

1 SISTEMI DI RIFERIMENTO

Nei problemi di riflessione da una superficie si usa un particolare sistema di riferimento, separatamente per il raggio incidente e riflesso.

Considerando l'area A sul piano (x, y) la direzione \mathbf{k}_i di incidenza è caratterizzata dagli angoli:

- $\theta_i \in (0, \pi/2)$ angolo tra \mathbf{k}_i e l'asse z ;
- $\varphi_i \in (-\pi, +\pi)$ angolo orientato tra l'asse x e la direzione del vettore \mathbf{k}_{it} (proiezione di \mathbf{k}_i su (x, y)) posto nell'origine.

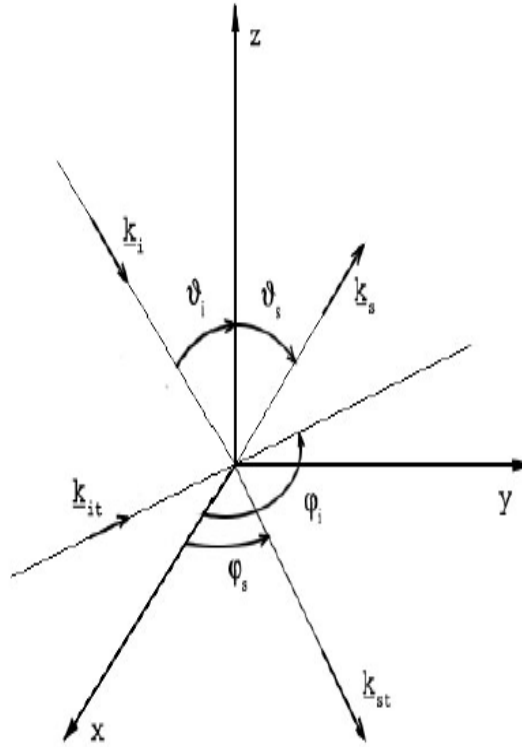


Fig.1: Sistema di riferimento e angoli di incidenza e diffusione.

Il vettore \mathbf{k}_s dell'onda riflessa è invece caratterizzato dagli angoli:

- $\theta_s \in (0, \pi/2)$ angolo tra l'asse z e il vettore \mathbf{k}_s ;
- $\varphi_s \in (-\pi, +\pi)$ angolo orientato tra l'asse x e la direzione del vettore \mathbf{k}_{st} (proiezione di \mathbf{k}_s su (x, y)).

Ne segue che la direzione di diffusione corrispondente alla retroirradiazione (o back-scattering), indicata con il pedice B, è:

$$\theta_B = \theta_i \quad \phi_B = \phi_i + \pi$$

e quella data dalla legge di Snell :

$$\theta_S = \theta_i \quad \phi_S = \phi_i$$

2 RIFLESSIONE DA INTERFACCIA PIANA

La superficie terrestre può essere modellata come una superficie mediamente piana, speculare o rugosa, che divide l'aria dal terreno. Quest'ultimo può essere, a sua volta, omogeneo o stratificato, ovvero composto da uno o più strati di spessore finito, con una zona omogenea terminale.

In questo corso siamo interessati a due tipi di interazioni:

- 1) onda piana che incide dall'aria e viene riflessa e trasmessa;
- 2) onda piana che viene prodotta nel terreno, e viene ricevuta da un sensore posto nell'aria.

In entrambi i casi le onde coinvolte sono omogenee (le eventuali onde inhomogenee prodotte nel caso 2) non interagiscono col sensore) e quindi possiamo limitarci a questo tipo di onda piana.

Iniziamo a considerare il caso di una singola interfaccia (terreno omogeneo), piana e speculare, per la quale vale la legge di Snell¹.

Con riferimento alla Fig. 1, l'angolo tra la direzione dell'onda riflessa e l'asse verticale² z vale $\theta_r = \theta_i$. Per quanto riguarda la trasmissione, se il secondo mezzo è privo di perdite possiamo definire un angolo di trasmissione θ_t , e risulta

$$\sin \theta_i = \sqrt{\varepsilon_{r1}} \sin \theta_t \quad (1)$$

essendo $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_1/\varepsilon_0$.

Evidentemente la (1) vale solo se il secondo mezzo è privo di perdite. Poiché l'ipotesi di assenza di perdite del secondo mezzo (ovvero del terreno) è vera di rado alla superficie terrestre, allora nel seguito cercheremo di evitare di usare θ_t .

Va comunque notato che, in presenza di piccole perdite nel mezzo 1 l'onda trasmessa è ancora sostanzialmente omogenea. Infatti, posto $\varepsilon_{r1} = (n - jp)^2$, con $n > 1$ e $p \ll n$, risulta $k_{x1} = k_{x0} = k_0 \sin \theta_i$ e

$$k_{z1} = \sqrt{\varepsilon_{r1} k_0^2 - k_0^2 \sin^2 \theta_i} \simeq k_0 \sqrt{n^2 - 2jnp - \sin^2 \theta_i}$$

avendo trascurato p^2 rispetto a n^2 . Sviluppando la radice con la formula di Taylor si trova

$$\begin{aligned} k_{z1} &= k_0 \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i} \sqrt{1 - \frac{2jnp}{n^2 - \sin^2 \theta_i}} \simeq k_0 \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i} - jk_0 \frac{np}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}} \\ &\simeq k_0 \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i} \end{aligned} \quad (2)$$

Vale allora la (1) a patto di usare n al posto di $\sqrt{\varepsilon_{r1}}$.

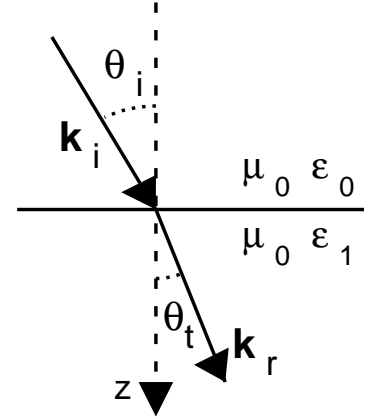


Fig.1: Geometria della legge di Snell

¹ Per la simbologia, si rimanda a quella usata nel corso di *Campi Elettromagnetici*

² Normalmente useremo nelle figure il *piano di incidenza*, ovvero il piano che contiene l'asse z e il vettore di propagazione dell'onda incidente.

Per determinare le ampiezze dei campi occorre tener conto della polarizzazione del campo elettrico incidente. In particolare le polarizzazioni da considerare sono quella orizzontale (H o TE) e quella verticale (V o TM), riportate in Fig. 2². Nel seguito sceglieremo gli assi (x, y) , usati per discutere la polarizzazione, nelle direzioni H e V rispettivamente.

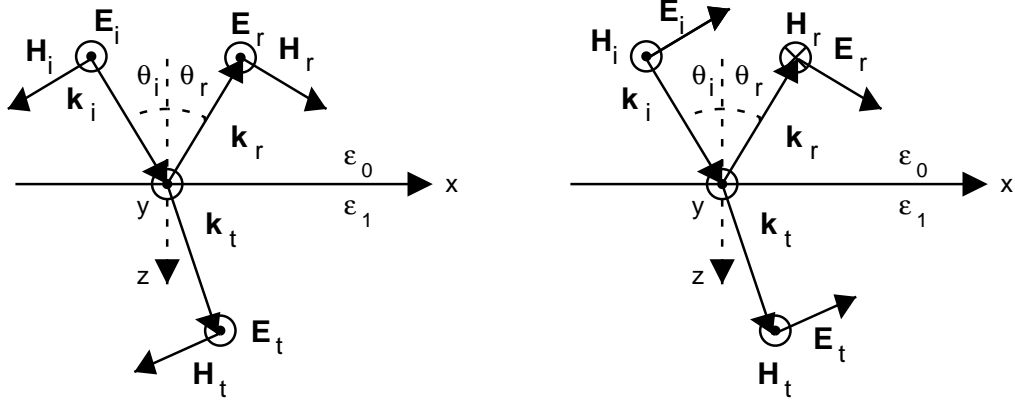


Fig.2: Componenti dei campi in polarizzazione H (a sinistra) e V (a destra).

Per calcolare le ampiezze introduciamo le impedenze d'onda dei due mezzi, separatamente per le due polarizzazioni. Per il vuoto si ha

$$\begin{aligned} Z_0^H &= \frac{\zeta}{\cos \theta_i} \\ Z_0^V &= \zeta \cos \theta_i \end{aligned} \quad (3)$$

Per quanto riguarda il mezzo 1, in assenza di perdite, essendo l'onda trasmessa omogenea le impedenze sono date dalle (3), ovviamente usando ζ_1 e $\cos \theta_t$. Tuttavia, come già detto, conviene derivare anche una espressione che sia indipendente da θ_t , e quindi valida anche per mezzi con perdite.

In assenza di perdite

$$\cos \theta_t = \frac{k_{z1}}{k_1} = \frac{\sqrt{k_1^2 - k_{x1}^2}}{k_1} = \frac{\sqrt{k_1^2 - k_{x0}^2}}{k_1}$$

Ricordando che $k_{x0} = k_0 \sin \theta_i$ si ha

$$\begin{aligned} Z_1^H &= \frac{\zeta_1 k_1}{\sqrt{k_1^2 - k_0^2 \sin^2 \theta_i}} = \frac{\zeta_1 \sqrt{\varepsilon_{r1}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1} - \sin^2 \theta_i}} = \frac{\zeta}{\sqrt{\varepsilon_{r1} - \sin^2 \theta_i}} \\ Z_1^V &= \frac{\zeta_1 \sqrt{k_1^2 - k_0^2 \sin^2 \theta_i}}{k_1} = \frac{\zeta_1}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}} \sqrt{\varepsilon_{r1} - \sin^2 \theta_i} = \frac{\zeta}{\varepsilon_{r1}} \sqrt{\varepsilon_{r1} - \sin^2 \theta_i} \end{aligned} \quad (4)$$

² Come descritto precedentemente, ogni campo può sempre essere decomposto in polarizzazioni H e V. Occorrerà dapprima dividere, se necessario, il campo in una parte completamente non polarizzata, e una completamente polarizzata. La prima si decompone in due campi indipendenti uguali, uno H e uno V. La seconda in due onde, una H e una V, tra loro correlate.

in cui occorre solo ricordare che, se $\varepsilon_{r1} - \sin^2 \theta_i$ **non** è reale positivo (mezzi con perdite), allora la sua radice quadrata $\sqrt{\varepsilon_{r1} - \sin^2 \theta_i}$ deve avere parte reale non negativa e parte immaginaria non positiva.

Ovviamente

$$\Gamma_H = \frac{Z_1^H - Z_0^H}{Z_1^H + Z_0^H} \quad \Gamma_V = \frac{Z_1^V - Z_0^V}{Z_1^V + Z_0^V} \quad (5)$$

Questi valori del coefficiente di riflessione collegano le ampiezze della parte trasversa del campo riflesso e incidente, ma anche le ampiezze totali dei campi, in quanto gli angoli di incidenza e riflessione sono uguali.

Per quanto riguarda il campo trasmesso, invece, occorre considerare necessariamente le componenti trasverse (che, per la sola incidenza H coincidono con tutto il campo).

Risulta allora, tenendo conto della geometria di Fig. 2,

$$\begin{aligned} E_t^H &= E_i^H (1 + \Gamma^H) = E_i^H \frac{2Z_1^H}{Z_1^H + Z_0^H} \\ E_{tx}^V &= E_i^V \cos \theta_i (1 + \Gamma^V) = E_i^V \cos \theta_i \frac{2Z_1^V}{Z_1^V + Z_0^V} \end{aligned} \quad (6)$$

Se il mezzo 1 è privo di perdite, allora $E_t^V = E_{tx}^V / \cos \theta_t$. Altrimenti occorre utilizzare

$$|E_t|^2 = |E_{tx}^V|^2 + |E_{tz}^V|^2$$

con

$$k_{x0} E_{tx}^V + k_{z1} E_{tz}^V = 0 \quad \implies \quad E_{tz}^V = - \frac{\sin \theta_i}{\sqrt{\varepsilon_{r1} - \sin^2 \theta_i}} E_{tx}^V$$

Finora abbiamo considerato solo la riflessione e la trasmissione in termini di campo. Naturalmente, l'onda che incide sulla interfaccia trasporta anche potenza. Quindi conviene valutare direttamente l'effetto della interazione con una interfaccia piana anche sulla propagazione della potenza.

Consideriamo ancora l'interfaccia tra due mezzi di Fig. 1, e una incidenza H, oppure V. Il vettore di Poynting della sola onda incidente vale, in entrambi i casi

$$\mathbf{S}_i = \frac{1}{2\zeta} |\mathbf{E}_i|^2 \mathbf{i}_i = S_i \mathbf{i}_i$$

essendo \mathbf{i}_i il versore della direzione di propagazione dell'onda incidente. Il vettore di Poynting dell'onda riflessa vale

$$\mathbf{S}_r = \frac{1}{2\zeta} |\mathbf{E}_r|^2 \mathbf{i}_r = \frac{1}{2\zeta} |\Gamma|^2 |\mathbf{E}_i|^2 \mathbf{i}_r = |\Gamma|^2 S_i \mathbf{i}_r = R S_i \mathbf{i}_r \quad (7)$$

essendo $R = |\Gamma|^2$ la *riflettività* della superficie, e \mathbf{i}_r il versore della direzione di propagazione dell'onda riflessa.

Calcoliamo il vettore di Poynting trasmesso, nella sola ipotesi di mezzo 1 privo di perdite, e quindi di impedenze Z_1^H e Z_1^V reali. Il calcolo sarà necessariamente diverso per le due incidenze, a causa di (6).

Iniziamo dal caso H . Analogamente a (7), indicando con \mathbf{i}_t il versore della direzione di propagazione dell'onda trasmessa, e ricavando \mathbf{E}_t^H dalla (6), segue

$$\mathbf{S}_t^H = \frac{1}{2\zeta_1} |\mathbf{E}_t^H|^2 \mathbf{i}_t = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}}}{2\zeta} |\mathbf{E}_i^H|^2 \left[\frac{2Z_1^H}{Z_1^H + Z_0^H} \right]^2 \mathbf{i}_t$$

D'altra parte, per entrambe le incidenze, nel caso di Z_1 reale, e quindi Γ reale, si ha

$$1 - R = 1 - (\Gamma)^2 = 1 - \left(\frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0} \right)^2 = \frac{(Z_1 + Z_0)^2 - (Z_1 - Z_0)^2}{(Z_1 + Z_0)^2} = \frac{4Z_1 Z_0}{(Z_1 + Z_0)^2}$$

e quindi

$$\left[\frac{2Z_1}{Z_1 + Z_0} \right]^2 = \frac{Z_1}{Z_0} (1 - R)$$

Segue quindi

$$\mathbf{S}_t^H = \sqrt{\varepsilon_{r1}} \frac{Z_1^H}{Z_0^H} (1 - R^H) S_i^H \mathbf{i}_t \quad (8)$$

Usando l'ipotesi di assenza di perdite

$$\frac{Z_1^H}{Z_0^H} = \frac{\zeta_1}{\cos \theta_t} \frac{\cos \theta_i}{\zeta} = \frac{\cos \theta_i}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} \cos \theta_t}$$

e sostituendo nella (8)

$$\mathbf{S}_t^H = \frac{\cos \theta_i}{\cos \theta_t} (1 - R^H) S_i^H \mathbf{i}_t$$

Passiamo al caso di incidenza V . Allora, sempre usando la (6), si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_t^V &= \frac{1}{2\zeta_1} |\mathbf{E}_t^V|^2 \mathbf{i}_t = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}}}{2\zeta} |E_t^V|^2 \mathbf{i}_t = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}}}{2\zeta} \frac{|E_{tx}^V|^2}{\cos^2 \theta_t} \mathbf{i}_t \\ &= \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}}}{2\zeta} \frac{1}{\cos^2 \theta_t} |E_t^V|^2 \cos^2 \theta_i \left[\frac{2Z_1^H}{Z_1^H + Z_0^H} \right]^2 \mathbf{i}_t = \sqrt{\varepsilon_{r1}} \frac{\cos^2 \theta_i}{\cos^2 \theta_t} \frac{Z_1^V}{Z_0^V} (1 - R^V) S_i^V \mathbf{i}_t \end{aligned} \quad (9)$$

Sempre per l'ipotesi di assenza di perdite, si ha

$$\frac{Z_1^V}{Z_0^V} = \frac{\zeta_1 \cos \theta_t}{\zeta \cos \theta_i} = \frac{\cos \theta_t}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} \cos \theta_i}$$

e in definitiva la (9) diventa

$$\mathbf{S}_t^V = \frac{\cos \theta_i}{\cos \theta_t} (1 - R^V) S_i^V \mathbf{i}_t \quad (10)$$

La (10), pertanto, é valida per entrambe le incidenze, in assenza di perdite nei due mezzi.

3 PROPAGAZIONE NEI MEZZI STRATIFICATI

Finora abbiamo considerato l'interazione di una onda piana con una singola interfaccia piana. Il passo successivo è quello di considerare più interfacce piane tra loro *parallele*, come in Fig. 1.

Assumendo ancora l'asse z ortogonale ai piani di interfaccia, e la direzione x nel piano di incidenza, in ogni zona, tranne l'ultima, ci saranno, in base alla legge di Snell, due onde piane, una progressiva e una riflessa, con vettori di propagazione $k_x \mathbf{i}_x \pm k_{zn} \mathbf{i}_z$. La componente x è la stessa dappertutto (legge di Snell), mentre le due componenti z (una opposta all'altra) dipenderanno dal materiale¹:

$$k_{zn}^2 = \omega^2 \varepsilon_n \mu_0 - k_x^2$$

e potranno anche essere complesse.

Nella zona semiinfinita finale mancherà la sola onda riflessa.

La direzione (o, più precisamente, il vettore di propagazione) delle onde piane sarà diversa da strato a strato (come in Fig. 2), e potrà essere calcolato applicando la legge di Snell tra lo strato semiinfinito di aria (di costanti ε_0, μ_0) e lo strato in questione.

Il campo nella zona n sarà dato da

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_n &= \mathbf{E}_n^+ e^{-jk_x x} e^{-jk_{zn} z} + \mathbf{E}_n^- e^{-jk_x x} e^{jk_{zn} z} \\ \mathbf{H}_n &= \mathbf{H}_n^+ e^{-jk_x x} e^{-jk_{zn} z} + \mathbf{H}_n^- e^{-jk_x x} e^{jk_{zn} z} \end{aligned} \quad (11)$$

Si nota immediatamente, nelle (11), che il fattore $e^{-jk_x x}$ è comune a tutte le onde e a tutti gli strati (legge di Snell) e può quindi andare in evidenza. Inoltre sappiamo che la conoscenza delle componenti trasverse dei campi ci consente di calcolare poi, se necessario, quelle longitudinali. Possiamo quindi limitarci a queste ultime, e considerare solo i due casi di incidenza H e V , che si mantengono in tutti gli strati. La geometria corrispondente è riportata nella Fig. 2 del paragrafo precedente. Nel caso H (ma il V è del tutto analogo) si ha, considerando solo le componenti E_y ed $-H_x$ (indicate come E ed H semplicemente), e sottintendendo il fattore comune $e^{-jk_x x}$ (che, se necessario, può poi essere inserito alla fine)

$$\begin{aligned} E_n &= E_n^+ e^{-jk_{zn} z} + E_n^- e^{jk_{zn} z} \\ H_n &= H_n^+ e^{-jk_{zn} z} + H_n^- e^{jk_{zn} z} = \frac{1}{Z_n^H} \left[E_n^+ e^{-jk_{zn} z} - E_n^- e^{jk_{zn} z} \right] \end{aligned} \quad (12)$$

L'andamento (12) coincide esattamente con l'andamento di tensione e corrente in un tratto omogeneo di linea di trasmissione, di costante di propagazione k_{zn} ed impedenza Z_n^H .

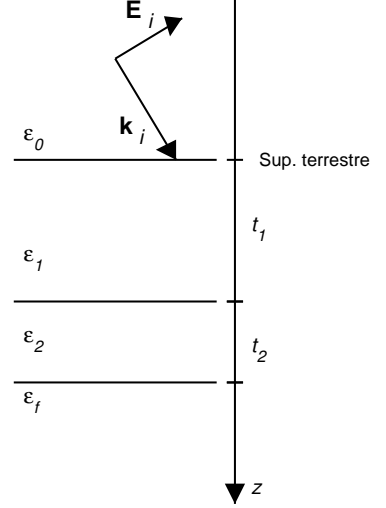


Fig.1: Geometria di un mezzo stratificato
(La polarizzazione dell'onda incidente è puramente indicativa)

¹ Ovviamente le costanti del materiale possono essere complesse

Inoltre alla interfaccia tra due strati devono essere continui sia il campo elettrico trasverso, sia quello magnetico trasverso, e questo è esattamente equivalente alla continuità di tensione e corrente alla interfaccia tra due tratti di linea di trasmissione.

Pertanto la propagazione in un mezzo stratificato (nella ipotesi di interfacce tutte parallele, e di campo incidente piano) può essere studiata come la propagazione in un circuito a linee di trasmissione, nel senso che la propagazione nel circuito a linee è analoga a quella nel mezzo stratificato. In altri termini, il circuito in linee è *equivalente* alla propagazione nel mezzo stratificato, anche se solo limitatamente a un campo ovunque H (oppure ovunque V).

Il circuito equivalente si ottiene dapprima dividendo il problema in una parte H e una V . Per ciascuna polarizzazione si sostituisce a ogni strato, inclusi quelli iniziali e finali, un tratto di linea di lunghezza pari allo strato (e quindi semi-infinito per il tratto iniziale e quello finale), e di costanti k_{zn} e Z_n^{HE} (o Z_n^{VM} a seconda della polarizzazione). L'onda di tensione (o di corrente) incidente è costituita dalla componente **trasversa a z** del campo elettrico (o magnetico) incidente. Va comunque tenuto presente che su tale linea equivalente le grandezze tensione e corrente si misurano in \mathbf{V}/\mathbf{m} e \mathbf{A}/\mathbf{m} rispettivamente. Eventuali piani *C.E.P.* o *C.M.P.* (paralleli alle interfacce) diventano corti circuiti o circuiti aperti.

Questi dati sono sufficienti a calcolare tensione e corrente ovunque. Risolto il circuito in linea di trasmissione, si possono ottenere i campi calcolando le componenti longitudinali, e poi moltiplicando tutto per $e^{-jk_x x}$.

Tuttavia in molti casi questo passaggio a ritroso non è necessario, in quanto le informazioni che si ottengono sulle linee sono sufficienti. Questo è dovuto al fatto che anche la propagazione di potenza si può direttamente studiare sulla linea di trasmissione equivalente. Notiamo inizialmente che interessa solo la componente z del vettore di Poynting, in quanto questa è l'unica responsabile del flusso di potenza attraverso le varie interfacce. Ora la componente z del vettore di Poynting (continuiamo a considerare il solo caso H , in quanto il V è analogo) vale

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{i}_z = \frac{1}{2} E_y (-H_x)^* = \frac{1}{2} V(z) I^*(z) \quad (13)$$

essendo $V(z)$ e $I(z)$ le grandezze sulla linea di trasmissione equivalente. Quindi la potenza sulla linea fornisce direttamente il vettore di Poynting relativo al problema di onde piane. In tutti i problemi di flusso di potenza, quindi, non è necessario ritornare a considerare i campi delle onde piane, ma basta fermarsi al problema in linea equivalente².

² Ad esempio, problemi di massimizzazione della potenza possono essere direttamente risolti con le tecniche degli adattamenti in linea di trasmissione (ovviamente usando solo tecniche che non richiedono stub o componenti a costanti concentrate, salvo casi particolari).

4 RIFLESSIONE E TRASMISSIONE DI BRILLANZA

Consideriamo ora l'interazione di un flusso di brillanza con una superficie speculare.

Consideriamo un sensore in Q , e la brillanza che arriva a questo sensore attraverso l'angolo solido $d\Omega$. L'energia che arriva a Q è energia che fluisce lungo i raggi che dopo la riflessione si trovano in $d\Omega$. Per la legge di Snell, tali raggi sono quelle che si trovano nel cono di uguale apertura $d\Omega$ ma centrato in Q' , punto speculare di Q rispetto alla superficie.

La potenza associata ad ogni raggio che punta verso Q' va moltiplicata per la riflettività R della superficie (per la polarizzazione considerata) e diventa la potenza associata allo stesso raggio che punta verso Q .

La potenza totale che fluisce verso Q attraverso l'area dA intercettata da $d\Omega$ vale allora

$$dP^r = B^r d\Omega dA \cos \theta \quad (14)$$

essendo B^r la brillanza vista da Q , e θ la direzione centrale del cono di raggi incluso in $d\Omega$.

Il termine $\cos \theta$ nella (14) deriva dal prodotto scalare tra il vettore di propagazione dell'onda riflessa (direzione del suo vettore di Poynting) e la normale alla superficie.

La potenza che incide verso la superficie dA , fluendo verso Q' , è :

$$dP^i = B^i d\Omega dA \cos \theta$$

essendo B^i la brillanza incidente, ovvero vista dalla superficie.

E poiché :

$$dP^r = R dP^i$$

segue che

$$B^r = R B^i \quad (15)$$

Possiamo ora considerare la trasmissione della brillanza attraverso una interfaccia in un semispazio privo di perdite, o con perdite piccole, di costante dielettrica ε_1 , e in cui l'onda trasmessa sia omogenea ¹.

Tra gli angoli che i vettori di propagazione formano con la normale all'interfaccia (angolo di incidenza θ_i e angolo di trasmissione θ_t) vale la legge di Snell (vedi Fig. 1 del Par. 1)

$$\sin \theta_i = \sqrt{\varepsilon_r} \cdot \sin \theta_t$$

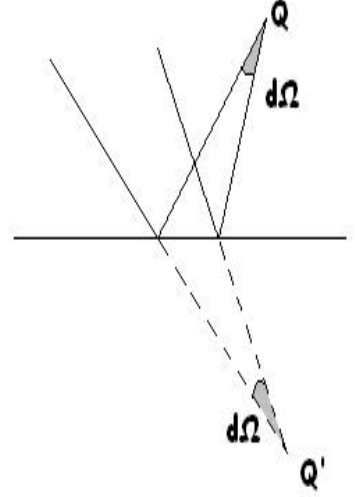


Fig. 1: Riflessione della brillanza

¹ Il caso in cui l'onda arriva dal mezzo con costante ε_1 , o il caso generale di mezzi entrambi con costanti dielettriche diverse da quella del vuoto può essere trattato in maniera analoga, considerando ε_0 e ε_1 come due costanti dielettriche generiche

essendo ε_r la parte reale della costante dielettrica relativa $\varepsilon_1/\varepsilon_0$.

Dalla relazione (10), valida separatamente per entrambe le polarizzazioni H e V , segue

$$S_t \cos \theta_t = (1 - R^V) S_i^V \cos \theta_i \quad (16)$$

dove S_i ed S_t sono le ampiezze dei vettori di Poynting associati alle onde incidente e trasmessa (vettori allineati con i vettori di propagazione, vedi Fig. 1 del Par. 1).

Per passare alle brillanze incidente B_i e trasmessa B_t occorre scrivere il vettore di Poynting in termini di brillanza. Per far questo occorre tener conto che la rifrazione, e quindi il cambio di angolo dei raggi, modifica anche i coni di raggi usati per la definizione delle brillanze (vedi Fig. 2). In particolare, la brillanza incidente sulla superficie va misurata (vedi derivazione della equazione del trasferimento radiativo) assumendo che dalla interfaccia in poi vi sia ancora il vuoto. Quindi il relativo sensore va posto in Q e l'angolo sotto cui vede la superficie dA vale $d\Omega_i$. Invece la brillanza trasmessa viene misurata dal sensore posto in Q' (lungo il raggio trasmesso ad un angolo θ_t), e quindi l'angolo solido da considerare é ora $d\Omega_t$.

Pertanto le relazioni tra il vettore di Poynting e la brillanza sono $S_i = B_i d\Omega_i$ e $S_t = B_t d\Omega_t$. Segue

$$B_t d\Omega_t \cos \theta_t = (1 - R) B_i d\Omega_i \cos \theta_i \quad (17)$$

La relazione tra $d\Omega_t = \sin \theta_t d\theta_t d\phi$ e $d\Omega_i = \sin \theta_i d\theta_i d\phi$ si ottiene dalla legge di Snell (1), prima differenziandola

$$\cos \theta_i d\theta_i = \sqrt{\varepsilon_r} \cos \theta_t d\theta_t$$

e poi moltiplicandola ancora per la stessa legge di Snell

$$\cos \theta_i \sin \theta_i d\theta_i = \varepsilon_r \cos \theta_t \sin \theta_t d\theta_t$$

Moltiplicando infine per $d\phi$ si ottiene :

$$\cos \theta_i \cdot d\Omega_i = \varepsilon_r \cdot \cos \theta_t \cdot d\Omega_t \quad (18)$$

Sostituendo nella (17) segue la relazione tra le brillanze

$$B_t = \varepsilon_r (1 - R) B_i \quad (19)$$

La presenza di ε_r nella (19) tiene conto della divergenza (o convergenza) dei raggi a causa della rifrazione.

Se vale la legge di Rayleigh-Jeans, possiamo passare alle temperature di brillanza T_{Bi} e T_{Br} , tenendo però conto che

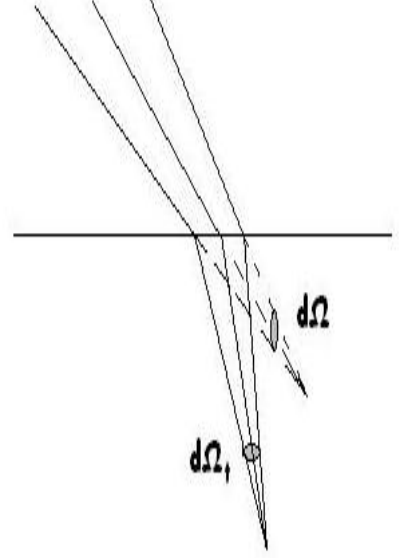


Fig. 2: Coni di raggi coinvolti nella trasmissione della brillanza.

$$B_i = 1 \frac{\mathcal{K}}{\pi \lambda^2} T_{Bi} \qquad B_t = \varepsilon_r \frac{\mathcal{K}}{\pi \lambda^2} T_{Bt}$$

in quanto le due brillanze viaggiano in mezzi differenti. Pertanto la (19) diventa

$$T_{Bt} = (1 - R) T_{Bi} \tag{20}$$

che é un ulteriore vantaggio dell'utilizzo della temepratura di brillanza in luogo della brillanza.

5 CARATTERIZZAZIONE DELLE SUPERFICI

Le superfici speculari, viste nei paragrafi precedenti, sono le superfici per cui vale la legge di Snell. Queste superfici non vengono viste da un radar monostatico (antenna trasmettente coincidente con quella ricevente) in quanto questo radar riceve la retrodiffusione (*backscattering*) della superficie, e la direzione del backscattering è diversa da quella di Snell (a meno che l'incidenza non sia ortogonale). Fortunatamente, però, le superfici di interesse non hanno un profilo speculare. Piuttosto, presentano un profilo medio (nel seguito costante, ma che può essere anche variabile) a cui sono sovrimposte delle variazioni aleatorie di quota, che, in presenza di una onda elettromagnetica incidente, sono le responsabili della retroirradiazione.

Scegliendo come profilo macroscopico il piano (x, y) , le variazioni di quota possono essere caratterizzate attraverso un processo aleatorio bi-dimensionale:

$$z = z_S(x, y) \quad (21)$$

stazionario¹, e con valor medio nullo.

La z_S è una realizzazione di un processo aleatorio, e quindi interessano le sue proprietà medie in senso statistico ma anche in senso spaziale. Fissato un punto (x_0, y_0) i possibili valori della quota z_0 rappresentano una variabile aleatoria che supponiamo gaussiana a media nulla e varianza σ_z^2 . σ_z^2 sarà anche la varianza del processo aleatorio (21).

Per quanto riguarda la autocorrelazione della superficie

$$C(X, Y) = \mathcal{E} [z_S(x, y) z_S(x + X, y + Y)]$$

questa dipende dalla posizione reciproca dei due punti. In molti casi, però, la autocorrelazione dipende solo dalla distanza, ovvero

$$C(X, Y) = C\left(\sqrt{X^2 + Y^2}\right) = C(\tau) \quad \tau = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

Si dice allora che il processo (21) è isotropo.

In generale

$$C(\tau) \leq C(0) = \sigma_z^2$$

e possiamo definire un coefficiente di correlazione

$$r(\tau) = \frac{C(\tau)}{\sigma_z^2}$$

La superficie è tanto più irregolare, quanto più $r(\tau)$ decresce rapidamente.

Possiamo inoltre definire anche una **lunghezza di correlazione** L_C (oppure due lunghezze diverse, per superfici non isotrope). Punti a distanza paragonabile a L_C hanno quote tra loro parzialmente correlate.

Si utilizzano normalmente due modelli di autocorrelazione, quella **gaussiana**

¹ Il processo aleatorio (21) è normalmente stazionario, se considerato su scale paragonabili alle risoluzioni delle immagini radar, e quindi σ_z^2 è costante. Ovviamente, se la scala è più grande (come ad esempio tutta una immagine) il processo z_S diventa non stazionario. Tuttavia sono possibili anche z_S non stazionari alla scala della risoluzione della immagine.

$$r(\tau) = \exp\left(-\frac{\tau^2}{L_C^2}\right) \quad (22)$$

e quella **esponenziale**

$$r(\tau) = \exp\left(-\frac{\tau}{L_C}\right) \quad (23)$$

che risulta in superfici più *frastagliate*, come si vede dagli esempi del file allegato.

6 IL MODELLO A FACCETTE

La determinazione del campo diffuso (e trasmesso) da una superficie rugosa é un problema non ancora risolto in maniera soddisfacente. In queste note, quindi, introdurremo solo un modello molto semplificato, che tuttavia consente di ottenere (almeno a livello di ordine di grandezza) la risposta di una superficie rugosa a una onda piana incidente.

Nel seguito considereremo una superficie monodimensionale, di profilo

$$z = z_S(x)$$

(confronta (21)), di varianza σ_z^2 e correlazione gaussiana (22):

$$C_z(X) = \mathcal{E} [z_S(x)z_S(x+X)] = \sigma_z^2 \exp\left(-\frac{X^2}{L_C^2}\right) \quad (24)$$

Per calcolare la risposta ad una onda piana incidente, supponiamo di approssimare la superficie $z_S(x)$ con una spezzata, eventualmente discontinua, in cui ciascun tratto (faccetta) é perfettamente liscio, e quindi speculare¹. Per semplicitá assumiamo le lunghezze di tutte le faccette uguali, e pari a L_C , in modo che le quote dei centri delle faccette siano solo parzialmente correlate.

Se indichiamo con $p_S(x) = z'_S(x)$ la derivata del profilo, il processo aleatorio $p_S(x)$ é ancora gaussiano e stazionario, e la sua autocorrelazione vale

$$\begin{aligned} C_p(X) &= -\frac{d^2 C_z(X)}{dX^2} = -\sigma_z^2 \frac{d}{dX} \left[-\frac{2X}{L_C^2} \exp\left(-\frac{X^2}{L_C^2}\right) \right] \\ &= \sigma_z^2 \exp\left(-\frac{X^2}{L_C^2}\right) \left[\frac{2}{L_C^2} \left(1 - \frac{2X^2}{L_C^2}\right) \right] \end{aligned} \quad (25)$$

¹ Questo che presentiamo é una versione semplificata, e monodimensionale, del cosiddetto *facet model*. Questo modello, ovviamente bidimensionale, é stato uno dei primi approcci ad essere utilizzato per studiare l'interazione di una onda piana con una superficie rugosa. É stato poi abbandonato in quanto le risposte di tale modello dipendono in maniera essenziale dalle pdf dei parametri delle facce, in particolare dalle pdf delle dimensioni, e tali pdf non sono ottenibili in maniera attendibile. Poiché non siamo qui interessati a valutazioni quantitative precise, faremo delle ipotesi molto semplificate sui parametri del modello.

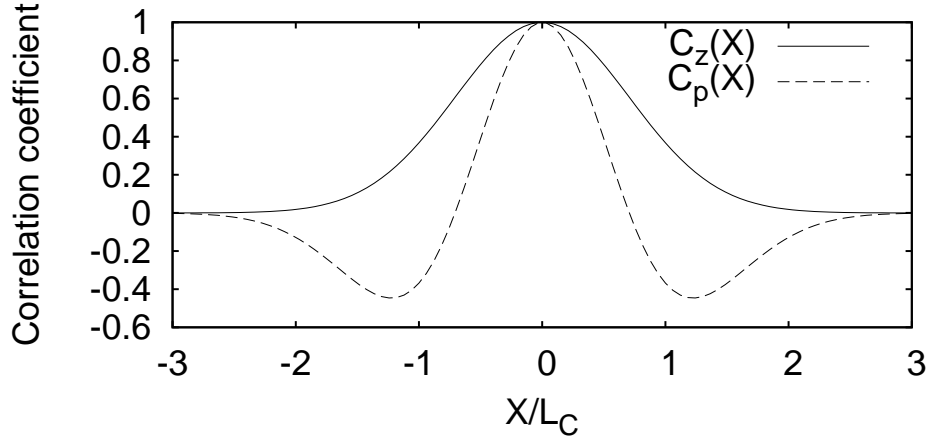


Fig. 1: Coefficiente di correlazione della quota e della sua derivata.

La varianza é quindi²

$$\sigma_p^2 = \frac{2\sigma_z^2}{L_C^2} \quad (26)$$

La (26) mostra un ulteriore significato della lunghezza di correlazione L_C (almeno per una superficie con correlazione gaussiana). Al crescere di L_C la derivata della quota *diminuisce*, nel senso che é sempre piú concentrata vicino allo zero.

Consideriamo ora l'effetto di una onda piana incidente dalla direzione θ_i . Ogni faccetta riflette la parte di onda piana incidente su di essa. Se la lunghezza della faccetta fosse infinita, si avrebbe campo diffuso solo nella direzione della legge di Snell (locale alla faccetta). Poiché L_C é finito, ma normalmente molto piú grande di λ , ogni faccetta si comporta come un allineamento di lunghezza L_C , con una progressione di fase tale da produrre un massimo di irradiazione nella direzione θ_M data dalla legge di Snell. Ma il campo sará presente anche in altre direzioni, e in particolare sará prossimo (entro -3 dB) a quello nella direzione di massimo se l'angolo dista al piú

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{2L_C \cos \theta_M} \quad (27)$$

da θ_M .

Se le faccette avessero tutte derivata nulla, ovvero fossero tutte allineate con l'asse x , il campo sarebbe riflesso nella direzione θ_i data dalla legge di Snell (globale, ovvero relativa alla superficie media), con una riflettivitá pari a quella della superficie speculare $R_0(\theta_i)$ (ovviamente dipendente dalla polarizzazione). In realtá la derivata nulla é solo il valore piú probabile della derivata ($p_s(x)$ é gaussiano), e la presenza di faccette con derivate diverse da zero modifica questa situazione.

Esaminiamo inizialmente cosa succede nella direzione θ_i della legge di Snell globale (la direzione \mathbf{k}_{SG} di Fig. 2). Per una faccetta con angolo di inclinazione Θ (vedi Fig. 2), la direzione del massimo di riflessione é nella direzione della legge di Snell locale (la direzione \mathbf{k}_{SL} di Fig. 2),

² Se avessimo adottato una correlazione esponenziale (23), la varianza sarebbe risultata infinita, a causa della presenza di un punto angoloso in $X = 0$.

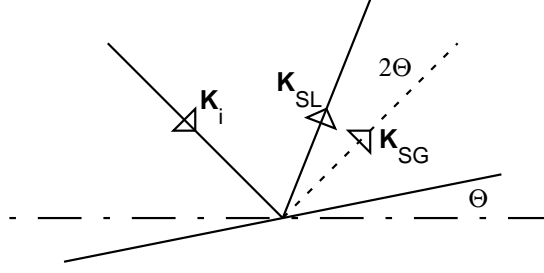


Fig. 2: Incidenza su una faccetta inclinata di $\Theta > 0$.

inclinata di 2Θ rispetto alla direzione \mathbf{k}_{SG} . La direzione θ_i é ancora compresa nel lobo principale di riflessione della faccetta, e quindi produrrá lo stesso contributo che se fosse piatta, purché

$$-\Delta\theta < 2\Theta < \Delta\theta$$

Ricordando che la pdf³ di $p_S(x)$ é gaussiana, con varianza σ_p^2 , tutte le realizzazioni della inclinazione delle faccette si trovano nell'intervallo $(-3\sigma_p, 3\sigma_p)$. La riflessione nella direzione θ_i della legge di Snell globale é quindi dovuta sostanzialmente a tutte le faccette se

$$3\sigma_p \leq \frac{\Delta\theta}{2} \quad \Rightarrow \quad 3\sqrt{2} \frac{\sigma_Z}{L_C} \leq \frac{\lambda}{4L_C \cos \theta_i} \quad \Rightarrow \quad \sigma_Z \leq \frac{\lambda}{12\sqrt{2} \cos \theta_i} \quad (28)$$

Poiché i centri delle varie faccette hanno quote correlate, se vale la (28) il campo complessivamente diffuso va calcolato tenendo conto delle differenze di fase tra i vari contributi. Si dice allora che questo contributo é un contributo *coerente*. Tenendo anche conto che il lobo centrale di riflessione di una faccetta non é costante, la riflessione totale se vale la (28) risulta

$$R_0(\theta_i) e^{-4\beta^2 \sigma_Z^2 \cos^2 \theta_i} \quad (29)$$

Evidentemente, se il valore assoluto dell'esponente nella (29) é sufficientemente piccolo, la superficie si comporta come speculare. Assumendo un valore limite di 0.15 (ovvero una riduzione massima del 85% rispetto alla superficie completamente liscia) si ottiene come condizione di superficie speculare

$$\sigma_Z \leq \frac{\lambda}{32 \cos \theta_i} \quad (30)$$

che evidentemente dipende da θ_i in quanto piú l'incidenza é radente, piú la presenza di rugosità diventa *visibile* e quindi importante.

In tutte le altre direzioni il contributo coerente é molto piccolo. Per avere diffusione significativa nelle direzioni diverse da θ_i occorre quindi che la (28) non sia valida.

Supponiamo allora che la (28) non sia rispettata, e consideriamo il back-scattering, ovvero il campo diffuso verso il trasmettitore. Posto $T_i = \tan \theta_i$, le faccette con $p_S = T_i$ sono esattamente ortogonali al raggio incidente e quindi il loro campo riflesso ha un massimo nella direzione di back-scattering. Ovviamente, anche inclinazioni vicine a queste (ovvero distanti meno di $\Delta\theta$) produrranno campo nella direzione di back-scattering. Queste inclinazioni occupano, nella distribuzione di p_S , un intervallo \mathcal{I} centrato su T_i ma relativamente piccolo (si veda la (27)). Quindi le faccette che contribuiscono sono poche, e distanti. I loro contributi

³ Per angoli piccoli, come quelli che ci interessano qui, Θ e p_S coincidono.

saranno incorrelati (si sommerá la potenza riflessa, e non il campo) e si parla allora di contributo *incoerente*. L'ampiezza del campo diffuso da una area ΔA grande rispetto alla lunghezza di correlazione (e quindi contenente molte faccette), se la diffusione è incoerente, risulta proporzionale all'area ΔA .

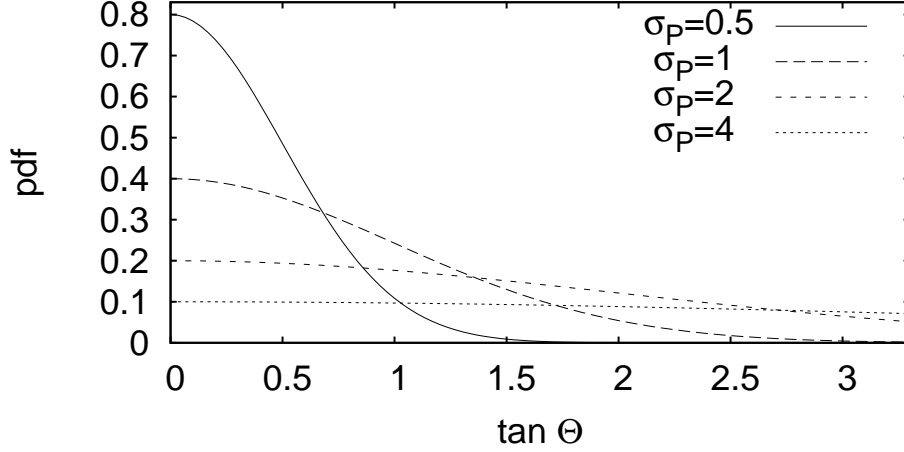


Fig. 3: pdf della derivata p_S .

La potenza diffusa sarà poi sostanzialmente proporzionale all'area sottesa (nelle curve di Fig. 3) da questo intervallo \mathcal{I} (ovvero alla probabilità che l'inclinazione sia nell'intervallo giusto). Si trova che a crescere di L_C (con σ_Z costante) la potenza retrodiffusa diminuisce, e tende anzi ad annullarsi per $L_C \rightarrow \infty$, ovvero per quelle superfici, come ad esempio il mare o il ghiaccio, che sono lisce (ovvero speculari) per motivi fisici. La dipendenza da σ_Z (per L_C costante) è invece variabile. In particolare per σ_Z piccolo, la potenza retrodiffusa cresce con σ_Z fino ad un massimo intorno a $\sigma_p = \tan \theta_i$, e poi inizia a decrescere.

7 SEZIONE RADAR DIFFERENZIALE

La nozione di sezione radar mal si presta ad essere utilizzata direttamente per un radar di immagine, che misura il campo diffuso da una superficie. Conviene definire allora una altra quantità, che sia direttamente legata alla diffusione superficiale.

Consideriamo allora la superficie illuminata da un radar monostatico, e dividiamola in aree elementari, di centro \mathbf{r}_n ed estensione ΔA_n , molto più grande della lunghezza di correlazione della superficie. Il vettore di Poynting incidente su ciascuna area vale

$$S_n^{inc} = \frac{G_n P_T}{4\pi R_n^2}$$

essendo P_T la potenza del trasmettitore, G_n il guadagno della antenna del sensore nella direzione della areola n -esima, e R_n la distanza tra l'areola e il sensore.

Il vettore di Poynting S_n^r , copolare al sensore, prodotto dalla areola ΔA_n dipende dalla sola diffusione incoerente, ed è quindi proporzionale a ΔA_n . S_n^r può quindi essere espresso come

$$S_n^r = \sum_n \Delta A_n \frac{\sigma_n^0(\theta_i, \phi_i, \theta_s, \phi_s, \mathcal{P}_i, \mathcal{P}_s)}{4\pi R_n^2} S_n^{inc} \quad (31)$$

in cui σ_n^0 è detta *sezione radar differenziale* della aerola ΔA_n posta in \mathbf{r}_n , ed è definita da (31). La σ_n^0 dipende dalle direzioni di incidenza e di diffusione¹, nonché dalle polarizzazioni dell'antenna in trasmissione \mathcal{P}_i e in ricezione \mathcal{P}_s .

I vettori di Poynting delle varie areole sono tra loro indipendenti, e di conseguenza la potenza ricevuta vale

$$P_R = \frac{\lambda^2}{(4\pi)} \sum_n G_n S_n^r = \frac{\lambda^2}{(4\pi)^3} P_T \sum_n \frac{G_n^2}{R_n^4} \sigma_n^0(\theta_i, \phi_i, \theta_s, \phi_s, \mathcal{P}_i, \mathcal{P}_s) \Delta A_n \quad (32)$$

che viene normalmente espressa in forma di integrale

$$P_R = \frac{\lambda^2}{(4\pi)^3} P_T \int_{A_I} \frac{G^2}{R^4} \sigma^0(\mathbf{r}; \theta_i, \phi_i, \theta_s, \phi_s, \mathcal{P}_i, \mathcal{P}_s) dS \quad (33)$$

Ovviamente, oltre a σ^0 , anche tutte le altre grandezze dell'integrando dipendono dal punto variabile di integrazione.

Come conseguenza del teorema di reciprocità, segue anche la simmetria della sezione radar differenziale rispetto allo scambio contemporaneo delle direzioni e delle polarizzazioni di incidenza e scattering:

$$\sigma^0(\theta_i, \phi_i, \theta_s, \phi_s, \mathcal{P}_i, \mathcal{P}_s) = \sigma^0(\theta_s, \phi_s, \theta_i, \phi_i, \mathcal{P}_s, \mathcal{P}_i) \quad (34)$$

La (33) può essere anche utilizzata per calcolare la potenza diffusa da una parte ΔA della superficie, ad esempio una cella corrispondente a un pixel di una immagine, estendendo l'integrale a quella sola parte. Se ΔA è sufficientemente piccolo da poter considerare tutte le grandezze costanti, allora la potenza ricevuta dal radar e diffusa dalla superficie elementare ΔA risulta pari a

$$\tilde{P}_R = \frac{\lambda^2}{(4\pi)^3} \frac{G_T G_R}{R_T^2 R_R^2} P_T \sigma^0(\theta_i, \phi_i, \theta_s, \phi_s, \mathcal{P}_i, \mathcal{P}_s) \Delta A$$

che mostra che, se sono noti i parametri del sistema, e in particolare le distanze R_T e R_R , per misurare $\sigma^0(\theta_i, \phi_i, \theta_s, \phi_s, \mathcal{P}_i, \mathcal{P}_s)$ è necessario “solo” estrarre da tutta la potenza ricevuta, la frazione \tilde{P}_R dovuta alla sola ΔA .

In particolare per un radar monostatico

$$\tilde{P}_R = \frac{\lambda^2}{(4\pi)^3} \frac{G^2}{R^4} P_T \sigma^0(\theta_i, \phi_i, \theta_s, \phi_s, \mathcal{P}_i, \mathcal{P}_s) \Delta A \quad (35)$$

¹ Si è lasciata la dipendenza da angolo di incidenza e scattering differenti benchè nel nostro caso $\theta_s = \theta_i$ e $\phi_s = \phi_i + \pi$.

8 POLARIMETRIA RADAR

Poiché oramai esistono antenne in grado di generare (in successione o contemporaneamente) due polarizzazioni opposte, si stà diffondendo l'utilizzo della polarimetria SAR, ovvero l'utilizzo di informazioni legate alla polarizzazione delle onde diffuse, in particolare dalle superfici, per incrementare le informazioni estraibili da una immagine.

Consideriamo l'equazione che fornisce il campo diffuso, trovata nel paragrafo sulla sezione radar, e che qui riscriviamo

$$\mathbf{E}_S(\Omega_s) = -\mathcal{A} \frac{e^{-j\beta r}}{\sqrt{4\pi} r} \left[\left(\mathbf{h}_0(\Omega_i, \Omega_i) \cdot \mathbf{p}_i \right) \mathbf{h}_0(\Omega_s, \Omega_i) + \left(\mathbf{h}(\Omega_i) \cdot \mathbf{p}_i \right) \mathbf{h}(\Omega_s) \right] E_i \quad (36)$$

essendo \mathcal{A} una costante, inessenziale in questo discorso.

La (36) è valida per il campo diffuso da un oggetto, oppure da una area di una superficie. Possiamo mettere in evidenza il campo incidente $\mathbf{E}_i = E_i \mathbf{p}_i$, scrivendola in forma matriciale, in cui i vettori sono **vettori colonna**:

$$\mathbf{E}_S(\Omega_s) = -\mathcal{A} \frac{e^{-j\beta r}}{\sqrt{4\pi} r} \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}_i \quad (37)$$

essendo \mathbf{S} la matrice di diffusione (detta anche matrice di Sinclair) data da¹

$$\mathbf{S} = \mathbf{h}_0(\Omega_s, \Omega_i) \mathbf{h}_0^T(\Omega_i, \Omega_i) + \mathbf{h}(\Omega_s) \mathbf{h}^T(\Omega_i) \quad (38)$$

i cui elementi sono sezioni radar in campo. Nel seguito siamo interessati alla diffusione in direzione di back-scattering e quindi la (38) verrà considerata per $\Omega_s = \Omega_B$. Indicheremo i suoi elementi (assumendo una base H - V per descrivere il campo) con²

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{XX} & S_{XY} \\ S_{XY} & S_{YY} \end{bmatrix}$$

A seconda del tipo di radar, è possibile misurare alcuni o tutti i suoi elementi. Un radar standard trasmette e riceve in una data polarizzazione (ad es., H) e quindi misura solo uno dei due elementi diagonali (nel caso dell'esempio, S_{XX}). Un radar polarimetrico è dotato di antenne in due polarizzazioni opposte, in genere lineare H e lineare V , e due ricevitori, uno per antenna. Per esso, sono possibili due modalità di funzionamento

dual-pol in cui la trasmissione è sempre in una polarizzazione (ad es., H), e quindi è possibile misurare solo una colonna di \mathbf{S} (nel caso dell'esempio, S_{XX} e S_{XY});

¹ Si noti che il prodotto *matriciale* è tra un vettore colonna e un vettore riga (ad esempio, rispettivamente \mathbf{h} e \mathbf{h}^T). In questo caso il risultato è una matrice, e non uno scalare

² Si noti che, dal teorema di reciprocità, segue che la matrice \mathbf{S} in caso di back-scattering è simmetrica, e quindi $S_{XY} = S_{YX}$.

full-pol in cui la trasmissione é alternativamente in H e in V , e quindi é possibile misurare tutti i termini della matrice \mathcal{S} .

La matrice di diffusione è una grandezza aleatoria, e di essa hanno interesse le statistiche del secondo ordine, che ovviamente costituiscono delle matrici. La matrice piú interessante é la matrice di coerenza polarimetrica \mathcal{T} definita da

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathcal{E} [|S_{XX} + S_{YY}|^2] & \mathcal{E} [(S_{XX} + S_{YY})(S_{XX} - S_{YY})^*] & 2\mathcal{E} [(S_{XX} + S_{YY})S_{XY}^*] \\ \mathcal{E} [(S_{XX} - S_{YY})(S_{XX} + S_{YY})^*] & \mathcal{E} [|S_{XX} - S_{YY}|^2] & 2\mathcal{E} [(S_{XX} - S_{YY})S_{XY}^*] \\ 2\mathcal{E} [(S_{XX} + S_{YY})S_{XY}^*] & 2\mathcal{E} [(S_{XX} - S_{YY})S_{XY}^*] & 4\mathcal{E} [|S_{XY}|^2] \end{bmatrix} \quad (39)$$

Si trova che gli elementi di \mathcal{T} sono direttamente legati ai meccanismi di diffusione della superficie terrestre. In particolare si trova che \mathcal{T}_{11} é dovuto essenzialmente alla diffusione diretta della superficie, \mathcal{T}_{22} ad effetti di doppia diffusione e \mathcal{T}_{33} alla diffusione di volume, ad esempio da parte della vegetazione.

Una connessione quantitativa della matrice di coerenza polarimetrica ai meccanismi di diffusione si ottiene calcolandone gli autovalori (reali) $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$. Si può infatti porre

$$\mathcal{T} = \lambda_1 \mathcal{T}^{(1)} + \lambda_2 \mathcal{T}^{(2)} + \lambda_3 \mathcal{T}^{(3)} \quad (40)$$

dove le matrici $\mathcal{T}^{(i)}$ sono prodotti degli autovettori corrispondenti ai λ_i . I tre meccanismi di scattering legati a queste matrici sono indipendenti, e dagli autovalori si possono calcolare delle pseudo-probabilità

$$p_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \quad (41)$$

che corrispondono alla *forza* dei corrispondenti meccanismi. A partire da questi, si possono calcolare alcuni parametri di interesse. I primi due misurano la omogeneità dei meccanismi di scattering e sono l'entropia H e l'anisotropia A , definiti da

$$H = - \sum_{i=1}^3 p_i \log_3 p_i \quad A = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3} \quad (42)$$

Un valore piccolo di entropia é associato alla esistenza di un meccanismo dominante di scattering. Infatti il caso limite $p_1 = 1$ conduce ad $H = 0$. Invece un valore elevato di H indica che i tre meccanismi sono di importanza confrontabile. E anzi, al crescere di H , il meccanismo dominante (quello legato a λ_1) risulta sepre meno dominante. A indica invece l'importanza relativa dei due meccanismi meno importanti, ed é particolarmente utile per $H > 0.7$.

Per individuare a quale meccanismo di scattering corrispondono i tre autovalori, occorre considerare i tre autovettori di \mathcal{T} . In particolare, detti \mathbf{u}_i i tre autovettori, si definisce

$$\alpha_i = \arccos[(\mathbf{u}_i)_1]$$

ovvero l'arcocoseno del primo elemento di ciascun autovettore. Da questi si definisce

$$\bar{\alpha} = p_1 \alpha_1 + p_2 \alpha_2 + p_3 \alpha_3 \in [0^\circ, 90^\circ] \quad (43)$$

Si trova che valori piccoli di $\overline{\alpha}$ corrispondono alla prevalenza di diffusione singola, mentre valori prossimi a 90° corrispondono a una prevalenza di diffusione multipla. Valori prossimi a 45° indicano che il meccanismo prevalente é la diffusione di volume.

APPENDICE 1: VALUTAZIONI QUANTITATIVE NEL MODELLO A FACCETTE

Per valutare la potenza retrodiffusa, per un angolo di incidenza θ_i , teniamo conto che solo le faccette con una inclinazione in $(\theta_i - \Delta\theta, \theta_i + \Delta\theta)$ contribuiscono alla retroirradiazione. Interessa quindi valutare la frazione di queste faccette, ovvero la probabilità che la V.A. p_S sia nell'intervallo $(\tan[\theta_i - \Delta\theta], \tan[\theta_i + \Delta\theta])$. Tenendo conto poi che $\Delta\theta \ll 1$, possiamo calcolare approssimativamente questo intervallo come

$$\begin{aligned}\tan[\theta_i \pm \Delta\theta] &= \frac{\tan \theta_i \pm \tan \Delta\theta}{1 \mp \tan \theta_i \tan \Delta\theta} \simeq \frac{\tan \theta_i \pm \Delta\theta}{1 \mp \tan \theta_i \Delta\theta} \simeq \left[\tan \theta_i \pm \Delta\theta \right] \left[1 \pm \tan \theta_i \Delta\theta \right] \\ &\simeq \tan \theta_i \pm \Delta\theta \pm \tan^2 \theta_i \Delta\theta = \tan \theta_i \pm \frac{\Delta\theta}{\cos^2 \theta_i}\end{aligned}$$

Ricordiamo che p_S é un a V.A. gaussiana, con varianza σ_p^2 data dalla (26). La frazione \mathcal{P} di faccette interessate, e quindi la potenza retrodiffusa, sarà allora

$$\mathcal{P} = \int_{\tan \theta_i - \frac{\Delta\theta}{\cos^2 \theta_i}}^{\tan \theta_i + \frac{\Delta\theta}{\cos^2 \theta_i}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_p} \exp \left[-\frac{p_s^2}{2\sigma_p^2} \right] dp_s$$

La piccolezza di $\Delta\theta$ ci consente di calcolare l'integrale col teorema della media, ottenendo

$$\mathcal{P} = 2 \frac{\Delta\theta}{\cos^2 \theta_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_p} \exp \left[-\frac{\tan^2 \theta_i}{2\sigma_p^2} \right]$$

Sostituendo $\Delta\theta$ e σ_p segue

$$\mathcal{P} = \frac{2}{\cos^2 \theta_i} \frac{\lambda}{2L_C \cos \theta_i} \frac{L_C}{2\sqrt{\pi} \sigma_Z} \exp \left[-\frac{L_C^2 \tan^2 \theta_i}{4\sigma_Z^2} \right] = \frac{\lambda}{2\sqrt{\pi} \cos^3 \theta_i} \frac{1}{\sigma_Z} \exp \left[-\frac{L_C^2 \tan^2 \theta_i}{4\sigma_Z^2} \right]$$

da cui si vede chiaramente che \mathcal{P} é una funzione decrescente di L_C .

Per quanto riguarda invece la dipendenza da σ_Z , si trova che \mathcal{P} tende a zero sia per $\sigma_Z \rightarrow 0$, sia per $\sigma_Z \rightarrow \infty$. Esisterá quindi un punto di massimo, che possiamo cercare mediante derivazione. Posto $A = L_C^2 \tan^2 \theta_i / 4$, calcoliamo

$$\frac{d}{d\sigma_Z} \left\{ \frac{1}{\sigma_Z} \exp \left[-\frac{A}{\sigma_Z^2} \right] \right\} = -\frac{1}{\sigma_Z^2} \exp \left[-\frac{A}{\sigma_Z^2} \right] + \frac{1}{\sigma_Z} \exp \left[-\frac{A}{\sigma_Z^2} \right] \frac{2A}{\sigma_Z^3}$$

che si annulla se

$$-\frac{1}{\sigma_Z^2} + \frac{2A}{\sigma_Z^4} = 0$$

ovvero per

$$\sigma_Z^2 = 2A = \frac{L_C^2 \tan^2 \theta_i}{2} \implies \sigma_p = \tan \theta_i$$

INDICE

1. SISTEMI DI RIFERIMENTO	1
2. RIFLESSIONE DA INTERFACCIA PIANA	1
3. PROPAGAZIONE NEI MEZZI STRATIFICATI	5
4. RIFLESSIONE E TRASMISSIONE DI BRILLANZA	8
5. CARATTERIZZAZIONE DELLE SUPERFICI	11
6. IL MODELLO A FACCETTE	12
7. SEZIONE RADAR DIFFERENZIALE	15
8. POLARIMETRIA RADAR	17
App. 1. VALUTAZIONI QUANTITATIVE NEL MODELLO A FACCETTE	20