

1 SEZIONE RADAR

In un sistema RADAR (RAdio Detection And Ranging), una antenna trasmittente TX manda un segnale nello spazio. Questo segnale interagisce con gli oggetti presenti, inducendo sugli oggetti delle correnti (superficiali se l'oggetto è un conduttore perfetto, di volume se l'oggetto è un conduttore reale o un dielettrico). Queste correnti re-irradiano in tutte le direzioni, e il segnale reirradiato può essere ricevuto da una antenna RX ed elaborato per ricavare posizione, distanza, velocità ed altre informazioni sull'oggetto. La antenna ricevente RX può essere la stessa antenna trasmittente (e si parla di radar *monostatico*) o una altra antenna (e si parla allora di radar *bistatico*). Indicheremo con r_T ed r_R la distanza dell'oggetto rispettivamente dal trasmettitore e dal ricevitore (ovviamente, in un radar monostatico $r_R = r_T$).

Il trasmettitore invia un campo¹ \mathbf{E}_i nella direzione dell'oggetto da individuare, al quale è associato un vettore di Poynting:

$$S_i = \frac{1}{2\zeta} |\mathbf{E}_i|^2 = \frac{G_T P_T}{4\pi R_T^2} \quad (1)$$

essendo G_T il guadagno della antenna trasmittente nella direzione dell'oggetto, posto a distanza R_T , e P_T la potenza trasmessa.

Convienne mettere in evidenza la polarizzazione del campo incidente, scrivendo

$$\mathbf{E}_i = E_i \mathbf{p}_i \quad (2)$$

in cui \mathbf{p}_i è il vettore che individua la polarizzazione del campo incidente².

L'oggetto sarà sede di correnti indotte e quindi originerà un campo diffuso. Possiamo considerare questo oggetto come una antenna, i cui morsetti di ingresso sono chiusi su di un corto circuito, in modo da usare i risultati trovati per le antenne, opportunamente generalizzati in quanto questa "antenna" usata come modello non sarà a minima diffusione, e quindi il campo diffuso in direzione Ω_s sarà dato da

$$\mathbf{E}_S(\Omega_s) = \mathbf{E}_{S0}(\Omega_s) + \mathcal{A} I_0 \frac{e^{-j\beta r}}{\sqrt{4\pi} r} \mathbf{h}(\Omega_s) \quad (3)$$

con

$$I_0 = -\frac{\mathbf{h}(\Omega_i) \cdot \mathbf{p}_i}{Z_A} E_i$$

la corrente che scorre nel corto circuito della "antenna" (di impedenza di ingresso Z_A) e avendo conglobato in \mathcal{A} tutte le costanti del campo

$$\mathcal{A} = j\zeta \frac{\sqrt{4\pi}}{2\lambda}$$

Ovviamente, oltre a dipendere da \mathbf{p}_i e da Ω_i , il campo \mathbf{E}_{S0} è legato linearmente al campo incidente, ed ha la stessa variazione con r dell'altro termine. Possiamo quindi riscrivere la (3), nella forma

¹ Il campo inviato è a banda stretta, ma per le considerazioni di questo paragrafo basterà considerare un campo sinusoidale.

² Il vettore \mathbf{p}_i ha modulo unitario $|\mathbf{p}_i|^2 = 1$ ed è in generale complesso.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_S(\Omega_s) &= \mathcal{A} \frac{e^{-j\beta r}}{\sqrt{4\pi} r} \left[-\frac{\mathbf{h}_0(\Omega_i, \Omega_i) \cdot \mathbf{p}_i}{Z_A} \mathbf{h}_0(\Omega_s, \Omega_i) - \frac{\mathbf{h}(\Omega_i) \cdot \mathbf{p}_i}{Z_A} \mathbf{h}(\Omega_s) \right] E_i \\ &= -\mathcal{A} \frac{e^{-j\beta r}}{\sqrt{4\pi} r} \left[\left(\mathbf{h}_0(\Omega_i, \Omega_i) \cdot \mathbf{p}_i \right) \mathbf{h}_0(\Omega_s, \Omega_i) + \left(\mathbf{h}(\Omega_i) \cdot \mathbf{p}_i \right) \mathbf{h}(\Omega_s) \right] \frac{E_i}{Z_A}\end{aligned}\quad (4)$$

in cui nel primo addendo é stata introdotta una sorta di *altezza efficace* del campo diffuso della antenna a vuoto, che, per reciprocità, viene anche usato per calcolare l'eccitazione di questo campo. Questa altezza efficace é stata normalizzata in modo che valga la (4).

Se \mathbf{p}_R é il vettore che individua la polarizzazione del campo \mathbf{E}_S adattato in polarizzazione alla antenna ricevente, e \mathbf{p}_X quello che individua la polarizzazione ad esso opposta, possiamo dividere il campo \mathbf{E}_S in una componente co-polare, lungo il primo vettore, e una cross-polare lungo il secondo:

$$\mathbf{E}_S = E_S^{(c)} \mathbf{p}_R + E_S^{(x)} \mathbf{p}_X \quad (5)$$

in cui, per le proprietà dei vettori di polarizzazione

$$E_S^{(c)} = \mathbf{E}_S \cdot \mathbf{p}_R^* \quad E_S^{(x)} = \mathbf{E}_S \cdot \mathbf{p}_X^* \quad (6)$$

La sola parte co-polare produrrá un segnale alla ricevente. Sviluppando la prima delle (6) segue

$$\begin{aligned}E_S^{(c)} &= -\mathcal{A} \frac{e^{-j\beta r_R}}{\sqrt{4\pi} r_R} \left[\left(\mathbf{h}_0(\Omega_i, \Omega_i) \cdot \mathbf{p}_i \right) \left(\mathbf{h}_0(\Omega_s, \Omega_i) \cdot \mathbf{p}_R^* \right) + \left(\mathbf{h}(\Omega_i) \cdot \mathbf{p}_i \right) \left(\mathbf{h}(\Omega_s) \cdot \mathbf{p}_R^* \right) \right] \frac{E_i}{Z_A} \\ &= \gamma(\Omega_s, \Omega_i; \mathbf{p}_R, \mathbf{p}_i) \frac{e^{-j\beta r_R}}{\sqrt{4\pi} r_R} E_i\end{aligned}\quad (7)$$

avendo conglobato tutti i fattori, inclusa la differenza di fase tra i due campi, nell'unico parametro **complesso** γ , che caratterizza la diffusione da parte dell'oggetto in questione. Per reciprocità, lo scambio contemporaneo delle due direzioni e delle due polarizzazioni lascia il valore di γ invariato.

Analogo discorso può essere fatto per la potenza. La potenza disponibile ricevuta da RX , di area efficace A_R , dipende dalla sola parte co-polare di \mathbf{E}_S e vale

$$P_R = A_R S_S^{(c)} \quad (8)$$

dove il vettore di Poynting co-polare diffuso vale

$$S_S^{(c)} = \frac{1}{2\zeta} |E_S^{(c)}|^2 = \frac{1}{2\zeta} \frac{1}{4\pi r_R^2} |E_i|^2 |\gamma|^2 = \frac{1}{4\pi r_R^2} S_i |\gamma(\Omega_s, \Omega_i; \mathbf{p}_R, \mathbf{p}_i)|^2 \quad (9)$$

avendo usato la (2). Il parametro

$$|\gamma(\Omega_s, \Omega_i; \mathbf{p}_R, \mathbf{p}_i)|^2 = \sigma^{(c)}(\Omega_s, \Omega_i; \mathbf{p}_R, \mathbf{p}_i) = 4\pi r_R^2 \frac{S_S^{(c)}}{S_i} \quad (10)$$

si definisce sezione radar (co-polare) dell'oggetto e si misura in m^2 . La sezione radar dipende ovviamente dall'oggetto, dalla polarizzazione del campo incidente, e dalle direzioni di incidenza e di ricezione, nonché dalla polarizzazione della antenna ricevente. Analogamente alla (10), si

puó definire una sezione radar cross-polare $\sigma^{(x)}$, a partire da $E_S^{(x)}$, e una sezione radar totale $\sigma = \sigma^{(c)} + \sigma^{(x)}$.

Possiamo collegare la potenza ricevuta dall'antenna RX , data da (8), alla potenza trasmessa tramite la (10), ottenendo l'*equazione del radar*

$$P_R = A_R S_S^{(c)} = A_R \frac{S_i}{4\pi r_R^2} \sigma^{(c)} \quad (11)$$

Usando l'espressione (1) di S_i e ricordando che :

$$A_R = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_R$$

essendo G_R il guadagno della ricevente, troviamo:

$$P_R = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_T G_R \frac{1}{4\pi r_T^2} \frac{1}{4\pi r_R^2} \sigma^{(c)} P_T \quad (12)$$

Se il radar è monostatico, allora le due antenne coincidono e si avrà quindi :

$$P_R = \frac{G_T^2}{4\pi} \left(\frac{\lambda}{4\pi r_T^2} \right)^2 \sigma^{(c)} P_T \quad (13)$$

La potenza ricevuta dipende dalla 4^a potenza della distanza, ovvero di r_T . Ciò impone un guadagno elevato ed una potenza di trasmissione elevata anche per distanze non troppo grandi.

2 FILTRO ADATTATO

Consideriamo la ricezione di un segnale di energia $x(t)$, noto e di durata finita T_x , immerso in un rumore con spettro di densità di potenza (bilatera) pari a $N_c(\omega)$.

Indichiamo con $X(\omega)$ la trasformata di Fourier del segnale¹, e con \mathcal{E}_x la sua energia, data da

$$\mathcal{E}_x = \int_0^{T_x} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (14)$$

per l'identità di Parseval.

Se questo segnale entra in un filtro di risposta impulsiva $h(t)$, all'uscita sarà presente sia un segnale

$$y(t) = \int_0^t h(t - \tau) x(\tau) d\tau \quad (15)$$

il cui spettro é dato da

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \quad (16)$$

sia un rumore filtrato, con spettro di densità di potenza pari a

$$N_f(\omega) = |H(\omega)|^2 N_c(\omega) \quad (17)$$

La potenza totale del rumore in uscita é pari a

$$\mathcal{N} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} N_f(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 N_c(\omega) d\omega \quad (18)$$

ed é costante nel tempo (il rumore è un segnale aleatorio stazionario).

Il rapporto tra l'ampiezza del segnale in uscita e la potenza media di rumore dipende (oltre che dalla risposta del filtro $h(t)$), dall'istante $t_0 \geq 0$ in cui lo si calcola e vale

$$\frac{E(t_0)}{\mathcal{N}} = \frac{|y(t_0)|^2}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 N_c(\omega) d\omega} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) X(\omega) \exp(j\omega t_0) \frac{d\omega}{2\pi} \right|^2}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 N_c(\omega) d\omega} \quad (19)$$

Ci interessa determinare la risposta impulsiva del filtro che massimizza, fissato t_0 , questo rapporto.

Per massimizzare la (19) ricorriamo alla disuguaglianza di Schwartz, usando come incognita $W(\omega) = H(\omega)\sqrt{N_c(\omega)}$. La (19) diventa allora

$$\frac{E(t_0)}{\mathcal{N}} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) \frac{X(\omega)}{\sqrt{N_c(\omega)}} \exp(j\omega t_0) \frac{d\omega}{2\pi} \right|^2}{2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |W(\omega)|^2 d\omega} \quad (20)$$

¹ Nel seguito indicheremo sempre con la lettera maiuscola la trasformata di una funzione, a meno di avviso contrario

Il numeratore della (20) può essere visto come il prodotto scalare tra

$$W^*(\omega) \quad \text{e} \quad \frac{X(\omega)}{\sqrt{N_c(\omega)}} \exp(j\omega t_0)$$

La disuguaglianza di Schwartz fornisce allora

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) \frac{X(\omega)}{\sqrt{N_c(\omega)}} \exp(j\omega t_0) d\omega \right|^2 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |W(\omega)|^2 d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{X(\omega)}{\sqrt{N_c(\omega)}} \exp(j\omega t_0) \right|^2 d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |W(\omega)|^2 d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X(\omega)|^2}{N_c(\omega)} d\omega \end{aligned} \quad (21)$$

e sostituendo nella (20)

$$\frac{E(t_0)}{\mathcal{N}} \leq \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X(\omega)|^2}{N_c(\omega)} d\omega}{2\pi} \quad (22)$$

L'uguaglianza, nella (21) e nella (22), si ha quando

$$W^*(\omega) = \alpha \frac{X(\omega)}{\sqrt{N_c(\omega)}} \exp(j\omega t_0) \quad (23)$$

essendo α una costante. Sostituendo la definizione di $W(\omega)$ si trova che l'uguaglianza, e quindi il massimo di (20), si ottiene per

$$H^*(\omega) = \alpha \frac{X(\omega)}{N_c(\omega)} \exp(j\omega t_0) \quad \implies \quad H(\omega) = \alpha \frac{X^*(\omega)}{N_c(\omega)} \exp(-j\omega t_0) \quad (24)$$

con α reale², e vale, indipendentemente da α ,

$$\left[\frac{E(t_0)}{\mathcal{N}} \right]_{max} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X(\omega)|^2}{N_c(\omega)} d\omega \quad (25)$$

Il valore massimo del rapporto segnale-rumore é indipendente da t_0 , mentre la risposta ottimale dipende da t_0 . Vedremo però più avanti che il valore di t_0 non può essere troppo piccolo, se il filtro ottimale deve essere realizzabile.

Nel caso di rumore bianco con spettro di densità di potenza (bilatera³) pari a $N_0/2$, basta sostituire $N_0/2$ a $N_c(\omega)$ per ottenere come massimo

$$\left[\frac{E(t_0)}{\mathcal{N}} \right]_{max} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega}{\pi N_0} = \frac{2 \mathcal{E}_x}{N_0} \quad (26)$$

essendo \mathcal{E}_x l'energia del segnale (vedi (14)), e come risposta ottimale

² La scelta di α reale serve ad avere $H(\omega)$ hermitiano, e quindi la sua antitrasformata $h(t)$ reale.

³ Con la definizione adottata, la potenza di rumore in una banda B (misurata in Hz) è pari a $N_0 B$.

$$H(\omega) = \alpha_1 X^*(\omega) \exp(-j\omega t_0) \quad (27)$$

essendo α_1 un'altra costante reale. Un filtro di risposta armonica (24) o (27) é detto *filtro adattato*.

La risposta impulsiva del filtro adattato si ottiene antitrasformando la (24). Nel caso di rumore bianco, la risposta armonica, a meno della costante α_1 , si ottiene da (27) come

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \exp(j\omega t) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega) \exp(-j\omega t_0) \exp(j\omega t) d\omega \quad (28)$$

La risposta impulsiva cercata $h(t)$ é reale, e quindi possiamo coniugare il secondo membro senza cambiare il primo. Segue

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp(j\omega t_0) \exp(-j\omega t) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp[j\omega(t_0 - t)] d\omega = x(t_0 - t) \end{aligned} \quad (29)$$

La risposta impulsiva del filtro adattato é quindi (per rumore bianco) pari al segnale ribaltato rispetto a $t = 0$ e traslato di t_0 . La traslazione é richiesta per garantire la causalit  del filtro. Dalla Fig. 1 si vede che il semplice ribaltamento (conseguenza della coniugazione di $X(\omega)$) produce una risposta impulsiva non fisicamente realizzabile.

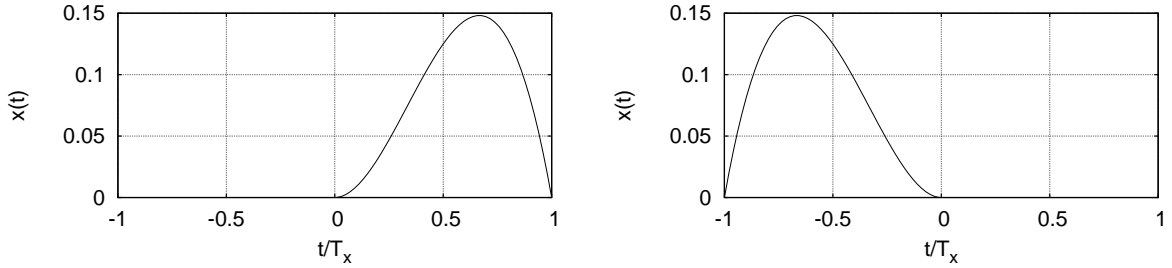


Fig.1: Segnale di ingresso $x(t)$ e segnale ribaltato $x(-t)$

Poich  la risposta impulsiva deve essere nulla per $t < 0$ (causalit ), allora la traslazione deve essere maggiore o uguale della durata T_x del segnale $t_0 \geq T_x$, altrimenti il filtro resta non fisicamente realizzabile, come in Fig. 2a, in cui $t_0 = 0.5 T_x$. In Fig. 2b   riportato invece il caso di traslazione $t_0 = 1.5 T_x$, per la quale il filtro   realizzabile

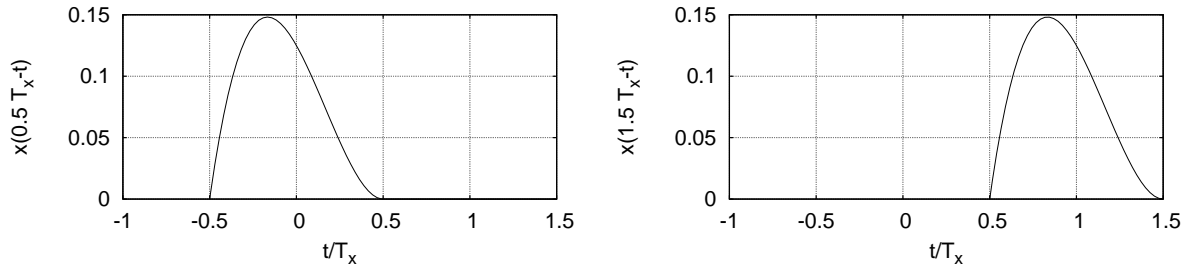


Fig.2: Filtro non realizzabile e realizzabile

D'altra parte, il valore di t_0 é anche l'istante in cui viene campionato, ed esaminato, il segnale di uscita, e quindi conviene che sia il piú piccolo possibile. Ne segue che si sceglie normalmente $t_0 = T_x$, ottenendo la soluzione standard riportata in Fig. 3.

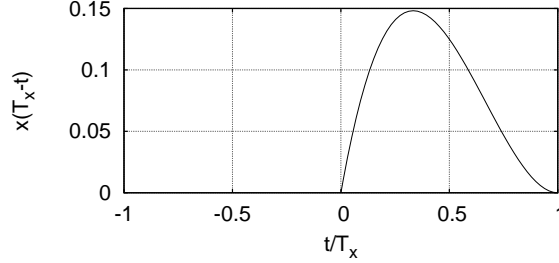


Fig.3: Filtro adattato standard (per rumore bianco)

La teoria sviluppata si applica sia a segnali in banda base, sia a segnali modulati, o piú generalmente a banda stretta. Per questi ultimi conviene lavorare nel dominio trasformato. Sia allora

$$x(t) = x_c(t) \cos \omega_0 t - x_s(t) \sin \omega_0 t = \text{Re} \left\{ \left[x_c(t) + j x_s(t) \right] e^{j \omega_0 t} \right\} = \text{Re} [X(t) e^{j \omega_0 t}] \quad (30)$$

un generico segnale a banda stretta, di durata T_x , e sia $\hat{X}(\omega)$ la sua trasformata. Il filtro adattato é un filtro passa-banda con risposta impulsiva

$$h(t) = \text{Re} [H(t) e^{j \omega_0 t}]$$

la cui trasformata (ovvero la funzione di trasferimento) è data dalla⁴ (27)

$$H(\omega) = \alpha X^*(\omega) e^{-j \omega T_x} \quad (31)$$

Conviene determinare la relazione tra le componenti in bassa frequenza $H(t)$ ed $X(t)$. Lo spettro $X_{BB}(\omega)$ di $X(t)$ si ottiene da quello di $x(t)$ eliminando la parte per $\omega < 0$, raddoppiandolo e infine traslandolo nell'origine (ovvero valutandolo in $\omega + \omega_0$). Applicando queste operazioni ad entrambi i membri della (31) segue per lo spettro di $H(t)$

$$H_{BB}(\omega) = \alpha X_{BB}^*(\omega) e^{-j(\omega + \omega_0)T_x} \quad (32)$$

L'antitrasformata si ottiene analogamente a (28,29):

$$\begin{aligned} H(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{BB}(\omega) \exp(j\omega t) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_{BB}^*(\omega) \exp[-j(\omega + \omega_0)T_x] \exp(j\omega t) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_{BB}^*(\omega) \exp[j\omega(t - T_x)] d\omega e^{-j\omega_0 T_x} \end{aligned}$$

Passando ai coniugati e ricordando che $X(t)$ e $H(t)$ sono complessi:

⁴ Assumiamo da ora in poi rumore bianco. Per rumore non bianco, occorre ovviamente partire dalla (23) e non dalla (27).

$$\begin{aligned}
H^*(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_{BB}(\omega) \exp[j\omega(T_x - t)] d\omega e^{j\omega_0 T_x} \\
&= X(T_x - t) e^{j\omega_0 T_x}
\end{aligned}$$

ovvero

$$H(t) = X^*(T_x - t) e^{-j\omega_0 T_x} \quad (33)$$

L'energia⁵ di $x(t)$, necessaria a calcolare, mediante la (26) il rapporto segnale-rumore all'uscita del filtro adattato, vale

$$\mathcal{E}_x = \int_0^{T_x} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^{T_x} |x_c(t) + jx_s(t)|^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^{T_x} |X(t)|^2 dt = \frac{1}{4\pi} \int |X_{BB}(\omega)|^2 d\omega \quad (34)$$

Per quanto riguarda l'uscita del filtro $y(t)$ si ha ovviamente $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$ e, usando la (31) segue

$$Y(\omega) = \alpha |X(\omega)|^2 e^{-j\omega T_x} \implies Y_{BB}(\omega) = 2\alpha |X(\omega + \omega_0)|^2 e^{-j(\omega + \omega_0)T_x} \quad (35)$$

e ricordando che $X_{BB}(\omega) = 2X(\omega + \omega_0)$ si ottiene anche

$$Y_{BB}(\omega) = \frac{1}{2} \alpha |X_{BB}(\omega)|^2 e^{-j(\omega + \omega_0)T_x} \quad (36)$$

3 FILTRO ADATTATO A UN CHIRP

Vista la loro importanza nei sistemi radar, e in particolare nei radar di immagine, vediamo in dettaglio l'effetto del filtro adattato (per rumore bianco) su di un chirp di ampiezza unitaria, con durata T_c e banda B_c

$$a(t) = \cos[\omega_0 t + \alpha_c t^2]$$

essendo

$$\alpha_c = \frac{\pi B_c}{T_c} = \frac{\Delta\omega}{2T_c} \quad \text{con} \quad \Delta\omega = 2\pi B_c$$

la costante che determina la velocità di modulazione del chirp. Il chirp é un segnale *SSB*, con

$$A(t) = \exp j\alpha_c t^2$$

e energia

⁵ Vedi trattazione segnali a banda stretta nella parte sulla polarizzazione.

$$\mathcal{E}_a = \frac{1}{2} \int_0^{T_c} |A(t)|^2 dt = \frac{T_c}{2} \quad (37)$$

La trasformata di Fourier del chirp vale¹, per $B_c T_c \gg 1$,

$$A(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi T_c}{\Delta\omega}} e^{j\frac{\pi}{4}} \exp \left[j \frac{T_c}{2\Delta\omega} (\omega - \omega_0)^2 \right] & \omega \in [\omega_0, \omega_0 + \Delta\omega] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (38)$$

(oltre al complesso coniugato di questa per $\omega < 0$) per cui

$$A_{BB}(\omega) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2\pi T_c}{\Delta\omega}} e^{j\frac{\pi}{4}} \exp \left[j \frac{T_c}{2\Delta\omega} \omega^2 \right] & \omega \in [0, \Delta\omega] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In assenza del filtro adattato si ha

$$\left[\frac{E(T_x)}{\mathcal{N}} \right]_{in} = \frac{1}{N_0 B_c} \quad (39)$$

essendo $\mathcal{N} = N_0 B_c$. Usando un filtro adattato (33), con $T_x = T_c$ e $\alpha = 2/T_c$ (e comunque a meno di una costante), si ha in uscita, da (36)

$$\begin{aligned} Y(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\Delta\omega} Y_{BB}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi T_c} \int_0^{\Delta\omega} |A_{BB}(\omega)|^2 e^{-j(\omega + \omega_0)T_c} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi T_c} \frac{2\pi T_c}{\Delta\omega} e^{-j\omega_0 T_c} \int_0^{\Delta\omega} \exp[j\omega(t - T_c)] d\omega = \frac{1}{\Delta\omega} e^{-j\omega_0 T_c} \int_0^{\Delta\omega} \exp[j\omega(t - T_c)] d\omega \end{aligned} \quad (40)$$

usando la (38).

L'integrale nella (40) vale

$$\int_0^{\Delta\omega} \exp[j\omega(t - T_c)] d\omega = \Delta\omega \exp \left[j \frac{\Delta\omega}{2} (t - T_c) \right] \text{sinc} \left[\frac{\Delta\omega}{2} (t - T_c) \right]$$

e sostituendo in $Y(t)$ segue

$$Y(t) = e^{-j\omega_0 T_c} \exp \left[j \frac{\Delta\omega}{2} (t - T_c) \right] \text{sinc} \left[\frac{\Delta\omega}{2} (t - T_c) \right] \quad (41)$$

Alla (41) corrisponde

$$y(t) = \text{Re} [Y(t) e^{j\omega_0 t}] = \text{sinc} \left[\frac{\Delta\omega}{2} (t - T_c) \right] \cos \left[\left(\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \right) (t - T_c) \right] \quad (42)$$

¹ Vedi esempi di segnali a banda stretta nella parte sulla polarizzazione.

e quindi il chirp filtrato diventa un impulso (modulato *DSB*) di larghezza (a -3 dB) pari a $2\pi/\Delta\omega=1/B_c$, centrato in T_c , come di può vedere anche da

$$|Y(t)| = \left| \text{sinc} \left[\frac{\Delta\omega}{2} (t - T_c) \right] \right| \quad (43)$$

Il rapporto segnale–rumore all’uscita del filtro vale, da (37),

$$\left[\frac{E(T_x)}{\mathcal{N}} \right]_{max} = \frac{2\mathcal{E}_a}{N_0} = \frac{T_c}{N_0}$$

con un miglioramento pari a $B_c T_c$, che prende il nome di fattore di compressione del chirp.

4 DIFFUSIONE DI VOLUME – ESTINZIONE

Nella discussione del trasferimento radiativo, abbiamo visto che é presente il fenomeno della diffusione di volume, ma lo abbiamo introdotto in termini molto euristici, e lo abbiamo trascurato nelle applicazioni. Vogliamo ora studiare quantitativamente questo fenomeno.

Consideriamo allora un volume cilindrico $dV = d\Sigma dr$, allineato con \underline{i}_i , e contenente un gran numero di diffusori indipendenti, ciascuno caratterizzato dalla sua sezione radar complessiva σ_i . Supponiamo dV sufficientemente piccolo, in modo che la densità di potenza incidente S_T sia costante. Supponiamo inoltre che le reirradiazioni dei vari oggetti siano tra loro incorrelate¹. Allora la potenza totale reirradiata a distanza r , in direzione (ϑ_s, φ_s) può essere espressa (purchè r sia in campo lontano) in termini di sezione radar

$$S_R = \frac{S_T}{4\pi r^2} \sum_i \sigma_i(\underline{i}_s, \underline{i}_i) = \frac{S_T}{4\pi r^2} \sigma_{tot}(\underline{i}_s, \underline{i}_i) \quad (44)$$

in cui abbiamo definito una sezione radar complessiva σ_{tot} del volume dV come somma delle singole sezioni radar:

$$\sigma_{tot}(\underline{i}_s, \underline{i}_i) = \sum_i \sigma_i(\underline{i}_s, \underline{i}_i) \quad (45)$$

La sezione radar totale, come del resto quelle delle singole particelle, dipende dalla direzione \underline{i}_i di incidenza, e dalla direzione \underline{i}_s di osservazione. Tale dipendenza è stata esplicitata in quanto successivamente occorrerà considerare più direzioni. Si noti anche che, per reciprocità, scambiare (a parità di polarizzazioni) la direzione di incidenza e quella di diffusione non modifica la sezione radar.

Notiamo che, in particolare, se le particelle sono identiche, e identicamente orientate, la sezione radar totale è pari a N volte la sezione radar di un singolo oggetto diffusore. Se invece le particelle non sono tutte uguali, la sezione radar totale dipende dalla legge di distribuzione delle particelle. Assumendo per semplicità che le particelle siano tutte sferiche, con raggio R differente, questa distribuzione² $\mathcal{N}(R)$ è tale che la densità di particelle per unità di volume vale

$$N_p = \int_0^\infty \mathcal{N}(R) dR$$

mentre se l'integrale è esteso tra R_1 ed R_2 , il suo valore è la densità (per unità di volume) delle particelle con raggio compreso tra R_1 ed R_2 . Usando tale distribuzione, la (45) diventa

$$\sigma_{tot}(\underline{i}_s, \underline{i}_i) = \int_0^\infty \mathcal{N}(R) \sigma(R; \underline{i}_s, \underline{i}_i) dR dV$$

essendo $\sigma(R; \underline{i}_s, \underline{i}_i)$ la sezione radar di una particella di raggio R .

La potenza complessivamente diffusa in tutte le direzioni si ottiene integrando S_R su tutte le direzioni \underline{i}_s e vale

¹ L'ipotesi di reirradiazioni incorrelate implica che è possibile sommare direttamente le potenze reirradiate, e non sommare prima i campi reirradiati, valutandone la relativa interferenza

² Da un punto di vista pratico, questa distribuzione, se normalizzata, ha le stesse proprietà di una *pdf*.

$$P_s = \int S_R r^2 d\Omega_s = \frac{S_T}{4\pi} \int \sigma_{tot}(\underline{i}_s, \underline{i}_i) d\Omega_s \quad (46)$$

La variazione di potenza in dV , dovuta alla sola diffusione della potenza incidente, ovvero la differenza tra la potenza in uscita P_o e quella incidente P_i , risulta pari a $-P_s$

$$dP = P_o - P_i = -P_s = -\frac{S_T}{4\pi} \int \sigma_{tot}(\underline{i}_s, \underline{i}_i) d\Omega_s \quad (47)$$

Applichiamo ora la (47) a un problema di trasferimento radiativo. Consideriamo quindi il volume dV , contenuto in un mezzo continuo³, e compreso tra le ascisse r e $r + dr$ di Fig. 1, e sia \underline{i}_i la direzione verso il sensore in basso. Pertanto S_T é il vettore di Poynting che incide sulla superficie alla ascissa r , e naturalmente

$$P_i = S_T d\Sigma$$

dove $d\Sigma$ é la sezione (costante) del volume dV .

Allo stesso modo possiamo considerare il vettore di Poynting S_o che attraversa la sezione di ascissa $r + dr$, ottenendo

$$P_o = S_o d\Sigma$$

Per collegare queste considerazioni alla equazione del trasferimento radiativo, occorre esprimere i risultati precedenti in termini di brillantezza. Indichiamo con B la brillantezza *incidente*, ovvero la brillantezza che il sensore misurerebbe se dalla sezione alla ascissa r fino al sensore fosse fatto il vuoto. Dalla definizione di brillantezza (vedi parte sulla *Radiometria*) segue

$$S_T = B \Delta\Omega \quad (48)$$

Allo stesso modo, la brillantezza $B + dB$ *uscente* da dV , ovvero quella che il sensore misurerebbe se il vuoto fosse fatto a partire da $r + dr$, si trova da

$$S_o = (B + dB) \Delta\Omega \quad (49)$$

Sostituendo nella (47)

$$(B + dB) \Delta\Omega d\Sigma - B \Delta\Omega d\Sigma = -\frac{B \Delta\Omega}{4\pi} \int \sigma_{tot}(\underline{i}_s, \underline{i}_i) d\Omega_s$$

ovvero

$$dB d\Sigma = -\frac{B}{4\pi} \int \sigma_{tot}(\underline{i}_s, \underline{i}_i) d\Omega_s \quad (50)$$

Moltiplicando e dividendo per la lunghezza dr del volume dV

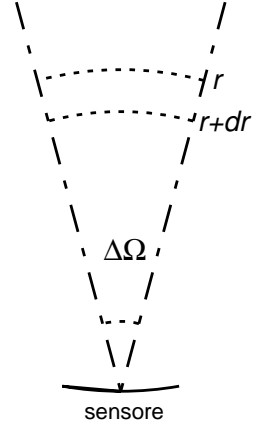


Fig. 1: Geometria.

³ Per ulteriori dettagli si veda il paragrafo sul *trasferimento radiativo* nella parte sulla radiometria, di cui queste note sono un complemento.

$$dB = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{dr} \frac{B}{d\Sigma} \int \sigma_{tot}(\underline{i}_s, \underline{i}_i) d\Omega_s dr = -\frac{1}{4\pi} B \int \frac{\sigma_{tot}(\underline{i}_s, \underline{i}_i)}{dV} d\Omega_s dr \quad (51)$$

Se indichiamo con $\langle \sigma_{tot} \rangle$ la media di $\sigma_{tot}(\underline{i}_s, \underline{i}_i)$ rispetto alla direzione di diffusione (coincidente, per reciprocità, con la media rispetto alle direzioni di incidenza)

$$\langle \sigma_{tot} \rangle = \frac{1}{4\pi} \int \sigma_{tot}(\underline{i}_s, \underline{i}_i) d\Omega_s \quad (52)$$

segue infine

$$dB = -B \frac{\langle \sigma_{tot} \rangle}{dV} dr \quad (53)$$

Pertanto la diffusione attenua anch'essa il flusso di brillantezza, esattamente come l'assorbimento, con la variazione di brillantezza proporzionale alla brillantezza incidente. Posto

$$k_s = \frac{\langle \sigma_{tot} \rangle}{dV} \quad (54)$$

si può scrivere in maniera formalmente identica a quanto si fa per l'assorbimento

$$dB = -k_s B dr \quad (55)$$

Si può pertanto tener conto anche della attenuazione dovuta alla diffusione semplicemente sostituendo al coefficiente di assorbimento k_a il *coefficiente di estinzione*

$$k_e = k_a + k_s \quad (56)$$

L'importanza relativa di assorbimento e diffusione è misurata da un parametro detto *albedo* (o albedo di singola diffusione) definito da

$$a = \frac{k_s}{k_e} \quad (57)$$

Un albedo prossimo a 0 implica una scarsa importanza degli effetti della diffusione, mentre un albedo prossimo a 1 è caratteristico di fenomeni in cui la diffusione ha il ruolo prevalente.

5 DIFFUSIONE DI VOLUME – LA FUNZIONE DI FASE

Oltre a contribuire alla estinzione, la diffusione gioca anche il ruolo di sorgente per la propagazione di brillantezza in direzione \underline{i}_s . Se il volume dV è investito da un flusso di brillantezza in direzione \underline{i}_i , diffonde. La brillantezza diffusa in direzione \underline{i}_s (ovvero osservata da un sensore posto nella direzione (ϑ_s, φ_s) , avendo fatto il vuoto tra il volume dV e il sensore) risulta pari al rapporto

$$B_s = \frac{S_R}{\Delta\Omega_s} \quad (58)$$

essendo $\Delta\Omega_s$ l'angolo solido sotto cui il sensore (posto a distanza r) vede il volume dV . Tale angolo solido è pari a:

$$\Delta\Omega_s = \frac{A_s}{r^2} \quad (59)$$

essendo A_s l'area della sezione del volume dV , vista dalla direzione (ϑ_s, φ_s) .

Tale B_s si aggiunge a quella che già si propaga in direzione \underline{i}_s , e quindi costituisce un termine di sorgente.

Ovviamente, in un mezzo continuo, il flusso di brillantezza si ha in tutte le direzioni, e quindi il flusso di brillantezza diffuso in una (qualunque) direzione dipende dal flusso proveniente da tutte le direzioni. Calcoliamo allora la brillantezza diffusa in una direzione qualunque \underline{i}_2 , che si ottiene integrando B_s rispetto alle direzioni di incidenza \underline{i}_1 . Considerando un angolo solido elementare $d\Omega_1$ centrato su \underline{i}_1 , la densità di potenza incidente da tale angolo solido può essere espressa come

$$S_T = B(\underline{i}_1) d\Omega_1 \quad (60)$$

in cui abbiamo esplicitato la direzione da cui proviene il flusso di brillantezza. Sostituendo in B_s l'espressione di S_R in termini di sezione radar e integrando sulle direzioni di arrivo si trova

$$B_s = \frac{1}{\Delta\Omega_s} \int \frac{1}{4\pi r^2} \sigma_{tot}(\underline{i}_2, \underline{i}_1) B(\underline{i}_1) d\Omega_1 = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\sigma_{tot}(\underline{i}_2, \underline{i}_1)}{A_s} B(\underline{i}_1) d\Omega_1 \quad (61)$$

Moltiplichiamo e dividiamo per k_s utilizzando la sua definizione

$$B_s = k_s \frac{dV}{\langle \sigma_{tot} \rangle} \frac{1}{4\pi} \int \frac{\sigma_{tot}(\underline{i}_2, \underline{i}_1)}{A_s} B(\underline{i}_1) d\Omega_1 \quad (62)$$

Per inserire questo contributo nella equazione del trasferimento radiativo, occorre calcolare la brillantezza diffusa verso il sensore nella geometria della Fig. 1 del paragrafo precedente. Quindi \underline{i}_2 coincide con \underline{i}_i . Sviluppiamo, tenendo conto che $A_s = d\Sigma = dV/dr$:

$$B_s = k_s \frac{dV}{A_s} \frac{1}{4\pi} \int \frac{\sigma_{tot}(\underline{i}_i, \underline{i}_1)}{\langle \sigma_{tot} \rangle} B(\underline{i}_1) d\Omega_1 = k_s \frac{1}{4\pi} \int \frac{\sigma_{tot}(\underline{i}_i, \underline{i}_1)}{\langle \sigma_{tot} \rangle} B(\underline{i}_1) d\Omega_1 dr \quad (63)$$

Definiamo *funzione di fase* la quantità

$$\psi(\underline{i}_2, \underline{i}_1) = \frac{\sigma_{tot}(\underline{i}_2, \underline{i}_1)}{\langle \sigma_{tot} \rangle} \quad (64)$$

simmetrica rispetto alle direzioni di incidenza e di uscita. Usandola, possiamo esprimere l'incremento del flusso di brillantezza dovuto alla diffusione nella direzione del flusso stesso come

$$B_s = k_s \frac{1}{4\pi} \int \psi(\underline{i}_i, \underline{i}_1) B(\underline{i}_1) d\Omega_1 dr \quad (65)$$

dove la prima direzione di ψ è quella verso il sensore.

Il valor medio della funzione di fase è unitario

$$\langle \psi \rangle = \frac{1}{4\pi} \int \psi(\underline{i}_2, \underline{i}_1) d\Omega_1 = 1 \quad (66)$$

e quindi possiamo interpretare

$$\frac{1}{4\pi} \psi(\underline{i}_2, \underline{i}_1) \quad (67)$$

come la probabilità che un fotone proveniente dalla direzione \underline{i}_1 sia diffuso nella direzione \underline{i}_2

Normalmente la funzione di fase dipende solo dall'angolo Θ tra le direzioni di incidenza \underline{i}_1 e di diffusione \underline{i}_2 , che può essere calcolato come

$$\cos \Theta = \underline{i}_1 \cdot \underline{i}_2 \quad (68)$$

6 EFFETTI DOVUTI ALLA POLARIZZAZIONE

Finora abbiamo considerato il solo flusso di potenza, senza tener conto della polarizzazione dei campi considerati. In realtà la diffusione, come la sezione radar, dipende dalla polarizzazione del campo incidente, e dalla polarizzazione di osservazione.

Il campo andrebbe quindi descritto mediante i suoi quattro parametri di Stokes, mentre nel paragrafo precedente abbiamo utilizzato una descrizione incompleta, limitata, nella sostanza, al solo primo parametro s_0 . Ricordiamo infatti che il parametro s_0 esprime (a meno di una costante $1/2\zeta$) il vettore di Poynting totale, e quindi é collegato alla brillantezza:

$$s_0 = 2\zeta B \Delta\Omega$$

Per valutare gli effetti di polarizzazione, raggruppiamo i parametri di Stokes in un vettore numerico

$$\underline{S} = [s_0, s_1, s_2, s_3]$$

e normalizziamoli rispetto a s_0

$$\underline{S} = s_0 \left[1, \frac{s_1}{s_0}, \frac{s_2}{s_0}, \frac{s_3}{s_0} \right] \quad (69)$$

Possiamo generalizzare la (65) sostituendo le brillanze con i vettori \underline{S} , e ovviamente la funzione di fase con una matrice di fase. Indicando rispettivamente con $\underline{S}^{(s)}$ ed $\underline{S}^{(i)}$ i parametri dell'onda diffusa e incidente, possiamo scrivere,

$$\underline{S}^{(s)} = k_s \frac{1}{4\pi} \int \underline{\psi}(\underline{i}_s, \underline{i}_i) \underline{S}^{(i)}(\underline{i}_i) d\Omega_i dr \quad (70)$$

in cui la funzione di fase diventa una matrice di fase.

In particolare l'intensità dell'onda diffusa, $s_0^{(s)}$ dipende da tutti e quattro i parametri dell'onda incidente. Se tuttavia quest'ultima è completamente non polarizzata

$$s_1^{(i)} = s_2^{(i)} = s_3^{(i)} = 0 \quad \implies \quad \underline{S}^{(i)} = s_0^{(i)} [1, 0, 0, 0]$$

allora risulta

$$s_0^{(s)} = k_s \frac{1}{4\pi} \int \psi_{00}(\underline{i}_s, \underline{i}_i) s_0^{(i)}(\underline{i}_i) d\Omega_i dr \quad (71)$$

e quindi la funzione di fase (64) coincide col primo elemento della matrice $\underline{\underline{\psi}}$.

Naturalmente, anche gli altri elementi di $\underline{S}^{(s)}$ saranno diversi da zero:

$$s_q^{(s)} = k_s \frac{1}{4\pi} \int \psi_{q0}(\underline{i}_s, \underline{i}_i) s_0^{(i)}(\underline{i}_i) d\Omega_i dr$$

e quindi, dopo la diffusione, la radiazione può diventare parzialmente (o perfino completamente) polarizzata.

Si noti che queste considerazioni sulla diffusione non si applicano solo alla radiometria, ma sono utilizzabili anche per studiare la propagazione di segnali Radar o di telecomunicazioni in un mezzo diffondente. La (71), ad esempio, può essere utile per valutare la perdita di polarizzazione di un segnale che si propaga in un tale mezzo.

7 SCATTERING DI RAYLEIGH

Il caso più semplice di diffusione è quello da particelle piccole rispetto alla lunghezza d'onda. Si parla allora di scattering di Rayleigh¹. Alle frequenze delle microonde questo è anzi il caso tipico, mentre in ottica si ha scattering di Rayleigh solo per la diffusione a livello molecolare (come quella che si ha in aria limpida).

L'ipotesi di particelle piccole consente le seguenti approssimazioni

- i) il campo incidente sulla particella è costante
- ii) le correnti indotte nella particella irradiano come fossero concentrate in un solo punto
- iii) le correnti indotte nella particella sono costanti²

Pertanto la diffusione da parte della particella è calcolabile come reirradiazione di un singolo dipolo elettrico, parallelo col campo incidente.

Assumiamo particelle sferiche, di costante dielettrica relativa (complessa) ε_r . Il valor medio spaziale della sezione radar di una singola particella di raggio r vale

$$\langle \sigma \rangle = \frac{2}{3\pi} \lambda_0^2 \chi^6 |K|^2 \quad (72)$$

essendo λ_0 la lunghezza d'onda nel vuoto, $\chi = k_0 r$, con k_0 costante di propagaazione nel vuoto ($k_0 \lambda_0 = 2\pi$), una misura adimensionalizzata del raggio della particella e

$$K = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \quad (73)$$

è una misura del rapporto tra campo indotto nella particella e campo esterno.

Questa espressione per $\langle \sigma \rangle$ vale in teoria solo per $r \rightarrow 0$. In pratica la si considera utilizzabile se $|\varepsilon_r| \chi^2 < 0.25$. Per valori superiori la sua precisione peggiora (Vedi *Ulaby-Moore-Fung* sect. 5.8 e 5.9).

¹ Se le particelle hanno costante dielettrica elevata, le loro dimensioni devono essere piccole anche rispetto alla lunghezza d'onda interna; non si ha scattering di Rayleigh, ad es., nel caso di particelle di buon conduttore

² È qui che risulta necessaria l'ipotesi di particella piccola rispetto alla lunghezza d'onda interna

Se vi sono N_p particelle uguali per unità di volume (e quindi $N_p dV$ nel volume dV), il coefficiente di diffusione vale

$$k_s = \frac{\langle \sigma_{tot} \rangle}{dV} = \frac{N_p dV \langle \sigma \rangle}{dV} = \frac{2}{3\pi} N_p \lambda_0^2 \chi^6 |K|^2 \quad (74)$$

Se ε_r è complesso, vi sarà anche attenuazione, e il relativo coefficiente vale

$$k_a = \frac{1}{\pi} N_p \lambda_0^2 \chi^3 \text{Im}(-K) \quad (75)$$

Il rapporto k_s/k_a è dell'ordine di grandezza di χ^3 . Pertanto la diffusione ha un effetto sensibile solo per particelle abbastanza grandi o sostanzialmente prive di perdite (ad esempio il caso della diffusione della luce solare da parte di aria limpida) . Si noti comunque che nel primo caso siamo al di fuori delle ipotesi di diffusione di Rayleigh, e quindi le relazioni di questo paragrafo non sono applicabili (se non come primissima approssimazione).

Se le particelle non sono tutte uguali, le espressioni di k_s e di k_a vanno modificate. Se $\mathcal{N}(\chi)$ è la distribuzione di particelle di parametro χ , e quindi la densità di particelle per unità di volume vale

$$N_p = \int_0^\infty \mathcal{N}(\chi) d\chi$$

allora

$$k_s = \frac{2}{3\pi} \lambda_0^2 |K|^2 \int_0^\infty \mathcal{N}(\chi) \chi^6 d\chi \quad (76)$$

e analogamente per k_a .

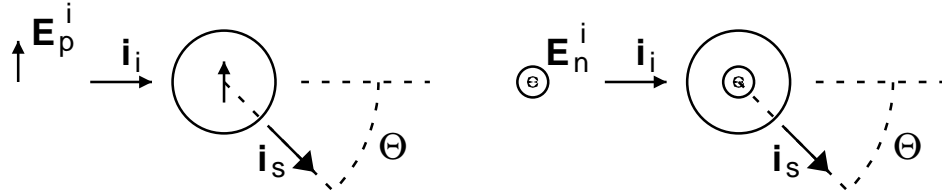


Fig. 1: Dipoli indotti e direzioni relative.

Oltre ai coefficienti di attenuazione e scattering, occorre calcolare anche la funzione di fase per la diffusione. Consideriamo allora il campo incidente con le due componenti E_p^i , nel piano individuato da $\underline{i}_s, \underline{i}_i$, e E_n^i ortogonale a questo piano (Fig. 1). I due dipoli indotti saranno proporzionali, e con lo stesso fattore in modulo e fase, ai campi incidenti, e così il campo reirradiato (a grande distanza). Solo che in quest'ultimo caso occorre tener conto che le ampiezze dipendono dall'angolo tra la direzione di reirradiazione e il dipolo. Per E_n^i tale angolo è pari a $\pi/2$, mentre per E_p^i vale

$$\frac{\pi}{2} + \Theta$$

Quindi i campi diffusi, a distanza r_R dalla particella, sono pari a

$$E_p^d = \frac{\gamma}{\sqrt{4\pi} r_R} E_p^i \cos \Theta \quad E_n^d = \frac{\gamma}{\sqrt{4\pi} r_R} E_n^i \quad (77)$$

Per ottenere la funzione di fase possiamo considerare una onda incidente completamente non polarizzata, a cui corrisponde una ampiezza del campo diffuso proporzionale a

$$\frac{1 + \cos^2 \Theta}{2}$$

Possiamo allora scrivere

$$\psi(\underline{i}_s, \underline{i}_i) = \mathcal{P} \frac{1 + \cos^2 \Theta}{2} \quad (78)$$

e determinare la costante incognita \mathcal{P} dalla condizione di normalizzazione della funzione di fase

$$\frac{1}{4\pi} \int \psi(\underline{i}_s, \underline{i}_i) d\Omega_i = \frac{1}{4\pi} \mathcal{P} \int \frac{1 + \cos^2 \Theta}{2} d\Omega = 1$$

Calcoliamo l'integrale in coordinate polari Θ, Φ . Rispetto all'angolo Φ di rotazione attorno a \underline{i}_i l'integrando è costante, e quindi tale integrale vale 2π . Resta

$$1 = \frac{\mathcal{P}}{4} \int_0^\pi (1 + \cos^2 \Theta) \sin \Theta d\Theta = \frac{\mathcal{P}}{4} \int_{-1}^1 (1 + x^2) dx = \frac{\mathcal{P}}{2} \int_0^1 (1 + x^2) dx = \frac{\mathcal{P}}{2} \left(x + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1$$

Il termine in parentesi vale $1 + 1/3 = 4/3$ per cui $\mathcal{P} = 3/2$ e

$$\psi(\underline{i}_s, \underline{i}_i) = \frac{3}{4} (1 + \cos^2 \Theta) \quad (79)$$

La semplicità del meccanismo di diffusione consente anche di valutare la polarizzazione dell'onda diffusa. Infatti utilizzando le relazioni tra i campi diffusi ed incidenti si ha, in una data direzione:

$$\begin{aligned} s_0^d &= \langle |E_n^d|^2 \rangle + \langle |E_p^d|^2 \rangle = \frac{|\gamma|^2}{4\pi r_R^2} [\langle |E_n^i|^2 \rangle + \langle |E_p^i|^2 \rangle \cos^2 \Theta] \\ &= \frac{|\gamma|^2}{4\pi r_R^2} \left[\left(\frac{s_0^i + s_1^i}{2} \right) + \left(\frac{s_0^i - s_1^i}{2} \right) \cos^2 \Theta \right] \\ &= \frac{|\gamma|^2}{4\pi r_R^2} \left[s_0^i \left(\frac{1 + \cos^2 \Theta}{2} \right) + s_1^i \frac{\sin^2 \Theta}{2} \right] \end{aligned} \quad (80)$$

Analogamente, se δ è la differenza di fase tra le due componenti del campo

$$\begin{aligned} s_1^d &= \frac{|\gamma|^2}{4\pi r_R^2} [\langle |E_n^i|^2 \rangle - \langle |E_p^i|^2 \rangle \cos^2 \Theta] = \frac{|\gamma|^2}{4\pi r_R^2} \left[s_0^i \frac{\sin^2 \Theta}{2} - s_1^i \left(\frac{1 + \cos^2 \Theta}{2} \right) \right] \\ s_2^d &= \langle |E_n^i| |E_p^i| \cos \delta \rangle \cos \Theta = \frac{|\gamma|^2}{4\pi r_R^2} s_2^i \cos \Theta \\ s_3^d &= \langle |E_n^i| |E_p^i| \sin \delta \rangle \cos \Theta = \frac{|\gamma|^2}{4\pi r_R^2} s_3^i \cos \Theta \end{aligned} \quad (81)$$

Nel caso particolare di campo incidente completamente non polarizzato, si ha

$$s_0^d = \frac{|\gamma|^2}{4\pi r_R^2} s_0^i \left(\frac{1 + \cos^2 \Theta}{2} \right) \quad s_1^d = \frac{|\gamma|^2}{4\pi r_R^2} s_0^i \frac{\sin^2 \Theta}{2} \quad s_2^d = s_3^d = 0$$

e pertanto, ad esclusione del caso $\sin \Theta = 0$, la radiazione diffusa risulta polarizzata parzialmente, con polarizzazione lineare per la parte polarizzata. Il grado di polarizzazione risulta

$$m(\Theta) = \frac{\sqrt{(s_1^d)^2 + (s_2^d)^2 + (s_3^d)^2}}{s_0^d} = \frac{\sin^2 \Theta}{1 + \cos^2 \Theta} \quad (82)$$

Segue quindi che per $\Theta = \pi/2$, la radiazione risulta completamente polarizzata. È questo il caso della radiazione solare vista dalla superficie terrestre.

Infine, per calcolare il valore di $|\gamma|^2$, partiamo dalla definizione di sezione radar (9), considerando però separatamente le varie polarizzazioni. Risulta, da (77), $\sigma_{pn} = \sigma_{np} = 0$, mentre

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} &= \frac{4\pi r_R^2 S_{Rn}}{S_{Tn}} = \frac{4\pi r_R^2 |E_n^d|^2}{|E_n^i|^2} = |\gamma|^2 \\ \sigma_{pp} &= |\gamma|^2 \cos^2 \Theta \end{aligned} \quad (83)$$

Possiamo confrontare la (83) con la (72) calcolando la media (spaziale e sulle polarizzazioni) della sezione radar:

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\sigma_{nn} + \sigma_{pp}}{2} d\Omega_i = |\gamma|^2 \frac{1}{4\pi} \int \frac{1 + \cos^2 \Theta}{2} d\Omega_i = |\gamma|^2 \frac{1}{4\pi} \int \frac{2}{3} \psi(\underline{i}_s, \underline{i}_i) d\Omega_i$$

avendo usato la (79). Per la proprietà (66) della funzione di fase segue allora

$$|\gamma|^2 = \frac{3}{2} \langle \sigma \rangle = \frac{1}{\pi} \lambda_0^2 \chi^6 |K|^2 \quad (84)$$

avendo usato la (72) per esprimere la media della sezione radar in funzione dei parametri della particella.

8 COMPONENTE DIRETTA E DIFFUSA

L'equazione del trasferimento radiativo in presenza di diffusione diventa¹

$$\frac{dB(\underline{i}_s)}{d\tau} = -B(\underline{i}_s) + (1 - a)J_a + a \frac{1}{4\pi} \int \psi(\underline{i}_s, \underline{i}_i) B(\underline{i}_i) d\Omega_i \quad (85)$$

¹ In questo paragrafo l'equazione verrà espressa in termini di brillantezza per generalità; nel caso delle microonde basta sostituire alla brillantezza la temperatura di brillantezza per riottenere la forma standard

in cui a è l'albedo, τ lo spessore ottico e vengono esplicitate le direzioni di propagazione della brillantezza. Naturalmente vi è una equazione per ogni direzione \underline{i}_s . Si noti inoltre che la brillantezza B varia anche con la posizione, ma tale variazione verrà sottintesa.

La sorgente termica J_a è pari, in condizioni di equilibrio termodinamico, alla densità spettrale di brillantezza dovuta alla temperatura termodinamica T nel punto considerato, data dalla legge di Planck. Nel caso delle microonde si può usare la legge di Rayleigh-Jeans e

$$J_a = \frac{2\mathcal{K}}{\lambda_0^2} T$$

essendo \mathcal{K} la costante di Boltzmann. In alternativa, più semplicemente, si può sostituire a J_a la temperatura termodinamica e a B la temperatura di brillantezza T_B .

L'equazione generale (85) del trasferimento radiativo risulta molto più complessa che nel caso $a = 0$, in quanto il termine di diffusione accoppia tra loro le varie direzioni di flusso, e quindi non è più possibile risolvere una direzione alla volta (e, in particolare, solo le direzioni di interesse).

In molti casi, comunque, esiste una direzione *privilegiata*, come ad esempio quella da cui arriva la radiazione solare. In tal caso conviene decomporre il campo di brillantezza in due parti, dette componenti diretta e diffusa, perchè in molti casi questo consente una soluzione approssimata della equazione semplice ma comunque accurata.

La componente diretta B_D è la brillantezza che fluisce nella direzione preferenziale \underline{i}_D , soggetta solo alla estinzione. La componente diffusa B_S è invece la differenza tra la brillantezza totale e quella diretta. Ovviamente la brillantezza diffusa coincide con quella totale in tutte le direzioni, esclusa quella preferenziale.

Sostituendo $B = B_D + B_S$ nella equazione (85) del trasferimento radiativo si trova

$$\begin{aligned} \frac{dB_D}{d\tau} + \frac{dB_S(\underline{i}_s)}{d\tau} \\ = -B_D - B_S(\underline{i}_s) + (1-a)J_a + \frac{a}{4\pi} \int \psi(\underline{i}_s, \underline{i}_i) B_D(\underline{i}_i) d\Omega_i + \frac{a}{4\pi} \int \psi(\underline{i}_s, \underline{i}_i) B_S(\underline{i}_i) d\Omega_i \end{aligned} \quad (86)$$

Ma per definizione B_D si propaga solo in una direzione \underline{i}_D o, più precisamente, in un angolo solido piccolo $\Delta\Omega_D$ attorno a \underline{i}_D . La (86) diventa quindi

$$\begin{aligned} \frac{dB_D}{d\tau} + \frac{dB_S(\underline{i}_s)}{d\tau} \\ = -B_D - B_S(\underline{i}_s) + (1-a)J_a + \frac{a}{4\pi} \psi(\underline{i}_s, \underline{i}_D) B_D \Delta\Omega_D + \frac{a}{4\pi} \int \psi(\underline{i}_s, \underline{i}_i) B_S(\underline{i}_i) d\Omega_i \end{aligned} \quad (87)$$

in cui il primo termine in entrambi i membri c'è solo se la direzione della equazione coincide con \underline{i}_D .

Per definizione di componente diretta

$$\frac{dB_D}{d\tau} = -B_D \quad (88)$$

e quindi si ottiene l'equazione del trasferimento radiativo per la sola componente diffusa

$$\frac{dB_S(\underline{i}_s)}{d\tau} = -B_S(\underline{i}_s) + (1-a)J_a + \frac{a}{4\pi} \psi(\underline{i}_s, \underline{i}_D) B_D \Delta\Omega_D + \frac{a}{4\pi} \int \psi(\underline{i}_s, \underline{i}_i) B_S(\underline{i}_i) d\Omega_i \quad (89)$$

in cui la diffusione dovuta alla componente diretta (il terzo contributo a secondo membro) diventa un termine aggiuntivo di sorgente (noto).

Nel caso in cui la componente diretta sia molto intensa (ad esempio la radiazione solare), e l'albedo sia piccolo (caso tipico, ad esempio, dello scattering di Rayleigh a microonde), i vari termini della equazione completa hanno ordini di grandezza molto diversi. Essendo infatti $B_D \gg B_S$ e $a \ll 1$, in direzione \underline{i}_D il termine dominante sarà la componente diretta della brillantezza, e la componente diffusa diventa una correzione *piccola*. In tutte le altre direzioni, invece, la componente diffusa diventa l'unico contributo.

Per calcolare la parte principale di B_S basta notare che tutti i termini della equazione (89) per la componente diffusa sono (sostanzialmente) dello stesso ordine di grandezza, ad eccezione dell'ultimo. Basta quindi trascurare quest'ultimo per ottenere una buona approssimazione della componente diffusa. E tale approssimazione si ottiene immediatamente, in quanto l'equazione è diventata del tutto analoga a quella valida in assenza di diffusione, salvo la presenza di un diverso termine noto.

In particolare é possibile, in questo caso, considerare una direzione (di diffusione) alla volta, e quindi B sarà solo funzione di τ , ovvero, in un mezzo stratificato, della quota.

9 ESEMPI

Consideriamo alcune applicazioni della decomposizione in componente diretta e diffusa, in particolare nella approssimazione di piccolo albedo.

Cominciamo a considerare la risposta di un radar meteorologico. Poiché in questo caso il fascio del radar diretto é molto intenso, e ha una direzione ben precisa, può essere considerato la componente diretta, e quello retro-diffuso fa, invece, da componente diffusa.

Consideriamo una nuvola con coefficiente di estinzione k_e e albedo a (in direzione di backscattering) e assumiamo valide le ipotesi dello scattering di Rayleigh.

Sia S_T il vettore di Poynting alla base della nuvola dovuta al trasmettitore, che supponiamo polarizzato linearmente. A questo possiamo associare una brillantezza

$$B_D(0) = S_T \delta(\Omega - \Omega_i)$$

essendo $\Omega_D = (\theta_D, \varphi_D)$ la direzione di propagazione della componente diretta.

Dall'equazione del trasferimento radiativo si ottiene la brillantezza al variare della quota. Scegliendo $z = 0$ alla base della nuvola, la componente diretta sarà:

$$B_D(z) = B_D(0) \exp\left(\frac{-k_e z}{\cos \theta_D}\right)$$

La componente diffusa di backscattering si ottiene dalla (86) priva dell'ultimo termine

$$\begin{aligned} \frac{dB_S}{d\tau} &= -B_S + (1-a)J_a + \frac{a}{4\pi} \int \psi(\underline{i}_s, \underline{i}_i) B_D(\underline{i}_i) d\Omega_i \\ &= -B_S + (1-a)J_a + \frac{a}{4\pi} \psi_B S_T \exp\left(\frac{-k_e z}{\cos \theta_D}\right) \end{aligned}$$

essendo ψ_B la funzione di fase in direzione di backscattering.

I due termini di sorgente di questa equazione hanno però polarizzazione diversa: S_T è polarizzata linearmente mentre J_a è non polarizzata. Poiché in direzione di backscattering lo scattering di Rayleigh mantiene la polarizzazione, possiamo usare solo la parte co-polarizzata di J_a (ovvero l'unica ricevuta dall'antenna) e scrivere:

$$\frac{dB_S}{d\tau} = -B_S + \frac{1}{2} (1 - a) \frac{\mathcal{K}}{\pi\lambda_0^2} T_N + \frac{a}{4\pi} \psi_B S_T \exp\left(\frac{-k_e z}{\cos\theta_D}\right)$$

essendo T_N la temperatura termodinamica della nuvola. Ricordando che $\psi_B = 3/2$, si trova

$$B_S(0) = \frac{1}{\cos\theta_D} \int_0^H k_e \left[\frac{1}{2} (1 - a) \frac{\mathcal{K}}{\pi\lambda_0^2} T_N + \frac{3a}{8\pi} S_T \exp\left(\frac{-k_e z}{\cos\theta_D}\right) \right] \exp\left(\frac{-k_e z}{\cos\theta_D}\right) dz$$

essendo H lo spessore della nuvola, ed assumendo $B_S(H) = 0$. Calcolando gli integrali (estesi fino a $+\infty$, nell'ipotesi di nuvola spessa) segue

$$\begin{aligned} B_S(0) &= \frac{k_e}{\cos\theta_D} \left[\frac{1}{2} (1 - a) \frac{\mathcal{K}}{\pi\lambda_0^2} T_N \frac{\cos\theta}{k_e} + \frac{3a}{8\pi} S_T \frac{\cos\theta}{2k_e} \right] \\ &= \frac{1}{2} (1 - a) \frac{\mathcal{K}}{\pi\lambda_0^2} T_N + \frac{3a}{16\pi} S_T \end{aligned} \quad (90)$$

Il rapporto fra la potenza ricevuta dal radar $B_S(0)$ e quella trasmessa S_T è proporzionale all' albedo a . Quindi l'albedo misura, nella sostanza, la *luminosità* di un oggetto.

Il primo termine della (90) é invece il rumore termico prodotto dalla nuvola. Il rapporto segnale-rumore vale allora

$$SNR = \frac{\frac{3a}{16\pi} S_T}{\frac{1}{2} (1 - a) \frac{\mathcal{K}}{\pi\lambda_0^2} T_N}$$

e aumenta al crescere di a .

Un'altra applicazione è la valutazione della luce solare che arriva al suolo per diffusione al variare del colore (ovvero della lunghezza d'onda). In tal caso, anzi, non c'è effetto di assorbimento, $a = 1$, e il termine di sorgente risulta pari alla funzione di fase, che per lo scattering di Rayleigh, varia con λ^{-4} . Quindi la luce diffusa è sostanzialmente azzurra, mentre quella diretta dal sole è bianca se lo spessore ottico dell'atmosfera è piccolo (sole allo zenith), e rossa se lo spessore è grande (sole al tramonto).

INDICE

1. SEZIONE RADAR	1
2. FILTRO ADATTATO	4
3. FILTRO ADATTATO A UN CHIRP	8
4. DIFFUSIONE DI VOLUME – ESTINZIONE	11
5. DIFFUSIONE DI VOLUME – LA FUNZIONE DI FASE	13
6. EFFETTI DOVUTI ALLA POLARIZZAZIONE	15
7. SCATTERING DI RAYLEIGH	16
8. COMPONENTE DIRETTA E DIFFUSA	19
9. ESEMPI	21