Matrici

(1) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

calcolare

$$2A - B; \qquad 3A + 2B - 4C; \qquad -2A + B + 2C - 2B; \qquad 3B + 2(2A - C) - (A + B + 2C).$$

Risolvere, se possibile:
- 3X+2(A-X)+B+2(C+2X)=0;
- 4A+2(B+2X)-3(C+X+2A)=0;
- 4(A+B+X)+4(-A-B+X)-4(A-B+X)=0.

(2) Date le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

calcolare, se possibile, i prodotti

$$AB, \quad BA, \quad A^T B, \qquad B^T A$$

(3) Date le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

calcolare, se possibile, i prodotti

$$AB, \quad BA, \quad A^T B, \qquad B^T A$$

(4) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Verificare che

$$A(BC) = (AB)C$$

(5) Assegnate le due matrici (dipendenti da un parametro $a \in \mathbb{R}$)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare gli eventuali $a \in \mathbb{R}$ per cui AB è una matrice triangolare superiore.
(b) Determinare gli eventuali $a \in \mathbb{R}$ per cui AB è una matrice simmetrica.

(6) Siano $A, B \in M^n$ due matrici simmetriche. Verificare che la matrice AB è simmetrica se e solo se A e B commutano.

(7) Sia D la matrice

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

- Supponendo che gli elementi sulla diagonale di D siano tra loro tutti distinti, determinare le matrici A, 4×4, che commutano con D, cioè tali che $AD = DA$
- Supponendo che gli elementi sulla diagonale di D siano tra loro tutti uguali, determinare le matrici A, 4×4, che commutano con D.

(8) Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad x \in \mathbb{R}$$

Calcolare la matrice A^5.

(9) Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Provare che $-A^3 + 5A^2 - 7A$ è la matrice nulla.

(10) Si calcoli, al variare del parametro reale k, il rango delle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} k & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3k \\ 1 & -k & k \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 1 \\ k & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(11) Dire per quali valori del parametro reale t le matrici

$$A = \begin{pmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ -3 & t-5 & -3 \\ -6 & 6 & t-4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 6 & t-9 & 3 \\ 1 & -4 & t^2 \end{pmatrix}$$

sono invertibili e determinare le loro inverse.

(12) Siano A, B, C matrici reali quadrate $n \times n$. L'uguaglianza

$$AB = AC$$

implica che $B = C$?