

# 1 POLARIZZAZIONE

## campo sinusoidale

Forma standard del campo

$$\mathbf{E} = \mathbf{A} + j\mathbf{B} = E_x \mathbf{i}_x + E_y \mathbf{i}_y$$

polarizzazione lineare  $\iff \mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$  ovvero  $E_x = 0$  o  $E_y = 0$  o  $\frac{E_x}{E_y}$  reale

polarizzazione circolare  $\iff \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$  e  $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$  ovvero  $|E_x| = |E_y|$  e  $\frac{E_x}{E_y}$  immaginario puro

Forma alternativa del campo

$$\mathbf{E} = a_x e^{j\delta_x} \mathbf{i}_x + a_y e^{j\delta_y} \mathbf{i}_y$$

$$\mathbf{E} = a_x \mathbf{i}_x + a_y e^{j\delta} \mathbf{i}_y$$

con  $a_x = |E_x|$  e  $a_y = |E_y|$ .

**Rapporto assiale**, indicato normalmente con la sigla *AR* (acronimo della espressione inglese *axial ratio*), definito come il rapporto tra il massimo ed il minimo del modulo del vettore  $\mathbf{e}(t)$ :

$$AR = \frac{\max |\mathbf{e}(t)|}{\min |\mathbf{e}(t)|}$$

(o, equivalentemente, come il rapporto tra gli assi dell'ellisse di polarizzazione) e compreso in  $[1, \infty)$ .

I semiassi dell'ellisse di polarizzazione (Fig. 1) sono

$$a = \frac{a_x a_y |\sin \delta|}{\sqrt{\lambda_1}} \quad b = \frac{a_x a_y |\sin \delta|}{\sqrt{\lambda_2}}$$

dove  $\lambda_{1,2}$  sono le due soluzioni dell'equazione

$$\lambda^2 - (a_x^2 + a_y^2)\lambda + a_x^2 a_y^2 \sin^2 \delta = 0 \quad \text{ovvero} \quad \lambda^2 - |E|^2 \lambda + a_x^2 a_y^2 \sin^2 \delta = 0 \quad (1)$$

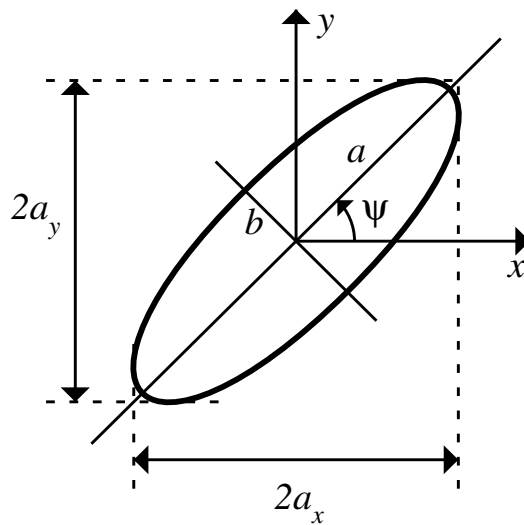


Fig.1: Parametri dell'ellisse di polarizzazione.

$$\tan 2\psi = \frac{2(a_y^2 - \lambda_1)}{(a_x^2 - a_y^2)(a_y^2 - \lambda_1)} a_x a_y \cos \delta = \frac{2a_x a_y \cos \delta}{(a_x^2 - a_y^2)}$$

che fornisce due valori di  $\psi$ . Il valore relativo all'angolo del semiasse maggiore è quello che ha lo stesso segno di  $\cos \delta$ .

Posto

$$\tan \chi = \frac{b}{a}$$

si ha

$$\sin 2\chi = \frac{2a_x a_y \sin \delta}{(a_x^2 + a_y^2)}$$

con

$$\begin{cases} \chi > 0 & \text{pol. levogira} & (\text{LHCP}) \\ \chi < 0 & \text{pol. destogira} & (\text{RHCP}) \end{cases}$$

Con tale convenzione il segno di  $\chi$  coincide col segno di  $\delta$ .

Parametri di Stokes

$$\begin{aligned} s_0 &= a_x^2 + a_y^2 \\ s_1 &= a_x^2 - a_y^2 \\ s_2 &= 2a_x a_y \cos \delta \\ s_3 &= 2a_x a_y \sin \delta \end{aligned}$$

con

$$s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$$

Invertendo

$$\begin{aligned} a_x^2 &= \frac{s_0 + s_1}{2} \\ a_y^2 &= \frac{s_0 - s_1}{2} \\ \delta &= \arg[s_2 + js_3] \end{aligned}$$

Inoltre

$$\tan 2\psi = \frac{s_2}{s_1} \quad \sin 2\chi = \frac{s_3}{s_0}$$

oltre, ovviamente, a  $s_0 = a^2 + b^2$ . Da esse, segue

$$\begin{aligned} s_1 &= s_0 \cos 2\chi \cos 2\psi \\ s_2 &= s_0 \cos 2\chi \sin 2\psi \\ s_3 &= s_0 \sin 2\chi \end{aligned}$$

Inoltre, l'equazione per i due semiasse dell'ellisse è

$$\lambda^2 - s_0 \lambda + \frac{s_2^2}{4} = 0$$

e il rapporto assiale vale

$$AR = \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = \sqrt{\frac{s_0 + \sqrt{s_1^2 + s_2^2}}{s_0 - \sqrt{s_1^2 + s_2^2}}}$$

**campo a banda stretta**

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{e}_c(t) + j\mathbf{e}_s(t) \quad \mathbf{e}(t) = \mathbf{e}_c(t) \cos \omega_0 t - \mathbf{e}_s(t) \sin \omega_0 t$$

$$\mathbf{E}(t) = a_x(t)e^{j\delta_x(t)}\mathbf{i}_x + a_y(t)e^{j\delta_y(t)}\mathbf{i}_y \quad \mathbf{e}(t) = a_x(t)[\omega_0 t + \delta_x(t)]\mathbf{i}_x + a_y(t) \cos[\omega_0 t + \delta_y(t)]\mathbf{i}_y$$

dove le funzioni del tempo  $\mathbf{e}_c(t)$ ,  $\mathbf{e}_s(t)$ ,  $E_x(t) = a_x(t)e^{j\delta_x(t)}$ ,  $E_y(t) = a_y(t)e^{j\delta_y(t)}$  sono tutte lentamente variabili (rispetto al periodo  $T_0$  della *portante*)

Campo **completamente polarizzato** se

$$q(t) = \frac{a_y(t)}{a_x(t)} = \text{cost} \quad \text{e} \quad \delta(t) = \delta_y(t) - \delta_x(t) = \text{cost}$$

con

$$\tan 2\psi(t) = \frac{2q \cos \delta}{(1 - q^2)} \quad \sin 2\chi(t) = \frac{2q \sin \delta}{(1 + q^2)}$$

Parametri di Stokes

$$\begin{aligned} s_0 &= \langle a_x^2(t) \rangle + \langle a_y^2(t) \rangle \\ s_1 &= \langle a_x^2(t) \rangle - \langle a_y^2(t) \rangle \\ s_2 &= 2 \langle a_x(t)a_y(t) \cos [\delta_y(t) - \delta_x(t)] \rangle \\ s_3 &= 2 \langle a_x(t)a_y(t) \sin [\delta_y(t) - \delta_x(t)] \rangle \end{aligned}$$

dove  $\langle \dots \rangle$  indica una media sul tempo (tra  $-\infty$  e  $+\infty$ ).

Risulta

$$s_0^2 \geq s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$$

Se però il campo è completamente polarizzato, allora segue

$$\begin{aligned} s_0 &= \langle a_x^2 \rangle (1 + q^2) \\ s_1 &= \langle a_x^2 \rangle (1 - q^2) \\ s_2 &= \langle a_x^2 \rangle 2q \cos \delta \\ s_3 &= \langle a_x^2 \rangle 2q \sin \delta \end{aligned}$$

e tra i suoi parametri di Stokes vale la

$$s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$$

Tutte le altre onde, per le quali vale il segno di “>”, sono parzialmente polarizzate.

**campo aleatorio**

Parametri di Stokes

$$\begin{aligned}
s_0 &= \mathcal{E}[a_x^2] + \mathcal{E}[a_y^2] \\
s_1 &= \mathcal{E}[a_x^2] - \mathcal{E}[a_y^2] \\
s_2 &= 2 \mathcal{E} [a_x a_y \cos [\delta_y(t) - \delta_x(t)]] \\
s_3 &= 2 \mathcal{E} [a_x a_y \sin [\delta_y(t) - \delta_x(t)]]
\end{aligned}$$

dove  $\mathcal{E}$  indica la media statistica, e vale ancora

$$s_0^2 \geq s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$$

La potenza media ricevuta da un sensore di altezza efficace

$$\mathbf{h} = h_0 \cos \theta \mathbf{i}_x + h_0 \sin \theta e^{j\varepsilon} \mathbf{i}_y$$

in termini dei parametri di Stokes del campo incidente, è data da

$$\mathcal{E}[P(t)] = \frac{1}{2} A_e \frac{1}{2\zeta} \left[ s_0 + \cos 2\theta s_1 + \sin 2\theta (s_2 \cos \varepsilon - s_3 \sin \varepsilon) \right]$$

essendo

$$A_e = \frac{\zeta h_0^2}{4R_A}$$

l'area efficace del sensore.

Possiamo introdurre i parametri di Stokes della antenna ricevente (come parametri del campo prodotto in trasmissione da questa antenna)

$$\begin{aligned}
s_0^R &= |h_0|^2 \\
s_1^R &= |h_0|^2 \cos 2\theta \\
s_2^R &= 2|h_0|^2 \cos \theta \sin \theta \cos \varepsilon = |h_0|^2 \sin 2\theta \cos \varepsilon \\
s_3^R &= 2|h_0|^2 \cos \theta \sin \theta \sin \varepsilon = |h_0|^2 \sin 2\theta \sin \varepsilon
\end{aligned}$$

ottenendo

$$\mathcal{E}[P(t)] = \frac{1}{2} A_e \mathcal{E}[S_i] \left[ 1 + \frac{s_1^R}{s_0^R} \frac{s_1}{s_0} + \frac{s_2^R}{s_0^R} \frac{s_2}{s_0} - \frac{s_3^R}{s_0^R} \frac{s_3}{s_0} \right] = \frac{1}{2} A_e < S_i > \frac{s_0 s_0^R + s_1 s_1^R + s_2 s_2^R - s_3 s_3^R}{s_0 s_0^R}$$

essendo  $\mathcal{E}[S_i]$  la media statistica del vettore di Poynting incidente. Se il campo incidente è completamente polarizzato, il massimo di  $\mathcal{E}[P(t)]$  si ha per

$$(s_0, s_1, s_2, s_3) = \alpha (s_0^R, s_1^R, s_2^R, -s_3^R)$$

con  $\alpha$  costante reale, che è la *condizione di adattamento in polarizzazione*. Se vale questa condizione si ottiene

$$\mathcal{E}[P(t)]_{max} = A_e \mathcal{E}[S_i]$$

Nel caso generale possiamo introdurre un *fattore di depolarizzazione*  $K_p$ , definito da

$$\mathcal{E}[P(t)] = K_p A_e \mathcal{E}[S_i]$$

che vale, in termini dei parametri di Stokes

$$K_p = \frac{1}{2} \frac{s_0 s_0^R + s_1 s_1^R + s_2 s_2^R + s_3 s_3^R}{s_0 s_0^R}$$

Campo **completamente non polarizzato** se

$$s_1 = s_2 = s_3 = 0$$

e per esso

$$\langle P(t) \rangle_{max} = \frac{1}{2} A_e \mathcal{E}[S_i]$$

Un campo, di parametri di Stokes  $(s_0, s_1, s_2, s_3)$ , può essere decomposto in vari modi.

- 1) Somma di un campo completamente polarizzato, di parametri di Stokes  $(s_0^P, s_1^P, s_2^P, s_3^P)$ , e di uno completamente non polarizzato, di parametri di Stokes  $(s_0^N, 0, 0, 0)$ , tra loro indipendenti. In tal caso

$$s_0^P = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \quad s_1^P = s_1 \quad s_2^P = s_2 \quad s_3^P = s_3 \quad s_0^N = s_0 - s_0^P$$

e si definisce grado di polarizzazione di un campo generico il parametro

$$m = \frac{s_0^P}{s_0} = \frac{s_0^P}{s_0^P + s_0^N} = \frac{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}}{s_0}$$

- 2) Se è **completamente non polarizzato**, nella somma di due campi uguali, con stato di polarizzazione opposto, tra loro indipendenti. Ad esempio polarizzazioni lineari lungo  $x$  e  $y$

$$(s_0, 0, 0, 0) = \left(\frac{s_0}{2}, \frac{s_0}{2}, 0, 0\right) + \left(\frac{s_0}{2}, -\frac{s_0}{2}, 0, 0\right)$$

o polarizzazioni LHCP e RHCP

$$(s_0, 0, 0, 0) = \left(\frac{s_0}{2}, 0, 0, \frac{s_0}{2}\right) + \left(\frac{s_0}{2}, 0, 0, -\frac{s_0}{2}\right)$$

- 3) Somma di due campi con stato di polarizzazione opposto tra loro indipendenti, di parametri  $(s_0^A, s_1^A, s_2^A, s_3^A)$  e  $(s_0^B, s_1^B, s_2^B, s_3^B)$ . Si ha

$$\begin{aligned} (s_0^A, s_1^A, s_2^A, s_3^A) &= \left(\frac{(1+m)}{2}s_0, \frac{(1+m)}{2m}s_1, \frac{(1+m)}{2m}s_2, \frac{(1+m)}{2m}s_3\right) \\ (s_0^B, s_1^B, s_2^B, s_3^B) &= \left(\frac{(1-m)}{2}s_0, -\frac{(1-m)}{2m}s_1, -\frac{(1-m)}{2m}s_2, -\frac{(1-m)}{2m}s_3\right) \end{aligned}$$

- 4) Somma di due campi **correlati**, con stato di polarizzazione opposto. In tal caso occorre decomporre i campi sottostanti  $\mathbf{E}(t) = a_x(t) [\mathbf{i}_x + q e^{j\delta} \mathbf{i}_y]$ , partendo da:

$$\delta = \arg[s_2 + js_3] \quad q^2 = \frac{1 - \frac{s_1}{s_0}}{1 + \frac{s_1}{s_0}} = \frac{s_0 - s_1}{s_0 + s_1} \quad \mathcal{E}[a_x^2] = \frac{s_0}{1 + q^2}$$

con  $q > 0$ .

## 2 RADIOMETRIA

### Corpo nero

$$B(\omega) = \varepsilon_r \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^3 c^2} \frac{1}{\exp\left[\frac{\hbar \omega}{\mathcal{K}T}\right] - 1}$$

essendo

$\hbar$  la costante di Planck, pari a  $1.055 \cdot 10^{-34} \text{ J}$

$\mathcal{K}$  la costante di Boltzmann, pari a  $1.381 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$

$T$  la temperatura assoluta

$\varepsilon_r$  la costante dielettrica relativa del materiale costituente il corpo nero.

La brillantezza totale aumenta con  $T^4$  seguendo la legge di Stefan–Boltzmann

$$B_{tot} = \varepsilon_r \frac{\pi \mathcal{K}^4}{60 \hbar^3 c^2} T^4 = \varepsilon_r \frac{\sigma T^4}{\pi}$$

dove  $\sigma = 5.673 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$  è la costante di Stefan–Boltzmann. Invece la posizione del massimo è data dalla legge di Wien

$$\frac{\hbar \omega_M}{\mathcal{K}T} = 2.82 \quad \implies \quad f_m = \frac{\omega_M}{2\pi} = 5.87 \cdot 10^{10} \cdot T$$

Il valore della brillantezza nel punto di massimo è

$$B(\omega_M) = \varepsilon_r \frac{9.44 \cdot 10^{-20}}{\pi} T^3$$

Se  $\hbar \omega / \mathcal{K}T \gg 1$ , si usa la legge di Wien:

$$B(\omega) \simeq \varepsilon_r \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^3 c^2} \exp\left[-\frac{\hbar \omega}{\mathcal{K}T}\right] \quad (2)$$

che approssima bene la legge di Planck già per  $\omega > \omega_M$ . A bassa frequenza  $\hbar \omega / \mathcal{K}T \ll 1$ , invece, possiamo approssimare la legge di Planck con

$$B(\omega) \simeq \varepsilon_r \frac{\omega^2}{4\pi^3 c^2} \mathcal{K} T = \varepsilon_r \frac{1}{\pi \lambda^2} \mathcal{K} T$$

detta legge di Rayleigh–Jeans, con un errore minore di 1% se

$$\frac{f}{T} < 0.39 \left[ \frac{GHz}{K} \right]$$

La brillantezza  $B_{GB}(\theta_e, \phi_e)$  di un corpo grigio di emissività  $e^T(\theta_e, \phi_e)$  vale

$$B_{GB}(\theta_e, \phi_e) = \varepsilon_r \frac{1}{\pi \lambda^2} \mathcal{K} \left[ e^T(\theta_e, \phi_e) T \right]$$

La quantità in parentesi quadra è detta *temperatura di brillantezza* della sorgente :

$$T_B(\theta_e, \phi_e) = e^T(\theta_e, \phi_e) T$$

Dal punto di vista del sensore, conviene definire la temperatura apparente  $T_{AP}$  tramite

$$B_i(\theta_s, \phi_s) = \varepsilon_r \frac{1}{\pi \lambda^2} \mathcal{K} T_{AP}(\theta_s, \phi_s)$$

essendo  $B_i(\theta_s, \phi_s)$  la densità spettrale di brillantezza che incide sul sensore dalla direzione  $(\theta_s, \phi_s)$ .

### Trasferimento radiativo

La temperatura apparente in un mezzo senza discontinuit  di costante dielettrica vale

$$T_{AP}(r) = T_{AP}(0) e^{-\mathcal{T}(r_0, r)} + \int_{r_0}^r e^{-\mathcal{T}(r', r)} J(r') k_e(r') dr'$$

dove  $k_e = k_a + k_s$    la costante di estinzione,  $J$  il termine di sorgente e lo spessore ottico vale

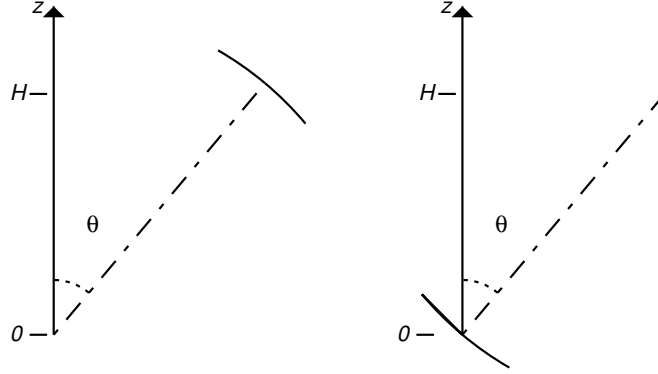
$$\mathcal{T}(r_0, r) = \int_{r_0}^r k_e(r) dr$$

La costante di attenuazione vale

$$k_a = 2 \operatorname{Im}[-k] \quad \text{con} \quad k = \sqrt{\omega_2 \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - j \varepsilon_2) \mu_0} = k_0 \sqrt{\varepsilon_1 - j \varepsilon_2}$$

Se  $\varepsilon_2 \ll \varepsilon_1$

$$k_a \simeq \frac{k_0 \varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon_1}}$$



*Geometria per il calcolo della temperatura di up-welling e di down welling.*

In un mezzo con stratificazione piana

$$T_{UP}(\theta, H) = \int_0^H \exp \left[ -\frac{\mathcal{T}(x, H)}{\cos \theta} \right] k_a(x) T(x) \frac{dx}{\cos \theta}$$

$$T_{DN}(\theta, H) = \int_0^H \exp \left[ -\frac{\mathcal{T}(0, x)}{\cos \theta} \right] k_a(x) T(x) \frac{dx}{\cos \theta}$$

in cui lo spessore ottico   quello **verticale**

$$\mathcal{T}(z', z) = \int_{z'}^z k_e(z'') dz''$$

Se  $k_e$  e  $T$  sono costanti con la quota:  $k_e(z) = k_{e0}$  e  $T(z) = T_0$ , allora

$$T_{UP}(\theta, H) = T_{DN}(\theta, H) = T_0 \frac{k_{a0}}{k_{e0}} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{k_{e0} H}{\cos \theta} \right) \right] = (1 - a) T_0 \left[ 1 - \exp \left( -\frac{k_{e0} H}{\cos \theta} \right) \right]$$

Se assumiamo  $T(y) = T_0$  costante, e l'albedo  $a$  costante, ma  $k_e(z) = k_{e0} e^{-pz}$ , allora

$$T_{DN}(\theta, H) = T_{UP}(\theta, H) = (1 - a) T_0 \left[ 1 - e^{(B-A)} \right]$$

con  $A = k_{e0}/(p \cos \theta)$  e  $B = A e^{-pH}$ .

## Interfacce e strati

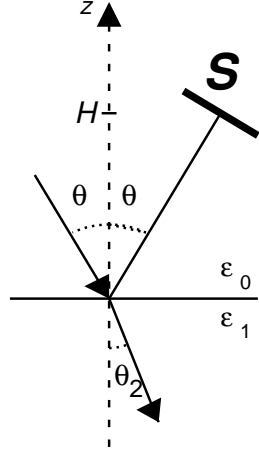


Fig. 1: Geometria complessiva.

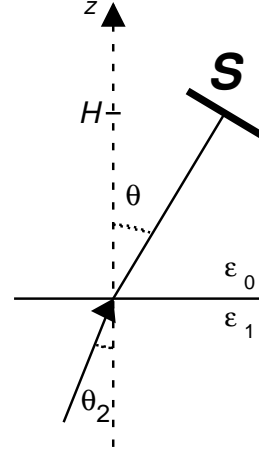


Fig. 2: Geometria relativa alla energia prodotta nel terreno.

L'energia termica che l'atmosfera produce (in forma completamente non polarizzata) e manda verso il basso, e che giunge a un sensore in quota dopo la riflessione sulla superficie terrestre, per ciascuna polarizzazione  $H$  e  $V$ , vale

$$\frac{1}{2} T_{DN}(\theta, \infty) R \frac{1}{L_1}$$

usando il relativo valore di riflettività  $R$ .  $L_1 = \exp \left[ \tau(0, H) / \cos \theta \right]$  è il fattore di attenuazione della atmosfera.

L'energia termica che il terreno produce (in forma completamente non polarizzata) e che giunge a un sensore in quota dopo la trasmissione attraverso la superficie terrestre, per ciascuna polarizzazione  $H$  e  $V$ , vale

$$\frac{1}{2} T_{UP}^{(s)}(\theta_2, \infty) (1 - R) \frac{1}{L_1}$$

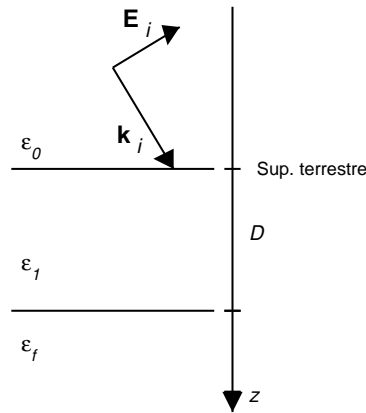


Fig. 3: Geometria dello strato intermedio



Le brillanze alle interfacce si ottengono risolvendo il sistema costituito da

$$\begin{aligned} T_u(0) &= T_u(-D) \frac{1}{L_2} + T_{UP}(\theta_t) \\ T_d(-D) &= T_d(0) \frac{1}{L_2} + T_{DN}(\theta_t) \end{aligned}$$

con  $L_2 = \exp \left[ \tau(-D, 0) / \cos \theta_t \right]$  fattore di attenuazione dello strato, e dalle condizioni di interfaccia

$$\begin{aligned} T_d(0) &= R_A T_u(0) + (1 - R_A) T_{DN}^0(\theta, \infty) \\ T^{u0}(0) &= (1 - R_A) T_u(0) + R_A T_{DN}^0(\theta, \infty) \\ T_u(-D) &= R_B T_d(-D) + (1 - R_B) T_{UP}^f(\theta_{t2}, \infty) \\ T^{df}(-D) &= (1 - R_B) T_d(-D) + R_B T_{UP}^f(\theta_{t2}, \infty) \end{aligned}$$

### Antenne per radiometria

Direttività  $D(\theta, \phi)$  e diagramma di irradiazione  $F(\theta)$  sono approssimabili da

$$D(\theta, \phi) = D_M \cos^{2p} \theta \quad \implies \quad F(\theta) = \left[ \frac{D(\theta, \phi)}{D_M} \right] = \cos^{2p} \theta$$

per  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ , e nulla per  $\theta > \frac{\pi}{2}$ . L'esponente  $p$  può essere trovato a partire dalla semilarghezza di fascio a 3 dB, che indichiamo con  $\theta_3$ .

$$2p = -\frac{0.693}{\log \cos \theta_3} \simeq \frac{1.386}{\theta_3^2} = \frac{4550}{(\theta_{3[deg]})^2}$$

con approssimazioni valide per  $\theta_3$  piccolo.

Il valore massimo della direttività é

$$D_M \simeq 4p \simeq \frac{2.772}{\theta_3^2} = \frac{9100}{(\theta_{3[deg]})^2}$$

che, in funzione della ampiezza dell'angolo solido  $\Omega_p$  corrispondente al lobo principale della antenna, diventa

$$D_M = \frac{8.72}{\Omega_p}$$

Considerando solo l'efficienza  $\eta_L$  dovuta alla dissipazione, il guadagno vale

$$G(\theta, \phi) = \eta_L D(\theta, \phi)$$

### Antenna

La temperatura di antenna ideale vale

$$T_A^i = \int 2K_p(\Omega) \frac{\hat{D}(\Omega)}{4\pi} T_{AP}(\Omega) d\Omega$$

e la temperatura d'antenna effettiva, tenendo conto delle perdite

$$T_A = \eta_L T_A^i + (1 - \eta_L) T_{FA}$$

La temperatura di *main-lobe* vale

$$T_{ML} = \frac{1}{2 K_p(\Omega_{ML})} \left[ \frac{1}{\eta_L \eta_M} T_A - \frac{\eta_m}{\eta_M} \bar{T}_{SL} - \frac{1 - \eta_L}{\eta_L \eta_M} T_{FA} \right]$$

Per i diagrammi di antenna (a simmetria di rotazione) del tipo  $D_M \cos^{2p} \theta$  lo stray factor vale

$$\eta_m = \cos^{2p+1} \theta_{ML} + \Delta \eta_m^B$$

dove l'ultimo termine tiene conto della retroirradiazione. Il suo valore é compreso tra 0.02 e 0.03.

Per determinare  $\theta_{ML}$  occorre fissare il livello a cui si vuole far terminare il lobo centrale. Se questo livello è  $S_{[dB]}$  sotto il picco, allora, posto  $S_{[dB]} = 10 \log_{10} \tilde{S}$ , segue

$$\eta_m \simeq \frac{1}{\tilde{S}} + \Delta \eta_m^B$$

### Ricevitore

Se  $N = B_V T_i$  è il numero di campioni su cui si media, allora l'errore radiometrico di misura vale, per un radiometro a potenza totale

$$(\Delta T_A)^2 = \frac{T_S^2}{N} + \frac{T_S^2}{G_s^2} (\Delta G_s)^2 + (\Delta T_R)^2 = T_S^2 \left[ \frac{1}{N} + \left( \frac{\Delta G_s}{G_s} \right)^2 \right] + (\Delta T_R)^2$$

e per un radiometro di Dicke

$$(\Delta T_A)^2 = \frac{2}{N} \left[ (T_A + T_R)^2 + (T_N + T_R)^2 \right] + (T_A - T_N)^2 \frac{(\Delta G_s)^2}{G_s^2}$$

Se indichiamo con

$$IL = \frac{\text{Potenza senza switch}}{\text{Potenza con switch}}$$

la perdita di inserzione dello switch, la temperatura del ricevitore diventa

$$T_R + (1 - G_{Sw}) T_{fS}$$

### Risoluzione

Se il filtro passa-basso è ideale ed ha una frequenza di taglio

$$f_t \geq \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{1.1} \sqrt{p} \frac{v}{H}$$

allora la risoluzione spaziale vale

$$x_R = \frac{6.6 H}{\sqrt{D_M}}$$

essendo  $H$  la quota e  $v$  la velocità del sensore, e la precisione di misura si ottiene considerando

$$T_i^{eq} = \frac{1}{2f_t}$$

Per un filtro generico, deve aversi invece

$$T_i^{eq} \leq \frac{2.2}{\sqrt{D_M}} \frac{H}{v}$$

essendo il tempo di integrazione equivalente

$$\frac{1}{T_i^{eq}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_L(\omega)|^2 d\omega$$

Per una antenna che ruota a  $n_R$  giri al secondo, con la geometria di Fig. 1, risulta ancora

$$x_R = \frac{6.6 H}{\sqrt{D_M}}$$

a patto di usare un tempo di integrazione equivalente

$$T_i^{eq} \leq \frac{2.2}{\sqrt{D_M}} \frac{1}{2\pi \sin \Theta} \frac{1}{n_R}$$

La risoluzione in direzione della linea di volo vale invece

$$x_{RL} = \frac{6.6 H}{\sqrt{D_M} \cos \Theta}$$

utilizzando una distanza tra due tracce successive pari a

$$x_S \leq \frac{\pi}{\sqrt{D_M}} H$$

e quindi un *tempo di campionamento* pari a

$$t_s \leq \frac{\pi}{\sqrt{D_M}} \frac{H}{v_S}$$

essendo  $v_S$  la velocità del satellite. Dal tempo di campionamento si ottiene poi

$$n_R = \frac{1}{t_s} \geq \frac{\sqrt{D_M}}{\pi} \frac{v_S}{H}$$

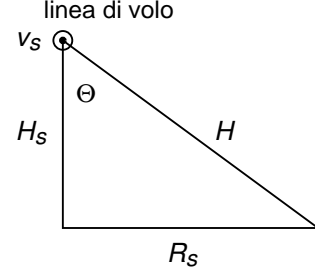


Fig. 1: Geometria di acquisizione (vista laterale).

### 3 RADAR DI IMMAGINE

Dati orbitali	Antenna	Dati sistema
$h$ : quota $\theta$ : angolo di vista $v$ : velocità	$\lambda$ : lunghezza d'onda $L$ : lunghezza $W$ : larghezza $\eta_L$ : efficienza	$PRF(= \frac{1}{T_{PR}})$ : frequenza impulsi $B_{RF}$ : banda totale del radar $P_T$ : potenza trasmettitore $T_R$ : temperatura di rumore ricevitore $T_N$ : temp. di rumore complessiva

Tabella I: Dati di un sistema radar

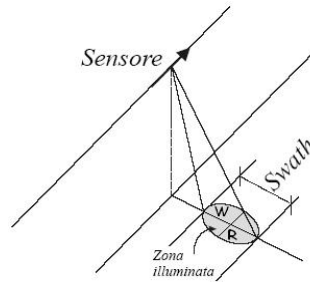


Fig. 1: Geometria di acquisizione di un sensore radar di immagine.

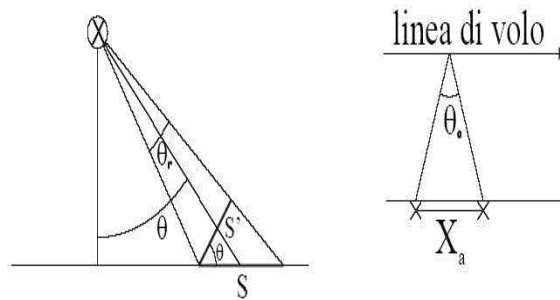


Fig. 2: Viste laterali della geometria di acquisizione.

Larghezza dello swath

$$S = \frac{h\lambda}{W \cos^2 \theta}$$

Lunghezza della zona illuminata a terra nella direzione di azimuth

$$\ell_a = \frac{h\lambda}{L \cos \theta}$$

Tempo totale di viaggio (fino a un punto di ascissa  $R_A$  dal centro dello swath)

$$t_A = t_0 + \frac{2R_A}{c} \sin \theta + \frac{R_A^2}{cD} \cos^2 \theta \simeq t_0 + \frac{2R_A}{c} \sin \theta$$

essendo  $t_0$  il tempo di viaggio corrispondente al centro dello swath, a distanza  $D$  dal sensore.

Risoluzione in range

- impulso non modulato di durata  $\tau$ :  $X_r = \frac{c\tau}{2 \sin \theta}$
- impulso modulato di banda  $B_{RF}$ :  $X_r = \frac{c}{2B_r \sin \theta}$

essendo  $B_r = B_{RF}/N_r$ , e  $N_r$  il numero di medie in range.

Sezione radar equivalente di rumore, e rapporto segnale-rumore

$$\sigma_N^0 = \frac{\mathcal{K} B_X T_N}{\eta_L^2 P_T} \frac{4\pi\lambda}{c\tau_t} \frac{h^3}{W^2 L} \frac{\sin \theta}{\cos^4 \theta} \quad S = \frac{\sigma^0}{\sigma_N^0}$$

essendo  $B_X = B_{RF}$  nel caso di una trasmissione a impulsi (con medie in post-elaborazione) e  $B_X = B_r$  nel caso di trasmissione con chirp, in cui la media viene eseguita dal filtro adattato.

$\tau_t$  é il tempo totale di trasmissione. Introducendo il fattore di compressione del chirp  $\mathcal{C} = B_{RF}\tau_t$  si ha anche, per un **chirp**

$$\sigma_N^0 = \frac{\mathcal{K} B_r T_N}{\eta_L^2 P_T} \frac{4\pi B_{RF}\lambda}{c} \frac{h^3}{W^2 L} \frac{\sin \theta}{\cos^4 \theta} \frac{1}{\mathcal{C}}$$

Distanze fra il sensore e i due estremi dello swath

$$r_1 = \frac{h}{\cos \theta} - \frac{S}{2} \sin \theta \quad r_2 = \frac{h}{\cos \theta} + \frac{S}{2} \sin \theta$$

Assenza di ambiguità in range

$$T_{PR} > \frac{2S}{c} \sin \theta + \tau_t \quad \implies \quad PRF < \frac{c}{2S \sin \theta}$$

Assenza di sovrapposizione tra trasmissione e ricezione

$$\frac{2r_2}{c} + \tau_t < nT_{PR} < T_{PR} + \frac{2r_1}{c} - \tau_t$$

Eliminazione del nadir-echo

$$\frac{2r_2}{c} - \frac{2h}{c} + \tau_t < \bar{n}T_{PR} < T_{PR} + \frac{2r_1}{c} - \frac{2h}{c} - \tau_t$$

Lunghezza antenna sintetica

$$L_S = (2N_S + 1) d_S \leq \ell_a = \frac{h\lambda}{L \cos \theta}$$

essendo  $D_S = v/PRF$  la spaziatura di acquisizione.

Risoluzione in azimuth

$$X_A = \frac{h\lambda}{2L_S \cos \theta} \geq \frac{L}{2}$$

Imposizione del rate di Niquist

$$PRF \geq \frac{2v}{L} \frac{L_S}{\ell_a} \quad \text{e} \quad d_S \leq X_A$$

Condizioni di compatibilità

$$PRF < \frac{cW \cos^2 \theta}{2\lambda h \sin \theta} \quad \text{e} \quad LW > 4 \frac{L_S}{\ell_a} \frac{v}{c} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \lambda h$$

Curvatura del range

$$\Delta r_M = \frac{L_s^2 \cos \theta}{8h} \quad \text{e} \quad M_c = \frac{B_r \cos \theta}{4ch} L_S^2$$

Profondità di messa a fuoco

$$F = \frac{\lambda h^2}{2L_S^2 \sin \theta \cos^2 \theta} = \frac{2X_A^2}{\lambda \sin \theta} \quad \text{e} \quad \frac{S}{F} = \frac{2L_S^2 \sin \theta}{h W}$$

Medie in azimuth su  $N_a$  pixel si ottengono dividendo  $L_S$  in  $N_a$  parti

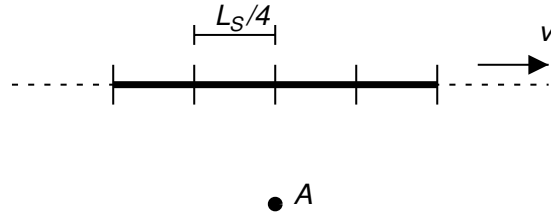


Fig. 3: Partizione della zona di acquisizione del pixel in  $A$  ( $N_A = 4$ ).

Rapporto tra ampiezza delle fluttuazioni e valore medio (dovuto allo speckle), per immagini in potenza, a  $N_V = N_r N_a$  viste

$$ISNR = \frac{\mathcal{E}[P_S]}{\sqrt{\text{var}[P_S]}} = \sqrt{N_V}$$

In presenza di rumore termico, con rapporto segnale–rumore pari a  $S$

$$ISNR = \frac{\sqrt{N_V}}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{S}\right)^2 + \left(\frac{1}{S}\right)^2}} \quad (3)$$

L'effetto della quantizzazione a  $N_b$  bit è di incrementare il rapporto segnale–rumore, che diventa

$$S_T = \frac{S}{1 + \frac{S+1}{S_Q}} \quad \text{con} \quad S_Q = a_q^2 \frac{\sigma_s^2}{D_Q}$$

I valori di  $D_Q$  ed  $a_c$  sono riportati nella tabella che segue

$N_b$	$\frac{D}{\sigma_s^2}$	$a_q^2$
1	0.363	0.570
2	0.119	0.782
3	0.037	0.884
4	0.012	0.945
5	$3.5 \cdot 10^{-3}$	0.973
6	$1.5 \cdot 10^{-3}$	0.990

Tabella II

Campioni per secondo, e bit-rate di picco, all'uscita del sensore

$$R = 2B_{RF} \quad \text{e} \quad R_{bS} = 2N_b B_{RF}$$

Bit-rate medio

$$R_{bS} = 2N_b B_{RF} PRF T_A \quad \text{con}$$

con

$$T_A = 2N_b B_{RF} PRF \left( \tau_t + \frac{2S \sin \theta}{c} \right)$$

tempo di acquisizione.

Rate di uscita del processore

$$K_o = PRF B_{RF} \frac{2S \sin \theta}{c} = B_{RF} \left[ PRF (T_A - \tau_t) \right] \quad \text{pixel/sec}$$

Ogni elaborazione coinvolge

$$N_E = RT_A 2N_s$$

campioni del segnale olografico. Le operazioni necessarie per ogni riga di uscita, senza media in azimuth, sono

$$K_p(N_E) = N_E \log_2 N_E + M_P N_E + M_P N_E \log_2 N_E = \left[ (1 + M_P) \log_2 N_E + M_P \right] N_E$$

$M_P$  è il più grande tra  $M_c$  ed  $S/F$  (ed è intero). In presenza di media su  $N_a$  pixel in azimuth, le operazioni diventano  $N_a \times K_p(N_E/N_a)$  (e ovviamente varia  $F$ ).

## APPENDICE 1: RIFLESSIONE E TRASMISSIONE DA INTERFACCE PIANE

### Singola interfaccia

Per una singola interfaccia, piana e speculare, vale la legge di Snell. L'angolo tra la direzione dell'onda riflessa e l'asse verticale  $z$  vale  $\theta_r = \theta_i$ . Per quanto riguarda la trasmissione, se il secondo mezzo è privo di perdite possiamo definire un angolo di trasmissione  $\theta_t$ , e risulta

$$\sin \theta_i = \sqrt{\varepsilon_{r1}} \sin \theta_t$$

essendo  $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_1/\varepsilon_0$ . In presenza di piccole perdite, posto  $\varepsilon_{r1} = (n - jp)^2$ , con  $n > 1$  e  $p \ll n$ , l'onda trasmessa nel mezzo 1 è ancora sostanzialmente omogenea, e vale allora la relazione precedente a patto di usare  $n$  al posto di  $\sqrt{\varepsilon_{r1}}$ .

Per determinare le ampiezze dei campi occorre tener conto della polarizzazione del campo elettrico incidente. In particolare le polarizzazioni da considerare sono quella orizzontale (H o *TE*) e quella verticale (V o *TM*), riportate in Fig. 2. Nel seguito sceglieremo gli assi  $(x, y)$ , usati per discutere la polarizzazione, nelle direzioni H e V rispettivamente.

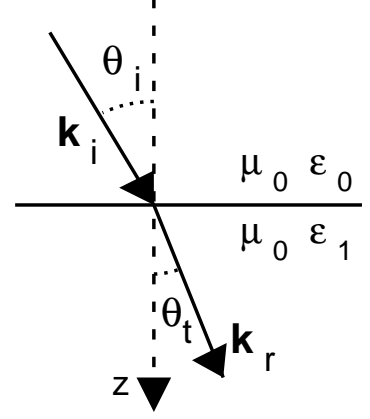


Fig.1: Geometria della legge di Snell

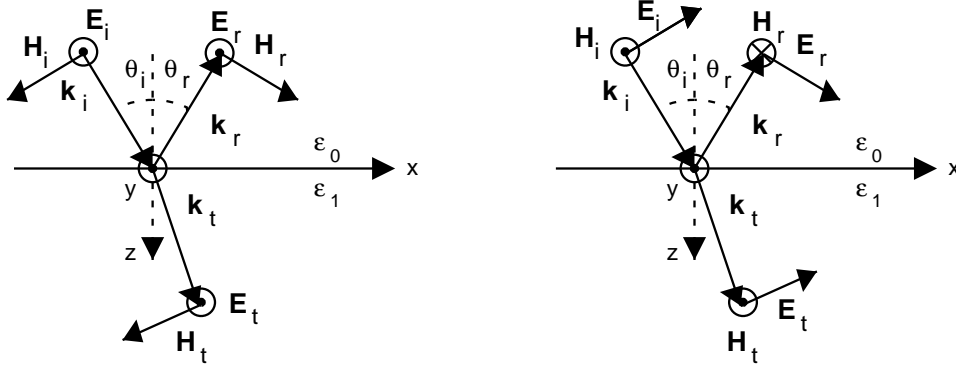


Fig.2: Componenti dei campi in polarizzazione H (a sinistra) e V (a destra).

Le impedenze d'onda dei due mezzi sono, per il vuoto

$$Z_0^H = \frac{\zeta}{\cos \theta_i} \quad Z_0^V = \zeta \cos \theta_i$$

e per il dielettrico

$$Z_1^H = \frac{\zeta}{\sqrt{\varepsilon_{r1} - \sin^2 \theta_i}} \quad Z_1^V = \frac{\zeta}{\varepsilon_{r1}} \sqrt{\varepsilon_{r1} - \sin^2 \theta_i}$$

Risulta inoltre, tenendo conto della geometria di Fig. 2,

$$E_t^H = E_i^H (1 + \Gamma^H) = E_i^H \frac{2Z_1^H}{Z_1^H + Z_0^H}$$

$$E_{tx}^V = E_i^V \cos \theta_i (1 + \Gamma^V) = E_i^V \cos \theta_i \frac{2Z_1^V}{Z_1^V + Z_0^V}$$



Se il mezzo 1 è privo di perdite, allora  $E_t^V = E_{tx}^V / \cos \theta_t$ . Altrimenti occorre utilizzare

$$|E_t|^2 = |E_{tx}^V|^2 + |E_{tz}^V|^2$$

con

$$k_{x0} E_{tx}^V + k_{z1} E_{tz}^V = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{tz}^V = - \frac{\sin \theta_i}{\sqrt{\varepsilon_{r1} - \sin^2 \theta_i}} E_{tx}^V$$

Per una incidenza H, oppure V, il vettore di Poynting della sola onda incidente vale

$$\mathbf{S}_i = \frac{1}{2\zeta} |\mathbf{E}_i|^2 \mathbf{i}_i = S_i \mathbf{i}_i$$

quello dell'onda riflessa

$$\mathbf{S}_r = |\Gamma|^2 S_i \mathbf{i}_r = R S_i \mathbf{i}_r$$

essendo  $R = |\Gamma|^2$  la *riflettività* della superficie. Per l'onda trasmessa, nella sola ipotesi di mezzo 1 privo di perdite, e quindi di impedenze  $Z_1^H$  e  $Z_1^V$  reali, per entrambe le polarizzazioni, si ha

$$\mathbf{S}_t = \frac{\cos \theta_i}{\cos \theta_t} (1 - R) S_i \mathbf{i}_t$$

### Riflessione e trasmissione della brillantezza

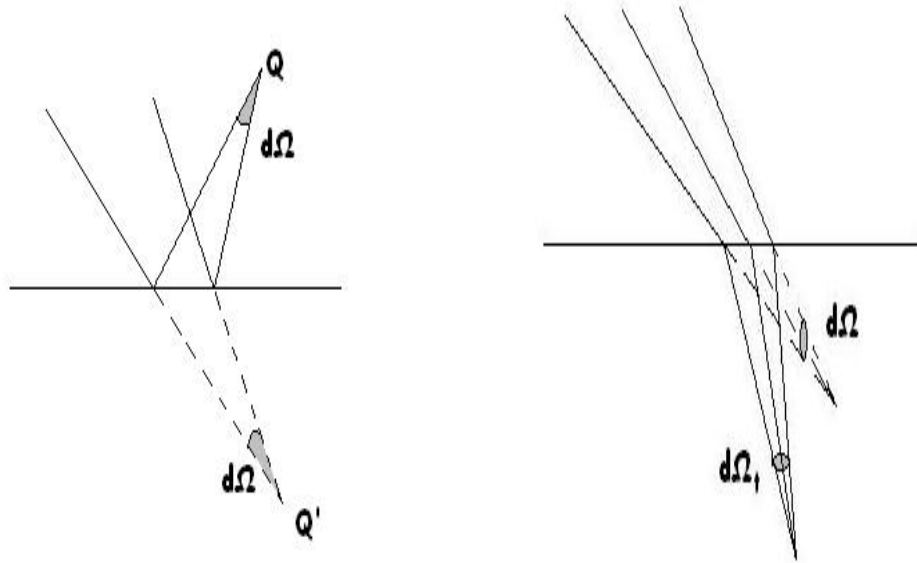


Fig.3: Geometria della riflessione e trasmissione della brillantezza.

Risulta

$$B_r = R B_i \quad B_t = \varepsilon_{r1} (1 - R) B_i$$

e in termini di temperatura di brillantezza

$$T_{Bt} = (1 - R) T_{Bi}$$