

1 VETTORI COMPLESSI – POLARIZZAZIONE

Un vettore complesso è un ente che rappresenta una grandezza vettoriale che varia sinusoidalmente nel tempo.

Consideriamo infatti un vettore $\mathbf{e}(t)$ che vari sinusoidalmente nel tempo. In tal caso le tre componenti di $\mathbf{e}(t)$, ovvero $e_x(t)$, $e_y(t)$, $e_z(t)$, sono grandezze scalari che variano anch'esse sinusoidalmente nel tempo, e possono ciascuna essere rappresentata da un *fasore* o numero complesso, rispettivamente E_x , E_y , E_z . Il vettore $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ rappresenterà la grandezza reale $\mathbf{e}(t)$, così come un numero complesso rappresenta una funzione scalare sinusoidale.

Le operazioni sui vettori complessi sono definite come quelle su vettori reali, tranne che occorre distinguere ¹ tra prodotto scalare di un vettore complesso per se stesso, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$, e modulo quadro dello stesso vettore $|\mathbf{E}|^2$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} &= E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 \\ |\mathbf{E}|^2 &= |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2\end{aligned}$$

Il modulo quadro del vettore \mathbf{E} può anche essere calcolato come prodotto scalare tra il vettore ed il suo complesso coniugato

$$|\mathbf{E}|^2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*$$

È importante notare che il modulo quadro di un vettore complesso \mathbf{E} si annulla se e solo se il vettore è nullo, mentre il quadrato di un vettore complesso può essere nullo anche se il vettore è diverso da zero (basta considerare, ad esempio, il vettore diverso da zero $\mathbf{i}_x + j\mathbf{i}_y$, il cui quadrato è nullo).

Oltre che per componenti, un vettore complesso può essere decomposto in parte reale e immaginaria:

$$\mathbf{E} = \mathbf{A} + j\mathbf{B} \quad (1)$$

con \mathbf{A} e \mathbf{B} vettori reali. Tale decomposizione risulta molto utile per descrivere il vettore nel tempo. Si ha infatti

$$\mathbf{e}(t) = \text{Re} \left[(\mathbf{A} + j\mathbf{B}) e^{j\omega_0 t} \right] = \mathbf{A} \cos \omega_0 t - \mathbf{B} \sin \omega_0 t \quad (2)$$

Segue quindi che un vettore sinusoidale puro come $\mathbf{e}(t)$ giace sempre nel piano individuato dai vettori reali \mathbf{A} , \mathbf{B} in ogni istante di tempo t . Pertanto è sempre possibile, per un tale vettore, definire un piano, detto *piano di polarizzazione*, a cui il vettore appartiene. ² Per comodità, nel seguito della discussione sceglieremo sempre il sistema di riferimento in modo che l'asse z sia ortogonale al piano di polarizzazione. Inoltre $\mathbf{e}(t)$, campo elettrico in un certo punto dello spazio P , (e che supponiamo applicato nello stesso punto P), è una funzione periodica del

¹ Ricordiamo che queste due quantità sono uguali per vettori reali

² Per vettori comunque variabili nel tempo ciò non è più vero. Tuttavia esistono molti casi di campi elettromagnetici che sono sempre ortogonali ad una direzione, ad esempio le *onde piane*. Per tali campi è ancora possibile definire un piano di polarizzazione

tempo, per cui il suo estremo descrive, nel piano di polarizzazione, una curva chiusa al variare del tempo.

Si può dimostrare (vedi App. 1) che tale curva è un'ellisse e si dice pertanto che il vettore sinusoidale $\mathbf{e}(t)$ è un vettore **polarizzato** e che la sua polarizzazione è in generale ellittica. Esistono però due casi particolari di polarizzazione, che sono poi quelli utilizzati in tutti i sistemi di telecomunicazioni:

- **polarizzazione lineare** quando l'ellisse degenera in un segmento di retta;
- **polarizzazione circolare** quando l'ellisse degenera in una circonferenza.

Esistono infinite polarizzazioni lineari, che si distinguono per la direzione della retta, mentre vi sono solo due polarizzazioni circolari, che si distinguono per il verso, levogiro o destrorso (ovvero antiorario o orario)³, con cui viene percorsa, da $\mathbf{e}(t)$, la circonferenza, dal punto di vista della sorgente del campo.

Notiamo anche che, mentre per i vettori reali è sempre possibile definire un versore, questo non si estende al caso di vettori complessi, a meno che questi non siano *polarizzati linearmente*. Se infatti \mathbf{E} è polarizzato linearmente, allora la corrispondente grandezza del dominio del tempo giace sempre su di una retta (ovvero ha sempre la stessa direzione). Pertanto possiamo porre

$$\mathbf{E} = E \mathbf{i}_E$$

dove il versore \mathbf{i}_E è un versore reale, mentre lo scalare E , detto ampiezza del campo, è un numero complesso.

Una ulteriore differenza tra vettori reali e complessi è nella nozione di parallelismo. Consideriamo due vettori complessi \mathbf{E}_1 e \mathbf{E}_2 . Questi due vettori sono paralleli se esiste uno scalare α tale che

$$\mathbf{E}_1 = \alpha \mathbf{E}_2$$

Se α è reale allora i due vettori corrispondenti nel dominio del tempo sono, istante per istante, paralleli. Se invece α è complesso, questo non è più vero. Infatti la condizione *matematica* di parallelismo nel dominio della frequenza equivale solo alla condizione *fisica* di avere la stessa polarizzazione.

Naturalmente non sempre è possibile ottenere una polarizzazione lineare o circolare pura, e conviene quindi introdurre una quantità che consenta di misurare la *qualità* di una polarizzazione, ovvero di indicare quanto una polarizzazione si avvicina ad una polarizzazione lineare o circolare pura. Questa quantità è il **rapporto assiale**, indicato normalmente con la sigla AR (acronimo della espressione inglese *axial ratio*), definito come il rapporto tra il massimo ed il minimo del modulo del vettore $\mathbf{e}(t)$:

$$AR = \frac{\max |\mathbf{e}(t)|}{\min |\mathbf{e}(t)|} \quad (3)$$

(o, equivalentemente, come il rapporto tra gli assi dell'ellisse di polarizzazione) e compreso in $[1, \infty)$.

È evidente che i due casi di polarizzazione lineare e circolare sono proprio i casi limite del rapporto assiale

³ Queste due polarizzazioni vengono in genere indicate con gli acronimi inglesi *LHCP* e *RHCP*, ovvero *left-hand* e *right-hand circular polarization*.

$$AR = 1 \iff \text{polarizzazione circolare}$$

(4)

$$AR = \infty \iff \text{polarizzazione lineare}$$

È anche ovvio che un rapporto assiale molto grande indica una polarizzazione prossima a una polarizzazione lineare, così come un rapporto assiale poco più grande di 1 indica una polarizzazione prossima a quella circolare. Utilizzando il rapporto assiale è possibile fissare le specifiche di polarizzazione di un sistema di comunicazione. Ad esempio, un sistema in polarizzazione nominale circolare può spesso accettare campi anche non polarizzati circolarmente, purché il loro rapporto assiale sia inferiore a un valore normalmente compreso tra 1.5 e 2.

2 DETERMINAZIONE DELLE CONDIZIONI DI POLARIZZAZIONE LINEARE E CIRCOLARE

Per determinare le condizioni di polarizzazione lineare e circolare, e per calcolare il rapporto assiale, notiamo preliminarmente che le lunghezze dei due semiassi dell'ellisse di polarizzazione sono anche il valore minimo e massimo della distanza dell'ellisse stesso dall'origine. Per calcolare tali punti estremali, consideriamo

$$\begin{aligned} |\mathbf{e}(t)|^2 &= |\mathbf{A} \cos \omega_0 t - \mathbf{B} \sin \omega_0 t|^2 \\ &= A^2 \cos^2 \omega_0 t + B^2 \sin^2 \omega_0 t - 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t \\ &= A^2 \cos^2 \omega_0 t + B^2 \sin^2 \omega_0 t - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \sin 2\omega_0 t \end{aligned} \quad (5)$$

avendo utilizzato le formule di duplicazione delle funzioni circolari, e indicato con $A^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$, $B^2 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$.

L'espressione precedente è la distanza (al quadrato) $D(t)$ dei punti dell'ellisse dall'origine, al variare di t . La sua derivata vale

$$\begin{aligned} D'(t) &= -2\omega_0 A^2 \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t + 2\omega_0 B^2 \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t - 2\omega_0 \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cos 2\omega_0 t \\ &= 2\omega_0 \left[-\frac{A^2 - B^2}{2} \sin 2\omega_0 t - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cos 2\omega_0 t \right] \end{aligned} \quad (6)$$

La polarizzazione **circolare** è caratterizzata dall'avere la distanza $D(t)$ costante, e quindi $D'(t) = 0$, $\forall t$. Di conseguenza le condizioni di polarizzazione circolare sono

$$A^2 = B^2 \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$$

e devono essere valide entrambe.

Per considerare le altre polarizzazioni, riscriviamo la (5) dividendola per $\cos^2 \omega_0 t$:

$$D(t) = A^2 + B^2 \tan^2 \omega_0 t - 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \tan \omega_0 t = B^2 T^2 - 2AB \cos \theta T + A^2$$

avendo posto per semplicità $\tan \omega_0 t = T$ e ricordando che, essendo \mathbf{A} e \mathbf{B} vettori reali, risulta $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta$ dove θ è l'angolo tra \mathbf{A} e \mathbf{B} .

Per avere polarizzazione lineare deve esistere un istante t (ovvero un valore di T) in cui $D(t) = 0$. In altri termini l'equazione

$$B^2 T^2 - 2AB \cos \theta T + A^2 = 0 \quad (7)$$

deve avere almeno una radice reale. La condizione di realtà delle radici è che il relativo discriminante sia non negativo. Calcoliamo il discriminante della equazione

$$(AB \cos \theta)^2 - (B^2)(A^2) = A^2 B^2 (\cos^2 \theta - 1) = A^2 B^2 (-\sin^2 \theta) = -|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2$$

Il discriminante è non positivo, e quindi la (7) ha radici reali se e solo se

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$$

che è la condizione di polarizzazione lineare

3 CONDIZIONI DI POLARIZZAZIONE LINEARE E CIRCOLARE IN TERMINI DI COMPONENTI

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che valgono le seguenti condizioni *necessarie e sufficienti*:

$$\text{polarizzazione lineare} \iff \mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0 \quad (8)$$

$$\text{polarizzazione circolare} \iff \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{e} \quad |\mathbf{A}| = |\mathbf{B}| \quad (9)$$

Si noti che per avere polarizzazione lineare basta una sola condizione, mentre per avere polarizzazione circolare ne occorrono due. Questo è coerente col fatto che esistono infinite polarizzazioni lineari, e solo due polarizzazioni circolari.

Le condizioni di polarizzazione lineare (8) e circolare (9) coinvolgono la parte reale e immaginaria del vettore \mathbf{E} . È spesso più utile valutare la polarizzazione utilizzando le componenti complesse¹ E_x , E_y del vettore \mathbf{E} .

Notiamo preliminarmente che $E_x = A_x + jB_x$, $E_y = A_y + jB_y$, e di conseguenza, dette δ_x , δ_y le fasi di E_x , E_y , si ha

$$\begin{aligned} A_x &= |E_x| \cos \delta_x & A_y &= |E_y| \cos \delta_y \\ B_x &= |E_x| \sin \delta_x & B_y &= |E_y| \sin \delta_y \end{aligned} \quad (10)$$

Per determinare le condizioni necessarie in termini di componenti, semplicemente inseriamo le (10) nelle condizioni (8,9).

Nel caso di polarizzazione lineare deve annullarsi

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = A_x B_y - A_y B_x = |E_x| |E_y| [\cos \delta_x \sin \delta_y - \sin \delta_x \cos \delta_y] = |E_x| |E_y| \sin(\delta_x - \delta_y)$$

¹ La componente z è nulla per la scelta del sistema di riferimento che abbiamo fatto.

Ne consegue, per la legge di annullamento del prodotto, che se la polarizzazione è lineare, almeno una delle tre condizioni seguenti deve verificarsi

- 1) $E_x = 0$;
- 2) $E_y = 0$;
- 3f) $\delta_x - \delta_y = n\pi$, con n intero.

La condizione 3f può essere espressa anche come

- 3) E_x ed E_y hanno la stessa fase oppure sono sfasati di π .

Nel caso di polarizzazione circolare, la prima delle (9) diventa

$$A_x B_x + A_y B_y = |E_x|^2 \cos \delta_x \sin \delta_x + |E_y|^2 \cos \delta_y \sin \delta_y = 0$$

e, dalle formula di duplicazione, tale equazione diventa

$$|E_x|^2 \sin 2\delta_x + |E_y|^2 \sin 2\delta_y = 0 \quad (11)$$

Dalla seconda delle (9), che equivale all'annullarsi di $|\mathbf{A}|^2 - |\mathbf{B}|^2$, si ottiene, sostituendo le (10),

$$(A_x^2 + A_y^2) - (B_x^2 + B_y^2) = |E_x|^2 \cos^2 \delta_x + |E_y|^2 \cos^2 \delta_y - |E_x|^2 \sin^2 \delta_x - |E_y|^2 \sin^2 \delta_y = 0$$

Raggruppando i termini e usando le formule di duplicazione delle funzioni trigonometriche si ottiene

$$|E_x|^2 \cos 2\delta_x + |E_y|^2 \cos 2\delta_y = 0 \quad (12)$$

Le (11,12) costituiscono un sistema lineare omogeneo in $|E_x|^2$ e $|E_y|^2$. Poichè nessuna di queste quantità può annullarsi, ne deriva che il determinante del sistema deve essere nullo. Calcolando il determinante

$$\begin{vmatrix} \sin 2\delta_x & \sin 2\delta_y \\ \cos 2\delta_x & \cos 2\delta_y \end{vmatrix} = 0$$

segue

$$\sin 2\delta_x \cos 2\delta_y - \cos 2\delta_x \sin 2\delta_y = \sin 2(\delta_x - \delta_y) = 0$$

da cui

$$\delta_x - \delta_y = \frac{n\pi}{2}$$

con n intero. Tuttavia il caso n pari è da escludere in quanto conduce alla polarizzazione lineare, e quindi i valori possibili sono

$$\delta_x - \delta_y = \pm \frac{\pi}{2} \quad (13)$$

che è la prima condizione necessaria di polarizzazione circolare. Dalla (13) segue poi

$$\sin 2\delta_x = \sin 2 \left[\delta_y \pm \frac{\pi}{2} \right] = \sin [2\delta_y \pm \pi] = -\sin 2\delta_y$$

e analogamente $\cos 2\delta_x = -\cos 2\delta_y$. Sostituendo nella (11,12) si ottiene come condizione necessaria

$$\begin{aligned} -|E_x|^2 \sin 2\delta_y + |E_y|^2 \sin 2\delta_y &= [|E_y|^2 - |E_x|^2] \sin 2\delta_y = 0 \\ -|E_x|^2 \cos 2\delta_y + |E_y|^2 \cos 2\delta_y &= [|E_y|^2 - |E_x|^2] \cos 2\delta_y = 0 \end{aligned}$$

da cui segue necessariamente

$$|E_x|^2 = |E_y|^2$$

che è la seconda condizione necessaria di polarizzazione circolare.

Passiamo alla dimostrazione della sufficienza. Se vale una qualunque delle condizioni 1), 2), 3) viste prima la polarizzazione è **lineare**.

Se una delle componenti di \mathbf{E} è nulla, allora \mathbf{A} e \mathbf{B} sono allineati, ed il loro prodotto vettoriale è nullo. Resta quindi da considerare solo il caso 3). Se E_x ed E_y hanno la stessa fase (o sono sfasate di π), allora esiste un numero reale p tale che $E_x = pE_y$, e quindi

$$A_x = pA_y \quad , \quad B_x = pB_y$$

Calcolando il prodotto vettoriale si trova

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{i}_z = [(pA_y)B_y - A_y(pB_y)] \mathbf{i}_z = 0$$

che garantisce la polarizzazione lineare

Dimostriamo invece che se valgono le due condizioni $|E_x| = |E_y|$, e E_x , E_y sfasati di $\pm \frac{\pi}{2}$ allora la polarizzazione è circolare. In questo caso occorre verificare entrambe le condizioni di polarizzazione circolare espresse sui vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} .

Le condizioni sulle componenti di \mathbf{E} possono essere riassunte in $E_x = sjE_y$, dove s vale ± 1 . Di conseguenza

$$A_x = -sB_y \quad , \quad B_x = sA_y \tag{14}$$

Calcolando il prodotto scalare si trova

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A_x B_x + A_y B_y) = [(-sB_y)(sA_y) + A_y B_y] = 0$$

in quanto $s^2 = 1$. Inoltre, usando le (14)

$$|\mathbf{A}|^2 = |A_x|^2 + |A_y|^2 = |B_x|^2 + |B_y|^2 = |\mathbf{B}|^2$$

che conclude la dimostrazione.

4 PARAMETRI DI POLARIZZAZIONE

Lo stato di un campo monocromatico è completamente definito dando l'ampiezza e lo *stato di polarizzazione* del campo. Per la definizione univoca dello stato del campo possono essere usati più insiemi di parametri, a seconda delle informazioni che si possiedono, o che si vogliono evidenziare.

Un insieme completo di parametri è costituito dai vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} ma tale insieme è sovrabbondante. Infatti la sola conoscenza dei moduli $|\mathbf{A}|$ e $|\mathbf{B}|$ e dell'angolo (orientato) tra \mathbf{A}

e \mathbf{B} è sufficiente ad identificare completamente lo stato del campo. D'altra parte tale rappresentazione non evidenzia neanche lo stato di polarizzazione. Possiamo quindi dire che lo stato di un campo ha tre gradi di libertà, e lo stato di polarizzazione ne ha pertanto due.

Un altro insieme di parametri si può ottenere dalla conoscenza delle componenti di \mathbf{E}

$$\begin{aligned} E_x &= a_x \exp(j\delta_x) \\ E_y &= a_y \exp(j\delta_y) \end{aligned} \quad (15)$$

con $a_x = |E_x|$ e $a_y = |E_y|$.

Poichè è noto che le fasi assolute di un campo non hanno significato fisico, la rappresentazione (15) ha solo tre parametri, a_x , a_y e $\delta = \delta_y - \delta_x$ (con le fasi δ_x , δ_y e δ tutte comprese in $(-\pi, +\pi)$). Possiamo quindi rappresentare un campo sinusoidale nelle due forme

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= a_x e^{j\delta_x} \mathbf{i}_x + a_y e^{j\delta_y} \mathbf{i}_y \\ \mathbf{E} &= a_x \mathbf{i}_x + a_y e^{j\delta} \mathbf{i}_y \end{aligned} \quad (16)$$

La seconda delle rappresentazioni (16) è non ridondante, ed è quella che verrà usata nel caso di campo sinusoidale¹. Tuttavia anch'essa non evidenzia direttamente lo stato di polarizzazione. Potremmo aggiungere il rapporto assiale, ma non basta in quanto esistono infiniti campi con polarizzazione diversa e stesso rapporto assiale.

Le rappresentazioni (1) e (16) sono ovviamente equivalenti. Per passare dall'una all'altra basta imporre le uguaglianze

$$\mathbf{A} + j\mathbf{B} = a_x \mathbf{i}_x + a_y e^{j\delta} \mathbf{i}_y$$

ottenendo ²

$$A_x = a_x \quad A_y = a_y \cos \delta \quad B_x = 0 \quad B_y = a_y \sin \delta \quad (17)$$

In alternativa a queste, sono possibili altre descrizioni, basate sull'ellisse di polarizzazione. In particolare possiamo utilizzare i due semiassi dell'ellisse di polarizzazione a e b (oppure l'ampiezza del campo $a_x^2 + a_y^2$ e il rapporto assiale) e l'angolo di orientazione ψ dell'ellisse, definito in Fig. 1. In particolare l'angolo ψ è l'angolo, compreso in $(-\pi/2, \pi/2)$, tra l'asse maggiore dell'ellisse e una direzione di riferimento, generalmente l'asse x del sistema di riferimento. In alternativa si possono usare i *Parametri di Stokes*, che, per la loro importanza, verranno dettagliatamente descritti nel prossimo paragrafo.

Come mostrato nella App. 2, i semiassi dell'ellisse di polarizzazione sono

$$a = \frac{a_x a_y |\sin \delta|}{\sqrt{\lambda_1}} \quad b = \frac{a_x a_y |\sin \delta|}{\sqrt{\lambda_2}} \quad (18)$$

dove $\lambda_{1,2}$ sono le due soluzioni dell'equazione

¹ Ovviamente, tutte le relazioni trovate potranno essere espresse direttamente in termini delle fasi delle due componenti δ_x e δ_y . Basterà sostituire δ con $\delta_y - \delta_x$, ed eventualmente sviluppare le formule di addizione delle funzioni trigonometriche.

² Si noti che la condizione $B_x = 0$ è in realtà una conseguenza della nostra possibilità di scelta del sistema di riferimento. In altri termini, da un punto di vista logico essa equivale a scegliere la fase di E_x pari a 0.

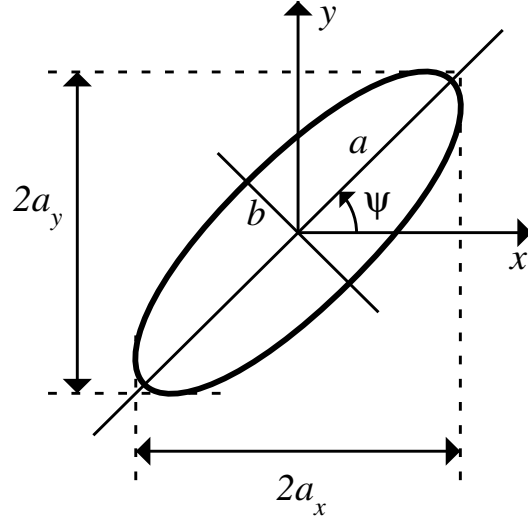


Fig.1: Parametri dell'ellisse di polarizzazione.

$$\lambda^2 - (a_x^2 + a_y^2)\lambda + a_x^2 a_y^2 \sin^2 \delta = 0 \quad \text{ovvero} \quad \lambda^2 - |E|^2 \lambda + a_x^2 a_y^2 \sin^2 \delta = 0 \quad (19)$$

Risulta anche

$$a^2 + b^2 = a_x^2 a_y^2 \sin^2 \delta \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) = a_x^2 a_y^2 \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \sin^2 \delta \quad (20)$$

Ma per le proprietà delle equazioni di secondo grado $\lambda_1 + \lambda_2 = a_x^2 + a_y^2$ e $\lambda_1 \lambda_2 = a_x^2 a_y^2 \sin^2 \delta$. Sostituendo nella (20) segue allora

$$a^2 + b^2 = a_x^2 + a_y^2 \quad (21)$$

e quindi anche $a^2 + b^2$ rappresenta l'intensità del campo.

Per quanto riguarda il rapporto assiale, si può descriverlo tramite l'angolo χ , definito da

$$\tan \chi = \frac{b}{a}$$

in modo che $\tan \chi$ sia l'inverso del rapporto assiale. Poichè $b \leq a$, risulta $\chi \leq \pi/4$.

Si ha

$$\sin 2\chi = \frac{2 \tan \chi}{1 + \tan^2 \chi} = \frac{2ab}{a^2 + b^2} = \frac{2a_x^2 a_y^2 \sin^2 \delta}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} (a_x^2 + a_y^2)}$$

e sostituendo il prodotto degli autovalori si ha in definitiva

$$\sin 2\chi = \frac{2a_x a_y |\sin \delta|}{(a_x^2 + a_y^2)}$$

Può essere utile associare un segno a χ , che individui il verso di rotazione, definito come quel verso che viene visto da un osservatore posto nella sorgente (e quindi, per una onda piana, situato a $z = -\infty$). In particolare definiamo

$$\begin{cases} \chi > 0 & \text{pol. levogira (LHCP)} \\ \chi < 0 & \text{pol. destogira (RHCP)} \end{cases}$$

Si può dimostrare che, con tale convenzione, il segno di χ coincide col segno di $\sin \delta$ (e quindi con quello di δ , essendo $\delta \in (-\pi, +\pi)$). Infatti il campo corrispondente a (16) nel dominio del tempo è

$$\mathbf{e}(t) = a_x \cos \omega_0 t \mathbf{i}_x + a_y \cos(\omega_0 t + \delta) \mathbf{i}_y$$

Consideriamo tale campo in due istanti successivi $t_0 = \pi/(2\omega_0)$ e $t_1 = t_0 + \epsilon/\omega_0$, con ϵ positivo, piccolo a piacere. Risulta

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(t_0) &= a_y \cos\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right) \mathbf{i}_y = -a_y \sin \delta \mathbf{i}_y \\ \mathbf{e}(t_1) &= a_x \cos\left(\frac{\pi}{2} + \epsilon\right) \mathbf{i}_x + a_y \cos\left(\frac{\pi}{2} + \epsilon + \delta\right) \mathbf{i}_y = -a_x \sin \epsilon \mathbf{i}_x - a_y \sin(\epsilon + \delta) \mathbf{i}_y \end{aligned}$$

La componente y di \mathbf{e} ha, in entrambi gli istanti t_0, t_1 lo stesso segno, e precisamente quello opposto a $\sin \delta$. La componente x , invece, è nulla in t_0 e sempre negativa in t_1 . Pertanto, se $\sin \delta > 0$, il campo ruota da $-\mathbf{i}_y$ verso $-\mathbf{i}_x$ ed è quindi levogiro, ovvero ruota in senso antiorario per un osservatore posto in $z = -\infty$. Se invece $\sin \delta < 0$, il campo ruota da \mathbf{i}_y verso $-\mathbf{i}_x$ ed è quindi destogiro.

In definitiva, quindi, possiamo scrivere

$$\sin 2\chi = \frac{2a_x a_y \sin \delta}{(a_x^2 + a_y^2)} \quad (22)$$

Per quanto riguarda invece ψ , nella App. 3 si trova che

$$\tan 2\psi = \frac{2(a_y^2 - \lambda_1)}{(a_x^2 - a_y^2)(a_y^2 - \lambda_1)} a_x a_y \cos \delta = \frac{2a_x a_y \cos \delta}{(a_x^2 - a_y^2)} \quad (23)$$

L'equazione (23) fornisce due valori per ψ , che differiscono di $\pi/2$, e sono gli angoli dei due semiassi con l'asse x . Il valore relativo all'angolo del semiasse maggiore è quello che ha lo stesso segno di $\cos \delta$.

5 PARAMETRI DI STOKES

Le rappresentazioni dello stato del campo viste fin'ora sono ridondanti o coinvolgono grandezze dimensionalmente diverse. Una rappresentazione non ridondante, che coinvolge tutte grandezze dimensionalmente omogenee (e che, come vedremo più avanti, si presta ad essere generalizzata) è quella che utilizza i parametri di Stokes.

I parametri di Stokes sono quattro grandezze s_i definite da

$$\begin{aligned}
s_0 &= a_x^2 + a_y^2 \\
s_1 &= a_x^2 - a_y^2 \\
s_2 &= 2a_x a_y \cos \delta \\
s_3 &= 2a_x a_y \sin \delta
\end{aligned} \tag{24}$$

e sono dimensionalmente delle intensità di campo elettrico, misurate in V^2/m^2 . In particolare $2\zeta s_0$ è il vettore di Poynting associato al campo considerato. Si noti che i parametri di Stokes sono reali con segno (salvo s_0 che è sempre positivo).

Nel seguito spesso indicheremo i 4 parametri di Stokes come vettore numerico \hat{s} a 4 elementi.

Poichè, come è facile verificare,

$$s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \tag{25}$$

bastano i tre parametri s_1 , s_2 e s_3 a caratterizzare completamente lo stato di un campo sinusoidale.

Le equazioni (24) possono essere invertite ottenendo

$$\begin{aligned}
a_x^2 &= \frac{s_0 + s_1}{2} \\
a_y^2 &= \frac{s_0 - s_1}{2} \\
\delta &= \arg[s_2 + js_3]
\end{aligned} \tag{26}$$

Le relazioni tra i parametri di Stokes e i parametri definiti nel paragrafo precedente si ottengono facilmente da (23,22):

$$\tan 2\psi = \frac{s_2}{s_1} \quad \sin 2\chi = \frac{s_3}{s_0} \tag{27}$$

oltre, ovviamente, a $s_0 = a^2 + b^2$. Nella prima delle (27) va comunque ricordato che il segno di ψ coincide con quello di $\cos \delta$, ovvero con quello di s_2 . Invertendo le (27) si ottiene dapprima $s_3 = s_0 \sin 2\chi$, e da questo

$$s_0^2 \cos^2 2\chi = s_0^2 - s_3^2 = s_1^2 + s_2^2$$

da cui si può estrarre la radice senza problemi di segni in quanto, essendo $|\chi| < \pi/4$, $\cos 2\chi$ è certamente positivo.

Quindi $s_1 + js_2$ ha modulo $s_0 \cos 2\chi$. Inoltre, salvo verifica sui segni, s_2 è proporzionale a $\sin 2\psi$ e s_1 a $\cos 2\psi$. Per quanto riguarda i segni, $\sin 2\psi$ ha lo stesso segno ¹ di ψ , ovvero di s_2 . Pertanto s_1 deve avere lo stesso segno di $\cos 2\psi$ e segue $s_1 = s_0 \cos 2\chi \cos 2\psi$ e $s_2 = s_0 \cos 2\chi \sin 2\psi$.

Pertanto

$$\begin{aligned}
s_1 &= s_0 \cos 2\chi \cos 2\psi \\
s_2 &= s_0 \cos 2\chi \sin 2\psi \\
s_3 &= s_0 \sin 2\chi
\end{aligned} \tag{28}$$

¹ Ricordiamo che $(-\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2)$

che consentono di determinare i parametri di Stokes a partire dall'ellisse di polarizzazione².

Poichè la polarizzazione lineare richiede $\chi = 0$ allora la condizione di polarizzazione lineare è $s_3 = 0$. Allo stesso modo, poichè la polarizzazione circolare richiede $\chi = \pm\pi/4$, allora la condizione di polarizzazione circolare è $s_1 = s_2 = 0$.

Per concludere il paragrafo, notiamo che l'equazione corrispondente alla (19) è

$$\lambda^2 - s_0\lambda + \frac{s_3^2}{4} = 0 \quad (29)$$

Le soluzioni di (29)

$$\lambda = \frac{s_0 \mp \sqrt{s_0^2 - s_3^2}}{2} = \frac{s_0 \mp \sqrt{s_1^2 + s_2^2}}{2}$$

consentono quindi di calcolare il rapporto assiale a partire dalle (18). Si ha infatti

$$AR = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a_x a_y |\sin \delta|}{\sqrt{\lambda_1}}}{\frac{a_x a_y |\sin \delta|}{\sqrt{\lambda_2}}} = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = \sqrt{\frac{s_0 + \sqrt{s_1^2 + s_2^2}}{s_0 - \sqrt{s_1^2 + s_2^2}}}$$

² Le equazioni (28) possono essere interpretate come coordinate di un punto dello spazio. Più precisamente s_1/s_0 , s_2/s_0 , s_3/s_0 , sono le coordinate cartesiane di un punto della superficie di una sfera di raggio unitario (sfera di Poincaré), e precisamente del punto di latitudine 2χ e longitudine 2ψ .

Segue quindi che a ogni punto della superficie sferica corrisponde uno stato di polarizzazione. In particolare l'equatore corrisponde alla polarizzazione lineare, mentre i due poli corrispondono alle due polarizzazioni circolari. I punti intermedi sono polarizzazioni intermedie, levogire quelle dell'emisfero nord e destragire quelle dell'emisfero sud.

6 SEGNALI A BANDA STRETTA

I segnali di interesse nelle telecomunicazioni (e non solo) non sono mai sinusoidali puri, ma hanno una estensione finita in banda. In particolare molti segnali sono a *banda stretta*, ovvero sono segnali per i quali lo spettro è diverso da zero solo in un intervallo $2\Delta\omega$ (detta banda del segnale), centrato intorno a una frequenza ω_0 (detta frequenza centrale o *portante*), con la condizione

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1 \quad (30)$$

Per tali segnali esiste una rappresentazione standard, che vedremo essere molto simile alla rappresentazione dei segnali sinusoidali (di cui i segnali a banda stretta sono una generalizzazione) mediante numeri complessi.

Sia $v(t)$ un segnale *reale* a banda stretta. La sua trasformata $\hat{V}(\omega)$ è allora *hermitiana*:

$$\hat{V}(-\omega) = \hat{V}^*(\omega)$$

e quindi:

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{V}(\omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \hat{V}(\omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

L'integrale può essere esteso alla sola banda di $v(t)$ e segue (con un opportuno cambio di variabili $\sigma = \omega - \omega_0$)

$$v(t) = 2 \operatorname{Re} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \hat{V}(\omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \operatorname{Re} \left[\int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} 2 \hat{V}(\omega_0 + \sigma) e^{j\sigma t} \frac{d\sigma}{2\pi} e^{j\omega_0 t} \right]$$

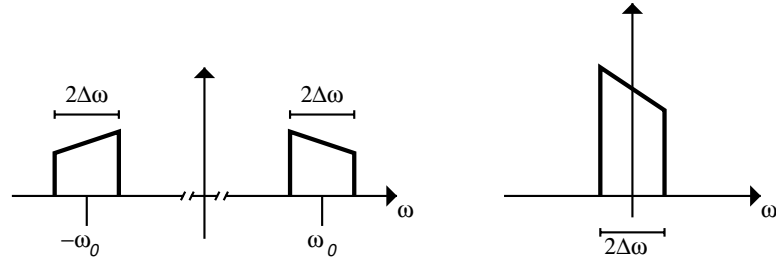


Fig.1: Trasformata di $v(t)$ a sinistra, e di $V(t)$ a destra.

L'integrale è una funzione complessa di t a banda limitata, con banda $\Delta\omega$, che indichiamo con $V(t)$ (detto segnale equivalente a banda limitata):

$$V(t) = \int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} 2 \hat{V}(\omega_0 + \sigma) e^{j\sigma t} \frac{d\sigma}{2\pi} = v_c(t) + jv_s(t) \quad (31)$$

dove la parte reale e quella immaginaria di $V(t)$, che indichiamo con $v_c(t)$ e $v_s(t)$, sono anch'esse funzioni a banda limitata, ma reali. Segue quindi

$$v(t) = \operatorname{Re}[V(t) e^{j\omega_0 t}] = \operatorname{Re}[(v_c(t) + jv_s(t)) e^{j\omega_0 t}] = v_c(t) \cos \omega_0 t - v_s(t) \sin \omega_0 t \quad (32)$$

che chiaramente generalizza la rappresentazione di segnali sinusoidali mediante numeri complessi. La differenza è che ora abbiamo una funzione complessa del tempo, $V(t)$, al posto di un numero complesso.

In realtà le due rappresentazioni sono molto più simili di quanto non appaia. Infatti se consideriamo $v_c(t)$ (ma per $v_s(t)$ si possono fare analoghe considerazioni), questa è una funzione a banda limitata, con banda $\Delta\omega$. Su di un periodo T_0 della sinusoide portante a frequenza ω_0 , la sua variazione relativa soddisfa a

$$T_0 \frac{|v_c(t+T_0) - v_c(t)|^2}{||v_c(t)||^2} \leq \frac{\Delta\omega^3 T_0^3}{3\pi}$$

Il termine a secondo membro vale

$$\frac{\Delta\omega^3 T_0^3}{3\pi} = \frac{1}{3\pi} \left(\frac{2\pi\Delta\omega}{\omega_0} \right)^3 = \frac{8\pi^2}{3} \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)^3$$

ed è quindi molto più piccolo di 1. Pertanto, su di un periodo T_0 della sinusoide portante a frequenza ω_0 , $v_c(t)$ e $v_s(t)$ possono essere considerate **costanti**. Naturalmente il valore di tali costanti è diverso periodo per periodo.

Quindi la differenza tra la rappresentazione di una funzione sinusoidale e di una a banda stretta sta nel fatto che la costante complessa della rappresentazione di segnali sinusoidali viene sostituita da una funzione complessa *lentamente variabile* (ovvero costante se osservata su di un periodo, variabile se osservata su molti periodi).

Il discorso relativo a campi a banda stretta è sostanzialmente identico. Tuttavia la similitudine di un campo generico a banda stretta col caso di campo sinusoidale è decisamente minore in quanto, mentre un campo sinusoidale giace sempre in un piano, un campo generico a banda stretta varia nello spazio.

Poiché in questo corso siamo interessati solo a onde piane, ci limiteremo a considerare solo campi di onde piane a banda stretta, scegliendo l'asse z nella direzione di propagazione. In tal modo anche i campi a banda stretta che considereremo avranno solo le componenti x e y .

Sia $\mathbf{e}(t)$ a banda stretta, con banda $2\Delta\omega$ centrata intorno a una frequenza ω_0 , con

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1$$

e sia $\hat{\mathbf{E}}(\omega)$ la sua trasformata di Fourier. Allora

$$\mathbf{e}(t) = \text{Re}[\mathbf{E}(t) e^{j\omega_0 t}] = \text{Re}[(\mathbf{e}_c(t) + j\mathbf{e}_s(t)) e^{j\omega_0 t}] = \mathbf{e}_c(t) \cos \omega_0 t - \mathbf{e}_s(t) \sin \omega_0 t \quad (33)$$

dove

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{e}_c(t) + j\mathbf{e}_s(t) = \int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} 2 \hat{\mathbf{E}}(\omega_0 + \sigma) e^{j\sigma t} \frac{d\sigma}{2\pi} \quad (34)$$

è la generalizzazione della rappresentazione del campo nel dominio della frequenza, e tutti i vettori coinvolti giacciono nel piano (x, y) . Possiamo anche dividere in componenti $\mathbf{e}_c(t) + j\mathbf{e}_s(t)$

$$\mathbf{e}_c(t) + j\mathbf{e}_s(t) = a_x(t) e^{j\delta_x(t)} \mathbf{i}_x + a_y(t) e^{j\delta_y(t)} \mathbf{i}_y \quad (35)$$

ottenendo, come alternativa a (33), la

$$\begin{aligned}\mathbf{e}(t) &= \text{Re} \left[\left(a_x(t)e^{j\delta_x(t)}\mathbf{i}_x + a_y(t)e^{j\delta_y(t)}\mathbf{i}_y \right) e^{j\omega_0 t} \right] \\ &= a_x(t)[\omega_0 t + \delta_x(t)]\mathbf{i}_x + a_y(t)\cos[\omega_0 t + \delta_y(t)]\mathbf{i}_y\end{aligned}\quad (36)$$

La componente z del vettore di Poynting istantaneo associato a questo campo vale

$$S(t) = \frac{1}{\zeta} |\mathbf{e}|^2 = \frac{1}{\zeta} \left[\mathbf{e}_c^2(t) \cos^2 \omega_0 t + \mathbf{e}_s^2(t) \sin^2 \omega_0 t - 2\mathbf{e}_c(t) \cdot \mathbf{e}_s(t) \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t \right]$$

Di esso si potrebbe calcolare, analogamente al caso della potenza, il valor medio in un periodo. Tuttavia, in telerilevamento, interessa il valor medio del vettore di Poynting (e delle altre grandezze quadratiche nei campi) valutato su tutto l'asse dei tempi:

$$\langle S(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} S(t') dt' \quad (37)$$

e che è ovviamente una **costante**.

Poichè

$$\cos^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\omega_0 t \quad \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\omega_0 t$$

e $2 \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t = \sin 2\omega_0 t$ allora

$$S(t) = \frac{1}{2\zeta} \left[\mathbf{e}_c^2(t) + \mathbf{e}_s^2(t) \right] + \text{termini a frequenza } 2\omega_0$$

Il valor medio dei termini a frequenza $2\omega_0$ è nullo (basta dividere l'intervallo $(-T, T)$ in parti lunghe un periodo della portante, per le quali l'integrale è nullo), e resta quindi

$$\langle S(t) \rangle = \frac{1}{2\zeta} \left[\langle \mathbf{e}_c^2(t) \rangle + \langle \mathbf{e}_s^2(t) \rangle \right] = \frac{1}{2\zeta} \langle |\mathbf{e}_c(t) + j\mathbf{e}_s(t)|^2 \rangle \quad (38)$$

Analogamente, partendo dalla (36), segue

$$\langle S(t) \rangle = \frac{1}{2\zeta} \left[\langle a_x^2(t) \rangle + \langle a_y^2(t) \rangle \right] = \frac{1}{2\zeta} \langle |a_x(t)e^{j\delta_x(t)}\mathbf{i}_x + a_y(t)e^{j\delta_y(t)}\mathbf{i}_y|^2 \rangle \quad (39)$$

7 ESEMPI DI SEGNALI A BANDA STRETTA

Nel seguito di questo corso saremo interessati a due classi di segnali (deterministici) a banda stretta, ovvero impulsi modulati e *chirp*.

Un impulso modulato è un segnale del tipo

$$v(t) = h(t) \cos \omega_0 t \quad (40)$$

dove $h(t)$ è un segnale di durata finita τ e anche sostanzialmente a banda limitata¹.

In Fig. 1 sono mostrati alcuni possibili impulsi (rettangolare, coseno, gaussiano) e in Fig. 2 le relative trasformate di Fourier.

¹ É noto che non esistono segnali che siano allo stesso tempo limitati intempo e in frequenza. Tuttavia molti segnali di durata finita hanno una trasformata di Fourier concentrata vicino all'origine, con code di energia trascurabile. Sono questi i segnali che considereremo come $h(t)$.

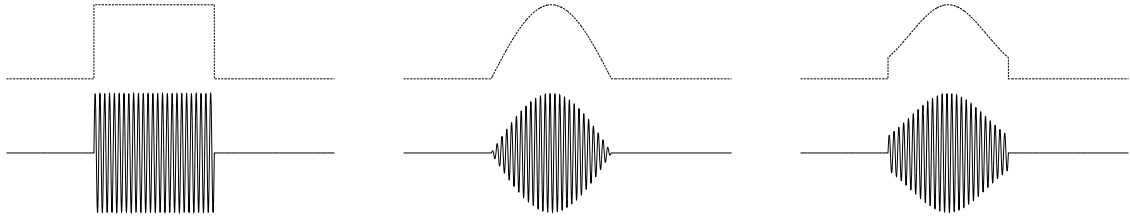


Fig. 1: Possibili impulsi (rettangolare, coseno, gaussiano) $h(t)$ in alto, e corrispondenti impulsi modulati in basso.

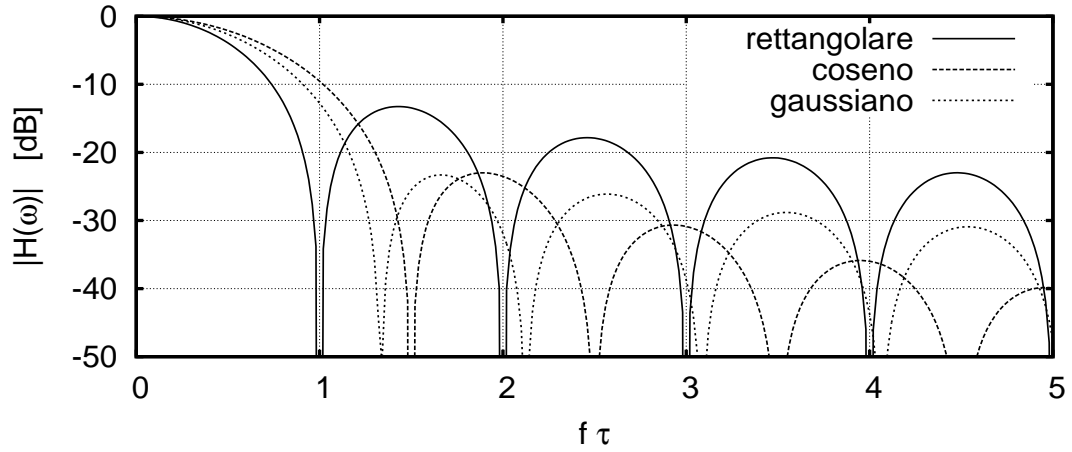


Fig. 2: Trasformate di Fourier normalizzate degli impulsi di Fig. 1.

Dalla Fig. 2 si vede immediatamente che nessuno di questi segnali è a banda limitata. In particolare l'impulso rettangolare ha uno spettro molto largo, essendo una funzione discontinua. Viceversa il coseno ha uno spettro molto più concentrato, non avendo discontinuità.

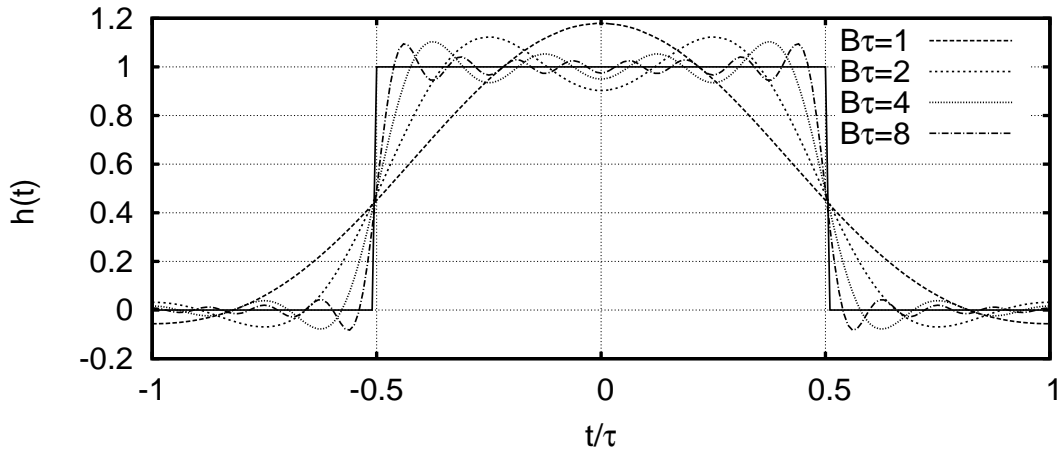


Fig. 3: Ricostruzione di un impulso rettangolare filtrato.

Volendo usare la (40) come segnale a banda stretta, occorre verificare cosa succede se il segnale $h(t)$ viene filtrato, ovvero la sua trasformata viene troncata a una frequenza massima

pari a B . Il valore tipico di B dovrebbe essere naturalmente $1/\tau$. È però facile immaginare che un impulso rettangolare filtrato con $B\tau = 1$ risulti molto diverso da quello originario, e sia anzi necessaria una banda molto maggiore. In Fig. 3 sono riportati i risultati del filtraggio un impulso rettangolare con varie bande e si vede che solo con $B\tau = 4$ il risultato somiglia abbastanza all'impulso di partenza.

Completamente diverso è il caso degli impulsi cosinusoidali e gaussiani, le cui ricostruzioni filtrate sono riportate in Fig. 4. Si vede infatti che già per $B\tau = 1$ le ricostruzioni sono molto fedeli.

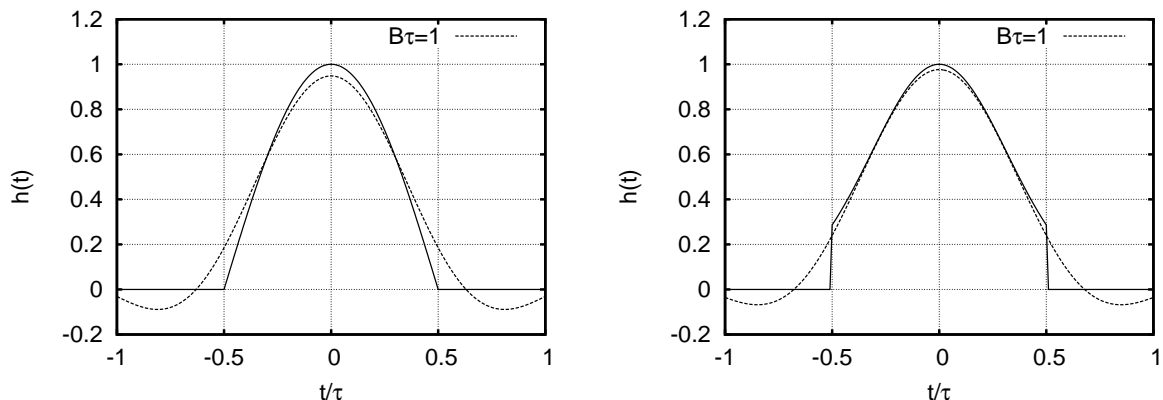


Fig. 4: Ricostruzione di impulsi coseno (a sinistra) e gaussiano (a destra) filtrati.

In particolare si nota che un impulso di tipo coseno, nonostante abbia la minima energia fuori della banda passante, viene ricostruito meno fedelmente di un impulso gaussiano, salvo che vicino alle discontinuità. Si può quindi concludere che (escludendo le discontinuità), l'impulso gaussiano varia più lentamente di quello coseno, e quindi viene ricostruito più fedelmente dopo il filtraggio.

Per quanto riguarda la banda di (40), questa è pari a $2B$ (si veda la Fig. 1 del paragrafo precedente). Tuttavia le due parti dello spettro, quella in $(\omega_0 - \Delta\omega, \omega_0)$ e quella in $(\omega_0, \omega_0 + \Delta\omega)$ hanno esattamente lo stesso contenuto informativo. Si può allora pensare di non trasmettere direttamente il segnale (40), ma di farlo prima passare attraverso un filtro passa-banda con banda passante $(\omega_0, \omega_0 + \Delta\omega)$, ottenendo così un segnale di banda B . Questo segnale prende il nome di segnale a banda laterale singola o *SSB* (*Single Side Band*, per distinguerlo dal segnale (40), che viene detto a banda laterale doppia o *DSB*). La sua forma analitica contiene anche una componente in quadratura² $h_Q(t)$, dipendente da $h(t)$:

$$h(t) \cos \omega_0 t - h_Q(t) \sin \omega_0 t$$

Ovviamente, in fase di ricezione, occorrerà una opportuna demodulazione per ricostruire il segnale di partenza.

² Il segnale in quadratura è dato da

$$h_Q(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(x)}{t-x} dx$$

ovvero è la trasformata di Hilbert del segnale di partenza $h(t)$. Alternativamente, $h_Q(t)$ può essere ottenuto se si riesce a determinare una funzione analitica $F(z)$, tale che $h(t) = \{\text{Re}[F(z)]\}_{z=t}$. In tal caso $h_Q(t) = \{\text{Im}[F(z)]\}_{z=t}$.

L'altro segnale a banda stretta di interesse è il *chirp*, ovvero un segnale, di durata τ_c , modulato in frequenza:

$$a(t) = \cos \left(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{2\tau_c} t^2 \right) = \operatorname{Re} \left[\exp \left(j \frac{\Delta\omega}{2\tau_c} t^2 \right) e^{j\omega_0 t} \right] \quad t \in [0, \tau_c] \quad (41)$$

rappresentato schematicamente in Fig. 5³.

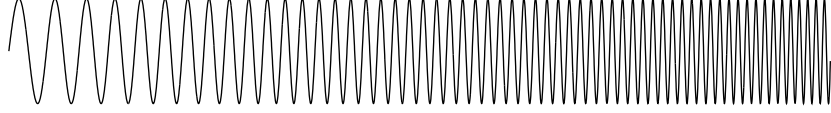


Fig. 5: Andamento (fuori scala) di un chirp.

La frequenza istantanea di un tale segnale è data da

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \left(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{2\tau_c} t^2 \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{\tau_c} t \right) = \left(f_0 + \frac{\Delta f}{\tau_c} t \right) \quad t \in [0, \tau_c]$$

e varia tra f_0 e $f_0 + \Delta f$.

Anche il chirp $a(t)$ è un segnale *SSB*, con frequenza portante f_0 . Infatti la (41) può scriversi come

$$a(t) = \cos \left(\frac{\Delta\omega}{2\tau_c} t^2 \right) \cos(\omega_0 t) - \sin \left(\frac{\Delta\omega}{2\tau_c} t^2 \right) \sin(\omega_0 t)$$

e si dimostra⁴ che $\sin \left(\frac{\Delta\omega}{2\tau_c} t^2 \right)$ é la componente in quadratura associata a $\cos \left(\frac{\Delta\omega}{2\tau_c} t^2 \right)$.

Si dimostra che, se $\Delta\omega\tau_c \gg 1$, allora l'occupazione in banda di un chirp coincide con l'intervallo di variazione della sua frequenza istantanea, e la sua trasformata vale (con un errore $O[(\Delta\omega\tau_c)^{-1}]$)

$$\hat{A}(\omega) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi\tau_c}{\Delta\omega}} e^{j\frac{\pi}{4}} \exp \left[j \frac{\tau_c}{2\Delta\omega} (\omega - \omega_0)^2 \right] \quad \omega \in [\omega_o, \omega_o + \Delta\omega]$$

ed è nulla al di fuori di questo intervallo. Ne segue che

$$|\hat{A}(\omega)|^2 = \begin{cases} \frac{\pi\tau_c}{2\Delta\omega} & \omega \in [\omega_o, \omega_o + \Delta\omega] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (42)$$

³ La (41) rappresenta un chirp *crescente* con la frequenza. Ovviamente sono possibili anche chirp *descrescenti*

$$\cos \left(\omega_0 t - \frac{\Delta\omega}{2\tau_c} t^2 \right)$$

che hanno proprietà del tutto equivalenti. Per semplicità, in questo corso ci riferiremo solo a chirp crescenti (41).

⁴ Vedi nota 2.

Per valutare l'errore della (42), in Fig. 6 sono riportate le trasformate esatte della (41), per $\Delta\omega = 2\pi$, al variare di τ_c . Si noti come nei grafici a sinistra, con $\Delta\omega\tau_c \leq 50$, la (42) non sia una approssimazione valida, mentre lo diventa nei due grafici a destra, in cui $\Delta\omega\tau_c \geq 100$.

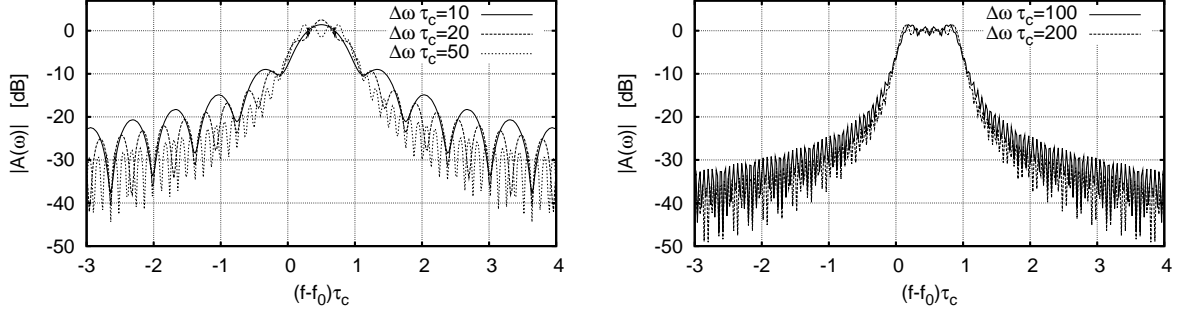


Fig. 6: Trasformate esatte di un chirp per vari valori di $\Delta\omega\tau_c$.

8 POLARIZZAZIONE DEI CAMPI A BANDA STRETTA

Anche per un campo a banda stretta si può porre il problema della polarizzazione, che però diventa un problema tri-dimensionale. Noi qui però considereremo solo campi di **onde piane** (o sferiche), scegliendo l'asse z come direzione di propagazione. In tal modo anche i campi a banda stretta risulteranno giacere nel piano (x, y) .

Le rappresentazioni del campo da utilizzare sono le (33,34), generalizzazione delle (1,2), e le (35,36), generalizzazione della (16), che riportiamo

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{e}_c(t) + j\mathbf{e}_s(t) \quad \mathbf{e}(t) = \mathbf{e}_c(t) \cos \omega_0 t - \mathbf{e}_s(t) \sin \omega_0 t$$

$$\mathbf{E}(t) = a_x(t)e^{j\delta_x(t)}\mathbf{i}_x + a_y(t)e^{j\delta_y(t)}\mathbf{i}_y \quad \mathbf{e}(t) = a_x(t)[\omega_0 t + \delta_x(t)]\mathbf{i}_x + a_y(t) \cos[\omega_0 t + \delta_y(t)]\mathbf{i}_y$$

dove le funzioni del tempo $\mathbf{e}_c(t)$, $\mathbf{e}_s(t)$, $E_x(t) = a_x(t)e^{j\delta_x(t)}$, $E_y(t) = a_y(t)e^{j\delta_y(t)}$ sono tutte lentamente variabili (rispetto al periodo T_0 della portante)

La curva descritta dal campo $\mathbf{e}(t)$ è evidentemente una curva aperta. Se però ci limitiamo a considerare solo la curva descritta in un periodo T_0 , notiamo che, limitatamente a questo intervallo, in cui $\mathbf{e}_c(t)$, $\mathbf{e}_s(t)$ possono essere considerate come costanti, il campo è espresso, con ottima approssimazione, dalla (2), e quindi descriverà un'ellisse. Nel periodo successivo le due funzioni $\mathbf{e}_c(t)$, $\mathbf{e}_s(t)$ saranno ancora costanti ma avranno un valore diverso, per cui il campo descriverà un'ellisse *diversa*, e così via. Pertanto possiamo associare al campo (33) una famiglia di ellissi, descritte nei vari periodi della portante, che vengono usati per descrivere lo stato di polarizzazione del campo a banda stretta.

La prima distinzione, anche visiva, che possiamo fare è sulla forma e orientazione di queste ellissi. Se tutte le ellissi hanno la stessa forma (ovvero lo stesso rapporto assiale) e la stessa orientazione (mentre varierà la ampiezza), allora il campo si dirà **completamente polarizzato**. Altrimenti il campo si dirà **parzialmente polarizzato**.

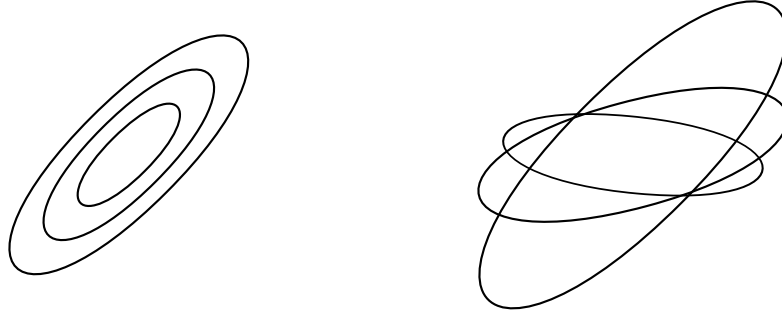


Fig.1: Campo completamente (a sinistra) e parzialmente (a destra) polarizzato.

Da un punto di vista matematico, il campo è completamente polarizzato se i valori che assume in due periodi diversi, ma qualunque, sono proporzionali. Scegliendo l'asse dei tempi in modo che il primo di questi due periodi sia $(0, T_0)$, allora deve risultare

$$\mathbf{e}(t + nT_0) = k_n \mathbf{e}(t) \quad \forall t \in (0, T_0), \quad \forall n$$

con la costante k_n dipendente da n . Sostituendo le componenti in bassa frequenza

$$\mathbf{e}_c(t + nT_0) \cos \omega_0 t - \mathbf{e}_s(t + nT_0) \sin \omega_0 t = k_n [\mathbf{e}_c(t) \cos \omega_0 t - \mathbf{e}_s(t) \sin \omega_0 t] \quad \forall t \in (0, T_0), \quad \forall n$$

in cui abbiamo utilizzato la periodicità delle funzioni trigonometriche.

I vettori $\mathbf{e}_c(t)$ ed $\mathbf{e}_s(t)$ a secondo membro sono calcolati in un solo periodo (quello 0), e sono quindi costanti:

$$\mathbf{e}_c(t) = \mathbf{A} \quad \mathbf{e}_s(t) = \mathbf{B} \quad \forall t \in (0, T_0)$$

Analogamente, sono costanti $\mathbf{e}_c(t + nT_0)$ ed $\mathbf{e}_s(t + nT_0)$, essendo calcolati anch'essi in un solo periodo (quello n -esimo). Indicando con \mathbf{e}_{cn} ed \mathbf{e}_{sn} queste costanti, e ricordando che le funzioni trigonometriche sono linearmente indipendenti, segue

$$\mathbf{e}_{cn} = k_n \mathbf{A} \quad \mathbf{e}_{sn} = k_n \mathbf{B} \quad \forall n$$

Segue allora che la forma generale di un campo a banda stretta completamente polarizzato è

$$\mathbf{E}(t) = \alpha(t) [\mathbf{A} + j\mathbf{B}] \quad \mathbf{e}(t) = \alpha(t) [\mathbf{A} \cos \omega_0 t - \mathbf{B} \sin \omega_0 t] \quad (43)$$

con $\alpha(t)$ funzione reale, lentamente variabile.

Uguagliando (35) e (43) e proiettando sugli assi segue

$$\alpha(t)[A_x + jB_x] = a_x(t) e^{j\delta_x(t)} \quad \alpha(t)[A_y + jB_y] = a_y(t) e^{j\delta_y(t)}$$

Poiché le fasi dei primi membri sono costanti, allora anche $\delta_x(t)$ e $\delta_y(t)$ devono essere costanti nel tempo.

Dalla prima segue poi $\alpha(t)A_x = a_x(t) \cos \delta_x$ e dalla seconda $\alpha(t)A_y = a_y(t) \cos \delta_y$. Facendo il rapporto segue

$$\frac{\alpha(t)A_x}{\alpha(t)A_y} = \frac{a_x(t) \cos \delta_x}{a_y(t) \cos \delta_y} \quad \Rightarrow \quad \frac{A_x}{A_y} = \frac{a_x(t)}{a_y(t)} \frac{\cos \delta_x}{\cos \delta_y}$$

il che implica che $a_x(t)/a_y(t)$ deve essere costante. La condizione di completa polarizzazione, se il campo è espresso dalla (35), risulta allora

$$q(t) = \frac{a_y(t)}{a_x(t)} = \text{cost} \quad \text{e} \quad \delta(t) = \delta_y(t) - \delta_x(t) = \text{cost} \quad (44)$$

Che questa sia anche una condizione sufficiente deriva dalla espressione (22,23) degli angoli χ e ψ che caratterizzano l'ellisse di polarizzazione, e che nel caso di segnali a banda stretta sono variabili da un periodo all'altro.

$$\begin{aligned} \sin 2\chi(t) &= \frac{2a_x(t)a_y(t) \sin [\delta_y(t) - \delta_x(t)]}{(a_x^2(t) + a_y^2(t))} = \frac{2q(t)a_x^2(t) \sin \delta(t)}{a_x^2(t)(1 + q^2(t))} \\ \tan 2\psi(t) &= \frac{2a_x(t)a_y(t) \cos [\delta_y(t) - \delta_x(t)]}{(a_x^2(t) - a_y^2(t))} = \frac{2q(t)a_x^2(t) \cos \delta(t)}{a_x^2(t)(1 - q^2(t))} \end{aligned}$$

Il fattore $a_x^2(t)$ può essere semplificato, e, se valgono le (44), si ha

$$\begin{aligned} \sin 2\chi(t) &= \frac{2q \sin \delta}{(1 + q^2)} \\ \tan 2\psi(t) &= \frac{2q \cos \delta}{(1 - q^2)} \end{aligned} \quad (45)$$

Quindi l'orientazione ψ e la forma χ dell'ellisse di polarizzazione sono costanti nel tempo, e pertanto il campo è completamente polarizzato.

Anche nel caso di segnali a banda stretta, è possibile descrivere completamente lo stato del campo utilizzando i parametri di Stokes, che però ora vanno definiti come

$$\begin{aligned} s_0 &= \langle a_x^2(t) \rangle + \langle a_y^2(t) \rangle \\ s_1 &= \langle a_x^2(t) \rangle - \langle a_y^2(t) \rangle \\ s_2 &= 2 \langle a_x(t)a_y(t) \cos [\delta_y(t) - \delta_x(t)] \rangle \\ s_3 &= 2 \langle a_x(t)a_y(t) \sin [\delta_y(t) - \delta_x(t)] \rangle \end{aligned} \quad (46)$$

dove $\langle \dots \rangle$ indica una media sul tempo (tra $-\infty$ e $+\infty$) del tutto analoga alla (37).

Nelle (46) tutte le grandezze sono lentamente variabili. In particolare, per s_2 ed s_3 , questo si vede immediatamente dallo sviluppo delle funzioni trigonometriche

$$\begin{aligned} s_2 &= 2 \langle [a_x(t) \cos \delta_x(t)] [a_y(t) \cos \delta_y(t)] \rangle + \langle [a_x(t) \sin \delta_x(t)] [a_y(t) \sin \delta_y(t)] \rangle \\ s_3 &= 2 \langle [a_x(t) \cos \delta_x(t)] [a_y(t) \sin \delta_y(t)] \rangle - \langle [a_x(t) \sin \delta_x(t)] [a_y(t) \cos \delta_y(t)] \rangle \end{aligned} \quad (47)$$

La differenza principale col caso monocromatico del paragrafo precedente è che ora

$$s_0^2 \geq s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \quad (48)$$

Se però il campo è completamente polarizzato, allora, usando le (44), segue

$$\begin{aligned}
s_0 &= \langle a_x^2 \rangle (1 + q^2) \\
s_1 &= \langle a_x^2 \rangle (1 - q^2) \\
s_2 &= \langle a_x^2 \rangle 2q \cos \delta \\
s_3 &= \langle a_x^2 \rangle 2q \sin \delta
\end{aligned} \tag{49}$$

e per essi vale la condizione (25). In altri termini una onda è completamente polarizzata se tra i suoi parametri di Stokes vale la

$$s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$$

Tutte le altre onde, per le quali vale la (48) col segno di “>”, sono parzialmente polarizzate.

9 SEGNALI E CAMPI ALEATORI A BANDA STRETTA

Finora abbiamo considerato solo campi deterministici. In realtà i campi e i segnali con cui si ha a che fare sono aleatori. Occorre quindi estendere le considerazioni precedenti a tali campi e segnali.

Consideriamo allora un campo $\mathbf{e}(t)$ aleatorio, e assumiamo che sia (dal punto di vista probabilistico) gaussiano e stazionario. Supponiamo inoltre che sia a banda stretta, ovvero che ogni sua realizzazione sia un campo a banda stretta, che può quindi essere rappresentata nella forma (33) oppure (36). Si dimostra però che il campo aleatorio $\mathbf{e}(t)$ (considerato come un unico ente matematico) può essere rappresentato nella forma

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{e}_c(t) \cos \omega_0 t - \mathbf{e}_s(t) \sin \omega_0 t \quad (50)$$

I due campi aleatori $\mathbf{e}_c(t)$, $\mathbf{e}_s(t)$ sono ovviamente a banda limitata e si può dimostrare che essi sono congiuntamente gaussiani e congiuntamente stazionari. Poiché

$$\mathbf{e}_c(t) + j\mathbf{e}_s(t) = E_x(t) \mathbf{i}_x + E_y(t) \mathbf{i}_y = a_x(t)e^{j\delta_x(t)} \mathbf{i}_x + a_y(t)e^{j\delta_y(t)} \mathbf{i}_y \quad (51)$$

allora anche le funzioni complesse $E_x(t)$ e $E_y(t)$ sono a banda limitata, congiuntamente gaussiane e congiuntamente stazionarie. Usandole si ottiene la rappresentazione alternativa di $\mathbf{e}(t)$:

$$\mathbf{e}(t) = a_x(t) \cos[\omega_0 t + \delta_x(t)] \mathbf{i}_x + a_y(t) \cos[\omega_0 t + \delta_y(t)] \mathbf{i}_y \quad (52)$$

Se questo campo viene ricevuto da una antenna, allora la (*) mostra che la tensione a vuoto $v(t)$ è anch'essa aleatoria a banda stretta, e può essere rappresentata nelle forme equivalenti

$$v(t) = v_c(t) \cos \omega_0 t - v_s(t) \sin \omega_0 t = V_M(t)e^{j\Phi(t)} \quad (53)$$

in cui $v_c(t)$, $v_s(t)$ e $V_M(t)e^{j\Phi(t)}$ sono tutti segnali aleatori lentamente variabili (in quanto a banda limitata). Poiché $\mathbf{e}(t)$ è gaussiano e stazionario, allora anche $v(t)$ lo sarà. Ne segue che anche $v_c(t)$ e $v_s(t)$ saranno congiuntamente gaussiani e congiuntamente stazionari.

Il fatto poi che $v(t)$ e $\mathbf{e}(t)$ siano stazionari implica alcune proprietà dei suoi componenti a bassa frequenza $v_c(t)$, $v_s(t)$ e $\mathbf{e}_c(t)$, $\mathbf{e}_s(t)$ (oppure $E_x(t)$, $E_y(t)$).

Se calcoliamo la media di $v(t)$ usando la (53) segue

$$\mathcal{E}[v(t)] = \mathcal{E}[v_c(t)] \cos \omega_0 t - \mathcal{E}[v_s(t)] \sin \omega_0 t$$

e questa media deve essere indipendente da t . Pertanto

$$\mathcal{E}[v_c(t)] = \mathcal{E}[v_s(t)] = 0 \quad (54)$$

in quanto anche queste due medie sono costanti. Conseguenza di (54) è che anche $\mathcal{E}[v(t)] = 0$.

Per quanto riguarda la autocorrelazione $R_{vv}(t, t + \tau) = \mathcal{E}[v(t)v(t + \tau)]$, questa deve dipendere solo da τ . Se indichiamo con $R_{cc}(\tau) = \mathcal{E}[v_c(t)v_c(t + \tau)]$ e simili le autocorrelazioni delle componenti in bassa frequenza, che dipendono solo da τ in quanto queste sono congiuntamente stazionarie, si trova (vedi Appendice)

$$R_{vv}(\tau) = R_{cc}(\tau) \cos \omega_0 \tau - R_{cs}(\tau) \sin \omega_0 \tau \quad (55)$$

in quanto si dimostra che

$$R_{cc}(\tau) = R_{ss}(\tau) \quad R_{sc}(\tau) = -R_{cs}(\tau) \quad (56)$$

D'altra parte

$$R_{sc}(\tau) = \mathcal{E}[v_s(t)v_c(t+\tau)] = \mathcal{E}[v_s(t-\tau)v_c(t)] = R_{cs}(-\tau)$$

che, combinata con la seconda delle (56), fornisce $R_{cs}(0) = \mathcal{E}[v_c(t)v_s(t)] = 0$. Pertanto campioni di $v_c(t)$ e $v_s(t)$ presi nello stesso istante sono tra loro incorrelati, e, essendo gaussiani, anche **indipendenti**. Conseguenza é che

$$R_{vv}(0) = \mathcal{E}[v^2(t)] = R_{cc}(0) \quad (57)$$

Passando al campo, nella rappresentazione (50) le proprietà sono simili alle (54,56,55), tenendo però conto che, essendo il campo un vettore, le autocorrelazioni sono delle matrici. I risultati principali, legati alla stazionarietà e alla banda stretta, sono

$$\mathcal{E}[\mathbf{e}_c(t)] = \mathcal{E}[\mathbf{e}_s(t)] = 0 \quad \implies \quad \mathcal{E}[\mathbf{e}(t)] = 0$$

e il fatto che ogni componente di $\mathbf{e}_c(t)$ é incorrelata (e, essendo gaussiana, **indipendente**) con ciascuna componente di $\mathbf{e}_s(t)$, se campionate nello stesso istante. Al contrario, le due componenti cartesiane del campo non sono in generale incorrelate (se campionate nello stesso istante).

Passando agli spettri di densità di potenza, in Fig. 1 sono riportati gli spettri di $v(t)$ e di $V(t)$, rispettivamente per segnali DSB e per segnali SSB. Si noti che il primo spettro $S_{vv}(\omega)$ é pari, essendo $v(t)$ reale, mentre $S_{VV}(\omega)$ non ha alcuna simmetria.

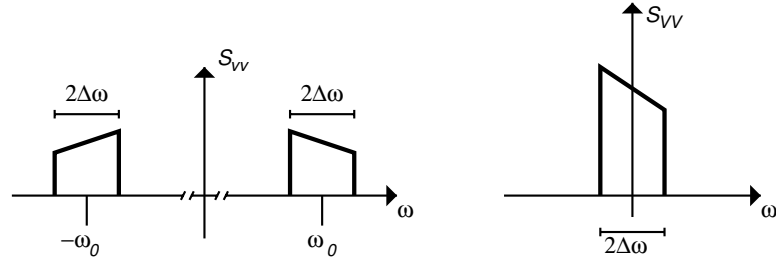


Fig.1a: Spettro di densità di potenza di $v(t)$ a sinistra, e di $V(t)$ a destra per un segnale DSB.

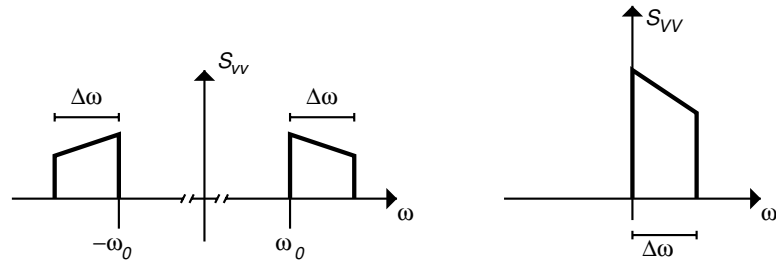


Fig.1b: Spettro di densità di potenza di $v(t)$ a sinistra, e di $V(t)$ a destra per un segnale SSB.

Posiamo concludere questo paragrafo notando che, per segnali aleatori a banda stretta, con banda totale B_T e spettro costante (o proporzionale a ω^2), il tempo di correlazione é dato da $1/(2B_T)$.

10 POLARIZZAZIONE DI CAMPI ALEATORI

Poiché i campi aleatori $\mathbf{e}_c(t)$, $\mathbf{e}_s(t)$ sono lentamente variabili, allora possiamo considerarli costanti in un periodo. Pertanto, limitatamente a un periodo, il campo aleatorio $\mathbf{e}(t)$ può essere rappresentato da

$$\mathbf{e}(t) = \tilde{\mathbf{A}} \cos \omega_0 t - \tilde{\mathbf{B}} \sin \omega_0 t \quad (58)$$

dove $\tilde{\mathbf{A}}$ e $\tilde{\mathbf{B}}$ sono due variabili aleatorie, date dal valore dei campi aleatori $\mathbf{e}_c(t)$, $\mathbf{e}_s(t)$ al centro del periodo. In altri termini, la parte aleatoria del campo $\mathbf{e}(t)$, esaminato su un periodo (e quindi dato da (58)) è racchiusa nelle variabili aleatorie reali $\tilde{\mathbf{A}}$ e $\tilde{\mathbf{B}}$, o meglio nella variabile complessa $\tilde{\mathbf{A}} + j\tilde{\mathbf{B}}$ (corrispondente a 3 V.A. reali). Equivalentemente possiamo usare le (17) per descrivere il campo tramite le V.A. a_x , a_y e δ_x , δ_y . Nel seguito, anzi useremo queste ultime.

La (58) ci dice che anche per il campo aleatorio (50) si può parlare di polarizzazione, nel senso che, in un dato periodo, ogni realizzazione del campo descrive un ellisse. Naturalmente questo ellisse è aleatorio, nel senso che tutti i parametri di tale ellisse sono delle variabili aleatorie. La stazionarietà del campo aleatorio $\mathbf{e}(t)$ ha però la conseguenza che le statistiche di tutte le proprietà dell'ellisse di polarizzazione sono indipendenti dal periodo scelto. Possiamo quindi considerare un singolo periodo, ripetendo, in termini probabilistici, tutte le considerazioni fatte per la famiglia di ellissi descritte da un campo deterministico a banda stretta¹.

Ad esempio, il campo aleatorio $\mathbf{e}(t)$ sarà completamente polarizzato, con un certo stato di polarizzazione, se la probabilità che venga descritto un ellisse con quella forma e orientazione è pari a 1.

Per ciascun ellisse descritto nel periodo possiamo ovviamente considerare anche i relativi parametri di Stokes (24), che saranno anch'essi delle variabili aleatorie. Possiamo allora definire, per il campo aleatorio $\mathbf{e}(t)$, un insieme di parametri di Stokes considerando la media statistica di tali variabili aleatorie.

Si ha cioè, per definizione²

$$\begin{aligned} s_0 &= \mathcal{E}[a_x^2(t)] + \mathcal{E}[a_y^2(t)] \\ s_1 &= \mathcal{E}[a_x^2(t)] - \mathcal{E}[a_y^2(t)] \\ s_2 &= 2 \mathcal{E}[a_x(t)a_y(t) \cos [\delta_y(t) - \delta_x(t)]] \\ s_3 &= 2 \mathcal{E}[a_x(t)a_y(t) \sin [\delta_y(t) - \delta_x(t)]] \end{aligned} \quad (59)$$

Possiamo dimostrare che, anche nel caso aleatorio, vale la (48), che qui riportiamo

$$s_0^2 \geq s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$$

Considerando s_2 ed s_3 si ha, usando la "disuguaglianza di Schwartz" (vedi (A3) della appendice)

¹ Ovviamente, nel caso del segnale deterministico, la famiglia di ellissi è descritta dal campo in esame nei vari periodi successivi. Invece, nel caso di campo aleatorio, la famiglia di ellissi è descritta, nello stesso periodo, dalle varie realizzazioni del campo aleatorio.

² Se il campo aleatorio $\mathbf{e}(t)$ non fosse stazionario, allora i secondi membri delle equazioni seguenti sarebbero variabili nel tempo (meglio, da periodo a periodo). In tal caso la definizione dovrà prevedere di eseguire una ulteriore media temporale *dopo* quella statistica.

$$\begin{aligned}
s_2^2 &= 4 \left[\mathcal{E}[a_x a_y \cos [\delta_y(t) - \delta_x(t)]] \right]^2 \leq 4 \mathcal{E}[a_x^2] \mathcal{E}[a_y^2 \cos^2 [\delta_y(t) - \delta_x(t)]] \\
s_3^2 &= 4 \left[\mathcal{E}[a_x a_y \sin [\delta_y(t) - \delta_x(t)]] \right]^2 \leq 4 \mathcal{E}[a_x^2] \mathcal{E}[a_y^2 \sin^2 [\delta_y(t) - \delta_x(t)]]
\end{aligned} \tag{60}$$

Sommando le due relazioni precedenti e raccogliendo i fattori comuni segue

$$\begin{aligned}
s_2^2 + s_3^2 &\leq 4 \mathcal{E}[a_x^2] \mathcal{E}[a_y^2 \cos^2 [\delta_y(t) - \delta_x(t)]] + 4 \mathcal{E}[a_x^2] \mathcal{E}[a_y^2 \sin^2 [\delta_y(t) - \delta_x(t)]] \\
&= 4 \mathcal{E}[a_x^2] \left\{ \mathcal{E}[a_y^2 \cos^2 [\delta_y(t) - \delta_x(t)]] + \mathcal{E}[a_y^2 \sin^2 [\delta_y(t) - \delta_x(t)]] \right\} \\
&= 4 \mathcal{E}[a_x^2] \mathcal{E}[a_y^2 \cos^2 [\delta_y(t) - \delta_x(t)] + a_y^2 \sin^2 [\delta_y(t) - \delta_x(t)]] = 4 \mathcal{E}[a_x^2] \mathcal{E}[a_y^2]
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 &\leq \left\{ \mathcal{E}[a_x^2] - \mathcal{E}[a_y^2] \right\}^2 + 4 \mathcal{E}[a_x^2] \mathcal{E}[a_y^2] \\
&= \left[\mathcal{E}[a_x^2] \right]^2 - 2 \mathcal{E}[a_x^2] \mathcal{E}[a_y^2] + \left[\mathcal{E}[a_y^2] \right]^2 + 4 \mathcal{E}[a_x^2] \mathcal{E}[a_y^2] \\
&= \left[\mathcal{E}[a_x^2] \right]^2 + 2 \mathcal{E}[a_x^2] \mathcal{E}[a_y^2] + \left[\mathcal{E}[a_y^2] \right]^2 = \left\{ \mathcal{E}[a_x^2] + \mathcal{E}[a_y^2] \right\}^2 = s_0^2
\end{aligned}$$

La condizione di uguaglianza $s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$ richiede che nelle due (60) valga l'uguaglianza, ovvero che (vedi (A4) della appendice) esistano due numeri reali α_1 ed α_2 tali che³

$$a_y \cos [\delta_y(t) - \delta_x(t)] = \alpha_1 a_x \quad a_y \sin [\delta_y(t) - \delta_x(t)] = \alpha_2 a_x \tag{61}$$

con probabilità 1. Sommando la seconda equazione (moltiplicata per j) alla prima, e dividendo per a_x segue

$$\frac{a_y}{a_x} \exp \{j [\delta_y(t) - \delta_x(t)]\} = \alpha_1 + j \alpha_2 = q e^{j\delta}$$

dove q e δ (modulo e fase del secondo membro) sono stati introdotti in analogia al caso deterministico. Segue allora

$$q = \frac{a_y}{a_x} \quad \delta = \delta_y(t) - \delta_x(t)$$

entrambi costanti nel tempo. Le (61) diventano allora

$$a_y \cos [\delta_y(t) - \delta_x(t)] = q \cos \delta a_x \quad a_y \sin [\delta_y(t) - \delta_x(t)] = q \sin \delta a_x \tag{62}$$

Sostituendo le (62) nelle (23,22), si ottengono le due variabili aleatorie ψ e χ , forma e orientazione dell'ellisse:

³ In generale α_1 ed α_2 sarebbero dipendenti dal periodo considerato. Tuttavia, per campi stazionari, sono costanti.

$$\begin{aligned}\tan 2\psi &= \frac{2a_x a_y \cos [\delta_y(t) - \delta_x(t)]}{(a_x^2 - a_y^2)} = \frac{2q \cos \delta \frac{a_x^2}{a_x^2 - q^2 a_x^2}}{1 - q^2} = \frac{2q \cos \delta}{1 - q^2} \\ \sin 2\chi &= \frac{2a_x a_y \sin [\delta_y(t) - \delta_x(t)]}{(a_x^2 + a_y^2)} = \frac{2q \sin \delta \frac{a_x^2}{a_x^2 + q^2 a_x^2}}{1 + q^2} = \frac{2q \sin \delta}{1 + q^2}\end{aligned}$$

Forma e orientazione dell'ellisse sono quindi costanti con probabilità 1 e il campo è pertanto completamente polarizzato.

Per un campo completamente polarizzato, i parametri di Stokes diventano, usando le (62),

$$\begin{aligned}s_0 &= \mathcal{E}[a_x^2] (1 + q^2) \\ s_1 &= \mathcal{E}[a_x^2] (1 - q^2) \\ s_2 &= \mathcal{E}[a_x^2] 2q \cos \delta \\ s_3 &= \mathcal{E}[a_x^2] 2q \sin \delta\end{aligned}\tag{*a}$$

analoghe alle (49) del caso deterministico.

11 POTENZA RICEVUTA DA UN SENSORE

Dal corso di campi sappiamo che una antenna in ricezione (sensore) che riceve un campo sinusoidale può essere modellato usando il teorema di Thevenin come in Fig. 1a. La Z_A è la impedenza di ingresso del sensore, e V_0 la tensione a vuoto sinusoidale, che vale

$$V_0 = \mathbf{h} \cdot \mathbf{E}\tag{63}$$

dove \mathbf{h} è l'altezza efficace del sensore (in generale variabile con la frequenza). Il campo **incidente** \mathbf{E} è il campo in assenza del sensore, e deve essere una onda localmente piana.

Nel caso di segnali non monocromatici, deterministici o aleatori, il teorema di Thevenin è ancora valido. Tuttavia, per la ricezione di un campo non monocromatico da parte di una antenna, non può essere formulato in termini di impedenza Z_A . Andrebbe infatti applicato nel Dominio del Tempo, e quindi come in Fig. 1b, in cui il blocco **S** corrisponde allo spazio *visto* attraverso i morsetti della antenna¹.

¹ Evidentemente, il circuito di Fig. 1b vale anche per campi sinusoidali. In tal caso, guardando nei morsetti della antenna si vede una impedenza Z_A , e il blocco **S** può essere sostituito da questa impedenza, riottenendo il circuito di Fig. 1a.

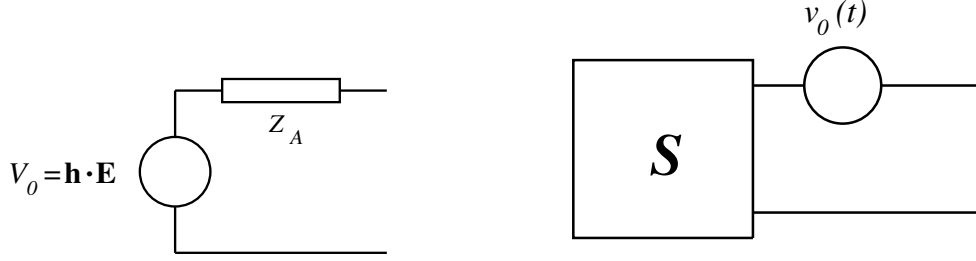


Fig. 1: a) Circuito equivalente del sensore per segnali sinusoidali;
b) Circuito equivalente del sensore per segnali generici.

Tuttavia è possibile semplificare il problema operando con le trasformate di Fourier. La (63) è anche la relazione tra ciascuna componente di Fourier del campo incidente e della tensione a vuoto. In altri termini si può considerare il sensore come un sistema con ingresso il campo incidente $\mathbf{e}(t)$ e uscita la tensione a vuoto $v(t)$, come in Fig. 2.

L'altezza efficace $\mathbf{h}(\omega)$, alle varie frequenze, risulta essere la risposta armonica di questo sistema. Pertanto la trasformata $\hat{V}(\omega)$ della tensione a vuoto $v(t)$ vale

$$\hat{V}(\omega) = \mathbf{h}(\omega) \cdot \hat{\mathbf{E}}(\omega) \quad (64)$$

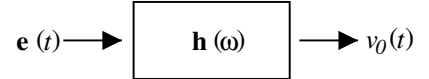


Fig. 2.

essendo $\hat{\mathbf{E}}(\omega)$ la trasformata del campo incidente $\mathbf{e}(t)$. Analogamente, per ogni frequenza, si può considerare la impedenza di ingresso della antenna (ovvero del blocco \mathbf{S} di Fig. 1b) $Z_A(\omega)$. In realtà, con ottima approssimazione, si può assumere l'impedenza di ingresso della antenna reale e costante con ω in tutto l'intervallo di funzionamento della antenna²: $Z_A(\omega) = R_A$.

Nella ipotesi precedente, è possibile collegare il sensore a un carico reale e costante R_A adattato al sensore, come in Fig. 3. In questo caso la potenza istantanea consegnata al carico vale

$$\begin{aligned} P(t) &= v_L(t) i_L(t) = \left(\frac{1}{2} v(t) \right) \left(\frac{v(t)}{2R_A} \right) \\ &= \frac{1}{4R_A} v^2(t) \end{aligned} \quad (65)$$

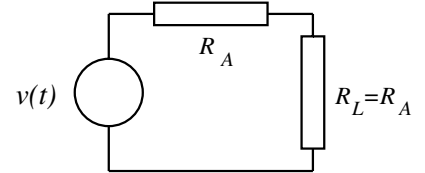


Fig. 3: Sensore collegato a un carico adattato.

essendo $v_L(t)$ ed $i_L(t)$ tensione e corrente sul carico.

Se il campo incidente è a banda stretta, con banda $2\Delta\omega$ attorno alla frequenza portante ω_0 , allora anche la tensione a vuoto lo è, ed è quindi rappresentabile come in (32)

$$v(t) = \text{Re}[(v_c(t) + jv_s(t)) e^{j\omega_0 t}] = v_c(t) \cos \omega_0 t - v_s(t) \sin \omega_0 t$$

in cui dalla (31)

² In realtà le antenne vengono realizzate in modo da avere una impedenza di ingresso sostanzialmente costante e reale, mediante un opportuno circuito di adattamento. Quindi stiamo solo supponendo che il circuito di adattamento sia perfetto.

$$\begin{aligned}
v_c(t) + jv_s(t) &= \int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} 2 \hat{V}(\omega_0 + \sigma) e^{j\sigma t} \frac{d\sigma}{2\pi} \\
&= \int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} 2 \mathbf{h}(\omega_0 + \sigma) \cdot \hat{\mathbf{E}}(\omega_0 + \sigma) e^{j\sigma t} \frac{d\sigma}{2\pi}
\end{aligned} \tag{66}$$

Ovviamente, se $\mathbf{e}(t)$ è un campo aleatorio, stazionario e gaussiano, anche la tensione a vuoto lo è, ed avrà ovviamente anch'esso media nulla.

Possiamo supporre che, nella banda del campo, $\mathbf{h}(\omega)$ sia costante³. Nella (66) l'altezza efficace va quindi fuori dall'integrale e segue

$$v_c(t) + jv_s(t) = \mathbf{h} \cdot \int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} 2 \hat{\mathbf{E}}(\omega_0 + \sigma) e^{j\sigma t} \frac{d\sigma}{2\pi} = \mathbf{h} \cdot [\mathbf{e}_c(t) + j\mathbf{e}_s(t)] \tag{67}$$

Sostituiamo le componenti del campo (35)

$$\mathbf{e}_c(t) + j\mathbf{e}_s(t) = a_x(t)e^{j\delta_x(t)}\mathbf{i}_x + a_y(t)e^{j\delta_y(t)}\mathbf{i}_y$$

e della altezza efficace

$$\mathbf{h} = h_0 \cos \theta \mathbf{i}_x + h_0 \sin \theta e^{j\varepsilon} \mathbf{i}_y \tag{68}$$

essendo h_0 il modulo della altezza efficace. Si trova così

$$v_c(t) + jv_s(t) = h_0 \left[a_x(t)e^{j\delta_x(t)} \cos \theta + a_y(t)e^{j(\delta_y(t)+\varepsilon)} \sin \theta \right] \tag{69}$$

Dalla (69) è possibile calcolare la tensione $v(t)$ dalla (32) e quindi la potenza istantanea dalla (65). Evidentemente, in caso di segnale aleatorio, entrambe queste grandezze sono anch'esse aleatorie e stazionarie⁴.

Il valor medio statistico della potenza è dato dalla (57)

$$\mathcal{E}[P(t)] = \frac{1}{4R_A} \mathcal{E}[v^2(t)] = \frac{1}{4R_A} R_{vv}(0) = \frac{1}{4R_A} R_{cc}(0) \tag{70}$$

dove

$$R_{cc}(0) = \frac{1}{2} [R_{cc}(0) + R_{ss}(0)] = \frac{1}{2} \mathcal{E}[v_c^2(t) + v_s^2(t)] = \frac{1}{2} \mathcal{E}[|v_c(t) + jv_s(t)|^2]$$

Usando la (69) segue che

$$\mathcal{E}[P(t)] = \frac{1}{8R_A} h_0^2 \mathcal{E} \left[\left| a_x(t)e^{j\delta_x(t)} \cos \theta + a_y(t)e^{j[\delta_y(t)+\varepsilon]} \sin \theta \right|^2 \right]$$

³ I sensori tipici sono riflettori, o allineamenti. Per tali sensori l'area efficace è sostanzialmente costante con la frequenza. Inoltre anche l'ingresso viene adattato a una impedenza costante (tipicamente di 50 Ω). Pertanto anche il modulo della altezza efficace è costante. L'ipotesi fatta nel testo è quindi, sostanzialmente, solo sulla costanza della polarizzazione di $\mathbf{h}(\omega)$.

⁴ Si noti che, come verrà mostrato nel capitolo sulla radiometria, risulta che se la tensione a vuoto $v_c(t) + jv_s(t)$ in un dato istante è una V.A. complessa gaussiana, allora la potenza è una V.A. esponenziale. Tuttavia, in questo paragrafo ci interesserà solo il valor medio della potenza, e non la sua *pdf*.

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}[P(t)] &= \frac{1}{8R_A} h_0^2 \mathcal{E} \left[\left| a_x(t) e^{j\delta_x(t)} \cos \theta + a_y(t) e^{j[\delta_y(t)+\varepsilon]} \sin \theta \right|^2 \right] \\
&= A_e \frac{1}{2\zeta} \mathcal{E} \left[a_x^2(t) \cos^2 \theta + a_y^2(t) \sin^2 \theta + 2a_x(t)a_y(t) \cos \theta \sin \theta \cos [\delta_y(t) - \delta_x(t) + \varepsilon] \right] \\
&= A_e \frac{1}{2\zeta} \left[\mathcal{E} [a_x^2(t)] \cos^2 \theta + \mathcal{E} [a_y^2(t)] \sin^2 \theta + \mathcal{E} [a_x(t)a_y(t) \cos [\delta_y(t) - \delta_x(t) + \varepsilon]] \sin 2\theta \right]
\end{aligned} \tag{71}$$

avendo utilizzato l'area efficace del sensore

$$A_e = \frac{\zeta h_0^2}{4R_A}$$

costante con la frequenza nelle ipotesi fatte.

La (71) può essere espressa in termini dei parametri di Stokes del campo incidente. Dalla (59) segue che

$$\mathcal{E} [a_x^2(t)] = \frac{s_0 + s_1}{2} \quad \mathcal{E} [a_y^2(t)] = \frac{s_0 - s_1}{2}$$

mentre

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} [a_x(t)a_y(t) \cos [\delta_y(t) - \delta_x(t) + \varepsilon]] &= \mathcal{E} [a_x(t)a_y(t) \cos [\delta_y(t) - \delta_x(t)]] \cos \varepsilon \\
&\quad - \mathcal{E} [a_x(t)a_y(t) \sin \cos [\delta_y(t) - \delta_x(t)]] \sin \varepsilon \\
&= \frac{1}{2} (s_2 \cos \varepsilon - s_3 \sin \varepsilon)
\end{aligned}$$

Sostituendo nella (71) si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}[P(t)] &= \frac{1}{2} A_e \frac{1}{2\zeta} \left[(s_0 + s_1) \cos^2 \theta + (s_0 - s_1) \sin^2 \theta + (s_2 \cos \varepsilon - s_3 \sin \varepsilon) \sin 2\theta \right] \\
&= \frac{1}{2} A_e \frac{1}{2\zeta} \left[s_0 + \cos 2\theta s_1 + \sin 2\theta (s_2 \cos \varepsilon - s_3 \sin \varepsilon) \right]
\end{aligned} \tag{72}$$

Il valor medio del vettore di Poynting incidente è dato dalla analoga della (39), che possiamo esprimere in termini di parametri di Stokes come

$$\mathcal{E}[S_i] = \frac{1}{2\zeta} \left[\mathcal{E}[a_x^2(t)] + \mathcal{E}[a_y^2(t)] \right] = \frac{s_0}{2\zeta}$$

e quindi possiamo riscrivere la potenza media ricevuta (72) come

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}[P(t)] &= \frac{1}{2} A_e \mathcal{E}[S_i] \frac{s_0 + \cos 2\theta s_1 + \sin 2\theta (s_2 \cos \varepsilon - s_3 \sin \varepsilon)}{s_0} \\
&= \frac{1}{2} A_e \mathcal{E}[S_i] \left[1 + \cos 2\theta \frac{s_1}{s_0} + \sin 2\theta \cos \varepsilon \frac{s_2}{s_0} - \sin 2\theta \sin \varepsilon \frac{s_3}{s_0} \right]
\end{aligned} \tag{73}$$

Un campo si dice **completamente non polarizzato** se la potenza media ricevuta da un sensore è indipendente dalla polarizzazione di quest'ultimo, ovvero dai parametri θ ed ε della (68). Dalla (72) segue allora che la condizione di completa non polarizzazione è :

$$s_1 = s_2 = s_3 = 0 \quad (74)$$

Nel caso di campo incidente completamente non polarizzato la (73) fornisce:

$$\mathcal{E}[P(t)] = \frac{1}{2} A_e \mathcal{E}[S_i] \quad (75)$$

Possiamo introdurre, usando le (24), i parametri di Stokes della antenna ricevente (come parametri del campo prodotto in trasmissione da questa antenna)

$$\begin{aligned} s_0^R &= |h_0|^2 \\ s_1^R &= |h_0|^2 \cos 2\theta \\ s_2^R &= 2|h_0|^2 \cos \theta \sin \theta \cos \varepsilon = |h_0|^2 \sin 2\theta \cos \varepsilon \\ s_3^R &= 2|h_0|^2 \cos \theta \sin \theta \sin \varepsilon = |h_0|^2 \sin 2\theta \sin \varepsilon \end{aligned} \quad (76)$$

ottenendo

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[P(t)] &= \frac{1}{2} A_e \mathcal{E}[S_i] \left[1 + \frac{s_1^R}{s_0^R} \frac{s_1}{s_0} + \frac{s_2^R}{s_0^R} \frac{s_2}{s_0} - \frac{s_3^R}{s_0^R} \frac{s_3}{s_0} \right] \\ &= \frac{1}{2} A_e \mathcal{E}[S_i] \frac{s_0 s_0^R + s_1 s_1^R + s_2 s_2^R - s_3 s_3^R}{s_0 s_0^R} \end{aligned} \quad (77)$$

Se il campo incidente è completamente polarizzato, il massimo di $\mathcal{E}[P(t)]$ si ha per (disuguaglianza di Schwartz)

$$\left(s_0, s_1, s_2, s_3 \right) = \alpha \left(s_0^R, s_1^R, s_2^R, -s_3^R \right) \quad (78)$$

con α costante reale, che è la *condizione di adattamento in polarizzazione*. Se vale questa condizione, l'ultimo fattore nella (77) vale 2, e si ottiene la relazione

$$\mathcal{E}[P(t)]_{max} = A_e \mathcal{E}[S_i] \quad (79)$$

che generalizza la condizione di massima potenza per campi sinusoidali adattati in potenza.

Segue dalle (75,79) che quando il campo è completamente non polarizzato, si ottiene (qualunque sia la polarizzazione del sensore) sempre la metà della potenza che si otterrebbe se il campo fosse completamente polarizzato ed il sensore fosse adattato in polarizzazione al campo.

Nel caso generale possiamo introdurre un fattore di depolarizzazione $K_p \in [0, 1]$, definito da

$$\mathcal{E}[P(t)] = K_p A_e \mathcal{E}[S_i] \quad (80)$$

Pertanto il fattore di depolarizzazione vale, in termini dei parametri di Stokes

$$K_p = \frac{1}{2} \frac{s_0 s_0^R + s_1 s_1^R + s_2 s_2^R - s_3 s_3^R}{s_0 s_0^R}$$

Si noti nella (78) il segno opposto nei termini che coinvolgono s_3 . Esso è dovuto al fatto che i parametri di Stokes rappresentano il campo come visto dal sensore.

Nel nostro caso, quindi, il campo incidente è visto dalla antenna ricevente, mentre il campo irradiato da tale antenna, usato per calcolare $(s_0^R, s_1^R, s_2^R, s_3^R)$, è visto dall'infinito, e quindi ha verso di rotazione opposto.

Il campo della figura 1 risulta levogiro se osservato da B , e destrogiro se osservato da A . Pertanto si ha

$$s_3^{(A)} < 0 \quad s_3^{(B)} > 0$$

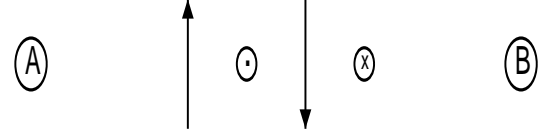


Fig. 1: Osservazioni diverse dello stesso campo.

Concludiamo notando che, nel caso di campi deterministici, tutti i risultati di questo paragrafo restano validi a patto di sostituire le medie statistiche con medie nel tempo, definite da (37). Ovviamente, i risultati in termini di parametri di Stokes restano inalterati.

12 DECOMPOSIZIONE DI CAMPI

Consideriamo ora il caso in cui il campo incidente $\mathbf{e}(t)$ è la somma di N campi aleatori (tutti con la stessa direzione di propagazione) ma *statisticamente indipendenti*, o almeno incorrelati. Allora anche la tensione a vuoto è la somma di N tensioni

$$\mathbf{e}(t) = \sum_n \mathbf{e}^{(n)}(t) \quad \implies \quad v(t) = \sum_n v^{(n)}(t)$$

Per calcolare la potenza media usiamo la (70). La autocorrelazione della tensione a vuoto vale

$$R_{vv}(\tau) = \mathcal{E} \left[\sum_n v^{(n)}(t) \sum_m v^{(m)}(t + \tau) \right] = \sum_{n,m} R_{nm}(\tau)$$

Poichè le tensioni parziali sono incorrelate e a media nulla, allora $R_{nm}(\tau) = 0$ se $n \neq m$, e segue

$$\mathcal{E}[P(t)] = \frac{1}{4R_A} R_{vv}(0) = \frac{1}{4R_A} \sum_n R_{nn}(0) = \sum_n \mathcal{E}[P_n(t)]$$

essendo $P_n(t)$ la potenza dovuta al solo campo n -esimo. Sia la potenza media totale, sia la potenza media del campo n -esimo possono essere espresse tramite la (72). Si ha così:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[P(t)] &= \sum_n \mathcal{E}[P_n(t)] = \sum_n \frac{1}{2} A_e \frac{1}{2\zeta} \left[s_0^{(n)} + \cos 2\theta s_1^{(n)} + \sin 2\theta (s_2^{(n)} \cos \varepsilon - s_3^{(n)} \sin \varepsilon) \right] \\ &= \frac{1}{2} A_e \frac{1}{2\zeta} \left[\sum_n s_0^{(n)} + \cos 2\theta \sum_n s_1^{(n)} + \sin 2\theta \left(\sum_n s_2^{(n)} \cos \varepsilon - \sum_n s_3^{(n)} \sin \varepsilon \right) \right] \end{aligned}$$

Confrontando con la (72) si ha allora

$$s_0 = \sum_n s_0^{(n)} \quad s_1 = \sum_n s_1^{(n)} \quad s_2 = \sum_n s_2^{(n)} \quad s_3 = \sum_n s_3^{(n)} \quad (81)$$

Dalla (81) segue che i parametri di Stokes del campo somma di campi incorrelati sono dati dalla somma dei parametri dei campi parziali.

Le (81) possono anche essere interpretate al contrario. Un qualunque campo può essere sempre decomposto nella somma di due o più campi tra loro statisticamente indipendenti.

La decomposizione più semplice di un campo, di parametri di Stokes (s_0, s_1, s_2, s_3) , è in un campo completamente polarizzato, di parametri di Stokes $(s_0^P, s_1^P, s_2^P, s_3^P)$, e uno completamente non polarizzato, di parametri di Stokes $(s_0^N, 0, 0, 0)$.

I vincoli sono $s_0 = s_0^P + s_0^N$, $s_i = s_i^P$ con $i \geq 1$, e il vincolo di completa polarizzazione $(s_0^P)^2 = (s_1^P)^2 + (s_2^P)^2 + (s_3^P)^2$. Si ha pertanto

$$s_0^P = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \quad s_1^P = s_1 \quad s_2^P = s_2 \quad s_3^P = s_3 \quad s_0^N = s_0 - s_0^P \quad (82)$$

Questa decomposizione giustifica il nome di *campo parzialmente polarizzato* dato a tutti quei campi che non sono nè completamente polarizzati, nè completamente non polarizzati. Si definisce *grado di polarizzazione* di un campo generico il parametro

$$m = \frac{s_0^P}{s_0} = \frac{s_0^P}{s_0^P + s_0^N} = \frac{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}}{s_0}$$

che rappresenta la frazione della potenza che viaggia come campo polarizzato. La polarizzazione della parte polarizzata viene indicata come polarizzazione del campo parzialmente polarizzato, e forma e orientazione dell'ellisse di polarizzazione della parte polarizzata si ottengono dalle (27), usando i parametri di Stokes $(s_0^P, s_1^P, s_2^P, s_3^P)$.

La decomposizione più interessante è invece quella in due onde con stati di polarizzazione opposti.

Due onde completamente polarizzate si dicono avere stati di polarizzazione opposti se

- i) hanno lo stesso rapporto assiale e verso di percorrenza opposto;
- ii) i semiassi maggiori dei due ellissi sono tra loro ortogonali.

In termini degli angoli (ψ, χ) si ha

- i) $\chi_2 = -\chi_1$
- ii) $\psi_2 = \psi_1 + \frac{\pi}{2}$

Coppie di polarizzazioni che rientrano in tale categoria sono le due polarizzazioni circolari (RHCP e LHCP) oppure coppie di polarizzazioni lineari ortogonali, ad esempio orizzontale (H) e verticale (V) relative alla superficie terrestre (che, più precisamente, sono le polarizzazioni TE e TM).

Dalle (28) segue, per il campo 1

$$\frac{s_1^{(1)}}{s_0^{(1)}} = \cos 2\chi_1 \cos 2\psi_1 \quad \frac{s_2^{(1)}}{s_0^{(1)}} = \cos 2\chi_1 \sin 2\psi_1 \quad \frac{s_3^{(1)}}{s_0^{(1)}} = \sin 2\chi_1$$

e per il campo 2

$$\begin{aligned}
\frac{s_1^{(2)}}{s_0^{(2)}} &= \cos 2\chi_2 \cos 2\psi_2 = \cos(-2\chi_1) \cos 2\left(\psi_1 + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2\chi_1 (-\cos 2\psi_1) = -\frac{s_1^{(1)}}{s_0^{(1)}} \\
\frac{s_2^{(2)}}{s_0^{(2)}} &= \cos 2\chi_2 \sin 2\psi_2 = \cos(-2\chi_1) \sin 2\left(\psi_1 + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2\chi_1 (-\sin 2\psi_1) = -\frac{s_2^{(1)}}{s_0^{(1)}} \\
\frac{s_3^{(2)}}{s_0^{(2)}} &= \sin 2\chi_2 = \sin(-2\chi_1) = -\sin 2\chi_1 = -\frac{s_3^{(1)}}{s_0^{(1)}}
\end{aligned} \tag{83}$$

Pertanto i parametri di Stokes normalizzati di due onde con stati di polarizzazione opposti sono di valore opposto.

Segue allora immediatamente che una onda completamente non polarizzata può essere sempre decomposta nella somma di due onde indipendenti e con stati di polarizzazione opposti, e di **pari ampiezza**.

Ad esempio, nel caso di polarizzazioni lineari lungo x e y

$$(s_0, 0, 0, 0) = \left(\frac{s_0}{2}, \frac{s_0}{2}, 0, 0\right) + \left(\frac{s_0}{2}, -\frac{s_0}{2}, 0, 0\right)$$

e nel caso di polarizzazioni LHCP e RHCP

$$(s_0, 0, 0, 0) = \left(\frac{s_0}{2}, 0, 0, \frac{s_0}{2}\right) + \left(\frac{s_0}{2}, 0, 0, -\frac{s_0}{2}\right)$$

Se invece l'onda da decomporre non è completamente non polarizzata, allora non è possibile né scegliere la polarizzazione, né l'ampiezza delle due onde componenti. Per calcolare questa decomposizione, utilizziamo in cascata le due decomposizioni viste precedentemente.

Siano (s_0, s_1, s_2, s_3) i parametri di Stokes dell'onda da decomporre, e sia m il suo grado di polarizzazione. Possiamo usare la (82) e scrivere

$$(s_0, s_1, s_2, s_3) = (ms_0, s_1, s_2, s_3) + ((1-m)s_0, 0, 0, 0) \tag{84}$$

La parte completamente non polarizzata può poi essere decomposta in due onde di pari ampiezza, e con polarizzazione opposta. In particolare scegliamo come prima polarizzazione quella (parziale) della onda di partenza, ovvero quella della prima delle due onde componenti della (84).

$$((1-m)s_0, 0, 0, 0) = \left(\frac{(1-m)}{2}s_0, s_1^X, s_2^X, s_3^X\right) + \left(\frac{(1-m)}{2}s_0, -s_1^X, -s_2^X, -s_3^X\right) \tag{85}$$

col vincolo che

$$\frac{s_i}{ms_0} = \frac{s_i^X}{\frac{(1-m)}{2}s_0} \implies s_i^X = \frac{(1-m)}{2m} s_i \quad i = 1, 2, 3 \tag{86}$$

Sostituendo le (86) nella (85) e sommando alla (84) si ha

$$\begin{aligned}
(s_0, s_1, s_2, s_3) &= (ms_0, s_1, s_2, s_3) + \left(\frac{(1-m)}{2}s_0, \frac{(1-m)}{2m}s_1, \frac{(1-m)}{2m}s_2, \frac{(1-m)}{2m}s_3\right) \\
&\quad + \left(\frac{(1-m)}{2}s_0, -\frac{(1-m)}{2m}s_1, -\frac{(1-m)}{2m}s_2, -\frac{(1-m)}{2m}s_3\right)
\end{aligned} \tag{87}$$

Le due onde del primo rigo hanno la stessa polarizzazione e possono quindi essere sommate. Poiché

$$ms_0 + \frac{(1-m)}{2}s_0 = \frac{(1+m)}{2}s_0 \quad \text{e} \quad s_i + \frac{(1-m)}{2m}s_i = \frac{(1+m)}{2m}s_i \quad i = 1, 2, 3$$

segue quindi la decomposizione cercata

$$\begin{aligned} (s_0, s_1, s_2, s_3) = & \left(\frac{(1+m)}{2}s_0, \frac{(1+m)}{2m}s_1, \frac{(1+m)}{2m}s_2, \frac{(1+m)}{2m}s_3 \right) \\ & + \left(\frac{(1-m)}{2}s_0, -\frac{(1-m)}{2m}s_1, -\frac{(1-m)}{2m}s_2, -\frac{(1-m)}{2m}s_3 \right) \end{aligned} \quad (88)$$

La decomposizione (88) fissa quindi la polarizzazione delle onde componenti, e non é perciò utile per analizzare problemi di interazione con interfacce piane, in cui una decomposizione in campi *TE* e *TM* é necessaria. Se evitiamo di richiedere che le onde componenti siano indipendenti, allora un qualunque campo completamente polarizzato può sempre essere decomposto nella somma di due campi con polarizzazione scelta arbitrariamente (in particolare entrambi polarizzati linearmente, uno lungo x e uno lungo y), con coefficiente di correlazione pari a 1.

Prendiamo un qualunque campo completamente polarizzato, e invertiamo le (*a):

$$\begin{aligned} \delta &= \arg[s_2 + js_3] \\ q^2 &= \frac{1 - \frac{s_1}{s_0}}{1 + \frac{s_1}{s_0}} = \frac{s_0 - s_1}{s_0 + s_1} \\ \mathcal{E}[a_x^2] &= \frac{s_0}{1 + q^2} \end{aligned} \quad (89)$$

con $q > 0$.

Determinati questi parametri, il campo sottostante sarà

$$\mathbf{E}(t) = a_x(t) \left[\mathbf{i}_x + q e^{j\delta} \mathbf{i}_y \right] \quad (90)$$

e basterá decomporre la grandezza tra parentesi quadra della (64) nelle due polarizzazioni richieste (se queste sono le polarizzazioni lineari lungo x e lungo y , la decomposizione é immediata).

APPENDICE 1: IL CAMPO DESCRIVE UN ELLISSE

Abbiamo visto che un vettore sinusoidale puro come $\mathbf{e}(t)$ è una funzione periodica del tempo, per cui il suo estremo descrive, nel piano di polarizzazione, una curva chiusa al variare del tempo.

Dimostriamo che tale curva è un ellisse.

Se scegliamo un sistema di riferimento centrato in P , le coordinate $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ dell'estremo del vettore $\mathbf{e}(t)$ sono date da:

$$\begin{aligned}\mathcal{X} &= A_x \cos \omega_0 t - B_x \sin \omega_0 t \\ \mathcal{Y} &= A_y \cos \omega_0 t - B_y \sin \omega_0 t\end{aligned}\tag{91}$$

Possiamo passare da queste equazioni (parametriche) alle equazioni esplicite della curva eliminando il parametro t . Per fare questo possiamo risolvere le (91) rispetto a $\cos \omega_0 t$ e $\sin \omega_0 t$, e poi sfruttare la relazione

$$\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t = 1$$

Risolvendo le (91) col metodo di Cramer si ottiene

$$\begin{aligned}\cos \omega_0 t &= \frac{1}{D} (B_x \mathcal{Y} - B_y \mathcal{X}) \\ \sin \omega_0 t &= \frac{1}{D} (A_x \mathcal{Y} - A_y \mathcal{X})\end{aligned}$$

essendo $D = B_x A_y - B_y A_x$ il determinante del sistema. Quadrando e sommando si ottiene

$$(B_x \mathcal{Y} - B_y \mathcal{X})^2 + (A_x \mathcal{Y} - A_y \mathcal{X})^2 = D^2$$

ovvero

$$(A_y^2 + B_y^2) \mathcal{X}^2 - 2(A_x A_y + B_x B_y) \mathcal{X} \mathcal{Y} + (A_x^2 + B_x^2) \mathcal{Y}^2 = D^2\tag{92}$$

che è l'equazione di un ellisse.

APPENDICE 2: CALCOLO DEL RAPPORTO ASSIALE

Per calcolare il rapporto assiale cominciamo col notare che la lunghezza del semi-asse maggiore dell'ellisse di polarizzazione è nient'altro che la massima distanza tra un punto qualunque dell'ellisse e l'origine; naturalmente la lunghezza del semiasse minore ne è la minima distanza. Detto (x, y) un punto dell'ellisse, occorre allora trovare il massimo, oppure il minimo, di

$$x^2 + y^2$$

col vincolo che (x, y) appartenga all'ellisse, ovvero soddisfi all'equazione

$$(A_y^2 + B_y^2)x^2 + (A_x^2 + B_x^2)y^2 - 2(A_xA_y + B_xB_y)xy = D^2 \quad (93)$$

essendo $D^2 = (A_xB_y - A_yB_x)^2$.

Possiamo esprimere il problema precedente in termini matriciali. Introduciamo il vettore *numerico*

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (94)$$

in modo che la distanza del punto (x, y) dall'origine sia la norma di $\hat{\mathbf{x}}$:

$$x^2 + y^2 = \hat{\mathbf{x}}^T \cdot \hat{\mathbf{x}} = \|\hat{\mathbf{x}}\|^2 \quad (95)$$

e la matrice

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} A_y^2 + B_y^2 & -(A_xA_y + B_xB_y) \\ -(A_xA_y + B_xB_y) & A_x^2 + B_x^2 \end{pmatrix} \quad (96)$$

che consente di esprimere l'equazione dell'ellisse come

$$\hat{\mathbf{x}}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{x}} = D^2 \quad (97)$$

Il nostro problema di massimizzazione vincolata puo' essere allora espresso come

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbf{x}}^T \cdot \mathbf{I} \cdot \hat{\mathbf{x}} \quad \max! \\ \text{s.a.} \quad & \hat{\mathbf{x}}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{x}} = D^2 \end{aligned} \quad (98)$$

essendo \mathbf{I} la matrice identità (tale che $\mathbf{I} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}$).

Questo problema può essere ricondotto a un problema di massimizzazione libera introducendo un opportuno moltiplicatore di Lagrange λ e massimizzando

$$\hat{\mathbf{x}}^T \cdot \mathbf{I} \cdot \hat{\mathbf{x}} - \frac{1}{\lambda} [\hat{\mathbf{x}}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{x}} - D^2] \quad (99)$$

Il massimo di questa funzione di più variabili si ottiene imponendo che il suo gradiente (rispetto alle sue variabili) sia nullo. La funzione è una forma quadratica a coefficienti reali, con la matrice \mathbf{G} simmetrica. Per calcolare il gradiente di $\hat{\mathbf{x}}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{x}}$ consideriamo una variazione $\delta\hat{\mathbf{x}}$ e la corrispondente variazione della funzione

$$[\hat{\mathbf{x}} + \delta\hat{\mathbf{x}}]^T \cdot \mathbf{G} \cdot [\hat{\mathbf{x}} + \delta\hat{\mathbf{x}}] - \hat{\mathbf{x}}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{x}}$$

Sviluppando, e limitandosi ai termini di ordine 1, si trova

$$[\hat{\mathbf{x}}]^T \cdot \mathbf{G} \cdot [\delta\hat{\mathbf{x}}] + [\delta\hat{\mathbf{x}}]^T \cdot \mathbf{G} \cdot [\hat{\mathbf{x}}]$$

I due addendi sono entrambi degli scalari e quindi coincidono con i loro trasposti. Prendendo il trasposto del primo termine si trova il secondo e quindi la variazione (al primo ordine) della funzione vale

$$2 [\delta\hat{\mathbf{x}}]^T \cdot \mathbf{G} \cdot [\hat{\mathbf{x}}]$$

Risulta quindi (per ogni matrice \mathbf{G})

$$\text{grad} \left[\hat{\mathbf{x}}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{x}} \right] = 2\mathbf{G} \cdot [\hat{\mathbf{x}}] \quad (100)$$

Il gradiente della funzione da minimizzare è quindi

$$2 \left[\mathcal{I} \cdot \hat{\mathbf{x}} - \frac{1}{\lambda} \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{x}} \right]$$

e l'equazione che fornisce massimi e minimi risulta

$$[-\lambda \mathcal{I} + \mathbf{G}] \cdot \hat{\mathbf{x}} = 0 \quad (101)$$

Questo è un sistema lineare omogeneo che normalmente ha solo la soluzione $\hat{\mathbf{x}} = 0$, la quale però non appartiene all'ellisse di polarizzazione. Occorre pertanto che il sistema ammetta altre soluzioni, e questo avviene se λ è un'autovalore della matrice \mathbf{G} ¹.

Indichiamo allora con λ_i , $i = 1, 2$ i due autovalori della matrice \mathbf{G} . Le corrispondenti soluzioni del sistema sono nient'altro che i relativi autovettori. Ora, come è ben noto, esistono infiniti autovettori, tra loro proporzionali. Infatti, moltiplicando un'autovettore per uno scalare si otterrà ancora un'autovettore. Indichiamo allora per comodità con $\hat{\mathbf{X}}_i$ gli autovettori di norma unitaria, in modo che tutti gli autovettori siano dati da $\hat{\mathbf{x}}_i = \alpha \hat{\mathbf{X}}_i$ con α qualunque.

La soluzione del nostro problema di massimo e minimo saranno quegli autovettori corrispondenti a punti dell'ellisse di polarizzazione, ovvero per i quali

$$\hat{\mathbf{x}}_i^T \cdot \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{x}}_i = \alpha^2 \hat{\mathbf{X}}_i^T \cdot \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{X}}_i = D^2$$

D'altra parte, per ogni autovettore naturalmente varrà

$$\lambda_i \hat{\mathbf{x}}_i = \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{x}}_i$$

e quindi in particolare

$$\lambda_i \hat{\mathbf{X}}_i = \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{X}}_i$$

Moltiplicando quest'ultima a sinistra per $\hat{\mathbf{X}}_i^T$ si ottiene allora

$$\lambda_i ||\hat{\mathbf{X}}_i||^2 = \lambda_i = \hat{\mathbf{X}}_i^T \cdot \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{X}}_i$$

Sostituendo si trova

$$\alpha^2 \lambda_i = D^2$$

che fornisce l'autovettore (proporzionale a $\hat{\mathbf{X}}_i$) appartenente all'ellisse di polarizzazione:

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \frac{|D|}{\sqrt{\lambda_i}} \hat{\mathbf{X}}_i$$

La sua distanza dall'origine risulterà

$$||\hat{\mathbf{x}}_i|| = \frac{|D|}{\sqrt{\lambda_i}} ||\hat{\mathbf{X}}_i|| = \frac{|D|}{\sqrt{\lambda_i}} \quad (102)$$

dove $D = A_x B_y - A_y B_x = |E_x| |E_y| \cos(\delta_y - \delta_x)$.

¹ Un autovalore è uno zero della equazione caratteristica della matrice \mathbf{G}

Prendendo $i = 1, 2$ nella espressione precedente si ottiene la lunghezza dei due semiassi dell'ellisse di polarizzazione.

Il rapporto assiale risulterà quindi la radice quadrata del rapporto tra il maggiore e il minore dei due autovalori della matrice \mathbf{G} :

$$AR = \sqrt{\frac{\max \lambda_i}{\min \lambda_i}} \quad (103)$$

Poichè per una matrice di ordine 2, come \mathbf{G} , la equazione caratteristica coinvolge solo la traccia (somma degli elementi della diagonale principale) e il determinante di \mathbf{G} :

$$\lambda^2 - \text{tr}[\mathbf{G}] \lambda + \det[\mathbf{G}] = 0$$

matrici con la stessa traccia e determinante di \mathbf{G} hanno gli stessi autovalori, e possono essere usate per calcolare il rapporto assiale.

Essendo

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} |E_y|^2 & -\text{Re}[E_x E_y^*] \\ -\text{Re}[E_x E_y^*] & |E_x|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |E_y|^2 & -|E_x| |E_y| \cos(\delta_y - \delta_x) \\ -|E_x| |E_y| \cos(\delta_y - \delta_x) & |E_x|^2 \end{pmatrix} \quad (104)$$

è immediato che gli autovalori di questa matrice, e anche di

$$\begin{pmatrix} |E_x|^2 & -\text{Re}[E_x E_y^*] \\ -\text{Re}[E_x E_y^*] & |E_y|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x^2 + B_x^2 & -(A_x A_y + B_x B_y) \\ -(A_x A_y + B_x B_y) & A_y^2 + B_y^2 \end{pmatrix} \quad (105)$$

forniranno il rapporto assiale. Va tuttavia notato che le direzioni dei due semiassi si ottengono calcolando gli autovettori di (96) o di (104), mentre gli autovettori di (105) **non** individuano le direzioni dei semiassi.

L'espressioni finale di (104) consente di scrivere l'equazione caratteristica di \mathbf{G} direttamente in termini delle componenti di \mathbf{E} . Si ha infatti, da (104),

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{G}) &= a_x^2 a_y^2 - (-a_x a_y \cos \delta)^2 = a_x^2 a_y^2 \sin^2 \delta \\ \text{tr}(\mathbf{G}) &= a_x^2 + a_y^2 \end{aligned}$$

e l'equazione caratteristica di \mathbf{G} è

$$\lambda^2 - (a_x^2 + a_y^2)\lambda + a_x^2 a_y^2 \sin^2 \delta = 0 \quad \text{ovvero} \quad \lambda^2 - |E|^2 \lambda + a_x^2 a_y^2 \sin^2 \delta = 0 \quad (19)$$

Con qualche passaggio algebrico in più si può dimostrare che anche la matrice

$$\begin{pmatrix} |\mathbf{A}|^2 & -\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \\ -\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} & |\mathbf{B}|^2 \end{pmatrix} \quad (106)$$

ha gli stessi autovalori di \mathbf{G} , e quindi consente di calcolare il rapporto assiale, mentre ha autovettori del tutto differenti.

Dalla analisi di queste matrici è possibile riottenere le condizioni di polarizzazione lineare e circolare.

Si ha polarizzazione lineare se il rapporto assiale è infinito, ovvero se uno degli autovalori è nullo. La condizione è quindi

$$\det[\mathbf{G}] = 0$$

Si ha invece polarizzazione circolare se il rapporto assiale è unitario, ovvero se gli autovalori sono uguali. Ne segue

$$\left\{ \text{tr}[\mathbf{G}] \right\}^2 = 4 \det[\mathbf{G}]$$

Se consideriamo, ad esempio, $\mathbf{E} = E_0 (\mathbf{i}_x + j\mathbf{i}_y)$, si verifica facilmente che, a meno del fattore E_0

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi la polarizzazione è circolare. Può essere interessante valutare il massimo errore di fase ammissibile (sulla differenza di fase tra E_x ed E_y) se si richiede $AR < A_0$. In presenza di un errore di fase, il campo diventa

$$\mathbf{E} = E_0 (\mathbf{i}_x + j e^{j\psi} \mathbf{i}_y)$$

con ψ reale (e relativamente vicino a 0). Risulta

$$-\text{Re}[E_x E_y^*] = -\text{Re}[1 (-j) e^{-j\psi}] = \sin \psi$$

per cui

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & \sin \psi \\ \sin \psi & 1 \end{pmatrix}$$

L'equazione agli autovalori vale $\lambda^2 - 2\lambda + \cos^2 \psi = 0$, e quindi

$$\lambda_{1,2} = 1 \mp \sqrt{1 - \cos^2 \psi} = 1 \mp |\sin \psi|$$

Il rapporto assiale vale allora

$$AR = \sqrt{\frac{1 + |\sin \psi|}{1 - |\sin \psi|}} < A_0$$

e la specifica è soddisfatta se $(1 - |\sin \psi|)$ è positivo)

$$1 + |\sin \psi| < A_0^2 (1 - |\sin \psi|) \quad \implies \quad |\sin \psi| < \frac{A_0^2 - 1}{A_0^2 + 1}$$

Scegliendo $A_0 = 2$ la richiesta è $|\psi| < 35^\circ$, mentre per avere una polarizzazione di migliore qualità, ad esempio $A_0 = 1.2$, si richiede $|\psi| < 10^\circ$.

APPENDICE 3: ORIENTAZIONE ELLISSE

Per calcolare l'angolo di orientazione ψ dell'ellisse di polarizzazione¹, ricordiamo che un punto dell'asse maggiore dell'ellisse è dato dall'autovettore corrispondente all'autovalore più piccolo λ_1 . Se $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ è un tale punto, con $\mathcal{X} > 0$, segue

$$\tan \psi = \frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{X}}$$

Ma, per definizione di autovettore, $(a_y^2 - \lambda_1) \mathcal{X} - a_x a_y \cos \delta \mathcal{Y} = 0$, per cui

$$\tan \psi = \frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{X}} = \frac{(a_y^2 - \lambda_1)}{a_x a_y \cos \delta} \quad (107)$$

Poichè si può dimostrare che $\lambda_1 \leq a_x^2$, $a_y^2 \leq \lambda_2$, allora $\tan \psi$ ha lo stesso segno di $\cos \delta$. Una espressione diretta di $\tan \psi$ si può ottenere eliminando λ_1 dalla (107). Consideriamo

$$\tan 2\psi = \frac{2 \tan \psi}{1 - \tan^2 \psi} = \frac{2(a_y^2 - \lambda_1)}{-(a_y^2 - \lambda_1)^2 + (a_x a_y \cos \delta)^2} a_x a_y \cos \delta$$

Sviluppando il denominatore segue

$$\begin{aligned} a_x^2 a_y^2 \cos^2 \delta - a_y^4 - \lambda_1^2 + 2a_y^2 \lambda_1 &= a_x^2 a_y^2 \cos^2 \delta - a_y^4 - [(a_x^2 + a_y^2) \lambda - a_x^2 a_y^2 \sin^2 \delta] + 2a_y^2 \lambda_1 \\ &= a_x^2 a_y^2 - a_y^4 + a_y^2 \lambda_1 - a_x^2 \lambda_1 = a_x^2 (a_y^2 - \lambda_1) - a_y^2 (a_y^2 - \lambda_1) = (a_x^2 - a_y^2) (a_y^2 - \lambda_1) \end{aligned}$$

e sostituendo

$$\tan 2\psi = \frac{2(a_y^2 - \lambda_1)}{(a_x^2 - a_y^2) (a_y^2 - \lambda_1)} a_x a_y \cos \delta = \frac{2a_x a_y \cos \delta}{(a_x^2 - a_y^2)} \quad (108)$$

L'equazione (22) fornisce due valori per ψ , che differiscono di $\pi/2$, e sono gli angoli dei due semiassi con l'asse x . Come detto precedentemente, il valore relativo all'angolo del semiasse maggiore è quello che ha lo stesso segno di $\cos \delta$.

APPENDICE 4: DISUGUAGLIANZA DI SCHWARTZ

Prendiamo due segnali aleatori (reali), congiuntamente WSS, $x(t)$, $y(t)$ e consideriamo la variabile aleatoria

$$[\lambda x(t) - y(t)]^2 = \lambda^2 [x(t)]^2 - 2\lambda x(t)y(t) + [y(t)]^2 \geq 0 \quad (A0)$$

con λ numero reale, e t , istante qualunque. La media di questa quantità è

¹ Ovvimente, nel caso di polarizzazione lineare, ψ è la direzione del campo elettrico.

$$\begin{aligned} \lambda^2 \mathcal{E}[[x(t)]^2] - 2\lambda \mathcal{E}[x(t)y(t)] + \mathcal{E}[[y(t)]^2] = \\ \lambda^2 R_{xx}(0) - 2\lambda R_{xy}(0) + R_{yy}(0) \geq 0 \end{aligned} \quad (A1)$$

avendo introdotto le autocorrelazioni e la mutua correlazione.

Il polinomio (A1) ha il primo coefficiente non negativo. Pertanto esso non può avere radici reali distinte, ma solo radici complesse, o una radice reale doppia. Ne segue che il discriminante di questo polinomio deve essere negativo o nullo e quindi

$$\left[R_{xy}(0) \right]^2 \leq R_{xx}(0) R_{yy}(0) \quad (A2)$$

ovvero

$$\left[\mathcal{E}[x(t)y(t)] \right]^2 \leq \mathcal{E}[[x(t)]^2] \mathcal{E}[[y(t)]^2] \quad (A3)$$

che sono analoghe alla disuguaglianza di Schwartz, e naturalmente sono valide $\forall t$ ¹.

Ha interesse determinare le condizioni per cui, nelle (A2), ovvero (A3), valga il segno di uguaglianza, ovvero la condizione

$$R_{xy}(0) = \sqrt{R_{xx}(0) R_{yy}(0)} \quad (A4)$$

Se vale la (A4), il polinomio (A1) ha uno zero reale doppio, ovvero che esiste un *unico* valore reale λ_0 per cui la media di (A0) si annulla, $\forall t$. Pertanto

$$\mathcal{E} \left[\left[\lambda_0 x(t) - y(t) \right]^2 \right] = 0$$

La media di una grandezza non negativa è nulla solo se la grandezza stessa è nulla con probabilità 1. Quindi

$$\text{Prob} \left\{ y(t) = \lambda_0 x(t) \right\} = 1 \quad \forall t$$

ovvero i due segnali aleatori $x(t)$ e $y(t)$ sono **proporzionali**:

$$y(t) = \lambda_0 x(t) \quad \forall t \quad (A5)$$

calcolando la media di (A5) si ottiene anche il valore di λ_0

$$\overline{m_y} = \lambda_0 \overline{m_x} \quad \implies \quad \lambda_0 = \frac{\overline{m_y}}{\overline{m_x}}$$

¹ Si noti che le relazioni di questo paragrafo valgono anche per coppie di variabili aleatorie qualunque, non necessariamente ottenute campionando due segnali aleatori

APPENDICE 5: SPETTRI DI DENSITÀ DI POTENZA

Conviene esprimere la autocorrelazione di un segnale a banda stretta in termini di spettro di densità di potenza $S_{vv}(\omega)$. Considereremo solo segnali DSB, in quanto le relazioni per i segnali SSB si ottengono immediatamente (considerando la Fig. 1 del par. 9). Risulta

$$\begin{aligned} R_{vv}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{vv}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[\int_0^{+\infty} S_{vv}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[\int_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} S_{vv}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[\int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} S_{vv}(\omega_0 + \sigma) e^{j\sigma t} d\sigma e^{j\omega_0 t} \right] \end{aligned}$$

analogamente a (31). Per confronto con (*), segue

$$R_{VV}^*(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} 2S_{vv}(\omega_0 + \sigma) e^{j\sigma t} d\sigma \quad (109)$$

Tenendo conto che $S_{vv}(\omega)$ é reale, si ha poi

$$R_{vv}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} S_{vv}(\omega) \cos \omega t d\omega$$

e

$$\begin{aligned} R_{cc}(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} S_{vv}(\omega_0 + \sigma) \cos \sigma t d\sigma \\ R_{cs}(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} S_{vv}(\omega_0 + \sigma) \sin \sigma t d\sigma \end{aligned} \quad (110)$$

Per un segnale DSB, possiamo riscrivere le (110) in una forma diversa. Infatti, dividendo $S_{vv}(\omega_0 + \sigma)$ in una parte simmetrica e una antisimmetrica rispetto a σ , come in Fig. 1:

$$S_{vv}(\omega_0 + \sigma) = S_{vv}^e(\omega_0 + \sigma) + S_{vv}^o(\omega_0 + \sigma)$$

segue che nella prima delle (110) contribuisce solo S^e e nella seconda solo S^o . Possiamo allora scrivere

$$\begin{aligned} R_{cc}(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} S_{vv}^e(\omega_0 + \sigma) \cos \sigma t d\sigma = \frac{1}{\pi} \int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} S_{vv}^e(\omega_0 + \sigma) e^{j\sigma t} d\sigma \\ R_{cs}(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} S_{vv}^o(\omega_0 + \sigma) \sin \sigma t d\sigma = \frac{1}{\pi j} \int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} S_{vv}^o(\omega_0 + \sigma) e^{j\sigma t} d\sigma \end{aligned}$$

in quanto la parte aggiunta per ottenere $e^{j\sigma t}$ non contribuisce all'integrale, avendo la parità opposta al termine dello spettro.

Poiché é possibile estendere il dominio di integrazione a tutto l'asse reale (in quanto S^e e S^o sono nulli fuori da $(-\Delta\omega, \Delta\omega)$), segue che $2S_{vv}^e(\omega_0 + \sigma)$ é la trasformata di Fourier di $R_{cc}(t)$ e $2jS_{vv}^o(\omega_0 + \sigma)$ quella di $R_{cs}(t)$

Discorsi identici valgono anche per il caso SSB, dove $S_{vv}^e(\omega_0 + \sigma)$ e $S_{vv}^o(\omega_0 + \sigma)$ sono entrambe pari a $S_{vv}(\omega_0 + \sigma)/2$ per $\sigma > 0$ (mentre per $\sigma < 0$ si ottengono ribaltando la parte positiva, col giusto segno).

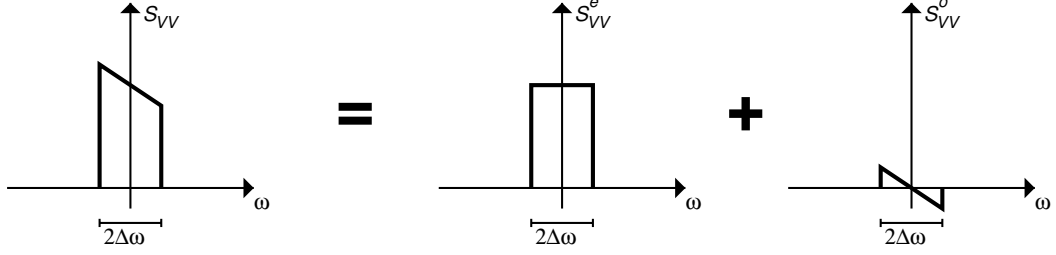


Fig. 1: Decomposizione dello spettro $S_{vv}(\omega_0 + \sigma)$ in parte simmetrica e antisimmetrica.

APPENDICE 6: PROPRIETÀ DI SEGNALI ALEATORI A BANDA STRETTA

Se calcoliamo la media di $v(t)$ usando la (53) segue

$$\mathcal{E}[v(t)] = \mathcal{E}[v_c(t)] \cos \omega_0 t - \mathcal{E}[v_s(t)] \sin \omega_0 t$$

e questa media deve essere indipendente da t . Pertanto

$$\mathcal{E}[v_c(t)] = \mathcal{E}[v_s(t)] = 0 \quad (111)$$

in quanto anche queste due medie sono costanti. Conseguenza di (53) é che anche $\mathcal{E}[v(t)] = 0$.

Per quanto riguarda la autocorrelazione, si ha, indicando con $R_{cc}(\tau)$ e simili le autocorrelazioni delle componenti in bassa frequenza, che dipendono solo da τ in quanto queste sono congiuntamente stazionarie,

$$\begin{aligned} R_{vv}(t, t + \tau) &= \mathcal{E}[v(t)v(t + \tau)] \\ &= \mathcal{E}[v_c(t)v_c(t + \tau)] \cos \omega_0 t \cos \omega_0(t + \tau) - \mathcal{E}[v_s(t)v_c(t + \tau)] \sin \omega_0 t \cos \omega_0(t + \tau) \\ &\quad - \mathcal{E}[v_c(t)v_s(t + \tau)] \cos \omega_0 t \sin \omega_0(t + \tau) + \mathcal{E}[v_s(t)v_s^T(t + \tau)] \sin \omega_0 t \sin \omega_0(t + \tau) \\ &= R_{cc}(\tau) \left(\frac{\cos \omega_0 \tau + \cos \omega_0(2t + \tau)}{2} \right) - R_{sc}(\tau) \left(\frac{-\sin \omega_0 \tau + \sin \omega_0(2t + \tau)}{2} \right) \\ &\quad - R_{cs}(\tau) \left(\frac{\sin \omega_0 \tau + \sin \omega_0(2t + \tau)}{2} \right) + R_{ss}(\tau) \left(\frac{\cos \omega_0 \tau - \cos \omega_0(2t + \tau)}{2} \right) \end{aligned}$$

Essendo $v(t)$ stazionario, R_{vv} non deve dipendere da t , ma solo da τ . Pertanto i coefficienti di $\cos \omega_0(2t + \tau)$ e di $\sin \omega_0(2t + \tau)$, che sono tra loro indipendenti, devono essere nulli. Segue

$$R_{cc}(\tau) = R_{ss}(\tau) \quad R_{sc}(\tau) = -R_{cs}(\tau) \quad (112)$$

e la autocorrelazione di $v(t)$ vale

$$R_{vv}(\tau) = R_{cc}(\tau) \cos \omega_0 \tau - R_{cs}(\tau) \sin \omega_0 \tau \quad (113)$$

D'altra parte

$$R_{sc}(\tau) = \mathcal{E}[v_s(t)v_c(t + \tau)] = \mathcal{E}[v_s(t - \tau)v_c(t)] = R_{cs}(-\tau)$$

che, combinata con la seconda delle (55), fornisce $R_{cs}(0) = \mathcal{E}[v_c(t)v_s(t)] = 0$. Pertanto campioni di $v_c(t)$ e $v_s(t)$ presi nello stesso istante sono tra loro incorrelati, e, essendo gaussiani, anche indipendenti. Conseguenza é che

$$R_{vv}(0) = \mathcal{E}[v^2(t)] = R_{cc}(0) \quad (114)$$

Per quanto riguarda invece $V(t) = v_c(t) + jv_s(t)$, che é anch'esso gaussiano a media nulla, risulta

$$\begin{aligned} R_{VV}(t, t + \tau) &= \mathcal{E}[V(t)V^*(t + \tau)] = \mathcal{E}[(v_c(t) + jv_s(t))(v_c(t + \tau) - jv_s(t + \tau))] \\ &= R_{cc}(\tau) + jR_{sc}(\tau) - jR_{cs}(\tau) + R_{ss}(\tau) \\ &= 2R_{cc}(\tau) - 2jR_{cs}(\tau) \end{aligned}$$

e pertanto anche $V(t)$ é stazionario. Si ha anche

$$R_{vv}(\tau) = \text{Re} \left[\frac{1}{2} R_{VV}(\tau) e^{-j\omega_0\tau} \right] = \text{Re} \left[\frac{1}{2} R_{VV}^*(\tau) e^{j\omega_0\tau} \right] \quad (115)$$

Passando agli spettri di densità di potenza, in Fig. 1 sono riportati gli spettri di $v(t)$ e di $V(t)$, rispettivamente per segnali DSB e per segnali SSB. Si noti che il primo spettro $S_{vv}(\omega)$ é pari, essendo $v(t)$ reale, mentre $S_{VV}(\omega)$ non ha alcuna simmetria.

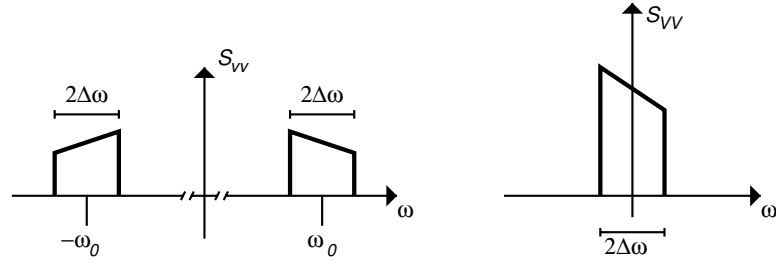


Fig.1a: Spettro di densità di potenza di $v(t)$ a sinistra, e di $V(t)$ a destra per un segnale DSB.

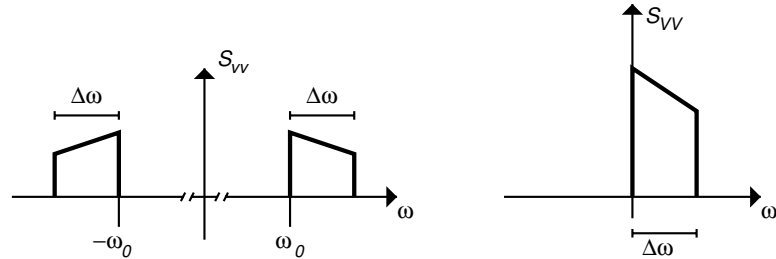


Fig.1b: Spettro di densità di potenza di $v(t)$ a sinistra, e di $V(t)$ a destra per un segnale SSB.

Posiamo concludere questo paragrafo notando che, per segnali aleatori a banda stretta, con banda totale B_T e spettro costante (o proporzionale a ω^2 , il tempo di correlazione é dato da $1/(2B_T)$.

APPENDICE 7: SEGNALI ALEATORI – ANALISI SPETTRALE

Cominciamo col ricordare¹ le principali definizioni relative ai segnali aleatori e la loro estensione a campi vettoriali aleatori, che sono quelli a cui siamo particolarmente interessati, anche per fissare la notazione e la terminologia.

Indichiamo con \mathcal{E} l'operatore di media statistica (relativo allo spazio di probabilità sottostante al segnale aleatorio). Si definisce allora **media** del segnale aleatorio $v(t)$

$$m_v(t) = \mathcal{E}[v(t)] = \int v f_v(v, t) dv$$

essendo $f_v(v, t)$ la distribuzione di probabilità di v all'istante t . Analogamente, la media del campo aleatorio (a due componenti) $\mathbf{e}(t)$ è

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_e(t) &= \mathcal{E}[\mathbf{e}(t)] = \int e_x f(e_x, e_y, t) de_x de_y \mathbf{i}_x + \int e_y f(e_x, e_y, t) de_x de_y \mathbf{i}_y \\ &= \int f(e_x, e_y, t) (e_x \mathbf{i}_x + e_y \mathbf{i}_y) de_x de_y = \int f(e_x, e_y, t) \mathbf{e} de_x de_y \end{aligned}$$

ed è ovviamente un vettore.

Le medie precedenti sono funzione del tempo, in quanto le distribuzioni di probabilità variano col tempo. Si noti che l'operazione di campionare $v(t)$ all'istante t_0 generico produce una variabile aleatoria $v(t_0)$, la cui media statistica è $m_v(t_0)$.

Definiamo poi **autocorrelazione** e **autocovarianza** per un segnale aleatorio²

$$\begin{aligned} R_{vv}(t_1, t_2) &= \mathcal{E}[v(t_1)v(t_2)] \\ C_{vv}(t_1, t_2) &= \mathcal{E}[v(t_1)v(t_2)] - \mathcal{E}[v(t_1)] \mathcal{E}[v(t_2)] = R_{vv}(t_1, t_2) - m_v(t_1)m_v(t_2) \end{aligned}$$

Si noti che la autocovarianza è nient'altro che la autocorrelazione per il segnale aleatorio *centrato* $v(t) - \mathcal{E}[v(t)]$. Di norma la autocorrelazione, e la autocovarianza, sono funzioni continue dei loro argomenti. Tuttavia può essere necessario, in alcuni casi, considerare delle autocorrelazioni di tipo impulsivo. In tal caso, verrà detto esplicitamente.

Le considerazioni seguenti, comunque, valgono solo per autocorrelazioni continue.

Il valor medio statistico della potenza istantanea all'istante t è data da

$$\mathcal{E}[v^2(t)] = R(t, t)$$

e pertanto risulta $R(t, t) \geq 0 \quad \forall t$.

Inoltre, considerando la disequazione (A2) per $x(t) = y(t) = v(t)$ segue

$$|R(t_1, t_2)| \leq \sqrt{R(t_1, t_1)R(t_2, t_2)}$$

¹ Maggiori dettagli si trovano, ad es., su *A. Papoulis: Probability, Random Variables and Stochastic Processes, McGraw-Hill*

² Si noti che in queste definizioni, come nelle definizioni seguenti che coinvolgono due valori del segnale aleatorio, stiamo assumendo che il segnale sia reale. Nel caso di segnale aleatorio complesso, la seconda occorrenza del segnale va coniugata.

Prendendo invece $x(t) = y(t) = v(t) - \mathcal{E}[v(t)]$, la autocorrelazione diventa la autocovarianza e segue

$$C(t_1, t_2) \leq \sqrt{C(t_1, t_1)C(t_2, t_2)}$$

A partire dalla autocovarianza possiamo ottenere la *varianza* della variabile aleatoria $v(t_0)$, data da $C_{vv}(t_0, t_0)$, e il **coefficiente di correlazione**

$$r(t_1, t_2) = \frac{C(t_1, t_2)}{\sqrt{C(t_1, t_1)C(t_2, t_2)}} \leq 1$$

Si noti che, per costruzione, $r(t, t) = 1 \quad \forall t$

Nel caso di campi aleatori, le definizioni sono simili ma conducono a matrici. Se rappresentiamo un campo aleatorio $\mathbf{e}(t)$ con un vettore colonna contenete le componenti del campo, allora $\mathbf{e}^T(t)$ rappresenta un vettore riga, e le definizioni precedenti diventano

$$\mathbf{R}_{ee}(t_1, t_2) = \mathcal{E}[\mathbf{e}(t_1)\mathbf{e}^T(t_2)]$$

$$\mathbf{C}_{ee}(t_1, t_2) = \mathcal{E}[\mathbf{e}(t_1)\mathbf{e}^T(t_2)] - \mathcal{E}[\mathbf{e}(t_1)]\mathcal{E}[\mathbf{e}^T(t_2)] = \mathbf{R}_{ee}(t_1, t_2) - \mathbf{m}_e(t_1)\mathbf{m}_e^T(t_2)$$

dove \mathbf{R} e \mathbf{C} sono matrici 2×2 . Le definizioni di secondo ordine si estendono a due processi. Si definisce ad esempio mutua covarianza di due campi \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2

$$\mathbf{C}_{12}(t_1, t_2) = \mathcal{E}[\mathbf{e}_1(t_1)\mathbf{e}_2^T(t_2)] - \mathcal{E}[\mathbf{e}_1(t_1)]\mathcal{E}[\mathbf{e}_2^T(t_2)]$$

I due campi \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 si dicono **incorrelati** se $\mathbf{C}_{12}(t_1, t_2) = 0, \forall t_1, t_2$. In tal caso

$$\mathbf{R}(t_1, t_2) = \mathcal{E}[\mathbf{e}_1(t_1)]\mathcal{E}[\mathbf{e}_2^T(t_2)]$$

Un segnale aleatorio si dice stazionario (più precisamente stazionario in senso stretto) se tutte le sue statistiche sono invarianti per una traslazione dell'asse delle t . In tal caso la media è costante, mentre i parametri del secondo ordine dipendono solo dalla differenza dei due argomenti $t_2 - t_1$. Un segnale aleatorio è invece stazionario in senso lato (*WSS*) se la distribuzione di ordine 1 è costante, e quella di ordine 2 dipende solo dalla differenza degli argomenti. Un segnale WSS ha anch'esso media costante e autocorrelazione, autocovarianza e coefficiente di correlazione che dipendono solo da $t_2 - t_1$. Ne segue che il valor medio statistico della potenza istantanea è costante, e prende il nome di potenza media:

$$\mathcal{E}[v^2(t)] = R(0) \quad \forall t$$

Allo stesso modo è costante nel tempo la varianza del segnale (o meglio, dei campioni del segnale in differenti istanti di tempo), e vale $C(0)$.

Per un segnale WSS, il coefficiente di correlazione $r(\tau)$ è una misura di quanta informazione sui valori di una realizzazione del segnale aleatorio si ottiene conoscendo il valore in un certo istante. Se $r(\tau_0)$ è prossimo a 1, allora conoscere il valore di $\mathbf{e}_1(t_1)$ fornisce molta informazione sul valore di $\mathbf{e}_1(t_1 + \tau_0)$. Viceversa, se $r(\tau_0)$ è prossimo a 0, conoscere o meno il valore di $\mathbf{e}_1(t_1)$ è indifferente per quanto riguarda la conoscenza del valore di $\mathbf{e}_1(t_1 + \tau_0)$.

Normalmente il coefficiente di correlazione tende a zero se $\tau \rightarrow \infty$. Tuttavia la rapidità di decadimento è un parametro importante. Possiamo introdurre, per valutarla, un *tempo di correlazione* τ_c , che misura l'ordine di grandezza dell'intervallo oltre il quale la correlazione tra i valori del segnale può essere trascurata.

Per costruire una definizione di tale tempo, partiamo col notare che, per una correlazione esponenziale $r(t) = \exp[-t/T]$, possiamo far coincidere il tempo di correlazione col parametro T , ovvero con la costante di tempo del decadimento esponenziale della correlazione.

Possiamo allora definire, per un processo **reale** arbitrario a media nulla, un *tempo di correlazione* τ_c come

$$\tau_c = \int_0^\infty |r(\tau)| d\tau = \frac{1}{R(0)} \int_0^\infty |R(\tau)| d\tau$$

essendo $r(\tau)$ il coefficiente di correlazione.

Un segnale aleatorio si dice gaussiano se *tutte* le sue statistiche sono distribuite normalmente. Un segnale gaussiano gode di alcune proprietà notevoli

- i) La conoscenza delle sole statistiche di ordine 1 e 2 caratterizza completamente il segnale
- ii) Un segnale gaussiano WSS è anche stazionario in senso stretto
- iii) Una combinazione lineare di segnali gaussiani è ancora gaussiano. In particolare un segnale gaussiano rimane tale anche attraversando un sistema lineare.

Per un segnale WSS a media nulla si definisce **densità spettrale di potenza** $S(\omega)$ (o, spesso, semplicemente, *spettro*) la trasformata della autocorrelazione (che, per ipotesi, dipende solo dalla variabile $\tau = t_2 - t_1$).

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

La densità spettrale di potenza è una grandezza reale e, per segnali reali, è una funzione pari di ω . Invertendo la definizione precedente segue la relazione tra autocorrelazione e spettro

$$R(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Ne segue che la potenza totale del segnale, ovvero la varianza, è, per definizione:

$$P = R(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega$$

Se un segnale aleatorio WSS, di spettro $S_i(\omega)$ attraversa un sistema lineare stazionario, di risposta impulsiva $h(t)$, allora l'uscita è anch'essa un segnale aleatorio WSS, e ingresso e uscita sono congiuntamente WSS⁴. Lo spettro di uscita vale

$$S_u(\omega) = |H(\omega)|^2 S_i(\omega) \quad \text{con} \quad H(\omega) = \int_0^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

Consideriamo ora un filtro passa-banda ideale, con banda passante (ω_1, ω_2) , di risposta armonica $H(\omega)$. Se applichiamo a tale filtro un segnale aleatorio reale WSS, la potenza P_y della uscita vale

$$P_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 S(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |H(\omega)|^2 S(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} S(\omega) d\omega$$

⁴ Se il segnale di ingresso è stazionario in senso stretto, anche l'uscita lo è. Tuttavia i due segnali non sono necessariamente congiuntamente stazionari in senso stretto, ma solo in senso lato.

in quanto $|H| = 1$ nella banda passante.

Se $\omega_1 = \omega_0 - \delta\omega$, $\omega_2 = \omega_0 + \delta\omega$, con $\delta\omega \ll \omega_0$, allora

$$P_y = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0 - \delta\omega}^{\omega_0 + \delta\omega} S(\omega) d\omega \simeq \frac{2\delta\omega}{\pi} S(\omega_0)$$

Le due relazioni precedenti mostrano che $S(\omega)$ descrive la distribuzione della potenza alle varie frequenze.

APPENDICE 8: PROPRIETÁ DI CAMPI ALEATORI A BANDA STRETTA

Passando al campo, nella rappresentazione (50) le proprietà sono simili alle (53,55,54), ovvero

$$\mathcal{E}[\mathbf{e}_c(t)] = \mathcal{E}[\mathbf{e}_s(t)] = 0 \quad \implies \quad \mathcal{E}[\mathbf{e}(t)] = 0$$

e

$$\mathcal{R}_{cc}(\tau) = \mathcal{R}_{ss}(\tau) \quad \mathcal{R}_{sc}(\tau) = -\mathcal{R}_{cs}(\tau)$$

in cui $\mathcal{R}_{cc}(\tau) = \mathcal{E}[\mathbf{e}_c(t)\mathbf{e}_c^T(t+\tau)]$ e simili. Ovviamente, anche in questo caso $\mathcal{R}_{cs}(0) = 0$. Quindi ogni componente di $\mathbf{e}_c(t)$ é incorrelata (e, essendo gaussiana, indipendente) con ciascuna componente di $\mathbf{e}_s(t)$, se campionate nello stesso istante.

Infine, la autocorrelazione di $\mathbf{e}(t)$ vale

$$\mathcal{R}_{ee}(\tau) = \mathcal{E}[\mathbf{e}(t)\mathbf{e}^T(t+\tau)] = \mathcal{R}_{cc}(\tau) \cos \omega_0 \tau - \mathcal{R}_{cs}(\tau) \sin \omega_0 \tau$$

Passiamo ora alla rappresentazione (51), in particolare nelle componenti complesse $E_x(t)$, $E_y(t)$. Calcolando la media di $\mathbf{e}(t)$, che è nulla, si ha

$$\mathcal{E}[\mathbf{e}(t)] = \text{Re}[\mathcal{E}[E_x(t)] e^{j\omega_0 t} \mathbf{i}_x + \mathcal{E}[E_y(t)] e^{j\omega_0 t} \mathbf{i}_y] = 0$$

Pertanto

$$\mathcal{E}[E_x(t)] = \mathcal{E}[E_y(t)] = 0 \quad (116)$$

Per quanto riguarda la autocorrelazione

$$\mathcal{R}_{ee}(\tau) = \mathcal{E}[\mathbf{e}(t)\mathbf{e}^T(t+\tau)] = \begin{pmatrix} R_{11}(t, t+\tau) & R_{12}(t, t+\tau) \\ R_{21}(t, t+\tau) & R_{22}(t, t+\tau) \end{pmatrix} \quad (117)$$

dove, usando (52), e ricordando che tutte queste autocorrelazioni dipendono solo da τ , :

$$\begin{aligned}
R_{11}(\tau) &= \mathcal{E}[a_x(t) \cos[\omega_0 t + \delta_x(t)] a_x(t + \tau) \cos[\omega_0(t + \tau) + \delta_x(t + \tau)]] \\
R_{12}(\tau) &= \mathcal{E}[a_x(t) \cos[\omega_0 t + \delta_x(t)] a_y(t + \tau) \cos[\omega_0(t + \tau) + \delta_y(t + \tau)]] \\
R_{21}(\tau) &= \mathcal{E}[a_y(t) \cos[\omega_0 t + \delta_y(t)] a_x(t + \tau) \cos[\omega_0(t + \tau) + \delta_x(t + \tau)]] \\
R_{22}(\tau) &= \mathcal{E}[a_y(t) \cos[\omega_0 t + \delta_y(t)] a_y(t + \tau) \cos[\omega_0(t + \tau) + \delta_y(t + \tau)]]
\end{aligned}$$

Dagli sviluppi della appendice 3 segue

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{ee}(\tau) &= \begin{pmatrix} R_{11}(\tau) & R_{12}(\tau) \\ R_{21}(\tau) & R_{22}(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Re} \begin{bmatrix} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} \\ R_{yx}(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} \end{bmatrix} & \text{Re} \begin{bmatrix} R_{xy}(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} \\ R_{yy}(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} \end{bmatrix} \\ \text{Re} \begin{bmatrix} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} \\ R_{yx}(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} \end{bmatrix} & \text{Re} \begin{bmatrix} R_{xy}(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} \\ R_{yy}(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} \end{bmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \text{Re} \left[\begin{pmatrix} R_{xx}(\tau) & R_{xy}(\tau) \\ R_{yx}(\tau) & R_{yy}(\tau) \end{pmatrix} e^{-j\omega_0 \tau} \right]
\end{aligned} \tag{118}$$

essendo

$$\begin{aligned}
R_{xx}(\tau) &= \mathcal{E}[E_x(t) E_x^*(t + \tau)] \\
R_{xy}(\tau) &= \mathcal{E}[E_x(t) E_y^*(t + \tau)] \\
R_{yx}(\tau) &= \mathcal{E}[E_y(t) E_x^*(t + \tau)] \\
R_{yy}(\tau) &= \mathcal{E}[E_y(t) E_y^*(t + \tau)]
\end{aligned}$$

Pertanto anche il campo $\mathbf{E}(t)$ è (statisticamente) stazionario. Si noti anche che le due componenti cartesiane del campo non sono in generale incorrelate (se campionate nello stesso istante) al contrario delle componenti lentamente variabili.

APPENDICE 9: AUTOCORRELAZIONE DI UN CAMPO A BANDA STRETTA

Calcoliamo la autocorrelazione di $\mathbf{e}(t)$ dato dalla (51). Risulta

$$\mathbf{R}_{ee}(\tau) = \mathcal{E}[\mathbf{e}(t) \mathbf{e}^T(t + \tau)] = \begin{pmatrix} R_{11}(t, t + \tau) & R_{12}(t, t + \tau) \\ R_{21}(t, t + \tau) & R_{22}(t, t + \tau) \end{pmatrix}$$

con

$$\begin{aligned}
R_{11}(\tau) &= \mathcal{E}[a_x(t) \cos[\omega_0 t + \delta_x(t)] a_x(t + \tau) \cos[\omega_0(t + \tau) + \delta_x(t + \tau)]] \\
R_{12}(\tau) &= \mathcal{E}[a_x(t) \cos[\omega_0 t + \delta_x(t)] a_y(t + \tau) \cos[\omega_0(t + \tau) + \delta_y(t + \tau)]] \\
R_{21}(\tau) &= \mathcal{E}[a_y(t) \cos[\omega_0 t + \delta_y(t)] a_x(t + \tau) \cos[\omega_0(t + \tau) + \delta_x(t + \tau)]] \\
R_{22}(\tau) &= \mathcal{E}[a_y(t) \cos[\omega_0 t + \delta_y(t)] a_y(t + \tau) \cos[\omega_0(t + \tau) + \delta_y(t + \tau)]]
\end{aligned}$$

Sviluppando la prima (le altre sono del tutto analoghe) si ha

$$\begin{aligned}
R_{11}(\tau) &= \mathcal{E} \left[\left[a_x(t) \cos \delta_x(t) \cos \omega_0 t - a_x(t) \sin \delta_x(t) \sin \omega_0 t \right] \cdot \right. \\
&\quad \left. \left[a_x(t+\tau) \cos \delta_x(t+\tau) \cos \omega_0(t+\tau) - a_x(t+\tau) \sin \delta_x(t+\tau) \sin \omega_0(t+\tau) \right] \right] \\
&= \mathcal{E} \left[a_x(t) \cos \delta_x(t) a_x(t+\tau) \cos \delta_x(t+\tau) \right] \cos \omega_0 t \cos \omega_0(t+\tau) \\
&\quad - \mathcal{E} \left[a_x(t) \cos \delta_x(t) a_x(t+\tau) \sin \delta_x(t+\tau) \right] \cos \omega_0 t \sin \omega_0(t+\tau) \\
&\quad - \mathcal{E} \left[a_x(t) \sin \delta_x(t) a_x(t+\tau) \cos \delta_x(t+\tau) \right] \sin \omega_0 t \cos \omega_0(t+\tau) \\
&\quad + \mathcal{E} \left[a_x(t) \sin \delta_x(t) a_x(t+\tau) \sin \delta_x(t+\tau) \right] \sin \omega_0 t \sin \omega_0(t+\tau)
\end{aligned}$$

Le quattro autocorrelazioni che compaiono in questa espressione sono funzioni solo di τ , per la stazionarietà delle componenti lentamente variabili del campo. Indicandole con $R_{xc,xc}(\tau)$, $R_{xc,xs}(\tau)$ e così via, e sostituendo le espansioni del prodotto di funzioni trigonometriche si ha

$$\begin{aligned}
R_{11}(\tau) &= R_{xc,xc}(\tau) \left(\frac{\cos \omega_0 \tau + \cos \omega_0(2t+\tau)}{2} \right) \\
&\quad - R_{xc,xs}(\tau) \left(\frac{\sin \omega_0 \tau + \sin \omega_0(2t+\tau)}{2} \right) \\
&\quad - R_{xs,xc}(\tau) \left(\frac{-\sin \omega_0 \tau + \sin \omega_0(2t+\tau)}{2} \right) \\
&\quad + R_{xs,xs}(\tau) \left(\frac{\cos \omega_0 \tau - \cos \omega_0(2t+\tau)}{2} \right)
\end{aligned}$$

Imponendo che i coefficienti di $\cos \omega_0(2t+\tau)$ e $\sin \omega_0(2t+\tau)$ si annullino, in quanto il primo membro è anch'esso dipendente solo da τ , segue

$$R_{xc,xc}(\tau) = R_{xs,xs}(\tau) \qquad R_{xc,xs}(\tau) = -R_{xs,xc}(\tau)$$

e in definitiva

$$\begin{aligned}
R_{11}(\tau) &= 2R_{xc,xc}(\tau) \cos \omega_0 \tau - 2R_{xc,xs}(\tau) \sin \omega_0 \tau \\
R_{12}(\tau) &= 2R_{xc,yc}(\tau) \cos \omega_0 \tau - 2R_{xc,ys}(\tau) \sin \omega_0 \tau \\
R_{11}(\tau) &= 2R_{yc,xc}(\tau) \cos \omega_0 \tau - 2R_{yc,xs}(\tau) \sin \omega_0 \tau \\
R_{11}(\tau) &= 2R_{yc,yc}(\tau) \cos \omega_0 \tau - 2R_{xc,xs}(\tau) \sin \omega_0 \tau
\end{aligned}$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned}
R_{xx}(t, t + \tau) &= \mathcal{E} \left[E_x(t) E_x^*(t + \tau) \right] = \mathcal{E} \left[a_x(t) e^{j\delta_x(t)} a_x(t + \tau) e^{-j\delta_x(t + \tau)} \right] \\
&= \mathcal{E} \left[a_x(t) a_x(t + \tau) e^{j[\delta_x(t) - \delta_x(t + \tau)]} \right] \\
&= \mathcal{E} \left[a_x(t) a_x(t + \tau) \cos[\delta_x(t) - \delta_x(t + \tau)] \right] \\
&\quad + j \mathcal{E} \left[a_x(t) a_x(t + \tau) \sin[\delta_x(t) - \delta_x(t + \tau)] \right] \\
&= R_{xc,xc}(\tau) + R_{xs,xs}(\tau) + j \left[R_{xs,xc}(\tau) - R_{xc,xs}(\tau) \right] \\
&= 2R_{xc,xc}(\tau) - 2j R_{xc,xs}(\tau)
\end{aligned}$$

avendo usato le formule di addizione e le proprietà appena trovate delle autocorrelazioni. Ovviamente:

$$\begin{aligned}
R_{xy}(t, t + \tau) &= 2R_{xc,yc}(\tau) - 2j R_{xc,ys}(\tau) \\
R_{yx}(t, t + \tau) &= 2R_{xc,xc}(\tau) - 2j R_{yc,xs}(\tau) \\
R_{yy}(t, t + \tau) &= 2R_{yc,yc}(\tau) - 2j R_{yc,ys}(\tau)
\end{aligned}$$

Pertanto anche il campo $\mathbf{E}(t)$ è (statisticamente) stazionario. Sostituendo nella (117) si ha

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{ee}(\tau) &= \begin{pmatrix} R_{11}(\tau) & R_{12}(\tau) \\ R_{21}(\tau) & R_{22}(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Re} \left[R_{xx}(\tau) e^{-j\omega_0\tau} \right] & \text{Re} \left[R_{xy}(\tau) e^{-j\omega_0\tau} \right] \\ \text{Re} \left[R_{yx}(\tau) e^{-j\omega_0\tau} \right] & \text{Re} \left[R_{yy}(\tau) e^{-j\omega_0\tau} \right] \end{pmatrix} \\
&= \text{Re} \left[\begin{pmatrix} R_{xx}(\tau) & R_{xy}(\tau) \\ R_{yx}(\tau) & R_{yy}(\tau) \end{pmatrix} e^{-j\omega_0\tau} \right]
\end{aligned}$$

INDICE

1. VETTORI COMPLESSI – POLARIZZAZIONE	1
2. DETERMINAZIONE DELLE CONDIZIONI DI POLARIZZAZIONE LINEARE E CIRCOLARE	3
3. CONDIZIONI DI POLARIZZAZIONE LINEARE E CIRCOLARE IN TERMINI DI COMPONENTI	4
4. PARAMETRI DI POLARIZZAZIONE	6
5. PARAMETRI DI STOKES	9
6. SEGNALI A BANDA STRETTA	12
7. ESEMPI DI SEGNALI A BANDA STRETTA	14
8. POLARIZZAZIONE DEI CAMPI A BANDA STRETTA	18
9. SEGNALI E CAMPI ALEATORI A BANDA STRETTA	22
10. POLARIZZAZIONE DI CAMPI ALEATORI	23
11. POTENZA RICEVUTA DA UN SENSORE	26
12. DECOMPOSIZIONE DI CAMPI	31
App. 1. IL CAMPO DESCRIVE UN ELLISSE	35
App. 2. CALCOLO DEL RAPPORTO ASSIALE	35
App. 3. ORIENTAZIONE ELLISSE	39
App. 4. DISUGUAGLIANZA DI SCHWARTZ	40
App. 5. SPETTRI DI DENSITÀ DI POTENZA	41
App. 6. PROPRIETÀ DI SEGNALI ALEATORI A BANDA STRETTA	42
App. 7. SEGNALI ALEATORI – ANALISI SPETTRALE	44
App. 8. PROPRIETÀ DI CAMPI ALEATORI A BANDA STRETTA	48
App. 9. AUTOCORRELAZIONE DI UN CAMPO A BANDA STRETTA	49