

1 RADAR AD APERTURA REALE

Il piú semplice sistema di telerilevamento attivo é il radar ad apertura reale (RAR), in cui un sensore, in moto rettilineo alla quota h , con velocità v , illumina la superficie terrestre, e ne riceve il segnale diffuso. Se é nota la quota H , il segnale diffuso consente di estrarre la sezione radar differenziale σ^0 della superficie terrestre, ovviamente mediata sulla area illuminata.

La geometria di acquisizione di un RAR, e di qualunque altro sensore radar di immagine, é mostrata in Fig. 1

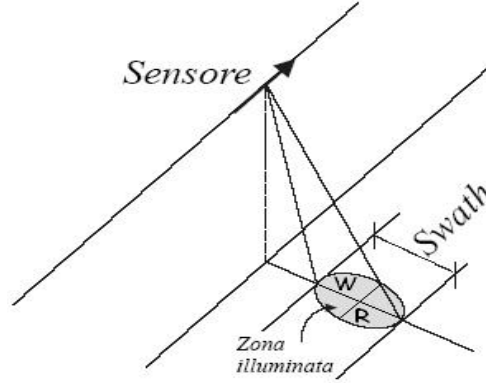


Fig. 1: Geometria di acquisizione di un sensore radar di immagine.

Il sensore guarda lateralmente rispetto alla proiezione a terra della sua linea di volo, per evitare l'ambiguitá destra-sinistra nella acquisizione.

In Fig. 2 sono mostrate le viste laterali della geometria, rispettivamente in direzione ortogonale alla linea di volo (direzione di *range*) e parallela a questa (direzione di *azimuth*). Nella Fig. 2 si evidenziano l'angolo θ di vista del sensore, e le larghezze di fascio θ_r in range e θ_a in azimuth (molto esagerate nella figura). Se l'antenna del sensore é un array planare di dimensioni W in range ed L in azimuth, allora

$$\theta_r = \frac{\lambda}{W} \quad \theta_a = \frac{\lambda}{L} \quad (1)$$

essendo λ la lunghezza d'onda di funzionamento del radar.

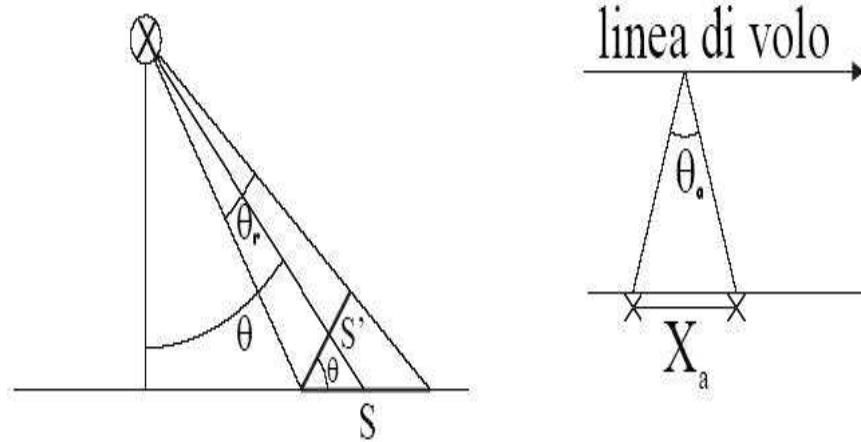


Fig. 2: Viste laterali della geometria di acquisizione.

Come si vede dalle figure, il sensore, nel suo moto, illumina una striscia, parallela alla sua linea di volo, detta *swath*, che, dalla Fig. 2, ha una larghezza pari a

$$S = \frac{S'}{\cos \theta} \quad \text{con} \quad S' = \frac{h}{\cos \theta} \theta_r = \frac{h\lambda}{W \cos \theta}$$

essendo $h/\cos \theta$ la distanza tra il sensore e il centro della zona illuminata. Ne segue che la larghezza dello *swath* é

$$S = \frac{h\lambda}{W \cos^2 \theta} \quad (2)$$

Consideriamo come esempio un radar su satellite con $h = 800 \text{ km}$, $\theta = 20^\circ$ e, per una lunghezza d'onda $\lambda = 27 \text{ cm}$, una antenna larga $W = 2.1 \text{ m}$. A questi valori corrisponde uno *swath* di $S = 100 \text{ km}$.

Allo stesso modo, la lunghezza ℓ_a della zona illuminata a terra, nella direzione di azimuth é data da

$$\ell_a = \frac{h}{\cos \theta} \theta_a = \frac{h\lambda}{L \cos \theta} \quad (3)$$

Per lo stesso esempio di prima, con $L = 12 \text{ m}$, si ha $\ell_a = 19.1 \text{ km}$.

Da questi esempi si vede che la risoluzione di un RAR é troppo grande per essere praticabile. Anche usando frequenze molto piú alte, l'area illuminata a terra, corrispondente alla cella di risoluzione, é ancora di decine di km^2 . Sono quindi necessarie tecniche di acquisizione diverse per garantire risoluzioni ragionevoli. Solo per sensori su aerei, con quote di qualche km , un RAR potrebbe garantire risoluzioni, soprattutto in azimuth, utilizzabili. Si noti, comunque, che le espressioni date da (1,2) sono valide anche per sensori ottici. Solo che, in tal caso, la lunghezza d'onda é dell'ordine di $0.5 \mu\text{m}$, e quindi la cella di risoluzione risulta molto piú piccola, anche con strumenti ottici con aperture di pochi cm .

Vedremo nel seguito come si costruisce, in un radar di immagine, una immagine in range ad alta risoluzione, e poi passeremo a considerare l'immagine in azimuth, che richiederá una elaborazione del segnale molto piú complessa.

2 GEOMETRIA DI IMAGING IN RANGE

Per costruire una immagine ad alta risoluzione in range, é necessario poter discriminare la potenza diffusa da zone diversa della scena. Questo é possibile in quanto il tempo di viaggio del segnale dipende dalla posizione nello *swath*.

Per ricavare questa relazione, fissiamo un asse R sulla superficie terrestre, con centro il centro dello *swath*, Fig. 3, e indichiamo con R_0 la distanza tra la direzione di *nadir*, ovvero la proiezione a terra della linea di volo, e il centro dello *swath*.

Il tempo totale di viaggio t_A per un punto A di ascissa R_A (dal centro dello *swath*) risulta pari a

$$t_A = 2 \frac{r(R_A)}{c} \quad (4)$$

essendo $r(R_A)$ la distanza tra il sensore ed il punto A , e c la velocità della luce. Detta D la distanza tra il sensore ed il centro dello *swath*, col che $R_0 = D \sin \theta$, risulta

$$[r(R_A)]^2 = h^2 + (R_0 + R_A)^2 = h^2 + R_0^2 + 2D \sin \theta R_A + R_A^2 = D^2 + 2D \sin \theta R_A + R_A^2$$

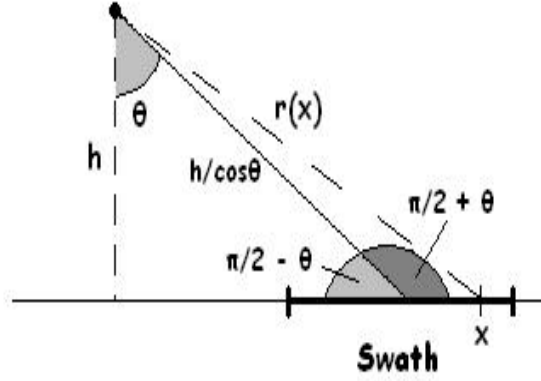


Fig. 1: Calcolo del tempo di viaggio del segnale fino a un punto generico x dello swath.

A questo punto notiamo che $R_A \ll D$ per cui possiamo calcolare $r(R_A)$ con uno sviluppo di Taylor

$$\begin{aligned}
 r(R_A) &= D \sqrt{1 + 2 \frac{R_A}{D} \sin \theta + \left(\frac{R_A}{D} \right)^2} \\
 &\simeq D \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[2 \frac{R_A}{D} \sin \theta + \left(\frac{R_A}{D} \right)^2 \right] - \frac{1}{8} \left[2 \frac{R_A}{D} \sin \theta \right]^2 \right\} \\
 &= D \left\{ 1 + \frac{R_A}{D} \sin \theta + \frac{1}{2} \left(\frac{R_A}{D} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{R_A}{D} \right)^2 \sin^2 \theta \right\} = D + R_A \sin \theta + \frac{1}{2} \frac{R_A^2}{D} \cos^2 \theta
 \end{aligned} \tag{5}$$

Sostituendo in (4) segue

$$t_A = \frac{2}{c} \left[D + R_A \sin \theta + \frac{1}{2} \frac{R_A^2}{D} \cos^2 \theta \right] = t_0 + \frac{2R_A}{c} \sin \theta + \frac{R_A^2}{cD} \cos^2 \theta \tag{6}$$

essendo t_0 il tempo di viaggio corrispondente al centro dello swath. Se l'ultimo termine di (6) è trascurabile¹, allora il tempo di viaggio è proporzionale alla posizione:

$$t_A = t_0 + \frac{2R_A}{c} \sin \theta \tag{7}$$

ed è quindi possibile ottenere la $\sigma^0(R)$ registrando la potenza ricevuta al variare del tempo.

Questo può essere ottenuto inviando un segnale costituito da un impulso modulato di durata τ , che richiede una banda in trasmissione (se modulato SSB) $B_T = 1/\tau$. Se consideriamo, ad esempio, la presenza sul suolo di soli due oggetti, A e B , posti in R_A ed R_B ($> R_A$) rispettivamente, la risposta ad un impulso che parte da $t = 0$ è data dalla somma di due impulsi, di ampiezza diversa, con inizio in t_A e t_B , dati da (7), rispettivamente, come riportato in Fig. 2.

Si definisce risoluzione in range di un radar di immagine la minima distanza tra due oggetti che sono distinguibili in maniera affidabile. Se consideriamo i due oggetti A e B , posti in punti generici, il segnale ricevuto è quello di Fig. 2. Come si vede da tale figura, i due oggetti

¹ Rimandiamo ad un paragrafo successivo la discussione della validità di questa approssimazione.

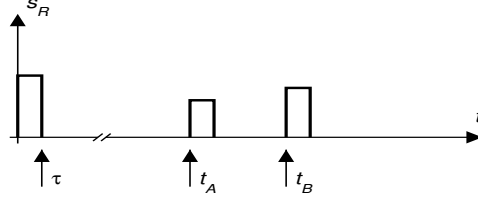


Fig. 2: Segnali trasmessi e ricevuti
(le ampiezze dei due impulsi sono proporzionali a $\sqrt{\sigma_A^0}$ e $\sqrt{\sigma_B^0}$ rispettivamente).

sono distinguibili se la ricezione dell'impulso diffuso da B inizia quando la ricezione dell'impulso diffuso da A è terminato, ovvero se

$$t_A + \tau \leq t_B \quad \implies \quad t_0 + \frac{2R_A}{c} \sin \theta + \tau \leq t_0 + \frac{2R_B}{c} \sin \theta$$

Semplificando segue che A e B sono distinguibili se le loro posizioni soddisfano a

$$R_B - R_A \geq \frac{c\tau}{2 \sin \theta}$$

La risoluzione in range X_r è il minimo della espressione precedente

$$X_r = R_B - R_A \Big|_{min} = \frac{c\tau}{2 \sin \theta} \quad (8)$$

3 POTENZA RICEVUTA E SNR IN UN RADAR DI IMMAGINE

Valutiamo la potenza ricevuta da un radar di immagine, e il corrispondente rapporto segnale-rumore SNR , nelle varie condizioni di funzionamento.

Consideriamo una antenna di dimensioni L in azimuth (ovvero nella direzione di volo) e W in range (ovvero in direzione ortogonale), che trasmette una potenza (di picco) P_T . Il sensore vola ad una quota h ed osserva la scena ad un angolo θ . La sezione radar differenziale della scena è σ^0 .

L'equazione del radar per una superficie è:

$$P_R = P_T \frac{\lambda^2}{(4\pi)^3} \frac{G^2}{r^4} \left[\sigma^0 A_I \cos \theta \right] \quad (9)$$

essendo G il guadagno d'antenna (costante), r la distanza della superficie illuminata ed A_I la sua area. Introducendo l'area efficace della antenna $A_e = WL$ e la quota di volo h la (9) diventa

$$P_R = \frac{P_T}{4\pi\lambda^2} W^2 L^2 \frac{\cos^5 \theta}{h^4} \left[\sigma^0 A_I \right] \quad (10)$$

L'area illuminata A_I è pari al prodotto della lunghezza della impronta a terra in azimuth e della "lunghezza a terra" dell'impulso trasmesso.

Per valutare questa ultima quantità, supponiamo che l'impulso trasmesso abbia una durata τ_t , e notiamo che ad ogni istante ci sono un punto B in cui il segnale è appena arrivato

e un punto A in cui il segnale è appena terminato. Evidentemente, usando la definizione (4), risulterà:

$$\frac{t_A}{2} + \tau_t = \frac{t_B}{2}$$

in quanto il segnale in A è arrivato τ_t secondi prima. Sostituendo la relazione tempo-range (6) segue

$$\frac{R_A}{c} \sin \theta + \tau_t = \frac{R_B}{c} \sin \theta$$

dove R_A e R_B sono i due range corrispondenti. La zona illuminata a terra vale

$$R_B - R_A = \frac{c\tau_t}{\sin \theta}$$

Di conseguenza

$$A_I = \ell_a \cdot (R_A - R_B) = \left[\frac{h\lambda}{L \cos \theta} \right] \frac{c\tau_t}{\sin \theta} \quad (11)$$

La potenza ricevuta diventa:

$$P_R = \frac{P_T}{4\pi\lambda} \frac{W^2 L}{h^3} \frac{\cos^4 \theta}{\sin \theta} c\tau_t \sigma^0 \quad (12)$$

La potenza di rumore è invece pari a

$$P_N = \mathcal{K} B_{RF} T_N \quad (13)$$

essendo $\mathcal{K} = 1.381 \cdot 10^{-23} \text{ W/K Hz}$ la costante di Boltzmann, B_{RF} la banda a radiofrequenza del segnale trasmesso e T_N la temperatura di rumore complessiva del sistema (che, tra l'altro, include anche l'emissione termica della superficie illuminata).

Le prestazioni rispetto al rumore di un sensore sono misurate dal rapporto segnale-rumore

$$SNR = \frac{P_R}{P_N}$$

e dipendono ovviamente da T_N , ma anche dalla potenza e dalla modalità del sensore. Risulta allora più conveniente misurarle introducendo la sezione radar equivalente di rumore σ_N^0 , definita come quella sezione radar differenziale che produrrebbe un $SNR = 1$. Confrontando (12) e (13) segue:

$$\sigma_N^0 = \frac{\mathcal{K} B_{RF} T_N}{P_T} \frac{4\pi\lambda}{c} \frac{h^3}{W^2 L} \frac{\sin \theta}{\cos^4 \theta} \frac{1}{\tau_t}$$

Utilizzando σ_N^0 segue che

$$SNR = \frac{\sigma^0}{\sigma_N^0} \quad (14)$$

Finora abbiamo considerato una antenna senza perdite. La presenza di perdite nella antenna ha sia l'effetto di modificare il valore di T_N , sia quello di ridurre le potenze. Se il trasmettitore produce una potenza P_T , la potenza irradiata è pari a $\eta_L P_T$, essendo η_L l'efficienza della antenna. Anche la potenza ricevuta (12) viene ridotta di η_L e vale quindi

$$P_R = \eta_L \frac{\eta_l P_T}{4\pi\lambda} \frac{W^2 L}{h^3} \frac{\cos^4 \theta}{\sin \theta} c\tau_t \sigma^0$$

Si trova quindi, per una antenna con perdite,

$$\sigma_N^0 = \frac{\mathcal{K} B_{RF} T_N}{\eta_L^2 P_T} \frac{4\pi\lambda}{c} \frac{h^3}{W^2 L} \frac{\sin \theta}{\cos^4 \theta} \frac{1}{\tau_t} \quad (15)$$

4 TRASMISSIONE DI IMPULSI MODULATI – CHIRP

Confrontando (8) ed (15) si vede che una riduzione di τ produce un miglioramento della risoluzione in range, ma a spese di un incremento di σ_N^0 , ovvero di una riduzione del SNR .

D'altra parte, l'immagine in range é costruita misurando σ^0 al variare del tempo o, piú precisamente, al variare del ritardo differenziale rispetto al centro dello swath. Poiché, per misurare un intervallo di tempo Δt occorre un segnale di banda $B \geq 1/\Delta t$, é ragionevole pensare che la (8) vada in realtà espressa in termini della banda B_{RF} del segnale a radiofrequenza, come

$$X_r = \frac{c}{2B_{RF} \sin \theta} \quad (16)$$

La (16) suggerisce che il parametro limitante la risoluzione sia B_{RF} , e che quindi segnali di durata diversa, ma con la stessa banda, forniscano la medesima risoluzione, ovviamente con elaborazioni differenti.

Viceversa, la σ_N^0 é inversamente proporzionale alla durata del segnale trasmesso τ_t , vedi (11,15), e quindi impulsi di durata diversa forniscono SNR diversi per la stessa scena.

Convienne allora utilizzare un segnale in cui durata e banda possano essere scelti indipendentemente. Uno di questi segnali, ed abbondantemente il piú utilizzato nei radar di immagine, é il chirp:

$$a(t) = \cos \left(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{2\tau_c} t^2 \right) \quad (17)$$

le cui proprietà sono state descritte nel capitolo sulla polarizzazione. Il chirp (crescente) (17) ha durata τ_c e banda $B_{RF} = \Delta\omega/2\pi$, tra loro indipendenti.

In tal modo é possibile, come ora mostreremo, avere una risoluzione pari alla (16), ma usando un impulso molto piú lungo di $1/B_{RF}$, e quindi con un notevole incremento del SNR .

Il principio alla base dell'uso di un chirp é mostrato in Fig. 1. Il segnale diffuso dai due punti A e B considerati precedentemente per calcolare la risoluzione arrivano parzialmente sovrapposti, in quanto la differenza di tempo di viaggio, τ , é piú piccola della durata τ_c del chirp.

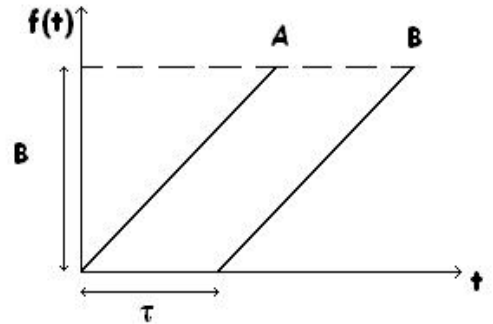


Fig.1: Frequenza istantanea dei segnali ricevuti

Tuttavia, come si vede dalla Fig. 1, istante per istante le frequenze istantanee dei due chirp sono diverse. Come vedremo, se la durata del chirp é sufficientemente grande, é possibile discriminare queste due frequenze istantanee e quindi costruire l'immagine in range.

Consideriamo allora i due punti A e B già considerati nel Par. 2, e supponiamo che il radar trasmetta un chirp (17). Il segnale ricevuto $s_R(t)$ vale

$$s_R(t) = \gamma_A a(t - t_A) + \gamma_B a(t - t_B) \quad (18)$$

essendo γ_A, γ_B le due sezioni radar differenziali in campo.

L'elaborazione standard prevede di far passare il segnale $s_R(t)$ attraverso un filtro adattato, ovvero un filtro con risposta armonica $[\hat{A}_+(\omega)]^* e^{j\omega t_R}$, con $\hat{a}(\omega)$ trasformata del chirp $a(t)$, pari alla (34) del paragrafo sul filtro adattato e t_R un opportuno istante di tempo, necessario per la realizzabilità del filtro adattato stesso.

L'uscita del filtro sarà data dalla (38) del paragrafo sul filtro adattato, opportunamente adattata all'ingresso (18):

$$Y(t) = e^{-j\omega_0 t_R} \left\{ \gamma_A \exp \left[j \frac{\Delta\omega}{2} (t - t_A - t_R) \right] \text{sinc} \left[\frac{\Delta\omega}{2} (t - t_A - t_R) \right] + \gamma_B \exp \left[j \frac{\Delta\omega}{2} (t - t_B - t_R) \right] \text{sinc} \left[\frac{\Delta\omega}{2} (t - t_B - t_R) \right] \right\} \quad (19)$$

Scegliendo $t = t_0$, in modo che il primo sinc sia massimo, e il secondo sia trascurabile, si trova $|Y(t_0)|^2 = |\gamma_A|^2 = \sigma_A^0$. Il secondo sinc è trascurabile se il suo argomento è maggiore o uguale a π . Ne segue che la distanza minima tra A e B , ovvero la risoluzione in range X_r , si ha quando l'argomento della seconda sinc è pari a π . Seguono allora le equazioni

$$\left[\frac{\Delta\omega}{2} (t - t_A - t_R) \right] = 0 \quad \left[\frac{\Delta\omega}{2} (t - t_B - t_R) \right] = \pi$$

Dalla prima segue $t_0 - t_R = t_A$ e sostituendo nella seconda

$$\frac{\Delta\omega}{2} (t_B - t_A) = \pi \quad \implies \quad t_B - t_A = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{1}{B_{RF}}$$

Sostituendo i tempi da (8) segue la espressione (16) della risoluzione in range.

L'incremento dalla durata del segnale riduce la σ_N^0 . Indicando con $C = B_{RF} \tau_c$ il *fattore di compressione* del chirp, che é normalmente molto grande, la espressione (15) per la σ_N^0 diventa

$$\sigma_N^0 = \frac{\mathcal{K} B_{RF} T_N}{P_T} \frac{4\pi\lambda}{c} \frac{h^3}{W^2 L} \frac{\sin \theta}{\cos^4 \theta} \frac{1}{\tau_c} = \frac{\mathcal{K} B_{RF} T_N}{P_T} \frac{4\pi B_{RF} \lambda}{c} \frac{h^3}{W^2 L} \frac{\sin \theta}{\cos^4 \theta} \frac{1}{C} \quad (20)$$

coerentemente col miglioramento atteso dall'uso di un filtro adattato.

In alternativa ad usare il filtro adattato al chirp (17), si può usare un filtro adattato a un chirp $a_R(t)$, con la stessa modulazione, ma più corto, e quindi con una banda più piccola. Se indichiamo con N_r la riduzione di banda e durata, si trova

$$a_R(t) = \cos \left(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega/N_r}{2\tau_c/N_r} t^2 \right) = \cos \left(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{2\tau_c} t^2 \right) \quad t \in [0, \tau_c/N_r] \quad (21)$$

La trasformata $\hat{a}_R(\omega)$ é pertanto costante in modulo, e coincide con $\hat{a}(\omega)$ nella banda $[\omega_0, \omega_0 + \Delta\omega/N_r]$, ed è nulla al di fuori di questo intervallo. Di conseguenza, se al filtro adattato a $a_R(t)$ facciamo precedere un passa-banda ideale con banda $[\omega_0, \omega_0 + \Delta\omega/N_r]$, l'uscita resta invariata. In questo caso, il segnale (18) passa prima nel passa-banda, e poi nel filtro adattato a $a_R(t)$. Ma l'effetto su $a(t)$ del filtro passa-banda è quello di trasformare il chirp in $a_R(t)$, che poi entrerà nel filtro adattato.

Ne segue che la (19) resta ancora valida, a patto di sostituire $\Delta\omega$ con $\Delta\omega/N_r$. Si ottiene così

$$Y(t) = e^{-j\omega_0 t_R} \left\{ \gamma_A \exp \left[j \frac{\Delta\omega}{2N_r} (t - t_A - t_R) \right] \text{sinc} \left[\frac{\Delta\omega}{2N_r} (t - t_A - t_R) \right] + \gamma_B \exp \left[j \frac{\Delta\omega}{2N_r} (t - t_B - t_R) \right] \text{sinc} \left[\frac{\Delta\omega}{2N_r} (t - t_B - t_R) \right] \right\} \quad (22)$$

e la risoluzione diventa

$$X_{r,N_r} = \frac{c}{2B_{RF}/N_r \sin \theta} = N_r \frac{c}{2B_{RF} \sin \theta} = N_r X_r \quad (23)$$

La risoluzione é quindi piú grande di N_r volte, a paritá di banda in trasmissione. Tuttavia, potendo usare una banda piú piccola in ricezione, la σ_N^0 si riduce di N_r . Le considerazioni precedenti, e la prima espressione della (23), indicano che la banda effettivamente utilizzata per la “risoluzione” é

$$B_r = \frac{B_{RF}}{N_r}$$

e il rumore dipenderà pertanto da questa banda. Quindi la espressione (20) per σ_N^0 assume la forma

$$\sigma_N^0 = \frac{\mathcal{K} B_r T_N}{P_T} \frac{4\pi\lambda}{c} \frac{h^3}{W^2 L} \frac{\sin \theta}{\cos^4 \theta} \frac{1}{\tau_c} = \frac{\mathcal{K} B_r T_N}{P_T} \frac{4\pi B_{RF} \lambda}{c} \frac{h^3}{W^2 L} \frac{\sin \theta}{\cos^4 \theta} \frac{1}{C} \quad (24)$$

La scelta di far passare il segnale ricevuto attraverso un filtro con risposta adattata ad $a_R(t)$ ha anche un altro effetto. Per valutarlo, consideriamo la ricezione del segnale da una scena con $\sigma^0(R)$ distribuito. La (18) del segnale ricevuto va allora generalizzata in¹

$$s_R(t) = \int \gamma(\rho) a \left[t - \frac{2}{c} (D + \rho \sin \theta) \right] d\rho \quad (25)$$

All'uscita del filtro adattato ad $a_R(t)$ si ha, analogamente a (22),

$$Y(t) = e^{-j\omega_0 t_R} \int \gamma(\rho) \exp \left\{ j \frac{\Delta\omega}{2N_r} \left[t - \frac{2}{c} (D + \rho \sin \theta) - t_R \right] \right\} \text{sinc} \left\{ \frac{\Delta\omega}{2N_r} \left[t - \frac{2}{c} (D + \rho \sin \theta) - t_R \right] \right\} d\rho \quad (26)$$

¹ Ovviamente queste considerazioni valgono anche se il filtro è adattato a $a(t)$. Basterà solo porre $N_r = 1$.

che può essere scritta come una convoluzione generalizzata

$$\begin{aligned}
Y(t) &= e^{-j\omega_0 t_R} \int \gamma(\rho) \exp \left\{ j \frac{\Delta\omega}{2N_r} \left[\left(t - \frac{2D}{c} - t_R \right) - \frac{2\rho \sin \theta}{c} \right] \right\} \\
&\quad \text{sinc} \left\{ \frac{\Delta\omega}{2N_r} \left[\left(t - \frac{2D}{c} - t_R \right) - \frac{2\rho \sin \theta}{c} \right] \right\} d\rho \\
&= e^{-j\omega_0 t_R} \int \gamma(\rho) \exp \left\{ j \frac{\Delta\omega \sin \theta}{cN_r} \left[\frac{c}{2 \sin \theta} \left(t - \frac{2D}{c} - t_R \right) - \rho \right] \right\} \\
&\quad \text{sinc} \left\{ \frac{\Delta\omega \sin \theta}{cN_r} \left[\frac{c}{2 \sin \theta} \left(t - \frac{2D}{c} - t_R \right) - \rho \right] \right\} d\rho
\end{aligned} \tag{27}$$

Nell'ipotesi di banda infinita, la sinc diventa una δ di Dirac. A meno di una costante si avrebbe allora

$$\begin{aligned}
Y(t) &= e^{-j\omega_0 t_R} \int \gamma(\rho) \exp \left\{ j \frac{\Delta\omega \sin \theta}{cN_r} \left[\frac{c}{2 \sin \theta} \left(t - \frac{2D}{c} - t_R \right) - \rho \right] \right\} \\
&\quad \delta \left[\frac{c}{2 \sin \theta} \left(t - \frac{2D}{c} - t_R \right) - \rho \right] d\rho \\
&= e^{-j\omega_0 t_R} \gamma \left[\frac{c}{2 \sin \theta} \left(t - \frac{2D}{c} - t_R \right) \right]
\end{aligned}$$

da cui possiamo estrarre la $\gamma(R)$ e quindi la mappa della sezione radar differenziale (con risoluzione infinita). Per farlo, eseguiamo il cambio di variabili

$$R = \frac{c}{2 \sin \theta} \left(t - \frac{2D}{c} - t_R \right) \quad \implies \quad t = \frac{2R \sin \theta}{c} + \frac{2D}{c} + t_R \tag{28}$$

L'effetto su t del cambio di variabili é nient'altro che il passaggio dal ritardo differenziale rispetto al centro dello swath (con tempo di viaggio $2D/c$) alla coordinata di range sullo swath medesimo.

Risolvendo per $\gamma(R)$ segue allora

$$\gamma(R) = e^{j\omega_0 t_R} Y \left(\frac{2R \sin \theta}{c} + \frac{2D}{c} + t_R \right)$$

da cui

$$\sigma^0(R) = \left| Y \left(\frac{2R \sin \theta}{c} + \frac{2D}{c} + t_R \right) \right|^2$$

Per banda infinita, quindi, il modulo quadro dell'uscita sarebbe, per un opportuno asse orizzontale, una mappa della sezione radar differenziale della scena.

Tornando al caso di banda finita, conviene usare ancora il cambio di variabili (28). Se poniamo

$$\bar{Y}(R) = Y \left(\frac{2R \sin \theta}{c} + \frac{2D}{c} + t_R \right)$$

in modo che $|\bar{Y}(R)|^2$ sia una stima della sezione radar differenziale, segue allora, dalla seconda di (27)

$$\bar{Y}(R) = e^{-j\omega_0 t_R} \int \gamma(\rho) \exp \left\{ j \frac{\Delta\omega \sin \theta}{cN_r} [R - \rho] \right\} \text{sinc} \left\{ \frac{\Delta\omega \sin \theta}{cN_r} [R - \rho] \right\} d\rho \quad (29)$$

che mostra che la stima $\bar{Y}(R)$ risulta una media mobile della $\gamma(R)$, fatta su una larghezza pari alla larghezza a 3 dB della sinc, ovvero alla distanza tra il massimo e il primo zero. Questa distanza ℓ_r vale

$$\frac{\Delta\omega \sin \theta}{cN_r} \ell_r = \pi \quad \implies \quad \ell_r = N_r \frac{c}{2B_{RF} \sin \theta} = N_r X_r \quad (30)$$

pari alla risoluzione. Ovviamente per $N_r = 1$ si riottiene una risoluzione X_r , il che mostra che il segnale ricevuto contiene, prima della elaborazione, informazioni per ricostruire una immagine con risoluzione X_r .

L'effetto di usare $a_R(t)$ come risposta del filtro é quindi quello di eseguire una media, su N_r *campioni*, della immagine ottenibile con il segnale trasmesso, di banda B_{RF} . Poiché la banda in trasmissione, e quindi il segnale ricevuto, contiene informazioni con una risoluzione X_r , allora la media di cui parliamo é fatta su N_r campioni **indipendenti**.

Esprimiamo la (29) anche nel dominio spettrale. Se trasformiamo rispetto a R , e indichiamo con u la variabile coniugata a R , si trova

$$\begin{aligned} \hat{Y}(u) &= e^{-j\omega_0 t_R} \hat{\gamma}(u) \mathcal{F} \left\{ \exp \left[j \frac{\Delta\omega \sin \theta}{cN_r} R \right] \text{sinc} \left[\frac{\Delta\omega \sin \theta}{cN_r} R \right] \right\}_{(u)} \\ &= e^{-j\omega_0 t_R} \hat{\gamma}(u) \frac{\pi}{\frac{\Delta\omega \sin \theta}{cN_r}} \prod \left(\frac{u - \frac{\Delta\omega \sin \theta}{cN_r}}{2 \frac{\Delta\omega \sin \theta}{cN_r}} \right) \end{aligned}$$

dove $\prod(\cdot)$ è una funzione finestra². La $\hat{Y}(u)$ ha quindi uno spettro diverso da zero solo in un intervallo $(0, 2\Delta\omega \sin \theta / cN_r)$. Questo deriva dal fatto che $\hat{Y}(u)$ é la trasformata della uscita di un filtro adattato a un chirp, e il modulo quadro della trasformata del chirp é diverso da zero solo in $(0, B_{RF})$.

Ricordando la (23), la relazione precedente diventa

$$\begin{aligned} \hat{Y}(u) &= e^{-j\omega_0 t_R} \hat{\gamma}(u) N_r X_r \prod \left(\frac{u - \frac{\pi}{N_r X_r}}{\frac{2\pi}{N_r X_r}} \right) \\ &= e^{-j\omega_0 t_R} \hat{\gamma}(u) N_r X_r \prod \left(\frac{N_r X_r u - \pi}{2\pi} \right) \end{aligned} \quad (31)$$

che mostra esplicitamente la risoluzione nella espressione della $\hat{Y}(u)$ (trasformata di $\bar{Y}(R)$).

² Una funzione finestra

$$\prod \left(\frac{x - x_0}{X} \right)$$

é una finestra, di larghezza X e centrata in x_0 . In altri termini, questa funzione vale 1 per $|x - x_0| < X/2$ e zero altrove.

Valutiamo infine σ_N^0 nelle due condizioni di funzionamento, assumendo i dati di sistema di tabella I.

Dati orbitali	Antenna	Dati sistema
$h = 800 \text{ km}$	$\lambda = 23.5 \text{ cm}$	$B = 19 \text{ MHz}$
$\theta = 20.5^\circ$	$L = 10.74 \text{ m}$	$\tau_c = 33 \text{ } \mu\text{sec}$
	$W = 2.14 \text{ m}$	$P_T = 150 \text{ W}$
		$T_N = 650 \text{ K}$

Tabella I: Dati di una tipica missione SAR

La zona illuminata a terra vale

$$\ell_a = 18.7 \text{ km} \quad S = 100.1 \text{ km}$$

e la risoluzione, in entrambi i casi, risulta $X_r = 22.5 \text{ m}$.
mentre

$$\text{Trasmissione ad impulsi} \quad \sigma_N^0 = 0.6 \text{ dB}$$

$$\text{Trasmissione di un chirp} \quad \sigma_N^0 = -27 \text{ dB}$$

Da tali dati si vede la notevole riduzione del rumore dovuta all'utilizzo di una modulazione chirp per ottenere la necessaria risoluzione in range.

5 TEMPORIZZAZIONI DEL SEGNALE

La variabile indipendente “naturale” di una scena in range è il tempo di viaggio. Questo implica dei vincoli relativi alle temporizzazioni del segnale, necessari a evitare ambiguità, ovvero echi di punti diversi che arrivino allo stesso istante. Inoltre, vi sono alcuni vincoli di temporizzazioni relativi a specifiche realizzative. Infine, per evitare ulteriori ambiguità, è richiesto che il radar guardi lateralmente, altrimenti gli echi di due punti A e B, posti alla stessa distanza dalla linea di volo, ma da parti opposte, arriverebbero insieme.

Per quanto riguarda la cadenza degli impulsi, detta *PRF* (*pulse repetition frequency*), o il suo inverso T_{PR} , vi sono vari vincoli che vanno rispettati.

Per prima cosa è necessario che gli impulsi siano abbastanza spazati in modo che quando un impulso inizia ad essere ricevuto, quello successivo sia già stato completamente ricevuto. Consideriamo una sequenza di impulsi successivi, di durata τ_t . I tempi di trasmissione e ricezione sono dati dalla Tabella I che segue

essendo r_1 ed r_2 le distanze fra il sensore e i due estremi dello swath

$$r_1 = \frac{h}{\cos \theta} - \frac{S}{2} \sin \theta \quad r_2 = \frac{h}{\cos \theta} + \frac{S}{2} \sin \theta \quad (32)$$

Tx	Rx punto iniziale swath	Rx punto finale swath
$(0, \tau_t)$	$\left(\frac{2r_1}{c}, \frac{2r_1}{c} + \tau_t\right)$	$\left(\frac{2r_2}{c}, \frac{2r_2}{c} + \tau_t\right)$
$(T_{PR}, T_{PR} + \tau_t)$	$\left(T_{PR} + \frac{2r_1}{c}, T_{PR} + \frac{2r_1}{c} + \tau_t\right)$	$\left(T_{PR} + \frac{2r_2}{c}, T_{PR} + \frac{2r_2}{c} + \tau_t\right)$
...
$(nT_{PR}, nT_{PR} + \tau_t)$	$\left(nT_{PR} + \frac{2r_1}{c}, nT_{PR} + \frac{2r_1}{c} + \tau_t\right)$	$\left(nT_{PR} + \frac{2r_2}{c}, nT_{PR} + \frac{2r_2}{c} + \tau_t\right)$

Tabella I

Tempi di trasmissione e ricezione di un treno di impulsi del radar

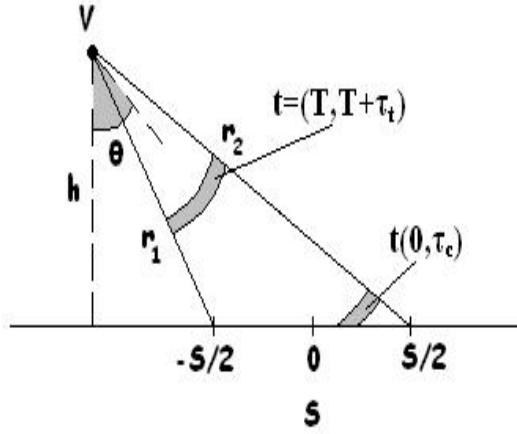


Fig. 1: Posizione di due impulsi successivi.

Dovrà quindi sicuramente risultare

$$\frac{2r_2}{c} + \tau_t \leq T_{PR} + \frac{2r_1}{c}$$

ovvero:

$$T_{PR} > \tau_t + \frac{2}{c} \left(\frac{h}{\cos \theta} + \frac{S}{2} \sin \theta \right) - \frac{2}{c} \left(\frac{h}{\cos \theta} - \frac{S}{2} \sin \theta \right) = \frac{2S}{c} \sin \theta + \tau_t \quad (33)$$

Come vedremo più avanti, ha interesse il massimo valore di T_{PR} e non il minimo. Inoltre, ricordiamo che τ_t risulta in genere minore (spesso molto minore) di S/c . Pertanto possiamo esprimere la (33) come

$$T_{PR} > X \frac{2S}{c} \sin \theta \quad \implies \quad PRF < \frac{1}{X} \frac{c}{2S \sin \theta} \quad (34)$$

con

$$X = 1 + \frac{c\tau_t}{2S \sin \theta}$$

tipicamente compreso tra 1 e 1.5, ma il cui valore esatto é inessenziale. Vedremo piú avanti che alla (34) occorre aggiungere anche un limite inferiore alla PRF . Quindi si otterr  un intervallo ammissibile di valori per PRF .

Ora consideriamo i vincoli realizzativi. Il primo di questi deriva dal fatto che la stessa antenna   usata sia in trasmissione che in ricezione, per cui occorre garantire che intervalli consecutivi di trasmissione e ricezione siano separati, in modo da spegnere il ricevitore (per proteggerlo da segnali troppo forti) durante l'intervallo di trasmissione.

Gli intervalli di trasmissione, vedi Tabella I, sono $(nT_{PR}, nT_{PR} + \tau_t)$ con n intero.   quindi richiesto che, per ogni n , questi intervalli non ricadano nell'intervallo di ricezione. La sequenza di impulsi trasmessi e ricevuti   mostrata in figura 2.

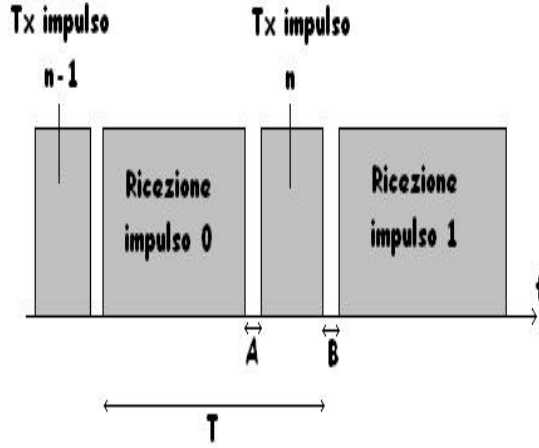


Fig. 2: Sequenza trasmissione-ricezione.

Per evitare la sovrapposizione, condizione necessaria   che sia verificata la relazione:

$$T_{PR} > \text{tempo totale di ricezione} = \tau_t + \frac{2}{c}(r_2 - r_1)$$

ovvero lo stesso vincolo (33) relativo all'ambiguit .

Dovr  poi risultare, per ogni n , che gli intervalli A e B di Fig. 2 siano maggiori di 0 (e, spesso, anche superiori a una durata minima). Ci  implica

$$\frac{2r_2}{c} + \tau_t < nT_{PR} \quad nT_{PR} + \tau_t < T_{PR} + \frac{2r_1}{c}$$

usando i dati di tabella I, ovvero

$$\frac{2r_2}{c} + \tau_t < nT_{PR} < T_{PR} + \frac{2r_1}{c} - \tau_t \quad (35)$$

A questo va aggiunto un altro vincolo da considerare, legato al segnale (di disturbo) proveniente dai lobi laterali del sensore. Questo effetto pu  essere ridotto usando distribuzioni di corrente variabili, che riducono l'ampiezza di questi lobi. Tuttavia questa riduzione   efficace solo se l'eco dalle direzioni dei lobi laterali   paragonabile a quello del lobo centrale. Questo   vero salvo che nella direzione di *nadir*, ovvero perpendicolarmente verso il basso. Infatti l'eco

da questa direzione può essere prodotto per riflessione (e non per diffusione) e quindi presentare un livello molto più alto. Pertanto è necessario evitare di ricevere la riflessione dal nadir (nadir–echo), tipicamente facendola coincidere con un intervallo di trasmissione.

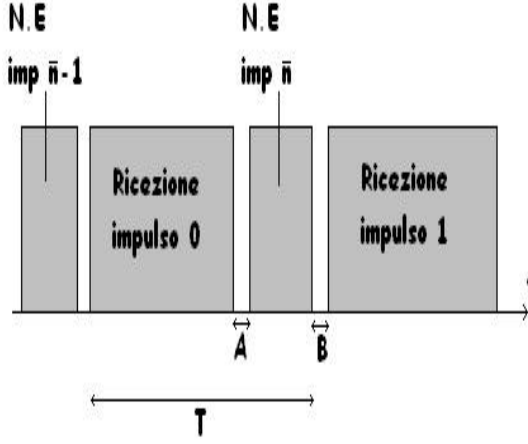


Fig. 2: Segnali di nadir–echo.

Considerando la Fig. 3 , e ricordando che il tempo di viaggio del nadir è $2h/c$, dovrà essere

$$\frac{2r_2}{c} + \tau_t < \bar{n}T_{PR} + \frac{2h}{c} \quad \bar{n}T_{PR} + \frac{2h}{c} + \tau_t < T_{PR} + \frac{2r_1}{c}$$

ovvero

$$\frac{2r_2}{c} - \frac{2h}{c} + \tau_t < \bar{n}T_{PR} < T_{PR} + \frac{2r_1}{c} - \frac{2h}{c} - \tau_t \quad (36)$$

La scelta della PRF all'interno dell'intervallo ammissibile va fatta imponendo i due limiti (33,36). Per imporre questi limiti, comunque, é necessario procedere a tentativi.

Consideriamo come esempio un radar con i parametri seguenti

Dati orbitali	Antenna	Dati sistema
$h = 720 \text{ km}$	$\lambda = 6 \text{ cm}$	$\tau_t = 46.55 \mu\text{sec}$
$\theta = 23^\circ$	$L = 8.1 \text{ m}$	$PRF > 1.73 \text{ kHz}$
$v = 7 \text{ km/sec}$	$W = 0.85 \text{ m}$	

Risulta

$$S = 50 \text{ km} \quad 1.73 \text{ kHz} < PRF < 5.68 \text{ kHz} \quad r_1 = 772.4 \text{ km} \quad r_2 = 791.94 \text{ km}$$

(e il fattore X della (34) vale 1.35).

Pertanto il vincolo (5) diventa

$$5326.2 \mu\text{sec} < nT_{PR} < 5103.2 \mu\text{sec} + T_{PR}$$

Per ottenere la minima PRF si prova dapprima il valore massimo di T_{PR} ovvero $578.57 \mu\text{sec}$. Con questo valore, i due limiti della relazione precedente diventano $5326.2 \mu\text{sec} = 9.21 T_{PR}$ e $5103.2 \mu\text{sec} + T_{PR} = 8.82 T_{PR} + T_{PR} = 9.82 T_{PR}$, che non possono essere rispettati entrambi con n intero. Poiché T_{PR} può solo diminuire, si può scegliere un valore per il quale la seconda disuguaglianza sia verificata con $n = 9$ (minimo valore intero superiore a quello decimale, $n = 8.82$, trovato), ovvero

$$T_{PR} = \frac{5103.18}{10 - 1} \mu\text{sec} = 567.02 \mu\text{sec} \quad PRF = 1.764 \text{ kHz}$$

che rispetta anche la prima disuguaglianza. Ovviamente in questo modo la (5) é rispettata esattamente al limite. Se é richiesto un margine, allora va presa una PRF leggermente più grande.

Allo stesso modo, essendo $2h/c = 4800 \mu\text{sec}$, il secondo vincolo (36) diventa

$$(5326.2 - 4800) \mu\text{sec} = 526.2 \mu\text{sec} < nT_{PR} < (5103.2 - 4800) \mu\text{sec} + T_{PR} = 303.2 \mu\text{sec} + T_{PR}$$

Con $T_{PR} = 567.02 \mu\text{sec}$, i due limiti sono $526.2 \mu\text{sec} = 0.93 T_{PR}$ e $303.2 \mu\text{sec} + T_{PR} = 0.53 T_{PR} + T_{PR} = 1.53 T_{PR}$, e quindi $PRF = 1.764 \text{ kHz}$ rispetta anche il vincolo sulla assenza di nadir-echo.

6 RADAR AD APERTURA SINTETICA – SAR

Abbiamo visto che un array ha una risoluzione angolare (e quindi spaziale) molto più grande di una singola antenna. Ciò avviene in quanto i segnali delle singole antenne sono combinati dalla BFN in modo coerente.

Analogamente, poiché un sensore radar in volo con velocità v acquisisce più immagini della stessa scena, da posizioni equispaziate su una retta (la linea di volo) è facile intuire che se i segnali di tali immagini sono combinati in modo coerente, la risoluzione angolare e spaziale possono migliorare notevolmente rispetto a quelli di un sensore singolo (ovviamente relativamente solo all'azimuth).

Consideriamo quindi un sensore di lunghezza L che viaggia a velocità v lungo la linea di volo, e sia $d_S = v/PRF$ la spaziatura tra le posizioni in cui il sensore acquisisce la scena.

Il segnale ricevuto dipende evidentemente dalla scena che il radar sta osservando. Cominciamo a considerare il caso in cui sia presente un solo oggetto, posto in P , di coordinate, usando un sistema di riferimento cilindrico, di cui la linea di volo costituisce l'asse polare, date da (r, z) . L'origine dell'asse z é posto nella acquisizione $p = 0$. Nel seguito supporremo che z sia

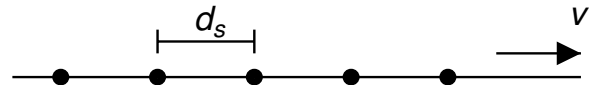


Fig.1: Posizioni del sensore sulla linea di volo

(per un SAR su satellite) al più di qualche km , mentre la distanza r è dell'ordine di grandezza di $1000\ km$.

Il segnale che incide sull'oggetto quando il sensore è nella posizione di acquisizione p (e quindi ha ascissa $z = pd_s$) vale:

$$E_i(r, z) = \frac{j\zeta I_A h_s(\varphi_p)}{2\lambda r} e^{-j\beta r} e^{-j\beta[|\mathbf{r}-\mathbf{r}_p|-r]} \quad (37)$$

dove: $h_s(\varphi_p)$ è l'altezza efficace del sensore (il quale ha una larghezza di fascio totale pari a $\theta_a = \lambda/L$) nella direzione dell'oggetto, e I_A è la corrente del trasmettitore.

I parametri geometrici della (37) valgono

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_p| = \sqrt{r^2 + (z - pd_s)^2} \quad \text{e} \quad \tan \varphi_p = \frac{z - pd_s}{r}$$

Si noti che, a differenza di una array fisico, manca nella (37) la somma su p , in quanto, a ogni istante, solo un *sensore* sta irradiando.

Se l'oggetto in P ha una sezione radar in campo pari a γ , il segnale ricevuto dal sensore nella posizione p sarà:

$$s_p = h_s(\varphi_p) \gamma E_i(r, z) \frac{e^{-j\beta|\mathbf{r}-\mathbf{r}_p|}}{\sqrt{4\pi} r} \quad (38)$$

Questo segnale viene registrato e memorizzato, assieme a tutti gli altri. Da questi si calcola poi il segnale d'uscita del sensore **sintetizzato**:

$$\begin{aligned} S_S &= \sum_{p=-N_S}^{N_S} a_p s_p = \sum_{p=-N_S}^{N_S} a_p h_s(\varphi_p) \gamma \frac{e^{-j\beta r} e^{-j\beta[|\mathbf{r}-\mathbf{r}_p|-r]}}{\sqrt{4\pi} r} \frac{j\zeta I_A h_s(\varphi_p)}{2\lambda r} e^{-j\beta r} e^{-j\beta[|\mathbf{r}-\mathbf{r}_p|-r]} \\ &= \frac{\gamma}{\sqrt{4\pi}} \frac{j\zeta I_A}{2\lambda r^2} e^{-2j\beta r} \left[\sum_{p=-N_S}^{N_S} a_p h_s^2(\varphi_p) e^{-2j\beta[|\mathbf{r}-\mathbf{r}_p|-r]} \right] \end{aligned} \quad (39)$$

Il valore di N_S , ovvero la lunghezza $L_S = (2N_S + 1) d_s$, ha un limite superiore fissato dalla larghezza di fascio del sensore.

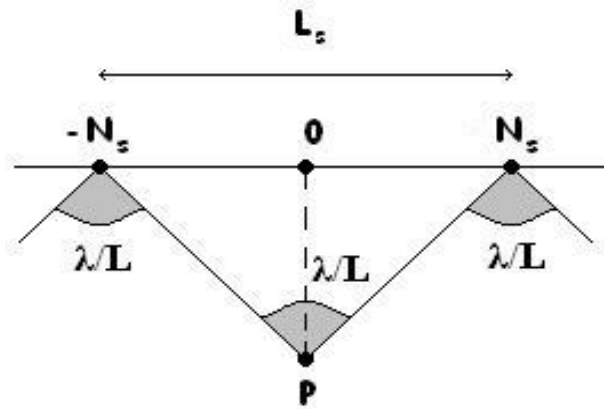


Fig.2: Lunghezza della zona in cui sensore vede il punto P .

Se il punto P si trova in $z = 0$, come in Fig. 2, il primo segnale utile s_{-N_S} sarà quello per cui, vedi Fig. 2, il punto P è appena entrato nella zona illuminata dall'antenna. La distanza tra P e il punto corrispondente alla posizione $-N_S$ è quindi pari a metà della zona illuminata a terra ℓ_a data dalla (3). Quindi l'antenna sintetica può essere al massimo lunga:

$$L_S \leq \ell_a = \frac{h\lambda}{L \cos \theta} \quad (40)$$

Se la (40) è rispettata, possiamo approssimare $h_s^2(\varphi_p)$ con una costante, pari al suo valore massimo h_M^2 . Se P è spostato rispetto a $z = 0$, ma al più di qualche centinaio di metri, allora possiamo ancora utilizzare lo stesso intervallo di acquisizioni, e ponendo ancora $h_s^2(\varphi_p) = h_M^2$ per tutti i valori di p , accettando una piccola variazione di $h_s^2(\varphi_p)$ ad una estremità della zona di acquisizione. Variazione trascurabile in quanto, come vedremo, il valore di N_S è normalmente intorno al migliaio.

In tal caso la (39) diventa, a meno di una costante moltiplicativa¹

$$S_S = \gamma \left[\sum_{p=-N_S}^{N_S} a_p e^{-2j\beta[|\mathbf{r}-\mathbf{r}_p|-r]} \right] = \gamma F_S(r, z) \quad (41)$$

in cui abbiamo indicato la sommatoria in parentesi quadra con $F_S(r, z)$, detto *fattore di array sintetizzato*.

Essendo $z - pd_s$ dell'ordine di grandezza di ℓ_a , ovvero di qualche km , mentre $|\mathbf{r}|$ è dell'ordine di grandezza di $1000 km$, l'esponenziale che compare in F_S può essere approssimato sviluppando la radice in serie di Taylor:

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_p| - r &= \sqrt{r^2 + (z - pd_s)^2} - r = r \left[\sqrt{1 + \left(\frac{z - pd_s}{r} \right)^2} - 1 \right] \\ &\simeq r \left[\frac{1}{2} \left(\frac{z - pd_s}{r} \right)^2 \right] = \frac{1}{2r} (z^2 - 2pd_s z + p^2 d_s^2) \end{aligned} \quad (42)$$

Sostituendo in (41) si trova

$$\begin{aligned} F_S(r, z) &= \sum_{p=-N_S}^{N_S} a_p \exp \left[-j \frac{\beta}{r} (z^2 - 2pd_s z + p^2 d_s^2) \right] \\ &= \exp \left[-j \frac{\beta}{r} z^2 \right] \sum_{p=-N_S}^{N_S} a_p \exp \left[-j \frac{\beta}{r} (-2pd_s z + p^2 d_s^2) \right] \end{aligned} \quad (43)$$

in cui il primo fattore è costante e verrà quindi conglobato nella costante moltiplicativa sottintesa in tutta questa sezione.

Un radar di immagine serve a *vedere* e misurare oggetti posti in $z = 0$, senza che oggetti posti lateralmente influenzino il risultato della misura. Questo si ottiene facendo in modo che

¹ Qui e nel seguito non ci preoccuperemo delle costanti moltiplicative, in quanto, se è richiesto solo il *contrasto* tra i diversi pixel, tale costante non interessa. Se invece è richiesto il valore esatto della sezione radar differenziale, un radar di immagine ha sempre la necessità di una opportuna calibrazione, con un oggetto con σ^0 nota, che fissa proprio questa costante.

$F(r, z)$ sia massimo in $z = 0$, e questo é possibile se tutti i termini della (43) sono in fase per $z = 0^2$

$$a_p \exp \left[-j \frac{\beta}{r} (-2pd_s z + p^2 d_s^2) \right]_{z=0} = a_p \exp \left[-j \frac{\beta}{r} p^2 d_s^2 \right] = 1$$

ovvero

$$a_p = \exp \left[j \frac{\beta}{r} p^2 d_s^2 \right] \quad (44)$$

Con la scelta (44), il fattore di array sintetizzato diventa

$$F(r, z) = \sum_{p=-N_S}^{N_S} \exp \left[j \frac{\beta}{r} 2pd_s z \right] \quad (45)$$

ed é massimo in $z = 0$, dove vale $F(r, 0) = 2N_S + 1$. Per valutare la risoluzione cerchiamo ancora il minimo valore di z corrispondente al primo nullo. Analogamente a un array reale, il primo nullo si ha per quell'ascissa z_π per il quale le fasi dei termini della (45) sono uniformemente distribuite sul cerchio $(-\pi, \pi)$. Questo conduce a

$$\frac{2\beta d_s}{r} z_\pi = \frac{2\pi}{2N_S + 1} \quad \implies \quad z_\pi \simeq \frac{\pi}{\frac{2\pi}{\lambda} L_S} r = \frac{\lambda}{2L_S} r \quad (46)$$

che coincide anche con la risoluzione spaziale ottenibile X_A . Ricordando che $r = h/\cos \theta$ segue:

$$X_A = \frac{h\lambda}{2L_S \cos \theta} \quad (47)$$

che prende il nome di risoluzione in azimuth del SAR.

X_A é molto piú piccolo che per un sensore reale in quanto $L_S \gg L$. Inoltre vi é un ulteriore fattore $1/2$ dovuto al fatto che la fase che consideriamo é doppia (incluso andata e ritorno) rispetto a quella di un array reale. Va però considerato che il livello dei lobi laterali di un F_S uniforme é solo di -13 dB , in quanto il segnale ricevuto é proporzionale a F_S , e non al suo quadrato. Risulta quindi necessario utilizzare distribuzioni variabili, piú basse verso le estremitá.

Il minimo valore di X_A lo abbiamo quando L_S é pari alla zona illuminata a terra (40):

$$X_A = \frac{h\lambda}{2\ell_a \cos \theta} = \frac{h\lambda}{2 \cos \theta \frac{h\lambda}{L \cos \theta}} = \frac{L}{2} \quad (48)$$

ed é normalmente dell'ordine di alcuni metri.

² Come nel caso di un array reale, il modulo delle costanti a_p viene scelto per abbassare il livello dei lobi laterali di F_s . Comunque, valuteremo le prestazioni per $|a_p|=1$, analogamente al caso di array fisico.

7 FOCALIZZAZIONE DI UNA IMMAGINE SAR

L'utilizzo dei pesi di elaborazione (44) consente di ottenere l'immagine di una scena, con una risoluzione data dalla (47). Tuttavia, questi pesi dipendono dal range¹ r dell'oggetto (o, piú generalmente, del pixel) da focalizzare, e questo incrementa moltissimo la complessit  computazionale del SAR. Possiamo allora domandarci se e quando   possibile approssimare i pesi (44) con una espressione indipendente da r .

Il caso pi  semplice in cui questo   possibile   per $r \rightarrow \infty$, in cui la (44) diventa semplicemente

$$a_p = 1 \quad (49)$$

Si parla allora di SAR focalizzato all'infinito.

Tuttavia, la distanza r , per quanto grande,   finita, ed occorre quindi valutare l'accuratezza della approssimazione $a_p \simeq 1$. Per fare questo, assumiamo che un esponenziale (dipendente da p) come quello di (44) pu  essere approssimato con 1 se la sua fase   sempre non superiore a $\pi/8$. Poich  il massimo si ha per $p = N_S$, segue che la (49)   valida se

$$\frac{\beta}{r} N_S^2 d_s^2 = \frac{\beta}{r} \left(\frac{L_s}{2} \right)^2 \leq \frac{\pi}{8} \quad \implies \quad r > r_F = \frac{4L_s^2}{\lambda} \quad (50)$$

condizione corrispondente a quella di Fraunhofer per le antenne²

Un semplice calcolo mostra per  che r_F   tipicamente dell'ordine di grandezza di 10^5 km o pi , se L_S   prossimo a ℓ_a , e quindi la (49)   di difficile applicazione. A meno che non si accetti di ridurre L_S in modo che la distanza r_F non sia pari, o inferiore, ad $h/\cos \theta$.

$$\frac{4L_s^2}{\lambda} < \frac{h}{\cos \theta} \quad \implies \quad L_S < \sqrt{\frac{\lambda h}{4 \cos \theta}}$$

Tuttavia, questa scelta porta ad una notevole riduzione della risoluzione, che diventa

$$X_A = \frac{\lambda h}{2 \cos \theta} \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda h}{4 \cos \theta}}} = \sqrt{\frac{\lambda h}{\cos \theta}}$$

Per mantenere la piena risoluzione (48), occorre allora rinunciare alla (49). Poich  siamo interessati ad avere pesi indipendenti da r , e non necessariamente unitari, possiamo chiederci in che condizioni possiamo approssimare i pesi (44) con un valore indipendente da r . La scelta migliore   quella di porre

$$a_p = \exp \left[j \frac{\beta}{r_0} p^2 d_s^2 \right] \quad (51)$$

¹ La distanza r dalla linea di volo non va confusa con la posizione R di un oggetto, o di un pixel, nello swath, bench  entrambe vengano indicate col nome di *range*. In molti casi, proprio per evitare ambiguit , la distanza r che stiamo utilizzando in queste sezioni viene chiamata *slant range*.

² La differenza rispetto alla condizione valida per array fisici sta nel fatto che il ritardo di fase nella (39)   doppio, in quanto include sia il percorso di andata, sia quello di ritorno.

essendo r_0 lo slant range al centro dello swath. L'errore che si commette negli altri punti dello swath é un errore di fase, pari a

$$\left| \frac{\beta}{r} p^2 d_s^2 - \frac{\beta}{r_0} p^2 d_s^2 \right| = \beta p^2 d_s^2 \left| \frac{r_0 - r}{r r_0} \right| \simeq \frac{\beta}{r^2} p^2 d_s^2 |r_0 - r|$$

L'ultimo fattore é massimo alla estremitá dello swath, e questo massimo si ottiene dalla (5):

$$|r_0 - r| = \frac{S}{2} \sin \theta$$

Prendendo anche $p = N_S$ si trova il massimo errore di fase. Imponendo che questo errore sia minore di $\pi/8$ segue

$$\frac{\beta}{r^2} N_S^2 d_s^2 \frac{S}{2} \sin \theta = \frac{\beta}{r^2} \left(\frac{L_S}{2} \right)^2 \frac{S}{2} \sin \theta < \frac{\pi}{8} \quad (52)$$

La (52) può essere interpretata come una equazione in r , che fornisce quindi la minima distanza sensore-scena per poter usare un unico set di pesi (51) per tutta la scena:

$$r^2 > \frac{8}{\pi} \frac{2\pi}{\lambda} \frac{L_S^2 S}{8} \sin \theta = \frac{2}{\lambda} L_S^2 \sin \theta \frac{r\lambda}{W \cos \theta} \implies r > 2 \frac{L_S^2}{W} \tan \theta$$

Ma la (52) può anche essere interpretata come la massima estensione dello swath che consente di usare i pesi (51) per tutta la scena da ricostruire:

$$S < \frac{r^2 \lambda}{2 \sin \theta} \frac{1}{L_S^2} = \frac{h^2 \lambda}{2 \sin \theta \cos^2 \theta} \frac{1}{L_S^2} \quad (53)$$

La (53) esprime la massima lunghezza dello swath che consente di usare sempre i pesi (51). Poiché tali pesi sono quelli che servono per focalizzare il pixel al centro dello swath, la lunghezza (53) prende il nome di profondità di messa a fuoco (in inglese *depth of focus*), e si indica con F :

$$F = \frac{h^2 \lambda}{2 L_S^2 \sin \theta \cos^2 \theta} = \frac{2 X_A^2}{\lambda \sin \theta} \quad (54)$$

avendo introdotto la risoluzione tramite la (47). Si vede dalla (54) che la profondità di messa a fuoco aumenta al ridursi della risoluzione. Il suo valore minimo è quello di un SAR a piena risoluzione, ovvero

$$F_{min} = \frac{2}{\lambda \sin \theta} \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{L^2}{2 \lambda \sin \theta} \quad (55)$$

In un sistema SAR reale, lo swath é normalmente determinato dai requisiti di sistema, ovvero dalla larghezza della striscia di cui il sensore deve realizzare l'immagine. Il valore di F dipende invece dalla risoluzione. Ne segue che é importante il rapporto tra la lunghezza dello swath e F , che fornisce il numero di set diversi di pesi da usare. Questo numero N_P é pari quindi all'intero immediatamente superiore a

$$\frac{S}{F} = \frac{h\lambda}{W \cos^2 \theta} \frac{2 L_S^2 \sin \theta \cos^2 \theta}{\lambda h^2} = \frac{2 L_S^2 \sin \theta}{h W} \quad (56)$$

8 ANALISI DOPPLER DEL SAR

Il sensore SAR é in moto, e pertanto il segnale che una scena a terra riceve é soggetta all'effetto Doppler, ovvero a una variazione di frequenza rispetto alla frequenza di trasmissione. Questo fatto conduce ad una metodologia di analisi del SAR, basata sull'effetto Doppler, alternativa (e, in un certo senso, complementare) a quella vista precedentemente.



Fig. 1: Geometria dell'effetto doppler.

Determiniamo per prima cosa le leggi dell'effetto Doppler. Consideriamo dapprima una sorgente in moto, con velocità v_s (che supporremo piccola rispetto alla velocità della luce) verso un oggetto (Fig. 1). La sorgente manda un segnale sinusoidale a frequenza f_T . I massimi successivi del segnale sono emessi con un intervallo pari al periodo T_T del segnale. Tuttavia, poiché la sorgente é in moto, questi massimi non sono emessi nello stesso punto. Se scegliamo il riferimento in modo che l'origine dell'asse z sia nel punto occupato dalla sorgente a $t = 0$, corrispondente a un massimo della sinusoide, il primo massimo successivo é emesso a $t = T_T$ e quindi nel punto $z = v_s T_T$.

Il campo corrispondente a questi due massimi viaggia ovviamente con velocità c , per cui, all'istante T_T , un massimo si trova in $z = c T_T$ e il successivo in $z = v_s T_T$, a una distanza di $(c - v_s) T_T$ dal precedente. Questa spaziatura tra i due massimi rimane ovviamente costante durante la propagazione, ed é la distanza tra una qualunque coppia di massimi successivi.

Il ricevitore, fermo, riceverá il primo massimo in T_a , quando il secondo deve ancora fare un tratto $(c - v_s) T_T$ (che percorrerá a velocità c), e quindi riceverá il secondo massimo in

$$T_a + \frac{c - v_s}{c} T_T$$

Pertanto il ricevitore vede un segnale con i massimi spaziati di

$$T_R = \frac{c - v_s}{c} T_T = \left[1 - \frac{v_s}{c} \right] T_T$$

ovvero riceve un segnale di frequenza

$$f_R = \frac{1}{T_R} = \left[1 - \frac{v_s}{c} \right]^{-1} \frac{1}{T_T} \simeq \left[1 + \frac{v_s}{c} \right] f_T \quad (57)$$

maggiore della frequenza trasmessa. La relazione (57) vale anche se il sensore si allontana, considerando una velocità negativa.

La relazione (57), per velocità v_s piccole rispetto a c , vale anche se il trasmettitore é fermo, e il ricevitore in moto. Pertanto, nel caso di un sistema radar, la frequenza ricevuta vale

$$f_{Rs} = \left[1 + \frac{v_s}{c} \right]^2 f_T \simeq \left[1 + 2 \frac{v_s}{c} \right] f_T \quad (58)$$

con una variazione di frequenza

$$\Delta f = 2 \frac{v_s}{c} f_T \quad (59)$$

piccola (valori tipici 100 kHz) ma perfettamente identificabile.

Finora abbiamo considerato un sensore in volo verso l'oggetto. Tuttavia, una analisi simile può essere fatta anche per il caso di velocità obliqua. Infatti, quello che conta è la riduzione del tempo di viaggio dovuto al fatto che il sensore emette gli impulsi successivi più vicino (o più lontano) dal ricevitore. Pertanto la (59) vale anche nel caso di velocità obliqua (Fig. 2) a patto di considerare la *velocità radiale*, ovvero la componente del vettore velocità nella direzione dell'oggetto.

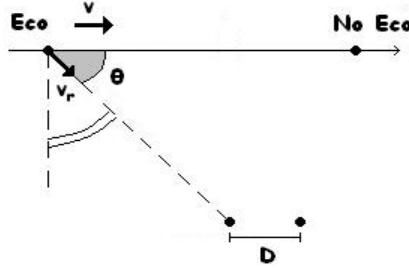


Fig.2: Componente radiale della velocità.

Per calcolare questa proiezione, consideriamo l'angolo Θ (crescente da 0 a π se la traiettoria fosse infinitamente lunga) tra la linea di volo e la direzione dell'oggetto. La componente radiale della velocità vale $v \cos \Theta$, per cui la variazione di frequenza (al sensore) vale, da (59):

$$\Delta f = 2 \frac{v \cos \Theta}{c} f_T \quad (60)$$

Per un sensore SAR, questa variazione di frequenza varia nel tempo, in quanto varia l'angolo Θ . Consideriamo allora la traiettoria al variare del tempo, e sia $t = 0$ l'istante in cui il sensore è allineato con l'oggetto in esame, posto in P (Fig. 3). Al variare del tempo, la posizione del sensore varia. Possiamo individuarla mediante l'angolo $\varphi(t) = \pi/2 - \Theta$ (con segno), piccolo e dato da

$$\tan \varphi(t) = -\frac{vt}{h/\cos \theta} \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) \simeq -\frac{vt \cos \theta}{h} \quad (61)$$

Essendo $\cos \Theta = \sin \varphi \simeq \varphi$, segue

$$\Delta f(t) = 2 \frac{v \cos \Theta}{c} f_T \simeq 2 \frac{v}{c} f_T \varphi(t) = -2 \frac{v^2 \cos \theta}{ch} f_T t \quad (62)$$

La differenza di frequenza varia linearmente¹ con t , e si annulla quando il sensore passa davanti al punto in esame.

Il segnale ricevuto in azimuth è la versione campionata, con passo di campionamento pari a $1/PRF$, di un segnale a frequenza istantanea linearmente crescente, ovvero dell'equivalente di un chirp.

La durata $T_D = L_S/v$ del segnale dipende (vedi (60)) dalla lunghezza L_S della zona di acquisizione. La sua durata massima è pari a

$$T_{DM} = \frac{\ell_a}{v} = \frac{h\lambda}{vL \cos \theta} \quad (63)$$

¹ La variazione è lineare in quanto abbiamo approssimato $\sin \varphi \simeq \tan \varphi \simeq \varphi$. Tuttavia, per le considerazioni che seguono, non è necessario considerare la variazione effettiva di Δf col tempo.

La banda occupata dal segnale é pari alla variazione totale di frequenza, che dipende da T_D , ed è pari, da (62), a

$$B_D = 2 \frac{v^2 \cos \theta}{ch} f_T T_D = 2 \frac{v^2 \cos \theta}{h\lambda} T_D = \frac{2v}{L} \frac{L_S}{\ell_a} \quad (64)$$

essendo² $c = f_T \lambda$.

Consideriamo ora due punti P e Q , a distanza D_A . Le frequenze istantanee dei segnali ricevuti (a causa della variazione Doppler di frequenza) sono spostate nel tempo di $T_A = D_A/v$, come in Fig. 3. La differenza di tempo T_A può essere *misurata* dal nostro segnale se la banda del segnale è almeno pari a $1/T_A$:

$$B_D \geq \frac{1}{T_A}$$

ovvero

$$\frac{2v}{L} \frac{L_S}{\ell_a} \geq \frac{v}{D_A}$$

Il valore minimo di D_A , corrispondente alla risoluzione in azimuth, è quello per cui i due termini sono uguali

$$X_A = \frac{\ell_a}{L_S} \frac{L}{2} \quad (65)$$

che coincide con (64) se si sostituisce ℓ_a con la (3). Ovviamente, a piena risoluzione ($L_S = \ell_a$), segue $X_A = L/2$.

L'analisi doppler mostra anche perchè neanche la risoluzione in azimuth dipenda dalla quota del sensore. Possiamo discriminare due punti se la variazione doppler, tra inizio e fine della zona di acquisizione, è abbastanza grande. Questa variazione doppler dipende solo dalla velocità e dall'angolo di apertura della antenna, ma non dalla quota.

Ricordando poi che il segnale che stiamo usando è **campionato**, possiamo usare i risultati del teorema del campionamento per determinare la minima *PRF* ammissibile. Il segnale doppler va considerato un segnale *DSB*, con banda $B_D/2$ (riportata in banda base). Poichè occorrono almeno due campioni per periodo (alla frequenza massima), ovvero una frequenza di campionamento almeno doppia della frequenza massima, segue

$$PRF \geq 2 \frac{B_D}{2} = B_D = \frac{2v}{L} \frac{L_S}{\ell_a} \quad (66)$$

Ricordando il limite (34)

² Ovviamente questo risultato vale solo se il prodotto banda-durata

$$B_D T_D = \frac{2v}{L} \frac{L_S}{\ell_a} T_D = 2 \frac{L_S}{\ell_a} \frac{L_S}{L}$$

è grande, come avviene normalmente essendo $L_S \gg L$.

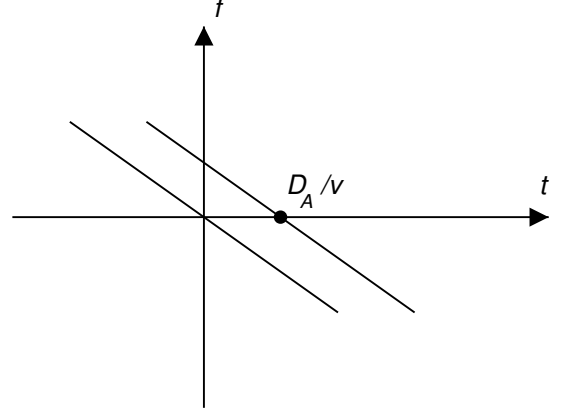


Fig. 3: Frequenza istantanea dei segnali doppler.

$$PRF < \frac{1}{X} \frac{c}{2S \sin \theta} = \frac{1}{X} \frac{cW \cos^2 \theta}{2\lambda h \sin \theta} < \frac{cW \cos^2 \theta}{2\lambda h \sin \theta}$$

essendo $X > 1$, segue da (66):

$$\frac{2v}{L} \frac{L_S}{\ell_a} < PRF < \frac{cW \cos^2 \theta}{2\lambda h \sin \theta} \quad (67)$$

Dalla (67) è possibile estrarre una condizione di compatibilità sulla antenna del sensore, data da

$$\frac{2v}{L} \frac{L_S}{\ell_a} < \frac{cW \cos^2 \theta}{2\lambda h \sin \theta} \implies LW > 2v \frac{L_S}{\ell_a} \frac{2\lambda h \sin \theta}{c \cos^2 \theta} = 4 \frac{L_S}{\ell_a} \frac{v}{c} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \lambda h \quad (68)$$

Inoltre, dalla (66) segue

$$d_S = \frac{v}{PRF} \leq \frac{L}{2v} \frac{\ell_a}{L_S} = X_A$$

9 SPECKLE

I segnali ricevuti da un SAR sono ovviamente affetti da rumore (termico), che ne degrada la qualità. Tuttavia la principale causa di degradazione è legata alla elaborazione **coerente** (39) dei segnali ricevuti da un SAR (benchè, come vedremo più avanti, anche il rumore termico può giocare un ruolo).

Per un radar di immagine, il parametro da misurare è la sezione radar differenziale σ^0 . Partendo dalla (41) e tenendo conto dei pesi (44) il segnale ricevuto (di cui poi andrà calcolato il modulo quadro) vale

$$S_S = \gamma \left[\sum_{p=-N_S}^{N_S} \exp \left(j \frac{\beta}{r} 2pd_s z \right) \right] \quad (69)$$

dove abbiamo ancora trascurato le variazioni del guadagno del sensore nel lobo principale.

Ora, ogni termine della (69) deriva dalla diffusione del pixel considerato, ma con direzioni di incidenza e diffusione leggermente diverse. Pertanto la fase di γ è in realtà dipendente da p , e la (69) deve essere scritta nella forma

$$S_S = \left[\sum_{p=-N_S}^{N_S} \gamma_p \exp \left(j \frac{\beta}{r} 2pd_s z \right) \right] = \gamma_0 \left[\sum_{p=-N_S}^{N_S} e^{j\phi_p} \exp \left(j \frac{\beta}{r} 2pd_s z \right) \right]$$

essendo ϕ_p la differenza di fase tra γ_p e γ_0 . ϕ_p è una variabile aleatoria, e può essere considerata uniformemente distribuita in $(-\pi, \pi)$.

In uscita dal sistema interessa misurare i parametri di diffusione del pixel considerato, e quindi la relazione precedente va valutata per $z = 0$.

$$S_{S0} = S_S \Big|_{z=0} = \gamma_0 \sum_{p=-N_s}^{N_s} e^{j\phi_p} = \gamma_0 S_X \quad (70)$$

essendo $S_X = \sum_p \exp(j\phi_p)$ una variabile aleatoria complessa. Parte reale e immaginaria di S_X sono, per il teorema del limite centrale, due V.A. gaussiane, con media nulla e uguale varianza, e indipendenti.

Le mappe SAR riportano la ampiezza $|\gamma|$ o la potenza σ^0 diffusa dalla scena, e quindi i dati di interesse sono

$$|S_{S0}| = |\gamma| |S_X| \quad \text{e} \quad P_S = |\gamma|^2 |S_X|^2 = \sigma^0 |S_X|^2 \quad (71)$$

I valori dati dalla (71) sono quindi delle variabili aleatorie. Data la statistica di S_X , ne segue che $|S_X|$ e $|S_{S0}|$ sono V.A. di Rayleigh, mentre $|S_X|^2$ e P_S sono V.A. esponenziali. La (71) esprime quindi il fatto che un SAR consente di stimare (piuttosto che di misurare) i dati di diffusione della superficie. Affinché la stima sia senza *bias*, il SAR va calibrato in modo che

$$\mathcal{E}[|S_{S0}|] = |\gamma| \quad \text{e} \quad \mathcal{E}[P_S] = \sigma^0$$

e questo si ottiene mediante una operazione di **calibrazione**, ovvero misurando la sezione radar di un oggetto noto¹. Conseguenza della calibrazione é che $|S_X|$ e $|S_X|^2$ hanno entrambe media statistica unitaria.

Pertanto il valore della sezione radar differenziale, misurato tramite P_S , è solo una possibile realizzazione di una variabile aleatoria, e non il valore della grandezza fisica. Questo fenomeno prende il nome di *speckle*, ed è strettamente collegato alla elaborazione coerente (69) dei segnali acquisiti. Immediata conseguenza della (71) è che una zona con σ^0 costante appare in realtà con fluttuazioni di intensità (scintillamento).

La qualità di una immagine andrà allora valutata considerando il rapporto tra l'ampiezza delle fluttuazioni e il valore medio, ovvero il valore di $|\gamma|$ o σ^0 che stiamo misurando. Questo rapporto, che indichiamo con *ISNR*, vale rispettivamente

$$ISNR = \frac{\{\mathcal{E}[|S_{S0}|]\}^2}{\text{var}[|S_{S0}|]} \quad \text{e} \quad ISNR = \frac{\mathcal{E}[P_S]}{\sqrt{\text{var}[P_S]}}$$

per il caso di misura di ampiezza o di potenza ricevuta. Utilizzando le proprietà della distribuzione di Rayleigh si trova che $ISNR = 3.66$ (corrispondente a 5.6 dB). Invece, per una distribuzione esponenziale, media e scarto coincidono, e quindi, in questo caso, $ISNR = 1$ (ovvero 0 dB). Questi valori, soprattutto il secondo, sono del tutto inaccettabili.

D'altra parte, mentre una immagine di cui interessa solo il contrasto, ad esempio per classificare le varie zone, può essere ottenuta dalle ampiezze (ovvero rappresentando $\sqrt{\sigma^0}$), che seguono una statistica di Rayleigh, una misura di σ^0 segue la distribuzione esponenziale, e con $ISNR = 1$ non é possibile alcuna estrazione dei valori di σ^0 .

Occorre ridurre *ISNR*, e l'unico modo per farlo é di eseguire delle medie su N_r pixel in range e su N_a in azimuth (con N_r anche non intero, vedi (23)). Poiché la varianza viene ridotta

¹ Generalmente si usa, come bersaglio noto, un *corner reflector*, ovvero un triedro metallico che ha la proprietà di avere una sezione radar costante rispetto all'angolo di incidenza (ovviamente in un certo intervallo).

di $N_V = N_r N_a$, una media su N_V pixel (valore che prende il nome di *numero equivalente di viste*) produce rispettivamente

$$ISNR = N_r N_a 3.66 \quad \text{e} \quad ISNR = \sqrt{N_r N_a} \quad (72)$$

sempre nei due casi di misura di ampiezza o di potenza ricevuta. Pertanto la misura di ampiezza migliora in maniera più consistente a parità di numero di viste.

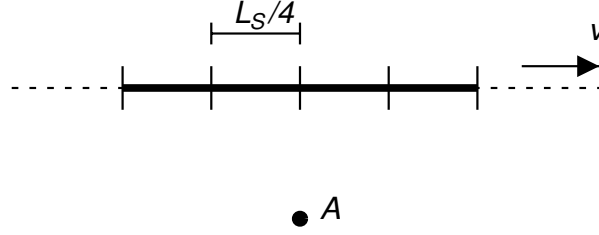


Fig. 1: Partizione della zona di acquisizione del pixel in A ($N_A = 4$).

Per quanto riguarda la media in azimuth, questa potrebbe essere eseguita con una elaborazione a piena risoluzione, seguita poi dalla media. Ma in genere si segue un approccio diverso, che riduce notevolmente la complessità computazionale. Si può infatti, in fase di elaborazione, dividere la lunghezza L_S in N_a parti uguali (Fig. 1). I segnali di ciascuna parte vengono sempre pesati con i pesi (51) necessari a focalizzare l'immagine del punto A . In questo modo si ottengono N_a pixel indipendenti sovrapposti, ciascuno di lunghezza $(N_a L)/2$. La loro media viene quindi assegnata al pixel risultante.

Il vantaggio è che la profondità di messa a fuoco è data dalla (54), ma con $X_A = (N_a L)/2$. Quindi si trova $F = F_{min}/N_a^2$ che normalmente risulta maggiore dello swath, e quindi consente l'elaborazione usando solo un set di pesi per tutto lo swath (per ciascuna immagine da mediare).

10 EFFETTO DEL RUMORE TERMICO

Il valore di σ^0 misurato da un SAR è affetto, oltre che dallo speckle, anche dal rumore termico. Il segnale ricevuto da un oggetto posto a $\varphi = 0$ è quindi

$$S_R = \gamma S_X + N$$

essendo N una V.A. complessa di rumore, indipendente dal segnale, e distribuita normalmente con varianza σ_N^0 . Poiché la varianza di S_X diventa unitaria dopo la calibrazione, allora

$$\text{var}[S_R] = \sigma^0 + \sigma_N^0$$

e la distribuzione della ampiezza $|S_R|$ e della potenza P_R complessivamente ricevuta sono date da

$$pdf(|S_R|) = \frac{|S_R|}{\sigma^0 + \sigma_N^0} \exp \left[-\frac{|S_R|^2}{2(\sigma^0 + \sigma_N^0)} \right] \quad (73)$$

$$pdf(P_R) = \frac{1}{(\sigma^0 + \sigma_N^0)} \exp \left[-\frac{P_R}{(\sigma^0 + \sigma_N^0)} \right]$$

Media statistica e varianza di $|S_R|$ e P_R sono allora

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[|S_R|] &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sigma^0 + \sigma_N^0} & \text{var}[|S_R|] &= \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) (\sigma^0 + \sigma_N^0) \\ \mathcal{E}[P_R] &= \sigma^0 + \sigma_N^0 & \text{var}[P_R] &= (\sigma^0 + \sigma_N^0)^2 \end{aligned} \quad (74)$$

per cui la calibrazione deve anche prevedere una stima di $P_{IN} = \mathcal{E}[P_N] = \sigma_N^0$ in modo da compensare l'errore sistematico introdotto dal rumore termico.

Questa operazione è particolarmente semplice per misure di potenza e verrà quindi analizzata solo in questo caso. Se prendiamo campioni dalla potenza P_c misurata dopo la calibrazione, si ha

$$P_c = P_R - P_{IN} \quad \implies \quad \mathcal{E}[P_c] = \mathcal{E}[P_R] - P_{IN} = \sigma^0 + \mathcal{E}[P_N] - P_{IN} = \sigma^0 \quad (75)$$

compensando l'errore sistematico introdotto dal rumore termico.

La calibrazione produce un incremento delle fluttuazioni di P_c , e quindi una riduzione di $ISNR$. Assumendo che P_{IN} sia stimato con lo stesso numero di viste N_V dei pixel della immagine, si ha¹

$$\text{var}[P_c] = \text{var}[P_R] + \text{var}[P_{IN}] = \frac{\{\mathcal{E}[P_R]\}^2}{N_V} + \frac{\{\mathcal{E}[P_N]\}^2}{N_V} = \frac{[\sigma^0 + \sigma_N^0]^2}{N_V} + \frac{[\sigma_N^0]^2}{N_V} \quad (76)$$

Introducendo il rapporto segnale-rumore del radar: $S = \sigma^0/\sigma_N^0$, otteniamo

$$\text{var}[P_c] = [\sigma^0]^2 \left[\frac{1}{N_V} \left(1 + \frac{1}{S}\right)^2 + \frac{1}{N_V} \left(\frac{1}{S}\right)^2 \right] \quad (77)$$

per cui

$$ISNR = \frac{\sigma^0}{\sqrt{\text{var}[P_c]}} = \frac{\sigma^0}{\frac{\sigma^0}{\sqrt{N_V}} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{S}\right)^2 + \left(\frac{1}{S}\right)^2}} = \frac{\sqrt{N_V}}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{S}\right)^2 + \left(\frac{1}{S}\right)^2}} \quad (78)$$

La presenza del rumore termico peggiora $ISNR$, ovvero contribuisce a degradare l'immagine. Dalla (78) risulta evidente che il valore (72) si ha solo se $S \rightarrow \infty$. Tuttavia, anche valori moderati di S peggiorano solo di poco la qualità. infatti per $S = 1$ (un rapporto segnale-rumore di 0 dB!) il peggioramento è solo di $\sqrt{5}$, ovvero di 3.5 dB, e basta avere un S di 10–12 dB perché il peggioramento di $ISNR$ sia solo di 0.3–0.4 dB.

¹ Si noti che, mentre $\text{var}[P_R]$ è la varianza di una V.A., $\text{var}[P_{IN}]$ è la varianza di una stima del valore medio di una V.A.. Tuttavia, questa distinzione non ha effetto sui calcoli successivi

Conseguenza di ciò é che non é normalmente richiesto un valore elevato di S , quanto piuttosto riuscire ad aumentare il numero di viste.

11 CURVATURA DEL RANGE

L'uso del tempo di ritardo come coordinata naturale produce nei sensori SAR un altro effetto che va corretto in elaborazione.

Un certo pixel P viene visto (e acquisito) dal sensore su un tratto abbastanza lungo della traiettoria del satellite. Pertanto la sua distanza ed il tempo di ritardo possono variare in maniera significativa durante il tempo di acquisizione necessario a formare l'immagine di P . Dalla Fig. 1 segue

$$r^2(n) = r^2 + (n d_S)^2$$

e sviluppando in serie di Taylor

$$\begin{aligned} r(n) &= r \left[1 + \left(\frac{n d_S}{r} \right)^2 \right]^{1/2} \\ &\simeq r \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{n d_S}{r} \right)^2 \right] = r + n^2 \frac{d_S^2}{2r} \end{aligned} \quad (79)$$

Pertanto il tempo di ritardo di P non é costante, ma varia con n . Se questo effetto non viene corretto, quindi, si ha l'equivalente di uno spostamento di P durante la formazione dell'immagine.

Il valore massimo della differenza nel range di P viene detto curvatura del range, e si ha per $n = N_S$. Essendo $N_S d_S = L_S/2$, segue

$$\Delta r_M = r(N_S) - r = \frac{L_S^2}{8r} = \frac{L_S^2 \cos \theta}{8h} \quad (80)$$

La variazione di P sulla superficie $\Delta r_M / \sin \theta$ va poi confrontata con la risoluzione in range (16). Introduciamo il rapporto

$$M_c = \frac{\Delta r_M / \sin \theta}{X_r} = \frac{L_S^2 \cos \theta}{8h \sin \theta} \frac{2B_r \sin \theta}{c} = \frac{B_r \cos \theta}{4ch} L_S^2 \quad (81)$$

essendo B_r la banda usata per la risoluzione. Il rapporto M_c aumenta al crescere della L_S e quindi della risoluzione. Il valore massimo é quello di un SAR a piena risoluzione ($L_S = \ell_a$) e vale

$$M_{c,max} = \frac{B_r \cos \theta}{4ch} \left(\frac{h\lambda}{L \cos \theta} \right)^2 = \frac{h\lambda^2 B_r}{4c L^2 \cos \theta}$$

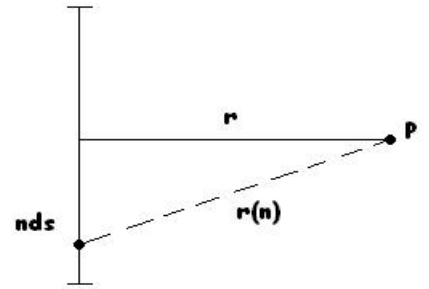


Fig.1: Geometria di acquisizione in range (nel piano passante per la linea di volo e P).

Se M_c è paragonabile, o maggiore, di 1, la curvatura del range va corretta in fase di elaborazione.

Se sono richieste delle medie in azimuth, la partizione della zona di acquisizione in N_a parti (introdotta per aumentare considerevolmente la profondità di messa a fuoco) consente anche di ridurre M_c dello stesso fattore N_a^2 , ottenendo

$$M_{c,max} = \frac{h\lambda^2 B_r}{4c L^2 \cos \theta} \frac{1}{N_a^2} \quad (82)$$

12 SEGNALE OLOGRAFICO

Nel paragrafo 4 abbiamo considerato l'elaborazione del segnale *SAR* solo relativamente al range. In questo paragrafo svilupperemo una trattazione abbastanza analoga ma bidimensionale, per arrivare a determinare come può essere estratta la sezione radar differenziale di una scena dal segnale *SAR*.

Consideriamo un sistema di riferimento cilindrico (r, z) , in cui l'asse z è la linea di volo e r è la distanza tra un punto dello swath e la linea di volo stessa. Per quanto riguarda la direzione di azimuth, prendiamo l'origine dell'asse z nella posizione della acquisizione $n = 0$, in modo che la acquisizione n -esima sia fatta in $z = nd_S$. Per quanto riguarda r , notiamo che questa coordinata non è la posizione sullo swath, ma piuttosto è direttamente proporzionale al tempo di viaggio. In altre parole, r , o meglio la variazione di r , è la coordinata naturale rispetto a cui viene fatta l'immagine in range.

La costruzione di una immagine *SAR* può essere descritta come la cascata di due sistemi: un sistema *acquisizione* e un sistema *elaborazione*.

L'ingresso del sistema acquisizione è la sezione radar (in campo) $\gamma(r, z)$, che supporremo sempre moltiplicata per una funzione finestra pari a 1 esclusivamente nello swath (per tener conto semplicemente della larghezza finita del diagramma di irradiazione della antenna del sensore). La corrispondente uscita è la successione dei segnali ricevuti nelle acquisizioni successive

$$\begin{array}{c} \dots \\ S_{q-2}(t) \\ S_{q-1}(t) \\ S_q(t) \\ S_{q+1}(t) \\ S_{q+2}(t) \\ \dots \end{array}$$

in cui, per ogni acquisizione consideriamo l'origine dell'asse dei tempi nel momento in cui parte l'impulso. In questo modo, se (come avviene sempre) il segnale ricevuto da ciascuna acquisizione viene campionato, l'uscita del sistema *acquisizione* sarà una matrice di dati, in cui ogni riga corrisponde ad una acquisizione del sensore, e ogni colonna corrisponde all'eco da una cella del range, la stessa per ciascuna riga.

Il sistema *elaborazione*, di cui parleremo più avanti, è invece il sistema che ha per ingresso la tabella delle acquisizioni, e in uscita la immagine *SAR*, ovvero la stima della $\sigma^0(r, z) = |\gamma(r, z)|^2$. Corrisponde quindi alla elaborazione vera e propria. Naturalmente, questa elaborazione dipende in maniera essenziale da come viene descritto il sistema acquisizione, in quanto i due sistemi sono, da un certo punto di vista, l'inverso uno dell'altro.

Cominciamo quindi col calcolare la *risposta impulsiva* del sistema acquisizione, ovvero la sequenza dei segnali ricevuti a causa della retrodiffusione di una singola celletta posta in (r, z) , di sezione radar $\gamma(r, z) dr dz$.

Per la generica acquisizione n -esima, il segnale trasmesso sarà $a(t) = \cos(\omega_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2)$, dove, per comodità, abbiamo indicato con $\alpha = \Delta\omega/\tau_c$ la velocità di variazione della frequenza del chirp.

Il segnale ricevuto sarà allora,

$$s_n(t) = \gamma(r, z) a \left\{ t - \frac{2}{c} r_n(r, z) \right\} dr dz \quad (83)$$

diverso da zero solo per

$$t \in \left[\frac{2}{c} r_n(r, z), \frac{2}{c} r_n(r, z) + \tau_c \right] \quad (84)$$

Nella (83), $r_n(r, z)$ é la distanza tra la posizione della acquisizione n -esima e il punto (r, z) nella zona illuminata. Questa distanza é calcolabile dal teorema di Pitagora, applicato al piano passante per l'asse z e per il punto (r, z) , e vale

$$r_n(r, z) = \sqrt{r^2 + (z - nd_s)^2} \quad (85)$$

Possiamo svilupparlo in serie di Taylor, in quanto¹ $z \ll r$

$$\sqrt{r^2 + (nd_s - z)^2} = r \sqrt{1 + \frac{(nd_s - z)^2}{r^2}} \simeq r + \frac{(nd_s - z)^2}{2r} \quad (86)$$

La (83) diventa

$$\begin{aligned} s_n(t) &= \gamma(r, z) a \left\{ t - \frac{2}{c} r - \frac{2}{c} \frac{(nd_s - z)^2}{2r} \right\} dr dz \\ &= \gamma(r, z) \cos \left\{ \omega_0 t - \frac{2\omega_0}{c} r - \frac{2\omega_0}{c} \frac{(nd_s - z)^2}{2r} + \frac{\alpha}{2} \left[t - \frac{2}{c} r - \frac{2}{c} \frac{(nd_s - z)^2}{2r} \right]^2 \right\} dr dz \\ &= \gamma(r, z) \cos \left[\omega_0 t - \frac{2\omega_0}{c} r - \Phi_n(t, r, z) \right] dr dz \end{aligned} \quad (87)$$

essendo

$$\Phi_n(t, r, z) = \frac{2\omega_0}{c} \frac{(nd_s - z)^2}{2r} - \frac{\alpha}{2} \left[t - \frac{2}{c} r - \frac{2}{c} \frac{(nd_s - z)^2}{2r} \right]^2 \quad (88)$$

L'insieme di tutte le risposte (87) é la risposta di un *SAR* a un diffusore elementare. In termini di segnale equivalente a banda limitata, diventa

$$S_n(t) = \gamma(r, z) \exp \left(-j \frac{2\omega_0}{c} r \right) \exp [-j \Phi_n(t, r, z)] dr dz$$

sempre diverso da zero solo per

$$\frac{2}{c} \left[r + \frac{(nd_s - z)^2}{2r} \right] < t < \frac{2}{c} \left[r + \frac{(nd_s - z)^2}{2r} \right] + \tau_c \quad (89)$$

La variabile di uscita t é il tempo misurato dall'inizio della trasmissione dell'impulso n . Possiamo allora introdurre, al posto di t , una variabile spaziale ρ , definita come una distanza dalla linea di volo, ponendo $t = \frac{2}{c} \rho$. Come abbiamo visto parlando della elaborazione in range, l'uscita del sistema di elaborazione fornirá la mappa di sezene radar differenziale proprio in funzione di ρ (o, piú precisamente, di $\rho \sin \theta$, che é la distanza sullo swath). Segue

$$S_n(\rho) = \gamma(r, z) \exp \left(-j \frac{2\omega_0}{c} r \right) \exp \left[-j \Phi_n \left(\frac{2}{c} \rho, r, z \right) \right] dr dz$$

¹ Questa approssimazione viene utilizzata in molte delle tecniche di elaborazione ma non in tutte.

e la condizione (89) diventa

$$\frac{(nd_s - z)^2}{2r} < \rho - r < \frac{(nd_s - z)^2}{2r} + \frac{c\tau_c}{2}$$

ovvero

$$0 < \rho - r - \frac{(nd_s - z)^2}{2r} < \frac{c\tau_c}{2} \quad (90)$$

Possiamo inglobare il primo esponenziale nella sezione radar γ , in quanto nelle elaborazioni *SAR* standard questo termine non pesa², riscrivendo la relazione precedente come

$$S_n(\rho) = \gamma(r, z) \exp \left[-j\Phi_n \left(\frac{2}{c} \rho, r, z \right) \right] dr dz \quad (91)$$

Il segnale (91) é un segnale campionato, ma possiamo considerarne la sua versione continua, usando una ascissa Z come variabile di uscita, introducendo la funzione

$$S(\rho, Z) = \gamma(r, z) \exp [-j\Phi(\rho - r, Z - z, r)] dr dz \quad (92)$$

(sempre diversa da zero nell'intervallo (90), con $nd_s = Z$) e ponendo

$$S_n(\rho) = S(\rho, nd_s)$$

Nella (92) abbiamo introdotto

$$\Phi(\rho - r, Z - z, r) = \frac{2\omega_0}{c} \frac{(Z - z)^2}{2r} - \frac{2\alpha}{c^2} \left[\rho - r - \frac{(Z - z)^2}{2r} \right]^2 \quad (93)$$

Occorre inoltre tener conto che si ha eco ricevuto solo se il punto (r, z) é nella zona illuminata in azimuth, di lunghezza ℓ_a . Questo richiede l'inserimento di una funzione finestra³

$$\Pi \left(\frac{Z - z}{\ell_a} \right)$$

a secondo membro della (92). La risposta impulsiva del sistema acquisizione di un *SAR* é allora

$$\begin{aligned} G(\rho - r, Z - z, r) &= \exp [-j\Phi(\rho - r, Z - z, r)] \Pi \left(\frac{Z - z}{\ell_a} \right) \\ &= \exp [-j\Phi(\rho - r, Z - z, r)] \Pi \left(\frac{Z - z}{\ell_a} \right) \end{aligned} \quad (94)$$

² Questo termine é invece fondamentale nelle applicazioni interferometriche del *SAR*, che consentono, usando due acquisizioni da posizioni diverse, di ricostruire anche la quota, con un meccanismo simile alla visione binoculare umana. In presenza di due aquisizioni, infatti, questo termine é diverso per le due acquisizioni. Pertanto la fase ricostruita di $\gamma(r, z)$ é differente, e da questa differenza di fase si può ricavare il termine $\exp \left(-j\frac{2\omega_0}{c} r \right)$ che conduce, opportunamente elaborato, alla quota dei punti acquisiti.

³ Una funzione finestra

$$\Pi \left(\frac{x - x_0}{X} \right)$$

é una finestra, di larghezza X e centrata in x_0 . In altri termini, questa funzione vale 1 per $|x - x_0| < X/2$ e zero altrove.

ed é diversa da zero, rispetto a $\rho - r$, nell'intervallo (90). Per tenerne conto introduciamo in G una ulteriore funzione finestra

$$\prod \left\{ \frac{2}{c\tau_c} \left[\rho - r - \frac{(Z - z)^2}{2r} \right] - \frac{1}{2} \right\}$$

La dipendenza solo da $Z - z$ mostra che l'acquisizione di un *SAR* é un sistema omogeneo rispetto a z . Non é invece omogeneo rispetto a r , in quanto, oltre alla dipendenza da $\rho - r$, tipica di un sistema omogeneo, esiste anche una dipendenza esplicita singola da r . Tuttavia, le due dipendenze da $\rho - r$ e $Z - z$ sono *abbastanza* indipendenti e possiamo allora scrivere

$$\begin{aligned} G(\rho - r, Z - z, r) &= \exp \left[-j \frac{\omega_0}{cr} (Z - z)^2 \right] \exp \left\{ j \frac{2\alpha}{c^2} \left[\rho - r - \frac{(Z - z)^2}{2r} \right]^2 \right\} \\ &\quad \prod \left(\frac{Z - z}{\ell_a} \right) \prod \left\{ \frac{2}{c\tau_c} \left[\rho - r - \frac{(Z - z)^2}{2r} \right] - \frac{1}{2} \right\} \\ &= \exp \left\{ j \frac{2\alpha}{c^2} \left[\rho - r - \frac{(Z - z)^2}{2r} \right]^2 \right\} \prod \left\{ \frac{2}{c\tau_c} \left[\rho - r - \frac{(Z - z)^2}{2r} \right] - \frac{1}{2} \right\} \quad (95) \\ &\quad \exp \left[-j \frac{\omega_0}{cr} (Z - z)^2 \right] \prod \left(\frac{Z - z}{\ell_a} \right) \\ &= G_R \left[\rho - r - \frac{(Z - z)^2}{2r} \right] G_A(Z - z, r) \end{aligned}$$

avendo definito

$$\begin{aligned} G_R(\rho) &= \exp \left(j \frac{2\alpha}{c^2} \rho^2 \right) \prod \left(\frac{2}{c\tau_c} \rho - \frac{1}{2} \right) \\ G_A(Z, r) &= \exp \left(-j \frac{\omega_0}{cr} Z^2 \right) \prod \left(\frac{Z}{\ell_a} \right) \end{aligned} \quad (96)$$

Il segnale ricevuto totale, detto segnale *olografico* si ottiene sommando su tutta l'area illuminata, di dimensioni $\ell_a \times S$. Assumendo il guadagno costante sulla area illuminata, il segnale complessivamente ricevuto⁴ vale

$$\begin{aligned} S(\rho, Z) &= \int \int \gamma(r, z) G(\rho - r, Z - z, r) dz dr \\ &= \int \int \gamma(r, z) G_R \left[\rho - r - \frac{(Z - z)^2}{2r} \right] G_A(Z - z, r) dz dr \end{aligned} \quad (97)$$

A causa della dipendenza singola di G da r la (97) é una convoluzione solo nella direzione di azimuth, ma non in quella di range, e pertanto l'elaborazione dovr  essere range-variante. Poich  le due direzioni sono anche accoppiate dall'argomento di G_R , l'elaborazione sar  bidimensionale, e la non omogeneit  in range complica in maniera significativa l'elaborazione necessaria a estrarre la $\gamma(r, z)$ a partire dal segnale acquisito $S(\rho, Z)$.

Introducendo le definizioni (96)

⁴ Ricordiamo che questo segnale é una versione fittizia a Z continua. Il segnale reale é la versione campionata di questo, con campioni presi a $Z = nd_s$.

$$S(\rho, Z) = \int \int \gamma(r, z) \exp \left\{ j \frac{2\alpha}{c^2} \left[\rho - r - \frac{(Z - z)^2}{2r} \right]^2 \right\} \exp \left[-j \frac{\omega_0}{cr} (Z - z)^2 \right] \Pi \left\{ \frac{2}{c\tau_c} \left[\rho - r - \frac{(Z - z)^2}{2r} \right] - \frac{1}{2} \right\} \Pi \left(\frac{Z - z}{\ell_a} \right) dz dr \quad (98)$$

vediamo che il secondo esponenziale contiene il termine di fronte di fase quadratico, che viene corretto dai pesi (44) di focalizzazione. Gli altri due termini quadratici in $Z - z$ sono invece i responsabili della curvatura del range, producendo un chirp con un tempo di ritardo che dipende da z , come in (79).

13 ELABORAZIONE DEI DATI SAR

La (98) é l'uscita di quello che abbiamo chiamato il sistema *acquisizione*, e contemporaneamente é anche l'ingresso del sistema *elaborazione*. Per caratterizzare quest'ultimo, almeno in linea di principio, vediamo come, a partire dalla (98), può essere estratta la sezione radar differenziale $\sigma^0(r, z) = |\gamma(r, z)|^2$. La procedura di elaborazione del segnale olografico (98) dipende dal valore della profondità di messa a fuoco, e dalla curvatura del range, in quanto vi dipendono eventuali approssimazioni semplificative della (98).

Ci occuperemo qui solo del caso più semplice, in cui la profondità di messa a fuoco é pari o superiore allo swath¹, e se il parametro M_c é significativamente minore di 1. In tal caso si può trascurare il termine di curvatura del range in G_R , e approssimare r col valore al centro dello swath, $r \simeq D$, nel termine di fase quadratica in z . Si ottiene allora

$$G(\rho - r, Z - z, r) = G_R \left[\rho - r - \frac{(Z - z)^2}{2r} \right] G_A(Z - z, r) \simeq G_R(\rho - r) G_A(Z - z, D) \quad (99)$$

La (97) diventa allora una convoluzione doppia spaziale

$$\begin{aligned} S(\rho, Z) &= \int \int \gamma(r, z) G_R(\rho - r) G_A(Z - z, D) dz dr \\ &= \int \int \gamma(r, z) \exp \left[-j \frac{\omega_0}{cD} (Z - z)^2 \right] \exp \left\{ j \frac{2\alpha}{c^2} [\rho - r]^2 \right\} \Pi \left(\frac{Z - z}{\ell_a} \right) \Pi \left\{ \frac{2}{c\tau_c} [\rho - r] - \frac{1}{2} \right\} dz dr \end{aligned} \quad (100)$$

¹ Se la mappa da realizzare ha una larghezza più piccola di quella data dalla (2), occorre che questa larghezza sia minore di F .

Il modo piú intuitivo di risolvere² la (100) é di sfruttare il fatto che la trasformata di una convoluzione é il prodotto delle trasformate. Iniziamo quindi a trasformare la (100) rispetto a (r, z) , e siano (u, v) le due variabili trasformate

$$\hat{S}(u, v) = \hat{\gamma}(u, v) \hat{G}_R(u) \hat{G}_A(v, D) \quad (101)$$

A questo punto possiamo risolvere la (101) per $\hat{\gamma}(u, v)$ e poi antitrasformare per ottenere $\gamma(r, z)$. Tuttavia si avrebbe

$$\hat{\gamma}(u, v) = \hat{S}(u, v) \frac{1}{\hat{G}_R(u) \hat{G}_A(v, D)}$$

che non é utilizzabile. Ricordiamo infatti che la funzione di Green (99) é un doppio chirp, uno in azimuth, G_A , e uno in range, G_R (vedi (96)) tra loro indipendenti, e entrambi con un prodotto banda-durata grande. Pertanto (per le proprietà della trasformata di un chirp) $\hat{G}_R(u) \hat{G}_A(v, D)$ é praticamente nulla al di fuori della sua banda, e quindi la $\hat{\gamma}(u, v)$ contiene componenti armoniche molto grandi derivanti essenzialmente dal *rumore* fuori banda di $\hat{S}(u, v)$ moltiplicato per coefficienti molto grandi. Se si vuole invertire la (101), occorre per prima cosa moltiplicare ambo i membri di (101) per una funzione finestra $\mathcal{W}(u, v)$ estesa alla sola banda di $\hat{G}_R(u) \hat{G}_A(v, D)$. Poichè

$$\mathcal{W}(u, v) \left[\hat{G}_R(u) \hat{G}_A(v, D) \right] = \hat{G}_R(u) \hat{G}_A(v, D)$$

(i due fattori a primo membro sono diversi da zero nella stessa banda), segue

$$\hat{S}(u, v) \mathcal{W}(u, v) = \hat{\gamma}(u, v) \hat{G}_R(u) \hat{G}_A(v, D) \mathcal{W}(u, v) = \hat{\gamma}(u, v) \hat{G}_R(u) \hat{G}_A(v, D)$$

che può ora essere risolta come

$$\hat{\gamma}(u, v) = \left[\hat{S}(u, v) \mathcal{W}(u, v) \right] \frac{1}{\hat{G}_R(u) \hat{G}_A(v, D)} = \hat{S}(u, v) \left[\mathcal{W}(u, v) \frac{1}{\hat{G}_R(u) \hat{G}_A(v, D)} \right]$$

Il termine in parentesi quadra nell'ultima espressione della equazione precedente é pari a 0 fuori dalla banda di $\hat{G}_R(u) \hat{G}_A(v, D)$, e a $1/\hat{G}_R(u) \hat{G}_A(v, D)$ in questa banda. Ma le proprietà della trasformata di un chirp (ovvero avere il modulo costante nella sua banda) consentono di scrivere, **nella banda del chirp**:

$$\frac{1}{\hat{G}_R(u) \hat{G}_A(v, D)} = \hat{G}_R^*(u) \hat{G}_A^*(v, D) \quad (102)$$

per ogni D , e quindi si ottiene, come soluzione della equazione di convoluzione

$$\hat{Y}(u, v) = \hat{S}(u, v) \hat{G}_R^*(u) \hat{G}_A^*(v, D) \quad (103)$$

² Nel discutere le varie tecniche di elaborazione utilizzeremo espressioni approssimate del segnale acquisito, come ad esempio la (98) o la (100). Questo verrà fatto solo per costruire le tecniche di elaborazione. É infatti evidente che il segnale acquisito é sempre (97). Se però questo segnale é approssimabile con un altro, ad esempio (100), una elaborazione che funziona per quest'ultimo funzionerà, in maniera approssimata ma sufficientemente accurata, anche per il segnale vero (97).

La (103) può essere letta anche in un altro modo. Il segnale ricevuto (da ogni singolo pixel della scena) é un chirp bidimensionale (si vedano la (99) e la (96)) di trasformata $\hat{G}_R(u) \hat{G}_A(v, D)$ (a meno di un fattore di fase). Il filtro adattato a questo segnale (a meno del coniugato del fattore di fase precedentemente trascurato) ha per risposta armonica³

$$\hat{H}_A(u, v) = \hat{G}_R^*(u) \hat{G}_A^*(v, D)$$

Se allora il segnale ricevuto viene fatto passare attraverso questo filtro adattato, si ottiene in uscita

$$\hat{Y}(u, v) = \hat{S}(u, v) \hat{H}_A(u, v) = \hat{S}(u, v) \hat{G}_R^*(u) \hat{G}_A^*(v, D) \quad (104)$$

ovvero lo stesso risultato (103) che si é ottenuto risolvendo, nel dominio trasformato, l'equazione di convoluzione (100). Sostituendo la (101) si ha quindi, in uscita

$$\hat{Y}(u, v) = \hat{\gamma}(u, v) |\hat{G}_R(u)|^2 |\hat{G}_A(v, D)|^2 \quad (105)$$

Se teniamo conto che il prodotto banda-durata di entrambi i chirp é molto grande, allora sia $|\hat{G}_R(u)|^2$, sia $|\hat{G}_A(v, D)|^2$ sono, a meno di una costante, pari a 1 sulla banda del chirp e a zero fuori (e, per G_A , indipendentemente dal valore di D), ovvero sono uguali a delle funzioni finestra, di ampiezza pari all'intervallo di frequenza istantanea del chirp. Per quanto riguarda $G_R(r)$, la frequenza istantanea é data da $4\alpha r/c^2$, con r che varia nell'intervallo $(0, c\tau_c/2)$. Pertanto la banda spaziale di $G_R(r)$ é pari a

$$\frac{4\alpha}{c^2} \frac{c\tau_c}{2} = \frac{4\Delta\omega}{c^2\tau_c} \frac{c\tau_c}{2} = \frac{2\Delta\omega}{c}$$

e quindi

$$|\hat{G}_R(u)|^2 = \prod \left(\frac{u - \frac{\Delta\omega}{c}}{\frac{2\Delta\omega}{c}} \right) = \prod \left(\frac{\frac{\pi c}{\Delta\omega} u - \pi}{2\pi} \right) \quad (106)$$

Analogamente, la frequenza istantanea di $G_A(z, r)$ é $-2\omega_0 z/cr$, con z che varia nell'intervallo $(-\ell_a/2, \ell_a/2)$. La banda spaziale di $G_A(z, D)$ é allora

$$\frac{2\omega_0}{cD} \ell_a = \frac{2\omega_0 \ell_a}{cD}$$

per cui

$$|\hat{G}_A(v, D)|^2 = \prod \left(\frac{v}{\frac{2\omega_0 \ell_a}{cD}} \right) = \prod \left(\frac{\frac{\pi cD}{\omega_0 \ell_a} v}{2\pi} \right) \quad (107)$$

Sostituendo nella (105) si ha

$$\hat{Y}(u, v) = \hat{\gamma}(u, v) \prod \left(\frac{\frac{\pi c}{\Delta\omega} u - \pi}{2\pi} \right) \prod \left(\frac{\frac{\pi cD}{\omega_0 \ell_a} v}{2\pi} \right) \quad (108)$$

La (108) é la versione bidimensionale della (31), ed ha quindi le stesse caratteristiche. In particolare, antitrasformando la (108) si trova (analogamente alla (29)), che la uscita $Y(r, z)$

³ Poichè, come vedremo, l'elaborazione avviene per via numerica, non é necessario tener conto della causalità del filtro adattato.

del filtro adattato è la media mobile della vera scena $\gamma(r, z)$, e quindi il suo modulo quadro è la stima della distribuzione della sezione radar differenziale della scena. In altri termini, $Y(r, z)$ è la immagine che vogliamo otteere.

La media mobile della scena vera è fatta su una cella di dimensioni

$$\begin{cases} \frac{\pi c}{\Delta\omega} = \frac{c}{2B_{RF}} = X_r \sin \theta & \text{rispetto a } r \\ \frac{\pi c D}{\omega_0 \ell_a} = X_A & \text{rispetto a } z \end{cases} \quad (109)$$

avendo usato la (48) nella seconda delle (109). Tenendo conto che r è la coordinata *distanza dalla linea di volo*, mentre quella sullo swath è $r/\sin \theta$, la cella su cui viene fatta la media mobile è la cella di risoluzione del SAR.

A questo punto conviene ricordare che il filtro adattato è stato da noi introdotto per massimizzare la probabilità di identificazione di un impulso nel rumore. Nel caso di un chirp, questo avviene perché l'energia del chirp viene, in uscita dal filtro, compressa in un impulso. Pertanto, una elaborazione di un chirp basata sul filtro adattato è sicuramente la scelta migliore per individuare un diffusore puntiforme sulla scena, come ad esempio un corner reflector usato per la calibrazione. Tuttavia possiamo utilizzare un filtro adattato anche per l'*imaging* di una scena estesa in quanto abbiamo mostrato che, nel caso in cui il segnale (a cui il filtro è adattato) è un chirp con un prodotto banda-durata grande, il filtro adattato è del tutto equivalente alla soluzione di una equazione di convoluzione, grazie alla proprietà (102) di questi chirp.

Dal punto di vista implementativo, il segnale olografico, che è già campionato in azimuth, viene campionato anche in range. Poi viene trasformato usando una *FFT* e moltiplicato per la trasformata (nota) del chirp bidimensionale. Il risultato è antitraformato (usando ancora una *FFT*) per ottenere la mappa della sezione radar differenziale.

La (104) può essere interpretata anche da un ulteriore punto di vista. Se la anti-trasformiamo, otteniamo una uscita data dalla convoluzione tra $S(\rho, Z)$ e la antitrasformata di $\hat{H}_A(u, v)$. Quest'ultima è la coniugata della risposta armonica del sistema acquisizione. Per le proprietà delle trasformate di Fourier, l'antitrasformata di (105), ovvero la stima della mappa di sezione radar differenziale ricostruita, è anche la **correlazione** tra il segnale acquisito $S(\rho, Z)$ e la risposta impulsiva del sistema acquisizione $G(\rho, Z, D)$, scritta nella forma (99) valida nelle ipotesi semplificatrici di questo paragrafo

$$Y(r, z) = \int S(\rho, Z) \left[G_R(\rho + r) G_A(Z + z, D) \right] d\rho dZ \quad (110)$$

correlazione che estrae solo il contributo di $\gamma(r, z)$ al segnale olografico $S(\rho, Z)$.

14 COMPLESSITÀ COMPUTAZIONALE

Le elaborazioni dei dati *SAR* sono computazionalmente molto onerose. Basta considerare l'esempio del paragrafo 6, che qui riportiamo in tabella:

Dati orbitali	Antenna	Dati sistema
$h = 720 \text{ km}$	$\lambda = 6 \text{ cm}$	$\tau_t = 46.55 \mu\text{sec}$
$\theta = 23^\circ$	$L = 8.1 \text{ m}$	$B_{RF} = 100 \text{ MHz}$
$v = 7 \text{ km/sec}$	$W = 0.85 \text{ m}$	$PRF = 1.764 \text{ kHz}$

Risulta $N_S = 720$, ovvero vanno sommati 1440 echi per ottenere un pixel (o, piú precisamente, una fila di pixel) in azimuth. Pertanto é utile la valutazione della complessitá computazionale, che é ovviamente legata ai parametri del sensore.

All'uscita del sensore, il segnale di ogni acquisizione viene campionato al rate di Nyquist. Quindi il numero di campioni per secondo é pari a

$$R = 2B_{RF}$$

in cui B_{RF} é la banda usata per la ricezione, che tiene anche conto, eventualmente, delle operazioni di media in range.

Questo segnale viene poi quantizzato con N_b bit (tipicamente tra 3 e 5), e quindi il bit-rate in uscita dal sensore é pari a

$$R_{bS} = 2N_b B_{RF}$$

In realtà questo bit rate si ha solo durante i periodi di acquisizione. Pertanto tutti i sensori prevedono un buffer, in cui memorizzare temporaneamente i dati, in modo da ridurre il rate di uscita. Infatti il tempo di acquisizione vale, da (33),

$$T_A = \tau_t + \frac{2S \sin \theta}{c}$$

e quindi il *duty-cycle* é pari a $PRF T_A$. Pertanto in uscita dal buffer si ha un bit rate pari a

$$R_b = 2N_b B_{RF} PRF T_A = 2N_b B_{RF} PRF \left(\tau_t + \frac{2S \sin \theta}{c} \right) \quad (111)$$

La capacità del buffer può essere calcolata considerando l'istante finale di acquisizione, corrispondente al momento di maggiore occupazione del buffer. I dati immagazzinati saranno allora la differenza tra quelli complessivamente entrati nella acquisizione, e quelli che, contemporaneamente, sono usciti a un rate R_b , inferiore a quello entrante. Ovviamente tale numero é anche pari ai dati che dovranno uscire nella restante parte del periodo T_{PR} di acquisizione, e quindi la capacità del buffer deve essere di

$$C_b = R_b (T_{PR} - T_A) = R_b \left(\frac{1 - PRF T_A}{PRF} \right) = 2N_b B_{RF} T_A (1 - PRF T_A) \quad (112)$$

Con riferimento all'esempio di inizio paragrafo, si ha, assumendo $N_b = 5$,

$$R_{bS} = 1 \text{ Gb/sec} \quad \text{e} \quad T_A = 177 \mu\text{sec} \quad \implies \quad R_b = 310 \text{ Mb/sec}$$

con un duty-cycle del 31 %. La capacità minima del buffer deve essere allora, da (112),

$$C_b = 122 \text{ kb}$$

Passando a esaminare la complessità della elaborazione, il punto di partenza é la considerazione che il processore, ogni T_{PR} secondi deve fornire in uscita una intera fila di pixel in range. Quindi il rate di uscita del processore é pari a

$$K_o = PRF \frac{S}{X_r} = \frac{v}{X_a} \frac{S}{X_r} \simeq PRF B_{RF} \frac{2S \sin \theta}{c} = B_{RF} \left[PRF (T_A - \tau_t) \right] \quad (113)$$

misurato in pixel/sec.

La elaborazione comprende una *FFT* di RT_A elementi in range e $2N_S$ elementi in azimuth, la moltiplicazione per la risposta armonica del filtro adattato e poi una (o piú) *FFT* inversa. Occorre infatti tener conto che se M_c (eq. (82)) o N_P (eq. (56)) sono maggiori di 1, occorre dividere il dominio di ricostruzione in piú parti, e per ognuna di queste va fatta una *FFT* inversa (con tutti i punti), da cui estrarre la sola parte di interesse.

Le varie operazioni coinvolgono quindi

$$N_E = RT_A 2N_S \quad (114)$$

elementi. La complessità di una *FFT* di N_E elementi é pari a $N_E \log_2 N_E$. La *FFT* di ingresso richiede allora $N_E \log_2 N_E$ operazioni, mentre il filtro adattato richiede N_E operazioni. In uscita abbiamo M_P *FFT*, essendo M_P pari al piú grande tra N_P e M_c .

Per ogni elaborazione elementare sono quindi necessarie

$$\begin{aligned} K_p &= N_E \log_2 N_E + M_P N_E + M_P N_E \log_2 N_E \\ &= \left[(1 + M_P) \log_2 N_E + M_P \right] N_E \end{aligned} \quad (115)$$

operazioni, e la potenza di calcolo richiesta vale $K_p PRF$ operazioni/sec. Si noti che, di norma, il primo addendo nella parentesi quadra é quello prevalente.

Ovviamente, se é richiesta la ricostruzione solo di una parte della swath, il tempo di acquisizione sará solo quello relativo a quella parte (e, altrettanto ovviamente, anche N_P e M_c saranno calcolati su quella parte).

Se sono previste medie su N_a pixel in azimuth, allora il valore di K_p va calcolato su N_E/N_a campioni (al posto di N_E), ma vanno fatte N_a elaborazioni per periodo di acquisizione. Se indichiamo con K'_p le operazioni per elaborazione elementare su N_E/N_a campioni, allora la potenza di calcolo richiesta sará $K'_p (N_a PRF)$, che é minore di quella richiesta per la piena elaborazione. La riduzione é solo in piccola parte dovuta alla riduzione del $\log_2 N_E$. La parte principale é legata alla riduzione di M_P .

Nell'esempio scelto, supponendo di volere una immagine larga 16 km , il tempo di acquisizione da considerare nella (114) vale $87 \mu\text{sec}$, e quindi $N_E = 25 \cdot 10^6$.

Sostituendo nella (115), con $M_P = 1$ segue $K'_p = 28N_E/4 = 175 \cdot 10^6$ operazioni. Un processore in real-time deve quindi avere una potenza di calcolo di almeno $4PRF K_p = 1.2 \cdot 10^{12}$

operazioni/sec, valore fattibile solo con processori paralleli dedicati. Se l'elaborazione é fatta off-line, invece, sono richiesti $4K'_P = 700 \cdot 10^6$ operazioni per ciascuna fila di 1000 pixel in range, corrispondenti a una risoluzione di $N_r X_r = 16 m$.

15 EFFETTO DELLA QUANTIZZAZIONE

Concludiamo questa parte valutando l'effetto della quantizzazione del segnale olografico sulle prestazioni del *SAR*.

Il segnale olografico è la somma di un numero molto elevato di contributi di celle indipendenti. Pertanto ogni campione del segnale olografico può essere considerato una V.A. gaussiana¹ (complessa), con varianza σ_s^2 pari alla sua potenza media. La varianza è lentamente variabile tra un campione e l'altro, e in questa analisi verrà considerata costante.

Un quantizzatore a N_b bit è nient'altro che una funzione $Q(x)$ del valore di ingresso, che può assumere solo $N_L = 2^{N_b}$ valori. L'intervallo di ingresso (teoricamente $(-\infty, \infty)$) è quindi diviso in N_L intervalli, di cui i due estremi sono infiniti.

L'errore medio di quantizzazione vale

$$D_Q = \int [x - Q(x)]^2 p(x) dx \quad (116)$$

essendo $p(x)$ la *pdf* dei campioni del segnale olografico.

N_b	$\frac{D}{\sigma_s^2}$	a_q^2
1	0.363	0.570
2	0.119	0.782
3	0.037	0.884
4	0.012	0.945
5	$3.5 \cdot 10^{-3}$	0.973
6	$1.5 \cdot 10^{-3}$	0.990

¹ I vari campioni sono anche fortemente correlati tra loro, in quanto due campioni successivi condividono la quasi totalità delle celle. Pertanto, l'uso di quantizzatori a blocchi consente, a parità di prestazioni, di ridurre considerevolmente il bit-rate complessivo. Questo discorso, però, esula dal livello di questa trattazione.

In tabella è riportato il valore di D_Q/σ_s^2 corrispondente alla scelta ottimale dei livelli (uniformi) di quantizzazione, per diversi valori di N_b . Noto D_Q , si può calcolare il SNR dovuto alla sola quantizzazione, che indichiamo con S_Q . Nel fare questo calcolo, comunque, occorre considerare che una parte della potenza del segnale viene trasferita al rumore, e quindi questa potenza viene attenuata.

La potenza totale del segnale quantizzato, ovvero la sua varianza, vale

$$P_Q = \int [Q(x)]^2 p(x) dx \quad (117)$$

che è ovviamente proporzionale alla potenza σ_s^2 del segnale prima della quantizzazione. Ponendo

$$P_Q = a_q^2 \sigma_s^2$$

il rapporto segnale-rumore all'uscita del quantizzatore vale

$$S_Q = \frac{P_Q}{D_Q} = \frac{a_q^2 \sigma_s^2}{D_Q} = a_q^2 \frac{\sigma_s^2}{D_Q} \quad (118)$$

I valori di a_q^2 , che dipendono da N_b , sono riportati anch'essi in tabella.

Questo rumore va considerato additivo rispetto sia al segnale olografico, sia al rumore termico, e il suo effetto è spalmato su tutta l'immagine. Pertanto il rumore di quantizzazione incrementa lo speckle della immagine, mediante la (78), in cui, al posto di S (rapporto segnale-rumore termico) va considerato il rapporto tra il segnale e il rumore totale, somma di quello termico e di quello di quantizzazione.

Per valutare quest'ultimo, occorre tenere presente che, dal punto di vista del quantizzatore, anche il rumore termico è segnale². Pertanto, la potenza del segnale olografico è pari a $\sigma_s^2 = \sigma^0 + \sigma_N^0$, e quindi la potenza del rumore di quantizzazione diventa, usando il rapporto segnale-rumore (118),

$$N_Q = \frac{a_q^2 [\sigma^0 + \sigma_N^0]}{S_Q}$$

Il rapporto *segnale-rumore totale* in uscita vale allora

$$S_T = \frac{a_q^2 \sigma^0}{a_q^2 \sigma_N^0 + N_Q} = \frac{\sigma^0}{\sigma_N^0 + (\sigma^0 + \sigma_N^0)/S_Q} = \frac{S}{1 + \frac{S+1}{S_Q}} \quad (119)$$

essendo $\sigma^0 = S \sigma_N^0$. Risulta ovviamente $S_T \geq S_Q$, e in particolare S_T tende a S_Q se il rapporto *segnale-rumore termico* $S \rightarrow \infty$.

Assumendo $S = 10 \text{ dB}$ e $N_b = 3$, si trova $S_Q = 23.9$ (ovvero 14 dB) che corrispondono a un $S_T = 6.85$, ovvero 8.4 dB , una riduzione del 30 %. In termini di speckle, passare da S a S_T produce, in questo caso, un peggioramento di circa 0.15 dB , come si ricava da (78). Ovviamente, usare 4 o 5 bit, riduce ulteriormente questo peggioramento.

Poiché lo output rate del sensore è proporzionale a N_b , sono stati proposte anche elaborazioni con $N_b = 1$, ovvero conservando solo il segno del segnale olografico (il che semplifica anche molte delle elaborazioni successive). La (119) consente di valutare l'effetto di tale scelta.

² Poiché un SAR funziona con rapporti *segnale-rumore termico* abbastanza bassi, occorre tener conto del rumore termico in questa valutazione.

Per $N_b = 1$, la (118) fornisce $S_Q = 1.57$ e quindi, sempre assumendo $S = 10\text{ dB}$, risulterà dalla (119), $S_T = 1.25$, ovvero 0.1 dB . L'incremento dello speckle (rispetto al caso di assenza di rumore) passa da 0.4 dB a 3 dB , suggerendo che scegliere $N_b = 1$ può essere una opzione fattibile.

INDICE

1. RADAR AD APERTURA REALE	1
2. GEOMETRIA DI IMAGING IN RANGE	2
3. POTENZA RICEVUTA E SNR IN UN RADAR DI IMMAGINE	4
4. TRASMISSIONE DI IMPULSI MODULATI – CHIRP	6
5. TEMPORIZZAZIONI DEL SEGNALE	11
6. RADAR AD APERTURA SINTETICA – SAR	15
7. FOCALIZZAZIONE DI UNA IMMAGINE SAR	18
8. ANALISI DOPPLER DEL SAR	20
9. SPECKLE	24
10. EFFETTO DEL RUMORE TERMICO	26
11. CURVATURA DEL RANGE	28
12. SEGNALE OLOGRAFICO	30
13. ELABORAZIONE DEI DATI SAR	34
14. COMPLESSITÀ COMPUTAZIONALE	37
15. EFFETTO DELLA QUANTIZZAZIONE	40