

1 BRILLANZA E POTENZA RICEVUTA

Un sistema radiometrico è costituito da un sensore (antenna) che riceve l'energia termica emessa da qualunque corpo a temperatura maggiore di 0 K . Poiché tutto l'ambiente attorno all'antenna emette energia termica, occorre generalizzare i concetti visti per una antenna in ricezione per tener conto che la sorgente risulta essere una sorgente estesa. Poiché inoltre siamo interessati a costruire delle *immagini* (spaziali o angolari) della radiazione termica che arriva al sensore, occorrerà partire dalla definizione della grandezza che ci interessa misurare, collegandola alle proprietà note delle antenne in ricezione.

Consideriamo inizialmente antenne ideali, per le quali direttività D e guadagno G coincidono.

L'energia termica che viene emessa da tutti i corpi ha le caratteristiche di *rumore*, nel senso che ha una correlazione temporale praticamente nulla ed è completamente non polarizzata. Risulta sostanzialmente nulla anche la sua correlazione spaziale, e quindi è possibile sommare le potenze ricevute dal sensore e provenienti da direzioni diverse. La potenza ricevuta, e le proprietà di polarizzazione della radiazione termica possono essere poi modificate nella propagazione dal mezzo interposto tra la sorgente e il sensore.

Una antenna ha proprietà direzionali, ed è quindi in grado di discriminare la potenza che arriva da direzioni diverse, ma non la distanza a cui tale radiazione è stata prodotta o modificata. Pertanto conviene caratterizzare le sorgenti (o meglio l'ambiente che vede il sensore) mediante una proprietà dipendente solo dall'angolo. Supponiamo allora che tutta la potenza termica arrivi da una sfera (o meglio da una semisfera) di raggio R centrata sul sensore, come in Fig. 1, e che tra la sfera e il sensore ci sia il vuoto, in modo che non vi sia alcun effetto sulla propagazione. Fissiamo anche un sistema sferico con centro il sensore e asse polare $\theta = 0$ ortogonale al sensore stesso.

Prendiamo una porzione $d\sigma$ di tale sfera, e sia $d\Omega$ l'angolo solido corrispondente

$$d\Omega = \frac{d\sigma}{R^2}$$

Tale porzione di sfera, che si trova nella direzione $\Omega = (\theta, \varphi)$, produrrà un campo incidente con vettore di Poynting $dS(\Omega)$ ¹ che punta verso il sensore. La potenza (disponibile) dovuta a $d\sigma$ e ricevuta sarà allora

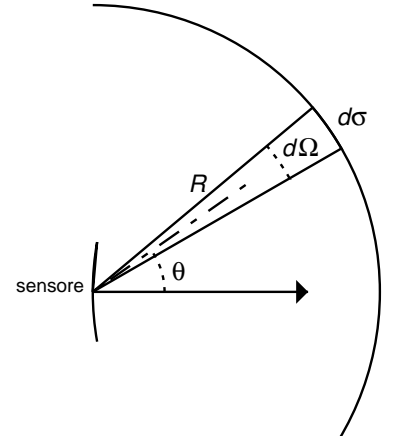


Fig. 1: Geometria di acquisizione radiometrica.

¹ Nel seguito considereremo in genere le *densità spettrali* delle varie grandezze coinvolte, senza ulteriori specificazioni. Quando sarà necessario distinguere tra densità spettrali e grandezze totali, utilizzeremo per le prime un pedice, ad esempio dS_ω , oppure indicheremo esplicitamente la dipendenza dalla frequenza, ad esempio $B(\omega)$.

$$dP_r = K_p(\Omega) A_e(\Omega) dS(\Omega) \quad (1)$$

essendo A_e l'area efficace della antenna ricevente nella direzione Ω e K_p l'efficienza di polarizzazione (pari a 1/2 se la radiazione incidente è ancora completamente non polarizzata). Poiché la radiazione è spazialmente incoerente la potenza totale si ottiene integrando la (1):

$$P_r = \int K_p(\Omega) A_e(\Omega) dS(\Omega) \quad (2)$$

Possiamo collegare la densità di potenza incidente $dS(\Omega)$ a una proprietà della sorgente detta *Brillanza*, che indichiamo con $B(\Omega)$:

$$dS(\Omega) = \frac{1}{R^2} B(\Omega) d\sigma = B(\Omega) d\Omega \quad (3)$$

e che dipende dalla direzione di arrivo ma non dalla distanza sensore-sorgente. La brillanza è quindi la grandezza adatta ad essere visualizzata da un sensore, come una antenna, che è in grado di discriminare solo la direzione.

Utilizzando la brillanza la (2) può essere espressa come:

$$P_r = \int K_p(\Omega) A_e(\Omega) B(\Omega) d\Omega = \frac{\lambda^2}{4\pi} \int K_p(\Omega) G(\Omega) B(\Omega) d\Omega \quad (4)$$

avendo introdotto il guadagno G della antenna. Se la sorgente occupa un un angolo $\Delta\Omega$ piccolo, intorno a Ω_0 allora l'integrale della (4) va esteso solo a $\Delta\Omega$, angolo in cui le grandezze dell'antenna sono considerabili costanti, e si trova

$$P_r \simeq \frac{\lambda^2}{4\pi} K_p(\Omega_0) G(\Omega_0) \int_{\Delta\Omega} B(\Omega) d\Omega = \frac{\lambda^2}{4\pi} K_p(\Omega_0) G(\Omega_0) \Delta\Omega \frac{\int_{\Delta\Omega} B(\Omega) d\Omega}{\Delta\Omega}$$

dove l'ultimo termine é il valor medio della brillanza della sorgente.

Concludiamo questo parametro con la considerazione che la brillanza è un parametro che va sempre riferito al sensore, ed è quindi, fissata la direzione di arrivo, concettualmente indipendente da dove viene prodotta l'energia corrispondente, e da come si propaga.

2 POTERE EMISSIVO – CORPO NERO

Oltre alla brillanza, un altro parametro di interesse della sorgente è il *potere emissivo* E , ovvero la potenza totale emessa da un corpo per unità di superficie. Se Σ è la superficie che stiamo considerando (vedi Fig. 1a), il potere emissivo è calcolabile dal teorema di Poynting come:

$$\Sigma E = \int S R^2 d\Omega' \quad (5)$$

essendo S il vettore di Poynting (o meglio la sua componente radiale) valutata a distanza R .

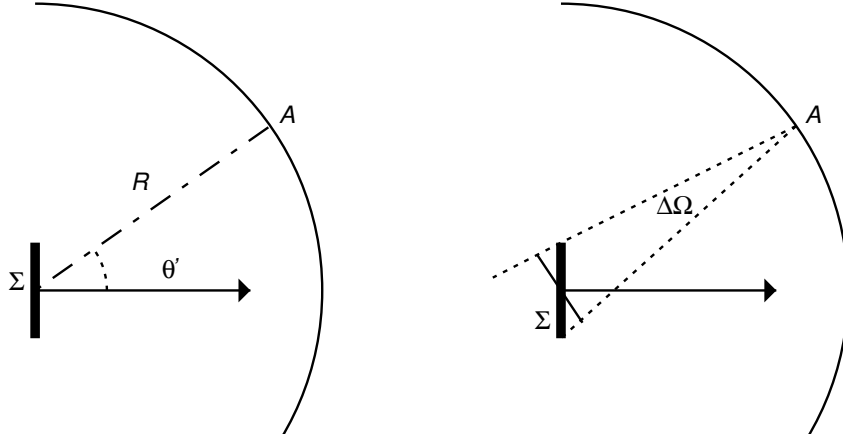


Fig. 1: a) geometria per il calcolo della potenza totale emessa (eq. (5));
b) calcolo della relazione tra $\Delta\Omega$ e Σ .

Introducendo la brillantezza $B(\Omega')$ della superficie Σ , valutata da un sensore¹ posto nel punto A , ad un angolo Ω' (in un sistema sferico con asse z ortogonale alla superficie Σ) possiamo scrivere la (5) come

$$\Sigma E = \int B(\Omega') \Delta\Omega R^2 d\Omega' \quad (6)$$

essendo $\Delta\Omega$ l'angolo solido sotto cui viene vista (da una distanza R) la superficie Σ . Dalla definizione di angolo solido segue che $\Delta\Omega R^2$ è l'area della superficie ortogonale alla congiungente tra il punto A e il centro di Σ , come in Fig. 1b. Quindi

$$\Sigma = \Delta\Omega R^2 \frac{1}{\cos \theta'}$$

e segue

$$E = \int B(\Omega') \cos \theta' d\Omega' \quad (7)$$

Se la brillantezza $B(\Omega')$ è indipendente dalla direzione di osservazione $B(\Omega') = B_0$ allora

$$E = \int B_0 \cos \theta' d\Omega' = B_0 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta' \sin \theta' d\theta' = \pi B_0 \quad (8)$$

Il potere emissivo E è legato all'assorbimento della radiazione incidente. Definiamo coefficiente di assorbimento α^T il rapporto tra la potenza assorbita dalla superficie e quella incidente (supposto indipendente dalla direzione di incidenza). Dai principi della termodinamica si può dimostrare (legge di Kirchhoff) che in condizioni di equilibrio termodinamico (o, almeno, in condizioni di equilibrio termodinamico locale) il rapporto

$$\frac{E}{\alpha^T}$$

¹ Poiché stiamo misurando la brillantezza della sorgente Σ , occorre che tra Σ e il punto A vi sia il vuoto.

è indipendente dalla natura del corpo e dipende solo dalla temperatura (oltre che dalla frequenza).

Per valutare tale rapporto si utilizza il *corpo nero* che ha le seguenti proprietà:

- assorbe tutta la radiazione incidente (ovvero $\alpha_{BB}^T = 1$);
- ha una brillantezza indipendente dalla direzione.

Detta $B_{BB}(\omega, T)$ la brillantezza di un corpo nero, che dipende solo da temperatura e frequenza, ed E_{BB} la sua emissività, si ha allora per qualunque corpo:

$$\frac{E}{\alpha^T} = \frac{E_{BB}}{\alpha_{BB}^T} = \frac{E_{BB}}{1} \implies E = \alpha^T E_{BB} \quad (9)$$

ed essendo, da (8), $E_{BB} = \pi B_{BB}(\omega, T)$, segue

$$E = \alpha^T \pi B_{BB}(\omega, T) \quad (10)$$

Il corpo nero è evidentemente una idealizzazione, e verrà quindi utilizzato come caso limite o come riferimento. Un qualunque corpo ha $\alpha^T < 1$ (corpo grigio), e funzione della direzione. Nel caso della radiometria a microonde, comunque, gli oggetti di interesse sono *amorfi*, ovvero costituiti da agglomerati di piccole particelle con orientazione uniformemente distribuita. Pertanto per essi possiamo assumere α^T e B indipendenti dalla direzione. La loro brillantezza B può essere calcolata dalla (8) e dalla legge di Kirchhoff:

$$\frac{\pi B}{\alpha^T} = \pi B_{BB}$$

ovvero

$$B = \alpha^T B_{BB} \quad (11)$$

Il coefficiente di assorbimento è quindi anche pari alla *emissività* e^T , rapporto tra il potere emissivo (o la brillantezza) di un corpo e quello corrispondente di un corpo nero alla medesima temperatura:

$$e^T = \frac{E}{E_{BB}} = \frac{B}{B_{BB}} = \alpha^T \quad (12)$$

3 LEGGE DI PLANCK

La densità spettrale di brillantezza di un corpo nero ¹ $B(\omega)$, definita da²

$$B_{tot} = \int_0^\infty B(\omega) d\omega \quad (13)$$

¹ Nel seguito sottintenderemo il pedice BB in quanto ci riferiremo solo a corpi neri.

² La brillantezza è evidentemente associata a un campo elettromagnetico aleatorio, che ha una sua densità spettrale $S_B(\omega)$, simmetrica rispetto all'origine. In base alla definizione di densità spettrale, risulta $S_B(\omega) = \pi B(|\omega|)$

è data dalla legge di Planck

$$B(\omega) = \varepsilon_r \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^3 c^2} \frac{1}{\exp\left[\frac{\hbar \omega}{\mathcal{K}T}\right] - 1} \quad (14)$$

essendo

\hbar la costante di Planck, pari a $1.055 \cdot 10^{-34} J$

\mathcal{K} la costante di Boltzmann, pari a $1.381 \cdot 10^{-23} J/K$

T la temperatura assoluta

ε_r la costante dielettrica relativa del materiale costituente il corpo nero.

La forma tipica della legge di Planck non prevede la costante dielettrica, in quanto si fa riferimento al vuoto. Nel nostro caso, invece, la presenza di ε_r è necessaria in quanto considereremo spesso emissioni termiche di materiali densi (es, il terreno).

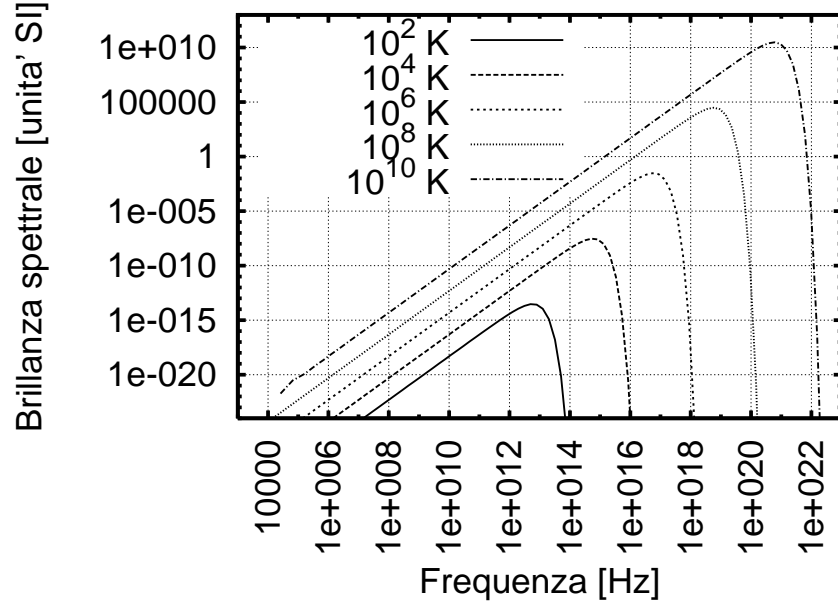


Fig.1: Andamento della brillanza al variare della frequenza (legge di Planck).

Dal grafico della legge di Planck (Fig. 1) si nota che (in scala logaritmica) la brillanza cresce quasi linearmente fino a un punto ω_M di massimo, e poi diminuisce molto bruscamente. Al crescere della temperatura, inoltre, sia i valori di B (incluso il massimo B_M), sia la posizione del massimo ω_M aumentano.

In particolare si trova che la brillanza totale aumenta con T^4 seguendo la legge di Stefan–Boltzmann (vedi Appendice)

$$B_{tot} = \varepsilon_r \frac{\pi \mathcal{K}^4}{60 \hbar^3 c^2} T^4 = \varepsilon_r \frac{\sigma T^4}{\pi} \quad (15)$$

dove $\sigma = 5.673 \cdot 10^{-8} W/m^2 K^4$ è la costante di Stefan–Boltzmann.

Invece la posizione del massimo è data dalla legge di Wien

$$\frac{\hbar \omega_M}{\mathcal{K}T} = 2.82 \quad (16)$$

ovvero

$$f_m = \frac{\omega_M}{2\pi} = 5.87 \cdot 10^{10} \cdot T = 58.7 \text{ T} \quad [GHz]$$

Il valore della brillantezza nel punto di massimo è

$$B(\omega_M) = \varepsilon_r \frac{9.44 \cdot 10^{-20}}{\pi} T^3$$

A partire dalla densità spettrale (14) è possibile (vedi Appendice) calcolare l'autocorrelazione della radiazione termica, e il suo tempo di correlazione. In particolare quest'ultimo vale

$$T_c = 3.2 \left[\frac{\hbar}{2\pi kT} \right] = \frac{24.5}{T_{[K]}} \text{ psec}$$

4 LEGGE DI WIEN E DI RAYLEIGH-JEANS

L'andamento della legge di Planck (Fig. 1) suggerisce che nei casi limite di *bassa* ed *alta* frequenza sono possibili approssimazioni più semplici e ragionevolmente precise.

Consideriamo dapprima il caso di alta frequenza. Se $\hbar\omega/\mathcal{K}T \gg 1$, possiamo trascurare 1 rispetto all'esponenziale al denominatore, ottenendo la legge di Wien:

$$B(\omega) \simeq \varepsilon_r \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^3 c^2} \exp \left[-\frac{\hbar\omega}{\mathcal{K}T} \right] \quad (17)$$

che approssima bene la legge di Planck già per $\omega > \omega_M$.

A bassa frequenza $\hbar\omega/\mathcal{K}T \ll 1$, invece, possiamo approssimare l'esponenziale col suo sviluppo in serie ottenendo

$$B(\omega) \simeq \varepsilon_r \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^3 c^2} \frac{1}{\left[1 + \frac{\hbar\omega}{\mathcal{K}T} \right] - 1} = \varepsilon_r \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^3 c^2} \frac{\mathcal{K}T}{\hbar\omega} = \varepsilon_r \frac{\omega^2}{4\pi^3 c^2} \mathcal{K}T \quad (18)$$

detta legge di Rayleigh-Jeans. L'assenza di \hbar in questa formula mostra che questa è una legge *classica*. Infatti $\hbar\omega \ll \mathcal{K}T$ implica che gli effetti quantistici, di ampiezza $\hbar\omega$, sono trascurabili rispetto alla agitazione termica $\mathcal{K}T$.

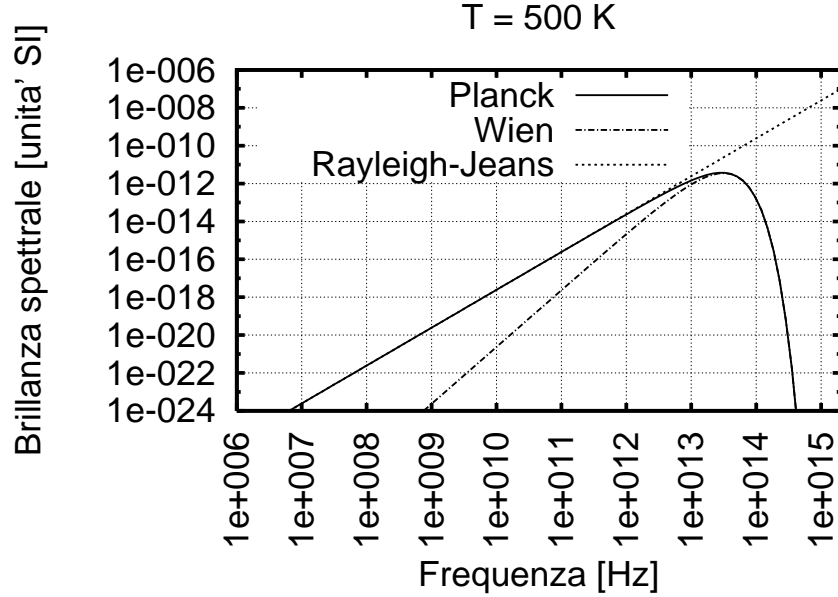


Fig.2: Approssimazioni della legge di Planck.

Confrontando la legge di Rayleigh–Jeans con la legge di Planck (vedi anche Fig. 2) si trova che l'errore della prima è minore di 1% se

$$\frac{f}{T} < 0.39 \left[\frac{GHz}{K} \right]$$

La legge di Rayleigh–Jeans viene usualmente scritta introducendo la lunghezza d'onda nel vuoto λ come

$$B(\omega) = \varepsilon_r \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \mathcal{K}T = \varepsilon_r \frac{1}{\pi\lambda^2} \mathcal{K}T \quad (19)$$

Notiamo esplicitamente che tale espressione va comunque integrata in $d\omega$.

Se consideriamo, nella banda delle microonde, un corpo grigio di emissività $e^T(\theta_e, \phi_e)$, in generale dipendente dalla direzione da cui si osserva il corpo, la sua brillanza $B_{GB}(\theta_e, \phi_e)$ è data¹ da (12):

$$B_{GB}(\theta_e, \phi_e) = e^T(\theta_e, \phi_e) B(\omega) = e^T(\theta, \phi) \varepsilon_r \frac{1}{\pi\lambda^2} \mathcal{K}T = \varepsilon_r \frac{1}{\pi\lambda^2} \mathcal{K} \left[e^T(\theta_e, \phi_e) T \right] \quad (20)$$

La quantità in parentesi quadra, che è quella che può essere misurata dal sensore, è detta *temperatura di brillanza* della sorgente (in inglese *brightness temperature*):

$$T_B(\theta_e, \phi_e) = e^T(\theta_e, \phi_e) T \quad (21)$$

La temperatura di brillanza è un parametro di emissione della sorgente, ed è concettualmente una **potenza**, o meglio una brillanza, che viene misurata da un sensore che vede il corpo grigio attraverso il vuoto.

¹ Si noti che (θ_e, ϕ_e) è qui la direzione, rispetto a un sistema di riferimento posto nel corpo grigio, a cui va posto un sensore che riceve B_{GB} .

Dal punto di vista del sensore, conviene usare la legge di Rayleigh–Jeans per definire un'altra temperatura radiometrica, detta *temperatura apparente* T_{AP} , funzione dalla direzione di vista del sensore (θ_s, ϕ_s) (quelle rispetto a cui un sensore costruisce una mappa di brillanza), che dipende da tutte le sorgenti poste davanti al sensore, nonché dalla interazione dei segnali radiometrici con il mezzo interposto. Risulta

$$B_i(\theta_s, \phi_s) = \varepsilon_r \frac{1}{\pi \lambda^2} \mathcal{K} T_{AP}(\theta_s, \phi_s) \quad (22)$$

essendo $B_i(\theta_s, \phi_s)$ la densità spettrale di brillanza che incide sul sensore dalla direzione (θ_s, ϕ_s) .

Si noti che, in generale, $T_{AP} \neq T_B$, a meno che il mezzo tra la sorgente di brillanza e il sensore non sia privo di perdite (come spesso può essere considerata l'aria limpida, almeno tra 1 e 10 *Ghz*).

Sostituendo la (22) nella (4) si ottiene l'espressione della potenza ricevuta da un sensore in aria ($\varepsilon_r = 1$) in funzione della temperatura apparente

$$\begin{aligned} P_r &= \int K_p(\Omega) A_e(\Omega) B(\Omega) d\Omega = \int K_p(\Omega) A_e(\Omega) \frac{\mathcal{K}}{\pi \lambda^2} T_{AP}(\Omega) d\Omega \\ &= \frac{\mathcal{K}}{\pi \lambda^2} \int K_p(\Omega) A_e(\Omega) T_{AP}(\Omega) d\Omega \end{aligned} \quad (23)$$

e, equivalentemente

$$\begin{aligned} P_r &= \frac{\lambda^2}{4\pi} \int K_p(\Omega) G(\Omega) B(\Omega) d\Omega = \frac{\lambda^2}{4\pi} \int K_p(\Omega) G(\Omega) \frac{\mathcal{K}}{\pi \lambda^2} T_{AP}(\Omega) d\Omega \\ &= \frac{\mathcal{K}}{\pi} \int K_p(\Omega) \frac{G(\Omega)}{4\pi} T_{AP}(\Omega) d\Omega \end{aligned} \quad (24)$$

Le ultime due equazioni possono anche essere espresse in termini di parametri del sensore ideale, tenendo conto separatamente della presenza di perdite tramite la efficienza del sensore η_L , definita dal rapporto tra potenza irradiata e potenza di ingresso (col sensore in trasmissione)

$$\eta_L = \frac{P_{irr}}{P_{IN}} \quad (25)$$

Usando η_L possiamo introdurre la direttività del sensore

$$G(\Omega) = \eta_L D(\Omega)$$

e l'area efficace della antenna ideale

$$A_e^I(\Omega) = \frac{\lambda^2}{4\pi} D(\Omega) \quad (26)$$

Usandole, le (23,24) diventano rispettivamente

$$P_r = \eta_L \frac{\mathcal{K}}{\pi} \int K_p(\Omega) \frac{D(\Omega)}{4\pi} T_{AP}(\Omega) d\Omega \quad (27)$$

e, essendo da (26), $A_e(\Omega) = \eta_L A_e^I(\Omega)$,

$$P_r = \eta_L \frac{\mathcal{K}}{\pi \lambda^2} \int K_p(\Omega) A_e^I(\Omega) T_{AP}(\Omega) d\Omega \quad (28)$$

5 EQUAZIONI DEL TRASFERIMENTO RADIATIVO

In un ambiente reale, il flusso di energia elettromagnetica viaggia, in ogni punto dello spazio, in tutte le direzioni. Inoltre tale flusso interagisce con il materiale di cui è composto il mezzo. È possibile studiare l'interazione locale di tali flussi, costruendo una equazione di bilancio dipotenze, che può poi essere espressa in termini di brillantezza.

Consideriamo, come in Fig. 1, un flusso di brillantezza verso il sensore S_e , e un cilindretto di lunghezza infinitesima dr , ortogonale alla direzione di propagazione verso il sensore. Prendiamo un sistema di riferimento con asse r orientato nella direzione di propagazione, e definiamo $B(r)$ come la brillantezza che raggiunge il sensore se, nel cono di Fig. 1, il mezzo effettivo è sostituito dal vuoto dalla sezione alla ascissa r fino al sensore. La definizione di $B(r + \Delta r)$ è analoga, sostituendo il mezzo effettivo col vuoto fino a $r + \Delta r$. Possiamo allora chiamare $B(r)$ come brillantezza *entrante* nel volume, e $B(r + \Delta r)$ come brillantezza *uscente*, benché questi termini non possano essere intesi letteralmente.

Utilizzando il teorema di Poynting, risulterà

$$B(r + \Delta r) - B(r) = \left(\begin{array}{c} \text{brillantezza} \\ \text{prodotta} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{brillantezza entrante} \\ \text{lateralmente} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{brillantezza} \\ \text{dissipata} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{brillantezza uscente} \\ \text{lateralmente} \end{array} \right) \quad (29)$$

Valutiamo separatamente i termini della (29), iniziando con la brillantezza dissipata. Dalla (29) segue che

$$\left(\begin{array}{c} \text{brillantezza} \\ \text{dissipata} \end{array} \right) = \left[B(r) - B(r + \Delta r) \right]_{\text{solo dissipazione}} \quad (30)$$

e il secondo membro può essere collegato alla potenza dissipata all'interno del volume in caso di propagazione di una onda piana. La potenza dissipata può essere calcolata facilmente considerando che, se il mezzo ha una costante dielettrica $\varepsilon_0(\varepsilon_1 - j\varepsilon_2)$, la costante di propagazione

$$k = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - j\varepsilon_2) \mu_0} = k_0 \sqrt{\varepsilon_1 - j\varepsilon_2} = \beta - j\alpha \quad (31)$$

essendo k_0 la costante di propagazione del vuoto, ha una parte immaginaria, responsabile della dissipazione, diversa da zero.

Il vettore di Poynting associato al flusso di brillantezza varierà come

$$S(r + dr) = S(r) e^{-2\alpha dr}$$

Nelle due situazioni costruite per misurare $B(r)$ e $B(r + \Delta r)$, le potenze che arrivano al sensore sono esattamente quelle legate alla propagazione (verso il sensore) di $S(r)$ e di $S(r + \Delta r)$. Possiamo allora dividere per $\Delta\Omega$ ottenendo

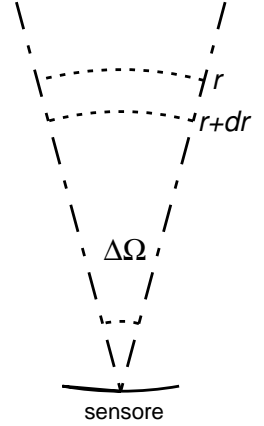


Fig. 1: Geometria.

$$B(r + dr) = B(r) e^{-2\alpha dr}$$

Sostituendo nella (30) e ponendo $\Delta r = dr$ infinitesimo,

$$B_{diss} = B(r) - B(r + dr) = B(r) \left[1 - e^{-2\alpha dr} \right] \simeq B(r) \left[2\alpha dr \right] \quad (32)$$

Introducendo il *coefficiente di assorbimento*, dato da $k_a = 2\alpha$ e quindi legato direttamente ai parametri del mezzo, si ottiene, in definitiva

$$B_{diss} = k_a dr B(r) \quad (33)$$

Per quanto riguarda invece il termine di brillantezza prodotta internamente al cilindretto, il materiale contenuto può essere considerato un corpo grigio a temperatura T , maggiore dello zero assoluto, pari alla sua temperatura termodinamica. Quindi produce brillantezza, in tutte le direzioni, con le caratteristiche del rumore (campo completamente non polarizzato, incorrelato con altre sorgenti). La brillantezza prodotta è pari a $e^T B_{BB}(\omega, T)$. Per la legge di Kirchhoff (12), l'emissività è pari al rapporto tra potenza dissipata e potenza incidente. Dalla (24) segue quindi $e^T = k_a dr$ e

$$\left(\begin{array}{c} \text{brillantezza} \\ \text{prodotta} \end{array} \right) = k_a dr B_{BB}(\omega, T) = k_a \varepsilon_r \frac{\mathcal{K}}{\pi \lambda^2} T dr \quad (34)$$

per la legge di Rayleigh-Jeans (19).

Oltre a questi termini, è presente nel materiale (e in particolare nel volume considerato) anche un flusso di brillantezza in tutte le direzioni. Tutti questi flussi interagiscono con le particelle costituenti il materiale, che vengono *polarizzate* e si trasformano in dipoli, reirradiando in tutte le direzioni. Si ha quindi un fenomeno di *diffusione* all'interno del materiale omogeneo, che, da un punto di vista macroscopico, equivale a dire che una parte della energia che entra da una data direzione, esce da tutte le altre.

La frazione di potenza che viene diffusa dipende in maniera essenziale dal rapporto tra le dimensioni della particella, e la lunghezza d'onda. Se questo rapporto è molto più piccolo di 1, la diffusione può essere trascurabile rispetto agli altri fenomeni già visti (assorbimento e produzione di brillantezza). Ma già per rapporti dell'ordine di grandezza di 10^{-2} la diffusione diventa sensibile, pur essendo il materiale ancora considerabile omogeneo. Se poi il rapporto è dell'ordine di grandezza di 1 o più grande, la diffusione diventa molto importante. Nel caso delle microonde, quindi, la diffusione in aria limpida, con particelle inferiori al μm , è sostanzialmente trascurabile. Invece nuvole e pioggia, con particelle anche millimetriche, possono produrre, specie ad alta frequenza, una diffusione apprezzabile.

Dal punto di vista del bilancio di potenza (29), la diffusione è responsabile del secondo e quarto termine a secondo membro. Iniziamo dall'ultimo termine. La potenza che entra in r in parte viene trasmessa nella stessa direzione ed esce da $r + dr$, e in parte viene deviata in tutte le direzioni. Dal punto di vista del bilancio (29), che è relativo alla propagazione verso il sensore, questa parte è persa. Per valutarla, notiamo che la potenza dissipata deve essere proporzionale a quella incidente (il fenomeno è chiaramente lineare). Inoltre la potenza persa per diffusione

dipenderà dalla quantità di particelle diffondenti, ovvero da volume¹ e densità delle particelle, nonché dalla loro natura.

In maniera analoga a (24) possiamo allora scrivere

$$\left(\begin{array}{c} \text{brillanza uscente} \\ \text{lateralmente} \end{array} \right) = k_s dr B(r) \quad (35)$$

Il parametro k_s è detto coefficiente di diffusione, e dipende dalla densità e natura delle particelle.

Ovviamente, tutti i flussi di brillanza che entrano nel volume dalle varie direzioni subiscono la stessa sorte della potenza che entra dall'alto. Ovvero, una parte di questa potenza viene deviata. Della potenza deviata per diffusione, una frazione viene inviata verso il sensore, dando luogo al termine di *brillanza entrante lateralmente* della (29). Questo termine è notevolmente più complesso degli altri, in quanto è in realtà una somma su tutt i flussi entranti da tutte le direzioni, flussi che sono evidentemente diversi l'uno dall'altro. Poiché però è sempre coinvolta la diffusione dalla particelle del volume, tale termine può essere espresso come

$$\left(\begin{array}{c} \text{brillanza uscente} \\ \text{lateralmente} \end{array} \right) = k_s J_s dr \quad (36)$$

conglobando nel termine di *sorgente per diffusione* J_s tutta la complessità del problema².

Introduciamo il *coefficiente di estinzione* $k_e = k_a + k_s$ e l'*albedo di singola diffusione* $a = k_s/k_e$, che misura l'importanza relativa della diffusione, e riscriviamo la (29) come

$$B(r + dr) - B(r) = -k_e B(r) dr + (1 - a) k_e \varepsilon_r \frac{\mathcal{K}}{\pi \lambda^2} T dr + a k_e j_s dr$$

Dividendo per dr e passando al limite per $dr \rightarrow 0$ segue l'equazione del trasferimento radiativo

$$\frac{d}{dr} B(r) = -k_e B(r) + k_e \left[(1 - a) \varepsilon_r \frac{\mathcal{K}}{\pi \lambda^2} T + a j_s \right] \quad (37)$$

La brillanza può essere espressa in termini di temperatura di apparente T_{AP} tramite la (22), ottenendo l'equazione (37) nella forma

$$\frac{d}{dr} T_{AP} = -k_e T_{AP} + k_e \left[(1 - a) T + a \frac{\pi \lambda^2}{\varepsilon_r \mathcal{K}} j_s \right] = -k_e T_{AP} + k_e J \quad (38)$$

avendo conglobato in J tutto il termine di sorgente, (formalmente) noto. La soluzione della equazione del trasferimento radiativo dipende dalla variazione della costante dielettrica con la posizione. Cominciamo a considerare la soluzione in un mezzo in cui la costante dielettrica varia in maniera continua con la posizione spaziale.

In ogni caso, sia k_e , sia J sono grandezze che possono dipendere dalla posizione r , e quindi l'equazione (38) non è a coefficienti costanti. Conviene allora introdurre come variabile indipendente, al posto di r , lo *spessore ottico* tra le ascisse r_0 ed r :

¹ Ragionando in termini di brillanza, la dipendenza dal volume diventa una dipendenza da dr , grazie alla definizione di brillanza (3).

² Il discorso sulla diffusione di volume verrà affrontato successivamente dal punto di vista quantitativo

$$\mathcal{T}(r_0, r) = \int_{r_0}^r k_e(r) dr \quad \Longrightarrow \quad d\mathcal{T} = k_e dr \quad (39)$$

che misura l'estinzione totale tra le ascisse r_0 ed r . Lo spessore ottico, come funzione di due argomenti, è antisimmetrico rispetto allo scambio degli argomenti $\mathcal{T}(r', r'') = -\mathcal{T}(r'', r')$. Inoltre, essendo definito tramite integrale, risulta

$$\mathcal{T}(r'', r') + \mathcal{T}(r', r) = \mathcal{T}(r'', r)$$

In termini di \mathcal{T}

$$\frac{dT_{AP}}{d\mathcal{T}} = \frac{dT_{AP}}{dr} \frac{dr}{d\mathcal{T}} = \frac{dT_{AP}}{dr} \left(\frac{d\mathcal{T}}{dr} \right)^{-1} = \frac{1}{k_e(r)} \frac{dT_{AP}}{dr}$$

per cui, dividendo la (38) per k_e , segue la forma standard della equazione del trasferimento radiativo

$$\frac{dT_{AP}}{d\mathcal{T}} = -T_{AP} + J \quad (40)$$

La soluzione (formale) di questa equazione³ è

$$T_{AP}(r) = T_{AP}(r_0) e^{-\mathcal{T}(r_0, r)} + \int_{r_0}^r e^{-\mathcal{T}(r', r)} J(r') k_e(r') dr' \quad (41)$$

L'equazione così scritta si presta facilmente ad un'interpretazione fisica. La brillantezza in r è la somma di due termini

- il valore della brillantezza nel punto iniziale r_0 , che si attenua nella propagazione fra r_0 e r , sia a causa dell'assorbimento, sia a causa delle perdite per diffusione, attenuazione calcolata dallo spessore ottico tra il punto iniziale e finale della propagazione;
- la produzione di brillantezza fra r_0 e r , ovvero il contributo alla brillantezza dovuto alle sorgenti presenti fra r_0 e r . Ciascuna di queste sorgenti si troverà in un punto r' compreso tra 0 e r , quindi il contributo di quella sorgente alla brillantezza verrà attenuato nel tragitto fra r' e r .

Se, come supporremo per ora, è possibile trascurare il termine di sorgente di diffusione, allora, da (38), $k_e J = k_e(1 - a)T = k_a T$ e la (41) diventa

$$T_{AP}(r) = T_{AP}(0) e^{-\mathcal{T}(r_0, r)} + \int_{r_0}^r e^{-\mathcal{T}(r', r)} k_a(r') T(r') dr' \quad (42)$$

³ Per gli sviluppi analitici si veda l'appendice

6 TRASFERIMENTO RADIATIVO IN MEZZI OMOGENEI

Come già detto, la soluzione della equazione del trasferimento radiativo dipende dalla variazione dei parametri con la posizione. Nel seguito saremo interessati solo a situazioni in cui tutti i parametri variano solo con una coordinata, che indicheremo con z . Quindi assumeremo sempre che temperatura, coefficienti di assorbimento e scattering, e costante dielettrica siano variabili solo con z , e indicheremo queste funzioni con $T(z)$, $k_a(z)$ (e simili) e $\varepsilon(z)$. Questo è un buon modello dell'ambiente terrestre, se la direzione z di variazione è quella verticale.

Relativamente al tipo di variazione ammissibile, la costante dielettrica assume un ruolo diverso dalle altre grandezze, in quanto la brillantezza è *trasportata* da onde piane. Se $\varepsilon(z)$ è costante la brillantezza viaggia quindi lungo semirette. Lo stesso si può assumere se $\varepsilon(z)$ varia con continuità e lentamente (trascurando la piccola curvatura dei raggi in questo caso). Se invece la costante dielettrica è discontinua, allora nascono onde riflesse, che implicano riflessione del flusso di brillantezza. E quindi la necessità di un approccio completamente diverso. Iniziamo quindi ovviamente col caso di $\varepsilon(z)$ senza discontinuità, e vediamo come si specializza al caso di stratificazione piana la soluzione (42).

Consideriamo un radiometro posto a quota H dal terreno (su cui è posta l'origine $z = 0$) e che guarda in direzione θ verso il basso, e determiniamo la temperatura apparente vista dal sensore e dovuta all'intervallo $(0, H)$ dell'atmosfera. Questa temperatura viene detta temperatura di *up-welling* e verrà indicata con $T_{UP}(\theta, H)$, sottintendendo il punto iniziale $z = 0$.

Risulterà, ovviamente

$$T_{UP}(\theta, H) = \int_0^R e^{-\mathcal{T}_r(r', R)} \tilde{k}_a(r') \tilde{T}(r') dr' \quad (43)$$

con integrale calcolato sul segmento tratteggiato di Fig. 1, e con R pari alla lunghezza di questo segmento da $z = 0$ fino a $z = H$, ovvero $R = H/\cos \theta$.

Nella (43) abbiamo poi indicato con $\tilde{T}(r')$ e $\tilde{k}_a(r')$ la temperatura termodinamica della atmosfera, e il coefficiente di assorbimento, a distanza r' dall'origine. Queste funzioni possono essere calcolate dai dati $k_a(z)$ e $T(z)$ come (vedi Fig. 1)

$$\tilde{T}(r') = T(r' \cos \theta) \quad \text{e} \quad \tilde{k}_a(r') = k_a(r' \cos \theta)$$

Analogamente, $\mathcal{T}_r(r', r)$ è lo spessore ottico calcolato lungo il raggio obliquo, e quindi dato da

$$\mathcal{T}_r(r', r) = \int_{r'}^r \tilde{k}_e(r'') dr'' = \int_{r'}^r k_e(r'' \cos \theta) dr''$$

Eseguendo il cambio di variabile $x = r'' \cos \theta$, lo spessore ottico necessario nella (43) diventa

$$\mathcal{T}_r(r', r) = \int_{r'}^r k_e(r'' \cos \theta) dr'' = \int_{r' \cos \theta}^{r \cos \theta} k_e(x) \frac{dx}{\cos \theta}$$

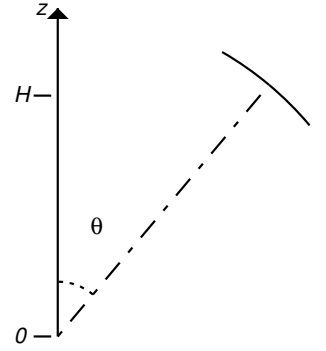


Fig. 1: Geometria per il calcolo della temperatura di up-welling.

Convienne introdurre, per mezzi con stratificazione piana, uno spessore ottico "verticale", definito da

$$\mathcal{T}(z', z) = \int_{z'}^z k_e(z'') dz'' \quad (44)$$

ottenendo

$$\mathcal{T}_r(r', r) = \int_{r' \cos \theta}^{r \cos \theta} k_e(x) \frac{dx}{\cos \theta} = \frac{\mathcal{T}(r' \cos \theta, r \cos \theta)}{\cos \theta} = \frac{\mathcal{T}(z', z)}{\cos \theta} \quad (45)$$

Eseguendo lo stesso cambio di variabile $x = r' \cos \theta$ nella (43) si ottiene

$$\begin{aligned} T_{UP}(\theta, H) &= \int_0^R \exp \left[-\frac{\mathcal{T}(z', H)}{\cos \theta} \right] k_a(r' \cos \theta) T(r' \cos \theta) dr' \\ &= \int_0^H \exp \left[-\frac{\mathcal{T}(x, H)}{\cos \theta} \right] k_a(x) T(x) \frac{dx}{\cos \theta} \end{aligned} \quad (46)$$

Consideriamo ora il caso di un sensore posto alla superficie della terra, che guarda verso l'alto, come in Fig. 2.

Il contributo alla temperatura apparente dovuto alla atmosfera tra 0 ed H , detta temperatura di *down-welling* e indicato con $T_{DN}(\theta, H)$, si ottiene analogamente alla (43), ma considerando un "asse" r che punta verso il basso. Posto $R = H/\cos \theta$ si ha

$$T_{DN}(\theta, H) = \int_{-R}^0 e^{-\mathcal{T}_r(r', 0)} \tilde{k}_a(r') \tilde{T}(r') dr' \quad (47)$$

Nella (47), R è la lunghezza del tratto che la potenza percorre da $z = 0$ a $z = H$.

Lo spessore ottico può essere ancora espresso in termini di $k_e(z)$ e vale, in questo caso

$$\mathcal{T}_r(r', r) = \int_{r'}^r k_e(-r'' \cos \theta) dr''$$

Eseguiamo in quest'ultimo integrale il cambio di variabili $x = -r'' \cos \theta$ ottenendo

$$\mathcal{T}_r(r', r) = - \int_{-r' \cos \theta}^{-r \cos \theta} k_e(x) \frac{dx}{\cos \theta} = - \frac{\mathcal{T}(z', z)}{\cos \theta} = \frac{\mathcal{T}(z, z')}{\cos \theta}$$

Analogamente alla (46) segue allora, con la sostituzione $x = -r' \cos \theta$

$$\begin{aligned} T_{DN}(\theta, H) &= - \int_H^0 \exp \left[-\frac{\mathcal{T}(0, x)}{\cos \theta} \right] k_a(x) T(x) \frac{dx}{\cos \theta} \\ &= \int_0^H \exp \left[-\frac{\mathcal{T}(0, x)}{\cos \theta} \right] k_a(x) T(x) \frac{dx}{\cos \theta} \end{aligned} \quad (48)$$

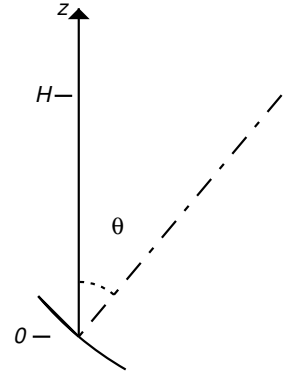


Fig. 2: Geometria per il calcolo della temperatura di down-welling.

Si noti la forte analogia tra le (46) e (48). In particolare, i due argomenti dello spessore ottico sono sempre in ordine crescente, così, come gli estremi di integrazione, indipendentemente dalla direzione di propagazione della brillantezza rispetto all'asse z .

7 ESEMPI

Consideriamo il calcolo delle temperature di up- e down-welling in alcuni casi notevoli.

Cominciamo a considerare il caso in cui sia k_e , sia T , sono costanti con la quota: $k_e(z) = k_{e0}$ e $T(z) = T_0$.

Risulta allora

$$\mathcal{T}(z', z) = \int_{z'}^z k_e(z'') dz'' = k_{e0} (z - z')$$

e

$$\begin{aligned} T_{UP}(\theta, H) &= \int_0^H \exp \left[-\frac{\mathcal{T}(x, H)}{\cos \theta} \right] k_a(x) T(x) \frac{dx}{\cos \theta} = T_0 \frac{k_{a0}}{\cos \theta} \int_0^H \exp \left[-\frac{k_{e0}(H-x)}{\cos \theta} \right] dx \\ T_{DN}(\theta, H) &= \int_0^H \exp \left[-\frac{\mathcal{T}(0, x)}{\cos \theta} \right] k_a(x) T(x) \frac{dx}{\cos \theta} = T_0 \frac{k_{a0}}{\cos \theta} \int_0^H \exp \left[-\frac{k_{e0}x}{\cos \theta} \right] dx \end{aligned}$$

I due integrali valgono rispettivamente

$$\begin{aligned} \int_0^H \exp \left[-\frac{k_{e0}(H-x)}{\cos \theta} \right] dx &= \exp \left[-\frac{k_{e0}H}{\cos \theta} \right] \left| \frac{\cos \theta}{k_{e0}} \exp \left[\frac{k_{e0}x}{\cos \theta} \right] \right|_0^H = \frac{\cos \theta}{k_{e0}} \left[1 - \exp \left(-\frac{k_{e0}H}{\cos \theta} \right) \right] \\ \int_0^H \exp \left[-\frac{k_{e0}x}{\cos \theta} \right] dx &= \left| -\frac{\cos \theta}{k_{e0}} \exp \left[-\frac{k_{e0}x}{\cos \theta} \right] \right|_0^H = \frac{\cos \theta}{k_{e0}} \left[1 - \exp \left(-\frac{k_{e0}H}{\cos \theta} \right) \right] \end{aligned}$$

per cui

$$T_{UP}(\theta, H) = T_{DN}(\theta, H) = T_0 \frac{k_{a0}}{k_{e0}} \left[1 - \exp \left(-\frac{k_{e0}H}{\cos \theta} \right) \right] = (1-a) T_0 \left[1 - \exp \left(-\frac{k_{e0}H}{\cos \theta} \right) \right] \quad (49)$$

Per $H \rightarrow \infty$, entrambe le temperature tendono a quella del mezzo (moltiplicata per $1-a$). Più quantitativamente, si può assumere $T_{UP}(\theta, H) = T_{DN}(\theta, H) \simeq (1-a)T_0$ se $k_{e0}H/\cos \theta \ll 1$, e con un errore relativo dato da questo termine.

Nella atmosfera terrestre, l'ipotesi di k costante non è molto realistica. L'andamento reale di k è più simile ad un esponenziale decrescente. Calcoliamo quindi le temperature di up- e down-welling per tale andamento.

Se assumiamo l'albedo a costante e

$$k_e(z) = k_{e0} e^{-pz} \quad (50)$$

lo spessore ottico diventa

$$\mathcal{T}(z', z) = \int_{z'}^z k_e(z'') dz'' = k_{e0} \int_{z'}^z e^{-pz''} dz'' = -\frac{k_{e0}}{p} (e^{-pz} - e^{-pz'})$$

Poniamo $A = k_{e0}/(p \cos \theta)$ e calcoliamo prima T_{DN} e poi T_{UP} .

$$T_{DN}(\theta, H) = \frac{k_{e0}(1-a)}{\cos \theta} \int_0^H \exp[-A(1 - e^{-pz})] e^{-pz} T(z) dz$$

Eseguiamo il cambio di variabili $y = e^{-pz}$, con $dy = -p e^{-pz} dz$, ottenendo

$$T_{DN}(\theta, H) = -A(1-a) \int_1^{\exp[-pH]} e^{-A(1-y)} T(y) dy$$

Per $T(y) = T_0$ costante segue

$$\begin{aligned} T_{DN}(\theta, H) &= -A(1-a)e^{-A} T_0 \int_1^{\exp[-pH]} e^{Ay} dy \\ &= -(1-a)e^{-A} T_0 \int_A^B e^w dw = -(1-a)e^{-A} T_0 [e^B - e^A] \end{aligned}$$

avendo fatto la sostituzione $w = Ay$ e avendo posto $B = A e^{-pH}$.

Semplificando si ha

$$T_{DN}(\theta, H) = (1-a) T_0 [1 - e^{(B-A)}]$$

La temperatura di up-welling vale invece:

$$\begin{aligned} T_{UP}(\theta, H) &= \frac{k_{e0}(1-a)}{\cos \theta} \int_0^H \exp[-A(e^{-pz} - e^{-pH})] e^{-pz} T(z) dz \\ &= -A(1-a) \int_1^{\exp[-pH]} e^{(B-Ay)} T(y) dy \end{aligned}$$

Per $T(y) = T_0$ costante, e ponendo poi $w = Ay$, segue

$$\begin{aligned} T_{UP}(\theta, H) &= -A(1-a)e^B T_0 \int_1^{\exp[-pH]} e^{-Ay} dy \\ &= (1-a)e^B T_0 \int_A^B e^{-w} dw = (1-a)e^B T_0 [e^{-B} - e^{-A}] \end{aligned}$$

Semplificando

$$T_{UP}(\theta, H) = (1-a) T_0 [1 - e^{(B-A)}]$$

8 EFFETTO DELL'INTERFACCIA

Consideriamo il caso di due semispazi omogenei separati da una superficie speculare (ortogonale all'asse z). La temperatura misurata dal sensore **S** posto all'altezza H , che guarda la superficie terrestre ad un angolo θ (vedi Fig. 1), è dovuta a 3 contributi:

- 1) la temperatura di brillanza prodotta dall'atmosfera fra 0 ed H ;
- 2) l'energia termica che l'atmosfera manda verso il basso, e che giunge al sensore dopo al riflessione sulla superficie terrestre;
- 3) l'energia termica prodotta dal terreno che attraversa l'interfaccia e raggiunge poi il sensore.

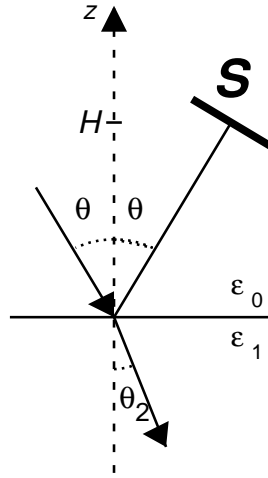


Fig. 1: Geometria complessiva.

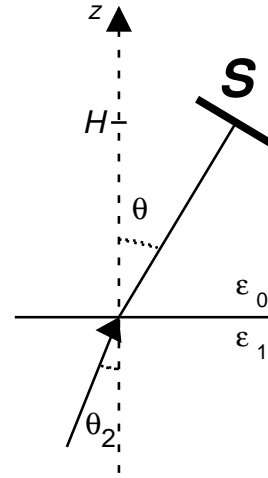


Fig. 2: Geometria relativa alla energia prodotta nel terreno.

Il primo contributo è evidentemente $T_{UP}(\theta, H)$.

Per quanto riguarda il secondo, la brillanza che incide sulla interfaccia è $T_{DN}(\theta, \infty)$. Questa energia viene riflessa e poi viene attenuata nel cammino tra l'interfaccia e il sensore.

Poiché questo termine dipende dalla polarizzazione, occorre calcolare separatamente le due polarizzazioni H e V . Assumiamo che tutte le potenze prodotte siano (quando incidono sull'interfaccia) completamente non polarizzate. Allora le due polarizzazioni H e V sono di pari ampiezza e indipendenti. Quindi si può sviluppare il calcolo in maniera indipendente sulle due polarizzazioni.

Poiché il fattore di attenuazione è $L_1 = \exp \left[\tau(0, H) / \cos \theta \right]$, la potenza che arriva sul sensore, per ciascuna polarizzazione H e V vale

$$\frac{1}{2} T_{DN}(\theta, \infty) R \frac{1}{L_1}$$

usando il relativo valore di riflettività. Il fattore $1/2$ tiene conto che ogni polarizzazione trasporta solo metà della potenza incidente

Per quanto riguarda il terzo contributo (vedi Fig. 2), l'energia termica totale prodotta dal terreno che arriva all'interfaccia è data da $T_{UP}^{(s)}(\theta_2, \infty)$, dove θ_2 è la direzione che viene

rifratta, secondo la legge di Snell, in direzione θ nell'aria. Quella in ciascuna polarizzazione è la metà di questa.

Tale energia, espressa come temperatura di brillantezza, va moltiplicata per $(1 - R)$, e viene poi attenuata secondo lo stesso fattore L_1 del contributo 2.

Poiché le varie energie sono prodotte da sorgenti diverse, e possono quindi essere sommate, la potenza totale al sensore per ciascuna polarizzazione vale

$$\begin{aligned} T_{AP}^H &= \frac{1}{2} T_{UP}(\theta, H) + \frac{1}{2} T_{DN}(\theta, \infty) R^H \frac{1}{L_1} + \frac{1}{2} T_{UP}^{(s)}(\theta_2, \infty) (1 - R^H) \frac{1}{L_1} \\ T_{AP}^V &= \frac{1}{2} T_{UP}(\theta, H) + \frac{1}{2} T_{DN}(\theta, \infty) R^V \frac{1}{L_1} + \frac{1}{2} T_{UP}^{(s)}(\theta_2, \infty) (1 - R^V) \frac{1}{L_1} \end{aligned} \quad (51)$$

La potenza ricevuta dipende ovviamente anche dalla polarizzazione del sensore, tramite il fattore di depolarizzazione.

L'integrando della espressione (4) della potenza ricevuta è $K_p(\Omega) G(\Omega) T_{AP}(\Omega)$, dove il ruolo di G è quello di discriminare le varie direzioni. Fissata l'antenna e il suo puntamento, quindi, si trova che la potenza ricevuta è proporzionale a $\hat{P}_r = K_p T_{AP}$.

La temperatura apparente è la somma dei due termini della (51). Per quanto riguarda il fattore di depolarizzazione, introduciamo i parametri di Stokes del sensore $(s_0^R, s_1^R, s_2^R, s_3^R)$, ottenendo

$$K_p = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{s_1^R}{s_0^R} \frac{s_1}{s_0} + \frac{s_2^R}{s_0^R} \frac{s_2}{s_0} - \frac{s_3^R}{s_0^R} \frac{s_3}{s_0} \right] \quad (52)$$

I parametri di Stokes del campo corrispondente a (51) sono la somma dei parametri delle due polarizzazioni, che, a loro volta, sono proporzionali rispettivamente a $(T_{AP}^H, T_{AP}^H, 0, 0)$ e $(T_{AP}^V, -T_{AP}^V, 0, 0)$. Pertanto:

$$(s_0, s_1, s_2, s_3) = \alpha (T_{AP}^H + T_{AP}^V, T_{AP}^H - T_{AP}^V, 0, 0)$$

essendo α una costante. Segue allora, per i parametri normalizzati,

$$\frac{1}{s_0} (s_0, s_1, s_2, s_3) = \left(1, \frac{T_{AP}^H - T_{AP}^V}{T_{AP}^H + T_{AP}^V}, 0, 0 \right)$$

e sostituendo in (52) segue

$$\begin{aligned} K_p &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{s_1^R}{s_0^R} \frac{T_{AP}^H - T_{AP}^V}{T_{AP}^H + T_{AP}^V} \right] \\ \hat{P}_r &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{s_1^R}{s_0^R} \frac{T_{AP}^H - T_{AP}^V}{T_{AP}^H + T_{AP}^V} \right] (T_{AP}^H + T_{AP}^V) = \frac{T_{AP}^H + T_{AP}^V}{2} + \frac{s_1^R}{s_0^R} \frac{T_{AP}^H - T_{AP}^V}{2} \end{aligned} \quad (53)$$

Se, in particolare, il sensore è polarizzato linearmente H , allora $s_1^R = s_0^R$ e

$$K_p = 1 + \frac{1}{2} \left[1 + \frac{T_{AP}^H - T_{AP}^V}{T_{AP}^H + T_{AP}^V} \right] = \frac{T_{AP}^H}{T_{AP}^H + T_{AP}^V} \quad \text{e} \quad \hat{P}_r = T_{AP}^H$$

e analoga per la polarizzazione V . Quindi, se il sensore ha una di queste due polarizzazioni, basta considerare, in tutte le sorgenti, e nei vari calcoli, solo quella polarizzazione. Nel caso generale, invece, si può sempre dividere, dall'inizio, il problema nelle due polarizzazioni H e V .

9 STRATO DIELETTRICO INTERMEDIO – CASO INCOERENTE

Consideriamo ora il caso di uno strato di costante dielettrica ϵ_1 e spessore D posto tra l'aria e il terreno.

La potenza riflessa, e quella trasmessa, nel caso di campo sinusoidale, si ottengono semplicemente utilizzando il formalismo delle linee di trasmissione equivalenti.

Se invece il campo incidente è aleatorio, a banda stretta, l'analisi diventa più complessa. Infatti, il campo incidente subirà delle riflessioni multiple all'interno dello strato, per cui il campo riflesso (e quello trasmesso) sarà dato dalla somma di infinite repliche (in genere distorte) del campo incidente, attenuate e con ritardi, vedi Fig. 2, pari a un multiplo di $2T_V$, essendo

$$T_V = \frac{D/\cos \theta_t}{c/n_1} = \frac{n_1 D}{c \cos \theta_t} \quad (54)$$

il tempo di viaggio all'interno dello strato di una onda trasmessa in direzione θ_t , e $n_1 = \sqrt{\epsilon_1}$.

Pertanto le potenze riflessa e trasmessa non dipenderanno solo dalla potenza incidente, ma anche dalla autocorrelazione del campo incidente.

Consideriamo i due campi che emergono dallo strato, uno dopo la riflessione alla interfaccia superiore e l'altro dopo una riflessione all'interno dello strato, allo stesso istante. Questi campi sono prodotti dalla stessa sorgente ma in due istanti diversi. In particolare il primo dei due viene prodotto con un ritardo $2T_V$ rispetto all'altro. La somma di questi campi aleatori dipende in maniera essenziale dalla relazione tra il tempo di viaggio T_V e il tempo di correlazione τ_c del campo stesso.

Noi siamo in particolare interessati a strati con spessori grandi, e quindi T_V grande. Notiamo allora che, se $T_V \gg \tau_c$, i due campi sono incorrelati, e quindi possiamo sommare le potenze associate, senza tener conto di alcuna relazione di fase tra i due campi. Allo stesso modo sono incorrelati coppie di campi con un numero qualunque (ma diverso) di riflessioni nello strato.

Questo significa che tutti i flussi di potenza che viaggiano nello strato sono tra loro incorrelati, e possono essere sommati. In tal caso le riflettività alle interfacce sono date dalle formule di Fresnel di semispazio, in quanto l'effetto delle riflessioni multiple verrà tenuto in conto sulle potenze, e non modificando le impedenze di ingresso (che richiederebbe termini coerenti). Conseguenza immediata è che la risposta dipende dalla frequenza solo a causa della dispersione del mezzo, ed è comunque una dipendenza piccola. Se il mezzo è non dispersivo, anzi, la risposta

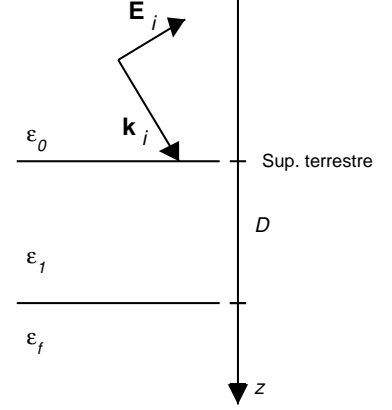


Fig.1: Geometria dello strato intermedio
(La polarizzazione dell'onda incidente è puramente indicativa)

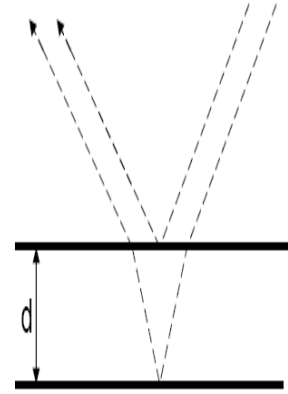


Fig. 2: Differenze nei tempi di viaggio.

è indipendente dalla frequenza. Si parla, in questo caso, di approccio incoerente al calcolo del trasferimento radiativo.

Allo stesso modo, possono essere calcolati i contributi di potenza prodotti nello strato, considerando solo flussi di brillantezza incorrelati.

Consideriamo allora un radiometro posto alla quota H , che guarda verso terra con un angolo θ , come nel par. 11, ma assumiamo che il terreno sia stratificato, e che lo strato abbia uno spessore D grande abbastanza da poter usare l'approccio incoerente. Rispetto al caso del paragrafo precedente, il contributo 3 è ora fatto di due parti indipendenti, ovvero l'emissione dello strato intermedio, e quella del semispazio che c'è sotto lo strato intermedio. Inoltre tutti i contributi (salvo il primo) interagiranno con una struttura stratificata, e non con un semispazio, e quindi saranno da calcolare diversamente.

Poichè la differenza sostanziale è la presenza dello strato intermedio, iniziamo a considerare quest'ultimo. Indichiamo con A e B le due interfacce. All'interno di questo strato vi saranno due flussi di brillantezza in direzione θ_t , uno verso l'alto e uno verso il basso. Indichiamo con $T_u(z)$ e $T_d(z)$ le temperature di brillantezza, alla quota z , relative a questi due flussi.

Per valutare questi flussi, possiamo ovviamente utilizzare direttamente la soluzione (42) della equazione del trasferimento radiativo, espressa per mezzi con stratificazione rispetto a z . Per $z \in (-D, 0)$ si avrà:

$$\begin{aligned} T_u(z) &= T_u(-D) \exp \left[\frac{-\mathcal{T}(-D, z)}{\cos \theta_t} \right] + \frac{1}{\cos \theta_t} \int_{-D}^z \exp \left[\frac{-\mathcal{T}(x, z)}{\cos \theta_t} \right] k_a(x) T(x) dx \\ T_d(z) &= T_d(0) \exp \left[\frac{-\mathcal{T}(z, 0)}{\cos \theta_t} \right] + \frac{1}{\cos \theta_t} \int_z^0 \exp \left[\frac{-\mathcal{T}(z, x)}{\cos \theta_t} \right] k_a(x) T(x) dx \end{aligned} \quad (55)$$

Pertanto la conoscenza delle due temperature *iniziali* $T_u(-D)$, e $T_d(0)$ è sufficiente per determinare i flussi di brillantezza nello strato. Per determinare queste temperature occorre tener conto delle due interfacce, e dei flussi alle interfacce.

Dalla (55) segue, per questi ultimi,

$$\begin{aligned} T_u(0) &= T_u(-D) \frac{1}{L_2} + T_{UP}(\theta_t) \\ T_d(-D) &= T_d(0) \frac{1}{L_2} + T_{DN}(\theta_t) \end{aligned} \quad (56)$$

in quanto gli integrali in (55), estesi a tutto lo strato, sono le temperature di up-welling e down-welling prodotte dallo strato¹. Nelle (56) abbiamo introdotto il fattore di attenuazione dello strato $L_2 = \exp \left[\tau(-D, 0)/\cos \theta_t \right]$.

Alle relazioni (56) vanno aggiunte le condizioni alle interfacce. Sulla interfaccia A , incide sia la $T_u(0)$, sia (dalla parte positiva delle interfaccia) la potenza prodotta dalla atmosfera $T_{DN}^0(\theta, \infty)$. Ognuna di queste potenze viene in parte riflessa, con riflettività R_A , e in parte trasmessa, in maniera indipendente dall'altra. Poichè i due contributi alle potenze riflessa e trasmessa sono indipendenti, si sommano. Pertanto, il bilancio di potenza alla interfaccia A vale

$$\begin{aligned} T_d(0) &= R_A T_u(0) + (1 - R_A) T_{DN}^0(\theta, \infty) \\ T_u(0) &= (1 - R_A) T_u(0) + R_A T_{DN}^0(\theta, \infty) \end{aligned} \quad (57)$$

¹ Poichè queste temperature sono quelle prodotte dall'intero strato, sottintendiamo la posizione del sensore rispetto alle definizioni (43,47).

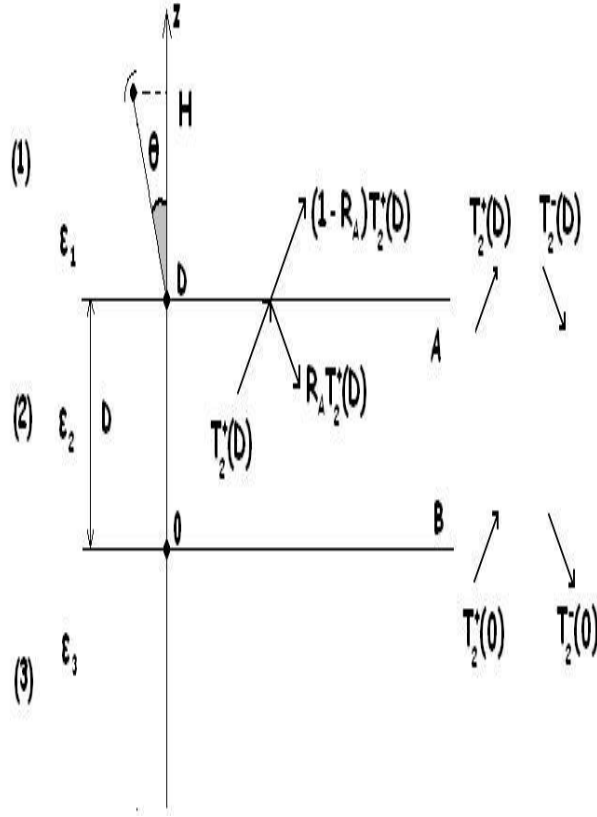


Fig. 1:

essendo $T^{u0}(0)$ il flusso di brillantezza che, nell'atmosfera, viaggia verso l'alto.

In maniera del tutto analoga alla interfaccia B , di riflettività R_B , segue

$$\begin{aligned} T_u(-D) &= R_B T_d(-D) + (1 - R_B) T_{UP}^f(\theta_{t2}, \infty) \\ T^{df}(-D) &= (1 - R_B) T_d(-D) + R_B T_{UP}^f(\theta_{t2}, \infty) \end{aligned} \quad (58)$$

Nella (58) abbiamo indicato con $T_{UP}^f(\theta_{t2}, \infty)$ e $T^{df}(-D)$ rispettivamente la potenza prodotta da tutto il semispazio inferiore, e la potenza che, in tale semispazio, viaggia dall'interfaccia B verso il basso. θ_{t2} è l'angolo di trasmissione nel semispazio inferiore.

Le (56), insieme con le prime delle (57,58), costituiscono un sistema lineare:

$$\begin{aligned} T_u(0) &= T_u(-D) \frac{1}{L_2} + T_{UP}(\theta_t) \\ T_d(-D) &= T_d(0) \frac{1}{L_2} + T_{DN}(\theta_t) \\ T_d(0) &= R_A T_u(0) + (1 - R_A) T_{DN}^0(\theta, \infty) \\ T_u(-D) &= R_B T_d(-D) + (1 - R_B) T_{UP}^f(\theta_{t2}, \infty) \end{aligned}$$

che, una volta risolto, consente di calcolare tutti i flussi di potenza. La strada più semplice è quella di sostituire la terza e la quarta equazione nelle prime due ottenendo

$$\begin{aligned}
T_u(0) - \frac{1}{L_2} R_B T_d(-D) &= T_{UP}(\theta_t) + \frac{1}{L_2} (1 - R_B) T_{UP}^f(\theta_{t2}, \infty) \\
-\frac{1}{L_2} R_A T_u(0) + T_d(-D) &= T_{DN}(\theta_t) + \frac{1}{L_2} (1 - R_A) T_{DN}^0(\theta, \infty)
\end{aligned} \tag{59}$$

Risolvendo il sistema (59) con la regola di Cramer occorre calcolare prima il determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{R_B}{L_2} \\ -\frac{R_A}{L_2} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{R_A R_B}{L_2^2} \tag{60}$$

ottenendo quindi

$$\begin{aligned}
T_u(0) &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} T_{UP}(\theta_t) + \frac{1}{L_2} (1 - R_B) T_{UP}^f(\theta_{t2}, \infty) & -\frac{R_B}{L_2} \\ T_{DN}(\theta_t) + \frac{1}{L_2} (1 - R_A) T_{DN}^0(\theta, \infty) & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\Delta} \left\{ \left[T_{UP}(\theta_t) + \frac{R_B}{L_2} T_{DN}(\theta_t) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{R_B}{L_2^2} (1 - R_A) T_{DN}^0(\theta, \infty) + \frac{1}{L_2} (1 - R_B) T_{UP}^f(\theta_{t2}, \infty) \right\} \\
T_d(-D) &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & T_{UP}(\theta_t) + \frac{1}{L_2} (1 - R_B) T_{UP}^f(\theta_{t2}, \infty) \\ -\frac{R_A}{L_2} & T_{DN}(\theta_t) + \frac{1}{L_2} (1 - R_A) T_{DN}^0(\theta, \infty) \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\Delta} \left\{ \left[\frac{R_A}{L_2} T_{UP}(\theta_t) + T_{DN}(\theta_t) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{L_2} (1 - R_A) T_{DN}^0(\theta, \infty) + \frac{R_A}{L_2^2} (1 - R_B) T_{UP}^f(\theta_{t2}, \infty) \right\}
\end{aligned} \tag{61}$$

I tre termini a secondo membro delle (61) sono i contributi dello strato intermedio, della atmosfera e del semispazio inferiore.

Le seconde delle (57,58) consentono poi di calcolare i flussi in uscita dallo strato e completare quindi la soluzione del problema.

In particolare, la potenza ricevuta dal radiometro alla quota H sarà data da una espressione simile alla (51). Per ognuna delle due polarizzazioni si ha infatti (considerando solo la parte delle potenze prodotte corrispondente alla polarizzazione scelta)

$$T_{AP} = T_{UP}(\theta, H) + \frac{1}{L_1} T^{u0}(0) = T_{UP}(\theta, H) + \frac{1}{L_1} [(1 - R_A) T_u(0) + R_A T_{DN}^0(\theta, \infty)] \tag{62}$$

avendo usato la seconda delle (57).

Il termine in parentesi quadra è la potenza che lascia l'interfaccia A verso l'alto. Se consideriamo come sorgente solo l'emissione dell'atmosfera, questo termine diventa la potenza complessivamente riflessa dal mezzo stratificato. Se ricordiamo che, nelle ipotesi attuali, la *sorgente* di questa potenza è solo $T_{DN}^0(\theta, \infty)$, possiamo ottenere la riflettività *efficace* dell'interfaccia

$$R_A^{tot} = \frac{T^{u0}(0)}{T_{DN}^0(\theta, \infty)} = R_A + (1 - R_A) \frac{T_u(0)}{T_{DN}^0(\theta, \infty)} \quad (63)$$

ovvero quella che si ottiene tenendo conto della struttura del terreno sottostante. Sostituendo la (61) segue

$$R_A^{tot} = R_A + \frac{1}{\Delta} \frac{R_B}{L_2^2} (1 - R_A)^2 \quad (64)$$

che è sempre non negativa. Conseguenza immediata della (64) è che è possibile annullare la riflessione dello strato solo annullando sia R_A , sia R_B . In tal caso, però, la riflessione è nulla qualunque sia lo spessore D dello strato².

Allo stesso modo é possibile calcolare la trasmissività *efficace* dello strato, T^{tot} , rapporto tra la potenza che lascia la interfaccia B verso il basso, ovvero la potenza trasmessa nel semispazio inferiore, e quella incidente dal semispazio superiore verso la interfaccia A :

$$T^{tot} = \frac{T^{df}(-D)}{T_{DN}^0(\theta, \infty)} = \frac{(1 - R_B) T_d(-D)}{T_{DN}^0(\theta, \infty)} = \frac{1}{\Delta} \frac{(1 - R_A)(1 - R_B)}{L_2} \quad (65)$$

Dalle (64,65) segue anche l'assorbimento dello strato \mathcal{A} , ovvero la frazione della potenza incidente dall'alto $T_{DN}^0(\theta, \infty)$ che viene assorbita

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= 1 - R_A^{tot} - T^{tot} = 1 - R_A - \frac{1}{\Delta} \frac{R_B}{L_2^2} (1 - R_A)^2 - \frac{1}{\Delta} \frac{(1 - R_A)(1 - R_B)}{L_2} \\ &= (1 - R_A) \left[1 - \frac{1}{\Delta} \frac{R_B}{L_2^2} (1 - R_A) - \frac{1}{\Delta} \frac{(1 - R_B)}{L_2} \right] \\ &= \frac{(1 - R_A)}{\Delta L_2^2} [\Delta L_2^2 - R_B(1 - R_A) - L_2(1 - R_B)] \end{aligned} \quad (66)$$

Sostituendo Δ dalla (60) segue

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{(1 - R_A)}{\Delta L_2^2} [L_2^2 - R_A R_B - R_B(1 - R_A) - L_2(1 - R_B)] \\ &= \frac{(1 - R_A)}{\Delta L_2^2} [L_2^2 - R_B - L_2 + L_2 R_B] \\ &= \frac{(1 - R_A)}{\Delta L_2^2} [L_2(L_2 - 1) + R_B(L_2 - 1)] = \frac{(1 - R_A)}{\Delta L_2^2} (L_2 + R_B)(L_2 - 1) \end{aligned} \quad (67)$$

Se lo strato é a temperatura costante T_S , la (66) può consentire di verificare la legge di Kirchhoff. In base ad essa, $\mathcal{A}T_S$ deve essere pari alla potenza emessa dallo strato verso l'alto,

² Queste considerazioni si applicano, ad esempio, agli strati antiriflessi per lenti. Per ottenere assenza di riflessione, gli strati antiriflesso vanno applicati su entrambe le superfici della lente, ma possono essere progettati assumendo riflessione da un semispazio, ovvero senza tener conto dello spessore della lente.

ovvero a $T^{u0}(0)$ prodotta solo dalla potenza termica prodotta dallo strato. partiamo dalla seconda delle (57) e sostituiamo le (61).

$$T^{u0}(0) = (1 - R_A) T_u(0) = \frac{(1 - R_A)}{\Delta} \left[T_{UP}(\theta_t) + \frac{R_B}{L_2} T_{DN}(\theta_t) \right] \quad (68)$$

Ma, essendo la temperatura costante, la (49) fornisce

$$T_{UP}(\theta_t) = T_{DN}(\theta_t) = T_S \left(1 - \frac{1}{L_2} \right)$$

e sostituendo nella (68) segue

$$\begin{aligned} T^{u0}(0) &= T_S \left(1 - \frac{1}{L_2} \right) \frac{(1 - R_A)}{\Delta} \left(1 + \frac{R_B}{L_2} \right) \\ &= \frac{T_S}{\Delta L_2^2} (L_2 + R_B)(L_2 - 1)(1 - R_A) = \mathcal{A} T_S \end{aligned} \quad (69)$$

dalla (67).

L'effetto delle riflessioni multiple nello strato intermedio sono comprese nel fattore Δ^{-1} . Infatti

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{1 - \frac{R_A R_B}{L_2^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R_A R_B}{L_2^2} \right)^n = 1 + \frac{R_A R_B}{L_2^2} + \left(\frac{R_A R_B}{L_2^2} \right)^2 + \dots$$

Consideriamo ad esempio la (64). Il primo termine è al potenza direttamente riflessa dalla interfaccia A . Sostituendo l'espressione precedente nella seconda si ottiene poi

$$\frac{R_B}{L_2^2} (1 - R_A)^2 + \frac{R_B}{L_2^2} (1 - R_A)^2 \frac{R_A R_B}{L_2^2} + \frac{R_B}{L_2^2} (1 - R_A)^2 \left(\frac{R_A R_B}{L_2^2} \right)^2 + \dots$$

Il primi due termini di questa somma possono essere scritti come

$$\begin{aligned} &(1 - R_A) \frac{1}{L_2} R_B \frac{1}{L_2} \quad 1 \quad (1 - R_A) \\ &(1 - R_A) \frac{1}{L_2} R_B \frac{1}{L_2} \left[R_A \frac{1}{L_2} R_B \frac{1}{L_2} \right] (1 - R_A) \end{aligned}$$

che è esattamente quanto si otterrebbe se il contributo dovuto, rispettivamente, a uno e due transiti nello strato venisse scritto *seguendo l'onda* che trasporta la brillantezza. Il termine in parentesi quadra è la modifica che subisce la potenza in un transito e quindi il termine n -esimo dello sviluppo di Δ^{-1} rappresenta il contributo dovuto a una onda che fa n transiti nello strato.

10 STRATO DIELETTRICO SOTTILE – CASO COERENTE

Se il tempo di viaggio non risulta grande rispetto al tempo di correlazione del campo, la soluzione del problema del paragrafo precedente risulta molto piú complessa.

In linea di principio, considerando ancora il caso della riflessione, dalla teoria generale dei processi aleatori, si trova che lo spettro di densità di potenza del campo riflesso è dato da

$$S_{RR}(\omega) = |\Gamma(\omega)|^2 S_{ee}(\omega) \quad (70)$$

essendo $S_{ee}(\omega)$ quello del campo incidente e $\Gamma(\omega)$ il coefficiente di riflessione dello strato al variare della frequenza.

La potenza media riflessa si ottiene dalla (70) come

$$\mathcal{E}[P_R] = 2 \int S_{RR}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} = 2 \int |\Gamma(\omega)|^2 S_{ee}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} \quad (71)$$

Le (70,71) valgono, in teoria, per qualunque spessore dello strato¹. Tuttavia, la riflettività $|\Gamma(\omega)|^2$ varia sempre piú rapidamente rispetto a ω quanto piú lo strato è largo, ovvero quanto piú il tempo di viaggio è elevato. Pertanto la (71) è di uso agevole solo se il tempo di viaggio è molto piú piccolo del tempo di correlazione, ovvero se lo spessore dello strato è dell'ordine di grandezza della lunghezza d'onda.

Infatti, se $D = a\lambda$ nel dielettrico (con $a = \mathcal{O}(1)$, e con $\theta_t = 0$ per semplicità), allora da (54) segue

$$T_V = \frac{n_1 a \lambda}{c} = \frac{a \lambda_0}{c} = a \frac{1}{c} \frac{2\pi}{\beta_0} = a \frac{2\pi}{\omega_0} \ll \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \tau_c$$

essendo, per ipotesi di campo a banda stretta, $\Delta\omega \ll \omega_0$.

In tal caso, nella (71), $|\Gamma(\omega)|^2$ può essere considerata costante e si ha

$$\mathcal{E}[P_R] \simeq 2 \int |\Gamma(\omega_0)|^2 S_{ee}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} = 2|\Gamma(\omega_0)|^2 \int S_{ee}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} = |\Gamma(\omega_0)|^2 \mathcal{E}[P_i] \quad (72)$$

¹ Ovviamente, stiamo assumendo che le proprietà elettromagnetiche dello strato siano esattamente stratificate. Se ciò non avviene, mentre l'approccio incoerente non subisce variazioni, la (70), che richiede una interferenza tra onde piane che viaggiano in modo diverso nello strato, non risulta piú valida, se non come primissima approssimazione. Approssimazione che è tanto piú precisa quanto piú lo strato è sottile.

11 STRATI DIELETTRICI MULTIPLI

Le analisi dei paragrafi precedenti possono, in certi casi, essere generalizzate al caso di un sistema di più strati intermedi.

Se ciascuno degli strati ha spessore tale da poter usare l'approccio incoerente, allora è possibile scrivere due equazioni come le (56) per ciascun strato intermedio, e dei bilanci alle interfacce, simili a (57) o (58) per ciascuna interfaccia.

Il sistema lineare risultante può poi essere risolto per via analitica o numerica.

Se uno o più degli strati intermedi è invece molto sottile, con D paragonabile o inferiore alla lunghezza d'onda, occorre usare per essi l'approccio coerente, ovvero la (72). Da tale equazione discende però che è possibile semplicemente conglobare tali strati intermedi negli strati larghi adiacenti, modificando la riflettività secondo la (72).

Consideriamo come esempio la geometria di Fig. 1, in cui t_1 è tale da usare l'approccio incoerente, mentre t_2 è inferiore alla lunghezza d'onda.

Possiamo considerare gli strati 1 e 2 come un unico strato, in cui utilizzare l'approccio incoerente, e ovviamente trascurando l'emissione dello strato 2. Per quanto riguarda le riflettività, alla interfaccia col semispazio sottostante, necessarie nella (58), queste sono pari, secondo la (72), alla riflettività (vista dallo strato 3) dello strato 1 coperto dallo strato 2, ovvero alla riflettività (vista dallo strato 1) dello strato 3 coperto dallo strato 2, rispettivamente. Usando il teorema di reciprocità, si può però dimostrare che queste due riflettività sono uguali, e quindi basta porre, nella (58), $R_B = |\Gamma(\omega_0)|^2$, con quest'ultima calcolata da 1 verso 3 o viceversa.

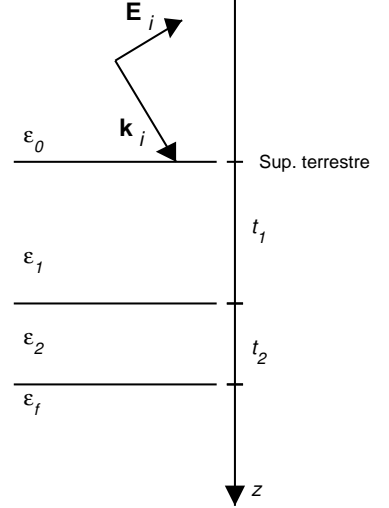


Fig.1: Geometria.

12 CONSIDERAZIONI INIZIALI SUI SENSORI RADIOMETRICI

La struttura a blocchi di un sensore radiometrico è quella riportata in Fig. 1. Una antenna, normalmente un riflettore centrato, è connesso a un ricevitore *supereterodina*, il cui compito è quello di traslare il segnale attorno alla frequenza zero (banda base), di amplificarlo e di filtrarlo opportunamente. Il segnale in banda base viene poi rivelato per estrarne l'informazione contenuta, ovvero la potenza media statistica di rumore. I parametri fondamentali di questo sistema sono il guadagno di antenna, il livello di rumore prodotto dal ricevitore e la banda all'ingresso del detector, detta banda di pre-detezione o (per analogia con i ricevitori televisivi) banda video. In particolare indicheremo con B_V quest'ultima.

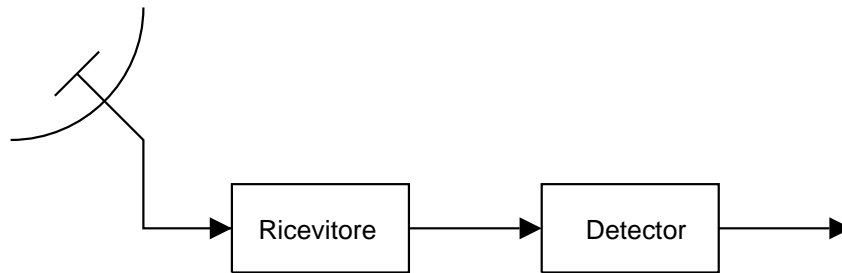


Fig.1: Schema base di un sensore radiometrico.

Il ricevitore è costituito, in genere, da un convertitore di frequenza (*mixer*), schematizzabile con un moltiplicatore alimentato dal segnale ricevuto e da una sinusoide costante alla frequenza ω_0 della portante, da un filtro e amplificatore del segnale in banda base e da un amplificatore a basso rumore a *RF* (*LNA*).

Fissata la banda B_V , sono possibili due configurazioni diverse del ricevitore, che per analogia, ma in maniere abbastanza impropria, sono dette *SSB* e *DSB*.

La configurazione *SSB* prevede che il segnale a radiofrequenza sia compreso nella banda $(\omega_0, \omega_0 + \Delta\omega)$, essendo $\Delta\omega = 2\pi B_V$, ovvero che comprenda una sola banda laterale della portante a ω_0 .

Poiché però, al contrario dei sistemi di telecomunicazioni, le due bande laterali contengono informazioni differenti (e indipendenti¹), può avere senso considerare anche una configurazione *DSB*, in cui la parte a radiofrequenza comprende tutta la banda $(\omega_0 - \Delta\omega, \omega_0 + \Delta\omega)$.

In realtà, essendo fissato B_V , la soluzione *DSB* non ha normalmente vantaggi. Anzi, richiedendo una banda *RF* doppia, pone problemi realizzativi specialmente nel *LNA*.

La situazione cambia solo per radiometri a frequenza molto elevata, in cui *LNA* con prestazioni elevate sono difficilmente realizzabili (o molto costosi). In tal caso la soluzione di eliminare del tutto il *LNA* e usare il mixer come stadio di ingresso del ricevitore può consentire di migliorare le prestazioni di rumore complessive del ricevitore. In tal caso si preferisce usare

¹ La correlazione tra le due bande può essere calcolata anche tra le trasformate di Fourier. Poiché le densità spettrali delle due bande laterali sono ortogonali in frequenza, è evidente che la correlazione è nulla.

la configurazione *DSB* che consente di dimezzare il rumore introdotto dal mixer², e quindi migliorare significativamente le prestazioni del ricevitore. Senza pagare un prezzo elevato nella parte a *RF* che è, nel caso in esame, tutta passiva e quindi crea minori problemi dovuti al raddoppio della banda³.

Per il livello di approfondimento di questo corso, comunque, la trattazione può essere fatta indifferente dalla configurazione, *SSB* o *DSB*, utilizzata. Per essere definiti, comunque, considereremo nel seguito un radiometro *SSB*, che è quello abbondantemente più diffuso⁴.

13 TEMPERATURA D'ANTENNA

I sensori radiometrici sono costituiti da antenne a riflettore a simmetria circolare. In particolare nelle applicazioni da satellite, queste antenne sono inclinate e ruotano attorno ad un asse verticale, in modo da coprire, grazie anche al moto del satellite, una zona ampia della superficie terrestre. Questo modo di funzionamento ha un impatto notevole per il calcolo della risoluzione, ma non per le altre caratteristiche della ricezione, e quindi, per ora considereremo l'antenna fissa.

La densità spettrale di potenza disponibile¹ da una antenna **ideale** a causa del flusso di brillantezza incidente può essere espresso, se vale la legge di Rayleigh–Jeans, in termini della *temperatura apparente* vista dal sensore (che è indipendente dalla frequenza), e la potenza ricevuta è allora data dalla (28) che, per $\eta_L = 1$ fornisce², indicando esplicitamente le dipendenze dalla frequenza ω

$$\hat{P}_D^i(\omega) = \frac{\mathcal{K}}{\pi\lambda^2} \int K_p(\Omega, \omega) A_e^I(\Omega, \omega) T_{AP}(\Omega) d\Omega \quad (73)$$

essendo $A_e^I(\Omega, \omega)$ l'area efficace della antenna ideale alla frequenza ω legata alla direttività \hat{D} dalla (26), che riportiamo

² Se è presente un *LNA*, il rumore introdotto dal mixer non ha un effetto apprezzabile sulle prestazioni complessive di rumore del ricevitore, essendo preceduto da uno stadio con guadagno relativamente elevato. Per i dettagli si può consultare il capitolo sul rumore di un qualunque testo di base di telecomunicazioni, e in particolare il paragrafo sul rumore per stadi in cascata.

³ Per maggiori dettagli si veda, ad es., N. Skou, D. Le Vine: *Microwave radiometer systems*, Artech House, 2006, Cap. 5.

⁴ Negli anni sono stati lanciati molti radiometri multicanale. Ad esempio il radiometro *IMR* dell'*ESA* (European Space Agency) ha sei canali, a 6.84 GHz , 10.65 GHz , 15.3 GHz , 23.8 GHz , 36.5 GHz , 90 GHz . I ricevitori dei primi cinque di questi sono in configurazione *SSB* e solo quello per i 90 GHz è in configurazione *DSB*.

¹ Si ricorda che la *potenza disponibile* è quella fornita ad un carico adattato.

² Le densità spettrali $\hat{P}_D(\omega)$ hanno la stessa definizione di $B(\omega)$, eq. (13), ovvero

$$P_{D,tot} = \int_0^\infty \hat{P}_D(\omega) d\omega$$

$$A_e^I(\Omega, \omega) = \frac{\lambda^2}{4\pi} \hat{D}(\Omega, \omega) \quad (26)$$

Per semplicità assumiamo, nel seguito, che sia l'area efficace, sia il fattore di depolarizzazione siano indipendenti dalla frequenza (nella banda che ci interessa): $A_e^I(\Omega, \omega) = A_e^I(\Omega)$ e $K_p(\Omega, \omega) = K_p(\Omega)$.

Da un punto di vista *circuitale*, ovvero del circuito ricevente cui l'antenna è connessa, la potenza di rumore (73) può essere modellata come rumore interno. L'antenna ideale presenta infatti, ai suoi morsetti, una resistenza di ingresso pari a quella di irradiazione R_{irr} , la quale, se a temperature diversa dallo 0 K, produce rumore. La potenza di rumore (73) potrebbe essere allora considerata come prodotta da questa resistenza posta ad una opportuna temperatura T_A^i detta temperatura d'antenna (ideale).

Tuttavia, la densità spettrale di potenza di questo rumore (rumore bianco) è costante con la frequenza³ e vale

$$\hat{P}_D^i(\omega) = \frac{\mathcal{K}}{2\pi} T_A^i \quad (74)$$

L'utilizzo della temperatura di antenna, quindi, può richiedere qualche precauzione in quanto la potenza ricevuta dalla antenna è quadratica con ω . Tuttavia, nelle approssimazioni di questo corso, trascureremo questa differenza⁴ usando la densità di potenza del segnale radiometrico misurata alla frequenza ω_0 della portante

$$\frac{\mathcal{K}}{\pi\lambda^2} \int K_p(\Omega) A_e^I(\Omega) T_{AP}(\Omega) d\Omega \Delta\omega = \frac{\mathcal{K}}{2\pi} T_A^i \Delta\omega \quad (75)$$

ovvero

$$T_A^i = \frac{1}{\lambda^2} \int 2K_p(\Omega) A_e^I(\Omega) T_{AP}(\Omega) d\Omega \quad (76)$$

Convienne introdurre la direttività alla frequenza ω_0 , $\hat{D}(\Omega)$. Risulta, dalla (26),

$$T_A^i = \frac{1}{\lambda^2} \int 2K_p(\Omega) \frac{\lambda^2}{4\pi} \hat{D}(\Omega) T_{AP}(\Omega) d\Omega = \int 2K_p(\Omega) \frac{\hat{D}(\Omega)}{4\pi} T_{AP}(\Omega) d\Omega \quad (77)$$

³ In realtà anche il rumore termico di un resistore segue una legge di Planck. Solo che, al contrario della (14), il fenomeno è monodimensionale e non tridimensionale. Pertanto la legge di Planck da utilizzare è

$$\hat{P}_D^i(\omega) = \frac{\hbar\omega}{2\pi} \frac{1}{\exp\left[\frac{\hbar\omega}{\mathcal{K}T}\right] - 1}$$

che, nella stessa approssimazione $\hbar\omega \ll \mathcal{K}T$ della legge di Rayleigh-Jeans, conduce alla ben nota densità spettrale costante del rumore bianco.

⁴ Per un segnale a banda stretta, il rapporto tra la densità di potenza massima e minima in banda vale

$$\frac{[\hat{P}_D^i(\omega)]_{max}}{[\hat{P}_D^i(\omega)]_{min}} = \frac{\hat{P}_D^i(\omega_0 + \Delta\omega)}{\hat{P}_D^i(\omega_0)} = \frac{(\omega_0 + \Delta\omega)^2}{(\omega_0)^2} \simeq 1 + \frac{2\Delta\omega}{\omega_0}$$

e, per le bande tipiche dei radiometri, la variazione è solo di qualche percento

La (77) mostra che T_A^i è una media della temperatura apparente, pesata in base al diagramma di radiazione della antenna.

In realtà, se l'antenna ha perdite, la (73) non è la potenza fornita a un carico adattato⁵ connesso alla antenna, in quanto occorre anche tener conto della dissipazione all'interno della antenna, che riduce la potenza ricevuta rispetto al caso ideale, e della potenza di rumore prodotta dalla antenna stessa.

La presenza di perdite può essere valutata dalla efficienza della antenna η_L , definita dal rapporto tra potenza irradiata e potenza di ingresso.

$$\eta_L = \frac{P_{irr}}{P_{IN}} = \frac{G(\Omega)}{D(\Omega)}$$

La potenza ricevuta P_R sarà allora

$$P_R = \eta_L P_R^i + \text{rumore prodotto internamente alla antenna} \quad (78)$$

Per quanto riguarda il secondo contributo alla (78), notiamo che, in presenza di perdite, la resistenza di ingresso può essere divisa nella resistenza di irradiazione e in una resistenza di dissipazione

$$R_{IN} = R_{irr} + R_D = \eta_L R_{IN} + R_D \quad (79)$$

La resistenza R_D , se la antenna è a una temperatura T_{FA} diversa da zero, produce il secondo contributo alla (78).

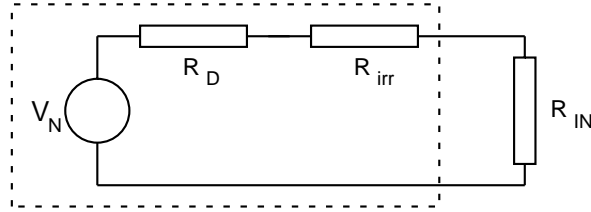


Fig. 1: Circuito equivalente del rumore prodotto dalla antenna (la parte tratteggiata è il circuito equivalente della sola antenna).

Per quanto riguarda il rumore prodotto internamente, questo è rumore bianco ed ha una densità spettrale di potenza disponibile pari a $[\mathcal{K}/2\pi]T_{FA}$, e il suo generatore di tensione di rumore, di ampiezza v_N , ha impedenza R_D , come in Fig. 1. Risulta ovviamente

$$\frac{\mathcal{K}}{2\pi} T_{FA} \Delta\omega = \frac{1}{4R_D} \mathcal{E}[v_N^2]$$

⁵ Nel seguito supporremo sempre che il carico connesso alla antenna sia adattato. In presenza di disadattamento, infatti, non solo le varie potenze uscenti dalla antenna andrebbero ricalcolate, ma occorrerebbe tener conto anche del rumore prodotto nel preamplificatore connesso alla antenna. Tale rumore, infatti, non viene inviato solo verso il carico del preamplificatore, ma anche verso l'antenna. Se questa è disadattata, parte di tale rumore viene riflesso verso l'ingresso del ricevitore, e va quindi a sommarsi agli altri contributi. Per maggiori dettagli si veda, ad es., B. Schiek, I. Rolfes, H.-J. Siweris: *Noise in High Frequency Circuits and Oscillators*, Wiley-Interscience, 2006, cap. 3.

Detta $i(t)$ la corrente (aleatoria) che scorre nella maglia di Fig. 1, la potenza di rumore P_N trasferita al carico adattato R_{IN} vale

$$P_N = R_{IN} \mathcal{E}[i(t)^2] = \mathcal{E} \left[R_{IN} \frac{v_N^2}{(R_{IN} + R_{irr} + R_D)^2} \right] = \frac{1}{4R_{IN}} \mathcal{E}[v_N^2] = \frac{R_D}{R_{IN}} \frac{\mathcal{K}}{2\pi} T_{FA} \Delta\omega \quad (80)$$

Ricordando che

$$\frac{R_D}{R_{IN}} = \frac{R_{IN} - R_{irr}}{R_{IN}} = 1 - \eta_L$$

la (78) diventa

$$P_R = \eta_L P_R^i + P_N = \eta_L P_R^i + (1 - \eta_L) \frac{\mathcal{K}}{2\pi} T_{FA} \Delta\omega \quad (81)$$

e la temperatura d'antenna vale, tenendo conto delle perdite

$$T_A = \eta_L T_A^i + (1 - \eta_L) T_{FA} \quad (82)$$

Questa T_A è la grandezza di interesse in radiometria, ma è anche utilizzata per valutare il rumore in uscita dalla antenna in un sistema di telecomunicazioni.

Notiamo infine che la (82) è basata sulla approssimazione del vero spettro di densità di potenza (dato dalla legge di Planck) con uno spettro costante (vedi (75) e discussione relativa). Nel seguito, quindi, assumeremo la densità spettrale costante.

14 EFFETTO DEL DIAGRAMMA DI ANTENNA

Per ottenere una mappa (digitalizzata) di temperatura di brillantezza è necessario usare un'antenna con un massimo di irradiazione molto pronunciato, in modo da prelevare la T_{AP} solo da una zona piccola corrispondente ad una cella di risoluzione.

Il diagramma ideale è quello con una zona a guadagno costante, corrispondente alla cella di risoluzione, e $G = 0$ nelle altre zone. Tale diagramma non è però realizzabile e si usa un normale diagramma a fascio sottile in cui la cella di risoluzione corrisponde al lobo centrale.

Le antenne per radiometria sono generalmente antenne a riflettore con diagramma a simmetria di rotazione. Il diagramma di radiazione presenta un lobo centrale e dei lobi laterali con ampiezza massima notevolmente più piccola del massimo del lobo centrale. Un esempio di diagramma di radiazione è riportato in Fig. 1.

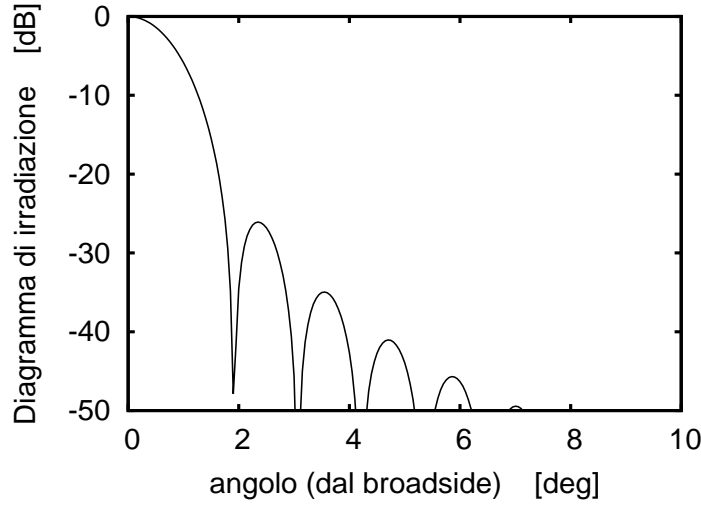


Fig. 1: Diagramma di un riflettore con diametro $2R = 50 \lambda$.

Nelle applicazioni radiometriche ha interesse la forma del lobo centrale, e la potenza complessivamente irradiata nella zona dei lobi laterali. Possiamo quindi approssimare il diagramma di radiazione di un riflettore a simmetria di rotazione con una espressione semplice. Assumendo un riferimento polare con asse z ortogonale alla bocca del riflettore (che è anche la direzione di massimo), possiamo approssimare¹ il guadagno $G(\theta, \phi)$ ed il diagramma di irradiazione $F(\theta)$ (che è indipendente da ϕ per l'ipotesi di riflettore a simmetria di rotazione) mediante:

$$G(\theta, \phi) = G_M \cos^{2p} \theta \quad \Rightarrow \quad F(\theta) = \left[\frac{G(\theta, \phi)}{G_M} \right] = \cos^{2p} \theta \quad (83)$$

per $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, e nulla per $\theta > \frac{\pi}{2}$.

L'esponente p può essere trovato a partire dalla semilarghezza di fascio a 3 dB, che indichiamo con θ_3 . Si ha infatti, risolvendo

$$\cos^{2p} \theta_3 = \frac{1}{2}$$

la relazione tra p e θ_3 :

$$2p = \frac{\log 0.5}{\log \cos \theta_3} = -\frac{0.693}{\log \cos \theta_3} \quad (84)$$

Per θ_3 piccolo, si ha anzi

$$\cos \theta_3 \simeq (1 - \frac{1}{2}\theta_3^2) \quad \Rightarrow \quad \log \cos \theta_3 \simeq \log(1 - \frac{1}{2}\theta_3^2) \simeq -\frac{1}{2}\theta_3^2$$

e quindi

¹ Per maggiori dettagli si può confrontare il paragrafo sulle antenne a riflettore del materiale didattico di *Campi Elettromagnetici*:

<http://www.diee.unica.it/campi/Corsi/CampiEM/antenne.pdf> .

$$2p \simeq \frac{1.386}{\theta_3^2} = \frac{4550}{(\theta_{3[deg]})^2} \quad (85)$$

Piú in generale, l'angolo θ_S , corrispondente a un livello di $S_{[dB]}$ sotto il picco², si ottiene imponendo

$$\cos^{2p} \theta_S = \frac{1}{\tilde{S}}$$

con $S_{[dB]} = -10 \log_{10} \tilde{S}$. Risolvendo analogamente a (84,85), si trova

$$\theta_S = \sqrt{\frac{-\log \tilde{S}}{p}} = \sqrt{\frac{S_{[dB]}}{4.34p}} \quad \text{ovvero} \quad \theta_{S[deg]} = 57.3 \sqrt{\frac{-\log \tilde{S}}{p}} = 27.5 \sqrt{\frac{S_{[dB]}}{p}} \quad (86)$$

Per quanto riguarda la direttività, questa é legata al guadagno dalla efficienza di antenna. In queste note considereremo solo l'efficienza η_L dovuta alla dissipazione, ottenendo

$$D(\theta, \phi) = \frac{1}{\eta_L} G(\theta, \phi)$$

Per quanto riguarda la direttività massima D_M , questa può essere ottenuta dal diagramma di radiazione come

$$D_M = \frac{4\pi}{\int F(\theta) d\Omega} = \frac{4\pi}{\int \cos^{2p} \theta d\Omega} = \frac{4\pi}{2\pi \int_0^1 x^{2p} dx} = 2(2p+1) \simeq 4p \quad (87)$$

e sostituendo il valore di p da (85), si arriva a una relazione tra direttività e larghezza di fascio, che è di largo uso:

$$D_M = 2(2p) = \frac{2.772}{\theta_3^2} = \frac{9100}{(\theta_{3[deg]})^2} \quad (88)$$

valida, evidentemente, solo per antenne direttive.

Invertendo la (88) si ottiene

$$\theta_{3[deg]} = \sqrt{\frac{9100}{D_M}}$$

che è graficamente riportata in Fig. 2 (ed é sostanzialmente utilizzabile anche per antenne con diagrammi differenti dalla (83), purché a simmetria di rotazione). Più in generale, da (86,87), segue

$$\theta_{S[deg]} = 114.5 \sqrt{\frac{-\log \tilde{S}}{D_M}} = 55 \sqrt{\frac{S_{[dB]}}{D_M}}$$

anch'essa riportata in Fig. 2 per $\tilde{S} = 10 dB$ e $20 dB$.

² L'angolo θ_S fornisce una misura della ampiezza *piana* del diagramma della antenna. La larghezza tri-dimensionale si ottiene considerando l'angolo solido corrispondente Ω_S , dato, se $\theta_S \ll 1$, da $\Omega_S = \pi \theta_S^2$. In particolare $\Omega_3 = \frac{8.72}{D_M}$.

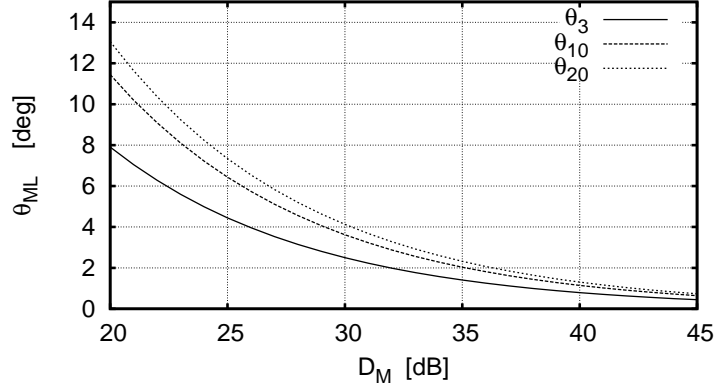


Fig. 2: Relazione tra direttività e larghezza di fascio per diagrammi del tipo (83).

Per quanto riguarda la precisione della approssimazione (83), nella zona del lobo centrale l'errore é molto piccolo fino a circa $1.5\theta_3$ ed accettabile, inferiore a 1 dB , fino a $2\theta_3$, e questi limiti della approssimazione (83) sono indipendenti dal diametro del riflettore. Invece nella zona dei lobi laterali, come si vede dalla Fig. 1, la (83) é molto diversa dal vero andamento di $F(\theta)$. Tuttavia, l'integrale della $F(\theta)$ vera, e di quella data dalla (83) sono molto simili anche su angoli solidi confrontabili con Ω_p . Poiché nelle applicazioni radiometriche interessano essenzialmente tali integrali, useremo la (83) come prima approssimazione di tutto il diagramma di irradiazione di un riflettore per applicazioni radiometriche.

Anche l'area efficace A_e può essere espressa in maniera simile alla (83), essendo proporzionale al guadagno

$$A_e(\theta, \phi) = \frac{\lambda^2}{4\pi} G(\theta, \phi)$$

Convienne, inoltre, introdurre anche una area efficace per l'antenna idealizzata, A_e^I , legata alla direttività da

$$A_e^I(\theta, \phi) = \frac{\lambda^2}{4\pi} D(\theta, \phi) = \frac{1}{\eta_L} A_e(\theta, \phi)$$

Dalla (83) si ha allora

$$\begin{aligned} A_e(\theta, \phi) &= A_M F(\theta) = A_M \cos^{2p} \theta & \text{con} & \quad A_M = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_M = \frac{\lambda^2}{4\pi} \eta_L 4p \\ A_e^I(\theta, \phi) &= A_M^I F(\theta) = A_M^I \cos^{2p} \theta & \text{con} & \quad A_M^I = \frac{\lambda^2}{4\pi} D_M = \frac{\lambda^2}{4\pi} 4p \end{aligned} \quad (89)$$

Notiamo infine che in molte misure radiometriche usuali, la radiazione incidente é completamente non polarizzata, e in questo caso non interessa l'efficienza di cross-polarizzazione, in quanto K_p vale $1/2$ qualunque sia la polarizzazione nominale e attuale del sensore. Se invece si utilizzano antenne *polarization agile*, ovvero in grado di ricevere (alternativamente o contemporaneamente) su due polarizzazioni opposte, diventano importanti, per la precisione della misura, non solo le due efficienze di cross-polarizzazione, ma anche l'*isolamento* tra le due polarizzazioni, ovvero il rapporto tra la potenza ricevuta, nelle due polarizzazioni, se il campo incidente é adattato in polarizzazione con una delle due polarizzazioni nominali del sensore.

Le considerazioni precedenti ci consentono di evidenziare l'effetto del diagramma di radiazione dell'antenna sulle misure radiometriche³.

La temperatura T_{ML} che vorremmo misurare dovrebbe essere:

$$T_{ML} = \overline{T}_{AP} = \frac{\int_{ML} T_{AP}(\Omega) d\Omega}{\Delta\Omega_{ML}} \quad (90)$$

ovvero il valore medio della temperatura apparente sul solo lobo centrale, di ampiezza $\Delta\Omega_{ML}$.

Invece dall'antenna si misura (vedi (77)):

$$T_A^i = \int_{ML+SL} 2K_p(\Omega) \frac{D(\Omega)}{4\pi} T_{AP}(\Omega) d\Omega$$

cioè una media (pesata) di T_{AP} estesa a tutto il diagramma.

Se separiamo i due contributi ML e SL si ottiene:

$$T_A^i = 2K_p(\Omega_{ML}) \int_{ML} \frac{D(\Omega)}{4\pi} T_{AP}(\Omega) d\Omega + \int_{SL} 2K_p(\Omega) \frac{D(\Omega)}{4\pi} T_{AP}(\Omega) d\Omega$$

assumendo K_p costante sul lobo centrale. Possiamo riscrivere questa espressione nella forma

$$T_A^i = 2K_p(\Omega_{ML}) \frac{\int_{ML} T_{AP} D d\Omega}{\int_{ML} D d\Omega} \frac{\int_{ML} D d\Omega}{4\pi} + \frac{\int_{SL} 2K_p T_{AP} D d\Omega}{\int_{SL} D d\Omega} \frac{\int_{SL} D d\Omega}{4\pi} \quad (91)$$

dove i due termini:

$$\eta_M = \frac{\int_{ML} D d\Omega}{4\pi} \quad \eta_m = \frac{\int_{SL} D d\Omega}{4\pi} = 1 - \eta_M$$

sono detti rispettivamente efficienza del lobo centrale e *stray factor* dell'antenna. Gli altri due termini sono invece medie (pesate) delle temperature sul lobo centrale \overline{T}_{ML} e sui lobi laterali \overline{T}_{SL} . Segue da (91)

$$T_A^i = 2K_p(\Omega_{ML}) \overline{T}_{ML} \eta_M + \overline{T}_{SL} (1 - \eta_M) \quad (92)$$

La temperatura di antenna, da (82) e (92) vale

$$\begin{aligned} T_A &= \eta_L T_A^i + (1 - \eta_L) T_{FA} = \eta_L \left[2K_p(\Omega_{ML}) \overline{T}_{ML} \eta_M + \overline{T}_{SL} \eta_m \right] + (1 - \eta_L) T_{FA} \\ &= 2K_p(\Omega_{ML}) \eta_L \eta_M \overline{T}_{ML} + \eta_L \eta_m \overline{T}_{SL} + (1 - \eta_L) T_{FA} \end{aligned} \quad (93)$$

Se accettiamo, come stima di T_{ML} , la sua media pesata \overline{T}_{ML} , allora la (93) può essere invertita per stimare T_{ML} da T_A

$$T_{ML} = \frac{1}{2K_p(\Omega_{ML})} \left[\frac{1}{\eta_L \eta_M} T_A - \frac{\eta_m}{\eta_M} \overline{T}_{SL} - \frac{1 - \eta_L}{\eta_L \eta_M} T_{FA} \right] \quad (94)$$

Nella (94) le quantità η_L , η_M , e quindi η_m sono note, così come si può considerare nota $K_p(\Omega_{ML})$. La T_{FA} può essere facilmente misurata. Quindi l'unica incertezza è su \overline{T}_{SL} .

³ In appendice è anche riportato un esempio di uso delle relazioni precedenti per valutare la potenza ricevuta dal Sole, o comunque da un oggetto circolare esteso.

Pertanto la precisione della stima della temperatura apparente della scena, a partire dalla misura della T_A , dipende in maniera critica dallo stray factor della antenna. Il valore di η_m dipende ovviamente anche dal livello a cui si taglia il lobo centrale. Al ridursi di tale livello, aumenta il lobo centrale, e quindi si riduce lo stray factor. Ma, allo stesso tempo, aumenta la cella di risoluzione delle immagine, ovvero l'angolo solido $\Delta\Omega_{ML}$ a cui viene associato (vedi (90)) un solo valore di temperatura apparente.

Per i diagrammi di antenna (a simmetria di rotazione) del tipo (83) lo stray factor vale

$$\begin{aligned}\eta_m &= \frac{1}{4\pi} 2\pi \int_{\theta_{ML}}^{\frac{\pi}{2}} D_M \cos^{2p} \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} D_M \int_0^{\cos \theta_{ML}} x^{2p+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{D_M}{2p+1} \cos^{2p+1} \theta_{ML} = \cos^{2p+1} \theta_{ML}\end{aligned}\quad (95)$$

essendo θ_{ML} l'angolo a cui termina il lobo centrale, e sostituendo D_M dalla (87).

Va anche notato che la (83), e quindi la (95) che ne discende, si basano sulla ipotesi di campo nullo per $\theta > \pi/2$. In realtà esiste sempre anche una retroirradiazione della antenna (ovvero viene irradiato campo anche per $\theta > \pi/2$) e questo fa ovviamente aumentare lo stray factor. L'espressione precedente va quindi modificata come

$$\eta_m = \cos^{2p+1} \theta_{ML} + \Delta\eta_m^B \quad (96)$$

dove l'ultimo termine tiene conto della retroirradiazione. Il suo valore è compreso tra 0.02 e 0.03.

Per determinare θ_{ML} occorre fissare il livello a cui si vuole far terminare il lobo centrale. Se questo livello è $S_{[dB]}$ sotto il picco, allora, posto $S_{[dB]} = 10 \log_{10} \tilde{S}$, segue

$$\cos^{2p} \theta_{ML} = \frac{1}{\tilde{S}} \quad (97)$$

purché θ_{ML} sia in una regione in cui vale la (83). In tal caso, essendo la direttività massima elevata,

$$\eta_m \simeq \frac{1}{\tilde{S}} + \Delta\eta_m^B \quad (98)$$

ovvero valori di efficienza di lobo centrale di circa il 88% se si assume che il lobo centrale termini a $-10 dB$. Non è conveniente assumere un lobo più stretto in quanto si ha una piccola riduzione di θ_{ML} , associata a un forte incremento dello stray factor (che diventa del 50% se si considera il lobo a $-3 dB$). Conviene anzi aumentare \tilde{S} scegliendo un livello di taglio del lobo centrale più elevato. In tal caso, però, la (97) potrebbe non essere più utilizzabile, in quanto θ_{ML} diventa troppo più grande dell'angolo a $3 dB$ (si veda la discussione sulla precisione della (83)). Inoltre, anche la precisione con cui l'integrale della (83) approssima quello vero potrebbe non essere sufficiente per stimare stray factor così piccoli. Ad esempio, per un livello del lobo centrale fino a $-20 dB$, la (97) prevederebbe una efficienza di lobo centrale del 97%, mentre in realtà è intorno al 95–96%. In prima approssimazione, la (98) è utilizzabile fino a un livello di taglio del lobo centrale di circa $-15 dB$.

15 MISURA DI POTENZA DI RUMORE

I segnali radiometrici hanno tutte le caratteristiche del rumore. La loro ricezione, ovvero la valutazione della potenza di rumore (o della temperatura apparente), che è lo scopo di una misura radiometrica, richiede quindi una analisi *ad hoc*.

Il segnale ricevuto da un sensore radiometrico è, istante per istante, la somma di un gran numero di segnali tra loro incorrelati, provenienti dai diversi punti della scena osservata. In termini di segnale aleatorio complesso, a banda limitata, si ha

$$V(t) = v_c(t) + jv_s(t) = \sum A_n(t)e^{j\phi_n(t)} \quad (99)$$

Poiché le ampiezze $A_n(t)$ e fasi $\phi_n(t)$ di questi segnali sono grandezze aleatorie incorrelate tra loro, anche $V(t)$ è un segnale aleatorio. Questo implica che, se noi misuriamo esattamente la stessa scena più volte, otterremo ogni volta un diverso $V(t)$, ovvero una diversa realizzazione del corrispondente segnale aleatorio.

Per ottenere una misura significativa occorre quindi stabilire una adatta procedura di misura e, preliminarmente, decidere qual è la grandezza che vogliamo misurare.

La grandezza radiometrica fondamentale è la brillantezza (o la temperatura di brillantezza) che è una grandezza energetica. Siamo quindi interessati alla potenza associata al segnale radiometrico ricevuto:

$$P(t) = \frac{1}{R_0} v^2(t)$$

dove R_0 è la resistenza del sistema ricevente, o più precisamente alla sua **media statistica**

$$\mathcal{E}[P(t)] = \frac{1}{R_0} \mathcal{E}[v^2(t)] = \frac{1}{R_0} \mathcal{E}[v_c(t)^2] = \frac{1}{2R_0} \mathcal{E}[v_c(t)^2 + v_s(t)^2] \quad (100)$$

I due segnali aleatori $v_c(t)$ e $v_s(t)$, essendo somma di un gran numero di segnali aleatori indipendenti e a media nulla, risultano essere separatamente Gaussiani a media nulla (teorema del limite centrale) e con la stessa varianza. Inoltre abbiamo dimostrato che campioni di $v_c(t)$ e $v_s(t)$, presi nello stesso istante, sono incorrelati. Pertanto questi campioni sono congiuntamente Gaussiani e indipendenti, con *pdf*:

$$p(v_c, v_s) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{v_c^2 + v_s^2}{2\sigma^2}\right) \quad (101)$$

Di conseguenza i campioni di ampiezza $|V|$, fase Φ e potenza $P = |V|^2$ del segnale ricevuto (99) sono tutte V.A. Si dimostra che ¹:

$|V|$: Variabile aleatoria di Rayleigh, con $p(|V|) = \frac{|V|}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{|V|}{2\sigma^2}\right)$;

Φ : Variabile aleatoria uniformemente distribuita in $(-\pi, \pi)$;

P : Variabile aleatoria di tipo esponenziale con $p(P) = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{P}{2\sigma^2}\right)$.

¹ A. Papoulis: *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*.

Evidentemente una singola misura di potenza fornisce solo una realizzazione di $P(t)$. Per ottenere la media statistica utilizziamo N realizzazioni indipendenti della V.A., ovvero² N misure successive di potenza P_i , separate da un tempo abbastanza grande da renderle incorrelate (e quindi indipendenti) e stimiamo la media statistica $\mathcal{E}[P]$ mediante la media aritmetica \bar{P}

$$\mathcal{E}[P] \simeq \bar{P} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N P_i \quad (102)$$

in quanto si dimostra che il corrispondente errore di stima tende a zero al crescere di N .

Non potendo però eseguire infinite misure, risulta importante valutare l'errore (o meglio l'errore medio) che si commette, utilizzando un numero N finito di misure.

L'errore su di una singola misura, con risultato P , è evidentemente $P - \mathcal{E}[P]$. L'errore medio utilizzando una singola misura può essere misurato dallo scarto quadratico medio σ_P , dato da

$$\sigma_P^2 = \text{Var}[P] = \mathcal{E}[(P - \mathcal{E}[P])^2] = \mathcal{E}[P^2] - (\mathcal{E}[P])^2$$

Tenendo conto che P è una V.A. esponenziale si trova $\sigma_P = \mathcal{E}[P]$. L'errore su di una singola misura è quindi pari alla misura stessa, un risultato evidentemente inaccettabile.

In realtà la situazione è anche peggiore. Infatti lo scarto quadratico medio è una misura di errore per variabili gaussiane, o almeno con pdf di forma simile a una gaussiana. Per una V.A. esponenziale lo scarto non è una misura attendibile. La pdf esponenziale mostra che valori molto più piccoli della media sono quelli più probabili, e esiste una probabilità piccola ma non nulla di avere misure molto più grandi.

Fortunatamente, la situazione migliora significativamente utilizzando invece N misure e valutando il risultato con la (102). La V.A. \bar{P} è allora approssimativamente gaussiana, e il suo scarto (ovvero l'errore medio atteso) risulta diviso per \sqrt{N} .

$$\text{Var}[\bar{P}] = \frac{1}{N} \text{Var}[P] \quad \sigma_{\bar{P}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sigma_P \quad (103)$$

Utilizzando un numero N grande di misure, quindi, è possibile ottenere una stima sufficientemente accurata della potenza media di rumore.

Da un punto di vista pratico, non è però possibile campionare la potenza istantanea (a radiofrequenza!), e poi elaborare numericamente i campioni usando la (102). I ricevitori radiometrici, quindi, sono realizzati mediante ricevitori supereterodina.

Il segnale di ingresso *SSB* è pari a

$$v(t) = v_I(t) \cos \omega_0 t - v_Q(t) \sin \omega_0 t$$

con spettro di densità di potenza costante e diverso da zero solo in ω_0 , $\omega_0 + \Delta\omega$. La sua potenza media è data dalla (100)

$$\mathcal{E}[P(t)] = \frac{1}{2R_0} \mathcal{E}[v_I(t)^2 + v_Q(t)^2]$$

² Assumamo che i segnali considerati siano ergodici almeno nella autocorrelazione, in modo da poter calcolare la media statistica della potenza come media temporale di una singola realizzazione di $P(t)$, vedi A. Papoulis: *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*.

ed è la grandezza di interesse.

Consideriamo un modello semplificato di tale ricevitore, che, partendo dal segnale SSB , esegue una conversione di frequenza mediante moltiplicazione per $\cos \omega_0 t$ e successivo filtraggio passa-basso.

Il segnale risultante vale

$$v_B(t) = \frac{1}{2} v_I(t)$$

ed è un segnale a banda limitata, con banda

$$B_V = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$$

Il segnale $v_B(t)$ viene quindi fatto passare in un rivelatore quadratico e poi amplificato ottenendo, a meno di una costante moltiplicativa arbitraria,

$$y(t) = \frac{1}{R_0} v_I^2(t) \quad (104)$$

L'uscita $y(t)$ è un segnale aleatorio a banda limitata, con banda pari a $2B_V$. La sua statistica del primo ordine è di tipo esponenziale³, con media pari a

$$m_y = \mathcal{E}[y(t)] = \mathcal{E}[P(t)] \quad (105)$$

e varianza

$$Var[y(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{S}_y(\omega) d\omega = 2 m_y^2 = 2 \left\{ \mathcal{E}[P(t)] \right\}^2 \quad (106)$$

come ci si poteva aspettare, per la statistica⁴ di $y(t)$. Per ridurre questa varianza, il segnale $y(t)$ può essere integrato, oppure fatto passare attraverso un filtro passa-basso, con opportuna frequenza di taglio f_t . Poiché questa seconda soluzione è più semplice sia dal punto di vista della analisi, sia della realizzazione, considereremo solo quest'ultima. Che però richiede la conoscenza dello spettro del segnale $y(t)$.

Poiché la media è diversa da zero, lo spettro di densità di potenza di $y(t)$ contiene un impulso nell'origine, e vale

$$S_y(\omega) = 2\pi m_y^2 \delta(\omega) + \hat{S}_y(\omega)$$

con $\hat{S}_y(\omega)$ funzione continua, con

$$\hat{S}_y(0) = \frac{2\pi}{\Delta\omega} m_y^2$$

³ La pdf di $y(t)$ è precisamente

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi R_x(0) y}} \exp\left(-\frac{y}{2R_x(0)}\right) \delta_{-1}(y)$$

con $R_x(0)$ autocorrelazione del processo $v_I(t)/\sqrt{R_0}$ (vedi A. Papoulis: *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, Ex. 10–15).

⁴ Il rapporto tra scarto e varianza vale $\sqrt{2}$, ed è persino più grande di quello di una variabile esponenziale in quanto la sua pdf è singolare nell'origine, e questo ne incrementa la variabilità.

Detta $H_L(\omega)$ la risposta armonica del filtro, normalizzata a $H_L(0) = 1$, lo spettro di densità di potenza dell'uscita $u(t)$ del filtro vale

$$\begin{aligned} S_u(\omega) &= |H_L(\omega)|^2 S_y(\omega) = 2\pi m_y^2 |H_L(0)|^2 \delta(\omega) + |H_L(\omega)|^2 \hat{S}_y(\omega) \\ &= 2\pi m_y^2 \delta(\omega) + |H_L(\omega)|^2 \hat{S}_y(\omega) = 2\pi m_y^2 \delta(\omega) + \hat{S}_u(\omega) \end{aligned} \quad (107)$$

da cui segue che la media è la stessa di $Y(t)$

$$\mathcal{E}[u(t)] = m_y = \mathcal{E}[P(t)]$$

Ovviamente $S_y(\omega)$ ha una larghezza di banda (sul semiasse positivo) pari a $2\Delta\omega$. Se scegliamo la banda passante del filtro $2\pi f_t \ll 2\Delta\omega$, possiamo approssimare $\hat{S}_y(\omega) \simeq \hat{S}_y(0)$, ottenendo, per la varianza di $u(t)$

$$Var[u(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{S}_u(\omega) d\omega = \frac{\hat{S}_y(0)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_L(\omega)|^2 d\omega = \frac{2m_y^2}{2\Delta\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_L(\omega)|^2 d\omega \quad (108)$$

Per un filtro passa-basso ideale con frequenza di taglio f_t , la (108) fornisce

$$Var[u(t)] = \frac{2m_y^2}{2\Delta\omega} 2\pi (2f_t) = 2m_y^2 \frac{f_t}{B_V} = Var[y(t)] \frac{f_t}{B_V}$$

La varianza di $u(t)$ è quindi B_V/f_t volte più piccola di quella di $y(t)$. Esprimendo la varianza di $y(t)$ mediante la (106) segue

$$Var[u(t)] = 2 \left\{ \mathcal{E}[P(t)] \right\}^2 \frac{f_t}{B_V} \quad (109)$$

Questo risultato è l'analogo di (103) per il caso di ricevitore supereterodina (e non di campionamento diretto), e mostra che il nostro filtro equivale a eseguire una media su

$$N = \frac{B_V}{2f_t}$$

campioni.

La risposta impulsiva del nostro filtro passa-basso ideale vale

$$h_L(t) = 2f_t \operatorname{sinc}(2\pi f_t t)$$

e quindi la relazione ingresso-uscita del filtro fornisce

$$u(t) = 2f_t \int \operatorname{sinc}(2\pi f_t t) y(t - \sigma) d\sigma$$

che mostra che $u(t)$ è, istante per istante, una media mobile di $y(t)$ fatta su di un intervallo pari alla larghezza della $h_L(t)$, ovvero $1/(2f_t)$ (usando la larghezza a -3 dB della sinc).

Nel caso generale introduciamo un tempo di integrazione equivalente⁵ T_i^{eq} , definito da

$$\frac{1}{T_i^{eq}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_L(\omega)|^2 d\omega \quad (110)$$

⁵ Nel caso si utilizzi un integratore, questo tempo coincide col tempo effettivo di integrazione.

e che per il nostro filtro passa-basso ideale vale appunto $1/(2f_t)$.

Usandolo, la (109) può essere scritta come

$$Var[u(t)] = \frac{\left\{ \mathcal{E}[P(t)] \right\}^2}{B_V T_i^{eq}} = \frac{\left\{ \mathcal{E}[u(t)] \right\}^2}{B_V T_i^{eq}} \quad (111)$$

La varianza di $u(t)$, stima della potenza in ingresso al ricevitore, è quindi $N = B_V T_i^{eq}$ volte più piccola del quadrato della potenza media. Questo risultato è l'analogo di (103) per il caso di ricevitore supereterodina (e non di campionamento diretto). La (111) si può interpretare ricordando che il tempo di correlazione τ_c di $v_I(t)$ (coincidente con quello di $y(t)$) è l'inverso della banda B_V . Pertanto i campioni indipendenti in un intervallo di lunghezza T_i^{eq} sono T_i^{eq}/τ_c , ovvero $B_V T_i^{eq} = N$.

Nella analisi delle prestazioni dei ricevitori radiometrici, useremo per comodità l'approccio *campionamento*, e quindi N , nonostante la specifica tipica dei ricevitori radiometrici sia il tempo T_i di integrazione (equivalente).

16 RICEVITORI RADIOMETRICI

Un ricevitore radiometrico fornisce in uscita una grandezza proporzionale alla potenza di rumore in ingresso. In realtà, la potenza di rumore è una grandezza aleatoria, e quindi quello che si vuole misurare è la temperatura di rumore, ovvero la media statistica della potenza di rumore in ingresso.

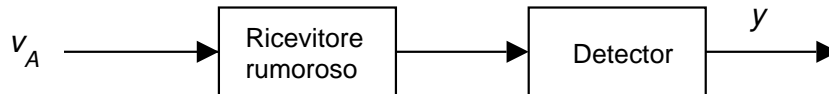


Fig.1: Radiometro a potenza totale.

Lo schema più semplice che si può adottare (Fig.1) è il *ricevitore a potenza totale*, costituito da un ricevitore supereterodina, di banda B_V e temperatura di rumore T_R , in cui entra il segnale $v_A(t)$ proveniente dalla antenna, che è un segnale di rumore (ovvero ha le caratteristiche statistiche di un rumore). A valle del ricevitore c'è poi un detector con legge quadratica. Il compito del radiometro è di misurare la media statistica della potenza (di rumore) relativa al segnale $v_A(t)$, ovvero la temperatura d'antenna T_A .

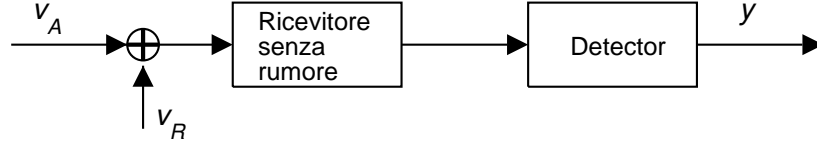


Fig.2: Schema equivalente per l'analisi di un radiometro a potenza totale.

L'analisi di questo ricevitore può essere condotta utilizzando un ricevitore senza rumore, e aggiungendo il rumore in ingresso, ovvero (Fig. 2) sommando al segnale di rumore proveniente dalla antenna, un altro segnale di rumore $v_R(t)$, con potenza media $P_R = \mathcal{K}B_V T_R$, dove \mathcal{K} è la costante di Boltzmann.

L'uscita del ricevitore è dato dal segnale demodulato, che indichiamo con $s_A(t) + s_R(t)$. Il detector produce quindi in uscita un segnale aleatorio proporzionale al quadrato del segnale di ingresso (confronta (104)). Quindi

$$y = \frac{G_s}{R_0} (s_A + s_R)^2 \frac{1}{\mathcal{K}B_V} \quad (112)$$

dove $G_s/\mathcal{K}B_V$ è il guadagno complessivo del ricevitore. La media statistica di y vale

$$\mathcal{E}[y] = G_s \mathcal{E} \left[\frac{(s_A + s_R)^2}{R_0} \right] \frac{1}{\mathcal{K}B_V} = G_s T_S \quad (113)$$

essendo $T_S = T_A + T_R$. Pertanto $\mathcal{E}[y]$ è uno stimatore con *bias* della T_A .

Come mostrato nel paragrafo precedente, per avere una stima affidabile della T_A occorre filtrare il segnale $y(t)$. Un campione del segnale filtrato è la stima cercata.

Indichiamo con Y un campione della uscita del filtro passa-basso, o dell'integratore, con tempo di integrazione (equivalente) T_i . Posto, con i simboli del paragrafo precedente, $N = 2B_V T_i$ segue allora

$$\mathcal{E}[Y] = G_s T_S \quad \text{Var}[Y] = \frac{\{\mathcal{E}[Y]\}^2}{N} = \frac{1}{N} G_s^2 T_S^2 \quad (114)$$

Per valutare le prestazioni di un radiometro a potenza totale (così come degli altri radiometri), occorre tener conto che siamo interessati a T_A e non a T_S . Non basta quindi misurare Y , ma è necessario misurare anche G_s e T_R , e calcolare da questi la stima della temperatura di antenna

$$\tilde{T}_A = \frac{1}{G_s} Y - T_R \quad (115)$$

(calibrazione del ricevitore). Il valor medio statistico della stima vale, da (114), T_A .

In un ricevitore ideale G_s e T_R sono costanti, e quindi l'errore di stima su T_A sarebbe pari a

$$\Delta T_A = \frac{1}{G_s} \sqrt{\text{Var}[Y]} = \frac{1}{\sqrt{N}} T_S = \Delta T_i \quad (116)$$

in cui ΔT_i è detto errore *intrinseco*, e corrisponde al minimo errore possibile. Pertanto costituisce il riferimento per valutare la qualità delle varie tecniche di misura.

Per il ricevitore ideale, è possibile calcolare il valore necessario di N . Se l'errore relativo richiesto su T_A è pari ad ϵ , si dovrà avere:

$$\Delta T_i = \epsilon T_A \quad \Rightarrow \quad \frac{T_S}{\sqrt{N}} = \epsilon T_A$$

e risolvendo rispetto a N :

$$N = \left(\frac{T_S}{\epsilon T_A} \right)^2$$

Per un caso tipico $T_A = 200 \text{ K}$, $T_S = 2000 \text{ K}$, un errore pari a 1% richiede $N = 10^6$. Per un ricevitore con banda di 20 MHz il tempo di integrazione è pari a 50 msec , che è un valore abbastanza grande per ottenere un singolo campione di T_A . La situazione è ancora peggiore se T_A è più piccolo, come ad esempio nei ricevitori radioastronomici (che sono concettualmente identici ai ricevitori radiometrici). Valori più piccoli di N sono accettabili solo ricorrendo a ricevitori con T_R significativamente più piccola (ricevitori criogenici).

Tuttavia G_s e T_R sono a loro volta variabili, e quindi, nel tempo, il loro valore differisce da quello utilizzato nella (115), che è pari a quello misurato nell'ultima operazione di calibrazione. Occorre allora valutare l'errore che si commette a causa di questa variazione.

Per fare questa valutazione, occorre individuare le cause indipendenti di errore (nel nostro caso Y , G_s e T_R) e poi differenziare la (115) rispetto a queste variabili. Nel nostro caso differenziando si ottiene

$$dT_A = \frac{1}{G_s} dY - \frac{1}{G_s^2} Y dG_s - dT_R = \frac{1}{G_s} dY - \frac{1}{G_s} T_S dG_s - dT_R \quad (117)$$

ricordando che $Y = G_s T_S$. Il primo termine è l'errore intrinseco di misura, e gli altri due sono dovuti alla differenza tra il valore effettivo di G_s e T_R e quello (misurato nella fase di calibrazione) utilizzato nel calcolo di T_A . I tre contributi di errore della (117) sono tra loro indipendenti per costruzione. La varianza totale è quindi la somma delle varianze o errori quadratici dei singoli termini:

$$(\Delta T_A)^2 = \frac{T_S^2}{N} + \frac{T_S^2}{G_s^2} (\Delta G_s)^2 + (\Delta T_R)^2 = T_S^2 \left[\frac{1}{N} + \left(\frac{\Delta G_s}{G_s} \right)^2 \right] + (\Delta T_R)^2 \quad (118)$$

L'ultimo termine è in genere abbastanza piccolo, e quindi l'errore aumenta rispetto a ΔT_i a causa essenzialmente delle variazioni di G_s . Il valore di $\Delta G_s/G_s$ varia tra 10^{-4} e 10^{-2} , variazioni in se molto piccole. Tuttavia va ricordato che $T_A \ll T_S$ e quindi N è molto grande, 10^6 o superiore, e pertanto l'errore su T_A può risultare dovuto quasi esclusivamente alle variazioni di G_s , indipendentemente da N . Ricevitori a rumore totale si usano in genere se non è richiesta una precisione elevata, oppure se T_R è paragonabile a T_A oppure, infine, se il ricevitore ha una variazione molto piccola di G_s .

17 RADIOMETRO DI DICKE

Per compensare l'effetto delle variazioni di guadagno (e di T_R), sono stati proposti vari tipi di radiometri, che utilizzano tutti una sorgente di rumore esterna $v_N(t)$, di potenza nota $\mathcal{K}B_V T_N$.

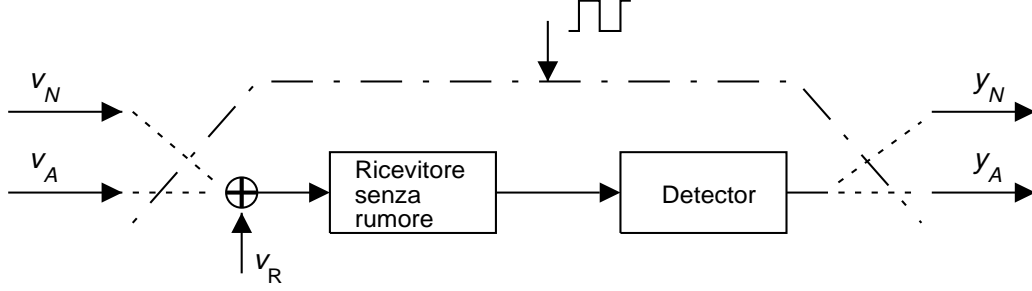


Fig.3: Schema di principio di un radiometro di Dicke.

La configurazione più utilizzata è quella detta del radiometro di Dicke, in cui il ricevitore commuta (con frequenze tipiche intorno a 1 kHz) tra l'antenna e la sorgente esterna. Contemporaneamente, e in modo sincrono, commuta anche l'uscita del detector.

In tal modo vengono alternativamente estratti campioni dovuti a v_A ed alla sorgente di rumore esterna v_N .

All'ingresso del detector sono presenti alternativamente $s_A + s_R$ e $s_N + s_R$, e in uscita, dopo una integrazione, vengono calcolate due V.A. (si confronti (114))

$$\begin{aligned} Y_A &= G_s (T_A + T_R) \\ Y_N &= G_s (T_N + T_R) \end{aligned}$$

le cui stime sono mediate su $N/2$ (per eseguire il confronto a parità o di tempo totale di integrazione). La differenza tra le due stime vale

$$Y = Y_A - Y_N = G_s \left[(T_A + T_R) - (T_N + T_R) \right] = G_s (T_A - T_N) \quad (119)$$

La varianza di Y può essere ottenuta dalla prima di queste espressioni, essendo Y_A e Y_N indipendenti:

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y] &= \text{Var}[Y_A] + \text{Var}[Y_N] = \frac{1}{N/2} G_s^2 (T_A + T_R)^2 + \frac{1}{N/2} G_s^2 (T_N + T_R)^2 \\ &= \frac{2G_s^2}{N} \left[(T_A + T_R)^2 + (T_N + T_R)^2 \right] \end{aligned} \quad (120)$$

Per ottenere T_A è ancora richiesta una calibrazione

$$T_A = \frac{1}{G_s} Y + T_N \quad (121)$$

Per calcolare la varianza di T_A si può procedere come per il radiometro a potenza totale. Il differenziale di (119), rispetto alle variabili indipendenti Y , G_s e T_N vale

$$dT_A = \frac{1}{G_s} dY - \frac{1}{G_s^2} Y dG_s + dT_N = \frac{1}{G_s} dY - \frac{1}{G_s} (T_A - T_N) dG_s + dT_N \quad (122)$$

La varianza totale è quindi, analogamente alla (118),

$$(\Delta T_A)^2 = \frac{1}{G_s^2} \text{Var}[Y] + \frac{(T_A - T_N)^2}{G_s^2} (\Delta G_s)^2 + (\Delta T_N)^2 \quad (123)$$

La sorgente esterna di rumore è normalmente molto stabile e quindi $(\Delta T_N) \simeq 0$. Sostituendo $Var[Y]$ da (120) si trova l'errore del radiometro di Dicke:

$$(\Delta T_A)^2 = \frac{2}{N} \left[(T_A + T_R)^2 + (T_N + T_R)^2 \right] + (T_A - T_N)^2 \frac{(\Delta G_s)^2}{G_s^2} \quad (124)$$

L'errore dovuto a ΔG_s può quindi essere ridotto (anche considerevolmente) scegliendo T_N prossimo a T_A .

Se il radiometro viene costruito con una sorgente di rumore variabile controllata in controreazione, in modo da garantire che $T_N = T_A$ allora l'errore totale vale

$$(\Delta T_A)^2 = \frac{2}{N} \left[2(T_A + T_R)^2 \right] = (2\Delta T_i)^2$$

e risulta indipendente dalle variazioni dello strumento. Il valore dell'errore è raddoppiato rispetto al caso ideale in quanto il valore di T_A è integrato solo sulla metà del tempo.

Va comunque considerato che il commutatore introduce una perdita di inserzione, e quindi contribuisce ad incrementare il rumore del ricevitore T_R .

Se indichiamo con

$$IL = \frac{\text{Potenza senza switch}}{\text{Potenza con switch}}$$

la perdita di inserzione, inverso del guadagno $G_{sw} < 1$, e assumiamo lo switch adattato, è facile calcolare la potenza di rumore aggiunta dallo switch.

Se lo switch fosse alla temperatura di antenna T_A , allora la potenza di rumore complessivamente fornita in assenza e in presenza dello switch (adattato) è la stessa. Detta P_A questa potenza, la presenza dello switch fa sì che $G_{sw}P_A$ sia potenza in ingresso trasmessa in uscita, mentre $(1 - G_{sw})P_A$ sia dovuta allo switch. Se lo switch è a temperatura $T_{fs} \neq T_A$, allora la potenza che produce vale

$$(1 - G_{sw})P_A \frac{T_{fs}}{T_A}$$

Pertanto il guadagno del ricevitore va moltiplicato per G_{sw} , e la temperatura del ricevitore diventa (confronta anche (82))

$$T_R + (1 - G_{sw})T_{fs}$$

Valori tipici di perdita di inserzione sono di 0.3 dB , corrispondenti a guadagni di 0.933. L'incremento di temperatura, per switch a temperatura ambiente, è quindi di 20 K

Pertanto il valore di T_S è diverso nei due casi finora esaminati, e maggiore nel radiometro di Dicke. Per misure di piccole temperature d'antenna va quindi valutato se il radiometro di Dicke (che è di realizzazione ben più complessa, specie se si usa una sorgente di rumore in controreazione) fornisca effettivamente prestazioni superiori a quello a potenza totale

18 RISOLUZIONE

Nel telerilevamento, il concetto di risoluzione occupa un ruolo centrale. Si intende genericamente per risoluzione la dimensione minima della informazione distinta che si ha in una immagine. Evidentemente, più piccola è la risoluzione, maggiore è la qualità della immagine.

Ovviamente, occorre definire quantitativamente, in maniera precisa, questo concetto per poterlo usare nel progetto, e nel confronto, di un sistema radar o radiometrico.

Convien discutere questo concetto partendo da un sistema radar di identificazione, in quanto, in tale ambito, è di facile definizione. La risoluzione di un radar di identificazione è la minima distanza tra due oggetti che possono essere identificati come distinti in maniera affidabile.

In un sistema di telerilevamento questa definizione non è utilizzabile direttamente in quanto tale sistema deve costruire una immagine di una certa regione, che non è mai costituita da oggetti discreti ma da una estensione continua della grandezza da misurare. Quindi la risoluzione di una immagine discretizzata può essere definita come la larghezza della cella di risoluzione, ovvero del pixel di una mappa in cui tutti i pixel hanno valori tra loro indipendenti. Se l'immagine è (apparentemente) continua, la risoluzione è la larghezza della zona i cui valori sono indipendenti dal resto della mappa (e quindi potrebbero essere raggruppati in un solo pixel). Queste definizioni sono però di applicabilità non immediata. Per valutare la qualità di un sistema radiometrico si può allora usare una sequenza di zone alternativamente calde e fredde, tutte con la stessa larghezza. E definire la risoluzione come la minima larghezza che debbono avere queste zone per essere ricostruite in maniera accurata.

In un sistema radiometrico, la risoluzione così definita dipende ovviamente dal diagramma della antenna usata, ma anche dalla elaborazione successiva. In questo paragrafo discuteremo prima la risoluzione dal solo punto di vista della antenna, utilizzando un modello semplificato di acquisizione radiometrica. Successivamente vedremo l'effetto del filtraggio sulla risoluzione. Nel prossimo paragrafo discuteremo invece la geometria effettiva di acquisizione della immagine radiometrica.

Consideriamo allora un sistema radiometrico monodimensionale (montato su satellite), che deve costruire una mappa della temperatura apparente lungo un segmento, proiezione a terra della sua linea di volo, ovvero misurare la $T_B(x)$. La antenna ha un massimo nella direzione di *nadir*, ovvero verticale verso il basso e, poiché il satellite si muove con velocità v la sua posizione, e quella del punto di massimo campo a terra, varia col tempo t secondo la legge $x = vt$. Ne segue che anche la temperatura istantanea ricevuta da una antenna ideale $T_A^i(t)$ varia col tempo. Quest'ultima è data dalla (77), che esprime $T_A^i(t)$ come media della temperatura apparente pesata con la direttività della antenna. Pertanto, la variazione con t della $T_A^i(t)$ diventa una mappa (al variare di x) della temperatura di brillantezza al suolo.

La (77) è una relazione bidimensionale. Occorre quindi riscriverla nel caso monodimensionale di nostro interesse. Assumendo radiazione completamente non polarizzata, e a meno di costanti inessenziali per valutare la risoluzione, si ha

$$T_A^i(t) = \int D(\theta) T_{AP}(\theta, t) d\theta \quad (125)$$

La T_{AP} dipende anche da t in quanto, al variare della posizione del sensore, cambia la scena che il sensore vede, e in particolare cambiano gli angoli sotto cui ogni parte della scena è vista (vedi Fig. 1).

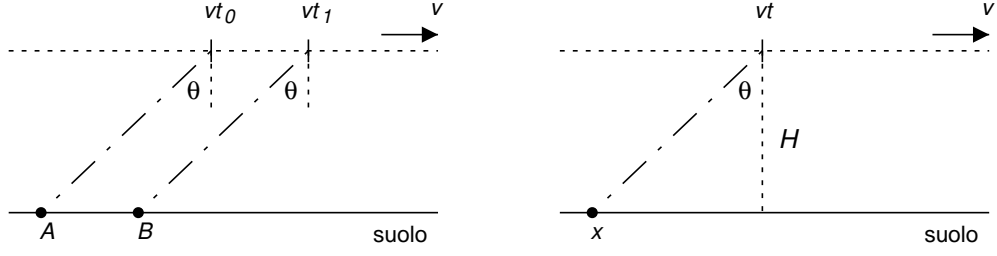


Fig. 1 (sinistra): Relazione tra $T_B(x)$ e $T_{AP}(\theta, t)$ al variare di t .

Fig. 2 (destra): Geometria di acquisizione.

Per collegare la $T_{AP}(\theta, t)$ alla $T_B(x)$ consideriamo la geometria di acquisizione della Fig. 2. Nelle coordinate del sensore, posto a quota H , si ha che la posizione x di un punto a terra vale (all'istante t)

$$x = vt - H \tan \theta \simeq vt - H\theta \quad (126)$$

per cui, nella (125), $T_{AP}(\theta, t) = T_B(vt - H\theta)$. La (125) si trasforma quindi in una convoluzione

$$T_A^i(t) = \int D(\theta) T_B(vt - H\theta) d\theta = \int D\left(\frac{vt - \sigma}{H}\right) T_B(\sigma) d\sigma \quad (127)$$

La mappa (stimata) di temperatura di brillantezza $\hat{T}_B(x)$ al variare di x si ottiene dalla (126) come

$$\hat{T}_B(x) = T_A^i\left(\frac{x}{v}\right) = \int D\left(\frac{x - \sigma}{H}\right) T_B(\sigma) d\sigma \quad (128)$$

che mostra che la mappa ricostruita dalle misure è necessariamente una *media mobile* dell'andamento vero della temperatura di brillantezza. La larghezza, e la forma, della finestra su cui è eseguita la media dipendono dal diagramma della antenna.

Per valutare la risoluzione dovuta alla sola antenna, consideriamo allora la mappa (stimata) di temperatura di brillantezza $\hat{T}_B(x)$, data dalla (125), se il sensore scandisce una sequenza di zone calde e fredde, tutte con estensione $\Delta x_{hc} = 0.04H$. In Fig. 3 è riportata la T_B per antenne di differente direttività massima D_M , scelte in modo che la larghezza del lobo centrale, definita a vari livelli di taglio, sia pari a Δx_{hc} , e descritte in tabella I.

Antenna	D_M	Angolo corrispondente a Δx_{hc}
A	38.4 dB	$2\theta_3$
B	41.4 dB	$2\theta_6$
C	44.4 dB	$2\theta_{12}$
D	46.6 dB	$2\theta_{20}$

Tabella I: Dati delle antenne usate in Fig. 3

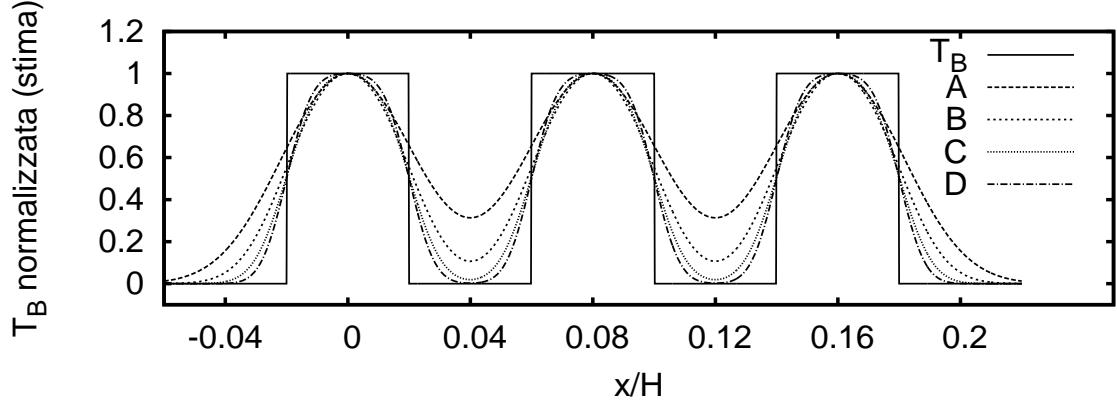


Fig. 3: Temperatura di brillantezza stimata per una sequenza di hot spot al variare della direttività della antenna.

Si vede chiaramente che solo le antenne *C* e *D* consentono di ricostruire chiaramente il profilo di temperatura apparente. Nel seguito utilizzeremo quindi, come risoluzione dovuta alla antenna, la larghezza totale del lobo centrale a -12 dB od a -20 dB

$$2\theta_{12} = \frac{3.3}{\sqrt{p}} = \frac{6.6}{\sqrt{D_M}} \quad 2\theta_{20} = \frac{4.4}{\sqrt{p}} = \frac{8.8}{\sqrt{D_M}} \quad (129)$$

La (127) è simile ad una convoluzione, e la si può quindi interpretare anche considerandola come la relazione ingresso-uscita di una sorta di sistema lineare, in cui l'ingresso è una funzione dello spazio, ovvero $T_B(x)$, e l'uscita è invece una funzione del tempo, $T_A^i(t)$, che verrà poi ulteriormente elaborata dal filtro del ricevitore.

Per semplificare l'analisi degli effetti del filtro del ricevitore (ma anche del diagramma di antenna) conviene analizzare questo *sistema lineare* nel dominio trasformato. Ovviamente non è possibile utilizzare direttamente le relazioni valide per sistemi lineari standard, ma il calcolo della relazione del dominio trasformato va fatto direttamente. L'ingresso va trasformato rispetto alla coordinata x , definendo¹

$$\hat{T}_B(k) = \int T_B(x) e^{jkx} dx \quad \Longleftrightarrow \quad T_B(x) = \int \hat{T}_B(k) e^{-jkx} \frac{dk}{2\pi} \quad (130)$$

Per quanto riguarda invece l'uscita, questa va trasformata rispetto a t come

$$\hat{T}_A^i(\omega) = \int T_A^i(t) e^{-j\omega t} dt = \int D(\theta) \left[\int T_B(vt - H\theta) e^{-j\omega t} dt \right] d\theta \quad (131)$$

avendo usato la (127). Il termine in parentesi quadra si calcola ponendo $y = vt - H\theta$ e vale

$$\begin{aligned} \int T_B(vt - H\theta) e^{-j\omega t} dt &= \frac{1}{v} \int T_B(y) \exp\left(-j\omega \frac{y}{v}\right) \exp\left(-j\omega \frac{H\theta}{v}\right) dy \\ &= \frac{1}{v} \hat{T}_B\left(-\frac{\omega}{v}\right) \exp\left(-j\omega \frac{H\theta}{v}\right) \end{aligned}$$

e sostituendo nella (131) segue

¹ La definizione usata è quella standard per le trasformate di funzioni dello spazio.

$$\hat{T}_A^i(\omega) = \frac{1}{v} \hat{T}_B\left(-\frac{\omega}{v}\right) \int D(\theta) \exp\left(-j\omega \frac{H\theta}{v}\right) d\theta = \frac{1}{v} \hat{T}_B\left(-\frac{\omega}{v}\right) \hat{D}\left(\frac{H\omega}{v}\right) \quad (132)$$

essendo

$$\hat{D}(\hat{\omega}) = \int D(\theta) \exp(-j\hat{\omega}\theta) d\theta$$

la trasformata di $D(\theta)$, con variabile coniugata $\hat{\omega}$, adimensionale.

Possiamo pertanto considerare l'antenna come un sistema, come in Fig. 4, di risposta impulsiva $D(\theta)$, e risposta armonica $\hat{D}(\hat{\omega})$.

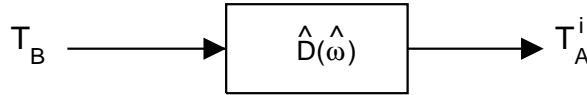


Fig. 4: Descrizione a blocchi del comportamento della antenna.

Per un diagramma del tipo (83), ovvero

$$D(\theta) = D_M \cos^{2p}(\theta) \quad (83)$$

con p grande, la trasformata $\hat{D}(\hat{\omega})$ è, approssimativamente, data da

$$\frac{\hat{D}(\hat{\omega})}{D_M} = \text{sinc}\left(\frac{1.1}{\sqrt{p}} \hat{\omega}\right) \quad (133)$$

In Fig. 5 è riportato il confronto tra la trasformata esatta della (83), e la sua approssimazione (133), nonché la T_A^i relativa a uno *hot spot* (ovvero una zona calda isolata) di estensione $\Delta x_{hs} = 0.08H$, ottenuta usando rispettivamente la espressione esatta e quella approssimata di $\hat{D}(\hat{\omega})$ per la antenna *C* di Tabella I. Come si può vedere, le differenze sono minime. In particolare, nella T_A^i approssimata, i fianchi di salita e discesa non sono arrotondati, ma diritti. Infatti la (133) implica che la risposta impulsiva della antenna nello schema di Fig. 4 è un impulso rettangolare di ampiezza

$$\Delta\theta_a = \frac{2.2}{\sqrt{p}}$$

centrato nell'origine².

² Il sistema della Fig. 4 ha come variabile della risposta *impulsiva* $D(\theta)$ un angolo, vedi (127). Quindi non deve soddisfare il principio di causalità, ed è pertanto accettabile che la risposta impulsiva sia diversa da zero anche per valori negativi della sua variabile.

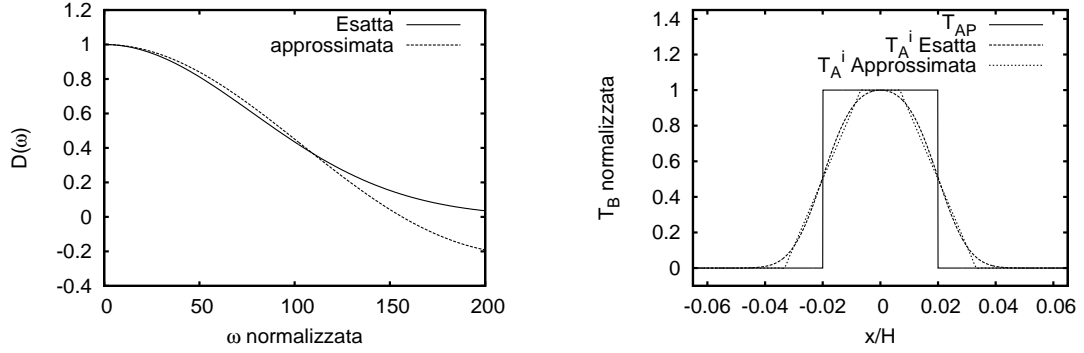


Fig. 5: Confronto tra le espressioni esatta ed approssimata di $\hat{D}(\hat{\omega})$, ed effetto sulla T_A^i .

La larghezza $\Delta\theta_a$ corrisponde circa a $2\theta_6$, e quindi non è utilizzabile per valutare la risoluzione. L'utilizzo della (133) al posto della trasformata esatta consentirà invece di tener conto in maniera più semplice dell'effetto della elaborazione del segnale radiometrico sulla risoluzione.

Occorre infatti tener conto che il processo di misura prevede anche il passaggio del segnale, proporzionale a $T_A^i(t)$, attraverso un filtro (107) di risposta impulsiva $h_L(t)$ e risposta armonica $H_L(\omega)$. Il risultato finale della misura è allora

$$T_m(t) = \int h_L(t - \sigma) T_A^i(\sigma) d\sigma \quad (134)$$

Passando alle trasformate, le (132,134) forniscono

$$\mathcal{F}[T_m(t)]_{\omega} = H_L(\omega) \hat{T}_A^i(\omega) = \frac{1}{v} H_L(\omega) \hat{D}\left(\frac{H\omega}{v}\right) \hat{T}_B\left(-\frac{\omega}{v}\right) \quad (135)$$

Il processo di misura radiometrica può quindi essere schematizzato come nella Fig. 6, in cui il primo blocco è lo stesso di Fig. 4 e schematizza l'antenna.

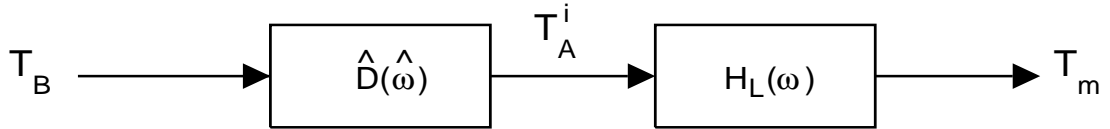


Fig. 6: Descrizione a blocchi del processo di misura radiometrica.

La (135) può anche essere scritta come

$$\mathcal{F}[T_m(t)]_{\omega} = W(\omega) \left[\frac{1}{v} \hat{T}_B\left(-\frac{\omega}{v}\right) \right]$$

dove

$$W(\omega) = H_L(\omega) \hat{D}\left(\frac{H\omega}{v}\right) \quad (136)$$

è la risposta complessiva del sistema radiometrico.

L'uscita del processo di misura $T_m(t)$ può essere ottenuta antitrasformando la (136), il che conduce ad una convoluzione tra le antitrasformate (rispetto alla variabile ω) di $W(\omega)$ e della grandezza tra parentesi quadra. Quest'ultima vale, per definizione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{v} \hat{T}_B \left(-\frac{\omega}{v} \right) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

Per calcolarla, poniamo, nell'integrale, $\omega = -v\sigma$, ottenendo

$$\int_{+\infty}^{-\infty} \hat{T}_B(\sigma) e^{-j\sigma vt} \frac{-v d\sigma}{2\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{T}_B(\sigma) e^{-j\sigma vt} \frac{d\sigma}{2\pi} = T_B(vt)$$

in base alla (130). Indicando con $w(t)$ la antitrasformata di $W(\omega)$ (ovvero la risposta impulsiva del sistema equivalente a tutto il processo di misura radiometrica, cascata dei due sistemi di Fig. 4) si ha quindi

$$T_m(t) = \int w(t - \sigma) T_B(v\sigma) d\sigma \quad (137)$$

La (137) fornisce l'uscita del processo di misura come una funzione del tempo e quindi come una mappa teoricamente continua della $T_m(t)$. In realtà, non tutti i campioni di $T_m(t)$ sono indipendenti, ma solo quelli con spaziatura maggiore della risoluzione della mappa di $T_B(x)$ ricostruita.

Il diagramma di antenna fissa ovviamente un limite minimo alla dimensione della cella di risoluzione. La presenza, nella (135), di $H_L(\omega)$ può ulteriormente aumentare questa dimensione, a meno che questo filtro non sia sufficientemente largo rispetto a $\hat{D}(H\omega/v)$. D'altra parte, se il filtro passa-basso ha una risposta in frequenza troppo larga, si riduce T_i^{eq} (vedi (110)) e quindi peggiora la precisione della misura a parità di banda B_V .

In prima approssimazione, per un filtro passa-basso ideale, un ragionevole compromesso è quello di utilizzare come frequenza di taglio f_t una frequenza pari (o superiore) al primo zero positivo di $\hat{D}(H\omega/v)$:

$$2\pi f_t \geq \frac{\pi}{1.1} \sqrt{p} \frac{v}{H} \quad (138)$$

Nel caso di filtro generico, la (138) può essere espressa in termini del tempo di integrazione equivalente T_i^{eq} , dato dalla (110), come

$$\frac{\pi}{T_i^{eq}} \geq \frac{\pi}{1.1} \sqrt{p} \frac{v}{H} \quad \implies \quad T_i^{eq} \leq \frac{1.1}{\sqrt{p}} \frac{H}{v} = \frac{2.2}{\sqrt{D_M}} \frac{H}{v} \quad (139)$$

Con questo tempo di integrazione risulta

$$W(\omega) \simeq \hat{D} \left(\frac{H\omega}{v} \right) \quad (140)$$

e quindi la risoluzione deriva essenzialmente dal diagramma di antenna.

Assumendo come larghezza del lobo un livello di -12 dB (corrispondente a $\eta_m \simeq 8.5\%$) la risoluzione in angolo è pari a

$$\Delta\theta_R = \frac{3.3}{\sqrt{p}} = \frac{6.6}{\sqrt{D_M}} \quad (141)$$

e quella spaziale vale

$$x_R = H \Delta\theta_R = \frac{6.6 H}{\sqrt{D_M}} \quad (142)$$

Il tempo necessario al sensore per percorrere la cella di risoluzione³ vale

$$\frac{x_R}{v} = \frac{6.6}{\sqrt{D_M}} \frac{H}{v} \geq 3 T_i^{eq} \quad (143)$$

Molto qualitativamente, la (143) implica che potrebbero essere ottenuti 3 (o più) campioni diversi, ma dipendenti, per ogni cella di risoluzione.

19 PRESTAZIONI COMPLESSIVE DI UN SISTEMA RADIOMETRICO

Un sensore con antenna fissa, considerato per semplicità nel paragrafo precedente, è una soluzione decisamente inefficiente. Infatti, la zona a terra che può essere coperta in questo modo ha una larghezza pari alla impronta a terra della antenna, e quindi piuttosto piccola. Se consideriamo un tipico satellite in volo a $H_S = 800 \text{ km}$, e con una antenna con $D_M = 41.5 \text{ dB}$, l'angolo di apertura a 3 dB della antenna vale $\theta_3 = 0.014 \text{ rad} = 0.8^\circ$. Per ottenere uno stray factor intorno a 8.5% occorre considerare come lobo principale una larghezza di $2\theta_{12}$. L'angolo di apertura del lobo principale dall'asse z vale allora (vedi (86))

$$\theta_{ML} = \frac{1.66}{\sqrt{p}} = \frac{3.3}{\sqrt{D_M}} \quad (144)$$

che nel nostro caso fornisce $\theta_{ML} = 0.028 \text{ rad} = 1.6^\circ$.

La zona illuminata a terra ha un raggio di $R_S = H_S \theta_{ML}$ intorno a 22 km . Quindi a ogni passaggio del satellite, viene costruita una immagine di una zona di soli 44 km .

Per ottenere l'immagine di una zona di larghezza congrua sono possibili varie soluzioni ma la più adottata (e quella che considereremo qui) è quella di un sensore la cui antenna ha una direzione di massimo inclinata di un angolo Θ rispetto alla verticale (vedi Fig. 1), e che ruota attorno al suo asse. La scansione è quindi conica. In questo modo la zona illuminata a terra, schematizzata in Fig. 1, è molto più larga, e può essere scandita con una velocità *lineare* v legata alla frequenza di rotazione della antenna e indipendente da quella del satellite v_S .

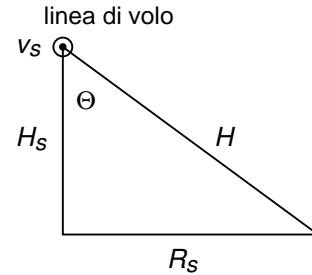


Fig. 1: Geometria di acquisizione (vista laterale).

Per la nostra analisi assumeremo per semplicità la terra piatta¹. La zona illuminata a terra ha ora una larghezza totale di $2R_S = 2H_S \tan \Theta$, intorno a 1300 km per una inclinazione tipica di 55° .

³ Possiamo considerare anche il tempo necessario al sensore per percorrere il lobo centrale (a 3 dB) della antenna, che prende il nome di *dwell time* e vale

$$T_D = 2 \theta_3 \frac{H}{v} = \frac{1.66}{\sqrt{p}} \frac{H}{v} = \frac{3.3}{\sqrt{D_M}} \frac{H}{v}$$

da (85). Pertanto il tempo di integrazione massimo è circa il $60\text{--}70\%$ del *dwell time*.

¹ L'ipotesi di terra piatta è, con le dimensioni in gioco, solo una grossolana semplificazione, che viene fatta essenzialmente per semplicità. Nel cap. 12 di N. Skou, D. Le Vine: *Microwave radiometer systems*, Artech House, 2006, la trattazione è fatta includendo la corretta geometria della terra e dell'orbita.

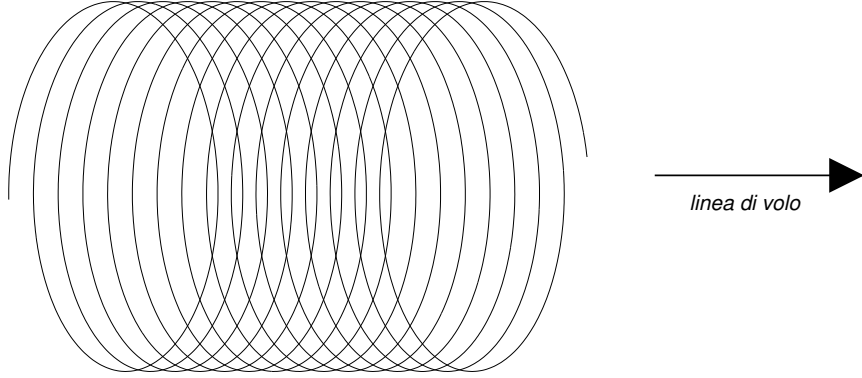


Fig. 2: Traccia a terra del centro della zona illuminata per un sensore radiometrico a scansione conica. La velocità del sensore (in direzione della linea di volo) è pari a v_S .

Detta n_R la velocità di rotazione della antenna (inversa del tempo di rotazione), in giri al secondo, la velocità di scansione della immagine a terra, percorsa con un moto sostanzialmente lineare, dato il valore elevato di R_S , vale

$$v = n_R \, 2\pi R_S \quad (145)$$

essendo R_S il raggio del cerchio percorso dalla zona illuminata, mentre la distanza sensore-scena vale

$$H = \frac{H_S}{\cos \Theta} \quad (146)$$

Da (139) segue un tempo di integrazione equivalente

$$T_i^{eq} \leq \frac{2.2}{\sqrt{D_M}} \frac{H}{n_R \, 2\pi R_S} = \frac{2.2}{\sqrt{D_M}} \frac{H_S}{\cos \Theta} \frac{1}{n_R \, 2\pi H_S \tan \Theta} = \frac{2.2}{\sqrt{D_M}} \frac{1}{2\pi \sin \Theta} \frac{1}{n_R} \quad (147)$$

Consideriamo ad esempio un radiometro di Dicke con una banda $B_V = 200 \, MHz$ e una temperatura $T_S = 500 \, K$. Per ottenere una $\Delta T = 0.35 \, K$, occorre un tempo di integrazione minimo di

$$T_i^{eq} = \left(\frac{2T_S}{\Delta T} \right)^2 \frac{1}{2B_V} = 20 \, msec$$

a cui corrisponde, da (147), $n_R \leq 0.18 \, sec^{-1}$, ovvero un massimo di 11 giri al minuto.

In realtà la geometria di acquisizione prevede di misurare la temperatura apparente solo nella parte anteriore del cerchio descritto, e solo per un angolo che arriva, al massimo, a $120-130^\circ$, ovvero solo sulla zona in grassetto nella figura 3. In questo modo la zona di scansione viene misurata a strisce

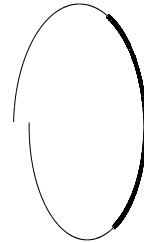


Fig. 3: Zona (in grassetto) di acquisizione per ogni rotazione della antenna.

successive. La spaziatura tra gli assi centrali di queste strisce (corrispondenti alle linee di Fig. 2) dipende dal moto rotatorio della antenna, e dalla velocità del satellite, ed è pari a

$$x_S = \frac{v_S}{n_R} \quad (148)$$

La risoluzione nella direzione della linea di volo è dovuta solo alla antenna ed è pari alla larghezza a terra del lobo centrale della antenna stessa. È quindi data ancora dalla (141), ma occorre considerare (vedi Fig. 1) che il terreno non è più ortogonale alla congiungente sensore-scena. Risulta quindi

$$x_{RL} = \frac{H \Delta\theta_R}{\cos \Theta} = \frac{6.6 H}{\sqrt{D_M} \cos \Theta} \quad (149)$$

evidentemente maggiore di x_R . La spaziatura tra i centri delle strisce di acquisizione x_S e la larghezza della zona da cui il sensore riceve il segnale radiometrico x_{RL} sono grandezze apparentemente indipendenti. Per cui la mappa a terra è fatta da strisce di larghezza x_S ma con una risoluzione effettiva pari a x_{RL} (e generalmente maggiore). In realtà x_S e x_{RL} sono tra loro collegate, e il collegamento è fornito dalla velocità del satellite v_S .

Se consideriamo una linea a terra parallela alla linea di volo, l'andamento della stima di T_B è una funzione di y (coordinata della linea di volo) di cui vengono misurati campioni con passo di campionamento x_S . Questo andamento può essere allora ricostruito correttamente solo in assenza di *aliasing*. Per valutare la presenza o meno di aliasing, occorre confrontare la frequenza di campionamento del segnale (in questo caso pari a n_R) con la banda del segnale stesso.

La stima $\hat{T}_B(y)$ si otterrebbe se l'antenna fosse fissa in avanti. Per un tempo di integrazione dato dalla (139), la trasformata $W(\omega)$ del sistema radiometrico è sostanzialmente pari alla trasformata del diagramma di antenna, ed è quindi pari a (confronta (133,140))

$$W(\omega) \simeq \hat{D} \left(\frac{H\omega}{v_S} \right) = D_M \operatorname{sinc} \left[\frac{1.1}{\sqrt{p}} \left(\frac{H\omega}{v_S} \right) \right] \quad (150)$$

Per la valutazione dell'aliasing possiamo considerare la (150) come la trasformata del segnale da campionare. La (150) ha un primo zero in ω_π dato da

$$\frac{1.1}{\sqrt{p}} \left(\frac{H\omega_\pi}{v_S} \right) = \pi \quad \Rightarrow \quad \omega_\pi = \frac{\pi\sqrt{p}}{1.1} \frac{v_S}{H} = 1.4\sqrt{D_M} \frac{v_S}{H}$$

seguito da un massimo a circa $1.5\omega_\pi$. Tenendo conto anche dell'effetto del filtro tale massimo è inferiore a -20 dB . Una frequenza di campionamento intorno a $1.4\omega_\pi$ consente quindi di evitare aliasing in tutto il lobo centrale, in quanto il segnale oltre questa frequenza di campionamento è sostanzialmente trascurabile.

Pertanto conviene assumere come tempo di campionamento

$$t_s \leq \frac{2\pi}{1.4\omega_\pi} = \frac{\pi}{\sqrt{D_M}} \frac{H}{v_S}$$

cui corrisponde

$$n_R = \frac{1}{t_s} \geq \frac{\sqrt{D_M}}{\pi} \frac{v_S}{H} \quad (151)$$

e una distanza tra due tracce successive

$$x_S \leq v_S t_s = \frac{\pi}{\sqrt{D_M}} H \quad (152)$$

La (151) fornisce quindi un limite massimo per v_S che dipende da D_M e da n_R è consente quindi, assieme alle specifiche sulla risoluzione (142,149) e sulla precisione di misura (ovvero sul tempo di integrazione equivalente) (147), di fornire un primo dimensionamento di massima del sistema radiometrico.

Risulta anche

$$\frac{x_{RL}}{x_S} = \frac{6.6 H}{\sqrt{D_M} \cos \Theta} \frac{\sqrt{D_M}}{\pi H} = \frac{2.1}{\cos \Theta}$$

che per i valori tipici di Θ , intorno a 55° , implica $x_{RL} \simeq 3.5 x_A$, con un *sovracampionamento* della immagine paragonabile a quello in direzione ortogonale alla linea di volo.

APPENDICE 1: CORRELAZIONE DELLA RADIAZIONE TERMICA

La correlazione della radiazione termica vale, per definizione

$$\begin{aligned}
 R(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_B(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} [\pi B(\omega)] \cos \omega\tau d\omega \\
 &= \int_0^{+\infty} \varepsilon_r \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^3 c^2} \frac{1}{\exp\left[\frac{\hbar\omega}{\mathcal{K}T}\right] - 1} \cos \omega\tau d\omega = \varepsilon_r \frac{\hbar}{4\pi^3 c^2} \int_0^{+\infty} \frac{\omega^3 \cos \omega\tau}{\exp\left[\frac{\hbar\omega}{\mathcal{K}T}\right] - 1} d\omega \quad (A1)
 \end{aligned}$$

Consideriamo il solo integrale, ed eseguiamo il cambio di variabile $x = \frac{\hbar\omega}{2\pi\mathcal{K}T}$ ottenendo

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} \frac{\omega^3 \cos \omega\tau}{\exp\left[\frac{\hbar\omega}{\mathcal{K}T}\right] - 1} d\omega &= \left[\frac{2\pi\mathcal{K}T}{\hbar}\right]^4 \int_0^{+\infty} \frac{x^3 \cos\left[\frac{2\pi\mathcal{K}T}{\hbar} x\tau\right]}{e^{2\pi x} - 1} dx \\
 &= \left[\frac{2\pi\mathcal{K}T}{\hbar}\right]^4 \int_0^{+\infty} \frac{x^3 \cos mx}{e^{2\pi x} - 1} dx
 \end{aligned}$$

con $m = \frac{2\pi\mathcal{K}T}{\hbar} \tau$. L'integrale della relazione precedente può essere espresso come

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3 \cos mx}{e^{2\pi x} - 1} dx = -\frac{d^3}{dm^3} \int_0^{+\infty} \frac{\sin mx}{e^{2\pi x} - 1} dx = -\frac{d^3}{dm^3} I(m)$$

dove $I(m)$ è un integrale noto

$$I(m) = \frac{1}{4} \cotgh \frac{m}{2} - \frac{1}{2m}$$

Raccogliendo si trova quindi

$$R(\tau) = \varepsilon_r \frac{\hbar}{4\pi^3 c^2} \left[\frac{2\pi\mathcal{K}T}{\hbar}\right]^4 \left[-\frac{d^3}{dm^3} I(m)\right] \quad \text{con} \quad m = \frac{2\pi\mathcal{K}T}{\hbar} \tau \quad (A2)$$

In Fig. 1 è riportato l'andamento di $R(m)$ normalizzato a $R(0)$.

A partire da (A2) si può ottenere la brillantezza totale. Risulta

$$B_{tot} = R(0) = \varepsilon_r \frac{\hbar}{4\pi^3 c^2} \left[\frac{2\pi\mathcal{K}T}{\hbar}\right]^4 \left[-\frac{d^3}{dm^3} I(m)\right]_{m=0}$$

Per calcolarla possiamo sviluppare $I(m)$ in serie di Taylor intorno a $m = 0$. Risulta, per $x \ll 1$, $\cotgh(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \dots$, e quindi

$$I(m) \simeq \frac{1}{4} \left(\frac{2}{m} + \frac{m}{6} - \frac{m^3}{360} \right) - \frac{1}{2m} = \frac{m}{24} - \frac{m^3}{1440}$$

per cui, calcolando la derivata

$$B_{tot} = R(0) = \varepsilon_r \frac{\hbar}{4\pi^3 c^2} \left[\frac{2\pi\mathcal{K}T}{\hbar}\right]^4 \frac{1}{240} = \varepsilon_r \frac{\pi\mathcal{K}^4}{60\hbar^3 c^2} T^4$$

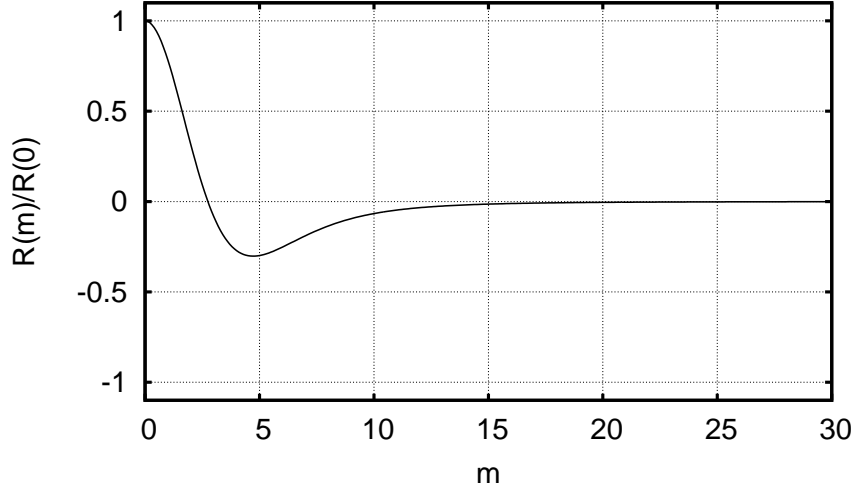


Fig. 1: Autocorrelazione normalizzata della radiazione termica ($m = \frac{2\pi\mathcal{K}T}{\hbar} \tau$).

detta legge di Stefan–Boltzmann.

A partire dalla (A1), possiamo calcolare anche il tempo di correlazione

$$\tau_c = \frac{1}{R(0)} \int_0^\infty |R(\tau)| d\tau = \left[\frac{\hbar}{2\pi\mathcal{K}T} \right] \int_0^\infty \frac{|R(m)|}{R(0)} dm = 3.2 \left[\frac{\hbar}{2\pi\mathcal{K}T} \right]$$

ovvero

$$\tau_c = \frac{24.5}{T_{[K]}} \text{ psec}$$

che è sostanzialmente l'inverso della frequenza a cui la legge di Planck ha un massimo (e subito oltre la quale si ha un decremento brusco della densità spettrale).

APPENDICE 2: ESEMPIO: POTENZA RICEVUTA DAL SOLE

Per meglio comprendere come una antenna riceve la potenza emessa da una sorgente estesa, valutiamo la potenza ricevuta da un disco di diametro $2R$ con brillantezza uniforme B_0 posto, a distanza r_d , su di uno sfondo non emittente (ad esempio il sole). Indichiamo con $2\theta_M$ l'angolo massimo sotto cui l'antenna vede il disco, dato da:

$$\tan \theta_M = \frac{R}{r_d}$$

Dalla (4) segue, ricordando che per radiazione completamente non polarizzata $K_p = 1/2$:

$$P_r = \frac{1}{2} \int_{\Delta\Omega} A_e(\Omega) B_0 d\Omega$$

essendo $\Delta\Omega$ l'angolo solido corrispondente alla superficie del disco, pari a

$$\Delta\Omega = \int_{disco} d\Omega = 2\pi \int_0^{\theta_M} \sin\theta d\theta = 2\pi (1 - \cos\theta_M) \simeq \pi\theta_M^2$$

dove l'ultima approssimazione vale se $\theta_M \ll 1$.

Consideriamo il caso in cui l'antenna punta esattamente al centro del disco. Allora, usando la (89), segue

$$\begin{aligned} P_r &= \frac{1}{2} B_0 \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_M} A_e(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{1}{2} B_0 2\pi \int_0^{\theta_M} A_M \cos^{2p}\theta \sin\theta d\theta \\ &= \pi A_M B_0 \int_{\cos\theta_M}^1 x^{2p} dx = \pi A_M B_0 \frac{1 - \cos^{2p+1}\theta_M}{2p+1} \end{aligned}$$

avendo usato la (87).

Possiamo riscrivere P_r nella forma

$$P_r = \pi B_0 \frac{A_M}{2p+1} [1 - \cos^{2p+1}\theta_M]$$

in quanto, dalla (89), A_M è proporzionale a $2p$. In tal modo, solo l'ultimo fattore della relazione precedente collega la potenza ricevuta alla relazione tra θ_M e θ_3 , quest'ultimo legato a p e quindi alla direttività D_M della antenna.

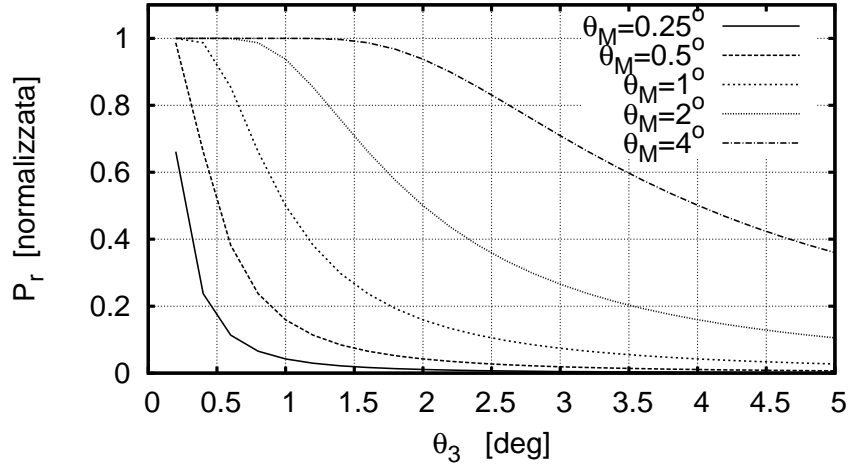


Fig. 1: Potenza ricevuta normalizzata, al variare dell'angolo a 3 dB (per differenti diametri del disco emittente).

In Fig. 1 è riportata la potenza ricevuta normalizzata (ovvero $[1 - \cos^{2p+1}\theta_M]$) in funzione dell'angolo a 3 dB e in Fig. 2 in funzione della direttività.

Dalla Fig. 1 segue che, se il diametro del disco emittente è molto più grande di θ_3 , allora la potenza ricevuta coincide con quella massima ricevibile, in quanto il disco occupa praticamente tutto il diagramma di irradiazione (se fossimo in trasmissione, praticamente tutta la potenza irradiata verrebbe intercettata dal disco). Ma già per $\theta_3 = 0.5\theta_M$ si ha una riduzione del 10% della potenza ricevuta.

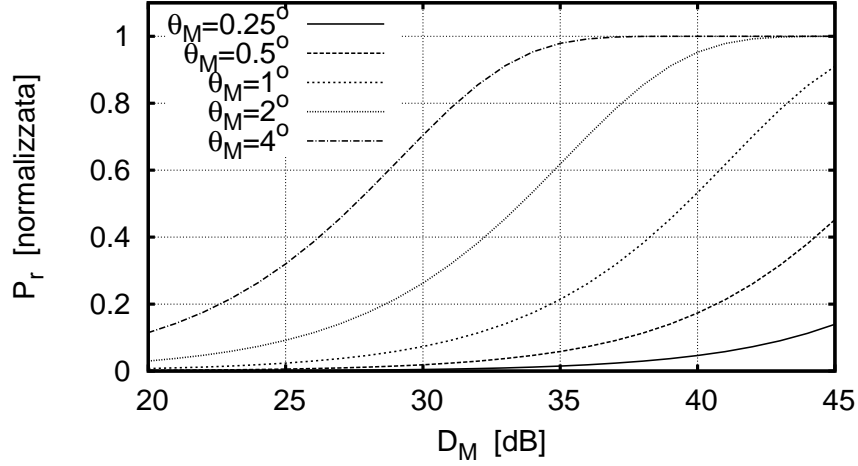


Fig. 2: Potenza ricevuta normalizzata, al variare della direttività della antenna (per differenti diametri del disco emittente).

APPENDICE 3: SOLUZIONE FORMALE

La forma standard della equazione del trasferimento radiativo è

$$\frac{dT_{AP}}{d\mathcal{T}} = -T_{AP} + J \quad (40)$$

in cui lo spessore ottico \mathcal{T} è definito da

$$\mathcal{T}(r_0, r) = \int_{r_0}^r k_e(r) dr \quad \implies \quad d\mathcal{T} = k_e dr \quad (39)$$

e soddisfa pertanto a

$$\mathcal{T}(r'', r') + \mathcal{T}(r', r) = \mathcal{T}(r'', r)$$

Per risolvere la (40), cambiamo la incognita, considerando $y(\mathcal{T}) = T_{AP}(\mathcal{T}) e^{\mathcal{T}}$. Essendo

$$\frac{dy}{d\mathcal{T}} = \frac{d}{d\mathcal{T}} [T_{AP}(\mathcal{T}) e^{\mathcal{T}}] = e^{\mathcal{T}} \frac{dT_{AP}}{d\mathcal{T}} + e^{\mathcal{T}} T_{AP}$$

per confronto con la (40) segue

$$\frac{dy}{d\mathcal{T}} = e^{\mathcal{T}} J(\mathcal{T})$$

Integrando rispetto a \mathcal{T} segue

$$T_{AP}(\mathcal{T}) e^{\mathcal{T}} - [T_{AP}(\mathcal{T}) e^{\mathcal{T}}]_{\mathcal{T}=0} = \int_0^{\mathcal{T}} [e^{\mathcal{T}} J(\mathcal{T})] d\mathcal{T} \quad (153)$$

Eseguiamo nell'integrale il cambio di variabili (39), e torniamo alla variabile r , ottenendo

$$T_{AP}(r) e^{\mathcal{T}(r_0, r)} - T_{AP}(0) = \int_{r_0}^r e^{\mathcal{T}(r_0, r')} J(r') k_e(r') dr'$$

Moltiplichiamo per $e^{-\mathcal{T}(r_0, r)}$

$$T_{AP}(r) - T_{AP}(0) e^{-\mathcal{T}(r_0, r)} = \int_{r_0}^r e^{-\mathcal{T}(r_0, r)} e^{\mathcal{T}(r_0, r')} J(r') k_e(r') dr'$$

Ora, ricordando che lo spessore ottico cambia segno se invertiamo gli argomenti. Quindi

$$e^{-\mathcal{T}(r_0, r)} e^{\mathcal{T}(r_0, r')} = e^{-\mathcal{T}(r_0, r)} e^{-\mathcal{T}(r', r_0)} = e^{-[\mathcal{T}(r_0, r) + \mathcal{T}(r', r_0)]}$$

Usando la (39) segue $\mathcal{T}(r_0, r) + \mathcal{T}(r', r_0) = \int_{r_0}^r k_e(r) dr + \int_{r'}^{r_0} k_e(r) dr = \int_{r'}^r k_e(r) dr = \mathcal{T}(r', r)$ che può essere sostituita nella (153).

La soluzione della equazione del trasferimento radiativo è quindi

$$T_{AP}(r) = T_{AP}(0) e^{-\mathcal{T}(r_0, r)} + \int_{r_0}^r e^{-\mathcal{T}(r', r)} J(r') k_e(r') dr' \quad (41)$$

APPENDICE 4: INTEGRATORE E TEMPO DI INTEGRAZIONE

Un integratore con tempo di integrazione T_i ha relazione ingresso-uscita

$$u(t) = \frac{1}{T_i} \int_{t-T_i}^t y(\sigma) d\sigma \quad (154)$$

in cui la divisione per T_i serve ad avere $\mathcal{E}[u] = \mathcal{E}[y]$. La relazione (154) può essere espressa sotto forma di convoluzione

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_I(t - \sigma) y(\sigma) d\sigma$$

dove la risposta impulsiva dell'integratore $h_I(t - \sigma)$ è pari a $1/T_i$ nell'intervallo $t - T_i \leq \sigma \leq t$ e nulla altrove, in modo da riottenere la (154). Cambiando segno, e verso, a questa relazione e sommando t segue prima $-t \leq -\sigma \leq -t + T_i$ e quindi $0 \leq t - \sigma \leq T_i$. Quindi $h_I(t)$ è pari a $1/T_i$ solo in $(0, T_i)$.

La risposta armonica del sistema è allora

$$H_I(\omega) = \text{sinc} \frac{\omega T_i}{2} e^{-j\omega \frac{T_i}{2}}$$

ed è chiaramente la risposta di un filtro passa-basso. Il tempo di integrazione equivalente (vedi (110)) è dato da

$$\frac{1}{T_i^{eq}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_I(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |h_i(t)|^2 dt$$

per l'identità di Parseval. Sostituendo l'espressione di $h_I(t)$ segue

$$T_i^{eq} = T_i$$

il che giustifica il nome di tempo di integrazione equivalente dato al risultato della (110).

INDICE

1. BRILLANZA E POTENZA RICEVUTA	1
2. POTERE EMISSIVO – CORPO NERO	2
3. LEGGE DI PLANCK	4
4. LEGGE DI WIEN E DI RAYLEIGH-JEANS	6
5. EQUAZIONI DEL TRASFERIMENTO RADIATIVO	9
6. TRASFERIMENTO RADIATIVO IN MEZZI OMOGENEI	12
7. ESEMPI	15
8. EFFETTO DELL'INTERFACCIA	16
9. STRATO DIELETTRICO INTERMEDIO – CASO INCOERENTE	19
10. STRATO DIELETTRICO SOTTILE – CASO COERENTE	25
11. STRATI DIELETTRICI MULTIPLI	25
12. CONSIDERAZIONI INIZIALI SUI SENSORI RADIOMETRICI	27
13. TEMPERATURA D'ANTENNA	28
14. EFFETTO DEL DIAGRAMMA DI ANTENNA	31
15. MISURA DI POTENZA DI RUMORE	36
16. RICEVITORI RADIOMETRICI	41
17. RADIOMETRO DI DICKE	43
18. RISOLUZIONE	46
19. PRESTAZIONI COMPLESSIVE DI UN SISTEMA RADIOMETRICO	52
App. 1. CORRELAZIONE DELLA RADIAZIONE TERMICA	56
App. 2. ESEMPIO: POTENZA RICEVUTA DAL SOLE	57
App. 3. SOLUZIONE FORMALE	58
App. 4. INTEGRATORE E TEMPO DI INTEGRAZIONE	60