

# 1 INTRODUZIONE AI PROBLEMI INVERSI

Il modello che adotteremo negli sviluppi successivi é quello descritto nel paragrafo sulla risoluzione di un sistema radiometrico, assumendo un filtro abbastanza largo da non modificare la risoluzione data dal diagramma di antenna. Consideriamo quindi un sensore che viaggi a quota  $H$  e misuri la temperatura apparente al variare della sua posizione  $z$ , con un errore di misurazione che include anche l'effetto di eventuali sorgenti di brillantezza esterne alla superficie di cui si vuole stimare il profilo di temperatura di brillantezza, e le imprecisioni dello strumento<sup>1</sup>. Le misure effettuate saranno discrete e in numero finito, e quindi la relazione di partenza è

$$T_{Mk} = \int D \left( \frac{x_k - \sigma}{H} \right) T_B(\sigma) d\sigma + \epsilon_k \quad (1)$$

Nella (1):

$T_B(x)$  profilo di temperatura di brillantezza al suolo da ricostruire;

$T_{Mk}$  temperatura misurata dal sensore nella posizione  $x_k$ ;

$D(\theta)$  *funzione di trasferimento* del problema, pari al diagramma di direttività della antenna;

$\epsilon_k$  rumore della misura  $k$ -esima, che supponiamo a media nulla, e con matrice di covarianza  $\mathcal{S}_\epsilon$ , non necessariamente diagonale.

La (1) contiene ovviamente anche un errore di modello, in quanto suppone la  $T_B$  dipendente solo da  $x$ , e quindi con una simmetria *cilindrica*, ovvero costante in direzione ortogonale alla linea di volo.

Da un punto di vista matematico, l'inversione del modello (1) per ricavare  $T_B(x)$  dalle  $T_{Mk}$  presenta un problema di forte instabilità. Si dimostra infatti che i due profili di temperatura  $T_B(x)$  e  $T_B(x) + A \sin(hx)$  producono praticamente la stessa temperatura apparente al sensore, qualunque sia  $A$  (anche molto grande!), a patto di scegliere  $h$  sufficientemente grande (ovvero profili rapidamente variabili). Il problema di inversione non ha quindi soluzione unica, ed è pertanto mal-posto. Si può ottenere un problema ben-posto, e quindi risolvibile, se esistono ulteriori informazioni *a priori* su  $T_B(x)$  che possano essere sfruttate per stabilizzare il problema.

Va inoltre notato che, avendo un numero discreto e finito di dati, le incognite ricostruibili saranno discrete e in numero finito. Occorrerà quindi eseguire una *discretizzazione* della incognita (esplicita o, come vedremo, implicita). Discretizzazione esplicita significa porre

$$T_B(x) = \sum_{p=1}^N a_p f_p(x) \quad (2)$$

in cui le funzioni di base  $f_p(x)$  sono note, mentre il vettore numerico  $\mathbf{a}$  è l'incognita del problema. Le funzioni  $f_p$  dipendono dalla natura del problema, e dalle eventuali informazioni a priori, e possono essere impulsi rettangolari, triangolari, o con forme similari (e allora le  $a_p$  sono sostanzialmente dei campioni della  $T_B(x)$ ), oppure funzioni trigonometriche o polinomiali. La discretizzazione (2) può ridurre la instabilità del problema, escludendo alcune delle soluzioni non uniche, o addirittura eliminarla. È questo il caso delle elaborazioni *SAR*, in cui l'uso della *FFT* vincola la massima banda (spaziale) della incognita consentendo una inversione stabile.

Sostituendo la (2) nella (1), il modello (1) viene ricondotto a un modello algebrico

---

<sup>1</sup> È però possibile tener conto, ovviamente in modo statistico, di queste imprecisioni nel modello utilizzato.

$$T_{Mk} = \sum_{p=1}^N a_p \int_0^H D\left(\frac{x_k - \sigma}{H}\right) f_p(\sigma) d\sigma + \epsilon_k = \sum_{p=1}^N a_p W_{kp} + \epsilon_k \quad k = 1 \dots M \quad (3)$$

in cui

$$W_{kp} = \int_0^H D\left(\frac{x_k - \sigma}{H}\right) f_p(\sigma) d\sigma$$

è la temperatura apparente di un profilo di temperatura di brillantezza pari a  $f_p(x)$ . La (3) viene normalmente espressa in forma matriciale

$$\mathbf{T}_M = \mathbf{W} \mathbf{a} + \boldsymbol{\epsilon} \quad (4)$$

ed è in questa forma che discuteremo inizialmente il problema della inversione del profilo di temperatura.

## 2 SOLUZIONE AI MINIMI QUADRATI

In molti problemi inversi, la soluzione classica di un sistema lineare non è utilizzabile, in quanto il numero di righe  $M$  e di colonne  $N$  può essere diverso, essendo legato a criteri di scelta diversi (il numero di righe è pari alle misure utilizzabili, quello delle colonne alla discretizzazione necessaria a rappresentare bene l'incognita). Il numero di misure, in particolare, sarà sempre il massimo possibile, in modo da utilizzare la relativa ridondanza di informazioni per filtrare il rumore presente sui dati.

Occorre quindi dare una definizione diversa di soluzione, che generalizzi quella classica. Quella preferita è la soluzione ai *minimi quadrati*  $\mathbf{a}_{LS}$ , definita come la soluzione del problema di minimo

$$\|\mathbf{W} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{T}_M\|^2 \quad \min! \quad (5)$$

Ovviamente, se esiste una soluzione classica, questa annulla l'espressione nella (5), ed è quindi anche una soluzione ai minimi quadrati. Possiamo quindi dire che la soluzione (5) generalizza quella standard. Il significato di soluzione ai minimi quadrati risulta chiaro se si ricorda che, se  $\mathbf{a}$  fosse il vero valore dell'incognita,  $\mathbf{W} \cdot \mathbf{a}$  sarebbe il vero valore del vettore dei termini noti, ovvero i veri risultati delle misure. La soluzione ai minimi quadrati minimizza lo scarto quadratico medio tra le misure effettivamente ottenute, e quelle che si sarebbero dovute ottenere.

Qualore vi siano più vettori  $\mathbf{a}$  che minimizzano la (5), la soluzione ai minimi quadrati è il vettore di norma più piccola tra quelli che minimizzano la (5).

Tuttavia, in presenza di errori sui dati, la soluzione ai minimi quadrati (così come quella classica) è affetta da un errore che dipende sia dagli errori relativi sui dati, sia dalla struttura della matrice  $\mathbf{W}$ . Molti problemi di diagnostica sono mal-condizionati, e quindi è necessario valutare questo errore, che è grande, e anche cercare delle tecniche per minimizzarlo, ovvero per ottenere soluzioni *stabili*, ovvero soluzioni che non amplifichino l'errore sui dati. Nella ipotesi che  $\mathbf{W}$  sia nota con esattezza, questa analisi viene fatta tramite la *SVD* della matrice  $\mathbf{W}$

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \Sigma \cdot \mathbf{v}^T \quad (6)$$

Supponiamo inizialmente che  $M > N$ , ovvero che le incognite siano meno delle equazioni. Tale scelta appare ragionevole in quanto è del tutto evidente che non è possibile estrarre più informazioni indipendenti dei dati indipendenti a disposizione, e nessuno ci assicura (al momento) che tutte le misure che facciamo siano effettivamente indipendenti.

In ogni caso il vettore  $\mathbf{a}$  può essere sempre decomposto nella base costituita dalle colonne di  $\mathbf{v}$

$$\mathbf{a} = \sum_{m=1}^N c_m \mathbf{v}_m \quad (7)$$

e, allo stesso modo, il vettore  $\mathbf{T}_M$  può essere espanso nella base delle colonne di  $\mathbf{u}$

$$\mathbf{T}_M = \sum_{n=1}^M b_n \mathbf{u}_n \quad (8)$$

Sfruttando l'ortogonalità degli  $\mathbf{u}_n$  si trova che  $b_n = \mathbf{u}_n^T \cdot \mathbf{T}_M$

Per determinare i coefficienti  $c_m$  calcoliamo  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{a}$  e sostituiamolo, insieme alla (8), nella (5).

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{a} = \sum_{m=1}^N c_m \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_m = \sum_{m=1}^N c_m \sigma_m \mathbf{u}_m \quad (9)$$

da cui

$$\|\mathbf{w} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{T}_M\|^2 = \left\| \sum_{m=1}^N c_m \sigma_m \mathbf{u}_m - \sum_{n=1}^M b_n \mathbf{u}_n \right\|^2 \quad (10)$$

Possiamo riarrangiare la (10), ricordando che  $M > N$ , come

$$\left\| \sum_{m=1}^N [c_m \sigma_m - b_m] \mathbf{u}_m - \sum_{n=N+1}^M b_n \mathbf{u}_n \right\|^2 = \sum_{m=1}^N [c_m \sigma_m - b_m]^2 + \sum_{n=N+1}^M b_n^2 \quad (11)$$

sempre per la ortogonalità degli  $\mathbf{u}_n$ .

Si vede immediatamente che il minimo della (11) si ottiene scegliendo

$$c_m = \frac{1}{\sigma_m} b_m = \frac{1}{\sigma_m} \mathbf{u}_n^T \cdot \mathbf{T}_M \quad (12)$$

e vale

$$\rho_{LS} = \sum_{n=N+1}^M b_n^2$$

La soluzione ai minimi quadrati risulta dunque

$$\mathbf{a}_{LS} = \sum_{m=1}^N \frac{\mathbf{u}_m^T \cdot \mathbf{T}_M}{\sigma_m} \mathbf{v}_m \quad (13)$$

e la sua norma vale

$$\|\mathbf{a}_{LS}\|^2 = \sum_{m=1}^N \frac{[\mathbf{u}_m^T \cdot \mathbf{T}_M]^2}{\sigma_m^2} = \sum_{m=1}^N \frac{b_m^2}{\sigma_m^2} \quad (14)$$

Si dimostra che la sensibilità agli errori della (13) é data da

$$\frac{\|\Delta \mathbf{a}_{LS}\|}{\|\mathbf{a}\|} \leq \frac{\sigma_1}{\sigma_N} \frac{\|\Delta \mathbf{T}_M\|}{\|\mathbf{T}_M\|} = k(\mathbf{W}) \frac{\|\Delta \mathbf{T}_M\|}{\|\mathbf{T}_M\|} \quad (15)$$

Per ridurre la sensibilità agli errori è possibile utilizzare una versione *troncata* della (13)

$$\mathbf{a}_R = \sum_{m=1}^R \frac{\mathbf{u}_m^T \cdot \mathbf{T}_M}{\sigma_m} \mathbf{v}_m \quad (16)$$

dove  $R < N$  è scelto opportunamente. Il numero di condizionamento di tale soluzione vale

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_R} < k(\mathbf{W}) \quad (17)$$

ma naturalmente il residuo  $\|\mathbf{W} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{T}_M\|^2$  aumenta e ora vale (confronta la (11))

$$\rho_R = \|\mathbf{W} \cdot \mathbf{a}_R - \mathbf{T}_M\|^2 = \sum_{m=R+1}^M b_m^2 = \sum_{m=R+1}^N b_m^2 + \sum_{m=N+1}^M b_m^2 = \rho_{LS} + \sum_{m=R+1}^N b_m^2$$

Essendo  $R + 1 \leq m$  risulterà  $\sigma_m^2 \leq \sigma_{R+1}^2$ . Possiamo allora moltiplicare i termini dell'ultima sommatoria per  $\sigma_{R+1}^2/\sigma_m^2$ , maggiorandone il valore, e ottenendo

$$\|\mathbf{W} \cdot \mathbf{a}_R - \mathbf{T}_M\|^2 \leq \rho_{LS} + \sigma_{R+1}^2 \sum_{m=R+1}^N \frac{b_m^2}{\sigma_m^2} \leq \rho_{LS} + \sigma_{R+1}^2 \|\mathbf{a}_{LS}\|^2 \quad (18)$$

La soluzione (16) viene in genere detta soluzione a componenti principali, in quanto il vettore soluzione  $\mathbf{a}$  è espanso utilizzando solo le prime  $R$  colonne di  $\mathbf{V}$ , che possiamo considerare come quelle principali.

La soluzione (16) contiene anche una altra informazione. Il valore della soluzione  $\mathbf{a}$  dipende solo da  $R$  informazioni estratte dal vettore dei dati misurati  $\mathbf{T}_M$ . Possiamo quindi dire che solo  $R$  misure sono indipendenti, ovvero che il set di misure ha solo  $R$  gradi di libertà. Di conseguenza anche  $\mathbf{x}$  ha  $R$  gradi di libertà, e quindi le altre  $N - R$  informazioni contenute dentro  $\mathbf{a}$  sono in realtà ottenute per *interpolazione* a partire dalle  $R$  informazioni effettive.

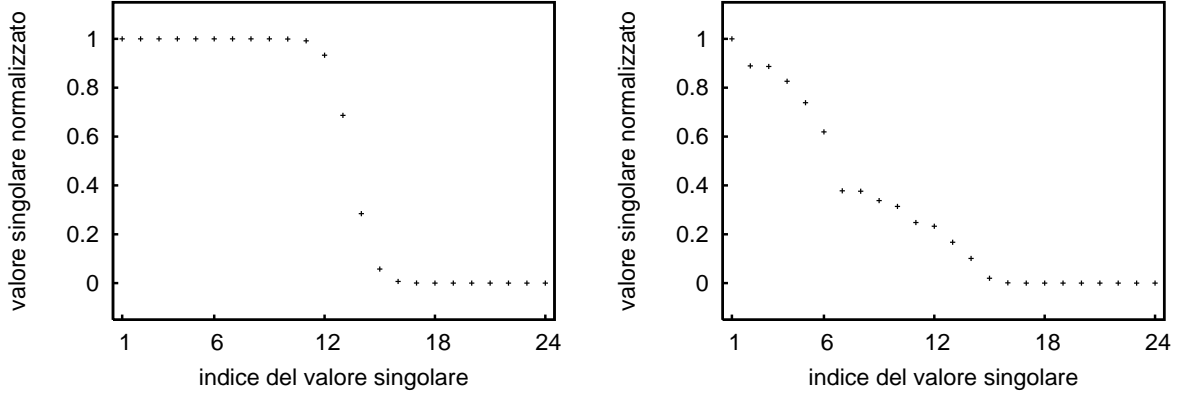


Fig. 1: Andamenti tipici di valori singolari: a gradino (sin.) e variabile con continuità (des.)

Il valore ottimale di  $R$  viene fuori da un trade-off tra il condizionamento della soluzione (17) (che si riduce con  $R$ ) e la sua accuratezza (18) (che, viceversa, cresce con  $R$ ). Questo trade-off dipende poi dall'andamento dei  $\sigma_n$ . Come noto, i valori singolari sono decrescenti, ma l'andamento può essere molto diverso. In Fig. 1 sono riportati due andamenti tipici dei valori singolari. Nel caso di andamento a gradino, come quello a sinistra in Fig. 1, il valore di  $R$  da scegliere è quello corrispondente all'inizio del gradino (punto A della curva). Infatti, in tal caso, aumentare  $R$ , ovvero passare da A a C, incrementa molto il numero di condizionamento senza miglioramenti significativi sulla accuratezza. Viceversa, ridurre  $R$ , passando da A a B, peggiora molto l'accuratezza ( $\sigma_{R+1}$  passa da C ad A) senza miglioramenti veri nel numero di condizionamento.

Se invece l'andamento dei valori singolari è più regolare (come a destra in Fig. 1), la scelta di  $R$  è evidentemente più critica, e va necessariamente legata anche agli errori effettivamente presenti su  $\mathbf{W}$  e  $\mathbf{T}_M$ .

La soluzione a componenti principali  $\mathbf{a}_R$  può essere considerata come appartenente ad una famiglia di soluzioni date da

$$\mathbf{a}_f = \sum_{m=1}^N \frac{\mathbf{u}_m^T \cdot \mathbf{T}_M}{\sigma_m} \mathbf{v}_m f_m \quad (19)$$

dove gli  $f_m$  sono detti fattori di filtro e, per la soluzione  $\mathbf{a}_R$  valgono

$$f_m = \begin{cases} 1 & m = 1, R; \\ 0 & m = R+1, N. \end{cases}$$

Questi fattori di filtro sono evidentemente adatti al caso in cui i valori singolari hanno un andamento a gradino. Invece, se i  $\sigma_n$  hanno un andamento più dolce, conviene scegliere anche i fattori di filtro con un andamento più regolare. Una possibile scelta (*Tikhonov*) è

$$f_m = \frac{\sigma_m}{\sigma_m + \gamma} \quad (20)$$

dove  $\gamma$  va scelto in base agli errori sui dati. Per  $m$  piccolo i fattori di filtro sono prossimi a 1, e quindi sostanzialmente coincidono con quelli relativi a  $\mathbf{a}_R$ . Al crescere di  $m$  tendono poi gradualmente a 0, in modo da includere tutte le colonne di  $\mathbf{V}$ , ma con una ampiezza decrescente.

Finora abbiamo considerato il caso di  $M > N$ , ma (avendo ben chiaro in mente che il vettore soluzione  $\mathbf{a}$  non è costituito solo da elementi indipendenti) è possibile, e spesso utile, scegliere  $N \geq M$ . Per  $M = N$  tutti i discorsi precedenti sono validi. Solo nel secondo membro della (11) mancherà il secondo termine.

Se invece  $M < N$  vi sono diversi cambiamenti. La prima differenza si ha nella (9). Infatti ora per  $m > M$  si ha  $\mathbf{W} \cdot \mathbf{v}_m = 0$  e quindi la (9) va sostituita da

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{a} = \sum_{m=1}^N c_m \mathbf{W} \cdot \mathbf{v}_m = \sum_{m=1}^M c_m \sigma_m \mathbf{u}_m + \sum_{m=M+1}^N c_m \cdot 0 = \sum_{m=1}^M c_m \sigma_m \mathbf{u}_m \quad (21)$$

Nella (11), quindi, sono coinvolti solo i primi  $M$  coefficienti  $c_m$ . La soluzione ai minimi quadrati sarà allora

$$c_m = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_m} \mathbf{u}_n^T \cdot \mathbf{T}_M & m = 1, M \\ \text{qualunque} & m = M+1, N \end{cases} \quad (22)$$

che sostituisce la (12). Vi sono quindi infinite soluzioni ai minimi quadrati, e tutte forniscono residuo nullo. In base alla richiesta che  $\mathbf{a}_{LS}$  debba essere quello di norma minima, allora occorre scegliere

$$c_m = 0 \quad m = M+1, N$$

In tal modo si eliminano da  $\mathbf{a}$  tutte le componenti ad alta frequenza ( $m$  elevato), che sono quelle che vengono filtrate da  $\mathbf{W}$ .

La soluzione a componenti principali resta uguale, e così quella coi fattori di filtro, in cui però la somma va terminata ad  $M$ .

Per concludere il discorso vogliamo notare che la soluzione ai minimi quadrati (5) può anche essere espressa nel seguente modo: determinare un vettore  $\mathbf{T}_{Mo}$  tale che

$$\|\mathbf{T}_M - \mathbf{T}_{Mo}\|^2 \quad \min! \quad \text{s.a.} \quad \mathbf{W} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{T}_{Mo} \quad (23)$$

in cui il vincolo (introdotto da "s.a.") richiede che esista un  $\mathbf{a}$  tale che  $\mathbf{W} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{T}_{Mo}$ , ovvero che  $\mathbf{T}_{Mo}$  sia nel range di  $\mathbf{W}$ .

Questa forma, del tutto equivalente alla (5), mostra che la soluzione ai minimi quadrati cerca di modificare  $\mathbf{T}_M$ , ovvero le misure, in modo che il vettore modificato  $\mathbf{T}_{Mo}$  sia il più vicino possibile a  $\mathbf{T}_M$ , ma sia anche un vettore di misure ottenibili. Ricordiamo infatti che l'insieme di tutti i vettori  $\mathbf{W} \cdot \mathbf{a}$  al variare di  $\mathbf{a}$  è l'insieme di tutti i vettori di misura ammissibili.

In generale, a causa degli errori di misura, il vettore misurato  $\mathbf{T}_M$  non sarà ammissibile. Cercare il vettore ammissibile più vicino a  $\mathbf{T}_M$  equivale a filtrare il rumore sui dati.

Nel nostro caso, comunque, anche  $\mathbf{W}$  è affetta da errore, e quindi la soluzione ai minimi quadrati (23) non è necessariamente la più efficace. Una strategia alternativa, e più efficace, è quella di cercare di modificare non solo  $\mathbf{T}_M$  ma anche  $\mathbf{W}$ , ovvero di filtrare il rumore da entrambi. Ciò equivale a cercare  $\mathbf{W}_o$  e  $\mathbf{T}_{Mo}$  (*total least square solution*, *TLS*) tali che

$$\|\mathbf{W} - \mathbf{W}_o\|^2 + \|\mathbf{T}_M - \mathbf{T}_{Mo}\|^2 \quad \min! \quad \text{s.a.} \quad \mathbf{W}_o \cdot \mathbf{a} = \mathbf{T}_{Mo} \quad (24)$$

La soluzione *TLS* può ancora essere ottenuta mediante la *SVD*.

### 3 METODO DI BACKUS–GILBERT

Il metodo di Backus–Gilbert si basa su di un approccio diverso alla inversione di problemi descritti da equazioni come la (1). In particolare, anzichè determinare tutto il profilo di temperatura, come i metodi descritti precedentemente, il metodo di Backus–Gilbert determina campioni “singoli” della temperatura. Può quindi ricostruire profili con punti fitti a piacere, o con densità diversa nelle varie zone, o addirittura solo in alcune zone, in maniera indipendente dalla vera variabilità del profilo. Naturalmente, come vedremo, la risoluzione ottenibile dipende ancora dai dati del problema, ma la ricostruzione ne è indipendente<sup>1</sup>.

Cominciamo ad occuparci del problema di inversione in assenza di rumore, descritto quindi dalla

$$T_{Mk} = \int D\left(\frac{x_k - x}{H}\right) T_B(x) dx \quad (25)$$

La stima  $\hat{T}_B(x_0)$  della temperatura in un punto  $x_0$  dipende evidentemente solo dalle  $M$  misure di temperatura  $T_{Mk}$ , e vi dipende in maniera lineare. Possiamo quindi porre

$$\hat{T}_B(x_0) = \sum_{k=1}^M T_{Mk} a_k(x_0) \quad (26)$$

dove gli  $a_k(x_0)$  sono degli opportuni coefficienti, da determinare, e che ovviamente dipenderanno dal punto  $x_0$  in cui si vuole la stima. Si noti che, nonostante la strategia sia diversa, la (26) mostra che anche il metodo di Backus–Gilbert può essere formulato a partire da una discretizzazione (2). Solo che in questo caso i coefficienti sono noti, mentre vanno determinate le funzioni di base.

Sostituendo (26) in (25) segue

$$\hat{T}_B(x_0) = \sum_{k=1}^M a_k(x_0) \int D\left(\frac{x_k - x}{H}\right) T_B(x) dx = \int A(z, x_0) T_B(x) dx \quad (27)$$

con

$$A(z, x_0) = \sum_{k=1}^M a_k(x_0) D\left(\frac{x_k - x}{H}\right) \quad (28)$$

La (27) mostra che  $\hat{T}_B(x_0)$  è una media pesata dei valori del profilo vero  $T_B(x)$ , con peso dato dalla funzione  $A(x, x_0)$ . Ci si aspetta che  $A(x, x_0)$  abbia un picco, ragionevolmente elevato, in  $x = x_0$ , e la sua larghezza evidentemente determinerà la *risoluzione* con cui si è ottenuta la stima  $\hat{T}_B(x_0)$ . La funzione peso  $A(x, x_0)$  deve inoltre soddisfare a un vincolo di coerenza. Se il profilo di temperatura fosse costante, la stima dovrebbe essere pari a tale valore costante (Assenza di *bias*). Questo richiede che

---

<sup>1</sup> Usando opportune discretizzazioni (2), anche gli altri metodi descritti sono in grado di avere valori di temperatura distribuiti in maniera non uniforme, ma sempre in dipendenza dalla variabilità del profilo di temperatura. E, in ogni caso, occorre sempre ricostruire tutto il profilo.

$$\int A(x, x_0) dz = \sum_{k=1}^M a_k(x_0) \int D\left(\frac{x_k - x}{H}\right) dx = 1 \quad \forall x_0 \quad (29)$$

La larghezza della funzione peso viene misurata dallo *spread* di tale funzione, dato da<sup>2</sup>

$$S(z_0) = 12 \int_0^H (x - x_0)^2 A^2(x, x_0) dx \quad (30)$$

Sostituendo (28) in (30) segue

$$\begin{aligned} S(x_0) &= 12 \int_0^H (x - x_0)^2 \left[ \sum_{k=1}^M a_k(x_0) D\left(\frac{x_k - x}{H}\right) \right] \left[ \sum_{h=1}^M a_h(x_0) D\left(\frac{x_h - x}{H}\right) \right] dx \\ &= \sum_{k=1}^M a_k(x_0) \sum_{h=1}^M \left[ 12 \int_0^H (x - x_0)^2 D\left(\frac{x_k - x}{H}\right) D\left(\frac{x_h - x}{H}\right) dx \right] a_h(x_0) \end{aligned}$$

Possiamo introdurre il vettore colonna  $\mathbf{a}$ , contenente i coefficienti  $a_k(x_0)$ , e la matrice  $\mathbf{S}$ , definita da

$$S_{kh} = 12 \int_0^H (x - x_0)^2 D\left(\frac{x_k - x}{H}\right) D\left(\frac{x_h - x}{H}\right) dx$$

simmetrica e dipendente da  $x_0$ , e scrivere lo spread come

$$S(x_0) = \sum_{k=1}^M a_k(x_0) \sum_{h=1}^M S_{kh} a_h(x_0) = \mathbf{a}^T \mathbf{S} \mathbf{a} \quad (31)$$

Il vettore dei coefficienti che forniscono la stima (26) si ottengono minimizzando lo spread rispetto agli elementi di  $\mathbf{a}$ , col vincolo (29), che diventa

$$\mathbf{a}^T \mathbf{U} = 1 \quad \text{con} \quad U_k = \int D\left(\frac{x_k - x}{H}\right) dx \quad (32)$$

Il problema di minimo della (31), col vincolo (32), può essere risolto usando un opportuno moltiplicatore di Lagrange  $\lambda$ . Si dimostra infatti che le soluzioni del problema di minimo

$$\mathbf{a}^T \mathbf{S} \mathbf{a} + \lambda (\mathbf{a}^T \mathbf{U} - 1) \quad (33)$$

(dove il termine moltiplicato per  $\lambda$  è il vincolo) rispetto alle variabili  $\mathbf{a}$  e  $\lambda$  sono anche soluzioni del problema di minimo vincolato (31,32).

Il massimo di questa funzione di più variabili si ottiene imponendo che il suo gradiente (rispetto alle sue variabili) sia nullo oppure, equivalentemente, che sia nulla (al primo ordine) la sua variazione rispetto a una variazione arbitraria delle variabili. La funzione è una forma quadratica a coefficienti reali, con la matrice  $\mathbf{S}$  simmetrica. Prendiamo allora una variazione arbitraria  $\delta \mathbf{a}$  e calcoliamo la corrispondente variazione della funzione

---

<sup>2</sup> Lo spread è costruito per analogia: se  $A^2(x, x_0)$  fosse la pdf di una V.A., lo spread ne sarebbe, a meno di una costante, la varianza.



$$(\mathbf{a} + \delta \mathbf{a})^T \mathbf{S} (\mathbf{a} + \delta \mathbf{a}) + \lambda \left[ (\mathbf{a} + \delta \mathbf{a})^T \mathbf{U} - 1 \right] - \mathbf{a}^T \mathbf{S} \mathbf{a} - \lambda (\mathbf{a}^T \mathbf{U} - 1)$$

Sviluppando, e limitandosi ai termini di ordine 1, si trova

$$[\mathbf{a}]^T \mathbf{S} [\delta \mathbf{a}] + [\delta \mathbf{a}]^T \mathbf{S} [\mathbf{a}] + \lambda [\delta \mathbf{a}]^T \mathbf{U}$$

I primi due addendi sono entrambi degli scalari e quindi coincidono con i loro trasposti. Prendendo il trasposto del primo termine si trova il secondo e quindi la variazione (al primo ordine) della funzione vale

$$2 [\delta \mathbf{a}]^T \mathbf{S} [\mathbf{a}] + \lambda [\delta \mathbf{a}]^T \mathbf{U}$$

Questa variazione deve essere nulla per ogni  $\delta \mathbf{a}$  e segue

$$2\mathbf{S}\mathbf{a} + \lambda \mathbf{U} = 0 \quad \implies \quad \mathbf{a} = -\frac{\lambda}{2} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{U} \quad (34)$$

Il valore di  $\lambda$  si ottiene imponendo il vincolo (32) (che é la derivata della (33) rispetto a  $\lambda$ )

$$\mathbf{a}^T \mathbf{U} = -\frac{\lambda}{2} \left[ \mathbf{S}^{-1} \mathbf{U} \right]^T \mathbf{U} = -\frac{\lambda}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{U} = 1 \quad \implies \quad -\frac{\lambda}{2} = \frac{1}{\mathbf{U}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{U}} \quad (35)$$

per cui

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\mathbf{U}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{U}} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{U} \quad (36)$$

La matrice  $\mathbf{S}$  é invertibile, ma la sua inversione é normalmente mal condizionata. Si noti inoltre che il calcolo di  $\mathbf{S}^{-1}$  va fatto per ogni punto  $x_0$ .

Il problema puó essere stabilizzato includendo il rumore di misura. In presenza di rumore la (25) va sostituita dalla (1). Pertanto la stima (26) diventa

$$\hat{T}(x_0) = \sum_{k=1}^M a_k(x_0) \int D\left(\frac{x_k - x}{H}\right) T(x) dx + \sum_{k=1}^M a_k(x_0) \epsilon_k = \int_0^H A(x, x_0) T(x) dx + \mathbf{a}^T \boldsymbol{\epsilon} \quad (37)$$

che sostituisce la (27). La stima  $\hat{T}(x_0)$  quindi diventa una media pesata corrotta da rumore. Si puó ancora definire uno spread (30), ma minimizzare lo spread puó non migliorare la qualità della stima. Va infatti tenuto conto che questa stima (la cui media é la (27)) ha un errore, misurato tramite una varianza, e occorre anche controllare questa varianza per ottenere una buona stima.

La varianza della stima (37) é data da

$$V = \mathcal{E} \left[ \left( \hat{T}(x_0) - \int_0^H A(x, x_0) T(x) dx \right)^2 \right] = \mathcal{E} \left[ (\mathbf{a}^T \boldsymbol{\epsilon}) (\mathbf{a}^T \boldsymbol{\epsilon}) \right] = \mathbf{a}^T \mathcal{E}[\boldsymbol{\epsilon} \boldsymbol{\epsilon}^T] \mathbf{a} = \mathbf{a}^T \mathbf{S}_\epsilon \mathbf{a} \quad (38)$$

Conviene allora minimizzare direttamente una opportuna combinazione delle due grandezze spread e varianza<sup>3</sup>

$$S + kV = \mathbf{a}^T \mathbf{S} \mathbf{a} + k \mathbf{a}^T \mathbf{S}_\epsilon \mathbf{a} = \mathbf{a}^T (\mathbf{S} + k \mathbf{S}_\epsilon) \mathbf{a} = \mathbf{a}^T \mathbf{R} \mathbf{a} \quad \text{con} \quad \mathbf{R} = \mathbf{S} + k \mathbf{S}_\epsilon \quad (39)$$

sempre col vincolo (32). Il valore di  $k$ , che é un parametro con dimensione, va scelto a seconda della importanza relativa che si vuole dare a uno spread piccolo rispetto a una varianza piccola. Ovviamente, un valore piccolo di  $k$  produrrà una soluzione con uno spread (e quindi una risoluzione) piccola, ma molto corrotta dal rumore. Viceversa, un valore grande di  $k$  filtrerà molto il rumore, ma a spese della risoluzione. La minimizzazione della (39) segue le stesse linee della (31). Introducendo ancora un moltiplicatore di Lagrange  $\lambda$  occorre minimizzare (senza vincoli)  $\mathbf{a}^T \mathbf{R} \mathbf{a} + \lambda \mathbf{a}^T \mathbf{U}$ , che é del tutto analoga alla (33). La soluzione della (39) (vedi (36)) vale allora

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\mathbf{U}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{U}} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{U} \quad (40)$$

---

<sup>3</sup> In alternativa, si potrebbe minimizzare lo spread (o la varianza) con un vincolo sull'altra grandezza, ma occorrerebbe usare due moltiplicatori di Lagrange, con calcoli notevolmente più complessi per imporre quest'ultimo vincolo.

## APPENDICE 1: DECOMPOSIZIONE A VALORI SINGOLARI

Data una matrice<sup>1</sup>  $\mathbf{A}$ , di dimensioni  $M \times N$ , la sua decomposizione a valori singolari è

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^T \quad (41)$$

in cui le matrici  $\mathbf{U}$  (di dimensioni  $M \times M$ ) e  $\mathbf{V}$  (di dimensioni  $N \times N$ ) sono matrici *ortogonali*, ovvero la loro inversa coincide con la loro trasposta, mentre  $\mathbf{\Sigma}$  è una matrice “diagonale”. Più precisamente è diagonale se  $M = N$ . Altrimenti si ha

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_d \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \text{se } M > N \\ \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_d & \mathbf{0} \end{bmatrix} & \text{se } M < N \end{cases}$$

con  $\mathbf{\Sigma}_d$  diagonale. Gli elementi di  $\mathbf{\Sigma}$ , o di  $\mathbf{\Sigma}_d$ , sono detti valori singolari, e sono reali<sup>2</sup> e ordinati in senso decrescente

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \dots$$

I valori singolari sono in numero pari a  $\min(N, M)$ , e alcuni possono essere anche uguali a zero.

Tramite la *SVD* si ottengono immediatamente due dei parametri della matrice  $\mathbf{A}$ , la norma, che misura la *grandezza* della matrice:

$$\|\mathbf{A}\| = \sigma_1$$

e il numero di condizionamento, che misura quanto una matrice è differente da una matrice singolare<sup>3</sup>. Se i valori singolari diversi da zero sono in numero pari a  $R$ , si dimostra che il numero di condizionamento vale

$$k(\mathbf{A}) = \frac{\sigma_1}{\sigma_R} \geq 1$$

Le colonne delle matrici ortogonali  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  sono tra loro ortonormali, e hanno quindi il ruolo dei versori. In altri termini, l'insieme delle colonne di una matrice ortogonale costituisce una base ortonormale dello spazio vettoriale dei vettori numerici. Indicando con

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_M] \quad \mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N]$$

le colonne di queste matrici, che sono detti anche vettori singolari di  $\mathbf{A}$ , si ha poi

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_i = \sigma_i \mathbf{v}_i \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_j = \sigma_j \mathbf{u}_j$$

sottintendendo che il secondo membro è nullo se manca il corrispondente valore singolare.

Se  $\mathbf{A}$  è quadrata, e a rango pieno  $R = N$ , allora la soluzione di  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  è

<sup>1</sup> Considereremo qui solo il caso reale, ma, con qualche modifica, il discorso si estende anche al caso di matrice complessa

<sup>2</sup> I valori singolari sono reali anche nel caso di matrice complessa

<sup>3</sup> Per una matrice quadrata singolare, il numero di condizionamento è infinito, mentre per una matrice ortogonale, in cui inversa e trasposta coincidono, vale 1.

$$\mathbf{x} = \mathcal{V} \cdot \mathbf{\Sigma}^{-1} \cdot \mathcal{U}^T \cdot \mathbf{b}$$

in cui  $\mathbf{\Sigma}^{-1}$  è diagonale, e contiene  $1/\sigma_i$  se  $\sigma_i \neq 0$ , e zero altrimenti.

## INDICE

1. INTRODUZIONE AI PROBLEMI INVERSI . . . . .	1
2. SOLUZIONE AI MINIMI QUADRATI . . . . .	2
3. METODO DI BACKUS–GILBERT . . . . .	6
App. 1. DECOMPOSIZIONE A VALORI SINGOLARI . . . . .	11