinale è nullo) e quindi un sistema senza soluzioni, a meno che i campi non siano costanti lungo il contorno $\frac{\partial}{\partial c} = 0$. In tal caso si hanno due equazioni e due incognite, e quindi una soluzione.

Modi TE o TM sono quindi possibili ma devono essere costanti rispetto a c . Notiamo infine che il calcolo di β e del campo è in genere tutto quello che interessa in quanto per modi ibridi l'impedenza non ha più neanche il significato limitato che aveva per i modi TE o TM.

9.2 Piastra dielettrica

Vogliamo determinare i campi associati ad una piastra dielettrica (figura 9.2) di spessore h , poggiata su di un CEP. Se ci limitiamo a campi indipendenti

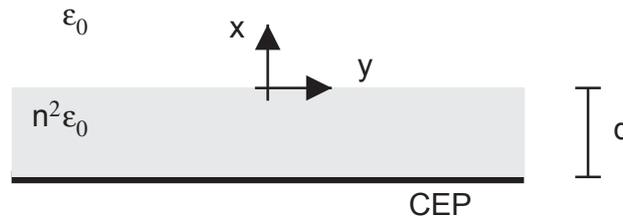


Figura 9.2: Piastra dielettrica

da y sono possibili modi TE o TM puri. Consideriamo in particolare modi TM. Si ha:

$$\begin{cases} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \chi^2\Psi = 0 & x < 0 & \chi^2 = n^2k_0^2 - \beta^2 \\ \frac{d^2\Psi}{dx^2} - \gamma^2\Psi = 0 & x > 0 & \gamma^2 = \beta^2 - k_0^2 \end{cases} \quad (9.4)$$

Per $x < 0$ la soluzione, che soddisfa anche alla condizione sul CEP, è:

$$\Psi = A \sin \chi(d + x) \quad (9.5)$$

Per $x > 0$ occorre un campo confinato e quindi deve essere $\gamma^2 > 0$ ($\beta^2 > k_0^2$):

$$\Psi = B e^{-\gamma x} \quad \gamma > 0 \quad (9.6)$$

I campi sono quindi confinati in una striscia di spessore $\frac{10}{\gamma}$ nel vuoto.

I possibili valori di β possono essere calcolati dalle condizioni di continuità per $x = 0$, che sono:

$$\begin{cases} \frac{1}{n^2} (-\chi^2 A \sin \chi d) = \gamma^2 B \\ \chi A \cos \chi d = -\gamma B \end{cases} \quad (9.7)$$

Questo sistema omogeneo ha soluzioni non banali solo se il suo determinante è nullo, ovvero se le due equazioni sono proporzionali. Si ricava quindi l'equazione di dispersione:

$$\chi \tan \chi d = n^2 \gamma \quad (9.8)$$

cui va aggiunta l'uguaglianza di β :

$$\chi^2 + \gamma^2 = (n^2 - 1)k_0^2 \quad (9.9)$$

Tale equazione può essere risolta come intersezione di due curve. Occorre però distinguere il caso $\chi^2 > 0$ da quello $\chi^2 < 0 \Rightarrow \chi = -j|\chi|$. In quest'ultimo caso si ha però:

$$\chi \tan \chi d = -j|\chi|(-j \tanh |\chi| d) = -|\chi| \tanh |\chi| d < 0 \quad (9.10)$$

e quindi non vi sono soluzioni. Resta allora $\chi^2 > 0$ e le due curve (figura 9.3) da intersecare sono²:

$$\begin{cases} \chi d \tan \chi d = n^2 \gamma d \\ (\chi d)^2 + (\gamma d)^2 = (n^2 - 1)(k_0 d)^2 \end{cases} \quad (9.11)$$

La seconda curva è un cerchio di raggio crescente con la frequenza. Si vede quindi che vi è sempre un modo guidato, a qualunque frequenza (la "frequenza di taglio" del TM_0 è quindi nulla). Al crescere della frequenza vi sono poi altri modi. Si noti che stiamo parlando della esistenza di tali modi e non del tipo di propagazione. Se un modo guidato esiste, si propaga. Al di sotto della sua frequenza di taglio, invece, il modo non esiste (non va inserito nella rappresentazione modale del campo). E' facile vedere che il modo TM_p esiste per frequenze tali che:

$$\sqrt{n^2 - 1}k_0 d \geq p\pi \quad (9.12)$$

La lunghezza d'onda corrispondente può essere grande rispetto a d se $n^2 \simeq 1$, mentre in una guida chiusa è sempre dell'ordine di grandezza delle dimensioni trasverse.

Vicino al cut-off si ha $\gamma d \simeq 0$, ovvero il modo si estende in tutto lo spazio. In tal caso $\beta \simeq k_0$. Per $\omega \rightarrow \infty$ si ha invece $\chi d \simeq \frac{\pi}{2} + p\pi$ e quindi $(\chi d)^2 \ll (n^2 - 1)(x_0 d)^2$.

Pertanto $\gamma d \simeq \sqrt{n^2 - 1}x_0 d$ e $\beta \simeq nk_0$, ovvero il modo è quasi completamente confinato nel dielettrico. Il valore di β varia in modo omogeneo in $[k_0, nk_0]$ dando luogo al diagramma di Brillouin in figura 9.4. Per compren-

²Basta considerare $\chi > 0$ in quanto ad ogni tale soluzione ne corrisponde una con χ opposto ma che è esattamente la stessa soluzione (in termini di campo).

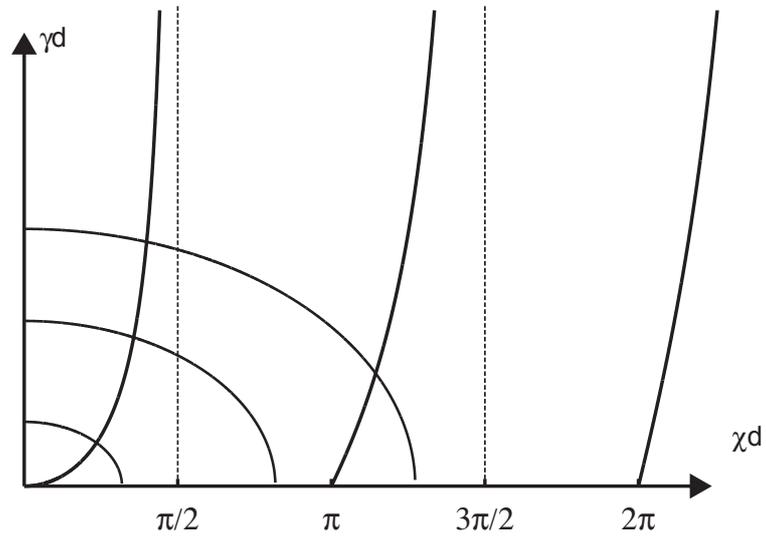


Figura 9.3: Relazione tra γd e χd

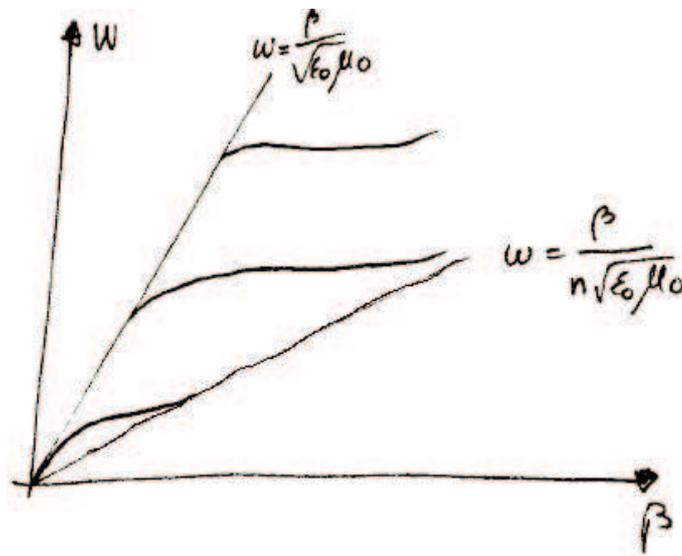


Figura 9.4: Diagramma di Brillouin

dere il meccanismo fisico di confinamento del campo in una struttura aperta, esaminiamo la struttura del campo nella piastra. Prendiamo ad esempio E_x :

$$E_x = A \cos \chi(d+x)e^{-j\beta z} = \frac{A}{2} [e^{j\chi d} e^{j(\chi x - \beta z)} + e^{-j\chi d} e^{-j(\chi x + \beta z)}] \quad (9.13)$$

Il campo è quindi la somma di due onde piane, con vettori di propagazione $(\mp\chi, 0, \beta)$. E' facile convincersi che questi sono i vettori di onde piane incidenti e riflesse dalla interfaccia. L'angolo di incidenza (figura 9.5) vale:

$$\sin \theta_i = \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \chi^2}} = \frac{\beta}{nk_0} \in \left(\frac{1}{n}, 1\right) \quad (9.14)$$

ed è quindi sempre maggiore dell'angolo limite. Il confinamento è quindi



Figura 9.5: Angolo di incidenza dell'onda all'interfaccia

legato al decadimento reattivo del campo all'esterno del dielettrico.

La decomposizione in onde piane suggerisce l'esistenza di altri campi associati a tale struttura. Infatti è pensabile avere vettori con angolo di incidenza superiore all'angolo limite e quindi campi trasmessi attraverso l'interfaccia. Per tali campi, però, cade la richiesta $\gamma^2 > 0$ (non sono cioè confinati) e anzi sono caratterizzati da $\gamma < 0$ ($\beta < k_0$). In tal caso per $x > 0$ deve essere:

$$\Psi = B_1 e^{-j|\gamma|x} + B_2 e^{j|\gamma|x} \quad (9.15)$$

in quanto le condizioni all'infinito non eliminano nessuna delle due soluzioni. Poichè le condizioni sono sempre due ma ora le incognite sono tre, vi sono sempre soluzioni. Sono quindi possibili tutti i valori di β tali che $\beta^2 < k_0^2$ (si ha cioè uno spettro continuo di valori di β). Avremo quindi modi con β reale minore di k_0 (detti modi radiativi) e modi con β immaginario (modi evanescenti).

Un modo radiativo o evanescente non può esistere da solo, in quanto un flusso di potenza reale attraverso l'interfaccia richiede β complesso e non reale o immaginario puro. Occorre quindi sempre considerare una sovrapposizione (integrale) di tali "modi" per avere campi che esistono da soli.

9.3 Modi leaky

La rappresentazione completa del campo di una struttura aperta, come una piastra dielettrica, è costituita da due parti: una somma finita sui modi guidati e un integrale sullo spettro continuo (più esattamente due integrali, uno sui “modi” radiativi e uno su quelli evanescenti). E’ evidente che una tale rappresentazione è molto più complessa di quella relativa, ad esempio, a una guida chiusa, in cui il campo è una somma numerabile di modi. E’ però possibile sostituire l’integrale sullo spettro continuo con una somma finita di soluzioni della equazione di dispersione, detti modi leaky, che non soddisfano le condizioni per $x \rightarrow \infty$ e, anzi, tendono a crescere indefinitamente per $x \rightarrow \infty$. Ovviamente, queste soluzioni non possono descrivere il campo per tutti i valori di x . Tuttavia sono utili vicino alla piastra dielettrica e soprattutto in presenza di discontinuità, ovvero dove occorre la espressione completa del campo.

Per capire meglio i modi leaky, partiamo dai concetti di soluzione “transitoria” e soluzione “a regime”, che sono ben noti per un sistema dipendente dal tempo (ovvero che evolve nel tempo). Poichè stiamo studiando la propagazione rispetto a z , e quindi un sistema che “evolve” rispetto a z (con cause che si trovano ad una ascissa z inferiore rispetto a quella che stiamo considerando) possiamo usare gli stessi concetti di soluzione transitoria e soluzione a regime rispetto a z .

Un modo (vero) è una soluzione a regime rispetto a z , che parte da $z = -\infty$. Se però consideriamo una struttura guidante che inizia a $z = 0$ (ad esempio con una discontinuità o con una sorgente), vi sarà presente in essa anche una soluzione transitoria, corrispondente a raggi che incidono sulla parete prima dell’angolo limite e che quindi irradiano energia nello spazio (ovvero trasferiscono energia dalla piastra dielettrica verso l’infinito) attenuandosi rispetto a z . Un “modo” leaky è precisamente questa soluzione transitoria considerata a regime, ovvero per $z \rightarrow \infty$. Se una tale soluzione esiste per $z \rightarrow \infty$ (pur attenuandosi rispetto a z) deve aver irradiato una quantità infinita di energia, e quindi per $x \rightarrow \infty$ deve avere un valore infinito per il campo. In altri termini chiamiamo modo “leaky” una soluzione non fisica della equazione di dispersione, che descrive però una situazione fisica di transitorio rispetto a z e può quindi essere usata sui problemi di discontinuità. In una discontinuità a $z = 0$ vengono prodotti modi radiativi, e quindi nella espansione del potenziale di Hertz-Debye per $z > 0$ sarà presente un integrale del tipo (al di

sopra del dielettrico):

$$\int_0^{k_0} [B_1(\beta)e^{-j|\gamma|x} + B_2(\beta)e^{j|\gamma|x}] e^{-j\beta z} d\beta \quad (9.16)$$

Questo integrale può essere sostituito da una somma numerabile di modi leaky (che, nelle applicazioni, verrà ovviamente troncata) in modo da avere una rappresentazione di campo analoga a quella delle guide chiuse.

9.4 Modi leaky in una piastra dielettrica

Per quanto detto precedentemente, i modi leaky sono soluzione della equazione di dispersione con $\gamma < 0$. Poniamo allora $w = -\gamma$ e riscriviamo le equazioni di dispersione TM normalizzandole:

$$\begin{cases} w = -\frac{1}{n^2}u \tan u \\ u^2 + w^2 = V_s^2 \end{cases} \quad (9.17)$$

che possiamo risolvere ancora per via grafica (figura 9.6), con $u = \chi d$ e $V_s^2 = (n^2 - 1)(k_0 d)^2$, frequenza normalizzata. La prima funzione è sostan-

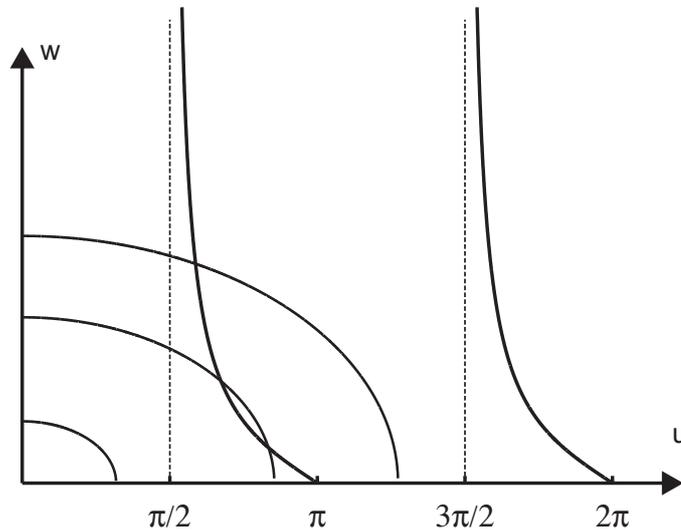


Figura 9.6: Relazione tra w e u

zialmente una tangente ribaltata rispetto all'asse delle ascisse, e la seconda una circonferenza (per u reale). Se consideriamo le varie circonferenze di figura vediamo che la prima non ha intersezioni, la seconda ne ha due e la terza

ne ha una sola. Se consideriamo le due intersezioni della seconda circonferenza vediamo che una di queste esiste per tutti i valori superiori di frequenza mentre la seconda esiste solo fino a $V_s = \pi$, esattamente la frequenza a cui compare il modo TM_1 .

Si vede, anzi, che, se consideriamo la frequenza che “attraversa” tale valore, la nostra soluzione non fisica si trasforma con continuità nel modo TM_1 . Abbiamo cioè una soluzione che può essere interpretata come il modo TM_1 al di sotto della frequenza di taglio. Tale soluzione è il nostro modo leaky, corrispondente al TM_1 . L'altra intersezione, invece, non tende ad alcun modo della struttura e viene normalmente scartata.

La costante di propagazione di tale modo è reale. Infatti per esso $u \simeq \pi$ mentre w è (relativamente) piccolo. Ne segue $V_s \simeq u$. Quindi da (??) si ha:

$$\beta^2 = n^2 k_0^2 - \left(\frac{u}{d}\right)^2 \quad \Longrightarrow \quad (\beta d)^2 = n^2 k_0^2 d^2 - u^2 \quad (9.18)$$

e dalla definizione di V_s :

$$n^2 k_0^2 d^2 \simeq u^2 + (k_0 d)^2 \quad (9.19)$$

per cui:

$$\beta^2 \simeq k_0^2 \quad (9.20)$$

Dalla analisi delle intersezioni si vede comunque che tale modo esiste solo in un piccolo intervallo di valore di V_s , ovvero finché la circonferenza non diviene tangente alla curva.

Per determinare tale punto (t, w_t) , possiamo richiedere che le due curve abbiano la stessa derivata (oltre ad avere una intersezione). Imponendo l'uguaglianza delle derivate si trova:

$$-\frac{1}{n^2} \left(\tan u + \frac{u}{\cos^2 u} \right) = -\frac{u}{w} \quad (9.21)$$

Questa equazione va aggiunta a quelle di dispersione (??-??), che riportiamo:

$$\begin{cases} \chi \tan \chi d = n^2 \gamma \\ \chi^2 + \gamma^2 = V_s^2 \end{cases} \quad (9.22)$$

in cui V_s va considerata una ulteriore incognita, e consente di determinare la frequenza minima a cui è presente il nostro modo leaky. Per calcolarla si

può utilizzare la prima equazione di dispersione per scrivere la condizione sulle derivate come:

$$-\frac{1}{n^2} \left(\tan u + \frac{u}{\cos^2 u} \right) = \frac{n^2}{\tan u} \quad (9.23)$$

che, inoltre, fornisce u_t da cui è immediato calcolare w_t e poi la frequenza V_{St} . Per frequenze inferiori a V_{St} le due curve non hanno intersezione (reale). Vi sono però intersezioni complesse, che hanno inizialmente w prossimo a w_t (ovvero $\Im(w) \ll w_t$) ma la cui parte immaginaria aumenta molto rapidamente. L'andamento di γd con la frequenza è mostrato in figura 9.7.

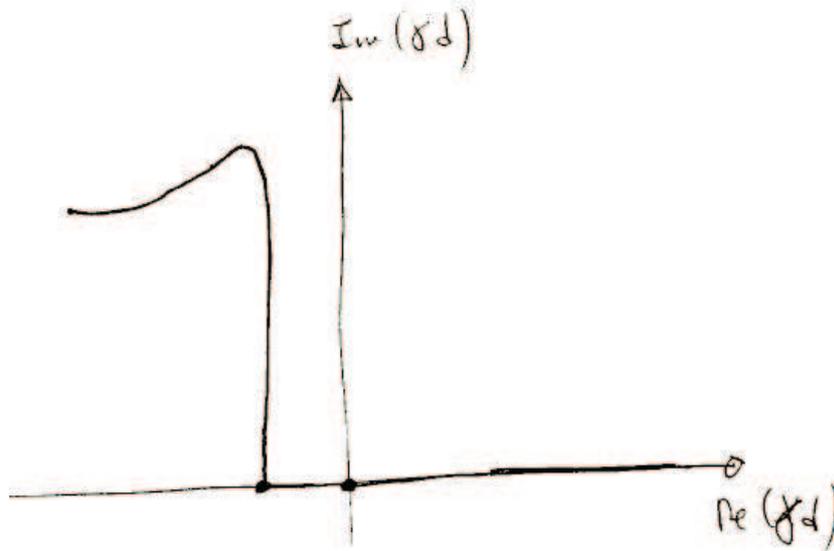


Figura 9.7: Andamento di γd rispetto alla frequenza

CAPITOLO 10

Fibre ottiche

10.1 Modi di una fibra ottica

Una fibra ottica è un sottile filo di vetro o quarzo fuso, a sezione circolare (o ellittica) e indice di rifrazione variabile verso l'esterno. Tali fibre sono strutture guidanti aperte in grado di convogliare energia elettromagnetica nel visibile ($400 \div 800nm$) e nell'infrarosso ($0.8 \div 2\mu m$) con attenuazioni che possono arrivare a frazioni di decibel per chilometro.

Nel seguito considereremo brevemente la struttura modale delle fibre a salto d'indice (step index fiber) la cui sezione è costituita da un nucleo (core) di indice di rifrazione n_1 , rivestito da un mantello (cladding) con indice $n_2 < n_1$. Questa struttura è aperta e quindi, come la piastra dielettrica, non contiene solo modi guidati. Per le applicazioni telecomunicative possiamo tuttavia limitarci a questi modi, in cui il campo è confinato essenzialmente nel nucleo, e quindi supporre che il mantello abbia estensione infinita.

In altri termini considereremo i modi guidati da un cilindro dielettrico di raggio a e indice di rifrazione $n = \frac{n_1}{n_2}$, immerso in uno spazio omogeneo in cui la costante di propagazione sarà indicata con $k = n_2 k_0$. La costante di propagazione dei modi in fibra sarà quindi compresa nell'intervallo $(k, nk) = (n_2 k_0, n_1 k_0)$. Infine assumiamo la fibra debolmente guidante:

$$\Delta = \frac{n^2 - 1}{2n^2} \ll 1 \quad (10.1)$$

10.2 Modi guidati in una fibra ottica

Nelle ipotesi di fibra (figura 10.1) debolmente guidante:

$$n_1 - n_2 \ll 1 \quad (10.2)$$

e con mantello infinito, i modi sono modi ibridi con equazione di dispersione:

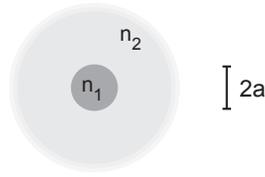


Figura 10.1: Fibra ottica con mantello infinito

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{HE}_{lm} \rightarrow \frac{J_{l-1}(\chi a)}{\chi a J_l(\chi a)} = \frac{K_{l-1}(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} \\ \text{EH}_{lm} \rightarrow \frac{J_{l+1}(\chi a)}{\chi a J_l(\chi a)} = -\frac{K_{l+1}(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} \\ \chi^2 = n_1^2 k_0^2 - \beta^2 \\ \gamma^2 = \beta^2 - n_2^2 k_0^2 \end{array} \right. \quad (10.3)$$

che sono identiche per $l = 0$ ¹. J e K sono funzioni di Bessel (analoghe a $\sin x$ e e^{-x} ma in coordinate cilindriche) e m indica il numero d'ordine della corrispondente radice.

Poichè risulta $J_{-l} = (-1)^l J_l$ e $K_{-l} = K_l$, i modi HE_l , EH_{-l} e i modi EH_l , HE_{-l} sono degeneri (naturalmente se hanno lo stesso indice m). I modi HE ed EH sono molto simili a modi polarizzati circolarmente e tale degenerazione dipende dalla simmetria che non consente di discriminare i due versi di rotazione.

L'ipotesi di fibra debolmente guidante introduce poi una ulteriore degenerazione tra EH_{l-1} ed HE_{l+1} (in realtà, questi modi non sono esattamente degeneri). Possiamo quindi raggruppare i modi degeneri tra loro:

- $\text{HE}_1 - \text{EH}_{-1}$
- $\text{HE}_2 - \text{EH}_{-2} - \text{HE}_0 - \text{EH}_0$
- $\text{HE}_3 - \text{EH}_{-3} - \text{HE}_{-1} - \text{EH}_1$
- ...

¹I modi variano con ϕ come $e^{jl\phi}$.

Basta quindi considerare solo i modi HE_l , con $l > 0$. Dalla tabella precedente si vede che i modi HE_1 sono degeneri di ordine 2, mentre tutti gli altri sono degeneri di ordine 4.

Combinando opportunamente i modi HE ed EH si giunge poi a modi linearmente polarizzati, che sono quelli di maggiore interesse applicativo.

Le equazioni di dispersione devono essere risolte numericamente. Tuttavia, vicino al cut-off oppure a frequenza elevata, sono possibili soluzioni approssimate. La condizione di cut-off è $\gamma a = 0$, per cui vicino al cut-off si avrà $\gamma a \ll 1$. In tal caso (relazione molto precisa per $\gamma a < 0.2$):

$$\begin{cases} K_0(\gamma a) \simeq -\log \frac{\Gamma(\gamma a)}{2} & \Gamma = 1.781 \\ K_l(\gamma a) \simeq \frac{(l-1)!2^{l-1}}{(\gamma a)^l} & l > 0 \end{cases} \quad (10.4)$$

Introduciamo la frequenza normalizzata:

$$V = n_2 k_0 a \sqrt{n^2 - 1} = \frac{\omega}{c} n_1 a \sqrt{2\Delta} \quad (10.5)$$

e poniamo $u = \chi a$, $w = \gamma a$. Risulta $u^2 + w^2 = V^2$ e quindi al cut-off ($w = 0$) si ha $u = V_t$. La frequenza di taglio V_t è quindi uguale al valore di cut-off u_c di χa .

Determiniamo allora u_c . Distinguendo $l = 1$ da $l > 1$ e usando i valori asintotici di K_l , si ha:

1. $l = 1$

$$\frac{J_0(u)}{uJ_1(u)} \simeq \frac{-\log \frac{\Gamma w}{2}}{w \cdot \frac{1}{w}} = -\log \frac{\Gamma w}{2} \quad (10.6)$$

Questa relazione può essere invertita per dare una $u = u(w)$ e risulterà $u_c = \lim_{w \rightarrow 0} u(w)$. Passando al limite per $w \rightarrow 0$ si ha allora:

$$\lim_{u \rightarrow u_c} \frac{J_0(u)}{uJ_1(u)} = \infty \quad (10.7)$$

e quindi l'equazione:

$$u_c J_1(u_c) = 0 \quad (10.8)$$

Indicando con $\xi_{l,m}$ la successione degli zeri (diversi da zero) di $J_l(x)$ si trova:

$$u_c = \begin{cases} 0 \\ \xi_{l,m} \end{cases} \quad (10.9)$$

e quindi il modo HE_{11} ha frequenza di taglio nulla.

2. $l > 1$

$$\frac{J_{l-1}(u)}{uJ_l(u)} = \frac{(l-2)!2^{l-2}}{w^{l-1}} \frac{1}{w} \frac{w^l}{(l-1)!2^{l-1}} = \frac{1}{2(l-1)} \quad (10.10)$$

che, per le proprietà delle funzioni di Bessel, diventa:

$$J_{l-2}(u) = 0 \quad (10.11)$$

per cui:

$$u_c = \xi_{l-2,m} \quad (10.12)$$

Il valore $u = 0$ non è invece soluzione, in quanto il primo membro della equazione di partenza diverge per $u \rightarrow 0$.

Ne segue che il modo fondamentale è il modo ibrido HE_{11} (mentre i modi TE e TM, corrispondenti a $l = 0$ ovvero a $l = 2$ hanno frequenza di taglio maggiore di zero).

Il primo modo superiore corrisponde a $l = 2$ e per esso:

$$V_t = u_c^{(1)} = \xi_{0,1} = 2.405 \quad (10.13)$$

In termini di frequenza reale:

$$\begin{cases} \omega_t = \xi_{0,1} \frac{c}{n_1 a \sqrt{\Delta}} \\ \lambda_t = \frac{a}{2.4} \sqrt{\Delta} \end{cases} \quad (10.14)$$

e si ritrova la notevole riduzione di λ_t rispetto alle dimensioni geometriche già vista nelle piastre dielettriche. Per frequenze prossime al cut-off il modo si estende molto nello spazio (e le approssimazioni iniziali cominciano a non essere più valide). Ha quindi interesse valutare qualitativamente $w = \gamma a$ vicino a V_t .

Per $l = 1$ si trova immediatamente:

$$w = \frac{2}{\Gamma} \exp \left[-\frac{J_0(u)}{uJ_1(u)} \right] \quad (10.15)$$

e finchè $w \ll V$ allora $u \simeq V$ e segue:

$$w = \frac{2}{\Gamma} \exp \left[-\frac{J_0(V)}{VJ_1(V)} \right] \quad (10.16)$$

Poichè il campo nel cladding varia come $e^{-\gamma r}$, allora al crescere di w il campo si concentra sempre più verso il core. Possiamo quindi utilizzare la fibra solo se $w > w_L$, ovvero solo se $v > V_{tl}$, che possiamo considerare come la frequenza di taglio effettiva del modo HE_{11} . Per valutare w_L si considera come raggio effettivo del modo la quantità:

$$r_m = a + \frac{1}{\gamma} = a \left(1 + \frac{1}{w} \right) \quad (10.17)$$

assumendo modo confinato se $r_m \leq 10a$, ovvero se $w > \frac{1}{9}$. Il valore corrispondente di frequenza normalizzata è $V \simeq 0.95$ (ricavato dalla equazione esatta).

Il comportamento monomodale si ha quindi per:

$$0.95 < V < 2.4 \quad (10.18)$$

Analoghe valutazioni si possono fare per $l > 1$, ma la relazione $w(u)$ non è esprimibile in forma chiusa.

L'altro caso di interesse è $V \rightarrow \infty$. In tal caso si ha $w \rightarrow \infty$ mentre $\chi a = u$ resta limitato. Allora:

$$K_l(w) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2w}} e^{-w} \quad (10.19)$$

e l'equazione di dispersione diventa, $\forall l$:

$$\frac{J_{l-1}(u)}{u J_l(u)} = \frac{1}{w} \quad (10.20)$$

Si vede facilmente che, al limite per $w \rightarrow \infty$, $u \rightarrow u_\infty$ dato da $J_{l-1}(u_\infty) = 0$. Pertanto:

$$u_\infty = \xi_{l-1,m} \quad (10.21)$$

In particolare per il modo HE_{11} risulta $u_\infty = \chi_\infty a = \xi_{01} = 2.405$.

Per V grande e $l = 1$ possiamo approssimare $w \simeq V$ e ricavare $u(V)$; infatti si trova, derivando la (10.20) rispetto a V :

$$\frac{d}{du} \left[\frac{J_0(u)}{u J_1(u)} \right] \frac{du}{dV} = -\frac{1}{V^2} \quad (10.22)$$

che interessa vicino a u_∞ . Sviluppando e ricordando che $J'_0(u) = -J_1(u)$:

$$\frac{-J_1(u)[u J_1(u)] - J_0(u) \frac{d}{du}[u J_1(u)]}{u^2 [J_1(u)]^2} \frac{du}{dV} = -\frac{1}{V^2} \quad (10.23)$$

Ma vicino a u_∞ il secondo addendo della somma è trascurabile e segue:

$$\frac{1}{u} \frac{du}{dV} = \frac{1}{V^2} \quad (10.24)$$

Risolvendo:

$$\begin{cases} \frac{du}{u} = \frac{dV}{V^2} \\ \log u = -\frac{1}{V} + c \\ u = u_\infty \exp \left[-\frac{1}{V} \right] \end{cases} \quad (10.25)$$

dove la costante di integrazione viene determinata imponendo la condizione per $V \rightarrow \infty$.

10.3 Dispersione nelle fibre ottiche

La dispersione totale della propagazione in una fibra ottica o altra struttura aperta ha tre contributi:

- La dispersione propria del dielettrico che costituisce la fibra (dispersione cromatica o *material dispersion*).
- La dispersione dovuta alle discontinuità trasverse guidanti (dispersione geometrica o *waveguide dispersion*).
- La eventuale differenza tra le v_g dei vari modi che si propagano nella fibra (dispersione modale).

Quest'ultimo termine è evidentemente presente solo se la fibra funziona in regime multimodale.

Nelle attuali fibre monomodali restano quindi i primi due termini e spesso è la dispersione cromatica a prevalere. E' tuttavia possibile realizzare fibre in cui la dispersione cromatica e quella geometrica sono opposte, e molto vicine in modulo, in una banda di frequenza piccola percentualmente ma sufficientemente lunga da poter essere utilizzata. Se a tale frequenza sono piccole anche le perdite, tali fibre possono essere usate per tratte lunghe anche migliaia di chilometri senza elaborazione intermedia.

La dispersione si ottiene da:

$$\beta a = \sqrt{n_1^2 k_0^2 a^2 - u^2} \quad (10.26)$$

derivando rispetto alla frequenza (normalizzata) $V = n_1 k_0 a \sqrt{2\Delta}$.

Nella (10.26) possiamo introdurre V ottenendo

$$\beta a = \sqrt{\frac{V^2}{2\Delta} - u^2} \quad (10.27)$$

con Δ dipendente da V , e derivare

$$\frac{d(\beta a)}{dV} = \frac{1}{2\beta a} \left[\frac{V}{\Delta} + \frac{V^2}{2} \left(-\frac{1}{\Delta^2} \right) \frac{d\Delta}{dV} - 2u \frac{du}{dV} \right] \quad (10.28)$$

Sviluppando, e usando la (10.25):

$$\frac{d(\beta a)}{dV} = \frac{1}{2\beta a} \left[\frac{V}{\Delta} - 2\frac{u^2}{V^2} - \frac{V^2}{2\Delta^2} \frac{d\Delta}{dV} \right] \quad (10.29)$$

Per frequenze *grandi* la (10.25) può essere approssimata con

$$\beta a \simeq \sqrt{\frac{V^2}{2\Delta}} = \frac{V}{\sqrt{2\Delta}} \quad (10.30)$$

e quindi la (10.29) diventa

$$\frac{d(\beta a)}{dV} = \left[\frac{1}{\sqrt{2\Delta}} - \sqrt{2\Delta} \frac{u^2}{V^3} - \frac{V}{(\sqrt{2\Delta})^3} \frac{d\Delta}{dV} \right] \quad (10.31)$$

Ricordiamo che si ha dispersione se β è una funzione non lineare di V , ovvero se la sua derivata non è costante. La dispersione è quindi causata dal secondo e terzo termine della (10.31), e in particolare il primo produce la dispersione geometrica e il secondo quella cromatica.

Dalla (10.31) segue anche che è possibile avere assenza di dispersione se il secondo e il terzo termine si compensano in una banda di frequenze, e quindi è necessario che Δ sia una funzione decrescente di V .

Se si riesce ad avere la compensazione nella (10.31), la dispersione diventa molto piccola, ma non nulla. Comincia infatti ad avere effetto la *dispersione di polarizzazione di modo*, o, con acronimo inglese, *PMD*. Questa è dovuta al fatto che la simmetria cilindrica della fibra non è perfetta. Quindi i due modi della fibra hanno velocità di propagazione leggermente diverse, e questo produce una dispersione. La *PMD* è molto più piccola delle dispersioni cromatica e geometrica, e quindi normalmente non ha effetto (essendo trascurabile rispetto a quelle). Se però le due dispersioni principali vengono compensate, il sia pur piccolo valore della *PMD* va tenuto in conto (non può più essere trascurato).

CAPITOLO 11

Matrice di trasmissione

11.1 Definizione e proprietà

Per reti a due porte (figura 11.1) è utile considerare la matrice di trasmissione (o matrice $ABCD$) definita da:

$$\begin{cases} V_1 = AV_2 + BI_2 \\ I_1 = CV_2 + DI_2 \end{cases} \quad (11.1)$$

ovvero:

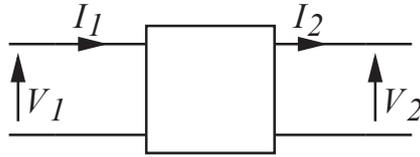


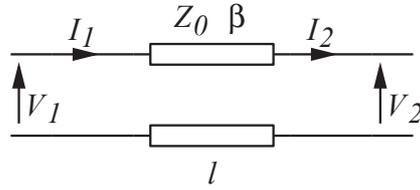
Figura 11.1: Rete due porte

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (11.2)$$

(si noti la convenzione sulle correnti diversa da quella usata per \mathbf{Z} e \mathbf{Y}). La matrice di trasmissione di due, o N , reti in cascata è il prodotto matriciale delle singole matrici, ordinate come il flusso di potenza (la prima matrice del prodotto è quella relativa all'ingresso).

I vari termini si ottengono con l'uscita aperta o in cortocircuito. Ad esempio consideriamo una linea lunga l (figura 11.2). Se l'uscita è aperta ($I_2 = 0$) si ha:

$$\begin{cases} AV_2 = V_1 = V(-l) = V_2 \cos \beta(-l) = V_2 \cos \beta l \\ CV_2 = I_1 = I(-l) = -j \frac{1}{Z_0} V_2 \sin \beta(-l) = j \frac{1}{Z_0} V_2 \sin \beta l \end{cases} \quad (11.3)$$

Figura 11.2: Linea di trasmissione di lunghezza l

e se è in cortocircuito ($V_2 = 0$):

$$\begin{cases} BI_2 = V_1 = V(-l) = jZ_0 I_2 \sin \beta l \\ DI_2 = I_1 = I(-l) = I_2 \cos \beta l \end{cases} \quad (11.4)$$

per cui la matrice è:

$$\begin{bmatrix} \cos \beta l & jZ_0 \sin \beta l \\ j\frac{1}{Z_0} \sin \beta l & \cos \beta l \end{bmatrix} \quad (11.5)$$

La matrice di trasmissione è evidentemente collegata sia a \mathbf{Z} (o \mathbf{Y}) sia ad \mathbf{S} . Per quanto riguarda la relazione con \mathbf{Z} partiamo (con la diversa convenzione su I_2) da:

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 - Z_{12}I_2 \\ V_2 = Z_{21}I_1 - Z_{22}I_2 \end{cases} \quad (11.6)$$

e imponiamo la definizione di \mathbf{T} :

$$\begin{cases} A = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0} = \frac{Z_{11}}{Z_{21}} \\ C = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0} = \frac{1}{Z_{21}} \end{cases} \quad (11.7)$$

B e D richiedono $V_2 = 0$ e in tal caso $I_2 = \frac{Z_{21}}{Z_{22}}I_1$. Pertanto:

$$\begin{cases} B = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{V_2=0} = Z_{11} \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_2=0} - Z_{12} = \frac{Z_{11}Z_{22}}{Z_{21}} - Z_{12} \\ D = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_2=0} = \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \end{cases} \quad (11.8)$$

Per una rete reciproca si ha:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC = \frac{Z_{11}Z_{22}}{Z_{21}^2} - \frac{Z_{11}Z_{22}}{Z_{21}^2} + \frac{Z_{12}}{Z_{21}} = \frac{Z_{12}}{Z_{21}} = 1 \quad (11.9)$$

Se la rete è anche priva di perdite allora A e D sono reali e B e C immaginari puri (perchè \mathbf{Z} ha tutti gli elementi immaginari).

Ovviamente l'uguaglianza di due reti reciproche si ha se tre elementi di \mathbf{T} sono uguali. Se le reti sono anche speculari ne bastano due (purchè non siano A e D) in quanto in tal caso $A = D$.

11.2 Impedenza di ingresso

Consideriamo una rete due porte (figura 11.3) chiusa su di un carico Z_L e calcoliamone l'impedenza d'ingresso in termini di \mathbf{T} o di \mathbf{S} . Per definizione:

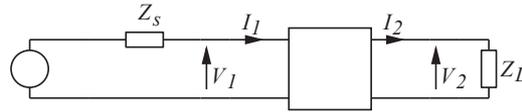


Figura 11.3: Rete due porte con generatore di tensione e carico

$$Z_{IN} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{AV_2 + BI_2}{CV_2 + DI_2} = \frac{AZ_L + B}{CZ_L + D} \quad (11.10)$$

Per quanto riguarda \mathbf{S} conviene lavorare in termini di coefficienti di riflessione Γ_L e Γ_{IN} , relativi alla stessa Z_0 della matrice:

$$\Gamma_{IN} = \frac{V_1^-}{V_1^+} = S_{11} + S_{12} \frac{V_2^+}{V_1^+} \quad (11.11)$$

D'altra parte $V_2^+ = \Gamma_L V_2^-$ (per Z_L le onde progressive e riflesse si scambiano), quindi:

$$V_2^- = S_{21} V_1^+ + S_{22} V_2^+ = S_{21} V_1^+ + S_{22} \Gamma_L V_2^- \quad (11.12)$$

Per cui:

$$\begin{cases} V_2^- = \frac{S_{21} V_1^+}{1 - S_{22} \Gamma_L} \\ V_2^+ = \frac{S_{21} \Gamma_L}{1 - S_{22} \Gamma_L} V_1^+ \end{cases} \quad (11.13)$$

e, in definitiva:

$$\Gamma_{IN} = S_{11} + \frac{S_{21} S_{12} \Gamma_L}{1 - S_{22} \Gamma_L} = \frac{S_{11} - \Delta_S \Gamma_L}{1 - S_{22} \Gamma_L} \quad (11.14)$$

essendo $\Delta_S = S_{11} S_{22} - S_{12} S_{21}$ il determinante di \mathbf{S} . Si noti che per reti unidirezionali ($S_{12} = 0$), $\Gamma_{IN} = S_{11}$, indipendente dal carico.

Analogamente per l'impedenza di uscita si ha $V_2 = -Z_{OUT} I_2$ e $V_1 = -Z_S I_1$ (essendo Z_S l'impedenza di sorgente) e, invertendo $-Z_S = \frac{B - AZ_{OUT}}{D - CZ_{OUT}}$, segue:

$$Z_{OUT} = \frac{B + DZ_S}{A + CZ_S} \quad (11.15)$$

mentre in termini di \mathbf{S} lo stesso ragionamento di Γ_{IN} fornisce:

$$\Gamma_{OUT} = S_{22} + \frac{S_{12} S_{21} \Gamma_S}{1 - S_{11} \Gamma_S} = \frac{S_{22} - \Delta_S \Gamma_S}{1 - S_{11} \Gamma_S} \quad (11.16)$$

Anche qui, per rete unidirezionale, $\Gamma_{OUT} = S_{22}$. Per quanto riguarda la matrice \mathbf{T} , la condizione di rete unidirezionale è $AD = BC$. In tal caso:

$$\begin{cases} Z_{IN} = \frac{AZ_L + A\frac{D}{C}}{CZ_L + D} = \frac{A}{C} \frac{CZ_L + D}{CZ_L + D} = \frac{A}{C} \\ Z_{OUT} = \frac{DZ_S + D\frac{A}{C}}{CZ_S + A} = \frac{D}{C} \frac{CZ_S + A}{CZ_S + A} = \frac{D}{C} \end{cases} \quad (11.17)$$

CAPITOLO 12

Strutture periodiche

12.1 Propagazione in strutture periodiche

Consideriamo una sequenza infinita di reti due porte uguali (figura 12.1), caratterizzate dalla loro matrice $ABCD$ \mathbf{T} . Le due porte sono reciproche e prive di perdite. Indichiamo con $\vec{v}_n = \begin{pmatrix} V_n \\ I_n \end{pmatrix}$ il vettore delle tensioni e correnti

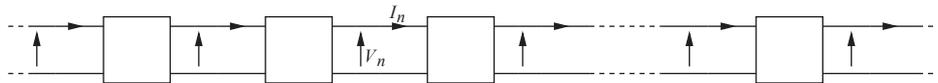


Figura 12.1: Sequenza infinita di reti due porte

alle porte (assumendo una sezione “origine” come sezione 0) e occupiamoci di determinare tali grandezze (disinteressandoci per ora di tensione e corrente all’interno delle reti due porte). Per le proprietà della matrice \mathbf{T} , si ha:

$$\vec{v}_n = \mathbf{T}^{m-n} \cdot \vec{v}_m \quad (12.1)$$

dove la potenza n -esima di una matrice è pari al prodotto della matrice per se stessa n volte e $\mathbf{T}^{-n} = (\mathbf{T}^{-1})^n$. La matrice \mathbf{T} è invertibile in quanto $\det(\mathbf{T}) = 1$.

La (12.1) consente di calcolare (in maniera esatta, anche se computazionalmente poco efficiente) la soluzione, ovvero tensione e corrente a tutte le sezioni. Tuttavia, per ottenere non solo il valore numerico ma anche il comportamento della soluzione, è utile risolvere la (12.1) in forma chiusa.

Il punto di partenza è il calcolo di autovalori e autovettori di \mathbf{T} . Gli autovalori λ si ottengono da:

$$\det \begin{vmatrix} A - \lambda & B \\ C & D - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \longrightarrow \quad (A - \lambda)(D - \lambda) - BC = \quad (12.2)$$

$$= AD - \lambda D - \lambda A + \lambda^2 - BC = 0$$

e ricordando che $AD - BC = \det(\mathbf{T}) = 1$ si trova come equazione caratteristica (a coefficienti reali, nonostante \mathbf{T} sia complessa):

$$\lambda^2 - (A + D)\lambda + 1 = 0 \quad (12.3)$$

le cui radici sono l'una l'inversa dell'altra:

$$\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_2} \quad (12.4)$$

Trascurando per il momento il caso $A + D = 2$ di radici coincidenti, vediamo che gli autovalori sono reali se il discriminante è positivo:

$$(A + D)^2 - 4 > 0 \quad (12.5)$$

e sono complessi coniugati se è negativo:

$$(A + D)^2 - 4 < 0 \quad (12.6)$$

In questo secondo caso risulta:

$$\left| \frac{A + D}{2} \right| < 1 \quad (12.7)$$

e quindi esiste un angolo $\theta \in (0, \pi)$ tale che:

$$\frac{A + D}{2} = \cos \theta \quad (12.8)$$

Gli autovalori sono allora:

$$\lambda_{1,2} = \frac{A + D}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{A + D}{2}\right)^2 - 1} = \cos \theta \mp \sqrt{\cos^2 \theta - 1} \quad (12.9)$$

ovvero:

$$\lambda_{1,2} = e^{\mp j\theta} \quad (12.10)$$

che sono anche inversi, oltre che complessi coniugati. Per analogia, nel caso di radici reali poniamo¹:

$$\frac{A + D}{2} = \cosh t \quad (12.11)$$

¹In realtà $A + D$ può anche essere negativo. Tuttavia, la discussione è analoga al caso $A + D > 0$ e quindi consideriamo solo quest'ultimo.

ottenendo analogamente:

$$\lambda_{1,2} = e^{\mp t} \quad (12.12)$$

Il caso di gran lunga più interessante è il caso (12.10) che quindi consideriamo in dettaglio. La presenza di due autovalori distinti consente di scrivere:

$$\mathbf{T} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{H}^{-1} \quad (12.13)$$

dove $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ e la matrice \mathbf{H}^2 ha per colonne gli autovettori di \mathbf{T} : $\mathbf{H} = (\vec{t}_1, \vec{t}_2)$. Infatti dalla (12.13) segue:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{\Lambda} \Rightarrow (\mathbf{T} \cdot \vec{t}_1, \mathbf{T} \cdot \vec{t}_2) = (\lambda_1 \vec{t}_1, \lambda_2 \vec{t}_2) \quad (12.14)$$

Sostituendo la (12.13) nella (12.1), si ottiene:

$$\vec{v}_n = (\mathbf{H} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{H}^{-1})^{-n} \cdot \vec{v}_0 \quad (12.15)$$

Ma $(\mathbf{H} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{H}^{-1})^2 = \mathbf{H} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{\Lambda}^2 \cdot \mathbf{H}^{-1}$ e, per induzione:

$$\vec{v}_n = \mathbf{H} \cdot \mathbf{\Lambda}^{-n} \cdot \mathbf{H}^{-1} \cdot \vec{v}_0 \quad (12.16)$$

dove $\mathbf{\Lambda}^{-n} = \text{diag}(\lambda_1^{-n}, \lambda_2^{-n})$. La (12.16) può anche essere riscritta come:

$$(\mathbf{H}^{-1} \cdot \vec{v}_n) = \mathbf{\Lambda}^{-n} \cdot (\mathbf{H}^{-1} \cdot \vec{v}_0) \quad (12.17)$$

e nel caso (12.10) di radici complesse:

$$\mathbf{\Lambda}^{-n} = \begin{pmatrix} e^{-jn\theta} & 0 \\ 0 & e^{jn\theta} \end{pmatrix} \quad (12.18)$$

Se chiamiamo:

$$\vec{h}_n = \begin{pmatrix} h_n^+ \\ h_n^- \end{pmatrix} = \mathbf{H}^{-1} \cdot \vec{v}_n \quad (12.19)$$

troviamo:

$$\begin{cases} h_n^+ = e^{-jn\theta} h_0^+ \\ h_n^- = e^{jn\theta} h_0^- \end{cases} \quad (12.20)$$

L'espressione equivalente per le tensioni è:

$$\vec{v}_n = \mathbf{H} \cdot \vec{h}_n = h_n^+ \vec{t}_1 + h_n^- \vec{t}_2 \quad (12.21)$$

Si trova quindi:

$$V_n = h_n^+ t_{11} + h_n^- t_{21} = (t_{11} h_0^+) e^{-jn\theta} + (t_{21} h_0^-) e^{jn\theta} \quad (12.22)$$

²Fare attenzione alle dimensioni delle grandezze in gioco. Ad esempio h_{11} e h_{12} sono numeri puri, mentre h_{21} e h_{22} sono ammettenze.

La (12.22) è una espressione della tensione in termini di onda progressiva e riflessa. In altri termini, se $|A + D| < 2$, il sistema di reti due porte in cascata consente la propagazione di onde viaggianti.

Il caso $|A + D| > 2$ può essere trattato in maniera analoga, sostituendo e^{+t} a $e^{j\theta}$. Si trova così:

$$V_n = (t_{11}h_0^+)e^{-nt} + (t_{21}h_0^-)e^{nt} \quad (12.23)$$

ovvero attenuazione senza propagazione. In altri termini si ha una propagazione in cut-off, del tutto analoga a quella che si ha in guida d'onda al di sotto della frequenza di taglio. In tale condizione il campo resta confinato vicino alle sorgenti.

E' importante notare che i due comportamenti (propagazione e cut-off) dipendono dalla frequenza. Una struttura periodica è quindi una struttura dal comportamento filtrante.

12.2 Struttura periodica finita

Tutti i concetti validi per le linee di trasmissione possono essere utilizzati in una struttura periodica monodimensionale, salvo le ovvie modifiche legate al fatto che tensione e corrente sono "campionati".

Ad esempio possiamo considerare una struttura semi-infinita (figura 12.2). Su di essa ci sarà onda diretta e riflessa e l'ampiezza di quest'ultima sarà

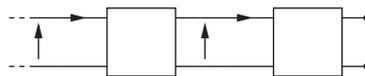


Figura 12.2: Struttura semi-infinita di reti due porte

legata al coefficiente di riflessione sul carico. Per calcolare Γ occorre preliminarmente determinare l'impedenza caratteristica della nostra struttura, che richiede il calcolo esplicito della matrice \mathbf{H} , ovvero degli autovettori di \mathbf{T} . Possiamo calcolare l'autovettore corrispondente a $e^{j\theta}$ e ricavare gli altri sostituendo $j\theta$ con $-j\theta$, t e $-t$ rispettivamente. Imponendo l'equazione agli autovettori si ha:

$$(A - e^{j\theta})x_1 + Bx_2 = 0 \quad (12.24)$$

in cui $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ è l'autovettore corrispondente a $e^{j\theta}$. Imponendo $x_1 = 1$ si ottiene $x_2 = \frac{e^{j\theta} - A}{B}$ (è una ammettenza, mentre x_1 è un numero puro; poichè gli autovettori sono definiti a meno di un fattore moltiplicativo, è possibile avere

$[x_1] = \text{Volt}$ e $[x_2] = \text{Ampere}$, coerentemente con \vec{v} .

Si ha allora:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{e^{j\theta}-A}{B} & \frac{e^{-j\theta}-A}{B} \end{pmatrix} \quad (12.25)$$

L'impedenza caratteristica è definita come il rapporto tra tensione e corrente in presenza della sola onda progressiva (o riflessa). In tal caso:

$$\begin{pmatrix} V_n \\ I_n \end{pmatrix} = \mathbf{H} \cdot \begin{pmatrix} h_n^+ \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{H} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} h_n^+ = h_n^+ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{e^{j\theta}-A}{B} \end{pmatrix} \quad (12.26)$$

da cui si ottengono:

$$\begin{cases} Z^+ = \frac{B}{e^{j\theta}-A} \\ Z^- = \frac{B}{e^{-j\theta}-A} = -(Z^+)^* \end{cases} \quad (12.27)$$

Dalle (12.27) si vede che le impedenze caratteristiche sono complesse anche se la linea è priva di perdite. La presenza di un segno (-) in Z^- deriva solo dal fatto che abbiamo definito Z^- come $\left. \frac{V_n}{I_n} \right|_{\text{onda riflessa}}$ (mentre nelle linee di trasmissione l'impedenza caratteristica è il rapporto $\frac{V^+}{I^+} = -\frac{V^-}{I^-}$). Resta comunque che le due impedenze sono l'una il coniugato dell'altra.

Se però la cella elementare ha una simmetria speculare, allora $A = D = \cos \theta$ e segue:

$$Z^+ = \frac{B}{e^{j\theta} - A} = \frac{B}{e^{j\theta} - \cos \theta} = \frac{B}{j \sin \theta} \quad (12.28)$$

puramente reale (e pari a $-Z^-$). Ma $j \sin \theta = \sqrt{A^2 - 1} = \sqrt{BC}$ (vedi l'equazione (12.10)) e quindi $Z^+ = \sqrt{\frac{B}{C}}$. Conviene, ove possibile, considerare una cella elementare simmetrica.

Consideriamo ora una struttura semi-infinita chiusa su Z_L . Le equazioni della struttura sono le (12.20), e da queste seguono (assumiamo $n = 0$ all'interfaccia):

$$\begin{cases} V_0 = h_0^+ + h_0^- \\ I_0 = \frac{1}{Z^+} h_0^+ + \frac{1}{Z^-} h_0^- = \frac{1}{Z^+} h_0^+ - \frac{1}{(Z^+)^*} h_0^- \end{cases} \quad (12.29)$$

Imponendo $V_0 = Z_L I_0$, segue:

$$h_0^+ + h_0^- = \frac{Z_L}{Z^+} h_0^+ - \frac{Z_L}{(Z^+)^*} h_0^- \quad (12.30)$$

ovvero:

$$\Gamma = \frac{h_0^-}{h_0^+} = \frac{\frac{Z_L}{Z^+} - 1}{\frac{Z_L}{(Z^+)^*} + 1} = \frac{(Z^+)^*}{Z^+} \frac{Z_L - Z^+}{Z_L + Z^+} \quad (12.31)$$

dove:

$$\frac{(Z^+)^*}{Z^+} = \frac{-B}{e^{-j\theta} - A} \frac{e^{j\theta} - A}{B} = -\frac{e^{j\theta} - A}{e^{-j\theta} - A} \quad (12.32)$$

(essendo B immaginario puro), che vale 1 se Z^+ è reale. Se $Z_L = Z^+$ la struttura periodica è quindi adattata.

Consideriamo ora il caso inverso, ovvero quello di una linea di impedenza Z_0 che alimenta una successione semi-infinita di celle elementari. Poichè sulla struttura periodica finita c'è solo onda progressiva, l'impedenza di ingresso risulta Z^+ , e quindi sulla linea si misurerà:

$$\Gamma = \frac{Z^+ - Z_0}{Z^+ + Z_0} \quad (12.33)$$

Il caso di struttura periodica finita con N celle alimentata e chiusa su di un carico Z_L generico è abbastanza più complesso. Ci limitiamo quindi al caso in cui $Z_L = 0$ oppure $Z_L = \infty$.

Se $Z_L = 0$, dalle (12.29), segue:

$$V_N = 0 \Rightarrow h_N^- = -h_N^+ \quad (12.34)$$

avendo posto $n = 0$ all'ingresso. Dalle (12.20) e (12.29) si ha:

$$\begin{cases} V_0 = h_0^+ + h_0^- = e^{jN\theta} h_N^+ - e^{-jN\theta} h_N^+ = h_N^+ 2j \sin N\theta \\ I_0 = \frac{1}{Z^+} h_0^+ - \frac{1}{(Z^+)^*} h_0^- = \frac{e^{jN\theta}}{Z^+} h_N^+ + \frac{e^{-jN\theta}}{(Z^+)^*} h_N^+ = h_N^+ 2\Re\left(\frac{e^{jN\theta}}{Z^+}\right) \end{cases} \quad (12.35)$$

ovvero $I_0 = h_N^+ \frac{2}{|Z^+|^2} [R^+ \cos N\theta + X^+ \sin N\theta]$, con $Z^+ = R^+ + jX^+$. Di conseguenza:

$$Y_{IN} = -j \frac{1}{|Z^+|^2} [R^+ \cot N\theta + X^+] \quad (12.36)$$

Allo stesso modo se $I_N = 0$ (circuito aperto), allora:

$$\frac{1}{Z^+} h_N^+ = \frac{1}{(Z^+)^*} h_N^- \quad (12.37)$$

e quindi:

$$\begin{cases} V_0 = e^{jN\theta} h_N^+ + e^{-jN\theta} \frac{(Z^+)^*}{Z^+} h_N^+ = \frac{h_N^+}{Z^+} 2\Re(Z^+ e^{jN\theta}) \\ I_0 = \frac{1}{Z^+} e^{jN\theta} h_N^+ - \frac{1}{(Z^+)^*} e^{-jN\theta} \frac{(Z^+)^*}{Z^+} h_N^+ = \frac{h_N^+}{Z^+} 2j \sin N\theta \end{cases} \quad (12.38)$$

ed essendo $V_0 = \frac{h_N^+}{Z^+} 2 (R^+ \cos N\theta - X^+ \sin N\theta)$, segue:

$$Z_{IN} = -j (R^+ \cot N\theta - X^+) \quad (12.39)$$

12.3 Esempi

Consideriamo tre esempi di strutture periodiche. La prima è il modello LC di linea di trasmissione, che possiamo rappresentare in due modi distinti (figura 12.3) e con $\Delta z \rightarrow 0$. La matrice $ABCD$ risulta, per la prima

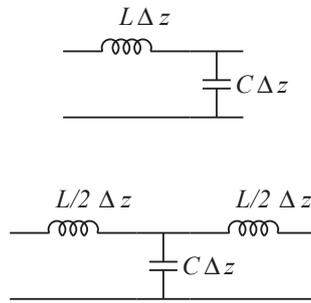


Figura 12.3: Celle relative a linee di trasmissione

struttura:

$$\begin{pmatrix} 1 & j\omega L\Delta z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C\Delta z & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \omega^2 LC\Delta z^2 & j\omega L\Delta z \\ j\omega C\Delta z & 1 \end{pmatrix} \quad (12.40)$$

Per la seconda si ha invece:

$$\begin{pmatrix} 1 - \omega^2 \frac{LC}{2} \Delta z^2 & j\omega \frac{L}{2} \Delta z \\ j\omega C\Delta z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & j\omega \frac{L}{2} \Delta z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \omega^2 \frac{LC}{2} \Delta z^2 & j\omega L\Delta z - j\omega^3 \frac{L^2 C}{2} \Delta z^3 \\ j\omega C\Delta z & 1 - \omega^2 \frac{LC}{2} \Delta z \end{pmatrix} \quad (12.41)$$

La matrice della seconda rete ha $A = D$, essendo una rete a simmetria speculare. Poichè però la struttura periodica completa è identica, $A + D$ è lo stesso nei due casi. Risulta:

$$A + D = 2 - (\omega\sqrt{LC})^2 \Delta z^2 = 2 \left[1 - \frac{1}{2} (\omega\sqrt{LC})^2 \Delta z^2 \right] \quad (12.42)$$

che può essere approssimato, per Δz piccolo, con:

$$A + D = 2 \cos \left[(\omega\sqrt{LC}) \Delta z \right] \quad (12.43)$$

Pertanto si ha sempre propagazione, con una variazione di fase, tra un sezione e l'altra, di:

$$e^{-j\omega\sqrt{LC}\Delta z} \quad (12.44)$$

che coincide con quella ricavata dall'equazione dei telegrafisti. L'impedenza caratteristica dipende dalla cella elementare scelta. Nel caso simmetrico (e a meno di termini $O(\Delta z^2)$) si ha:

$$Z_S^+ = \sqrt{\frac{B}{C}} = \sqrt{\frac{L}{C} - \omega^2 \frac{L^2}{2} \Delta z^2} \simeq \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (12.45)$$

mentre nel caso non simmetrico:

$$\begin{aligned} Z_N^+ &= \frac{B}{e^{j\omega\sqrt{LC}\Delta z} - A} \simeq \frac{j\omega L \Delta z}{1 + j\omega\sqrt{LC}\Delta z - \omega^2 \frac{LC}{2} \Delta z^2 - (1 - \omega^2 LC \Delta z^2)} = \\ &= \frac{L}{\sqrt{LC} - j\omega \frac{LC}{2} \Delta z} = \sqrt{\frac{L}{C}} \left(1 - j \frac{\omega\sqrt{LC}}{2} \Delta z \right)^{-1} \end{aligned} \quad (12.46)$$

ovvero:

$$Z_N^+ \simeq Z_S^+ + j \frac{\omega\sqrt{LC}}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} \Delta z = Z_S^+ + j\omega \frac{L}{2} \Delta z \quad (12.47)$$

Il carico adattato è quindi, per rete simmetrica Z_S^+ , e per rete non simmetrica $j\omega \frac{L}{2} \Delta z + Z_S^+$. Nel secondo caso, quindi, occorre inserire la reattanza induttiva che manca nella cella elementare.

Come secondo esempio consideriamo la cella elementare in figura 12.4, in cui il circuito risonante parallelo risuona a ω_0 , ed ha ammettenza:

$$j\omega C - \frac{j}{\omega L_1} = j\omega C \left(1 - \frac{1}{\omega^2 C L_1} \right) = j\omega C \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \quad (12.48)$$

La matrice $ABCD$ si ricava da quella dell'esempio precedente e vale:

$$\begin{pmatrix} 1 - \omega^2 \frac{LC}{2} \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) & j\omega L - j\omega^3 \frac{L^2}{2} C \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \\ j\omega C \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) & 1 - \omega^2 \frac{LC}{2} \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \end{pmatrix} \quad (12.49)$$

e:

$$\frac{A+D}{2} = 1 - \omega^2 \frac{LC}{2} \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) = 1 - \frac{LC}{2} (\omega^2 - \omega_0^2) \quad (12.50)$$

Si ha propagazione se $\frac{A+D}{2} < 1$, ovvero se $\omega > \omega_0$, e attenuazione nel caso contrario.

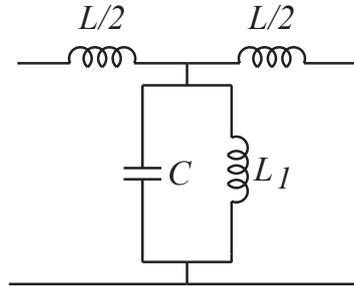


Figura 12.4: Cella con circuito risonante

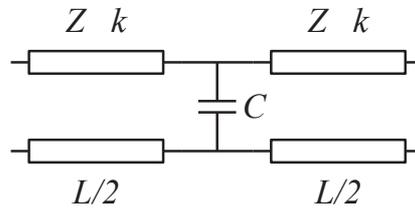


Figura 12.5: Cella con linee di trasmissione

Consideriamo infine una cella elementare contenente linee di trasmissione (figura 12.5). La matrice $ABCD$ vale:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \frac{kL}{2} & jZ \sin \frac{kL}{2} \\ \frac{j}{Z} \sin \frac{kL}{2} & \cos \frac{kL}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{kL}{2} & jZ \sin \frac{kL}{2} \\ \frac{j}{Z} \sin \frac{kL}{2} & \cos \frac{kL}{2} \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \cos \frac{kL}{2} - \omega CZ \sin \frac{kL}{2} & jZ \sin \frac{kL}{2} \\ \frac{j}{Z} \sin \frac{kL}{2} + j\omega C \cos \frac{kL}{2} & \cos \frac{kL}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{kL}{2} & jZ \sin \frac{kL}{2} \\ \frac{j}{Z} \sin \frac{kL}{2} & \cos \frac{kL}{2} \end{pmatrix} \quad (12.51) \end{aligned}$$

La struttura ha simmetria speculare, quindi basta calcolare A :

$$A = \cos^2 \frac{kL}{2} - \omega CZ \sin \frac{kL}{2} \cos \frac{kL}{2} - \sin \frac{kL}{2} = \cos kL - \frac{\omega CZ}{2} \sin kL \quad (12.52)$$

Questa funzione vale 1 per $\omega = 0$ ma assume valori sia minori, sia maggiori di 1 (in modulo). Quindi le bande passanti e le bande proibite si alternano sull'asse delle ω .

12.4 Modi di Floquet

Finora abbiamo considerato solo i valori di tensione e corrente alle porte della cella elementare. Ha però interesse anche l'andamento all'interno di ogni cella. Prendiamo allora l'ultimo esempio del paragrafo precedente, e fissiamo anche un asse z (figura 12.6). La tensione e la corrente nel primo tratto di linea

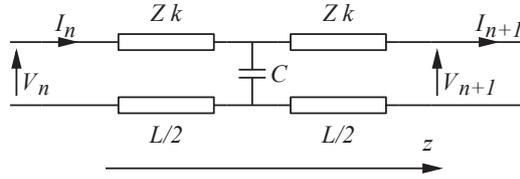


Figura 12.6: Cella con linee di trasmissione

valgono:

$$\begin{cases} V(z) = V_n \cos k(z - nL) - jZI_n \sin k(z - nL) \\ I(z) = I_n \cos k(z - nL) - j\frac{V_n}{Z} \sin k(z - nL) \end{cases} \quad (12.53)$$

Se consideriamo solo la tensione, in presenza di sola onda progressiva, si ha $V_n = V_0 e^{-jn\theta}$ e $I_n = I_0 e^{-jn\theta}$ e:

$$V(z) = e^{-jn\theta} [V_0 \cos k(z - nL) - jZI_0 \sin k(z - nL)] \quad (12.54)$$

Conviene introdurre una “costante di propagazione” della struttura periodica β_0 definita da:

$$\theta = \beta_0 L \quad (12.55)$$

e porre:

$$e^{-jn\theta} = e^{-jn\beta_0 L} = e^{-j\beta_0(nL - z + z)} = e^{-j\beta_0 z} e^{j\beta_0(z - nL)} \quad (12.56)$$

con z nella cella n -esima. Poniamo poi $z' = z - nL$ (ascissa relativa all’inizio della cella n -esima) riscrivendo $V(z)$ come:

$$V(z) = e^{-j\beta_0 z} \left\{ e^{-j\beta_0 z'} [V_0 \cos kz' - jZI_0 \sin kz'] \right\} = e^{-j\beta_0 z} V_p(z) \quad (12.57)$$

La (12.57) è valida in tutte le celle. Tra una cella e l’altra, comunque, varia solo il valore di z , mentre il termine $V_p(z)$ è indipendente da n (ovvero è la stessa in tutte le celle). Il suo valore dipende infatti solo dalla differenza di ascissa tra il punto generico z e il punto iniziale della cella **in cui si trova** z .

In altri termini $V_p(z)$ è quindi una funzione periodica di z di periodo L . Sviluppando $V_p(z)$ in serie di Fourier:

$$V_p(z) = \sum_m V_m e^{-jm\frac{2\pi}{L}z} \quad (12.58)$$

Si può riscrivere la (12.57) come somma di infinite onde:

$$V(z) = \sum_m V_m e^{-j\beta_m z} \quad (12.59)$$

che prendono il nome di modi di Floquet. Ovviamente:

$$\beta_m = \beta_0 + \frac{2\pi}{L}m \quad (12.60)$$

sono le costanti di propagazione dei modi di Floquet. Poichè m va da $-\infty$ a $+\infty$, le velocità di fase possono essere sia negative, sia positive. Invece le velocità di gruppo sono date da:

$$\frac{1}{v_g} = \frac{d\beta_m}{d\omega} = \frac{d\beta_0}{d\omega} \quad (12.61)$$

e sono quindi uguali per tutti i modi.