

Concludendo, il teorema della quantità di moto porge

$$F' = \rho \int_0^{y_1} v_x (v_a - v_x) dy.$$

Il corrispondente sforzo τ_0 esercitato dal fluido su ciascuna faccia della lastra è

$$\frac{dF'}{dx} = \tau_0 = \rho \frac{d}{dx} \int_0^{y_1} v_x (v_a - v_x) dy.$$

L'introduzione in queste formule di particolari distribuzioni $v_x(y)$ dettate dall'esperienza permette di esplicitare ulteriormente la dipendenza degli sforzi dai vari parametri in gioco.

Come si è detto nel paragrafo 10.6, l'esperienza mostra che, nel moto turbolento, le velocità longitudinali $v_x(y)$ dipendono dalla velocità di attrito $v_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$ e dalla distanza adimensionalizzata $v_* y/\nu$ dalla parete. Si può così porre, in generale,

$$v_x = v_* f\left(\frac{v_* y}{\nu}\right) = v_* f,$$

$$v_a = v_* f\left(\frac{v_* y_1}{\nu}\right) = v_* f_1$$

ottenendo, per la forza complessiva,

$$F' = \rho \int_0^{y_1} v_x (v_a - v_x) dy = \rho v_a \int_0^{y_1} v_x \left(1 - \frac{v_x}{v_a}\right) dy = \rho v_a \nu \int_0^{v_* y_1/\nu} f \left(1 - \frac{f}{f_1}\right) d\left(\frac{v_* y}{\nu}\right),$$

e, per lo sforzo locale,

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \rho v_*^2 = \rho v_a \nu \frac{d}{dx} \int_0^{v_* y_1/\nu} f \left(1 - \frac{f}{f_1}\right) d\left(\frac{v_* y}{\nu}\right) = \\ &= \rho v_a \nu \frac{d}{d\left(\frac{v_* y_1}{\nu}\right)} \left\{ \int_0^{v_* y_1/\nu} f \left(1 - \frac{f}{f_1}\right) d\left(\frac{v_* y}{\nu}\right) \right\} \frac{d\left(\frac{v_* y_1}{\nu}\right)}{dx}. \end{aligned}$$

Nell'eseguire la derivazione va tenuto presente che f non dipende da $v_* y_1/\nu$, e che è $f = f_1$ per $y = y_1$. Si ha perciò

$$\tau_0 = \rho v_a \nu \left\{ \frac{df_1}{d\left(\frac{v_* y_1}{\nu}\right)} \int_0^{v_* y_1/\nu} \frac{f^2}{f_1^2} d\left(\frac{v_* y}{\nu}\right) \right\} \frac{d\left(\frac{v_* y_1}{\nu}\right)}{dx}.$$

Da quest'ultima espressione per τ_0 , ricordando che $v_a = v_* f_1$, si trae intanto

$$dx = \frac{\nu}{v_a} \left\{ \frac{df_1}{d\left(\frac{v_* y_1}{\nu}\right)} \int_0^{v_* y_1/\nu} f^2 d\left(\frac{v_* y}{\nu}\right) \right\} d\left(\frac{v_* y_1}{\nu}\right)$$

quale equazione implicita per lo spessore y_1 dello strato limite. Integrandola da $x=0$ ad $x=L$, nell'ipotesi che il moto sia turbolento già dal bordo di attacco, si ottiene

$$Re = \frac{v_a L}{\nu} = \int_0^{v_* y_1/\nu} \left\{ \frac{df_1}{d\left(\frac{v_* y_1}{\nu}\right)} \int_0^{v_* y_1/\nu} f^2 d\left(\frac{v_* y}{\nu}\right) \right\} d\left(\frac{v_* y_1}{\nu}\right).$$

La forza complessiva F' esercitata contro ciascuna faccia della lastra per unità di sviluppo trasversale viene abitualmente espressa nella forma

$$F' = C_R \varrho \frac{v_a^2}{2} L,$$

che è stata impiegata, nel paragrafo 12.7, anche per le forze indotte dallo strato limite laminare. Nel caso presente, ammesso che lo strato limite sia tutto turbolento, il coefficiente di resistenza C_R va calcolato con la formula

$$C_R = \frac{F'}{\varrho \frac{v_a^2}{2} L} = \frac{2F'}{Re \nu} = \frac{2 \int_0^{v_* y_1/\nu} f \left(1 - \frac{f}{f_1}\right) d\left(\frac{v_* y}{\nu}\right)}{Re}.$$

Secondo i dati sperimentali, un'espressione sufficientemente accurata della f è quella

$$f = 2,54 \ln \left(\frac{v_* y}{\nu}\right) + 5,56.$$

Il calcolo numerico porta agli spessori adimensionalizzati dello strato limite ed ai coefficienti di resistenza elencati nella tabella 12.3. La dipendenza di C_R dal numero di Reynolds può essere approssimata con l'equazione

$$C_R = \frac{3,91}{(\ln Re)^{2,58}};$$

TABELLA 12.3. - Spessori adimensionalizzati dello strato limite turbolento e relativi coefficienti di resistenza.

$\frac{v_n L}{\nu}$	$\frac{v_n \gamma_1}{\nu}$	C_R
$1 \cdot 10^6$	$0,1925 \cdot 10^3$	$7,15 \cdot 10^{-3}$
2	0,324	6,16
4	0,551	5,35
6	0,755	4,94
8	0,946	4,68
$1 \cdot 10^6$	1,128	4,49
2	1,957	3,95
4	3,42	3,50
6	4,76	3,27
8	6,02	3,12
$1 \cdot 10^7$	7,23	3,01
2	12,83	2,70
4	22,9	2,43
6	32,2	2,29
8	41,1	2,20
$1 \cdot 10^8$	49,6	2,13
2	89,5	1,94
4	162,2	1,77
6	230	1,68
8	295	1,62
$1 \cdot 10^8$	358	1,58
2	655	1,45
4	1201	1,34
6	1715	1,28
8	2210	1,24
$1 \cdot 10^{10}$	2690	1,21

La stessa dipendenza è indicata in figura 12.16. Per completezza, nella figura è tracciato anche l'andamento di C_R in caso di strato limite laminare, secondo la formula

$$C_R = 1,328 \sqrt{\frac{\nu}{v_n L}} = \frac{1,328}{Re^{\frac{1}{2}}}$$

del paragrafo 12.7, ed è rappresentata pure l'influenza sul C_R complessivo della zona laminare iniziale, supponendo che la transizione avvenga per $Re = 3 \cdot 10^5$.

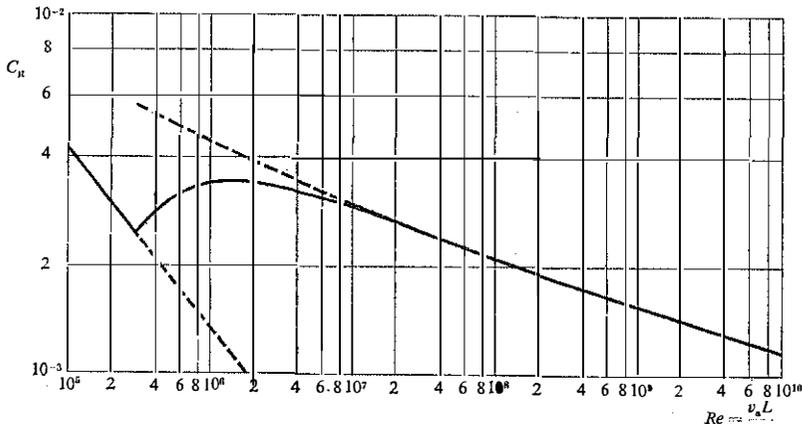


Fig. 12.16. - Coefficiente di resistenza per la lamina piana lambita tangenzialmente da una corrente uniforme. Se sono interessate entrambe le facce della lamina, il coefficiente va raddoppiato.

Nella sostanza, i procedimenti esposti in questo paragrafo sono dovuti a Prandtl, e risalgono al 1932.

12.11. Resistenza del cilindro e della sfera.

Un cilindro circolare, di diametro D , investito da una corrente fluida di velocità iniziale v_a uniforme, diretta normalmente all'asse del cilindro, viene sollecitato da una forza F' per unità di sviluppo lineare che è esprimibile come

$$F' = C_R \rho \frac{v_a^2}{2} D,$$

in termini del coefficiente di resistenza C_R . Tale coefficiente dipende dal numero di Reynolds

$$Re = \frac{v_a D}{\nu}$$

nel modo indicato in figura 12.17.

Se il numero di Reynolds è inferiore a 0,5, il moto è laminare ed è descritto bene dallo schema esposto nel paragrafo 9.13, basato sull'equazione di Oseen. Come si è visto allora, il coefficiente di resistenza vale, in questo campo,

$$C_R = \frac{8\pi}{Re \ln \frac{7,4}{Re}}$$

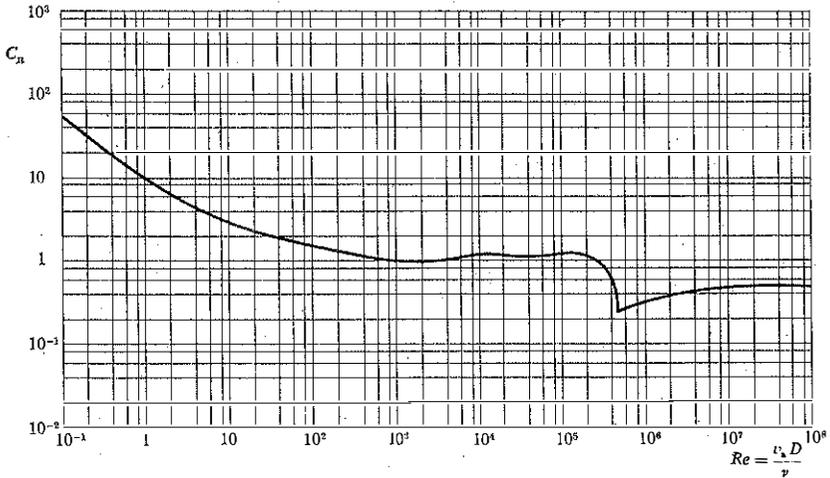


Fig. 12.17. - Coefficiente di resistenza del cilindro circolare investito normalmente da una corrente piana uniforme.

Al crescere del numero di Reynolds il moto cambia progressivamente, come schematizzato in figura 12.18.

Dapprima, oltre $Re = 0,5$, il coefficiente di resistenza decresce sempre più lentamente: si manifestano a poppa, per distacco dello strato limite, due *vortici a delta*, simmetrici. La zona del distacco è situata inizialmente

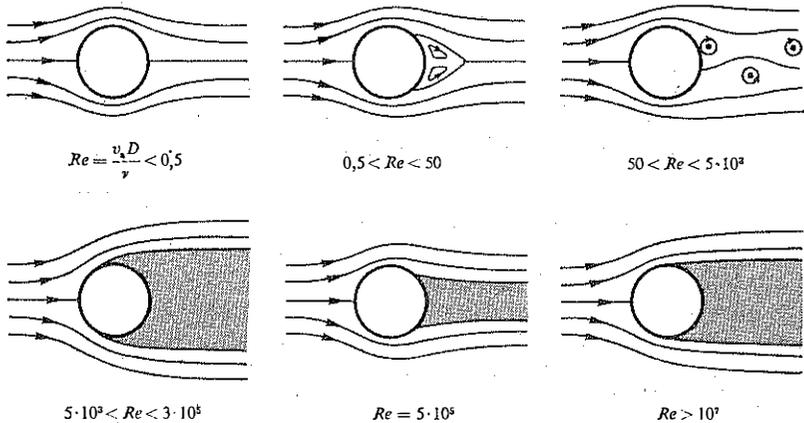


Fig. 12.18. - La corrente che avvolge un cilindro circolare presenta aspetti che si modificano al crescere del numero di Reynolds.

presso il punto di ristagno di poppa, intorno al quale sono massimi i gradienti di pressione non idrostatica capaci di contrastare il moto, e si sposta successivamente verso monte.

Nel campo dei numeri di Reynolds compresi fra 50 e 5000 i vortici di poppa si distaccano alternativamente dal cilindro per venir trascinati a valle dalla corrente generale con velocità poco inferiore alla v_a , e per disgregarsi infine disperdendosi in una turbolenza minuta della scia. Questa particolare forma di scia, con la sua doppia schiera di vortici alternati, è nota come *scia di Kármán*, perché studiata la prima volta da von Kármán nel 1911. Il rapporto fra la distanza reciproca dei due allineamenti di vortici e la distanza degli assi di due vortici consecutivi appartenenti allo stesso allineamento è 0,281: ad esso corrisponde l'assetto dei vortici che presenta la minore instabilità.

Il distacco alternato dei vortici, che hanno verso di rotazione discordi, determina una circolazione della velocità intorno al cilindro che si inverte continuamente nel tempo. In accordo con il teorema di Kutta e Joukowski, ricordato nel paragrafo 11.12, il cilindro è perciò sollecitato da una portanza ortogonale alla v_a e di verso alterno, che può indurre vibrazioni sul cilindro stesso. La cadenza temporale T dei distacchi di vortice dipende dal numero di Reynolds: più precisamente, Kovátsnay ha riscontrato con misure dirette, nel 1949, che il numero di Strouhal

$$St = \frac{D}{Tv_a}$$

varia con il numero di Reynolds come indicato in figura 12.19.

Per numeri di Reynolds superiori a 5000, la scia si presenta di nuovo simmetrica, ma resta turbolenta. Il suo spessore diminuisce progressivamente al crescere del numero di Reynolds, man mano che la zona del distacco dello strato limite laminare originato a prua si sposta verso valle.

In corrispondenza ad $Re = 5 \cdot 10^5$, oppure a valore poco più alto se la turbolenza della corrente in arrivo è particolarmente ridotta, lo strato limite laminare di prua passa a strato turbolento prima del distacco. Quando ciò avviene, lo spessore della scia ed il valore del coefficiente di resistenza cadono a valori minimi.

Per numeri di Reynolds ancora maggiori, la scia torna ad allargarsi fino ad assumere un assetto che resta poi costante. Quest'ultima forma è detta *scia di Helmholtz*, perché si inquadra bene nello schema suggerito da Helmholtz nel 1868, esposto nel paragrafo 8.9. In tali condizioni limite, il fluido si comporta ormai come un fluido ideale. Le linee di corrente che hanno origine nella zona di distacco possono essere considerate luogo di discontinuità della componente tangenziale della velocità. Esse

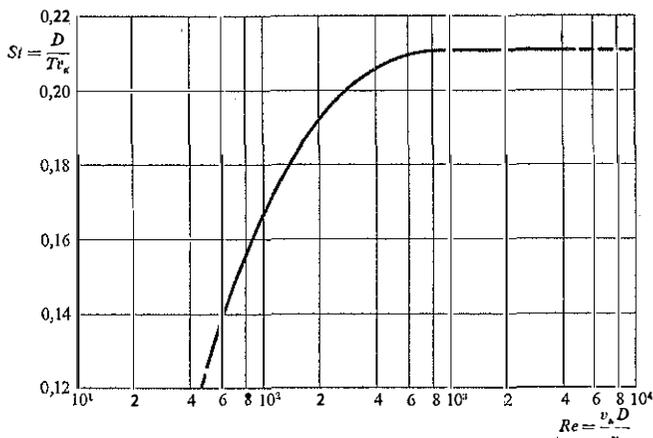


Fig. 12.19. – Il distacco dei vortici costituenti la scia di Kármán diviene sempre più frequente al crescere della velocità della corrente in arrivo.

racchiudono al loro interno la scia, nella quale il fluido in moto turbolento è mediamente fermo. La pressione non idrostatica nella scia è perciò uniforme, ed uguale a quella asintotica di valle.

Nel caso della sfera, l'andamento generale del coefficiente di resistenza all'aumentare del numero di Reynolds è molto simile. Posto

$$Re = \frac{v_a D}{\nu}, \quad F = C_R \varrho \frac{v_a^2}{2} \frac{\pi D^2}{4},$$

in cui D è il diametro della sfera, risulta

$$C_R = \frac{24}{Re}$$

fino ad $Re \simeq 1$, come si è visto nel paragrafo 9.13. Per numeri di Reynolds più elevati, il distacco di vena dalla sfera, inizialmente collocato presso il punto di ristagno di poppa, si sposta progressivamente verso monte. Il coefficiente di resistenza tende qui a divenire indipendente dal numero di Reynolds. Però, intorno ad $Re \simeq 3 \cdot 10^5$, C_R cade bruscamente: lo strato limite diventa turbolento e la zona di distacco viene trascinata verso poppa. A numeri di Reynolds ancora maggiori, la scia assume la forma di scia di Helmholtz, e C_R tende ad un valore costante.

La figura 12.20 riporta l'andamento del coefficiente di resistenza della sfera in funzione del numero di Reynolds.

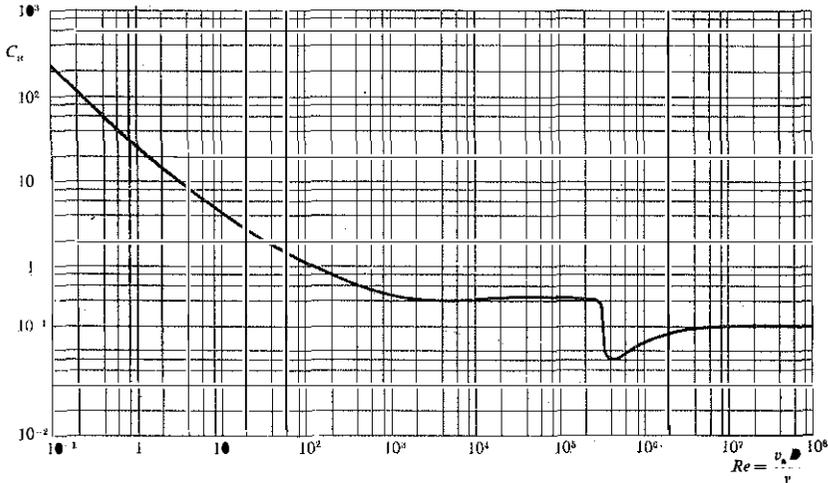


Fig. 12.20. - Coefficiente per la resistenza offerta da una sfera ad una corrente uniforme.

12.12. Controllo dello strato limite.

Benché lo strato limite abbia di solito spessore trascurabile rispetto alle dimensioni del campo interessato dal moto, le caratteristiche generali del moto sono profondamente influenzate dal suo comportamento, in particolare dalle sue modalità di distacco dalla parete solida o dal suo passaggio dal regime laminare a quello turbolento.

Sorge perciò spontanea l'idea di agire direttamente sullo strato limite per ottenere variazioni desiderabili nel restante campo del moto.

Fra i metodi di intervento disponibili, ed utilizzati, figurano quelli previsti per accelerare il fluido nello strato limite, quelli che comportano la rimozione dallo strato limite di fluido già rallentato, e quelli che si basano sull'immissione nello strato limite di sostanze capaci di modificare localmente le caratteristiche meccaniche del fluido ambiente.

L'esempio più vistoso d'impiego del primo metodo è forse quello degli ipersostentatori sulle ali degli aerei, schematizzati in figura 12.21. L'aletta aggiunta frontalmente modifica la direzione della corrente in arrivo per formare un flusso esterno più aderente all'ala principale e per consentire la formazione sul bordo convesso di questa di uno strato limite con velocità maggiori. La fenditura nell'ala principale, da aprirsi appena lo strato limite tende a separarsi presso il bordo di uscita, provoca l'immissione contro la parte terminale dell'ala di nuovo fluido dotato di velocità ele-

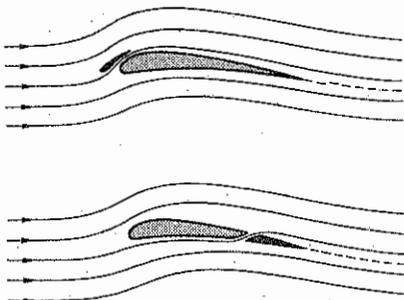


Fig. 12.21. - Esempi di intervento sullo strato limite tendenti ad impedirne il distacco.

vata, e permette che su di essa si formi un nuovo strato limite aderente.

Anche l'aspirazione, attraverso la parete, del fluido presente nello strato limite ha trovato applicazione per le ali di aereo. Data la sua estrema semplicità, si riporta qui, a titolo di esempio, la descrizione dettagliata del moto nello strato limite contro una parete piana porosa, disposta parallelamente alla velocità v_a di arrivo, nel caso che attraverso la parete venga drenata una portata uniformemente distribuita, come indicato in figura 12.22.

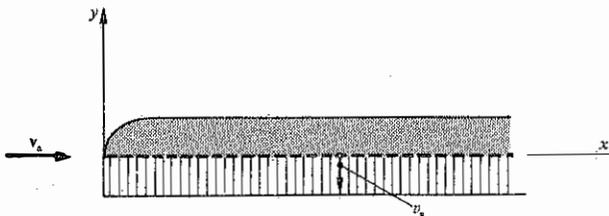


Fig. 12.22. - La crescita dello strato limite è bloccata dalla presenza di un'aspirazione con velocità uniforme v_a attraverso la parete porosa.

In questo caso, con fluido a densità ρ e viscosità cinematica ν uniformi e permanenti, l'equazione differenziale valida entro lo strato limite è quella

$$\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y},$$

già vista nel paragrafo 12.7. Si vuole ancora che v_x tenda a v_a al crescere della distanza y dalla parete, ma le condizioni sulla parete sono adesso

$$v_x = 0, \quad v_y = -v_a$$

con v_a positiva ed uniforme. Si controlla subito che la soluzione cercata è

$$v_x(y) = v_a \left[1 - \exp\left(-\frac{v_a y}{\nu}\right) \right], \quad v_y(y) = -v_a.$$

purché si escluda una fascia contigua al bordo di attacco ad evitare discontinuità su $x=0$ per la v_x .

In base a questo risultato, la velocità parallela alla lastra differisce di meno dell'1% da v_a quando è

$$\frac{v_a y}{\nu} > 5,$$

e cioè quando la distanza dalla lastra è maggiore di

$$5 \frac{\nu}{v_a}.$$

L'aspirazione uniforme contiene dunque lo strato limite entro una fascia di spessore indipendente da x , che è tanto minore quanto più intensa è l'aspirazione stessa.

È interessante notare che lo sforzo trasmesso dal fluido alla lastra vale ora

$$\rho \nu \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} \right]_{y=0} = \rho v_a v_a$$

e risulta, oltre che uniforme, anche indipendente dalla viscosità cinematica.

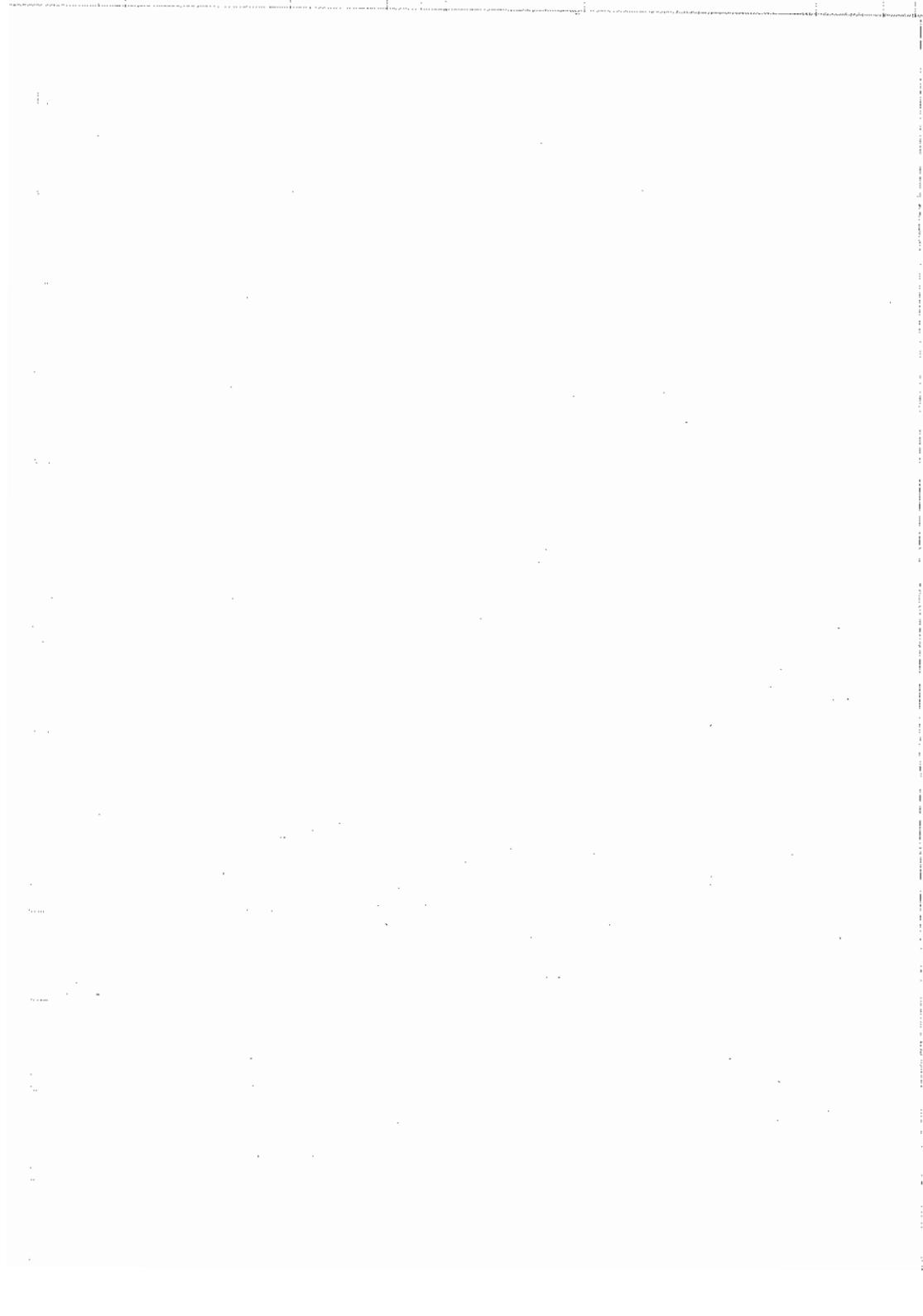
Il terzo sistema di intervento sullo strato limite, che è basato sull'alterazione delle caratteristiche meccaniche del mezzo, è stato impiegato con successo quando il fluido ambiente è allo stato liquido. L'immissione nello strato limite di modeste portate di fluidi aventi molecole particolarmente lunghe può ritardare lo sviluppo della turbolenza, e ridurre così le resistenze al moto.

Riferimenti citati.

- BLASIUS, PAUL RICHARD HEINRICH, *Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung*, Z. Math. Phys., 1908, pp. 1-37.
- EKMAN, VAGN WALFRID, *On the influence of the earth's rotation on ocean currents*, Arkiv för matematik, astronomi och fysik, n:o 11, 1905.
- HIEMENZ, K., *Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszyylinder*, Dingl. Polytech. J., 1911, pp. 321-324, 344-348, 357-362, 372-376, 391-393, 407-410.

- KÁRMÁN, THEODOR VON, *Über den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt*, Nachr. Wiss. Ges. Göttingen, I parte: 1911, pp. 509-517; II parte: 1912, pp. 547-556.
- KOVÁSZNAY, L. S. G., *Hot-wire investigation of the wake behind cylinders at low Reynolds numbers*, Proc. Roy. Soc., 1949, pp. 174-190.
- PRANDTL, LUDWIG, *Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung*, Verhandlungen des III intern. Mathematikerkongresses, Heidelberg, 1904, pp. 484-491.
— *Zur turbulenten Strömung in Rohren und längs Platten*, Ergebnisse der Aerodyn. Versuchsanst. Göttingen, 1932, pp. 18-29.
- RAYLEIGH, JOHN WILLIAM STRUTT LORD, *On the stability, or instability, of certain fluid motions*, Proc. Lond. Math. Soc., 1880, pp. 57-70.
- STOKES, GEORGE GABRIEL, *On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums*, Trans. Camb. Phil. Soc., 1851, pp. 8-106.

PARTE SECONDA



CAPITOLO TREDICESIMO

MOTO UNIFORME NELLE CONDOTTE IN PRESSIONE

13.1. Definizioni.

Come si è visto nel paragrafo 9.7, si dice *uniforme* il moto di un fluido entro un condotto cilindrico quando i valori e la distribuzione della velocità sono gli stessi contemporaneamente in qualunque sezione perpendicolare all'asse del condotto. Se, come si verifica usualmente in campo tecnico, il regime del moto è turbolento, le velocità considerate sono le *velocità medie locali ed istantanee*, in conformità a quanto si è detto nel paragrafo 10.2.

Il movimento uniforme comporta necessariamente la *costanza della portata* lungo il condotto, ma non la sua invarianza nel tempo. Se invece il moto è anche *permanente*, la portata resta costante nello spazio e nel tempo.

Il moto di un fluido a densità costante in un tubo cilindrico in pressione, dopo un tratto iniziale influenzato dalle condizioni d'imbocco, è in grado di raggiungere assetto uniforme e permanente. A tale situazione ci si riferisce in questo capitolo.

Si ricorda che il *numero di Reynolds* della corrente si scrive nella forma

$$Re = \frac{\rho UD}{\mu} = \frac{UD}{\nu} \quad [13.1]$$

essendo ρ e μ la densità e la viscosità dinamica del fluido, $\nu = \mu/\rho$ la viscosità cinematica, U la velocità media nella sezione e D il diametro della sezione circolare; per forme diverse dalla circolare la corrispondente

lunghezza di riferimento è $4R$, indicando con

$$R = \frac{\Omega}{B} \quad [13.2]$$

il *raggio medio* o *raggio idraulico* della sezione, rapporto fra l'area ed il perimetro bagnato, già introdotto al paragrafo 9.7.

Si ricorda ancora (cfr. paragrafo 10.1) che il moto si realizza in regime laminare se $Re \leq 2300 \div 2500$, in regime turbolento se $Re \geq 2500$; l'influenza della forma della sezione su tali limiti è molto modesta e resta contenuta entro il campo di variazione indicato.

13.2. Distribuzione delle tensioni. Perdite di carico distribuite.

Per ottenere la distribuzione degli sforzi tangenziali τ in una sezione normale della corrente uniforme si consideri un tronco di condotto cilindrico ed al suo interno una superficie equidistante dal contorno e limitata da due sezioni piane distanti L fra loro (fig. 13.1). La massa racchiusa

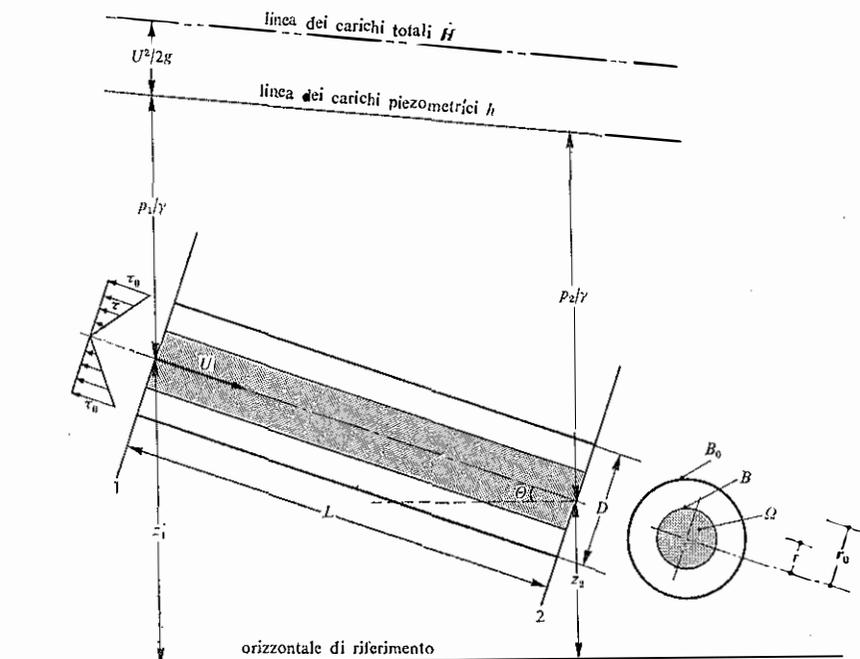


Fig. 13.1. - Moto uniforme in un condotto in pressione.

da tale superficie e dalle sezioni 1 e 2 di area Ω e di perimetro B è soggetta alle seguenti forze nella direzione del moto: (a) il risultante τBL delle tensioni tangenziali sul contorno che si oppongono al moto (τ è in generale il valore medio della tensione sul contorno B ; essa è uniforme su B se la sezione è circolare o rettangolare infinitamente larga), (b) la componente del peso $\gamma\Omega L \sin \theta$, (c) il risultante delle pressioni normali agenti sulle sezioni 1 e 2, sulle quali si può ritenere idrostatica la distribuzione di p per quanto detto nel paragrafo 11.2; tale risultante vale $(p_1 - p_2)\Omega$ essendo p_1 e p_2 i valori di p sui baricentri delle due sezioni.

Essendo nulla la variazione della quantità di moto dovuta alle velocità di trasporto (velocità medie locali), il risultante delle forze parallele predette dev'essere nullo, ossia deve riuscire

$$\tau BL = \gamma\Omega L \sin \theta + (p_1 - p_2)\Omega = \gamma\Omega \left(z_1 - z_2 + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} \right).$$

Poiché la distribuzione della pressione è idrostatica sulle sezioni 1 e 2, i carichi piezometrici h_1 e h_2 sono localmente uniformi. Segue così

$$\frac{\tau B}{\gamma\Omega} = \frac{h_1 - h_2}{L}. \quad [13.3]$$

Data la permanenza e l'uniformità del moto, il primo membro è costante, e tale risulta quindi anche il secondo che rappresenta la *perdita di carico piezometrico* per unità di lunghezza della corrente, indicata con il simbolo i . Come si è visto nel paragrafo 9.7, essa è definita, in generale, dalla

$$i = -dh/ds \quad [13.4]$$

essendo s la coordinata misurata lungo l'asse della corrente.

Si ricorda pure che nel moto uniforme la pendenza motrice i coincide con la *cadente del carico effettivo*

$$j = -dH/ds, \quad [13.5]$$

per l'invarianza dell'altezza cinetica, sicché

$$i = \frac{h_1 - h_2}{L} = \frac{H_1 - H_2}{L} = j. \quad [13.6]$$

Dall'eq. [13.3] si ottiene quindi

$$\tau = \gamma i (\Omega/B) = \gamma j R$$

essendo R il raggio idraulico della sezione Ω . Analogamente, per la sezione

totale Ω_0 del condotto, di raggio $R_0 = \Omega_0/B_0$, vale l'equazione

$$\tau_0 = \gamma j R_0 \quad [13.7]$$

da cui deriva la

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{R}{R_0}$$

che mette in evidenza la variazione lineare della tensione tangenziale media con il raggio idraulico.

Per la *sezione circolare* è:

$$R_0 = r_0/2 = D/4, \quad R = r/2;$$

e quindi

$$\tau/\tau_0 = r/r_0. \quad [13.8]$$

Per la *sezione rettangolare larghissima* è:

$$R_0 = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{2by_0}{2(b + y_0)} = y_0, \quad R = y_0 - y;$$

e quindi

$$\tau/\tau_0 = 1 - y/y_0 \quad [13.9]$$

essendo y la distanza dalla parete di un punto generico ed y_0 la distanza dell'asse, come mostra la figura 13.2.

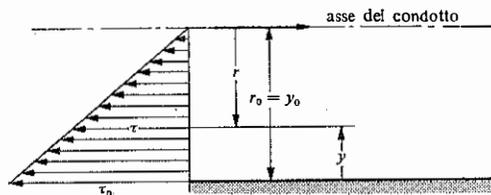


Fig. 13.2. - Distribuzione degli sforzi tangenziali.

La distribuzione della tensione τ è indipendente dal regime del moto, sia esso laminare o turbolento. In quest'ultimo caso il riferimento va fatto ovviamente ai valori medi temporali di τ , somma della tensione laminare dovuta alla viscosità del fluido (cfr. cap. 9) importante solo in una sot-

tile regione vicina alla parete, e della tensione turbolenta (cfr. cap. 10) dominante in tutto il nucleo della corrente. Si veda, ad esempio, il rilievo sperimentale riportato nella figura 13.3.

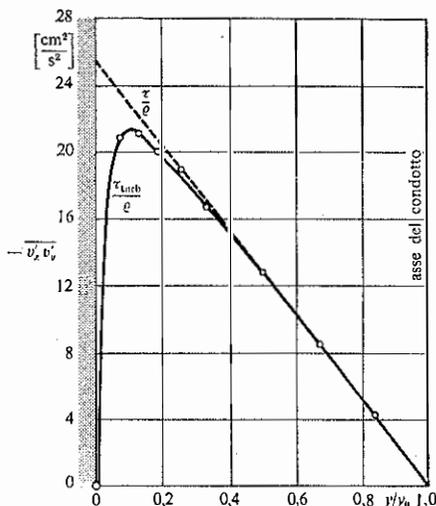


Fig. 13.3. - Misure delle componenti turbolente di velocità in un condotto e valutazione della tensione turbolenta (Reichardt, 1938).

13.3. L'equazione del moto uniforme.

Nel paragrafo 9.7, con riferimento al moto laminare uniforme entro condotti lisci, è stata introdotta la definizione del *coefficiente di perdita distribuita* o *coefficiente di resistenza* λ con la

$$j = \frac{\lambda}{4R} \frac{U^2}{2g}.$$

La stessa definizione viene mantenuta inalterata quando il moto è turbolento e qualunque sia la scabrezza e la forma della condotta. In particolare, per le condotte di sezione circolare, la relazione precedente assume la forma

$$j = \frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2g} \quad [13.10]$$

che si richiama sostanzialmente alle formule proposte da Weisbach nel 1845 e da Darcy nel 1858. Essa costituisce l'*equazione del moto uniforme*.

Le numerose misure sperimentali delle perdite di carico dovute al moto uniforme, eseguite fin dal secolo scorso su condotte di sezione circolare e sviluppate particolarmente nel primo '900, hanno mostrato che il coefficiente di resistenza λ dipende in generale da grandezze che, tenuto conto dei criteri dell'analisi dimensionale, si possono scrivere in termini del numero di Reynolds e di parametri atti a definire adimensionalmente la scabrezza della parete. La dipendenza di λ da tali fattori è espressa da *leggi di resistenza*, alla cui rassegna sono dedicati i paragrafi che seguono.

13.4. Le leggi di resistenza dei tubi lisci e scabri.

Se il regime del moto uniforme è *laminare*, l'integrazione dell'equazione di Navier nei tubi di sezione circolare porta alla legge

$$\lambda = \frac{64\mu}{\rho \bar{U} D} = \frac{64}{Re} \quad [13.11]$$

come si è visto nel paragrafo 9.7.

Tale relazione è rappresentata nel diagramma logaritmico della figura 13.8 dalla retta situata nel settore a sinistra di $Re_{crit} \cong 2300$. L'indagine sperimentale ha permesso di estenderne la validità al caso dei tubi scabri, purché la rugosità sia modesta in confronto al diametro D .

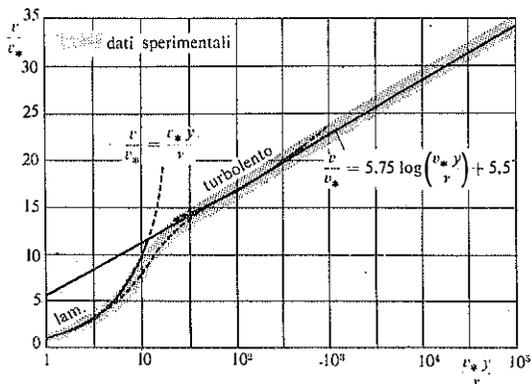


Fig. 13.4. – Distribuzione della velocità nei tubi lisci.

Se il regime del moto uniforme è *turbolento* le leggi di resistenza possono pure essere ricavate partendo dalle leggi di distribuzione della velocità. Infatti si osserva che, introducendo l'espressione

$$\tau_0 = \gamma j R_0 = \gamma j (D/4)$$

nell'equazione del moto uniforme si ha

$$\tau_0 = \frac{1}{8} \rho U^2 \lambda$$

da cui, evidenziando la velocità di attrito $v_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$, introdotta nel paragrafo 10.6, segue

$$\frac{U}{v_*} = \sqrt{\frac{8}{\lambda}} \quad [13.12]$$

ossia

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \frac{1}{\Omega_0} \int_{\Omega_0} \frac{v}{v_*} d\Omega$$

nella quale v indica la velocità locale ed Ω_0 l'area della sezione. Il risultato è valido sia per il moto laminare, sia per quello turbolento. In quest'ultimo caso si deve fare riferimento ai valori medi locali delle grandezze in gioco.

Per i *tubi circolari lisci* è stata già richiamata, nel paragrafo 10.6, la legge logaritmica di distribuzione delle velocità medie locali

$$\frac{v}{v_*} = 2,5 \ln \left(\frac{y}{y_*} \right) + 5,5$$

dove y indica la distanza dalla parete ed è $y_* = \nu/v_*$.

Nel caso dei *tubi circolari scabri*, una serie classica di esperienze fu eseguita da Nikuradse nel 1933, impiegando condotte rese artificialmente scabre con l'applicazione sulla parete interna di sabbie omogenee di diametro assegnato ε . In tal caso il legame fra v ed y , almeno nella regione prossima alla parete, è del tipo

$$\frac{v}{v_*} = f \left(\frac{y}{y_*}, \frac{y}{\varepsilon} \right).$$

Il primo parametro, $y/y_* = v_* y/\nu$, mette in conto gli effetti della viscosità del fluido ed ha un'influenza progressivamente minore, rispetto al secondo, al crescere del numero di Reynolds. Nikuradse verificò sperimentalmente che quando il rapporto

$$\frac{y}{y_*} \cdot \frac{y}{\varepsilon} = \frac{v_* \varepsilon}{\nu}$$

supera 70, la distribuzione della velocità nel tubo scabro dipende essenzialmente dal parametro di scabrezza y/ε ed è rappresentata dalla legge

logaritmica

$$\frac{v}{v_*} = 2,5 \ln \left(\frac{y}{\varepsilon} \right) + 8,5$$

analoga a quella dei tubi lisci e con lo stesso valore 2,5 del coefficiente moltiplicatore del termine logaritmico. Il campo di validità di questa equazione è detto regime del *moto assolutamente turbolento*.

Passando dai logaritmi naturali ai decimali le leggi di distribuzione della velocità assumono le espressioni

$$\frac{v}{v_*} = 5,75 \log \left(\frac{v_* y}{\nu} \right) + 5,5 \quad [13.13]$$

$$\frac{v}{v_*} = 5,75 \log \left(\frac{y}{\varepsilon} \right) + 8,5 \quad [13.14]$$

rispettivamente per i tubi lisci (fig. 13.4) e per i tubi scabri con moto assolutamente turbolento (fig. 13.5).

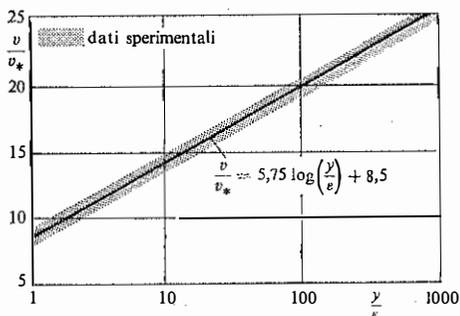


Fig. 13.5. - Distribuzione della velocità nei tubi scabri in moto assolutamente turbolento.

Basta ora mediare tali distribuzioni di velocità nella sezione circolare di diametro D per ottenere le corrispondenti leggi di resistenza:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \frac{U}{v_*} = \frac{1}{\sqrt{8}} \frac{4}{\pi D^2} \int_0^{D/2} \left(\frac{v}{v_*} \right) 2\pi \left(\frac{D}{2} - y \right) dy. \quad [13.15]$$

Nel caso dei tubi lisci risulta

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = A \log \left(\frac{D v_*}{\nu} \right) + \text{cost} = A \log \left(\frac{D U}{\nu} \cdot \frac{v_*}{U} \right) + \text{cost}$$

da cui, tenendo conto che $v_*/U = \sqrt{8/\lambda}$, segue

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = A \log(Re\sqrt{\lambda}) + B_i. \quad [13.16]$$

In base alla distribuzione logaritmica della velocità i valori delle costanti risulterebbero

$$A = \frac{5,75}{\sqrt{8}} = 2,03 \quad \text{e} \quad B_i = -0,91.$$

Le misure sperimentali del coefficiente di resistenza λ in funzione del numero di Reynolds, eseguite sui tubi lisci, oltre che da Nikuradse (1932), da Nusselt (1910), Stanton e Pannel (1914), Jakob ed Erk (1924), Schiller e Hermann (1930), e messe a confronto fra loro dallo stesso Nikuradse, hanno suggerito di assumere

$$A = 2,0$$

con approssimazione alla prima cifra decimale, e di modificare il valore della costante B_i in

$$B_i = -0,8.$$

La differenza dai valori precedenti sono connesse agli scostamenti della distribuzione effettiva della velocità dalla legge puramente logaritmica. Si veda in proposito il paragrafo 13.9.

Con questi ultimi valori dei coefficienti si ha

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,0 \log\left(\frac{Re\sqrt{\lambda}}{2,51}\right) \quad [13.17]$$

che costituisce la *legge di resistenza dei tubi circolari lisci* ed è conosciuta come equazione di Prandtl-Kármán.

Nel caso dei tubi scabri, con rugosità omogenea di sabbia di altezza ε , operando l'integrazione nella sezione della distribuzione di velocità [13.14], si ottiene

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = A \log\left(\frac{D}{\varepsilon}\right) + B_r. \quad [13.18]$$

Nikuradse (1933) ha ricavato i valori

$$A = 2,0 \quad \text{e} \quad B_r = 1,14$$

dalle sue misure dirette di λ in funzione di Re e di ε/D . L'equazione pre-

cedente diventa quindi

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,0 \log \frac{3,71 D}{\varepsilon} \quad [13.19]$$

ed essa rappresenta la *legge di resistenza dei tubi circolari scabri nel moto assolutamente turbolento*, nota anche come equazione di Prandtl-Nikuradse.

I risultati sperimentali di Nikuradse (1933) sui tubi scabri sono rappresentati nel diagramma bilogaritmico della figura 13.6. La curva $\varepsilon = 0$,

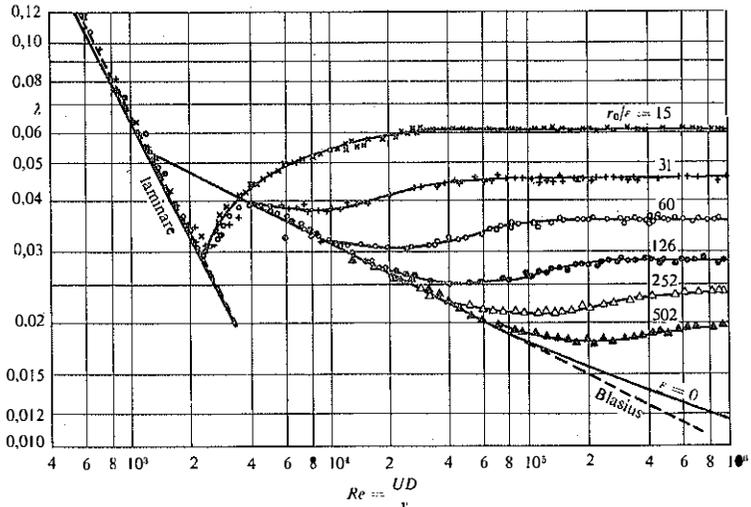


Fig. 13.6. - Misure del coefficiente di resistenza in tubi resi artificialmente scabri (Nikuradse, 1933).

che fornisce i valori di λ in funzione di Re nel regime turbolento di tubo liscio è stata tracciata utilizzando l'eq. [13.17]. Alcuni valori numerici sono riportati nella tabella 13.1.

Per $Re < 10^5$ la funzione $\lambda = \lambda(Re)$ di *tubo liscio* è espressa con buona approssimazione anche dall'equazione di Blasius (1913)

$$\lambda = 0,3164 Re^{-0,25} \quad [13.20]$$

che può essere dedotta dalla [13.15] assumendo, per la distribuzione della velocità, una legge di potenze proposta da Prandtl nella forma

$$\frac{v}{v_*} = \left(\frac{v_* y}{\nu} \right)^{1/4}$$

TABELLA 13.1. - Valori del coefficiente di resistenza λ per i tubi lisci.

Re	λ	Re	λ	Re	λ
$3,5 \cdot 10^3$	0,0415	$5,0 \cdot 10^4$	0,0209	$5,0 \cdot 10^5$	0,0131
4,0	0,0399	6,0	0,0201	6,0	0,0127
4,5	0,0385	7,0	0,0194	7,0	0,0124
		8,0	0,0189	8,0	0,0121
$5,0 \cdot 10^3$	0,0374	9,0	0,0184	9,0	0,0119
6,0	0,0355				
7,0	0,0340	$1,0 \cdot 10^6$	0,0180	$1,0 \cdot 10^6$	0,0116
8,0	0,0328	1,2	0,0173	1,5	0,0109
9,0	0,0318	1,4	0,0168	2,0	0,0104
		1,6	0,0163	3,0	0,0097
$1,0 \cdot 10^4$	0,0309	1,8	0,0160	4,0	0,0093
1,2	0,0294				
1,4	0,0283	$2,0 \cdot 10^5$	0,0156	$5,0 \cdot 10^6$	0,0090
1,6	0,0274	2,5	0,0150	6,0	0,0087
1,8	0,0266	3,0	0,0145	7,0	0,0085
		3,5	0,0140	8,0	0,0083
$2,0 \cdot 10^4$	0,0259	4,0	0,0137	$1,0 \cdot 10^7$	0,0081
2,5	0,0245				
3,0	0,0235				
3,5	0,0227				
4,0	0,0220				

La curva dei tubi lisci è rappresentabile anche con altre espressioni empiriche, fra cui ricordiamo quella proposta da Nikuradse (1932)

$$\lambda = 0,0032 + 0,221 Re^{-0,237} \quad [13.21]$$

che si raccorda bene con la curva di Blasius.

Per i *tubi omogeneamente scabri* l'andamento sperimentale di λ in funzione di Re è rappresentato, per valori della scabrezza relativa $\varepsilon/D = \text{cost}$ (o, inversamente, $r_0/\varepsilon = \text{cost}$), dalle curve interpolari della figura 13.6. Al crescere di Re , oltre il valore 2500 e fino a limiti che sono tanto più bassi quanto maggiore è la scabrezza relativa, il comportamento dei tubi moderatamente scabri coincide con quello di tubo liscio, perché la scabrezza resta sommersa nello strato aderente alla parete dominato dalla viscosità. Si assume convenzionalmente il limite di questo strato ad una distanza δ dalla parete definita dalla

$$\frac{v_* \delta}{\nu} = 11,6$$

come mostra la figura 13.4.

Con scabrezze più elevate o, a parità di scabrezza relativa, con valori più alti del numero di Reynolds, si presenta un regime *intermedio*, o di *transizione*, nel quale λ dipende sia da Re sia da ε/D . Le curve sperimentali di Nikuradse $\varepsilon/D = \text{cost}$ (contrassegnate con i valori di r_0/ε nella figura 13.6), dopo il distacco dalla curva dei tubi lisci, raggiungono un minimo, si rialzano un poco e diventano infine parallele all'asse delle ascisse nel campo del moto assolutamente turbolento, caratterizzato dall'influenza su λ soltanto della scabrezza del tubo.

I limiti di separazione fra i diversi regimi sono stati definiti sperimentalmente in termini del parametro $v_* \varepsilon / \nu$, pari a $Re \sqrt{\lambda/8} (\varepsilon/D)$, come segue:

tubo idraulicamente liscio

$$\frac{v_* \varepsilon}{\nu} < 5; \quad Re \sqrt{\lambda} (\varepsilon/D) < 14,$$

tubo scabro con moto assolutamente turbolento

$$\frac{v_* \varepsilon}{\nu} \geq 70; \quad Re \sqrt{\lambda} (\varepsilon/D) \geq 200.$$

13.5. Le leggi di resistenza dei tubi commerciali.

Il moto turbolento intermedio tra il regime di tubo liscio e quello assolutamente turbolento di tubo scabro presenta un comportamento diverso a seconda del tipo e della distribuzione della scabrezza alla parete del condotto. Le esperienze di Nikuradse, eseguite come si è detto su tubi con scabrezza omogenea di sabbia, avevano messo in luce per tubi moderatamente scabri la possibilità del comportamento di tubo liscio entro limitati valori del numero di Reynolds. Esperienze eseguite da diversi ricercatori su tubi commerciali dotati di una scabrezza *eterogenea*, come i tubi di ghisa, di acciaio con e senza rivestimenti, di cemento ecc., hanno dimostrato che le curve interpolari del coefficiente di attrito λ , al crescere di Re , si distaccano subito ed in modo gradualmente crescente dalla curva dei tubi lisci, con un andamento che è ben approssimato dalle curve (b) a scabrezza relativa costante della figura 13.7. La differenza fra la forma delle curve (a) e quella delle curve (b) della figura 13.7 è legata al fatto che nei tubi commerciali — curve (b) — le asperità alla parete hanno altezze

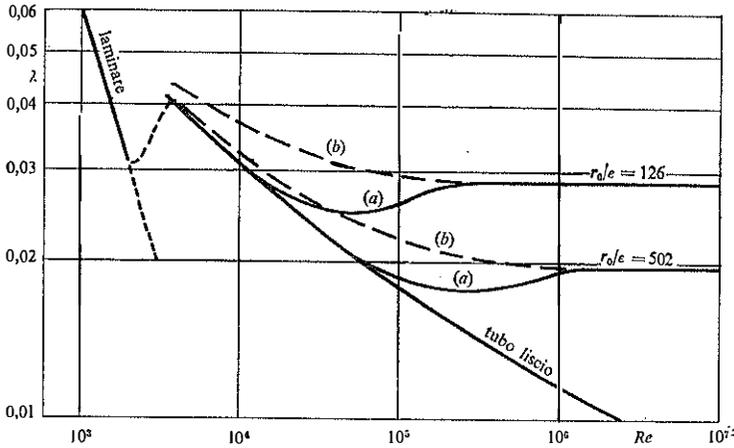


Fig. 13.7. - Andamento del coefficiente di resistenza λ in funzione del numero di Reynolds: in tubi con scabrezza artificiale omogenea, curve (a), ed in tubi commerciali, curve (b).

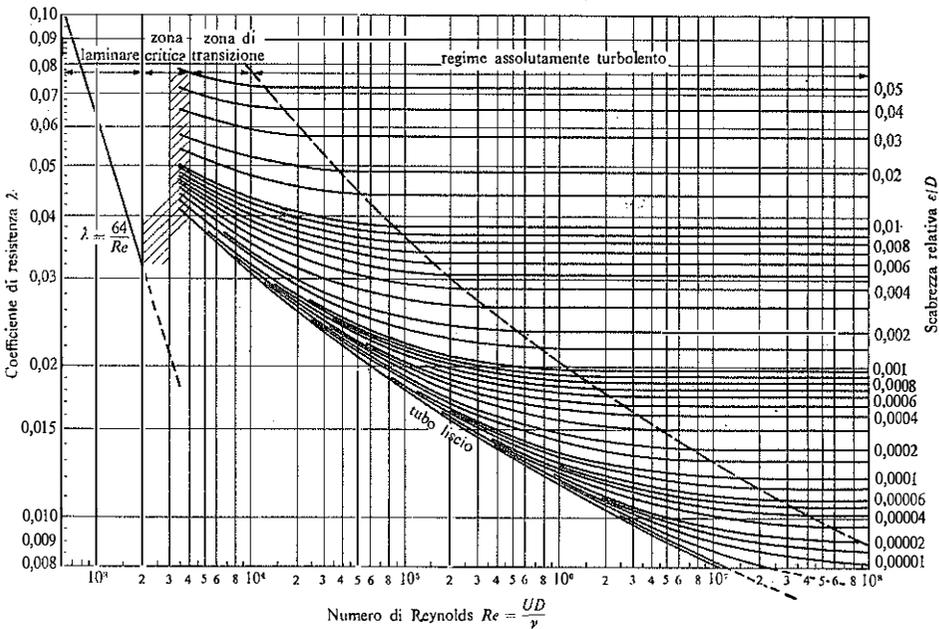


Fig. 13.8. - Diagramma di Moody: curve $\lambda = \lambda(Re, \epsilon/D)$ ottenute dalla formula di Colebrook con diversi valori costanti della scabrezza relativa ϵ/D .

variabili e distribuite statisticamente entro un certo spettro così da poter influire con qualche punta sul nucleo turbolento anche con bassi valori di Re . Nel regime assolutamente turbolento, confrontando i valori di λ dei tubi commerciali con quelli dei tubi artificialmente scabri di Nikuradse, è possibile individuare una scabrezza ε per diversi tipi di parete, definendola come l'*altezza equivalente di sabbia* che darebbe luogo allo stesso λ nel moto assolutamente turbolento.

Colebrook (1939), per interpretare i risultati sperimentali sui tubi commerciali (Colebrook e White, 1937) rispettando da un lato la condizione asintotica di tubo liscio e dall'altro quella di moto assolutamente turbolento di tubo scabro, ha proposto la seguente formula semiempirica

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2,0 \log \left(\frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} + \frac{\varepsilon}{3,71 D} \right). \quad [13.22]$$

Essa si riduce alla [13.17] se $\varepsilon/D \rightarrow 0$, cioè per tubi lisci, e alla [13.19] se Re ha valori abbastanza elevati da rendere il primo termine fra parentesi trascurabile rispetto al secondo che mette in conto l'effetto della scabrezza.

In un diagramma logaritmico come quello della figura 13.8, Moody (1944) ha rappresentato un fascio di curve $\varepsilon/D = \text{cost}$ secondo l'eq. [13.22] e le ha confrontate con diversi risultati sperimentali ottenuti su tubi commerciali ricavandone i valori della scabrezza equivalente. Con l'impiego di tale diagramma e di una scala di scabrezza come quella riportata nella tabella 13.2, è immediato il calcolo del coefficiente di attrito λ per date condizioni.

Dell'equazione implicita [13.22] di Colebrook sono state proposte diverse semplificazioni. Per tubi poco scabri, tali che sia $Re \sqrt{\lambda_0}(\varepsilon/D) \leq 20 \div 25$, è conveniente l'impiego della seguente equazione semplificata di Supino (1951)

$$\lambda = \lambda_0 + 0,17 Re \lambda_0^2(\varepsilon/D) \quad [13.23]$$

nella quale λ_0 indica il valore di λ nei tubi lisci per il dato Re .

Nel regime di moto *assolutamente turbolento*, valori di λ in funzione della scabrezza relativa ε/D , ottenuti dall'eq. [13.19], che si riscrive nella forma

$$\lambda = \left[2,0 \log \left(\frac{3,71 D}{\varepsilon} \right) \right]^{-2},$$

TABELLA 13.2. - Coefficienti di scabrezza per le tubazioni.

Tipo di condotta	Scabrezza omogenea equivalente ϵ (mm)	Bazin γ_B (m^3)	Kutter m_K (m^3)	Gaukler-Strickler k_S ($m^3 s^{-1}$)
1 - Tubazioni tecnicamente lisce (vetro, ottone o rame trafilato, resina)	0 \div 0,02	—	—	—
2 - Tubazioni in acciaio				
a) rivestimenti degradabili nel tempo	0,05	—	—	120
- tubi nuovi, verniciati per centrifugazione	0,10 \div 0,15	< 0,06	< 0,12	100
- bitumati per immersione	0,2 \div 0,4	0,10	0,15	90
- in servizio corrente con leggera ruggine	0,5 \div 0,6	0,16	0,20 \div 0,25	85 \div 80
- con asfalto o catrame applicati a mano	1,0 \div 3,0	0,23	0,30 \div 0,35	75 \div 70
- con tubercolizzazione diffusa				
b) rivestimenti non degradabili	0,05 \div 0,15	< 0,06	< 0,12	120
- cemento applicato per centrifugazione				
3 - Tubazioni in lamiera saldata				
- in buone condizioni	0,2 \div 0,3	0,10	0,15	90
- in servizio corrente, con incrostazioni	0,4 \div 1,0	0,16	0,20 \div 0,25	87 \div 75
4 - Tubazioni in lamiera chiodata				
- 1 fila di chiodi longitudinali	0,3 \div 0,4	0,10	0,18	90 \div 85
- 2 file di chiodi longitudinali	0,6 \div 0,7	0,16	0,25	85 \div 80
- Idem, con incrostazioni fino a	3,0	0,30	0,35	70
- 4-6 file di chiodi longitudinali	2,0	0,23	0,30	75
- 6 file di chiodi longitudinali + 4 trasversali	3,0	0,30	0,35	70
- Idem, con incrostazioni fino a	5,0	0,36	0,45	65
5 - Tubazioni in ghisa				
a) rivestimenti degradabili nel tempo	0,15	0,06	0,12	100
- nuove, rivestite intern. con bitume	0,2 \div 0,4	0,10	0,15	90
- nuove, non rivestite	0,4 \div 1,0	0,16	0,20 \div 0,25	85 \div 75
- con lievi incrostazioni				
- in servizio corrente, parzialmente arrugginite	1,0 \div 2,0	0,23	0,35	75 \div 70
- fortemente incrostate	3,0 \div 5,0	0,36	0,45	65
b) rivestimenti non degradabili	0,10	< 0,06	< 0,12	105
- cemento applicato per centrifugazione				
6 - Tubazioni in cemento				
- cemento-amianto	0,10	< 0,06	< 0,12	105
- cem. arm. nuove, intonaco perfettamente liscio	0,10 \div 0,15	0,06	0,12	100
- cem. arm. con intonaco liscio, in servizio da piú anni fino a	2,0	0,23	0,35	70
- gallerie con intonaco di cemento, a seconda del grado di finitura	2,0 \div 5,0	0,23 \div 0,36	0,30 \div 0,45	70 \div 65

TABELLA 13.3. - Valori del coefficiente di resistenza λ nel regime assolutamente turbolento.

D (mm)	ϵ (mm)						
	0,1	0,2	0,4	1,0	2,0	3,0	5,0
30	0,0269	0,0332	0,0418	0,0597	0,0821	0,1015	—
40	0,0249	0,0303	0,0379	0,0530	0,0715	0,0871	—
50	0,0234	0,0284	0,0352	0,0486	0,0646	0,0780	0,1015
60	0,0223	0,0269	0,0332	0,0454	0,0597	0,0715	0,0920
80	0,0207	0,0249	0,0303	0,0409	0,0530	0,0628	0,0795
100	0,0196	0,0234	0,0284	0,0379	0,0486	0,0571	0,0715
125	0,0186	0,0221	0,0266	0,0352	0,0447	0,0522	0,0646
150	0,0178	0,0211	0,0253	0,0332	0,0418	0,0486	0,0597
200	0,0167	0,0196	0,0234	0,0303	0,0379	0,0436	0,0530
250	0,0159	0,0186	0,0221	0,0284	0,0352	0,0403	0,0486
300	0,0153	0,0178	0,0211	0,0269	0,0332	0,0379	0,0454
350	0,0148	0,0172	0,0203	0,0258	0,0316	0,0360	0,0429
400	0,0144	0,0167	0,0196	0,0249	0,0303	0,0344	0,0409
500	0,0137	0,0159	0,0186	0,0234	0,0284	0,0321	0,0379
600	0,0132	0,0153	0,0178	0,0223	0,0269	0,0303	0,0356
700	0,0128	0,0148	0,0172	0,0214	0,0258	0,0290	0,0339
800	0,0125	0,0144	0,0167	0,0207	0,0249	0,0279	0,0325
1000	0,0120	0,0137	0,0159	0,0196	0,0234	0,0261	0,0303
1500	0,0111	0,0127	0,0146	0,0178	0,0211	0,0234	0,0269
2000	0,0105	0,0120	0,0137	0,0167	0,0196	0,0217	0,0249

sono riportati nella tabella 13.3. Questa equazione ha trovato valide conferme, oltre che nel comportamento delle scabrezze naturali della maggior parte dei materiali costituenti i tubi commerciali, anche in quello di pareti con scabrezze di forme particolari distribuite con regolarità o di dimensioni notevoli rispetto al raggio idraulico della sezione. Sulle grosse scabrezze si veda il paragrafo 13.9, relativo alle condotte di sezione non-circolare.

13.6. Formule antiche.

In alcune applicazioni teniche, e particolarmente nel calcolo degli acquedotti, si preferiva utilizzare l'equazione del moto uniforme nella forma

$$\frac{h_1 - h_2}{L} = \beta_r \frac{Q^2}{D^5} \quad [13.24]$$

mettendo in evidenza la portata $Q = U\Omega_0$ ed impiegando un coefficiente di resistenza dimensionale β_r , detto di Darcy, da esprimere in $m^{-1} s^2$.

Prima che fosse approfondita l'indagine sulla dipendenza del coefficiente di attrito dal numero di Reynolds e dalla scabrezza relativa, nella seconda metà del secolo scorso diversi sperimentatori avevano proposto formule empiriche per il calcolo di β_r in funzione soltanto della natura della parete.

Fra le più note, sono da ricordare le formule

(Bazin)	$\beta_r = 0,000857(1 + 2\gamma_B/\sqrt{D})^2;$	γ_B in m^3
(Kutter)	$\beta_r = 0,000648(1 + 2m_K/\sqrt{D})^2;$	m_K in m^3
(Gauckler-Strickler)	$\beta_r = 10,3/k_S^2 D^3;$	k_S in $m^3 s^{-1}$

La tabella 13.2 riporta anche le scale dei parametri dimensionali di scabrezza γ_B , m_K , k_S .

Si noti che queste formule, di origine europea, comportano tutte una equazione quadratica delle resistenze, del tipo

$$j = K_r' Q^2.$$

Diversa è una formula empirica che, nella prima metà di questo secolo, trovò largo impiego nella progettazione degli acquedotti in America: la formula di Hazen-Willimas. Essa è del tipo

$$j = K_r'' Q^{1,85}$$

e mette in conto evidentemente, se si confronta con l'equazione del moto uniforme, una dipendenza del coefficiente di resistenza dalla velocità, ossia dal numero di Reynolds.

La massima influenza di Re , nel regime turbolento, si verifica nel campo dei tubi lisci dove, per bassi valori del numero di Reynolds, si giunge alla relazione $j = K_r Q^{1,75}$ se si assume, secondo Blasius, λ proporzionale a $Re^{-0,25}$. In tutto il campo del moto turbolento l'esponente della velocità, e quindi della portata, varia nell'equazione del moto fra il minimo 1,75 per tubo liscio ed $Re < 10^5$ e il massimo 2 nel moto influenzato totalmente dalla scabrezza della parete.

13.7. Problemi del moto uniforme.

Il calcolo delle perdite di carico, date le caratteristiche del fluido ρ , μ (oppure $\nu = \mu/\rho$) della condotta L , D , ε e la portata Q , è immediato con l'impiego dell'eq. [13.10] e delle formule riportate per la valutazione del coefficiente di resistenza.

Il calcolo della portata, date le proprietà del fluido ρ e μ , la pendenza motrice j , la scabrezza ε e il diametro D della condotta, si può ottenere sostituendo λ dall'eq. [13.10] nella [13.22] di Colebrook e ricavando

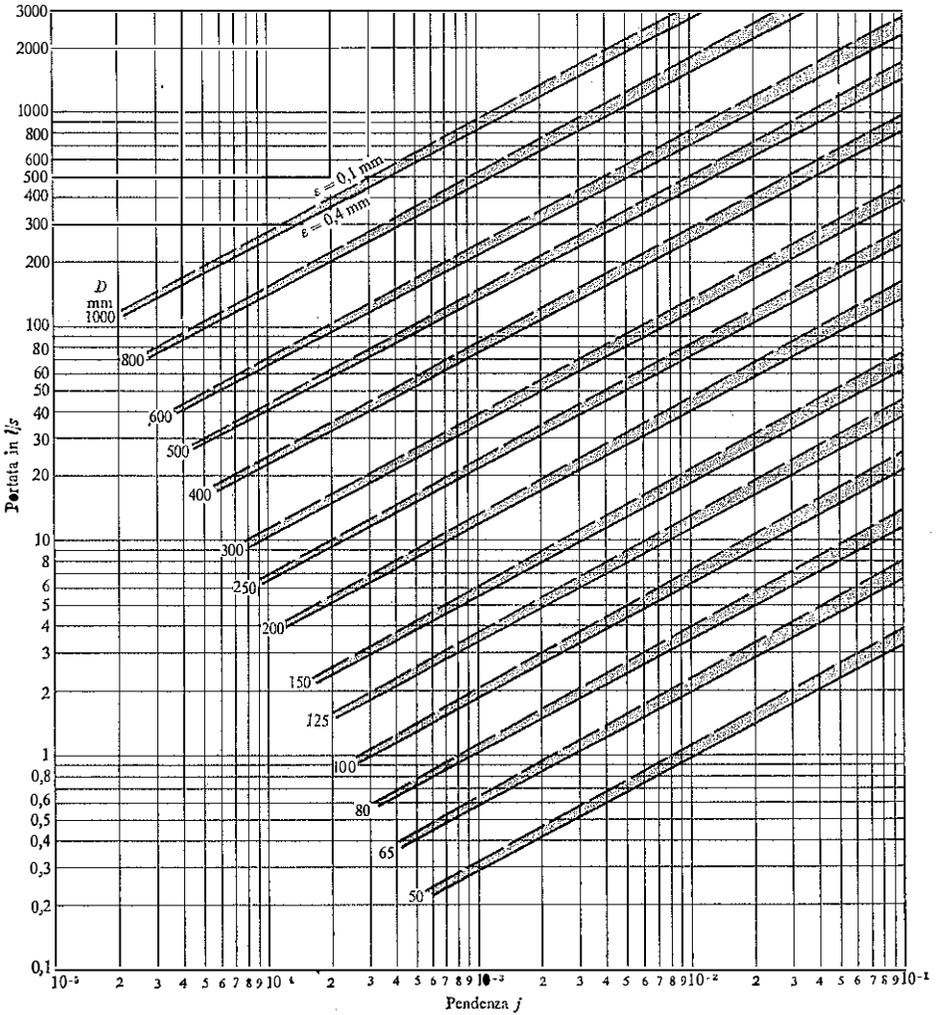


Fig. 13.9. - Curve $Q = Q(j)$, per dati valori del diametro e per scabrezze $\varepsilon = 0,1 \div 0,4$ mm, secondo l'eq. [13.25].

quindi la velocità media. In termini di portata segue

$$Q = -\frac{\pi D^2}{2} \sqrt{2gDj} \log\left(\frac{2,51\nu}{D\sqrt{2gDj}} + \frac{\epsilon/D}{3,71}\right). \quad [13.25]$$

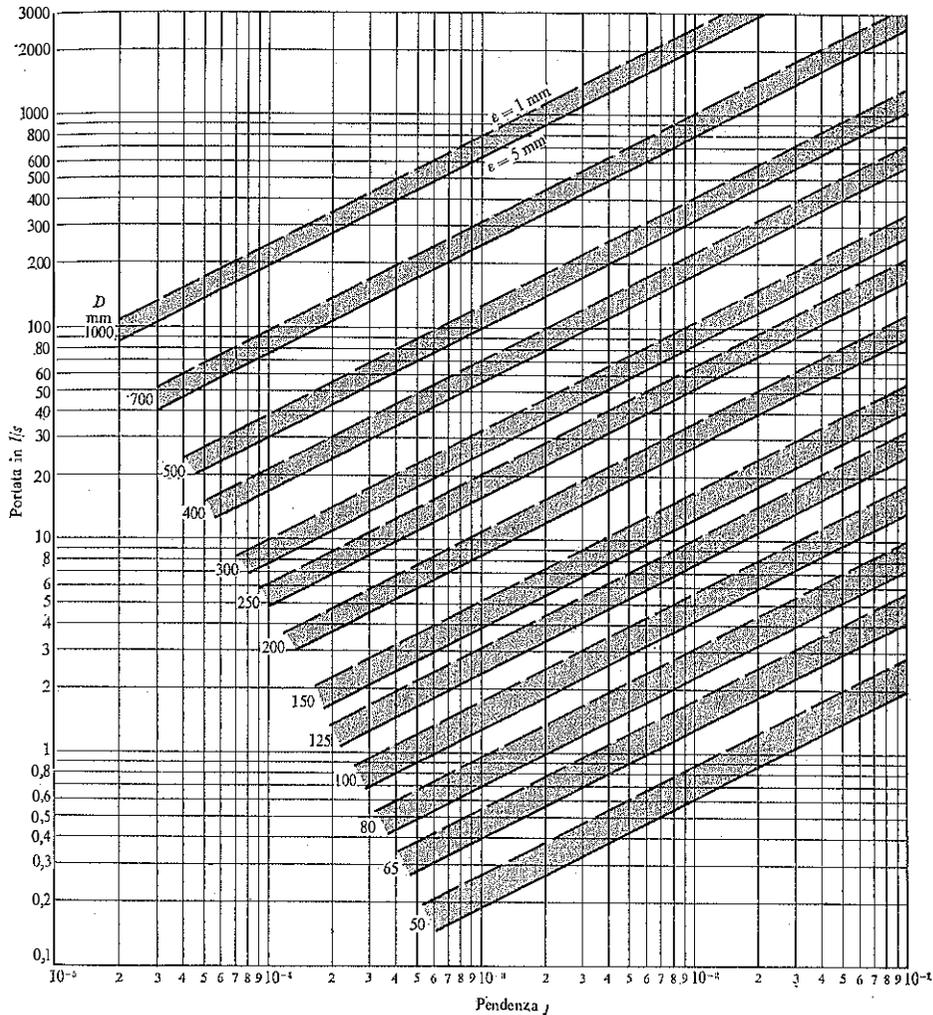


Fig. 13.10. - Curve $Q = Q(j)$, per dati valori del diametro e per scabrezze $\epsilon = 1 \div 5 \text{ mm}$, secondo Eq. [13.25].

Con questa equazione sono state tracciate le curve $Q = Q(j)$, per assegnati valori del diametro e della scabrezza, nei diagrammi logaritmici delle figure 13.9 e 13.10.

Le curve si riferiscono all'acqua a 13 °C, ossia con $\nu_R = 1,206 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, ma, per cambiamenti di temperatura entro ± 10 °C, le variazioni di λ sono praticamente inapprezzabili. Per fluidi diversi dall'acqua si possono impiegare gli stessi diagrammi tenendo presente che, a parità di D , risulta $Q/\sqrt{j} = f(\nu/\sqrt{j})$, essendo ν la viscosità cinematica del fluido in esame. Basta cercare sui diagrammi il valore della portata Q^* corrispondente alla pendenza j^* data dalla

$$j^* = j(\nu_R/\nu)^2;$$

osservando che dev'essere $Q^*/\sqrt{j^*} = Q/\sqrt{j}$ segue

$$Q = Q^* \sqrt{\frac{j}{j^*}} = Q^* \frac{\nu}{\nu_R}. \quad [13.26]$$

Problema di progetto. Calcolo del diametro D , date le proprietà del fluido ρ e μ , la pendenza motrice j , la scabrezza della condotta e la portata Q .

Convieni generalmente procedere per iterazione verificando che la capacità di deflusso della condotta con un diametro prefissato sia pari o poco superiore alla portata assegnata. La scelta del diametro non richiede di solito più di un tentativo perché essa va fatta nell'ambito dei diametri commerciali. Impiegando i grafici delle figure 13.9 e 13.10, la soluzione del problema è chiaramente facilitata. Per maggiori informazioni si veda l'esempio 13.3, nel quale sono richiamate in particolare le memorie di Swamee e Jain (1976) e di Pezzoli (1977).

13.8. Condotte di sezione non-circolare.

L'equazione del moto uniforme si applica anche alle condotte di sezione diversa dalla circolare sostituendo il diametro con un'altra lunghezza caratteristica dal punto di vista idraulico. Normalmente a questo scopo s'impiega il raggio idraulico R , moltiplicato per 4 per rispettare l'equivalenza con il diametro nella sezione circolare. L'equazione del moto assume la forma

$$j = \frac{\lambda}{4R} \frac{U^2}{2g} \quad [13.27]$$

già introdotta nel paragrafo 9.7, e richiamata nel paragrafo 13.3, nella quale però i valori di λ dipendono non solo dal numero di Reynolds e

dai parametri di scabrezza, ma, sia pure moderatamente, anche da parametri di forma.

Le figure 13.11 e 13.12 mostrano alcuni esempi di distribuzione delle isotachie nel moto turbolento entro un condotto di sezione rettangolare ed uno di sezione triangolare (Nikuradse, 1926-1930).

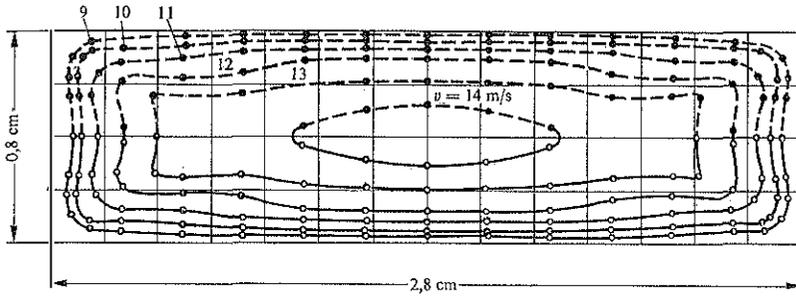


Fig. 13.11. - Isotachie in un condotto di sezione rettangolare (Nikuradse, 1926).

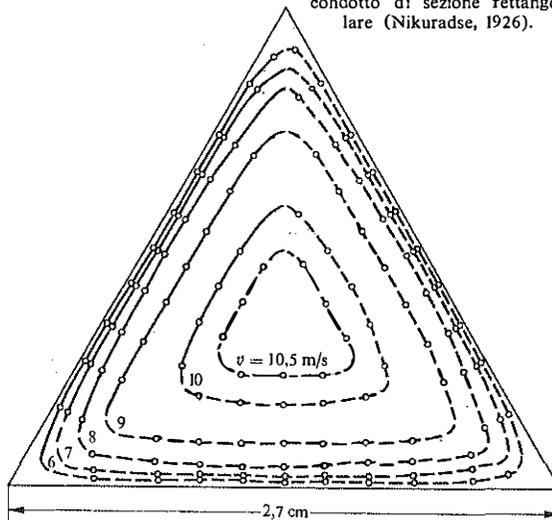


Fig. 13.12. - Isotachie in un condotto di sezione triangolare (Nikuradse, 1930).

Nel caso di *moto turbolento piano*, cioè del moto in un condotto rettangolare di larghezza infinitamente grande rispetto al suo spessore $2y_0$, partendo dalla distribuzione logaritmica della velocità, si possono dedurre espressioni logaritmiche del coefficiente λ perfettamente analoghe a quelle ottenute nella sezione circolare per il regime idraulicamente liscio e per

quello assolutamente turbolento, ossia:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = A \log (Re\sqrt{\lambda}) + B'_i$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = A \log \left(\frac{4R}{\varepsilon} \right) + B'_r$$

con $Re = 4RU/\nu$ ed $R = y_0$.

Il coefficiente A è lo stesso dei tubi circolari, mentre le costanti B'_i e B'_r differiscono dalle corrispondenti B_i e B_r della quantità

$$B'_i - B_i = B'_r - B_r = A \left(\frac{1}{2 \ln 10} - \log 2 \right) = A(-0,0839).$$

Le stesse leggi di resistenza possono essere scritte come

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,0 \log \left(\frac{f Re \sqrt{\lambda}}{2,51} \right) \quad \text{per i tubi lisci;} \quad [13.28]$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,0 \log \left(\frac{4fR}{\varepsilon} \right) \quad \text{per i tubi scabri con moto} \quad [13.29] \\ \text{assolutamente turbolento;}$$

ricorrendo al *coefficiente di forma* f , già definito nel paragrafo 9.7 ed impiegato allora per il moto laminare. Nel presente caso, di moto turbolento *piano*, è

$$\log f = -0,0839, \quad \text{ossia} \quad f = 0,824.$$

Le leggi predette possono essere ovviamente combinate insieme in una equazione tipo Colebrook.

Nel campo del moto assolutamente turbolento, diverse esperienze sono state eseguite su condotti di sezione rettangolare, resi artificialmente scabri, per valutare l'altezza equivalente ε di sabbia. Si ricordano in particolare le misure di distribuzione della velocità eseguite da Schlichting (1936) su pareti rese scabre con il ricoprimento di sfere, oppure di segmenti sfericì o di coni distribuiti con assegnate densità. Dal confronto con la legge logaritmica di velocità, l'autore ha dedotto la scabrezza equivalente ε ; i suoi valori sono risultati variabili, con l'entità del ricoprimento, da 1/4 dell'altezza effettiva degli ostacoli fino al massimo di 4 volte l'altezza stessa per le sfere, da 1/8 a 1,40 per le semisfere, da 1/6 a 1 per i coni. Rubatta (1968) ha misurato il coefficiente di resistenza in tubi rettangolari larghissimi resi fortemente scabri con l'incollatura sulle pareti di sferette metalliche di diametro d disposte per file trasversali alternativamente sfalsate, con una ricopertura del 78%. Con rapporti fra il diametro delle sfere e

lo spessore medio libero di deflusso della sezione pari a $0,57-0,71-1,17-2,05$, i risultati sperimentali hanno verificato il valore $\varepsilon = 1,55d$ della scabrezza, già ottenuto da Schlichting attraverso misure di velocità nelle stesse condizioni di ricoprimento della parete, e hanno confermato la legge di resistenza logaritmica [13.29] con $f = 0,83$.

13.9. Complementi sulla distribuzione delle velocità.

Nel moto uniforme turbolento fra piani paralleli ed in quello entro tubi di sezione circolare le velocità medie locali si distribuiscono seguendo la stessa legge.

La figura 13.13 mostra alcuni esempi di profili della velocità adimensionale v/v_* , rilevati sperimentalmente, in funzione della distanza relativa y/y_0 dalla parete. Con y_0 s'intende la distanza alla quale si verifica il valore massimo della velocità: il raggio nella sezione circolare, la semi-altezza nella sezione rettangolare.

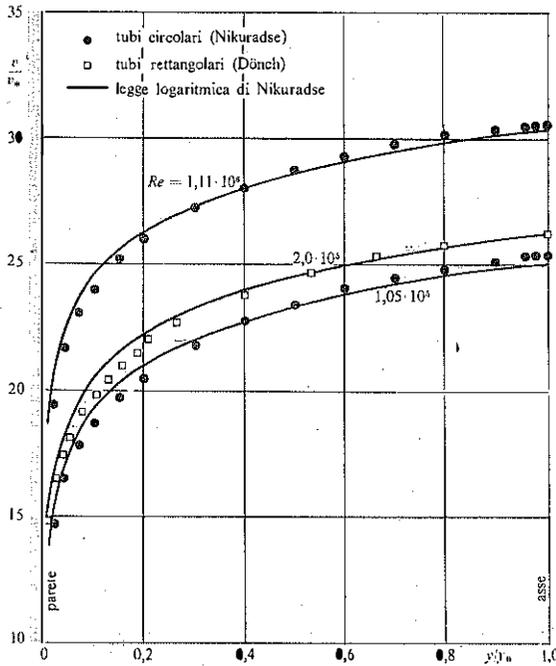


Fig. 13.13. - Rilievi sperimentali di velocità di Nikuradse (1932) in tubi circolari e di Dönch (1926) in tubi rettangolari; le curve rappresentano la legge di distribuzione logaritmica.

Prandtl, basandosi sulle osservazioni sperimentali già citate al paragrafo 13.5, aveva previsto in una regione prossima alla parete la dipendenza di v/v_* unicamente dalla distanza adimensionale:

$$\frac{y}{y_*} = \frac{v_* y}{\nu} \quad \text{nel caso di parete « liscia »,}$$

$$\frac{y}{\varepsilon} \quad \text{nel caso di parete « completamente scabra » .}$$

Le distribuzioni logaritmiche delle velocità sperimentali rilevate da Nikuradse (1932-33)

$$\frac{v}{v_*} = 5,75 \log\left(\frac{v_* y}{\nu}\right) + 5,5 \quad [13.30]$$

$$\frac{v}{v_*} = 5,75 \log\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) + 8,5 \quad [13.31]$$

hanno sostanzialmente verificato la validità della *legge di parete* di Prandtl. Tuttavia, un'analisi più accurata mette in evidenza qualche differenza nell'andamento dei profili sperimentali rispetto a quelli logaritmici, di entità modesta ma di carattere sistematico; in particolare, per $y \rightarrow y_0$, le leggi logaritmiche non presentano un massimo di velocità.

Il confronto con le misure sperimentali, per la maggior parte le stesse che servirono a precisare numericamente le equazioni [13.30] e [13.31], consente di definire il limite della regione in cui la legge di parete è veramente soddisfatta e suggerisce qualche considerazione a chiarimento dei risultati del processo deduttivo delle leggi di resistenza.

Conviene per questo riportare i singoli profili di velocità, rilevati in condotti di sezione circolare o rettangolare, con pareti lisce o scabre, in un diagramma semilogaritmico avente in ordinate v/v_* ed in ascisse i logaritmi di y/y_0 (fig. 13.14). L'esame di questi grafici (Marchi, 1960-61), è interessante soprattutto per il confronto con le rappresentazioni delle figure 13.4 e 13.5 dove le misure sperimentali di v/v_* erano riportate, per i tubi lisci, nel loro insieme al variare del numero di Reynolds e, per i tubi completamente scabri, nel loro insieme al variare della scabrezza relativa ε/D . A differenza di tali andamenti medi, interpolabili in ambedue le situazioni con rette di pendenza 5,75, ossia con le equazioni [13.30] e [13.31], i profili di velocità $v/v_* = f\{\log(y/y_0)\}$, esaminati singolarmente in ogni sezione, con date condizioni al contorno e data portata, mostrano: (a) un primo tratto rettilineo che ha pendenza 5,75, coincidente con l'andamento medio predetto, ben definito per $y/y_0 \leq 0,15$, (b) un secondo tratto rettilineo, compreso fra $y/y_0 \simeq 0,15$ ed $y/y_0 \simeq 0,85$, di pendenza sensi-

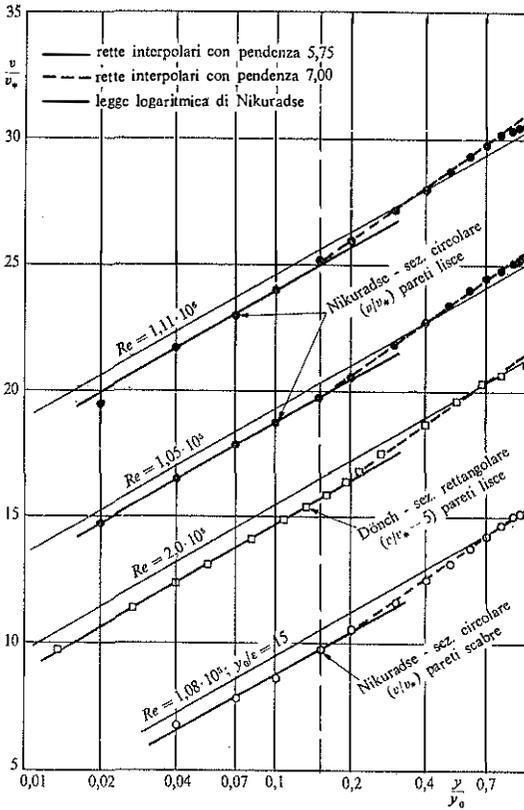


Fig. 13.14. - La distribuzione logaritmica della velocità, rappresentata a tratto intero sottile nel diagramma semilogaritmico, a confronto con alcuni rilievi sperimentali di Nikuradse (1932) in tubi circolari e di Dönch (1926) in tubi rettangolari.

bilmente più accentuata con valori intorno a $6,5 \div 7,0$, (c) un tratto finale curvilineo concavo verso il basso per $0,85 < y/y_0 \leq 1$.

La regione di validità della legge di parete

$$\frac{v}{v_*} = f\left(\frac{v_* y}{\nu}, \frac{y}{\varepsilon}\right)$$

resta compresa fra i limiti $0 \leq y < 0,15y_0$. In questo campo, per i valori di y che soddisfano la $v_* y / \nu \geq 11,6$, il legame è sperimentalmente rappresentato dalle leggi logaritmiche di Nikuradse. Nei punti più vicini alla parete, se questa è liscia, il legame tende all'equazione lineare del

moto laminare $v/v_* = v_* y/\nu$ e resta quindi sempre del tipo previsto dalla legge di parete.

Nella restante parte della sezione, ossia per $0,15 < y/y_0 < 1$, la distribuzione della velocità, o del cosiddetto *difetto di velocità* $v_{\max} - v$ (Stanton, 1911), segue una *legge di similitudine*

$$\frac{v_{\max} - v}{v_*} = f\left(\frac{y}{y_0}\right)$$

di forma più complessa (cfr. Rouse, 1959) dell'equazione

$$\frac{v_{\max} - v}{v_*} = -5,75 \log\left(\frac{y}{y_0}\right)$$

che si deduce dalle leggi logaritmiche (v_{\max} = velocità alla distanza y_0). Queste ultime leggi dovrebbero dunque essere corrette con l'aggiunta di una funzione del solo argomento y/y_0 la cui determinazione può essere fatta senza difficoltà su basi sperimentali. Così, per i tubi lisci si potrebbe scrivere

$$\frac{v}{v_*} = 5,75 \log\left(\frac{v_* y}{\nu}\right) + 5,5 + F(y/y_0) \quad [13.32]$$

ed analoga equazione, con la stessa $F(y/y_0)$, per i tubi scabri con moto assolutamente turbolento (v. Marchi, 1960).

Ma non è tanto sull'entità della correzione, trascurabile ai fini tecnici, che si vuole richiamare l'attenzione, quanto sul suo significato nei confronti degli sviluppi successivi. Infatti, per dedurre le leggi di resistenza, occorre integrare le distribuzioni della velocità sull'area della sezione e allora il contributo del fattore correttivo $F(y/y_0)$, proporzionale a

$$\int_0^1 F(y/y_0) d(y/y_0),$$

si riduce ad un valore *costante* da aggiungere a B_i o a B_r , e non modifica la *forma* delle leggi. Ciò giustifica gli aggiustamenti che si sono resi necessari per adeguare ai rilievi sperimentali le leggi di resistenza ricavate a partire dalle distribuzioni puramente logaritmiche [13.30] e [13.31].

Il coefficiente che nelle equazioni della velocità conserva importanza determinante per le deduzioni successive è il moltiplicatore del logaritmo di $(v_* y/\nu)$ o di (y/ϵ) ; il valore indicato da Nikuradse, 5,75, deriva *non* dalla interpolazione di un profilo completo della velocità v/v_* nel consueto diagramma semilogaritmico, ma dalla determinazione della pen-

denza di quel profilo nella sola *regione di parete*. Tale valore è stato confermato, entro il 3%, anche da successive ricerche sperimentali specifiche sull'argomento. Si rimanda, in proposito, al confronto eseguito con le misure proprie e di altri autori da Leutheusser (1963).

ESEMPI

Esempio 13.1

Calcolo della perdita di carico piezometrico dovuta al deflusso in moto uniforme di acqua alla temperatura di 15 °C con la portata di 220 l/s in una condotta nuova di acciaio saldato, bitumata internamente per immersione, lunga 1550 m e con diametro interno 400 mm.

Sono dati:

per acqua a 15 °C la viscosità cinematica

$$\nu = 1,14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

l'area della sezione di diametro 400 mm

$$\Omega = 0,1257 \text{ m}^2$$

la velocità media con la portata $Q = 0,220 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$

$$U = Q/\Omega = 1,750 \text{ ms}^{-1};$$

da cui deriva il numero di Reynolds

$$Re = \frac{UD}{\nu} = 6,14 \cdot 10^5$$

e, assumendo per la scabrezza equivalente della parete $\epsilon = 0,10 \text{ mm}$ (v. tab. 13.2),

$$\frac{\epsilon}{D} = \frac{0,10}{400} = 0,00025.$$

Con i valori trovati di Re e di ϵ/D , dalla formula di Colebrook [13.22] o graficamente dal diagramma della fig. 13.8 si ottiene il valore

$$\lambda = 0,0156$$

del coefficiente di perdita distribuita.

La perdita di carico piezometrico, coincidente nel moto uniforme con la perdita di carico effettivo, è data quindi dall'equazione

$$h_1 - h_2 = H_1 - H_2 = jL = \frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2g} L = 6,09 \cdot 10^{-3} \cdot 1550 = 9,44 \text{ m}.$$

Osservazione. L'impiego di formule antiche per il calcolo del coefficiente di resistenza, del tipo di quelle richiamate nel paragrafo 13.6, è sconsigliabile quando la

tubazione è poco scabra, come nel caso in esame, perché tali formule non tengono conto dell'influenza del numero di Reynolds. Ad esempio, utilizzando la formula di Gauckler-Strickler, si otterrebbe una buona concordanza con il risultato precedente assumendo $k_s = 105 \text{ m}^{\frac{1}{3}} \text{ s}^{-1}$, perché risulta

$$\beta_r = \frac{10,3}{k_s^2 D^{\frac{1}{3}}} = 1,268 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1} \text{ s}^2$$

e quindi

$$h_1 - h_2 \equiv H_1 - H_2 = jL = \beta_r \frac{Q^2}{D^5} L = 5,99 \cdot 10^{-3} \cdot 1550 = 9,29 \text{ m};$$

ma, con lo stesso parametro di scabrezza, le differenze diventerebbero sensibili per valori minori del numero di Reynolds, come mostra il quadro seguente.

Q $\text{m}^3 \text{ s}^{-1}$	U ms^{-1}	Re $\times 10^{-5}$	λ ($\varepsilon = 0,10 \text{ mm}$) $\times 10^3$	j	β_r ($k_s = 105$)	j' $\times 10^3$	$(j-j')/j$ %
0,055	0,4375	1,53	0,0180	0,439	$1,268 \cdot 10^{-3}$	0,375	+ 14,6
0,110	0,875	3,07	0,0166	1,62	»	1,50	+ 7,5
0,220	1,750	6,14	0,0156	6,09	»	5,99	+ 1,6
0,440	3,500	12,28	0,0151	23,6	»	24,0	- 1,7

Esempio 13.2

Calcolo della portata di un oleodotto, costituito da una condotta di acciaio senza saldatura con diametro interno di 300 mm, per il trasporto di petrolio greggio alla temperatura di 15 °C con una pendenza motrice dell'1%.

Con i dati del problema si possono assumere i seguenti valori:

viscosità cinematica del petrolio $\nu = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

scabrezza equivalente della condotta $\varepsilon = 0,15 \text{ mm}$.

Il valore della portata è fornito dalla [13.25]

$$Q = -\frac{\pi(0,3)^2}{2} \sqrt{2g \cdot 0,3 \times 0,01} \cdot \log \left(\frac{2,51 \times 1,1 \cdot 10^{-5}}{0,3 \sqrt{2g \cdot 0,3 \times 0,01}} + \frac{0,15/300}{3,71} \right) = 0,113 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} = 113 \text{ l s}^{-1}.$$

Il risultato si poteva ottenere anche utilizzando il diagramma della fig. 13.9, come si è indicato nel paragrafo 13.7. Si cerca, per $D = 300 \text{ mm}$, il valore della portata Q^* che corrisponde graficamente ad una scabrezza $\varepsilon = 0,15 \text{ mm}$ e alla pendenza

$$j^* = j(\nu_H/\nu)^2 = 0,01(1,206 \cdot 10^{-6}/1,1 \cdot 10^{-5})^2 = 0,00012$$

essendo ν_H la viscosità cinematica dell'acqua assunta alla temperatura di 13 °C per il tracciamento del profilo di fig. 13.9. Si ottiene $Q^* = 12,5 \text{ l s}^{-1}$.

Con questo valore di portata dalla [13.26] segue

$$Q = Q^* \frac{\nu}{\nu_x} = 12,5 \frac{1,1 \cdot 10^{-6}}{1,206 \cdot 10^{-6}} = 114 \text{ l s}^{-1}$$

in ottima concordanza con il risultato del calcolo diretto.

Esempio 13.3

Progetto del diametro di una tubazione di ghisa, con superficie grezza in condizioni di servizio corrente, per il trasporto di 50 l/s di acqua, alla temperatura ordinaria, con una perdita di carico piezometrico di 7 m per km.

Sono dati:

la portata	$Q = 50 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$
la cadente effettiva, coincidente con quella piezometrica	$j = 0,007$
la condizione della parete rappresentabile con il parametro di scabrezza	$\varepsilon = 1,0 \text{ mm}$.

Dal diagramma della fig. 13.10, con questi dati, si ricava il valore del diametro interno

$$D = 0,250 \text{ m}.$$

Per verifica si esegue il calcolo numerico della portata defluibile in tale condotta nelle condizioni trovate. Con l'eq. [13.25], assunto $\nu = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, si ottiene

$$Q = - \frac{\pi(0,25)^3}{2} \sqrt{2g \cdot 0,25 \times 0,007} \log \left(\frac{2,51 \times 1,2 \cdot 10^{-6}}{0,25 \sqrt{2g \cdot 0,25 \times 0,007}} + \frac{1,0/250}{3,71} \right) = 53 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$$

valore lievemente maggiore di quello richiesto di 50 l s⁻¹. D'altra parte l'adozione del diametro commerciale immediatamente inferiore, $D = 225 \text{ mm}$, porterebbe ad un valore di portata di $\sim 40 \text{ l s}^{-1}$, decisamente in difetto rispetto al previsto.

Osservazione. Diversi metodi di risoluzione esplicita del problema di progetto sono stati proposti, sempre utilizzando la formula di Colebrook, per il calcolo del coefficiente λ di perdita distribuita. Si rimanda in proposito al lavoro di Swamee e Jain (1976) e alle memorie lì richiamate.

Particolarmente efficace, in tale indirizzo, appare una formula ottenuta nel 1977 da Pezzoli con un opportuno procedimento semplificativo a partire dalla formula di Colebrook. Essa presenta un'approssimazione largamente sufficiente per gli scopi tecnici ed ha la forma

$$D = \Delta \left[- \frac{\pi}{\sqrt{2}} \log \left(\frac{\varepsilon}{1,77\Delta} + 5,4 \frac{\nu}{\Delta^3 \sqrt{gj}} \right) \right]^{-\frac{2}{3}}$$

con $\Delta = (Q^2/gj)^{\frac{1}{3}}$.

Utilizzando questa formula si ottiene

$$\Delta = (0,05^2/9,81 \cdot 0,007)^{\frac{1}{2}} = 0,5155,$$

$$D = 0,5155 \left[-\frac{\pi}{\sqrt{2}} \log \left(\frac{0,001}{1,77 \cdot 0,5155} + 5,4 \frac{1,2 \cdot 10^{-6}}{0,5155^{\frac{1}{2}} \sqrt{9,81 \cdot 0,007}} \right) \right]^{-\frac{2}{3}} = 0,243 \text{ m.}$$

Resta quindi confermata la scelta del diametro commerciale $D = 0,250 \text{ m.}$

Esempio 13.4

Calcolo, in base alla legge logaritmica di distribuzione della velocità in un tubo di sezione circolare, della distanza dalla parete alla quale il valore della velocità è pari al valore medio nella sezione.

Il risultato, come sarà dimostrato nel seguito, non dipende dalle condizioni al contorno, cioè dal comportamento di parete liscia o di parete scabra.

Conviene scrivere la distribuzione logaritmica della velocità nella forma

$$\frac{v}{v_*} = 2,5 \ln \left(\frac{y}{r_0} \right) + \frac{v_m}{v_*}$$

dove v_m è la velocità alla distanza r_0 dalla parete e v_m/v_* è funzione delle condizioni al contorno.

Per definizione, la velocità media U vale

$$U = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} v 2\pi(r_0 - y) dy$$

e quindi, tenendo conto della precedente espressione della v , segue

$$\frac{U}{v_*} = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} \left[2,5 \ln \left(\frac{y}{r_0} \right) + \frac{v_m}{v_*} \right] (r_0 - y) dy.$$

Posto

$$\eta = y/r_0$$

l'equazione precedente diventa

$$\begin{aligned} \frac{U}{v_*} &= 2 \int_0^1 \left(2,5 \ln \eta + \frac{v_m}{v_*} \right) (1 - \eta) d\eta = \\ &= 5,0 \int_0^1 \ln \eta d\eta - 5,0 \int_0^1 \eta \ln \eta d\eta + 2 \frac{v_m}{v_*} \int_0^1 (1 - \eta) d\eta = \\ &= 5,0 [\eta (\ln \eta - 1)]_0^1 - 5,0 \left[\frac{\eta^2}{2} \left(\ln \eta - \frac{1}{2} \right) \right]_0^1 + 2 \frac{v_m}{v_*} \left[\eta - \frac{\eta^2}{2} \right]_0^1 = \\ &= 5,0(-1,0) - 5,0 \left(-\frac{1}{4} \right) + \frac{v_m}{v_*}. \end{aligned}$$

Dal confronto di questo risultato con l'espressione logaritmica della velocità alla distanza cercata $y_{(v)}$, si ottiene

$$2,5 \ln \left(\frac{y_{(v)}}{r_0} \right) + \frac{v_m}{v_*} = -5,0 \left(\frac{3}{4} \right) - \frac{v_m}{v_*}$$

ossia

$$\ln \frac{y_{(v)}}{r_0} = -\frac{3}{2}$$

da cui

$$y_{(v)} = 0,223 r_0.$$

Il risultato è indipendente dal valore di v_m/v_* e ciò conferma la non influenza delle condizioni al contorno di cui si è detto inizialmente.

La legge logaritmica di distribuzione della velocità si può scrivere ovviamente anche nella forma

$$\frac{v}{v_*} = 2,5 \ln \left(\frac{y}{y_{(v)}} \right) + \frac{U}{v_*}$$

e quindi anche, essendo $y_{(v)} = 0,223 r_0$,

$$\frac{v}{v_*} = 2,5 \ln \left(\frac{y}{r_0} \right) + \frac{U}{v_*} - 3,75$$

che esprime il valore locale della velocità a partire dalla conoscenza del suo valor medio nella sezione.

Riferimenti citati.

- BAZIN, H. e DARCY, H., *Mem. présentés par div. Sav.*, Series 2, Vol. 19, Paris, 1865.
 BAZIN, H., *Ann. de Ponts et Chauss.*, 7, 1897.
 — *Mem. présentés par div. Sav.*, Vol. 32, n. 6, Paris, 1902.
 BLASIUS, H., *Forsch.-Arb. Ing.-Wes.*, Heft 131, 1913.
 COLEBROOK, C. F. e WHITE, C. M., *Journ. Institution Civil Engineers*, 1937.
 COLEBROOK, C. F., *Journ. Institution Civil Engineers*, 1939.
 DARCY, H., *Récherches relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux*, Paris, 1858.
 DÖNCH, F., *VDI Forsch.*, 282, 1926.
 GAUCKLER, P. G., *Ann. de Ponts et Chauss.*, (4), 15, 1868.
 JAKOB, M. e ERK, S., *Forsch.-Arb. Ing.-Wes.*, Heft 267, 1924.
 HAZEN, A. e WILLIAMS, G. S., *Hydraulic Tables*, 3d., J. Wiley & Sons, 1920.
 KARMAN, V. TH., Z., *angew. Math. Mech.*, Bd. 1, 1921.
 — *Göttingen Nachrichten Math. Phys. Klasse*, 1930.
 — *Journ. Aeronaut. Sci.*, Vol. 1, n. 1, 1934.
 LEUTHEUSSER, H. J., *Proc. A.S.C.E.*, Vol. 89, HY3, 1963.

- MARCHI, E., *Atti Acc. Naz. Lincei*, Serie VIII, Vol. 29, Fasc. 5-6, 1960.
— *L'Energia Elettrica*, Vol. XXXVIII, n. 4, 1961.
- MOODY, L. F., *Trans. A.S.M.E.*, Vol. 66, 1944.
- NIKURADSE, J., *Forsch.-Arb. Ing.-Wes.*, Heft 281, 1926.
— *Ing.-Arch.*, Vol. 1, 1930.
— *VDI Forsch.*, 356, 1932.
— *VDI Forsch.*, 361, 1933.
- NUSSELT, W., *Forsch.-Arb. Ing.-Wes.*, Heft 89, 1910.
- PEZZOLI, G., *L'Energia Elettrica*, Vol. LIV, n. 3, 1977.
- PRANDTL, L., *Z. angew. Math. Mech.*, Bd. 5, 1925.
— *Ergebn. d. Aerodyn. Versuchsanstalt zu Göttingen*, III Lief., 1927.
— *Ergebn. d. Aerodyn. Versuchsanstalt zu Göttingen*, IV Lief., 1932.
— *Turbulenz und ihre Entstehung*, Tokio-Vortrag, 1929.
- REICHARDT, H., *Naturwissenschaften*, 1938 e *Z. Angew. Math. Mech.*, Bd. 18, 1938.
- ROUSE, H., Ed. *Advanced Mechanics of Fluids*, J. Wiley & Sons, 1959.
- RUBATTA, A., *L'Energia Elettrica*, Vol. XLV, n. 3, 1968.
- SCHILLER, L. e HERMANN, R., *Ing.-Arch.*, Bd. 1, Heft 4, 1930.
- SCHLICHTING, H., *Ing.-Arch.*, Vol. 7, 1936.
- STANTON, T. E., *Proc. Roy. Soc.*, London (A), Vol. 85, 1911.
- STANTON, T. E. e PANNEL, J. R., *Proc. Roy. Soc.*, London (A), Vol. 214, 1914.
- STRICKLER, A., *Beiträge zur Frage der Geschwindigkeitsformel und der Rauigkeitszahlen für Ströme, Kanäle und geschlossene Leitungen*, Berna, 1923.
- SUPINO, G., *Atti Acc. delle Scienze di Bologna*, 1951.
- SWAMEE, P. K. e JAIN, A. K., *Proc. A.S.C.E.*, Vol. 102, HY5, 1976.
- WEISBACH, J., *Lehrbuch der Ingenieur und Masch. - Mechanik I*, Braunschweig, 1845.

CAPITOLO QUATTORDICESIMO

MOTO PERMANENTE NELLE CONDOTTE

14.1. Condizioni di moto permanente.

Il movimento di un fluido in pressione si realizza spesso in condizioni permanenti, o mediamente permanenti, cioè in condizioni indipendenti dal tempo con riferimento ai valori medi locali delle velocità turbolente. In tali condizioni il moto ha carattere uniforme, come si è visto nel capitolo precedente, nelle condotte cilindriche percorse da un liquido o comunque da un fluido soggetto a variazioni di densità trascurabili.

Restano da esaminare in questo capitolo i moti permanenti, non uniformi, che si verificano nei tratti soggetti a variazioni graduali o brusche di sezione o di direzione, a variazioni di portata lungo il percorso ed a variazioni di densità del fluido.

14.2. Condotte con variazioni graduali di sezione.

Le perdite di carico totale nei tubi convergenti o divergenti con gradualità, dovute alle resistenze sul contorno, si valutano con espressioni formalmente identiche a quelle consigliate per il calcolo delle perdite di carico nelle condotte cilindriche. Nel caso di fluido a *densità costante* le equazioni sono quindi:

$$Q = \Omega U = \text{cost} \quad [14.1]$$

$$j = - \frac{dH}{ds} = \frac{\lambda}{4R} \frac{U^2}{2g} \quad [14.2]$$

dove R è il raggio idraulico e Ω l'area della sezione, variabili con la coordinata spaziale s . Al solito Q indica la portata, U la velocità media, H il carico effettivo e λ il coefficiente di resistenza. Se la sezione è circolare, l'equazione dinamica diventa

$$j = -\frac{dH}{ds} = \frac{8\lambda}{g\pi^2} \cdot \frac{Q^2}{D^5} \quad [14.3]$$

con D funzione della coordinata s .

La [14.2] si integra appena si conosce $\Omega = \Omega(s)$ ed in particolare, per le condotte circolari, il diametro $D = D(s)$. Il coefficiente λ si calcola con le formule viste nel capitolo 13.

La perdita di carico totale $-dH/ds$ è diversa dalla pendenza $i = -dh/ds$, perché l'altezza $U^2/2g$ varia lungo la condotta: le linee dei carichi totali e dei carichi piezometrici non sono infatti fra loro parallele (v. figure 14.1 e 14.2).

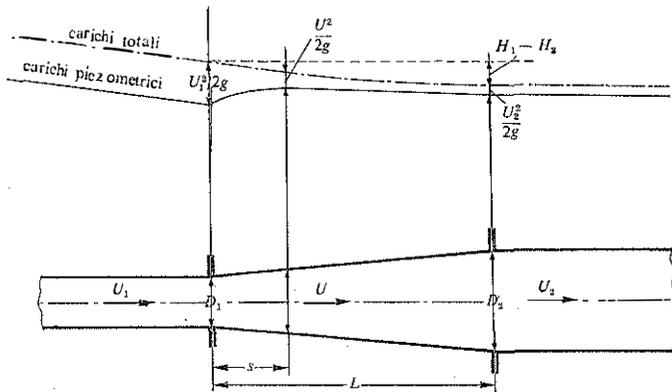


Fig. 14.1. - Perdite di carico effettivo in un divergente conico.

Le resistenze al contorno sono le sole cause delle perdite che si verificano nelle condotte convergenti con gradualità. Nelle divergenti, l'effetto dell'allargamento, a meno che l'angolo di divergenza non sia inferiore a circa 7° , provoca nella corrente che rallenta dissipazioni energetiche supplementari dovute agli urti interni e soprattutto alla formazione di vortici per distacco dello strato limite dalle pareti. Di questi effetti, che si accen-

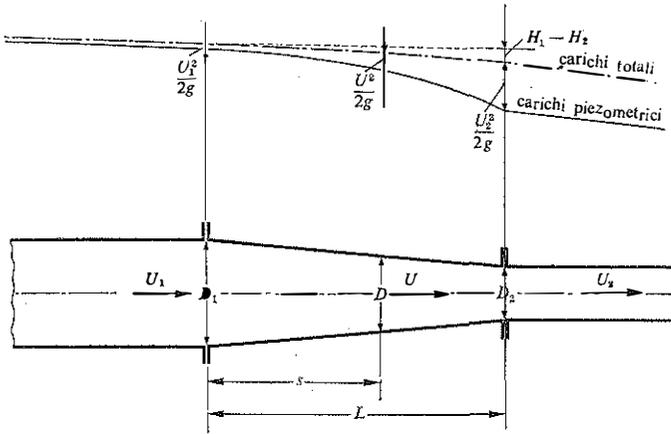


Fig. 14.2. - Perdite di carico effettivo in un convergente conico.

tuano ovviamente con l'aumentare dell'angolo di divergenza, si tiene conto con valutazioni analoghe a quelle delle perdite per brusche variazioni di sezione, che vengono trattate nel paragrafo seguente.

14.3. Perdite localizzate: accidentalità e curve.

Si dicono localizzate le perdite di carico totale che si verificano nelle condotte in corrispondenza di variazioni di sezione più o meno brusche, provocate dalla presenza di raccordi, saracinesche, valvole, ecc., o di variazioni di direzione per la presenza di curve, gomiti o giunzioni.

Tali perdite di energia meccanica, che viene convertita in calore, sono sempre conseguenza di allargamenti della corrente perché questo fenomeno comporta, con il rallentamento del flusso, fenomeni interni d'urto e mescolamenti vorticosi più accentuati, cioè quello sviluppo di macro-turbolenza dissipativa che accompagna la separazione dello strato limite (cfr. cap. 12).

Sotto questo aspetto è esemplare lo studio del *brusco allargamento di sezione* che è stato riportato nel paragrafo 11.5. Le perdite di carico effettivo in quel caso ed in genere nelle situazioni di dissipazioni localizzate, si esprimono, come si è già visto nei paragrafi 11.4 e 11.5, in termini proporzionali all'altezza cinetica di valle, ossia con formule del tipo

$$\Delta H = \xi \frac{U^2}{2g} \quad [14.4]$$

essendo ξ un coefficiente che dipende dal tipo e dalla forma di accidentalità e che nella maggior parte dei casi viene determinato per via sperimentale (Weisbach, 1855). A rigore questo coefficiente è funzione anche del numero di Reynolds, ma tale dipendenza è di norma trascurabile nel campo degli alti valori di Re , frequenti nei problemi tecnici.

Si riportano nel seguito alcuni valori indicativi per il calcolo delle perdite localizzate in: imbocchi, sbocchi, allargamenti, restringimenti, valvole, giunzioni, gomiti e curve. Tali valori, per quanto riguarda le prime quattro accidentalità, sono stati esposti nei paragrafi 11.4 ed 11.5 e vengono qui soltanto richiamati.

Imbocco di una condotta da un serbatoio (U = velocità nella condotta di diametro D)

A spigolo vivo	$\xi = 0,50$
Condotta rientrante	$\xi = 1,00$
Boccaglio di invito	$\xi = 0,06$
Imbocco arrotondato	$\xi = 0,06 \div 0,10$
Imbocco conico (da D_0 a D)	$\xi = 0,10 \div 0,25$ per $D_0/D = 2,5 \div 1,5$

Sbocco di una condotta in un serbatoio (U = velocità nella condotta di diametro D)

A spigolo vivo	$\xi = 1,0$
Sbocco conico (da D a D_0)	$\xi = 0,20 \div 0,50$ per $D_0/D = 3,0 \div 1,5$

Allargamento di sezione da Ω_1 a Ω_2 (U = velocità a valle)

Allargamento brusco	$\xi = \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2$
Allargamento conico (angolo totale di apertura θ)	$\xi = K_\theta \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2$

θ	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	120°	180°	Ω_1/Ω_2
$K_\theta = 0,20$	0,40	0,70	0,95	1,10	1,20	1,20	1,16	1,12	1,05	1,00	1,00	1/2
	0,40	0,65	0,80	0,95	1,00	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,00	1/10

Restringimento di sezione da Ω_1 a Ω_2 (U = velocità a valle)

Ω_2/Ω_1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
ξ	0,48	0,44	0,41	0,31	0,26	0,24	0,18	0,13	0,06

Saracinesche-valvole (Perdite di carico a completa apertura)

Saracinesche	$\xi = 0,20$
Valvole a fuso	$\xi = 0,20 \div 0,30$
Valvole a farfalla	$\xi = 0,30 \div 0,50$
Valvole di fondo	$\xi = 1,0 \div 1,5$

Gomiti

Gomito a 90°	$\xi = 0,9 \div 1,1$
Gomito a 60°	$\xi = 0,5 \div 0,6$
Gomito a 45°	$\xi = 0,3 \div 0,4$

Giunzioni a T fra tubi di ugual diametro (fig. 14.3)

$$\Delta H_{i \rightarrow j} = \xi_{i \rightarrow j} (U_3^2 / 2g).$$

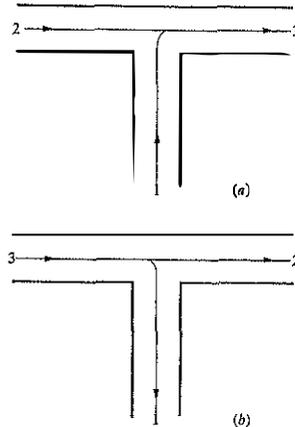


Fig. 14.3. - Giunzioni a T.

Per Q_1/Q_3 variabile da 0,5 a 1,0 si ha corrispondentemente:

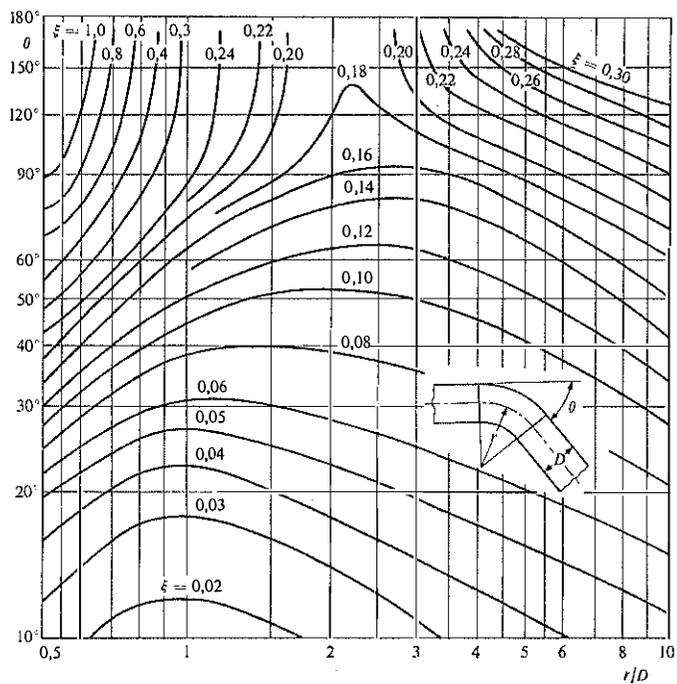
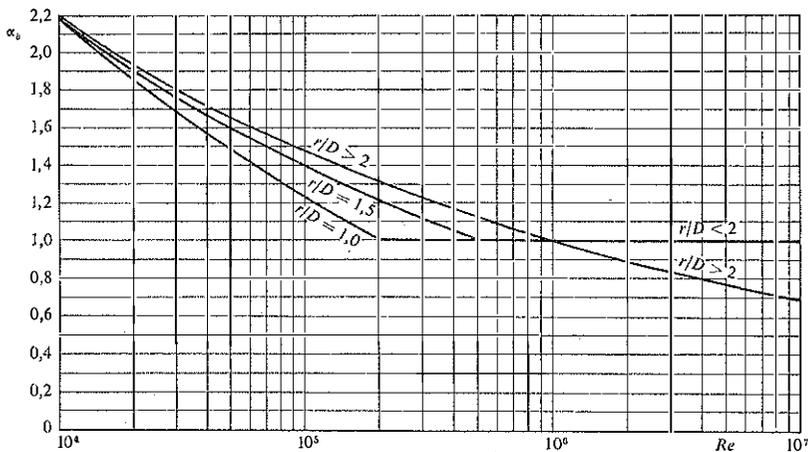
- a) per confluenza delle correnti 1 e 2 nella 3
- | | |
|-------------|----------------|
| ξ_{1-3} | = da 0,4 a 1,1 |
| ξ_{2-3} | = da 0,5 a 0,6 |
- b) per suddivisione della corrente 3 nelle 1 e 2
- | | |
|-------------|-----------------|
| ξ_{3-1} | = da 0,8 a 1,3 |
| ξ_{3-2} | = da 0,05 a 0,4 |

Curve

Valori del coefficiente ξ per $Re = 10^6$ sono forniti dal grafico di figura 14.4 in funzione del rapporto r/D (raggio di curvatura/diametro tubo) e dell'angolo di deviazione. Per valori di $Re \neq 10^6$ si moltiplica $\xi_{(10^6)}$ per un fattore di correzione α_b fornito dal grafico di figura 14.5, in funzione del numero di Reynolds e ancora del rapporto r/D :

$$\xi = \xi_{(10^6)} \cdot \alpha_b.$$

Per altri dati sulle perdite dovute ad accidentalità si veda D. S. Miller: « Internal Flows », Ed. B.H.R.A., 1971.

Fig. 14.4. - Curve: valori di ξ per $Re = 10^6$.Fig. 14.5. - Curve: valori del coefficiente α_θ in funzione del numero di Reynolds.

14.4. Condotta collegante due serbatoi. Sifone.

La figura 14.6 mostra l'andamento della linea dei carichi totali H e della linea dei carichi piezometrici h in una delle più semplici e frequenti situazioni di moto permanente: quella di un fluido a densità costante in

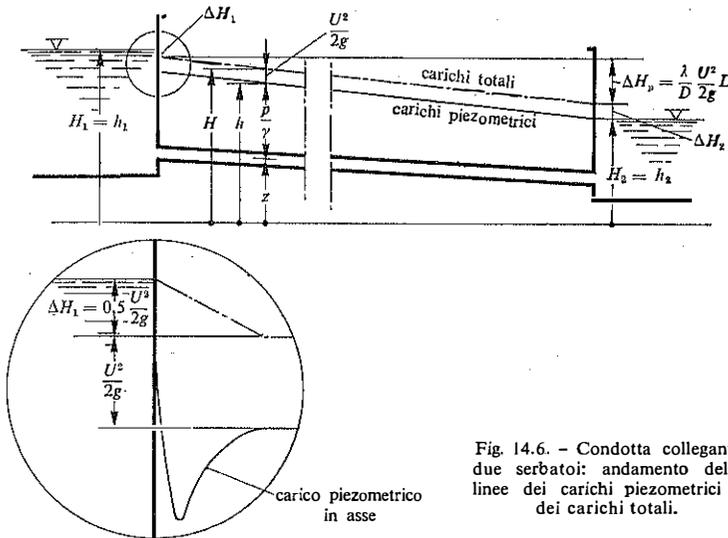


Fig. 14.6. - Condotta collegante due serbatoi: andamento delle linee dei carichi piezometrici e dei carichi totali.

una condotta cilindrica di sezione circolare di diametro D che collega due serbatoi. Nel caso in esame le perdite localizzate sono esclusivamente quelle d'imbocco e di sbocco a spigolo vivo. L'equazione del moto è quindi

$$H_1 - H_2 = h_1 - h_2 = 0,5 \frac{U^2}{2g} + \frac{U^2}{2g} + \frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2g} L = \left(1,50 + \frac{\lambda}{D} L\right) \frac{U^2}{2g} \quad [14.5]$$

ed essa fornisce il dislivello $h_1 - h_2$ fra i peli liberi invarianti dei due serbatoi. Altrimenti, noto tale dislivello e date le caratteristiche della condotta, si può calcolare la velocità media U e conseguentemente la portata Q : oppure, assegnati la portata e il dislivello, dalla [14.5] è deducibile il diametro della condotta. Per quest'ultimo calcolo, come per il precedente, si può procedere con metodo iterativo.

In generale, se sono presenti anche altre perdite localizzate ma non variazioni di sezione della condotta, né della sua scabrezza, l'equazione del moto, tenuto conto della condizione di continuità $Q = \Omega U = \text{cost}$,

diventa

$$h_1 - h_2 = \left(\sum \xi_i + \frac{\lambda}{D} L \right) \frac{Q^2}{2g\Omega^2} \quad [14.6]$$

essendo ξ_i i coefficienti relativi alle varie perdite localizzate. L'eq. [14.6] può essere scritta anche esprimendo le perdite in termini di dissipazioni distribuite dovute al moto uniforme: per questo basta sostituire la lunghezza effettiva L con una lunghezza equivalente L_e data da

$$L_e = L + \frac{D}{\lambda} \sum \xi_i.$$

Allora la [14.6] assume la forma

$$h_1 - h_2 = \frac{\lambda}{D} \cdot \frac{Q^2}{2g\Omega^2} L_e \quad \text{oppure} \quad = \beta_r \frac{Q^2}{D^5} L_e \quad [14.7]$$

e nel caso delle sole perdite di imbocco e di sbocco a spigolo vivo si ha:

$$\begin{aligned} \text{con } \lambda = 0,03 & \quad L_e = L + 50 D \\ \lambda = 0,02 & \quad L_e = L + 75 D \\ \lambda = 0,015 & \quad L_e = L + 100 D. \end{aligned}$$

La figura 14.7 mostra una condotta a ginocchio collegante due serbatoi con alcune possibili posizioni del livello del serbatoio di monte. Nel rappresentare l'andamento dei carichi piezometrici si è considerato trascurabile l'effetto del gomito.

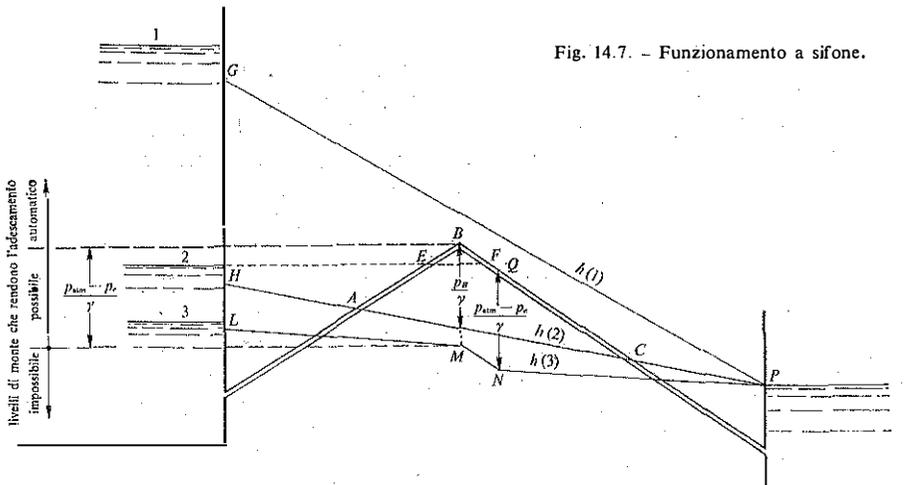


Fig. 14.7. - Funzionamento a sifone.

Nella situazione 1 la condotta è soggetta ovunque ad una pressione superiore a quella atmosferica, come mostra la linea dei carichi piezometrici GP ; nella situazione 2 la pressione uguaglia invece quella atmosferica nelle sezioni A e C ed è inferiore ad essa nel tronco ABC , con minimo in B dove la pressione p_B , rappresentata nella figura con il segmento p_B/γ misurato rispetto alla linea piezometrica HP , è il valore negativo della pressione con riferimento al valore atmosferico.

La situazione 2 differisce dalla 1 anche per il fatto che una parte della condotta, quella compresa tra E ed F , si trova al disopra della quota del pelo libero del serbatoio di alimentazione. Questo funzionamento della condotta si dice a *sifone*. Il deflusso non può innescarsi da solo ma richiede il riempimento preliminare della condotta o la creazione di una sufficiente *depressione* all'interno della stessa. La depressione non può comunque superare $p_{\text{atm}} - p_e$, essendo p_e la pressione di vapore alla temperatura di esercizio. Così, se la quota del vertice B fosse più alta di $(p_{\text{atm}} - p_e)/\gamma$ della quota del pelo libero del serbatoio di alimentazione, l'adescaimento del sifone sarebbe impossibile.

Passando dalla situazione 2 alla 3, ossia assumendo minori livelli del serbatoio di monte, sempre compresi nel campo che consente l'adescaimento, aumenta la depressione di regime in B . Una volta raggiunto il valore $p_{\text{atm}} - p_e$ la depressione in B non può più crescere, ad essa corrisponde il minimo carico piezometrico $-(p_{\text{atm}} - p_e)/\gamma$, ed un'ulteriore riduzione della quota di alimentazione comporta l'insorgere di discontinuità nella pendenza della linea delle h . Il caso è esemplificato dalla situazione 3: la linea dei carichi piezometrici consta di due tratti, LM ed NP , fra loro paralleli, e del tratto MN parallelo all'asse della condotta. Nel corrispondente tronco BQ la pressione è livellata al valore p_e e la cadente effettiva, coincidente qui con la pendenza della condotta, è maggiore di quella presente nei tronchi rimanenti. Le maggiori perdite di energia sono causate da un deflusso a fasi separate, con parziale ed irregolare riempimento della sezione da parte del liquido, accompagnato da forte sviluppo di vapore e dalla liberazione dei gas inizialmente disciolti.

14.5. Reti di condotte.

Le condotte in pressione che si diramano nelle aree urbane e provvedono al trasporto dell'acqua dai serbatoi di raccolta o di compenso ai punti di utilizzazione e di distribuzione costituiscono un esempio di reti idrauliche. In generale si chiama *rete di condotte in pressione* un sistema di condotte connesse in modo da formare maglie e rami convergenti in

punti, detti nodi, nei quali possono affluire o dai quali possono defluire portate esterne Q_K , mentre ogni lato i è percorso dalla portata interna Q_i (fig. 14.8).

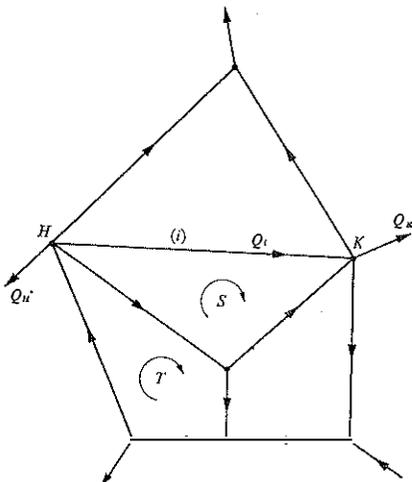


Fig. 14.8. - Rete di condotte.

La complicazione dei procedimenti risolutivi, anche del problema di verifica di una rete, richiederebbe una trattazione specialistica dell'argomento. Qui ci si limita ad esporre i criteri di carattere generale per lo studio del problema.

Si assume positiva la portata Q_i se defluisce nel verso concorde con un verso prefissato. Le perdite di carico lungo il lato i , per rispettare la corrispondenza di segno con Q_i , si possono scrivere nella forma

$$h_{i1} - h_{i2} = r_i Q_i |Q_i|^{n-1} \quad [14.13]$$

nella quale r_i rappresenta un coefficiente dimensionale di resistenza, assunto costante, calcolato in base al diametro ed alla scabrezza della condotta e linearmente proporzionale alla lunghezza del lato, eventualmente aumentata in modo da mettere in conto in forma distribuita anche le perdite concentrate, come si è visto nel paragrafo precedente. Secondo le formule empiriche che esprimono il coefficiente di resistenza in base soltanto alla scabrezza relativa della condotta, l'esponente n dovrebbe valere 2; oggi sono però più attendibili valori di $n < 2$, generalmente compresi fra 1,8 e 2,0, perché, per la diminuita scabrezza della parete dei tubi, dovuta ai progressi tecnologici nella loro produzione, risulta spesso sensibile l'influenza del numero di Reynolds. Come si è detto nel

paragrafo 13.6, finché il regime del moto è turbolento, il minimo valore che può assumere l'esponente è $n = 1,75$, valido per tubi lisci finché $Re < 10^6$. L'impiego di una formula che esprima il coefficiente di resistenza in funzione non soltanto della scabrezza relativa, ma anche del numero di Reynolds, introduce difficoltà che rendono necessari per il calcolo numerico di una rete accorgimenti particolari, non necessari nel progetto di una singola condotta (cfr. Lombardo e al., 1978).

In ogni nodo dev'essere nulla la somma algebrica delle portate effluenti e defluenti, interne ed esterne, per ragioni di continuità. La condizione nel nodo K è espressa dalla

$$\sum_i Q_i + Q_x = 0 \quad [14.14]$$

essendo la sommatoria estesa a tutti i lati i convergenti nel nodo K .

In ogni maglia dev'essere nulla la somma algebrica delle perdite di carico piezometrico calcolate lungo i lati della maglia seguendo un assegnato verso di percorrenza della maglia stessa. Detta S la maglia considerata ed i un generico lato della maglia, dev'essere identicamente verificata la

$$\sum_i (h_{i1} - h_{i2}) = 0. \quad [14.15]$$

Il problema di verifica della rete consiste, dato il carico piezometrico in un nodo e date le portate esterne, nella determinazione dei carichi piezometrici negli altri nodi e delle portate in tutti i lati. La risoluzione del problema, per la non linearità delle equazioni, si basa su metodi iterativi.

Un procedimento classico di successive approssimazioni, applicabile maglia per maglia, è stato introdotto da Cross nel 1936. Esso può essere utilizzato in due modi, detti rispettivamente del *bilanciamento dei carichi* e del *bilanciamento delle portate* (Russo Spena, 1950). Con il primo si fissa una distribuzione di portate \bar{Q}_i compatibile con le condizioni di continuità nei nodi. Si cercano quindi le correzioni ΔQ_i necessarie per soddisfare il bilanciamento dei carichi in ciascuna maglia; in particolare nella maglia S dovrà essere verificata l'eq. [14.15] che, attraverso le espressioni [14.13] delle perdite di carico, diventa

$$\sum_i r_i (\bar{Q}_i + \Delta Q_i) |\bar{Q}_i + \Delta Q_i|^{n-1} = 0. \quad [14.16]$$

Il metodo di Cross consiste nel calcolare un primo valore $\Delta Q_i'$ della correzione mediante la linearizzazione dell'eq. [14.16]; per questo basta troncare al termine lineare lo sviluppo in serie della funzione che sta a primo membro di tale equazione. Dalla

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x \left(\frac{df}{dx} \right)_{x_0} + \dots = 0$$

si ottiene un primo valore approssimato di Δx

$$\Delta x' = - \frac{f(x_0)}{(df/dx)_{x_0}}$$

Essendo

$$f(x) = \sum_i r_i (\bar{Q}'_i + \Delta Q_i) |\bar{Q}_i + \Delta Q_i|^{n-1}$$

$$df/dx = n \sum_i r_i |\bar{Q}_i + \Delta Q_i|^{n-1}$$

ne deriva

$$\Delta Q'_i = - \frac{\sum_i r_i \bar{Q}_i |\bar{Q}_i|^{n-1}}{n \sum_i r_i |\bar{Q}_i|^{n-1}} \quad [14.17]$$

Eseguita questa prima correzione sommando le $\Delta Q'_i$ algebricamente a tutte le portate \bar{Q}_i della maglia S , si ripete il procedimento, se necessario, sulle nuove portate fino a rendere trascurabile la correzione.

L'applicazione del metodo di Cross ad un'altra maglia che abbia almeno un lato in comune con la prima porta ad una correzione della portata su tale lato che squilibra la prima maglia. Il procedimento va quindi ripetuto per trovare una seconda correzione e così via, finché il valore della correzione sullo stesso lato diventa trascurabile. Sebbene la convergenza sia abbastanza rapida ed il passaggio da una maglia all'altra si possa eseguire di solito applicando una sola volta il metodo di Cross, il calcolo rimane laborioso e complesso, soprattutto se è alto il numero delle maglie.

Il procedimento esposto può essere in un certo senso generalizzato alla determinazione delle correzioni di portata contestualmente su tutti i lati (Lombardo, 1961; Martin, Phil e Peters, 1963; Chandrashekhar e Stewart, 1975) seguendo un metodo di risoluzione dei sistemi di equazioni non lineari che si richiama in sostanza ad un procedimento di Newton. Per questo si osservi che, detta ΔQ_T la portata correttiva della generica maglia T , in ogni altra maglia generica S dev'essere verificata identicamente la condizione

$$\sum_i r_i \left\{ \bar{Q}_i + \sum_T \delta_{S,T}(i) \Delta Q_T \right\} \cdot \left| \bar{Q}_i + \sum_T \delta_{S,T}(i) \Delta Q_T \right|^{n-1} = 0 \quad [14.18]$$

avendo indicato con m il numero delle maglie e con $\delta_{S,T}(i)$ un coefficiente che ha i seguenti valori:

$$\delta_{S,T}(i) = 0 \quad \text{se il lato } (i) \text{ non è comune alle maglie } S \text{ e } T;$$

$$\delta_{S,T}(i) = +1, -1 \quad \text{se il lato } (i) \text{ è comune alle maglie } S \text{ e } T \text{ e i versi positivi di rotazione delle maglie sono rispettivamente concordi o discordi su tale lato.}$$

Detto l il numero dei lati ed n il numero dei nodi, il numero delle maglie risulta essere $m = l - (n + 1)$.

La [14.18] generalizza la [14.16]. Seguendo il procedimento applicato allora si ottiene il sistema di m equazioni lineari del tipo, per la maglia S :

$$n \sum_T^m \{ \sum_i r_i \bar{Q}_i |^{n-1} \delta_{S,T}(i) \} \Delta Q'_T = - \sum_i r_i \tilde{Q}_i |\tilde{Q}_i|^{n-1} \quad [14.19]$$

in numero pari al numero delle maglie. Le incognite del sistema sono le m portate correttive $\Delta Q'_T$ di prima approssimazione. Naturalmente, eseguite le correzioni $\Delta Q'_T$ su ciascuna maglia, il procedimento può essere ripetuto iterativamente.

Il secondo modo di operare, quello detto del *bilanciamento delle portate* è analogo al precedente, salvo lo scambio di ruolo fra le portate e i carichi. Si prefissano tutti i carichi in modo compatibile con la condizione espressa dalla [14.15]. Ciascuna portata interna Q_i si può esprimere in funzione della perdita di carico $h_{i1} - h_{i2}$ sullo stesso lato con la

$$Q_i = \frac{|h_{i1} - h_{i2}|^{(n+1)/n}}{r_i^{1/n} (h_{i1} - h_{i2})};$$

detta Δh_K la correzione da portare al carico nel nodo K per verificare la condizione di continuità per le portate confluenti al nodo stesso si ha

$$\sum_i \frac{|h_{i1} - h_{i2} + \Delta h_K|^{(n+1)/n}}{r_i^{1/n} (h_{i1} - h_{i2} + \Delta h_K)} + Q_K = 0;$$

condizione equivalente, per i carichi, alla precedente [14.16] per le portate. Operando in modo analogo si ottiene la correzione di prima approssimazione

$$\Delta h'_K = \frac{n \sum_i \frac{|h_{i1} - h_{i2}|^{(n+1)/n}}{r_i^{1/n} (h_{i1} - h_{i2})} + Q_K}{\sum_i \frac{1}{r_i^{1/n} (h_{i1} - h_{i2})^{(n-1)/n}}}$$

Infine, applicando il metodo di Newton direttamente alla risoluzione di un sistema di equazioni non lineari del tipo

$$\sum_i \frac{|(h'_H + \Delta h_H) - (h'_K + \Delta h_K)|^{(n+1)/n}}{r_i^{1/n} \{ (h'_H + \Delta h_H) - (h'_K + \Delta h_K) \}} + Q_K = 0,$$

si ottiene il sistema

$$\begin{aligned} \Delta h'_K \sum_i \frac{1}{nr_i^{1/n} (h_{i1} - h_{i2})^{(n-1)/n}} - \sum_i \frac{\Delta h'_H}{nr_i^{1/n} (h_{i1} - h_{i2})^{(n-1)/n}} &= \\ = \sum_i \frac{|(h_{i1} - h_{i2})|^{(n+1)/n}}{r_i^{1/n} (h_{i1} - h_{i2})} + Q_K & \quad [14.20] \end{aligned}$$

che consente la determinazione contestuale delle correzioni da apportare a tutti i carichi piezometrici incogniti. Questo procedimento, del bilanciamento delle portate, risulta più conveniente del precedente nei casi di disservizio della rete, perché permette di trattarli partendo dalla conoscenza del carico piezometrico nel nodo dove è accaduto l'incidente.

Con l'avvento dei calcolatori numerici, accanto al metodo ora esposto si sta affermando anche un altro procedimento iterativo, utile per la sua rapida convergenza. Si tratta del metodo detto dell'*analisi lineare* basato sulla seguente linearizzazione dell'equazione delle perdite di carico

$$h_{i1} - h_{i2} = r_i Q_i |Q_i|^{n-1} \cong r_i |\tilde{Q}_i|^{n-1} Q_i = \tilde{r}_i Q_i \quad [14.21]$$

nella quale \tilde{Q}_i è un primo valore approssimato della portata sul lato (i).

Per la precisazione del metodo si rimanda alle ricerche specifiche sull'argomento (si veda, ad esempio, Wood e Charles, 1972).

14.6. Variazioni graduali di portata.

Una condotta può essere destinata ad erogare parte o tutta la sua portata lungo un certo percorso: è il caso delle condotte previste per il servizio distributivo degli acquedotti, per l'alimentazione delle conche di navigazione, e per alcuni tipi di irrigazione. L'ipotesi più frequente che si pone è quella di una portata erogata q costante per unità di lunghezza della condotta. Indicando con Q_2 la portata e con H_2 il carico effettivo della sezione terminale, la portata in una sezione generica distante x dallo sbocco vale

$$Q = Q_2 + qx.$$

Si ammette che le perdite di carico effettivo connesse alla partizione della corrente, considerate nel paragrafo 14.3, siano trascurabili rispetto a quelle per resistenze. Queste ultime sono fornite dall'equazione del moto

$$\frac{dH}{dx} = \frac{8\lambda}{g\pi^4} \frac{Q^2}{D^5},$$

scritta con segno cambiato in accordo con il cambiamento di segno delle ascisse (cfr. figura 14.9).

Assumendo λ indipendente dal numero di Reynolds, si ottiene

$$H_1 - H_2 = \frac{8\lambda L}{g\pi^2 D^5} \left(Q_2^2 + Q_2 qL + \frac{q^2 L^2}{3} \right) \quad [14.22]$$

con qL la portata totale distribuita nel tronco lungo L .

Se $Q_2 = 0$, la perdita di carico dovuta a una portata erogata tutta uniformemente lungo il percorso è 1/3 della perdita necessaria per l'erogazione della stessa portata all'estremità.

Per quanto riguarda il carico piezometrico si ha

$$\begin{aligned} h_1 - h_2 &= H_1 - H_2 - \frac{1}{2g} (U_1^2 - U_2^2) = \\ &= \frac{8\lambda L}{g\pi^2 D^5} \left(Q_2^2 + Q_2 qL + \frac{q^2 L^2}{3} \right) - \frac{8}{g\pi^2 D^4} [(Q_2 + qL)^2 - Q_2^2]. \end{aligned} \quad [14.23]$$

Quando $Q_2 = 0$, l'eq. [14.23] mostra che il carico piezometrico raggiunge un valore pari a quello finale h_2 alla distanza dall'estremità di valle $x = 3D/\lambda$. Procedendo verso valle, come mostra la figura 14.9, il carico piezometrico diminuisce ancora fino a raggiungere il suo valore minimo alla distanza $x = 2D/\lambda$. Da questo punto il carico piezometrico cresce nel senso del moto fino al valore finale $h_2 = H_2$, che viene raggiunto con tangente orizzontale perché in quella sezione la portata si annulla.

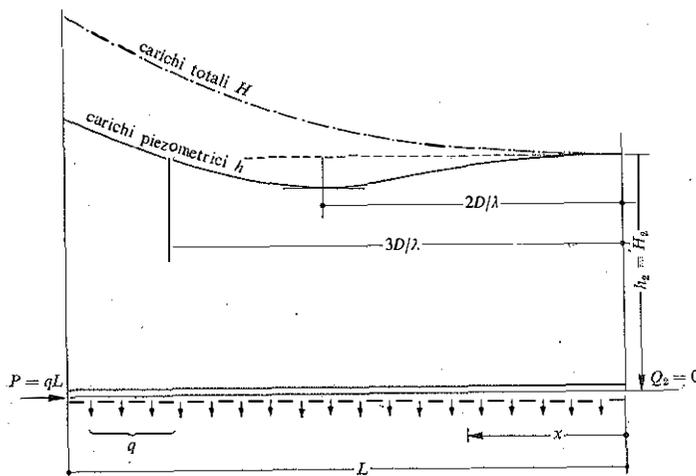


Fig. 14.9. - Deflusso con distribuzione uniforme di portata lungo il percorso.

14.7. Moto permanente isoterma di un aeriforme.

L'equazione del moto permanente dei fluidi con densità variabile non differisce da quella dei fluidi a densità costante; quindi, nelle condotte cilindriche di sezione circolare, si ha

$$-\frac{dH}{ds} = \frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2g}, \quad [14.24]$$

mentre l'equazione di continuità, che impone la conservazione della portata massica, assume la forma

$$Q_M = \varrho Q = \varrho \Omega U = \text{cost.} \quad [14.25]$$

Il coefficiente di resistenza λ è calcolabile con le formule riportate nel capitolo 13 in funzione della scabrezza relativa della tubazione e del numero di Reynolds

$$Re = \frac{\varrho U D}{\mu} = \frac{Q_M}{\mu} \frac{D}{\Omega},$$

che conserva lo stesso valore in ogni sezione della condotta cilindrica. Assunto il moto barotropico, il carico totale H vale

$$H = z + \int \frac{dp}{\gamma} + \frac{U^2}{2g}$$

e quindi l'equazione del moto [14.24] diventa

$$-\frac{dz}{ds} - \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{ds} - \frac{d}{ds} \left(\frac{U^2}{2g} \right) = \frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2g}$$

che, nelle condotte orizzontali, si riduce alla

$$-\frac{1}{\varrho} \frac{dp}{ds} - U \frac{dU}{ds} = \frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2}, \quad [14.26]$$

utilizzata anche per variazioni moderate di quota, perché di solito nel moto dei gas tali variazioni sono trascurabili rispetto alle corrispondenti variazioni dell'altezza rappresentatrice della pressione.

In forza dell'equazione di continuità, essendo $\Omega = \text{cost.}$, si ha

$$dU = -\frac{U}{\varrho} d\varrho.$$

Se si assume l'equazione di stato nella forma valida per i gas molto rarefatti

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{\mathcal{R}\tau}{N}$$

dove N è la massa di una kilomole del gas ed \mathcal{R} vale costantemente $8314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ (cfr. paragrafo 1.6), e si ritiene il moto *isoterma*, risulta

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\varrho}{\varrho}$$

Tenendo conto di queste espressioni e della $U = Q_M/\varrho\Omega$ si può esprimere la [14.26] in termini della sola variabile p e della portata costante Q_M . Si ottiene

$$-\frac{pN}{\mathcal{R}\tau} dp + \frac{Q_M^2}{\Omega^2} \frac{dp}{p} = \frac{\lambda}{D} \frac{Q_M^2}{2\Omega^2} ds$$

ossia

$$-p dp = \frac{\mathcal{R}\tau Q_M^2}{2\Omega^2 N} \left(\frac{\lambda}{D} ds - 2 \frac{dp}{p} \right). \quad [14.27]$$

Questa equazione si integra immediatamente fra due sezioni 1 e 2 distanti L e risulta

$$p_1^2 - p_2^2 = \frac{\mathcal{R}\tau Q_M^2}{N\Omega^2} \left(\frac{\lambda}{D} L + 2 \ln \frac{p_1}{p_2} \right) \quad [14.28]$$

nella quale si può sostituire $\mathcal{R}\tau/N$ con il rapporto fra una pressione di riferimento p_0 e la densità del gas $\varrho_{0\tau}$ a quella pressione ed alla temperatura costante τ del moto. Spesso il termine logaritmico risulta trascurabile rispetto all'altro fra parentesi e ciò consente l'ulteriore semplificazione

$$p_1^2 - p_2^2 = \frac{\mathcal{R}\tau Q_M^2}{N\Omega^2} \cdot \frac{\lambda}{D} L \quad [14.29]$$

dell'equazione del moto permanente-isoterma di un aeriforme.

14.8. Misuratori di portata: venturimetri, diaframmi e boccagli.

Il venturimetro rappresenta il prototipo dei misuratori di portata in pressione basati sulla misura della variazione di pressione provocata da uno strozzamento della corrente. Il nome del dispositivo deriva da G. B. Venturi che nel 1797 pubblicò un'importante memoria dedicata allo studio di questi fenomeni.

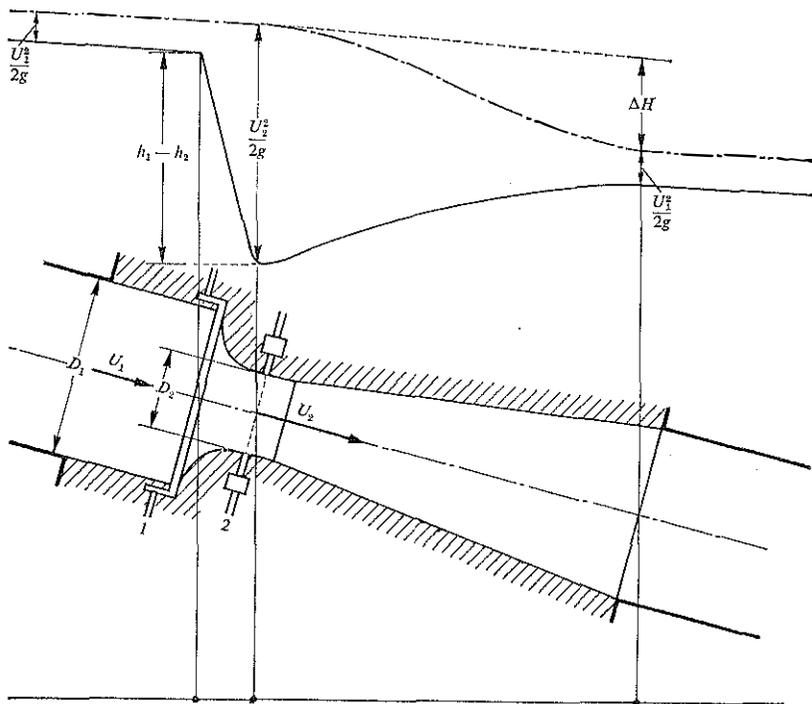


Fig. 14.10. - Venturimetro.

La figura 14.10 mostra la sezione di un venturimetro nella versione unificata: esso è costituito da un rapido convergente, che connette la sezione circolare di area Ω_1 e diametro D_1 della tubazione alla sezione ristretta di misura, di area Ω_2 e diametro D_2 , seguito da un graduale allargamento conico con un angolo totale di apertura $\leq 15^\circ$. Nella sezione dove ha origine il restringimento e nella sezione ristretta sono praticate diverse prese di pressione fra loro collegate in ciascuna sezione; le rispettive uscite vengono connesse ad un manometro differenziale che consente la valutazione della differenza di carico piezometrico

$$h_1 - h_2$$

fra le sezioni 1 e 2.

Poiché nello stesso tratto le perdite di carico totale sono trascurabili, si può scrivere l'equazione di Bernoulli per il moto permanente

$$g(z_2 - z_1) + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2} = 0. \quad [14.30]$$

Per la permanenza del moto vale inoltre l'equazione di continuità

$$Q_M = \varrho_1 \Omega_1 U_1 = \varrho_2 \Omega_2 U_2. \quad [14.31]$$

Se la densità ϱ del fluido non varia apprezzabilmente, come accade sempre per i *liquidi*, le due equazioni precedenti diventano

$$U_2^2 - U_1^2 = 2g \left(z_1 - z_2 + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} \right)$$

$$Q = \Omega_1 U_1 = \Omega_2 U_2,$$

dalle quali, tenuto presente che il carico piezometrico $h = z + p/\gamma$ è costante in ciascuna sezione, segue

$$Q^2 \left(\frac{1}{\Omega_2^2} - \frac{1}{\Omega_1^2} \right) = 2g(h_1 - h_2)$$

ossia

$$Q = C_Q \Omega_2 \sqrt{2g(h_1 - h_2)} \quad [14.32]$$

con

$$C_Q = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right)^2}}.$$

Delle condizioni reali di deflusso, ossia delle modeste perdite di energia dovute alla viscosità del fluido e degli eventuali effetti di contrazione della vena, si può tener conto introducendo, quale moltiplicatore, un coefficiente correttivo sperimentale $C_v \leq 1$; il coefficiente di efflusso risulta quindi espresso dalla

$$C_Q = \frac{C_v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right)^2}}. \quad [14.33]$$

La figura 14.14 riporta i valori sperimentali di C_Q per misuratori unificati, in funzione del rapporto di strozzamento Ω_2/Ω_1 e del numero di Reynolds calcolato nella condotta di diametro D_1 a monte del venturimetro. A linea intera sono rappresentati i valori di C_Q nel campo dei numeri di Reynolds consigliabili per ciascun rapporto di strozzamento.

Quando invece le variazioni di densità sono apprezzabili, occorre precisare il legame barotropico $\varrho = \varrho(p)$. Di norma l'espansione del gas fra

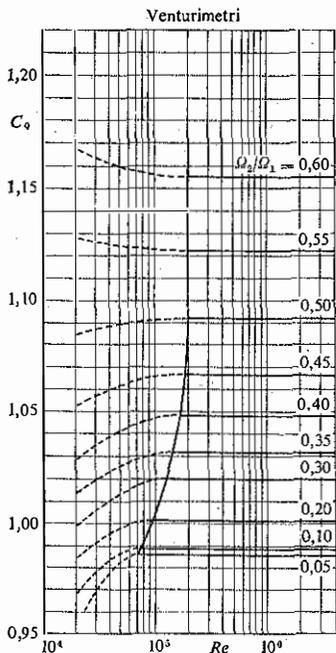


Fig. 14.11. - Valori del coefficiente di efflusso C_d dei venturimetri.

le sezioni 1 e 2 avviene attraverso un processo isentropico retto dall'equazione

$$\frac{p_1}{\rho_1^K} = \frac{p_2}{\rho_2^K} = \text{cost}$$

con $K = c_p/c_v$, rapporto tra il calore specifico a pressione costante e il calore specifico a volume costante (circa uguale ad 1,4 per gas biatomici e per l'aria).

L'equazione di Bernoulli [14.30] diventa

$$g(z_2 - z_1) + \frac{p_1^{1/K}}{\rho_1} \int_1^2 \frac{dp}{p^{1/K}} + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2} = 0 \quad [14.34]$$

da cui deriva

$$U_2^2 - U_1^2 = 2g(z_1 - z_2) + 2 \frac{K}{K-1} \frac{p_1^{1/K}}{\rho_1} (p_1^{(K-1)/K} - p_2^{(K-1)/K}).$$

Per i gas e i vapori il termine $2g(z_1 - z_2)$ è generalmente trascurabile rispetto all'altro termine a secondo membro. Utilizzando anche l'equazione di continuità [14.31] segue

$$Q_M = \frac{\varrho_1 \varrho_2 \Omega_1 \Omega_2}{\sqrt{\varrho_1^2 \Omega_1^2 - \varrho_2^2 \Omega_2^2}} \sqrt{2 \frac{K}{K-1} \cdot \frac{p_1}{\varrho_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(K-1)/K} \right]} =$$

$$= \frac{\Omega_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right)^2 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{2/K}}} \cdot \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1/K} \sqrt{2 \frac{K}{K-1} p_1 \varrho_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(K-1)/K} \right]}. \quad [14.35]$$

Per tener conto delle condizioni reali di deflusso si può introdurre anche qui il coefficiente correttivo C_Q ed esprimere la portata massica con la relazione

$$Q_M = C_Q \varepsilon_c \Omega_2 \sqrt{2 \varrho_1 (p_1 - p_2)} \quad [14.36]$$

nella quale il coefficiente di portata C_Q è dato dalla precedente eq. [14.33] ed ε_c è un coefficiente che esprime l'influenza della comprimibilità del fluido; per i liquidi $\varepsilon_c = 1$ e l'equazione della portata si riduce ovviamente

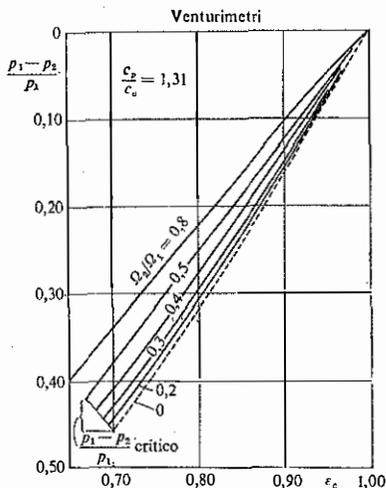


Fig. 14.12. - Venturimetri: coefficiente di influenza della comprimibilità ε_c per vapore d'acqua surriscaldato con $K = c_p/c_v = 1,31$.

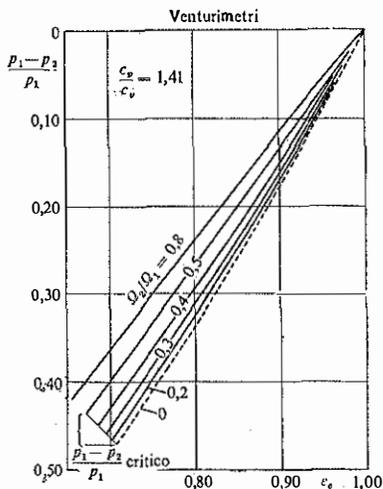


Fig. 14.13. - Venturimetri: coefficiente di influenza della comprimibilità ε_c per gas biatomici ed aria con $K = c_p/c_v = 1,41$.

alla [14.32]. Per gli aeriformi, dal confronto con la [14.35] si ottiene

$$\varepsilon_c = \sqrt{\frac{1 - (\Omega_2/\Omega_1)^2}{1 - \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)^2 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{2/K}}} \cdot \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/K} \sqrt{\frac{K}{K-1} \cdot \frac{1}{1 - (p_2/p_1)} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(K-1)/K}\right]} \quad [14.37]$$

che mostra come il coefficiente ε_c dipenda dal rapporto di pressione p_2/p_1 , dal rapporto di strozzamento Ω_2/Ω_1 e dal valore dell'esponente $K = c_p/c_v$. Nelle figure 14.12 e 14.13 sono rappresentati valori di ε_c per vapore d'acqua e per gas biatomici ed aria.

L'errore temibile complessivo di misura della portata è dell'ordine dell'1% se il venturimetro rispetta il dimensionamento e le forme unificate e se esso è montato in una tubazione senza accidentalità per un tratto lungo 10÷20 diametri a monte e 5÷10 diametri a valle, rispettivamente per rapporti di strozzamento $\Omega_2/\Omega_1 = 0,2\div 0,4$.

Per quanto riguarda infine le perdite di carico totale nel tronco divergente a valle della strozzatura, esse non sono di facile determinazione, pur dipendendo fondamentalmente dalla lunghezza del diffusore. Per venturimetri corti e per Ω_2/Ω_1 maggiori di 0,3 le perdite ΔH sono comprese fra il 7% e il 15÷20% del dislivello piezometrico $h_1 - h_2$ fra le sezioni 1 e 2.

Per la misura di portata delle correnti fluide in condotti in pressione di sezione circolare si usano ordinariamente anche *boccagli* e *diaframmi*, di cui nelle figure 14.14 e 14.15 sono rappresentati due modelli unificati. Il funzionamento di questi dispositivi, basati sempre sullo strozzamento

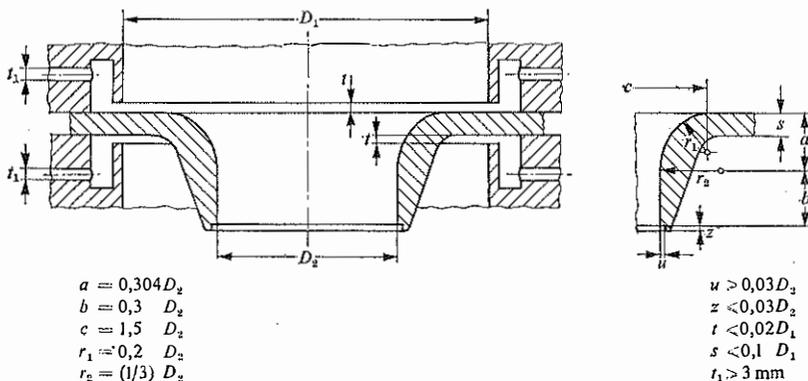


Fig. 14.14. - Boccaglio.

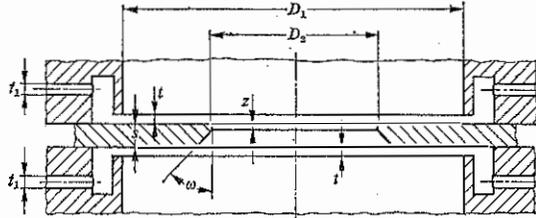


Fig. 14.15. - Diaframma.

$s < 0,1 D_1$
 $z < 0,02 D_1$
 $\phi > 30^\circ$ (di norma 45°)

$t < 0,02 D_1$
 $t_1 > 3 \text{ mm}$

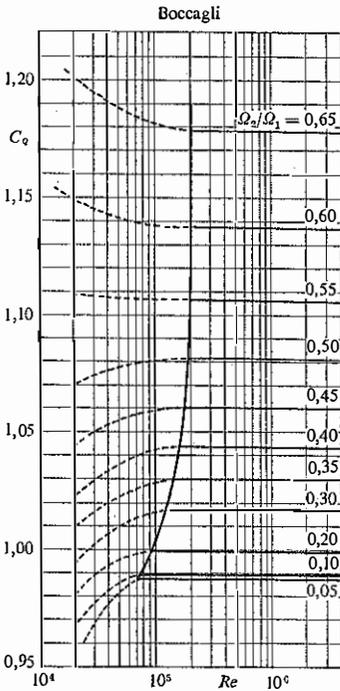


Fig. 14.16. - Valori del coefficiente di efflusso C_Q dei boccali.

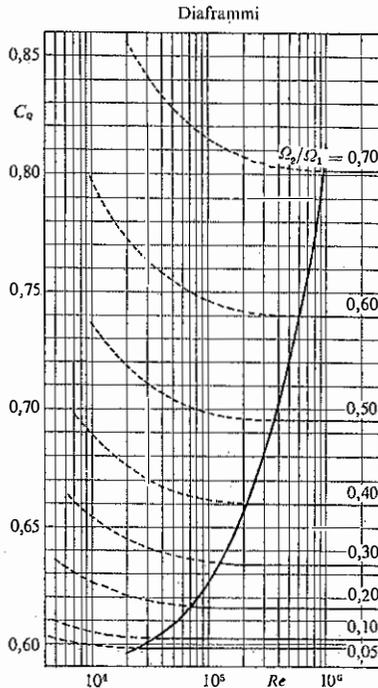


Fig. 14.17. - Valori del coefficiente di efflusso C_Q dei diaframmi.

della corrente, è del tutto analogo a quello del venturimetro: la portata massica risulta quindi espressa dalla

$$Q_M = C_q \varepsilon_c \Omega_2 \sqrt{2 \rho_1 (p_1 - p_2)}$$

con ρ_1 e p_1 la densità e la pressione nella sezione a monte del misuratore, Ω_2 l'area della sezione ristretta del boccaglio o del diaframma e p_2 la pressione subito a valle del dispositivo; C_q è il coefficiente di portata dato dalle figure 14.16 e 14.17 in funzione del coefficiente di strozzamento Ω_2/Ω_1 (a linea continua la parte indipendente dal numero di Reynolds, di impiego consigliabile) ed ε_c è il coefficiente di influenza della comprimibilità rappresentato nelle figure 14.18 e 14.19 in funzione del rapporto di pressione $(p_2/p_1)^{1/K}$ e del rapporto di strozzamento.

Nel caso di liquidi, per i quali si può ritenere la densità costante, il coefficiente ε_c vale 1 e la portata volumetrica è espressa dalla

$$Q = C_q \Omega_2 \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$

dove il coefficiente di portata C_q è fornito sempre dai diagrammi delle figure 14.16 e 14.17 rispettivamente per boccagli e per diaframmi.

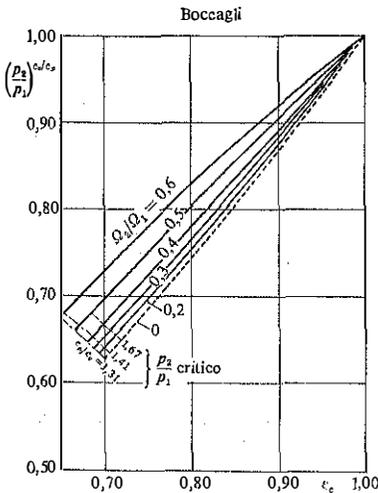


Fig. 14.18. - Boccagli: valori del coefficiente di influenza della comprimibilità ε_c in funzione del rapporto di pressione $(p_2/p_1)^{1/K}$.

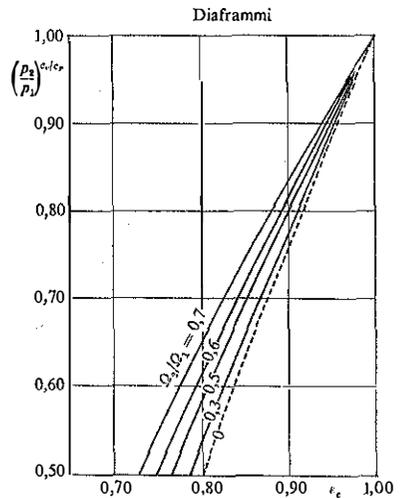


Fig. 14.19. - Diaframmi: valori del coefficiente di influenza della comprimibilità ε_c in funzione del rapporto di pressione $(p_2/p_1)^{1/K}$.

ESEMPI

Esempio 14.1

Calcolo delle perdite di carico totale e delle variazioni del carico piezometrico in un divergente ed in un convergente, entrambi conici, percorsi da un fluido a densità costante in moto permanente assolutamente turbolento.

Si fa riferimento alle indicazioni delle figure 14.1 e 14.2: D_1 e D_2 sono rispettivamente i diametri iniziale e finale del tronco conico, lungo L . Si ha

$$D = D_1 - \delta \cdot s \quad \text{con} \quad \delta = \frac{D_2 - D_1}{L} \quad \begin{cases} > 0 & \text{divergente} \\ < 0 & \text{convergente} \end{cases}$$

L'equazione di continuità [14.1] si scrive

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} U = \text{cost}$$

e l'equazione del moto assume la forma [14.3]

$$-\frac{dH}{ds} = \frac{8\lambda}{g\pi^2} \frac{Q^2}{D^5}$$

Si può assumere per λ un valore costante, ottenuto ad esempio dalla formula di Prandtl-Nikuradse

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,0 \log \frac{3,71 D_m}{\varepsilon}$$

in corrispondenza del diametro medio $D_m = \frac{1}{2}(D_1 + D_2)$. Allora, tenendo presente la premessa dipendenza lineare di D da s , l'integrale della [14.3] nel tronco lungo L risulta

$$H_1 - H_2 = \frac{2\lambda Q^2}{g\pi^2 \delta} \left(\frac{1}{D_1^4} - \frac{1}{D_2^4} \right)$$

Volendo tener conto della variazione del coefficiente di attrito λ con il diametro D , conviene impiegare una formula monomia, tipo quella di Gauckler-Strickler (v. paragrafo 13.6). Allora l'equazione del moto [14.3] diventa

$$-\frac{dH}{ds} = \beta_r \frac{Q^2}{D^5} = \frac{10,3}{k_s^2} \frac{Q^2}{D^{5,33}}$$

e il suo integrale vale

$$H_1 - H_2 = \frac{2,38 Q^2}{k_s^2 \delta} \left(\frac{1}{D_1^{4,33}} - \frac{1}{D_2^{4,33}} \right)$$

La variazione del carico piezometrico nello stesso tronco L è data evidentemente dalla relazione

$$h_1 - h_2 = H_1 - H_2 - \left(\frac{U_1^2}{2g} - \frac{U_2^2}{2g} \right) = H_1 - H_2 - \frac{8Q^2}{g\pi^2} \left(\frac{1}{D_1^4} - \frac{1}{D_2^4} \right)$$

nella quale $H_1 - H_2$ è sostituibile con una delle espressioni precedenti.

L'andamento indicativo delle linee dei carichi totale e piezometrico è rappresentato nelle figure 14.1 e 14.2.

Valutazioni numeriche

a) *Divergente* in lamiera saldata, in servizio corrente

$$Q = 0,250 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}; \quad D_1 = 0,300 \text{ m}, \quad D_2 = 0,600 \text{ m}, \quad L = 3,00 \text{ m}; \\ \delta = (D_2 - D_1)/L = 0,10.$$

Valore di λ corrispondente al diametro medio $D_m = 450 \text{ mm}$ e alla scabrezza $\epsilon = 1,0 \text{ mm}$

$$\lambda = \left[2,0 \log \frac{3,71 \times 450}{1,0} \right]^{-2} = 0,024.$$

Con questo valore si ottiene la perdita effettiva

$$H_1 - H_2 = \frac{2 \times 0,024 \times 0,250^2}{9,81 \pi^2 \times 0,10} \left(\frac{1}{0,3^4} - \frac{1}{0,6^4} \right) = 0,036 \text{ m}$$

e la variazione di carico piezometrico

$$h_1 - h_2 = 0,036 - \frac{8(0,250)^2}{9,81 \pi^2} \left(\frac{1}{0,3^4} - \frac{1}{0,6^4} \right) = 0,036 - 0,598 = -0,562 \text{ m}.$$

Impiegando la formula di Gauckler-Strickler, con $k_s = 80 \text{ m}^{1/3} \text{ s}^{-1}$, si ha

$$H_1 - H_2 = \frac{2,38(0,250)^2}{80^2 \cdot 0,10} \left(\frac{1}{0,3^{4,33}} - \frac{1}{0,6^{4,33}} \right) = 0,040 \text{ m}$$

e quindi

$$h_1 - h_2 = 0,040 - 0,598 = -0,558 \text{ m}.$$

Nei divergenti si verificano generalmente delle perdite supplementari dovute al rallentamento della corrente. Nel caso in esame, essendo $\approx 6^\circ$ l'angolo totale θ di apertura, si può assumere al massimo un coefficiente di perdita $K_\theta = 0,10$, per cui risulta l'ulteriore perdita

$$\Delta H = \xi \frac{U_2^2}{2g} = K_\theta \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2 \frac{U_2^2}{2g} = 0,10 \times 9 \times 0,040 = 0,036 \text{ m}.$$

In definitiva si ottiene

$$H_1 - H_2 = 0,076 \text{ m} \quad \text{e} \quad h_1 - h_2 = -0,522 \text{ m}$$

assumendo per le perdite la valutazione più onerosa.

b) *Convergente* in lamiera saldata, in servizio corrente.

$$Q = 0,250 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}; \quad D_1 = 0,600 \text{ m}, \quad D_2 = 0,300 \text{ m}, \quad L = 3,00 \text{ m};$$

$$\delta = (D_2 - D_1)/L = -0,10.$$

Con l'ipotesi $\lambda = 0,024 = \text{cost}$, si ottiene

$$H_1 - H_2 = 0,036 \text{ m},$$

$$h_1 - h_2 = 0,036 + 0,598 = 0,634 \text{ m};$$

mentre utilizzando la formula di Gauckler-Strickler, con $k_s = 80 \text{ m}^{1/3} \text{ s}^{-1}$, segue

$$H_1 - H_2 = 0,040 \text{ m},$$

$$h_1 - h_2 = 0,040 + 0,598 = 0,638 \text{ m}.$$

Nel caso del convergente non sono temibili perdite addizionali.

Esempio 14.2

Calcolo della portata liquida che defluisce, in condizioni permanenti, nel circuito schematizzato nella fig. 14.20, alimentato da un serbatoio a livello costante, pari a 22,50 m sul baricentro della sezione di sbocco del circuito stesso, costituito da:

- 1) condotta \varnothing 200 mm lunga 8 m,
- 2) condotta \varnothing 150 mm lunga 13 m,
- 3) condotta \varnothing 300 mm lunga 14 m,
- 4) ugello convergente da \varnothing 300 mm alla sezione di efflusso \varnothing 90 mm.

Tutte le tubazioni sono in acciaio in condizioni di esercizio corrente.

Assumendo il piano orizzontale di riferimento delle quote passante per il bari-

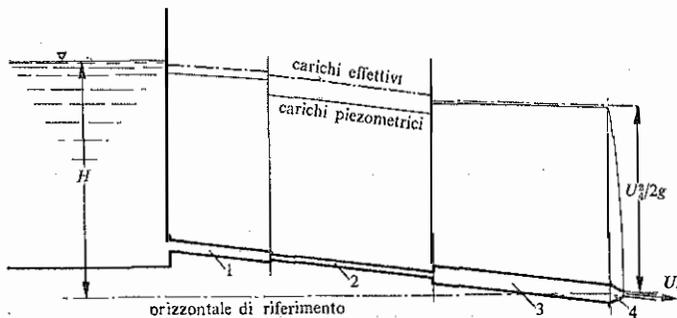


Fig. 14.20. - Condotte in serie.

centro della sezione di efflusso, indichiamo con:

$H = 22,50$ m il carico effettivo nel serbatoio (coincidente con quello piezometrico),

U_4 la velocità di efflusso, con coefficiente di contrazione $C_c = 0,80$,

$\frac{U_4^2}{2g}$ il carico effettivo nella sezione di sbocco (coincidente con l'altezza cinetica).

L'equazione del moto risulta

$$H - \frac{U_4^2}{2g} = \frac{\lambda_1}{D_1} \frac{U_1^2}{2g} L_1 + \frac{\lambda_2}{D_2} \frac{U_2^2}{2g} L_2 + \frac{\lambda_3}{D_3} \frac{U_3^2}{2g} L_3 + \text{perdite localizzate.}$$

Valutazione delle perdite localizzate

imbocco a spigolo vivo condotta 1	$0,50(U_1^2/2g)$
restringimento 1-2 ($\Omega_2/\Omega_1 = 0,56$)	$0,25(U_3^2/2g)$
allargamento 2-3 ($\Omega_3/\Omega_2 = 4$)	$9(U_3^2/2g)$
ugello sagomato 4	$0,05(U_4^2/2g)$

Tenuto conto dell'equazione di continuità

$$Q = \Omega_1 U_1 = \Omega_2 U_2 = \Omega_3 U_3 = \Omega_4 U_4$$

dove Ω_4 indica l'area della sezione contratta del getto, si ottiene

$$H = \frac{Q^2}{2g} \left(\sum_1^3 \frac{\lambda_i}{D_i} \frac{L_i}{\Omega_i^2} + \frac{0,5}{\Omega_1^2} + \frac{0,25}{\Omega_2^2} + \frac{9}{\Omega_3^2} + \frac{1,05}{\Omega_4^2} \right).$$

Ritenendo, in prima approssimazione, il moto ovunque assolutamente turbolento, i valori di λ sono calcolabili in funzione della sola scabrezza relativa. Posto $\varepsilon = 0,3 \cdot 10^{-3}$ m si ha

$D_1 = 0,200$ m ,	$\varepsilon/D_1 = 1,5 \cdot 10^{-3}$,	$\lambda_1 = 0,0217$,
$D_2 = 0,150$ m ,	$\varepsilon/D_2 = 2,0 \cdot 10^{-3}$,	$\lambda_2 = 0,0234$,
$D_3 = 0,300$ m ,	$\varepsilon/D_3 = 1,0 \cdot 10^{-3}$,	$\lambda_3 = 0,0196$.

Il calcolo dei termini fra parentesi è riportato nel quadro seguente

	L_i (m)	D_i (m)	Ω_i (m ²)	$\lambda_i L_i / D_i \Omega_i^2$ (m ⁻⁴)	ξ_i / Ω_i^2 (m ⁻⁴)
1	8	0,200	0,0314	879	506
2	13	0,150	0,0177	6494	800
3	14	0,300	0,0707	183	1 801
4	(getto)	0,080	0,0050	—	41 557
Totale =				7 556	+ 44 664 = 52 220 m ⁻⁴

Ne deriva

$$Q = \sqrt{\frac{2gH}{52220}} = 0,0919 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} = 91,9 \text{ l s}^{-1}.$$

A questa portata corrispondono, con $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, pari alla viscosità cinematica dell'acqua a 20°C , i seguenti valori del numero di Reynolds e del coefficiente λ :

	U_i	$Re_i = U_i D_i \cdot 10^6$	ε/D_i	λ_i
1	2,93 m s^{-1}	$5,9 \cdot 10^6$	$1,5 \cdot 10^{-3}$	0,0220
2	5,21	$7,8 \cdot 10^6$	$2,0 \cdot 10^{-3}$	0,0234
3	1,30	$3,9 \cdot 10^6$	$1,0 \cdot 10^{-3}$	0,0204

Si vede che le variazioni, rispetto ai valori di λ assunti inizialmente, sono di peso trascurabile. Ripetendo il calcolo si trova infatti

$$\sum_1^3 \frac{\lambda_i L_i}{D_i \Omega_i^3} = 7,576$$

con una differenza di appena 0,26% rispetto alla precedente valutazione delle perdite distribuite e quindi del tutto trascurabile sul totale delle perdite.

Esempio 14.3

Calcolo delle portate nelle condotte 1 e 2 colleganti in parallelo due serbatoi, come mostra la fig. 14.21, considerando il moto permanente ed il fluido a densità costante.

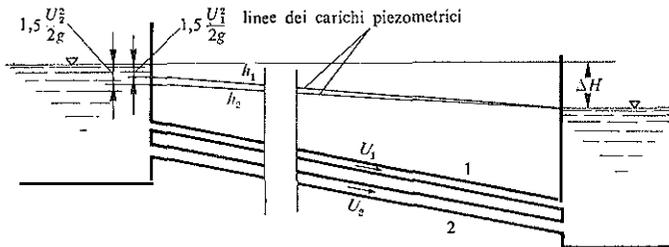


Fig. 14.21. - Condotte in parallelo.

Si contrassegnano con gli indici 1 e 2 le grandezze relative alle corrispondenti condotte.

Le equazioni del moto sono

$$\Delta H = H_1 - H_2 = \left(\frac{\lambda_1}{D_1} L + 1,5 \right) \frac{Q_1^2}{2g \Omega_1^3} = \left(\frac{\lambda_2}{D_2} L + 1,5 \right) \frac{Q_2^2}{2g \Omega_2^3}$$

essendo 1,5 la somma dei coefficienti delle perdite localizzate all'imbocco e allo sbocco di ciascuna condotta. Da queste equazioni deriva

$$Q_i = K_i \sqrt{\Delta H} \quad \text{con} \quad K_i^2 = \frac{2g\Omega_i^2}{(\lambda_i/D_i)L + 1,5} \quad (i = 1, 2).$$

Valutazioni numeriche con i dati: diametri e lunghezza delle due condotte $D_1 = 0,200$ m, $D_2 = 0,300$ m, $L = 50$ m, parametro di scabrezza di entrambe le condotte $\varepsilon = 1$ mm, dislivello fra i due serbatoi $\Delta H = 3$ m.

I risultati sono riportati nel quadro seguente:

	λ	K_i ($\text{m}^{\frac{5}{2}} \text{s}^{-1}$)	Q ($\text{m}^3 \text{s}^{-1}$)	U (ms^{-1})	Perdite	
					distrib. (m)	localizz. (m)
condotta 1	0,030	0,0464	0,0804	2,560	2,50	0,50
condotta 2	0,027	0,1278	0,2214	3,131	2,25	0,75
La portata complessiva vale:			0,3018 $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$.			

Esempio 14.4

Calcolo della prevalenza necessaria ad una pompa per far circolare in moto permanente una portata di 80 l s^{-1} di acqua nel circuito della fig. 14.22, costituito da: una tubazione $\varnothing 225$ mm in acciaio bitumato lunga 26 m dalla quale si diramano due condotte dello stesso materiale, una $\varnothing 200$ mm lunga 8 m ed una $\varnothing 100$ mm lunga 10 m, alimentanti due scambiatori di calore. Le due condotte convergono poi in un'unica tubazione $\varnothing 225$ mm in acciaio bitumato, lunga 37 m, la quale termina alla bocca aspirante della pompa.

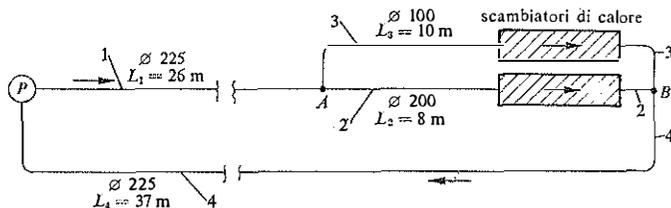


Fig. 14.22. - Schema dell'impianto dell'esempio 14.4.

Gli scambiatori di calore comportano, a regime, una perdita di carico effettivo di: 3,50 m quello sulla condotta $\varnothing 200$ mm e 3,00 m quello sulla condotta $\varnothing 100$ mm.

Indicando con ΔH la prevalenza della pompa, differenza tra il carico effettivo alla mandata e quello all'aspirazione, si ha

$$\Delta H = \frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2g} (L_1 + L_4) + (H_A - H_B) + 2\xi_4 \frac{U^2}{2g}$$

dove λ , D ed U indicano rispettivamente il coefficiente di perdita continua, il diametro e la velocità media nelle condotte 1 e 4 di uguali caratteristiche e di lunghezze L_1 ed L_4 . Il coefficiente ξ_4 è il coefficiente di perdita concentrata in ciascuna curva della condotta 4 e si può ritenere pari a 0,20.

Per quanto riguarda la perdita $H_A - H_B$ nel sistema di condotte 2 e 3 in parallelo, indicando con Δ_2 e Δ_3 le perdite di carico effettivo attraverso ciascun scambiatore di calore, si ottiene

$$H_A - H_B = \xi_{1-2} \frac{U^2}{2g} + \frac{\lambda_2}{D_2} \frac{U^2}{2g} L_2 + \Delta_2 + \xi_{2-4} \frac{U^2}{2g}$$

$$H_A - H_B = \xi_{1-3} \frac{U^2}{2g} + \frac{\lambda_3}{D_3} \frac{U^2}{2g} L_3 + \Delta_3 + 2\xi_3 \frac{U^2}{2g} + \xi_{3-4} \frac{U^2}{2g}$$

essendo i valori di ξ con doppio indice quelli relativi alle perdite nelle giunzioni e ξ_3 il coefficiente di perdita nelle curve della condotta 3. Si può assumere

$$\begin{aligned} \xi_{1-2} &= 0,25, & \xi_{2-4} &= 0,80, \\ \xi_{1-3} &= 1,00, & \xi_{3-4} &= 0,50, & \xi_3 &= 0,20. \end{aligned}$$

Tenuto conto della condizione di continuità

$$Q = Q_2 + Q_3$$

ed indicando con Ω l'area della sezione delle condotte 1 e 4, e rispettivamente con Ω_2 e con Ω_3 quelle delle condotte 2 e 3, si ottiene

$$\Delta H = \frac{Q^2}{2g\Omega^2} \left[\frac{\lambda}{D} (L_1 + L_4) + 2\xi_4 + \xi_{1-2} + \xi_{2-4} \right] + \frac{Q_2^2}{2g\Omega_2^2} \frac{\lambda_2}{D_2} L_2 + \Delta_2,$$

$$\Delta H = \frac{Q^2}{2g\Omega^2} \left[\frac{\lambda}{D} (L_1 + L_4) + 2\xi_4 + \xi_{1-3} + \xi_{3-4} \right] + \frac{(Q - Q_3)^2}{2g\Omega_3^2} \left(\frac{\lambda_3}{D_3} L_3 + 2\xi_3 \right) + \Delta_3.$$

Il coefficiente di scabrezza si assume pari a $\varepsilon = 0,15$ mm; corrispondentemente, nelle condotte di diametro $D_1 = 0,225$ m, $D_2 = 0,200$ m e $D_3 = 0,100$ m si possono prevedere i seguenti valori del coefficiente di resistenza:

condotte 1 e 4	$\varepsilon/D_1 = 0,00067$,	$Re \simeq 4,5 \cdot 10^6$,	$\lambda_1 = 0,0190$,
condotta 2	$\varepsilon/D_2 = 0,00075$,	$Re \simeq 4 \cdot 10^6$,	$\lambda_2 = 0,0195$,
condotta 3	$\varepsilon/D_3 = 0,00150$,	$Re \simeq 2 \cdot 10^6$,	$\lambda_3 = 0,0230$.

Con tali valori dei coefficienti e con $Q = 0,080$ m³ s⁻¹, dalle equazioni precedenti si ottiene

$$\Delta H = 1,395 + 40,29 Q_2^2 + 3,50,$$

$$\Delta H = 1,487 + 14,281 - 357,02 Q_2 + 2 231,4 Q_2^2 + 3,00.$$

Eliminando ΔH fra le due equazioni segue

$$2191,1 Q_2^3 - 357,02 Q_2 + 13,873 = 0$$

da cui

$$Q_2 = 0,064 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1},$$

$$Q_3 = 0,080 - 0,064 = 0,016 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

Con $\nu = 1,01 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ (acqua alla temperatura di 20°C) si ottengono i seguenti valori del numero di Reynolds

$$\text{condotte 1 e 4: } Q = 0,080 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}, \quad U = 2,012 \text{ ms}^{-1}, \quad Re = 4,48 \cdot 10^5$$

$$\text{condotta 2: } Q_2 = 0,064 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}, \quad U_2 = 2,037 \text{ ms}^{-1}, \quad Re = 4,03 \cdot 10^5$$

$$\text{condotta 3: } Q_3 = 0,016 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}, \quad U_3 = 2,037 \text{ ms}^{-1}, \quad Re = 2,02 \cdot 10^5$$

a conferma di quelli previsti per il calcolo di λ .

Per quanto riguarda infine la prevalenza della pompa, risulta

$$\Delta H = 1,395 + 0,165 + 3,50 = 5,060 \text{ m}.$$

Il calcolo è stato eseguito utilizzando la prima equazione del moto nell'impianto (dalla seconda si otterrebbe $\Delta H = 5,059 \text{ m}$, con arrotondamento alla 3^a cifra decimale).

Esempio 14.5

Calcolo della portata d'acqua che effluisce in moto permanente da un irrigatore a pioggia posto all'estremità di una condotta $\varnothing 200 \text{ mm}$ in lamiera saldata, in buone condizioni, lunga 560 m , alimentata da una pompa sommersa installata in un serbatoio il cui livello, praticamente invariante, è ad una quota inferiore di $2,50 \text{ m}$ rispetto alla quota dell'ugello di distribuzione, che ha diametro $\varnothing 60 \text{ mm}$. La caratteristica di funzionamento della pompa, cioè la relazione fra la portata Q e la prevalenza ΔH a numero di giri costante, è rappresentata dalla curva sperimentale della fig. 14.23.

Detti H_1 ed H_2 i carichi effettivi nel serbatoio e nella sezione di efflusso del distributore a pioggia, l'equazione del moto è

$$H_1 + \Delta H - H_2 = \frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2g} L;$$

inoltre, se i carichi sono misurati rispetto alla quota del baricentro della sezione di efflusso ($\varnothing = 60 \text{ mm}$, area $\omega = 2,83 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$) la portata vale

$$Q = C_0 \omega \sqrt{2g H_2}$$

essendo C_0 il coefficiente di portata che, per il tipo di ugello impiegato, si può assumere pari a $0,70$.

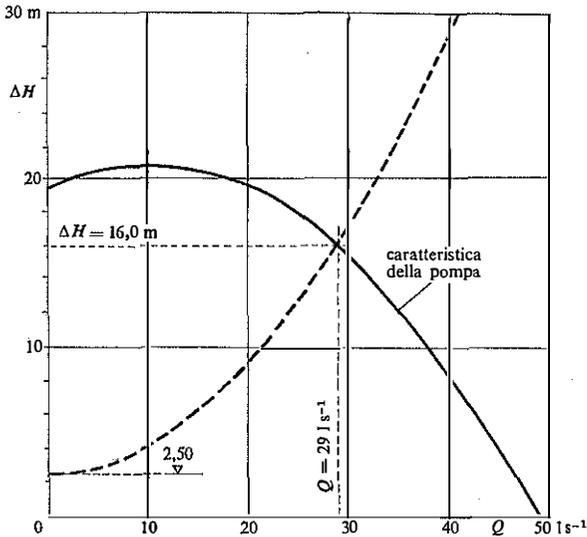


Fig. 14.23. - Caratteristiche della pompa e dell'impianto dell'esempio 14.5.

Sostituendo al carico effettivo nel serbatoio il suo valore $-2,50$ m e ad H_2 il valore che si ricava dall'espressione precedente, l'equazione del moto diventa

$$-2,50 + \Delta H - \frac{Q^2}{C_0^2 \omega^2 2g} = \frac{\lambda}{D} \frac{U^2 L}{2g}$$

tenuto conto della costanza della portata nel moto permanente a densità costante, segue anche

$$\Delta H = 2,50 + \frac{Q^2}{2g\Omega^2} \left(\frac{\Omega^2}{C_0^2 \omega^2} + \lambda \frac{L}{D} \right)$$

essendo Ω l'area della sezione della condotta di diametro D .

Si può ritenere λ indipendente da Re : assunto $\varepsilon = 0,25$ mm, con $D = 0,200$ m risulta $\lambda = 0,021$. Quindi

$$\Delta H = 2,50 + \frac{Q^2}{2g\Omega^2} (252 + 59)$$

equazione che mette in evidenza la parte di carico utilizzata dal distributore a pioggia e la frazione perduta lungo la tubazione. Il primo membro è funzione di Q attraverso la caratteristica della pompa data nella fig. 14.23

$$\Delta H' = f(Q);$$

il secondo membro si può scrivere

$$2,50 + 16060 Q^2 = \Delta H''$$

e rappresenta la caratteristica di funzionamento dell'impianto; la corrispondente curva parabolica è stata riportata pure nella fig. 14.23, per cui l'intersezione fra le due curve, di coordinate

$$Q = 0,029 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}, \quad \Delta H = 16,0 \text{ m}$$

fornisce la soluzione a regime.

Esempio 14.6

Verifica della rete schematizzata nella fig. 14.24 con i dati riportati nella stessa figura.

(L'esempio è tratto da una verifica eseguita su parti dell'acquedotto AMGA di Genova da G. Lombardo nel 1961).

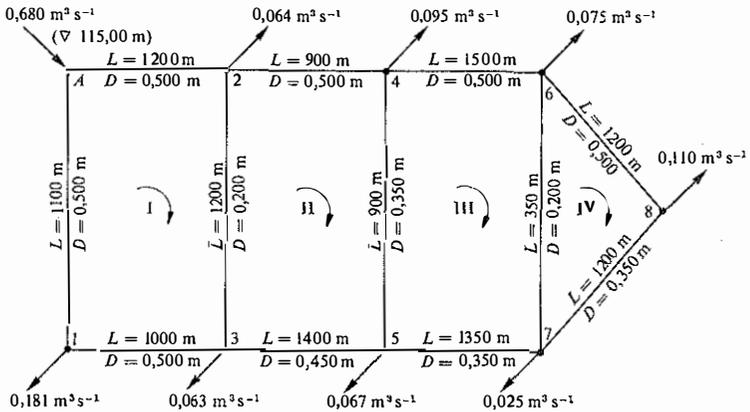


Fig. 14.24. - Schema della rete di condotte dell'esempio 14.6.

Il calcolo è stato condotto prima con il metodo del bilanciamento dei carichi, poi con quello del bilanciamento delle portate.

I coefficienti di resistenza r_i sono stati calcolati impiegando la formula di Gauckler-Strickler

$$r_i = \frac{10,3}{k_s^2 D_i^3} L_i$$

con $k_s = 80 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, ed è stato assunto il valore $n = 2$ per l'esponente dell'eq. [14.13] delle perdite.

Il primo sistema di portate Q'_i , compatibile con le condizioni di continuità nei nodi, è stato ottenuto assumendo lineari le perdite di carico sui lati. Tale scelta è arbitraria e poteva essere sostituita con qualsiasi altro sistema di portate purché

soddisfacenti le condizioni di continuità nei nodi. I valori scelti \bar{Q}'_i sono riportati nel quadro A.

Si è applicata l'eq. [14.19] ad ogni maglia della rete. Tenuto conto del significato del simbolo $\delta_{s,r}(i)$, risulta per la maglia I (con riferimento alla [14.19] in questo caso S è la maglia I, T è successivamente la I, II, III e IV, ed il pedice i si riferisce ai lati della maglia I):

$$\begin{aligned} & 2\{r_{A-2}|\bar{Q}'_{A-2}|1 + r_{2-3}|\bar{Q}'_{2-3}|1 + r_{3-1}|\bar{Q}'_{3-1}|1 + r_{1-A}|\bar{Q}'_{1-A}|1\} \Delta Q'_I + \\ & + 2\{r_{3-2}|\bar{Q}'_{3-2}|(-1)\} \Delta Q'_{II} + 0 \cdot \Delta Q'_{III} + 0 \cdot \Delta Q'_{IV} = \\ & = -r_{A-2} \bar{Q}'_{A-2} |\bar{Q}'_{A-2}| - r_{2-3} \bar{Q}'_{2-3} |\bar{Q}'_{2-3}| - r_{3-1} \bar{Q}'_{3-1} |\bar{Q}'_{3-1}| - r_{1-A} \bar{Q}'_{1-A} |\bar{Q}'_{1-A}| \end{aligned}$$

e analoghe per le altre maglie della rete.

Dal sistema delle quattro equazioni lineari non omogenee sono state ricavate le correzioni $\Delta Q'_I, \dots, \Delta Q'_{IV}$ e quindi le nuove portate

$$\bar{Q}''_i = \bar{Q}'_i + \sum_1^m \delta_{s,r}(i) \Delta Q'_r$$

ossia

$$\begin{aligned} \bar{Q}''_{A-2} &= \bar{Q}'_{A-2} + 1 \cdot \Delta Q'_I + 0 \cdot \Delta Q'_{II} + 0 \cdot \Delta Q'_{III} + 0 \cdot \Delta Q'_{IV}, \\ \bar{Q}''_{2-3} &= \bar{Q}'_{2-3} + 1 \cdot \Delta Q'_I - 1 \cdot \Delta Q'_{II} + 0 \cdot \Delta Q'_{III} + 0 \cdot \Delta Q'_{IV}, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Le portate \bar{Q}'' sono state riportate nel quadro A, insieme con i coefficienti $\delta_{s,r}(i)$. L'operazione è stata ripetuta finché le correzioni sono diventate inapprezzabili sulla 3ª cifra decimale, il che si è verificato alla quinta ripetizione. Le portate risultanti $\bar{Q}'' = Q$ sono indicate nell'ultima riga del quadro A.

Il calcolo, come si è detto, è stato eseguito anche con il metodo del bilanciamento delle portate, pervenendo così ai valori dei carichi nei nodi.

Per questo è stato assunto inizialmente un sistema arbitrario di carichi, tale da soddisfare in ogni maglia alla condizione di somma nulla delle perdite di carico piezometrico calcolate lungo i lati della maglia stessa, seguendo l'assegnato verso di percorrenza. I valori dei carichi scelti in prima approssimazione sono stati riportati nel quadro B.

Applicando ripetutamente l'eq. [14.20] ai nodi 1, 2, ..., 8 si è ottenuto un sistema di otto equazioni lineari non omogenee che ha consentito il calcolo delle correzioni $\Delta h'_1, \dots, \Delta h'_8$ e quindi dei nuovi carichi h'' , riportati nel quadro B.

Continuando con lo stesso procedimento, le correzioni sono risultate inapprezzabili sulla 3ª cifra decimale dopo la XII ripetizione; i valori risultanti h^{XII} sono visibili nel quadro B.

Ovviamente questi valori dei carichi nei nodi sono correlati dalle equazioni del moto in ogni lato

$$h_K - h_P = r_{K-P} Q_{K-P} |Q_{K-P}|,$$

attraverso i coefficienti di resistenza r_{K-P} , alle portate Q_{K-P} risultanti con il primo procedimento. La verifica è immediata, entro i limiti di approssimazione di questo calcolo numerico.

QUADRO A

Maglia	I				II			
	Lato	A-2	2-3	3-1	1-A	2-4	4-5	5-3
L	1200	1200	1000	1100	900	900	1400	1200
D	0,500	0,200	0,500	0,500	0,500	0,350	0,450	0,200
$r_{n=2}$	78	10314	65	71	58	391	159	10314
$\bar{Q}' \cdot 10^3$	347,16301	1,12781	-151,83699	-332,83699	282,03520	11,36437	-89,96480	1,12781
$\delta_{s,r}$	1	1	1	1	0	0	0	-1
	0	-1	0	0	1	1	1	1
	0	0	0	0	0	-1	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0
$\bar{Q}'' \cdot 10^3$	340,26909	34,88602	-158,73091	-339,73091	241,38307	1,72378	-130,61693	-34,88602
.....
$\bar{Q}^v \cdot 10^3$	333	13	-166	-347	256	11	-116	-13

III				IV			Maglia
4-6	6-7	7-5	(5-4)	6-8	8-7	(7-6)	Lato
1500	350	1350	900	1200	1200	350	L
0,500	0,200	0,350	0,350	0,500	0,350	0,200	D
97	3008	587	391	78	521	3008	$r_{n=2}$
175,67083	1,67427	-34,32917	-11,36437	98,99656	-11,00344	-1,67427	$\bar{Q}' \cdot 10^3$
0	0	0	0	0	0	0	$\delta_{s,r}$
0	0	0	-1	0	0	0	
1	1	1	1	0	0	-1	
0	-1	0	0	1	1	1	
144,65930	-2,15409	-65,34070	-1,72378	71,81339	-38,18661	2,15409	$\bar{Q}'' \cdot 10^3$
.....
150	-3	-60	-11	78	-32	3	$\bar{Q}^v \cdot 10^3$

Tutte le lunghezze sono espresse in m e le portate \bar{Q} in $m^3 s^{-1}$.

QUADRO B

Nodo	A	2	3	1	(A)	(2)	4	5	(3)
$r_{n=2}$	78	10314	65	71			58	391	159
h'	115,0000	101,4607	98,0073	103,0179			92,9996	91,1700	
h''	115,000000	106,859434	105,812473	106,773487			103,905 511	105,108 719	
.....
$h^{\Sigma I}$	115,000	106,357	104,650	106,444			102,556	102,510	

(4)	6	7	(5)	(6)	8	(7)	Nodo
97	3008	587		78	521		$r_{n=2}$
	84,3917 103,790877	82,8 967 105,149394			80,5 309 105,051 644		h' h''
.....
	100,370	100,405			99,889		$h^{\Sigma II}$

I carichi sono espressi in m.

Esempio 14.7

Calcolo della perdita di pressione richiesta per il trasporto di una portata massica $Q_M = 9,50 \text{ kg s}^{-1}$ di gas metano alla temperatura di 20°C in una tubazione sub-orizzontale del diametro interno di 300 mm, lunga 1300 m, di acciaio trafilato ed in servizio corrente ($\varepsilon = 0,4 \text{ mm}$). La pressione assoluta iniziale sia $p_1 = 6,20 \text{ bar} = 6,20 \cdot 10^5 \text{ Nm}^{-2}$.

Le proprietà del metano (v. tabelle nel cap. 2) a $T = 20^\circ\text{C} = 293 \text{ K}$ e alla pressione atmosferica $p_0 = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ Nm}^{-2}$ sono:

$$\left. \begin{aligned} \rho_{0,T} &= 0,668 \text{ kg m}^{-3} \\ \mu &= 1,09 \cdot 10^{-5} \text{ Nm}^{-2} \text{ s} \end{aligned} \right\} \nu = 1,63 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1},$$

$$\frac{R T}{N} = \frac{p_0}{\rho_0} = 1,519 \cdot 10^6 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}.$$

L'equazione del moto è la [14.28]

$$p_1^2 - p_2^2 = \frac{\rho \tau Q_M^2}{N \Omega^2} \left(\frac{\lambda}{D} L + 2 \ln \frac{p_1}{p_2} \right).$$

Essendo

$$\varepsilon/D = 0,4/300 = 0,00133$$

ed

$$Re = \frac{Q_M D}{\nu \Omega} = \frac{9,50 \cdot 0,300}{1,63 \cdot 0,0707} \cdot 10^6 = 2,47 \cdot 10^6$$

il moto risulta assolutamente turbolento (cfr. diagramma di Moody, fig. 13.8) ed il coefficiente di resistenza λ vale

$$\lambda = \left[2,0 \log \left(\frac{3,71 \cdot 300}{0,4} \right) \right]^{-2} = 0,0211$$

come si poteva leggere anche nella tabella 13.3.

Sostituendo nell'equazione del moto e tralasciando in un primo tempo il termine $2 \ln(p_1/p_2)$, si ottiene

$$\begin{aligned} p_1^2 - p_2^2 &= \frac{1,519 \cdot 10^6 \cdot (9,50)^2 \cdot 0,0211}{(0,0707)^2} \cdot \frac{1300}{0,300} \\ &= 2,743 \cdot 10^8 \times 91,433 = 25,08 \cdot 10^{10} \text{ N}^2 \text{ m}^{-4} \end{aligned}$$

da cui

$$p_2 = \sqrt{(6,20^2 - 25,08)10^{10}} = 3,65 \cdot 10^5 \text{ Nm}^{-2} = 3,65 \text{ bar}.$$

Per tener conto del termine logaritmico conviene assumere per p_2 un valore leggermente inferiore a quello trovato con il calcolo precedente, ad esempio $p_2 = 3,60$ bar; si ottiene così

$$2 \ln(p_1/p_2) = 2 \ln(6,20/3,60) = 1,087$$

e, sostituendo nell'equazione completa,

$$p_1^2 - p_2^2 = 2,743 \cdot 10^8 (91,433 + 1,087) = 25,38 \cdot 10^{10} \text{ N}^2 \text{ m}^{-4}$$

da cui

$$p_2 = 3,61 \cdot 10^5 \text{ Nm}^{-2} = 3,61 \text{ bar}.$$

La caduta di pressione richiesta dal moto è perciò

$$\Delta p = 6,20 - 3,61 = 2,59 \text{ bar}$$

mentre, trascurando il termine logaritmico, sarebbe risultato $\Delta p = 2,55$ bar, con una differenza in meno dell'1,5%.

Riferimenti citati.

- CHANDRASHEKAR, M. e STEWART, K. H., *Proc. A.S.C.E.*, Vol. 101, HY4, 1975.
- CROSS, H., *Univ. Ill. Eng. Expt. Sta.*, Bull. 286, 1936.
- LOMBARDO, G., *Atti Acc. Ligure di Scienze e Lettere*, Vol. XVIII, 1961.
- LOMBARDO, G. e CARONI, E., *L'Energia Elettrica*, Vol. LV, n. 10, 1978.
- MARTIN, D. W., PHIL, D. e PETERS, G., *Journ. of the Inst. of Water Engineers*, Vol. 17, 1963.
- MILLER, D. S., *Internal Flow*, B.H.R.A., 1971.
- RUSO SPENA, A., *Giornale del Genio Civile*, Fasc. 9°, 1950.
- VENTURI, G. B., *Recherches expérimentelles*, *Bull. Soc. philomatique*, Paris, 1797.
- WEISBACH, J., *Die Experimental-Hydraulik*, J. S. Engelhardt, Freiburg, 1855.
- WOOD, D. J. e CHARLES, C. O. A., *Proc. A.S.C.E.*, Vol. 98, HY7, 1972.
- UNI - ENTE NAZIONALE PER L'UNIFICAZIONE DELL'INDUSTRIA, *Norme del CNR per le misure di portata dei fluidi mediante venturimetri e mediante boccapli e diaframmi*.

CAPITOLO QUINDICESIMO

CORRENTI NON OMOGENEE IN PRESSIONE: MOTO BIFASE LIQUIDO-AERIFORME

15.1. Introduzione.

I fenomeni che comportano processi di moto bifase, per fluidi non miscibili e senza reazioni chimiche fra loro, possono avere carattere fluidodinamico oppure termo-dinamico, o l'uno e l'altro insieme. I primi, cioè i fenomeni che rientrano nel dominio puramente della meccanica dei fluidi, possono essere distinti in: moti mediamente permanenti ed isotermi di liquido-liquido (correnti di densità) o di liquido-aeriforme oppure moti non permanenti, quali la propagazione di onde all'interfaccia fra due liquidi o il moto vario di un liquido con bolle gassose e vaporose, conseguente a fenomeni di cavitazione.

In questo capitolo vengono considerati i problemi del moto mediamente permanente di *correnti liquide con fase aeriforme*, di cui sono esempi il trasporto simultaneo di petrolio e gas naturale, i moti liquido-vapore negli scambiatori di calore e nei condensatori, di petrolio-vapori di petrolio nelle condotte degli impianti di distillazione, di olio-aria in impianti motori a gasolio, ed in genere il deflusso di miscugli liquido-gas negli impianti chimici.

15.2. Aspetti e tipi del moto simultaneo liquido-aeriforme.

Il comportamento locale di un sistema bifase in movimento entro condotti in pressione presenta aspetti complessi, normalmente tipizzati secondo una nomenclatura americana che in gran parte risale a Bergelin

e Gazley (1949) e ad Alves (1954) e che non sempre è traducibile in modo letterale. Per questo riportiamo fra parentesi anche la terminologia originale.

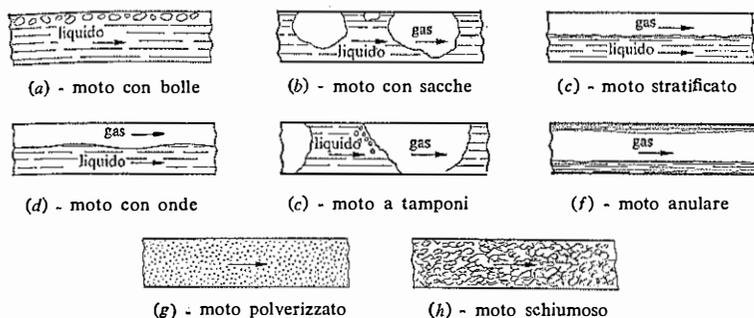


Fig. 15.1. - Aspetti del moto bifase in tubi orizzontali.

Nei *tubi orizzontali* possono presentarsi le seguenti configurazioni tipiche, schematizzate nella figura 15.1.

(a) Moto con bolle (bubble flow): il gas si muove in bolle isolate e di dimensioni piccole rispetto al diametro della condotta.

(b) Moto con sacche (plug flow): il gas si raccoglie in bolle di dimensioni maggiori formando sacche separate.

(c) Moto stratificato (stratified flow): deflusso delle due fasi separate da un'interfaccia liscia e regolare.

(d) Moto con onde (wavy flow): situazione analoga alla precedente ma con una superficie di separazione irregolare e percorsa da onde.

(e) Moto a tamponi (slug flow): il gas si muove in grosse sacche che occupano tutta la sezione del tubo e sono separate da tamponi liquidi, che possono anche contenere una dispersione di piccole bolle.

(f) Moto anulare (annular flow): il liquido si muove aderendo alla parete mentre il gas defluisce all'interno.

(g) Moto polverizzato (spray flow): la fase liquida si muove polverizzata in seno alla corrente gassosa.

Martinelli (1944) ha indicato anche un tipo di moto che normalmente non fa parte della sequenza precedente, ossia:

(h) Moto schiumoso (froth or foam flow): caratterizzato da una fine dispersione della fase aeriforme nella corrente liquida.

Nei *tubi verticali* possono presentarsi gli stessi tipi di moto; il deflusso stratificato e quello con onde sono però sostituiti talvolta da un compor-

tamento instabile del moto con sacche che si verifica, all'aumentare della velocità della fase gassosa, quando le sacche stesse cominciano a rompersi ed il moto diventa pulsante prima di raggiungere lo stadio anulare (Bennett e al., 1965-66).

15.3. Grandezze del moto bifase.

Le principali grandezze che vengono impiegate per l'analisi del moto permanente isoterma liquido-gas sono raccolte nel quadro seguente, nel quale sono riportati anche i simboli adottati. Con gli indici g ed l al piede dei simboli si indica il riferimento rispettivamente alle fasi gassosa e liquida.

Portate volumetriche	Q_g	Q_l
Portate massiche	$Q_{Mg} = \rho_g Q_g$	$Q_{Ml} = \rho_l Q_l$
Aree medie della sezione trasversale	Ω_g	Ω_l
Velocità medie (effettive)	$U_g = Q_g/\Omega_g$	$U_l = Q_l/\Omega_l$
Frazione volumetrica gassosa, detta anche frazione di vuoto	α_g	
Frazione volumetrica liquida	α_l	
Concentrazione della portata volumetrica gassosa	$\beta_g = Q_g/(Q_g + Q_l)$	
Concentrazione della portata massica gassosa	$C_g = Q_{Mg}/(Q_{Mg} + Q_{Ml})$	
Rapporto di scorrimento	U_g/U_l	

essendo ρ_l e ρ_g le densità del liquido e del gas.

Nei problemi di ingegneria le portate massiche dei due fluidi sono di norma assegnate, così come sono note la geometria della condotta e le caratteristiche fisiche dei fluidi nelle condizioni di esercizio.

Le grandezze da determinare restano quindi, generalmente: la perdita di pressione del miscuglio per unità di lunghezza della condotta $(\Delta p/\Delta L)_{gl}$, la frazione volumetrica gassosa α_g e quella liquida α_l , il rapporto di scorrimento U_g/U_l , ed eventualmente la distribuzione della velocità e della concentrazione gassosa all'interno della corrente e la loro evoluzione lungo la tubazione.

15.4. Le equazioni del moto bifase nei tubi orizzontali.

L'applicazione del teorema della quantità di moto ad un tronco elementare ds di corrente mista liquido-gas, in condizioni di moto permanente isoterma entro una condotta orizzontale, conduce alla seguente

equazione

$$-dp\Omega - \tau_0 B ds = Q_{Mg} dU_g + Q_{Ml} dU_l \quad [15.1]$$

dove τ_0 è il valore medio dello sforzo tangenziale di attrito sul contorno B .

L'eq. [15.1] va associata alla condizione di continuità

$$Q_{Mg} + Q_{Ml} = Q_M = \text{cost.} \quad [15.2]$$

In un tronco di lunghezza finita ΔL l'equazione del moto assume la forma generale

$$\Delta p = (\Delta p)_{\text{res}} + \frac{Q_{Mg}}{\Omega} (U_{2g} - U_{1g}) + \frac{Q_{Ml}}{\Omega} (U_{2l} - U_{1l}) \quad [15.3]$$

essendo Δp la caduta di pressione nel tronco ΔL e $(\Delta p)_{\text{res}}$ la perdita dovuta alle resistenze $\int_0^{\Delta L} (\tau_0/\Omega) B ds$.

Ammesso di poter individuare separatamente le due fasi in modo che la fase gassosa occupi la frazione Ω_g dell'area totale Ω e la fase liquida occupi la restante parte Ω_l , si può scrivere

$$\Delta p = (\Delta p)_{\text{res}} + \frac{Q_{Mg}^2}{\Omega^2} \left(\frac{1}{\varrho_{2g}} \frac{\Omega}{\Omega_{2g}} - \frac{1}{\varrho_{1g}} \frac{\Omega}{\Omega_{1g}} \right) + \frac{Q_{Ml}^2}{\Omega^2} \left(\frac{1}{\varrho_{2l}} \frac{\Omega}{\Omega_{2l}} - \frac{1}{\varrho_{1l}} \frac{\Omega}{\Omega_{1l}} \right);$$

introducendo la frazione volumetrica gassosa α_g , espressa localmente dal rapporto Ω_g/Ω e la frazione volumetrica liquida $\alpha_l = 1 - \alpha_g$, ed assumendo per il liquido $\varrho_{1l} = \varrho_{2l} = \varrho_l$, si ottiene

$$\Delta p = (\Delta p)_{\text{res}} + \frac{Q_{Mg}^2}{\Omega^2} \left(\frac{1}{\varrho_{2g} \alpha_{2g}} - \frac{1}{\varrho_{1g} \alpha_{1g}} \right) + \frac{Q_{Ml}^2}{\varrho_l \Omega^2} \left(\frac{1}{\alpha_{2l}} - \frac{1}{\alpha_{1l}} \right). \quad [15.4]$$

Il secondo termine a destra è trascurabile rispetto al terzo se la portata Q_{Mg} è piccola rispetto a Q_{Ml} . Spesso anche le variazioni della frazione volumetrica liquida α_l sono modeste, sicché le perdite di pressione restano quelle dovute essenzialmente alla resistenza di attrito.

Nel caso di *liquido-vapore*, Martinelli e Nelson (1948) hanno scritto l'equazione del moto assumendo all'ingresso una corrente di solo liquido. Allora la [15.3] diventa

$$\begin{aligned} \Delta p &= (\Delta p)_{\text{res}} + \frac{Q_{Mg}}{\Omega} U_{2g} + \frac{Q_{Ml}}{\Omega} U_{2l} - \frac{Q_M}{\Omega} U_{1l} = \\ &= (\Delta p)_{\text{res}} + \frac{Q_{Mg}}{\Omega} U_{2g} + \frac{Q_{Ml}}{\Omega} U_{2l} - \frac{Q_M^2}{\varrho_l \Omega^2}. \end{aligned} \quad [15.5]$$

Si possono considerare due situazioni estreme nella sezione 2:

1) liquido e vapore *completamente mescolati*

$$U_{2l} = U_{2g} = \frac{Q_{Ml}/\rho_l + Q_{Mg}/\rho_g}{\Omega} \quad [15.6]$$

essendo ρ_g la densità del vapore nelle condizioni di saturazione previste nella sez. 2. La [15.5] assume la forma

$$\Delta p = (\Delta p)_{\text{res}} + \frac{Q_M}{\Omega^2} \left(\frac{Q_{Ml}}{\rho_l} + \frac{Q_{Mg}}{\rho_g} \right) - \frac{Q_M^2}{\rho_l \Omega^2}$$

e introducendo la frazione $C_g = Q_{Mg}/Q_M$

$$\Delta p = (\Delta p)_{\text{res}} + \frac{Q_M^2}{\rho_l \Omega^2} C_g \left(\frac{\rho_l}{\rho_g} - 1 \right); \quad [15.7]$$

2) liquido e vapore *completamente separati*

$$U_{2l} = \frac{Q_{Ml}}{\rho_l \Omega_l}, \quad U_{2g} = \frac{Q_{Mg}}{\rho_g \Omega_g} \quad [15.8]$$

$$\begin{aligned} \Delta p &= (\Delta p)_{\text{res}} + \frac{Q_{Ml}^2}{\rho_l \Omega \Omega_l} + \frac{Q_{Mg}^2}{\rho_g \Omega \Omega_g} - \frac{Q_M^2}{\rho_l \Omega^2} = \\ &= (\Delta p)_{\text{res}} + \frac{Q_M^2}{\rho_l \Omega} \left\{ \frac{(1 - C_g)^2}{1 - \alpha_g} + \frac{C_g^2}{\alpha_g} \left(\frac{\rho_l}{\rho_g} \right) - 1 \right\} \end{aligned} \quad [15.9]$$

con il significato di frazione vaporosa del rapporto $\alpha_g = \Omega_g/\Omega$.

15.5. Correlazioni globali per il calcolo delle perdite per attrito.

La perdita di pressione per unità di lunghezza $(\Delta p/\Delta L)_i$ di una corrente bifase in un condotto orizzontale può essere valutata in funzione della perdita di pressione per unità di lunghezza che si avrebbe nel deflusso della sola fase gassosa $(\Delta p/\Delta L)_g$, o della sola fase liquida $(\Delta p/\Delta L)_l$, con la stessa portata massica. Il metodo è stato proposto nel 1944 da Martinelli e al. e messo a punto definitivamente da Martinelli e Lockhart nel 1949. Esso deriva dall'analisi e dall'interpretazione di numerosi risultati sperimentali, ottenuti dagli autori citati e da altri ricercatori, ed è stato verificato anche da esperienze successive. La forma della correlazione proposta da Martinelli e Lockhart può essere giustificata con considerazioni di analisi dimensionale (Marchi, 1972) sulla base di due ipotesi, suggerite

dalle osservazioni sperimentali e già assunte dagli autori:

(a) che nel moto bifase le perdite di pressione del liquido e dell'aeriforme, in uno stesso tronco di condotta orizzontale, siano uguali fra loro e rappresentino quindi anche la perdita di pressione del miscuglio;

(b) che siano definibili nella condotta le aree medie Ω_g ed Ω_l occupate dalle due fasi, e risulti $\Omega_g + \Omega_l = \Omega$.

La configurazione del moto non può quindi cambiare, mediamente, lungo la condotta, per cui il moto a tamponi (slug flow) sembra escluso da queste considerazioni.

Indichiamo con D_g una lunghezza che caratterizzi « idraulicamente » la fase gassosa e con D_l un'analogha lunghezza per la fase liquida. È chiaro il richiamo al concetto di raggio idraulico largamente utilizzato nelle correnti a pelo libero. Per l'ipotesi (a) la perdita di pressione del miscuglio si deve poter esprimere in funzione delle grandezze caratteristiche di ciascuna fase separatamente, ossia

$$(\Delta p/\Delta L)_{gl} = f_1(\rho_g, \mu_g, Q_{Mg}, \Omega_g, D_g) = f_2(\rho_l, \mu_l, Q_{Ml}, \Omega_l, D_l). \quad [15.10]$$

Per l'ipotesi (b) la frazione volumetrica aeriforme α_g è data dal rapporto Ω_g/Ω . Indichiamo inoltre con $r = D_g/D$ un parametro dipendente dalla forma dell'area occupata dalla fase gassosa. Data la complementarietà delle aree Ω_g ed Ω_l , si ha

$$\frac{\Omega_l}{\Omega} = 1 - \alpha_g \quad \text{e} \quad \frac{D_l}{D} = \varphi(\alpha_g, r)$$

dove la funzione φ può modificarsi, anche strutturalmente, al variare della forma delle aree, ma la dipendenza funzionale resta correlata agli stessi parametri α_g ed r prima definiti.

La perdita di pressione [15.10] del miscuglio si può quindi esprimere in termini delle corrispondenti perdite che si verificherebbero nel deflusso di uno solo dei due fluidi in tutta la sezione della condotta — a parità di portata massica e di pressione di esercizio — moltiplicate per una funzione dei parametri α_g e r :

$$(\Delta p/\Delta L)_{gl} = (\Delta p/\Delta L)_g \cdot f_3(\alpha_g, r)$$

$$(\Delta p/\Delta L)_{gl} = (\Delta p/\Delta L)_l \cdot f_3(\alpha_g, r).$$

Eliminando il parametro r fra queste due equazioni si ottiene

$$(\Delta p/\Delta L)_{gl} = f_3[(\Delta p/\Delta L)_g, (\Delta p/\Delta L)_l, \alpha_g], \quad [15.11]$$

e quindi, per il teorema π ,

$$\frac{(\Delta p/\Delta L)_{oi}}{(\Delta p/\Delta L)_o} = f \left[\frac{(\Delta p/\Delta L)_i}{(\Delta p/\Delta L)_o}, \alpha_o \right] \quad [15.12]$$

oppure

$$\frac{(\Delta p/\Delta L)_{oi}}{(\Delta p/\Delta L)_i} = f \left[\frac{(\Delta p/\Delta L)_o}{(\Delta p/\Delta L)_i}, \alpha_o \right]. \quad [15.13]$$

La funzione f è la stessa nelle due equazioni soprascritte se è lo stesso il regime del moto dei due fluidi, perché essa deriva dalla funzione f_0 dell'eq. [15.11] che, sotto tale condizione, è *formalmente* equivalente nei confronti degli argomenti $(\Delta p/\Delta L)_o$ e $(\Delta p/\Delta L)_i$.

Adottando le notazioni di Martinelli

$$\frac{(\Delta p/\Delta L)_{oi}}{(\Delta p/\Delta L)_o} = \Phi_o^2, \quad \frac{(\Delta p/\Delta L)_{oi}}{(\Delta p/\Delta L)_i} = \Phi_i^2 \quad [15.14]$$

$$\frac{(\Delta p/\Delta L)_i}{(\Delta p/\Delta L)_o} = X^2 \quad [15.15]$$

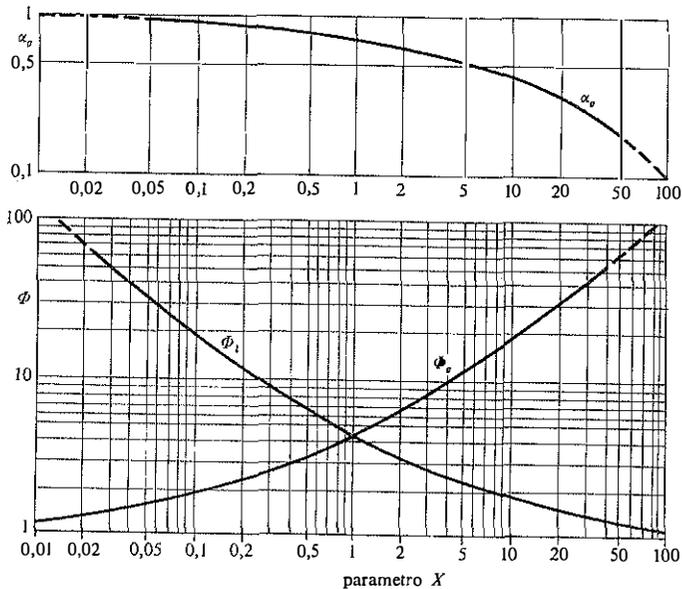


Fig. 15.2. - Le curve di Martinelli e Lockhart Φ_i e Φ_o (gas turbolento-liquido turbolento) ed α_o in funzione del parametro X .

e dividendo la [15.12] per la [15.13] si ottiene

$$X^2 = \frac{f(X^2, \alpha_o)}{f\left(\frac{1}{X^2}, \alpha_o\right)}$$

che dimostra come α_o sia funzione unicamente di X^2 . Tenendo conto di questo e delle predette notazioni, le equazioni [15.12] e [15.13] diventano

$$\Phi_o^2 = f(X^2) \quad [15.16]$$

$$\Phi_i^2 = f\left(\frac{1}{X^2}\right) \quad [15.17]$$

che evidenziano l'esistenza di un legame funzionale fra Φ_o , Φ_i ed il parametro X . Tale legame era stato postulato da Martinelli e Lockhart e da loro individuato, attraverso confronti sperimentali, per mezzo delle curve rappresentate nel diagramma della figura 15.2. Le equazioni [15.16] e [15.17] giustificano inoltre la simmetria che si osserva nella rappresentazione logaritmica delle curve $\Phi_o(X)$ e $\Phi_i(X)$ rispetto ad $X = 1$.

Le curve della figura 15.2 si riferiscono alla situazione di regime di moto turbolento per entrambe le fasi.

15.6. Il metodo di Martinelli e Lockhart (M. e L.).

Nei tubi orizzontali o sub-orizzontali, Martinelli e Lockhart, dall'esame di numerose esperienze di Lockhart e di altri AA. sul moto di miscugli aria-liquidi diversi, hanno ricavato i grafici delle funzioni $\Phi_o = \Phi_o(X)$, $\Phi_i = \Phi_i(X)$ non solo nel moto turbolento di entrambe le fasi ma anche nelle altre situazioni indicate nella tabella 15.1 e contraddistinte con il simbolo indicato a fianco.

TABELLA 15.1. - Regime di moto e indicazioni del parametro Φ .

Regime di moto		Numeri di Reynolds e parametri Φ			
Liquido	Aeriforme	Liquido		Aeriforme	
laminare	laminare	$Re_l < 1000$	Φ_{iLL}	$Re_o < 1000$	Φ_{oLL}
turbolento	laminare	$Re_l > 2000$	Φ_{iTL}	$Re_o < 1000$	Φ_{oTL}
laminare	turbolento	$Re_l < 1000$	Φ_{iLT}	$Re_o > 2000$	Φ_{oLT}
turbolento	turbolento	$Re_l > 2000$	Φ_i	$Re_o > 2000$	Φ_o

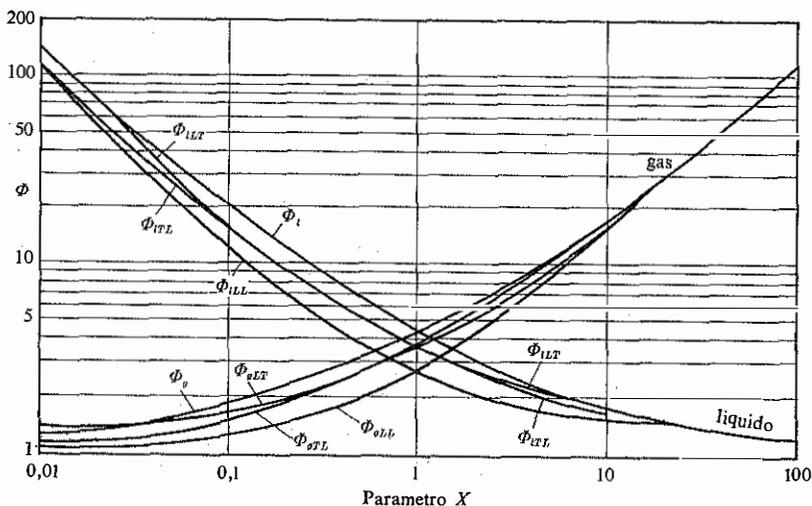


Fig. 15.3. - Il metodo di correlazione globale di Martinelli e Lockhart per differenti regimi del moto del liquido e dell'aeriforme (v. tab. 15.1).

Le curve relative sono riportate nel diagramma della figura 15.3. L'impiego tecnico del metodo M. e L. consiste nelle seguenti operazioni:

(a) calcolo della perdita di pressione $(\Delta p/\Delta L)_l$, richiesta dalla corrente liquida di portata massica Q_{Ml} per defluire da sola nella condotta di sezione Ω ; a questo scopo si impiega l'equazione del moto uniforme con le ordinarie formule di resistenza nei tubi (v. cap. 13);

(b) calcolo della perdita di pressione $(\Delta p/\Delta L)_g$, richiesta dalla corrente gassosa di portata massica Q_{Mg} per defluire da sola nella condotta di sezione Ω ; si ricorre per questo calcolo alla equazione del moto permanente isoterma di aeriformi in condotte in pressione (v. paragrafo 14.7);

(c) calcolo di X con l'operazione $\sqrt{(a)/(b)}$ e quindi ricerca di Φ_l e di Φ_g in funzione di X , dati i regimi di moto delle due fasi, sul diagramma della figura 15.2 o della figura 15.3;

(d) calcolo della perdita di pressione del miscuglio, per unità di lunghezza della condotta, con l'una o l'altra delle equazioni:

$$\begin{aligned} (\Delta p/\Delta L)_{og} &= \Phi_l^2 (\Delta p/\Delta L)_l \\ \text{oppure} &= \Phi_g^2 (\Delta p/\Delta L)_g. \end{aligned}$$

(e) valutazione della frazione volumetrica aeriforme α_g , partendo dal valore noto del parametro X ed utilizzando la parte superiore del diagramma della figura 15.2.

Diverse ricerche sperimentali hanno portato contributi alla verifica del metodo di M. e L. In particolare si ricordano le esperienze di Johnson e Abou-Sabe (1952) e quelle di Alves (1954) al quale si deve anche, dopo Kosterin (1949), un inquadramento dei differenti tipi di moto bifase. Gli scarti sperimentali dalla curva $\Phi = \Phi(X)$ di M. e L. sono contenuti generalmente entro il 30%, mentre raggiungono valori maggiori nei confronti della predizione della frazione volumetrica gassosa.

Il metodo di M. e L. ha trovato successive verifiche sperimentali nel calcolo delle perdite di pressione di moti bifasi non soltanto nei condotti orizzontali, per i quali era stato introdotto, ma anche in condotti verticali (Govier, 1957-58). Un interessante confronto numerico fra numerosi risultati sperimentali ed alcuni metodi di correlazione globale è stato eseguito da Dukler, Moye Wicks e Cleveland nel 1964. Gli AA. hanno potuto trarre la conclusione che il metodo proposto da M. e L. dimostra senza dubbio il miglior accordo con le misure sperimentali delle perdite di pressione, pur rivelando talvolta scarti sensibili, specialmente con il crescere del diametro.

Maggiori incertezze restano, come si è detto, nel calcolo della frazione volumetrica aeriforme α_g . Nel caso di moto turbolento di entrambe le fasi è da notare che fra i parametri α_g e Φ_i di M. e L. sussiste, con buona approssimazione, il legame

$$\Phi_i = (1 - \alpha_g)^{-1}, \quad \text{ossia} \quad \alpha_g = 1 - \frac{1}{\Phi_i},$$

verificato da Boyce, Collier e Levy (1968).

Pur con tutte le riserve che derivano dalle difficoltà di misura della frazione gassosa, i valori di α_g che si ottengono dalle seguenti equazioni

$$\alpha_g = 1 - \frac{1}{\Phi_i^{1.143}} \quad (\text{Katsuhara, 1958; tubi verticali})$$

$$\alpha_g = 1 - \frac{0,880}{\Phi_i^{1.143}} \quad (\text{Chilson e Laird, 1958; tubi orizzontali})$$

sembrano più attendibili dei precedenti. Le corrispondenti curve $\alpha_g = \alpha_g(X)$ sono riportate nella figura 15.4.

Chisolm e Laird (1958) hanno anche indicato la relazione empirica

$$\Phi_i^2 = 1 + \frac{21}{X} + \frac{1}{X^2}$$

per approssimare analiticamente la curva $\Phi_i(X)$ di M. e L. nel caso, già richiamato, di moto liquido turbolento-gas turbolento.

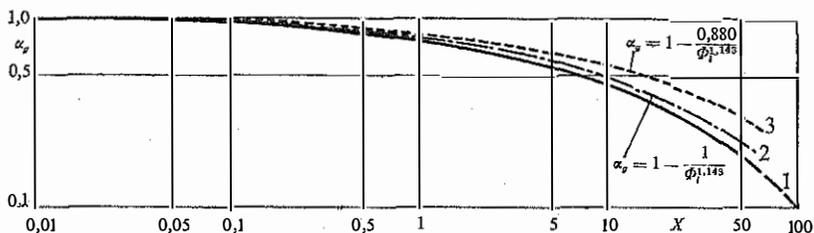


Fig. 15.4. - Confronto fra la curva $\alpha_g = \alpha_g(X)$ di Martinelli (1) e le curve di Katsuhara (2) e di Chilsom e Laird (3).

Richardson nel 1959 e Fohrman nel 1960 hanno condotto esperienze su tubi orizzontali di sezione rettangolare eseguendo, oltre al rilievo fotografico del tipo di moto, accurate misure delle pressioni, delle velocità e della frazione volumetrica gassosa mediante l'impiego di radiazioni γ . I valori misurati α_g si scostano sensibilmente dalla curva di M. e L. mentre la correlazione per il calcolo della perdita di pressione è risultata ben confermata dai risultati sperimentali nel regime liquido turbolento-gas turbolento ed anche nella regione di transizione da regime turbolento a laminare per la fase liquida. Solo con le più alte viscosità del liquido i dati sperimentali stanno circa il 15% al di sotto della curva M. e L.

15.7. Modelli a densità variabile.

Per un'analisi più dettagliata del moto bifase, o per lo meno di alcuni tipi di moto, sono stati proposti diversi schemi di calcolo basati su modelli fisici semplificati. Fra questi vogliamo citare il modello suggerito da Bankoff nel 1960, che si basa sulla considerazione di un fluido unico con densità variabile in funzione della concentrazione della fase aeriforme.

Assumendo la velocità e la concentrazione distribuite nella sezione secondo una legge di potenze, rispetto alla distanza dalla parete, Bankoff ha dedotto la seguente espressione del rapporto di scorrimento fra le velocità medie effettive delle due fasi

$$\frac{U_g}{U_l} = \frac{1 - \alpha_g}{K_g - \alpha_g}$$

in funzione della frazione volumetrica gassosa α_g , media nella sezione, e di un parametro del moto K_g da determinare sperimentalmente.

Un contributo a questo studio è stato portato da Zuber (1960), mo-

strandò che il parametro K_g , si può esprimere con il rapporto

$$K_g = \frac{\alpha_g}{\beta_g}$$

fra la predetta frazione volumetrica gassosa media α_g e la concentrazione della portata gassosa $\beta_g = Q_g / (Q_g + Q_l)$. Il valore del parametro K_g , di norma minore di 1, è un indice della distribuzione delle due fasi nella corrente. Alla stessa equazione era giunto empiricamente Armand nel 1946 ed essa era stata verificata da esperienze russe con valori praticamente costanti di K_g , per fissate pressioni di esercizio, in un campo abbastanza esteso di variazione di β_g .

Numerose ricerche sull'argomento si sono aggiunte in questi ultimi anni, sia per affinare lo schema a densità variabile, sia per introdurre altri modelli interpretativi del moto bifase. Esse esulano dai limiti di questo trattato, anche perché, pur contribuendo ad approfondire la conoscenza dei fenomeni all'interno delle correnti miste, non hanno portato finora, per quanto riguarda il calcolo delle perdite di pressione nel moto bifase, a procedimenti che possano sostituire, per semplicità di applicazione e per attendibilità dei risultati, il metodo di correlazione globale proposto da Martinelli e Lockhart.

ESEMPI

Esempio 15.1

Calcolo della perdita di pressione in una tubazione di acciaio trafilato nuova ($\epsilon = 0,15$ mm), lunga 800 m, \varnothing 60 mm, quando vi transita una portata volumetrica di 4 m³/ora di kerosene ($\rho_l = 820$ kg m⁻³) insieme ad una portata massica di 600 kg/ora di gas naturale, essenzialmente metano, alla temperatura di 20 °C e ad una pressione media assoluta intorno a 15 bar.

Viscosità del gas naturale $\mu_g = 0,011$ cP = $1,1 \cdot 10^{-5}$ Nm⁻² s.

Viscosità del kerosene $\mu_l = 1,90$ cP = $1,9 \cdot 10^{-3}$ Nm⁻² s.

$$Q_l = \frac{4,0}{3600} = 1,111 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}; \quad Q_{Ml} = \rho_l Q_l = 0,911 \text{ kg s}^{-1}; \quad \Omega = 0,00283 \text{ m}^2;$$

$$Re_l = \frac{\rho_l Q_l D}{\mu_l \Omega} = \frac{0,911 \times 0,060}{1,9 \cdot 10^{-3} \times 0,00283} = 1,02 \cdot 10^4,$$

$$Re_g = \frac{Q_{Mg} D}{\mu_g \Omega} = \frac{600}{3600} \cdot \frac{0,060}{1,1 \cdot 10^{-5} \times 0,00283} = 3,21 \cdot 10^5.$$

Il regime del moto è quindi turbolento per entrambe le fasi.

Si calcola la perdita di pressione nel moto della sola fase liquida

$$\left(\frac{\Delta p}{\Delta L}\right)_l = j g \varrho_l = \frac{\lambda}{D} \frac{Q_{\lambda l}^2}{2 \varrho_l \Omega^2}$$

Essendo

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0,15}{60} = 0,0025 \quad \text{e} \quad Re_l = 1,02 \cdot 10^4$$

dal diagramma di Moody deriva $\lambda = 0,0345$.

Perciò

$$\left(\frac{\Delta p}{\Delta L}\right)_l = \frac{0,0345}{0,060} \cdot \frac{(0,911)^2}{2 \times 820(0,00283)^2} = 36,33 \text{ Nm}^{-3}$$

Con

$$\frac{\varepsilon}{D} = 0,0025 \quad \text{e} \quad Re_g = 3,21 \cdot 10^5$$

risulta $\lambda = 0,025$, e la caduta di pressione nel moto della sola fase gassosa vale (cfr. esempio 14.7)

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{\Delta L} = \frac{\mathcal{R} T Q_{\lambda g}^2}{N \Omega^2} \cdot \frac{\lambda}{D} = \frac{1,519 \cdot 10^5}{(0,00283)^2} \cdot \left(\frac{600}{3600}\right)^2 \cdot \frac{0,025}{0,060} = 2,195 \cdot 10^8 \text{ N}^2 \text{ m}^{-5}$$

ossia

$$\frac{(p_1 - p_2)(p_1 + p_2)}{\Delta L} = 2,195 \cdot 10^8 \text{ N}^2 \text{ m}^{-5}$$

e, dato che $p_1 + p_2 = 2p_m = 30 \text{ bar} = 30 \cdot 10^5 \text{ Nm}^{-2}$, segue

$$\left(\frac{\Delta p}{\Delta L}\right)_g = \frac{2,195}{30} \cdot \frac{10^8}{10^5} = 73,17 \text{ Nm}^{-3}$$

Risulta

$$X = \sqrt{\frac{(\Delta p / \Delta L)_l}{(\Delta p / \Delta L)_g}} = \sqrt{\frac{36,33}{73,17}} = 0,70$$

e quindi si legge sul diagramma della fig. 15.2: $\Phi_l = 5,3$ e $\Phi_g = 3,7$, per cui

$$\left(\frac{\Delta p}{\Delta L}\right)_{gl} = \Phi_l^2 \left(\frac{\Delta p}{\Delta L}\right)_l = 1020 \text{ Nm}^{-3}$$

$$\left(\frac{\Delta p}{\Delta L}\right)_{gl} = \Phi_g^2 \left(\frac{\Delta p}{\Delta L}\right)_g = 1002 \text{ Nm}^{-3}$$

con buon accordo. Assumendo mediamente

$$\left(\frac{\Delta p}{\Delta L}\right)_{gl} = 1010 \text{ Nm}^{-3}$$

si ottiene fra le sezioni 1 e 2 distanti 800 m

$$p_1 - p_2 = 1010 \times 800 = 808000 \text{ Nm}^{-2} = 8,08 \text{ bar}.$$

Assumendo una pressione assoluta iniziale $p_1 = 19,00$ bar, risulta nella sezione finale $p_2 = 10,92$ bar, con valore medio $14,96$ bar come richiesto.

Mentre la caduta di pressione $(\Delta p/\Delta L)_i$ è uniforme lungo la condotta, la $(\Delta p/\Delta L)_o$ varia con il valor medio della pressione nel tronco ΔL considerato. Per ottenere una buona approssimazione occorre perciò considerare tronchi ΔL abbastanza brevi da poter sostituire la curva effettiva delle pressioni con tratti rettilinei.

Nel caso in esame, dividendo ad esempio la tubazione in 4 tronchi di lunghezza $\Delta L = 200$ m si ottengono i risultati indicati nel quadro seguente.

Tronco	0-200	200-400	400-600	600-800
p_m (bar)	18	16	14	12
$(\Delta p/\Delta L)_i$	36,33	36,33	36,33	36,33
$(\Delta p/\Delta L)_o$	60,97	68,58	78,39	91,46
X	0,77	0,73	0,68	0,63
Φ_i	5,0	5,2	5,5	5,7
$(\Delta p/\Delta L)_{oi}$	908	982	1099	1180
Φ_o	3,90	3,75	3,65	3,55
$(\Delta p/\Delta L)_{oi}$	880	964	1044	1153
Valore medio				
$(\Delta p/\Delta L)_{oi}$	894	973	1072	1166
Δp (bar)	1,788	1,946	2,144	2,332
$\Delta p_{tot} = 8,210$ bar				

Con la pressione assoluta iniziale $p_{1(0)} = 19,00$ bar, si ottiene

$$p_{(200)} = 17,21 \text{ bar}; \quad p_{(400)} = 15,26 \text{ bar}; \quad p_{(600)} = 13,12 \text{ bar}$$

ed infine

$$p_{2(800)} = 10,79 \text{ bar}$$

con una differenza dell'1,2% rispetto al valore trovato con riferimento all'intera tubazione lunga 800 m.

Riferimenti citati.

ALVES, G. E., *Chem. Eng. Progress*, Vol. 50, 9, 1954.

ARMAND, A. A., *Izv. Vsesou. Teplotek. Inst.*, n. 1, AERE - Trans. 828, 1946.

BANKOFF, S. G., *J. of Heat Transfer, Trans. A.S.M.E.*, Vol. 82, 1960.

BENNETT, A. W., HEWITT, G. F., KEARSEY, H. A., KEEYS, R. K. F. e LACEY, P. M. C., *Proc. Inst. Mech. Eng.*, Vol. 180, Part. 3 c, 1965-66.

- BERGELIN, O. P. e GAZLEY, C. G., Co-current Gas-Liquid Flow - (I) Flow in Horizontal Tubes, *Heat Transfer and Fluid Mech. Inst.*, Berkeley, Calif., 1949.
- BOYCE, B. E., COLLIER, J. G. e LEVY, J., *Proc. Int. Symposium on Co-current Gas Liquid Flow*, Univ. of Waterloo, Canada, 1968.
- CHISOLM, D. e LAIRD, A. D. K., *Trans. A.S.M.E.*, Vol. 80, 1958.
- FOHRMAN, M. J., *Argonne Nat. Lab. (ANL)*, N. 6256, 1960.
- GOVIER, G. W. *et al.*, *Can. J. Chem. Eng.*, Vol. 35, 1957.
— *Can. J. Chem. Eng.*, Vol. 36, 1958.
- KATSUHARA, T., *Trans. Japan Soc. Mech. Eng.*, Vol. 24, 148, 1958.
- KOSTERIN, S. I., *Izv. Akad. Nauk SSSR, Otdel. Teckh. Nauk*, n. 12, 1949.
- LOCKHART, R. W. e MARTINELLI, R. C., *Chem. Eng. Progress*, Vol. 45, 1, 1949.
- MARTINELLI, R. C., BEOLTER, L. M. K., TAYLOR, T. H. M., THOMSEN, E. G. e MORRIN, E. H., *Trans. A.S.M.E.*, Vol. 66, 2, 1944.
- MARTINELLI, R. C., PUTNAM, J. A. e LOCKHART, R. W., *Trans. A.I.Ch.E.*, Vol. 42, 1946.
- MARTINELLI, R. C. e NELSON, D. B., *Trans. A.S.M.E.*, Vol. 70, 1948.
- RICHARDSON, B. L., *Argonne Nat. Lab. (ANL)*, N. 5949, 1959.
- ZUBER, N., *J. of Heat Transfer, Trans. A.S.M.E.*, Vol. 82, 1960.

CAPITOLO SEDICESIMO

MOTO VARIO NELLE CONDOTTE IN PRESSIONE

16.1. Le equazioni del moto vario di una corrente.

Lo studio del moto di una corrente fluida *quasi cilindrica*, sia essa contenuta in una tubazione in pressione od in un alveo aperto, s'impone assumendo ordinariamente che il moto sia monodimensionale e si sviluppi nella direzione s dell'asse del condotto, e che il fluido sia omogeneo in ciascuna sezione normale della corrente, ossia la densità dipenda soltanto dall'ascissa s e dal tempo t . Nel paragrafo 11.2 sono state già richiamate alcune proprietà delle correnti monodimensionali ed in particolare si è mostrato che la distribuzione della pressione si può ritenere idrostatica sulle sezioni normali.

L'equazione di continuità deriva dall'equazione globale

$$\frac{\partial M}{\partial t} = Q_{M1} - Q_{M2}$$

riportata nel paragrafo 11.1. Con riferimento ad un tronco elementare di corrente, come quello indicato nella figura 16.1, con sezione di area Ω all'istante t e all'ascissa s , e lunghezza infinitesima ds , la massa M vale $\rho\Omega ds$; risulta perciò

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho\Omega) ds,$$

e la portata massica netta che attraversa le due sezioni trasversali distanti ds è

$$Q_{M1} - Q_{M2} = - \frac{\partial}{\partial s} (Q_M) ds = - \frac{\partial}{\partial s} (\rho Q) ds;$$

l'equazione di continuità assume in definitiva la forma

$$\frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} + \frac{\partial(\rho \Omega)}{\partial t} = 0 \quad [16.1]$$

valida per le correnti monodimensionali *senza afflussi o deflussi laterali*.

L'equazione dinamica si deduce dal teorema della quantità di moto, nella forma globale vista sempre nel paragrafo 11.1,

$$\mathbf{G} + \mathbf{H} = \mathbf{I} + \hat{\mathbf{Q}}_u - \hat{\mathbf{Q}}_i,$$

applicato al volume di controllo Ωds e nella direzione s (v. fig. 16.1).

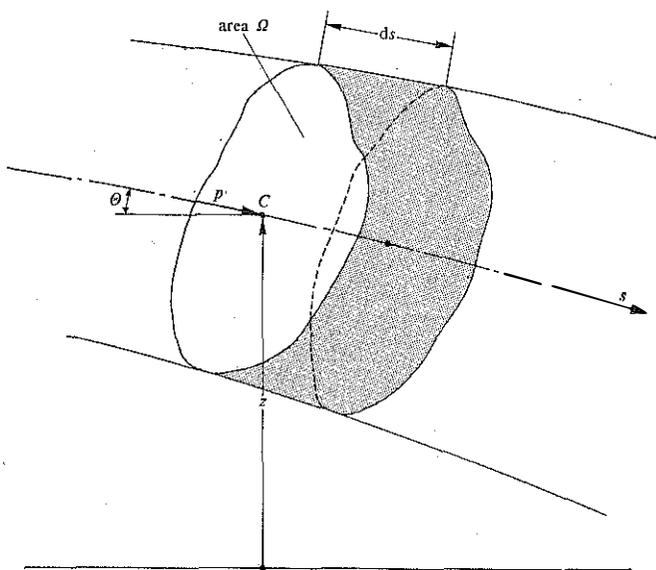


Fig. 16.1. - Tronco elementare di corrente.

Il risultante \mathbf{G} delle forze di massa ha su s la proiezione

$$G_s = \rho g \Omega ds \sin \theta = -\gamma \Omega \frac{\partial z}{\partial s} ds, \quad [16.2]$$

avendo indicato con g l'accelerazione di gravità, con z la quota dell'asse baricentrico e con θ l'angolo da esso formato con l'orizzontale.

La proiezione su s delle forze di superficie \mathbf{II} comprende la somma:

(a) degli sforzi normali agenti sulle facce piane distanti ds e sul contorno di proiezione $(\partial\Omega/\partial s)ds$ sullo stesso piano

$$p\Omega - \left\{ p\Omega + \frac{\partial(p\Omega)}{\partial s} ds \right\} + p \frac{\partial\Omega}{\partial s} ds$$

essendo p la pressione nel baricentro della sezione di area Ω ;

(b) degli sforzi tangenziali di valor medio τ_0 agenti, con verso opposto al moto, sulla superficie di contorno di perimetro B . Quindi complessivamente risulta

$$\Pi_s = -\Omega \frac{\partial p}{\partial s} ds - \tau_0 B ds. \quad [16.3]$$

Per quanto riguarda la valutazione della variazione della quantità di moto, si suppone che la velocità nella sezione Ω , oltre che direzione unica, abbia anche una distribuzione uniforme con valore U . Tale posizione è di solito accettabile in regime turbolento, nel quale le velocità medie locali si discostano ovunque poco dal valor medio U salvo che nelle immediate vicinanze della parete solida; in ogni caso la semplificazione non è concettualmente necessaria e si può tener conto della distribuzione effettiva delle velocità con l'introduzione di opportuni coefficienti correttivi, come si vedrà nel seguito di questo paragrafo.

Assumendo, per ora, l'uniformità di U nella sezione Ω , si ottengono le seguenti espressioni delle componenti nella direzione s :

(a) per le inerzie locali

$$I_s = \int_V \frac{\partial(\rho U)}{\partial t} dV = \frac{\partial(\rho U)}{\partial t} \cdot \Omega ds;$$

(b) per il flusso di quantità di moto attraverso il volume di controllo (*)

$$\mathcal{Q}_{is} = \rho U^2 \Omega,$$

che rappresenta la portata di quantità di moto entrante attraverso la sezione piana Ω e

$$\mathcal{Q}_{us} = \rho U^2 \Omega + \frac{\partial}{\partial s} (\rho U^2 \Omega) ds + \rho \frac{\partial \Omega}{\partial t} U ds$$

che rappresenta con i primi due termini la portata di quantità di moto uscente attraverso la sezione piana distante ds dalla precedente e con il

(*) Qui e nel seguito verrà indicata con \mathcal{Q}_s la componente su s del vettore portata della quantità di moto \hat{Q} .

terzo termine la portata di quantità di moto uscente attraverso la superficie laterale. Mettendo insieme questi risultati si ottiene

$$I_s + \mathcal{Q}_{us} - \mathcal{Q}_{is} = \left\{ \rho\Omega \frac{\partial U}{\partial t} + U\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial s} (\rho U \Omega) + \rho\Omega U \frac{\partial U}{\partial s} + \rho \frac{\partial \Omega}{\partial t} U \right\} ds$$

da cui, tenuto conto che $U\Omega$ equivale alla portata Q e che si può scrivere

$$\rho \frac{\partial \Omega}{\partial t} U = U \frac{\partial (\rho\Omega)}{\partial t} - U\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

deriva

$$I_s + \mathcal{Q}_{us} - \mathcal{Q}_{is} = \left\{ \rho\Omega \frac{\partial U}{\partial t} + \rho\Omega U \frac{\partial U}{\partial s} + U \left[\frac{\partial (\rho Q)}{\partial s} + \frac{\partial (\rho\Omega)}{\partial t} \right] \right\} ds$$

e quindi, essendo nullo il termine fra parentesi quadre per la condizione di continuità [16.1], segue

$$I_s + \mathcal{Q}_{us} - \mathcal{Q}_{is} = \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial s} \right) \rho\Omega ds. \quad [16.4]$$

Si noti che a questo risultato si poteva giungere più rapidamente applicando il teorema della quantità di moto al *sistema materiale* in moto che all'istante t occupa lo spazio assunto in precedenza come volume di controllo. Infatti, imposta la condizione di conservazione della massa $\rho\Omega ds$, il tasso di variazione della sua quantità di moto vale

$$\rho\Omega ds \frac{DU}{Dt} = \rho\Omega ds \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial s} \right)$$

essendo $U = U(s, t)$ velocità che si ritiene distribuita uniformemente su Ω e DU/Dt l'accelerazione della massa considerata (cfr. paragrafo 5.2).

Uguagliando ora la somma delle forze di massa [16.2] e di superficie [16.3] al tasso di variazione della quantità di moto [16.4], e dividendo tutto per $\gamma\Omega ds$ si ottiene l'equazione

$$\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\tau_0 B}{\gamma\Omega} = -\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial s}.$$

Se il moto è *barotropico*, ad ogni istante t sussiste un legame $\rho = \rho(p)$ tale che

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \int \frac{dp}{\gamma};$$

L'equazione dinamica della corrente assume allora la forma

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \int \frac{dp}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} \right) = -\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\tau_0}{\gamma R} \quad [16.5]$$

avendo introdotto il raggio idraulico della sezione $R = \Omega/B$.

Volendo mettere in conto una distribuzione *non uniforme* della velocità nella sezione, si deve valutare il tasso di variazione della quantità di moto rappresentato dalla

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho v dV,$$

dove $v = v(s, t)$ è il valore medio locale della velocità e V è il volume mobile. Dal teorema di trasporto, associato all'equazione di continuità, si ottiene, come si è visto nel paragrafo 4.3,

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho v dV = \int_V \rho \frac{Dv}{Dt} dV$$

ed essendo ora V il volume fisso Ωds segue

$$\int_V \rho \frac{Dv}{Dt} dV = \rho ds \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} \right) d\Omega = \rho ds \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2} \right) \right\} d\Omega.$$

Ricordando la definizione della velocità media U

$$\int_{\Omega} v d\Omega = U\Omega \quad [16.6]$$

ed introducendo un coefficiente β di ragguglio della portata di quantità di moto, definito dall'operazione

$$\int_{\Omega} v^2 d\Omega = \beta U^2 \Omega \quad [16.7]$$

si ottiene

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho v dV = \rho \Omega \frac{\partial U}{\partial t} ds + \rho \Omega \frac{\partial}{\partial s} \left(\beta \frac{U^2}{2} \right) ds.$$

L'equazione dinamica del moto vario di una corrente diventa quindi

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \int \frac{dp}{\gamma} + \beta \frac{U^2}{2g} \right) = -\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\tau_0}{\gamma R}. \quad [16.8]$$

Nel moto turbolento i valori di β differiscono appena di qualche unità per cento da 1, variando da 1,00 a 1,04. Tenuto conto della difficoltà di una valutazione attendibile, nelle ordinarie applicazioni tecniche si usa assumere di norma $\beta = 1$.

Per quanto riguarda il calcolo della perdita distribuita di energia totale, per unità di peso e per unità di lunghezza, dovuta alle resistenze al contorno

$$\frac{\tau_0}{\gamma R} = j, \quad [16.9]$$

si adottano in moto vario le stesse relazioni valide per il calcolo delle perdite di carico in condizioni di moto uniforme. Tale posizione è giustificata essenzialmente da osservazioni sperimentali indirette.

Per prendere in considerazione un eventuale cambiamento di segno della U in modo che il termine dissipativo ($-j$) abbia sempre segno contrario alla U stessa, nel caso di moto entro *condotte circolari* di diametro D , si scrive la perdita nella forma

$$j = \frac{\lambda}{D} \frac{U|U|}{2g}; \quad [16.10]$$

con l'ovvia sostituzione $4R$ in luogo di D nelle condotte di sezione differente dalla circolare, e con l'eventuale introduzione di un coefficiente di forma nel calcolo di λ .

16.2. Tipi di oscillazioni: elastiche e di massa.

Le equazioni del moto vario delle correnti possono essere utilizzate nelle condotte in pressione per lo studio di due forme sostanzialmente diverse di oscillazioni che si presentano nei transitori degli impianti idraulici: le oscillazioni elastiche e le oscillazioni di massa.

Le prime sono *onde di pressione* che si propagano con elevata celerità (dell'ordine di 1000 m/s nelle correnti liquide entro tubi metallici) per effetto della comprimibilità del fluido e dell'elasticità della condotta stessa. Le cause di queste oscillazioni elastiche risiedono nelle variazioni di velocità provocate, ad esempio, da manovre di apertura o di chiusura delle valvole di estremità di una condotta di derivazione o di pompaggio, oppure, in quest'ultimo caso, anche direttamente dall'attacco o dal distacco della pompa.

Le oscillazioni di massa sono invece spostamenti *in blocco* che subisce quasi-rigidamente la colonna liquida contenuta nella condotta collegante due serbatoi a pelo libero, quando il livello di almeno uno dei serbatoi varia nel tempo. L'esempio più semplice è rappresentato dalle oscillazioni della massa liquida contenuta in un tubo ad U se i peli liberi nei due rami verticali sono a livello diverso nell'istante di velocità nulla.

In molti impianti idraulici, ad esempio negli impianti idroelettrici a serbatoio dotati di pozzo piezometrico (v. fig. 16.2), possono presentarsi entrambi i tipi di oscillazione. Le oscillazioni elastiche, che si propagano nelle condotte forzate di derivazione, sono provocate dalle manovre dell'otturatore della turbina ed hanno durate così brevi che il livello del pozzo piezometrico si può ritenere invariato fino al momento del loro esaurimento. Le oscillazioni di massa interessano invece il sistema serbatoio-galleria-pozzo piezometrico; esse hanno periodi e durate di ordine di grandezza molto maggiore delle prime, tali da poter essere considerate come oscillazioni successive ed indipendenti da quelle elastiche.

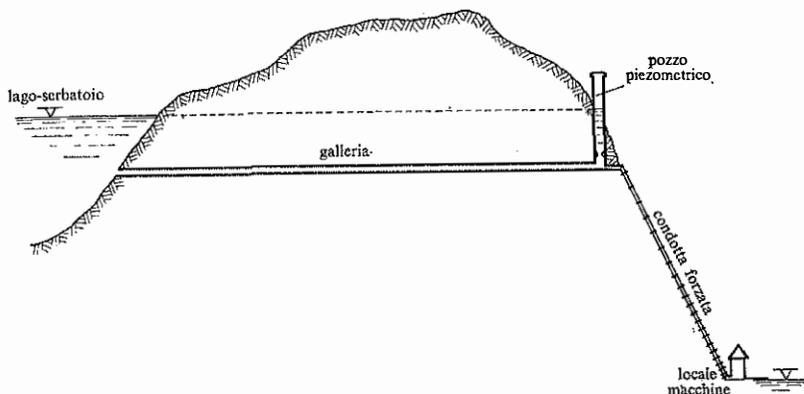


Fig. 16.2. - Schema di impianto idroelettrico.

Entrambi i problemi saranno trattati in questo capitolo nei loro aspetti essenziali. Per un approfondimento di tutta la materia si rimanda ai testi specializzati, ed in particolare al 2° volume del libro di F. Arredi: *Costruzioni Idrauliche*, UTET, 1972.

16.3. Condotta collegante due serbatoi. Oscillazioni di massa.

Per accentuare l'aspetto tecnico del problema delle oscillazioni di massa, si fa riferimento al sistema serbatoio-galleria-pozzo piezometrico di un impianto idroelettrico, come quello schematizzato nella figura 16.3.

Per lo studio delle oscillazioni provocate in tale sistema da una rapida variazione della portata effluente si può prescindere, per quanto detto nel paragrafo precedente, dalla presenza della condotta forzata a valle del

pozzo piezometrico e ritenere l'organo di manovra della portata inserito direttamente all'uscita del pozzo (v. sez. 3 della fig. 16.3).

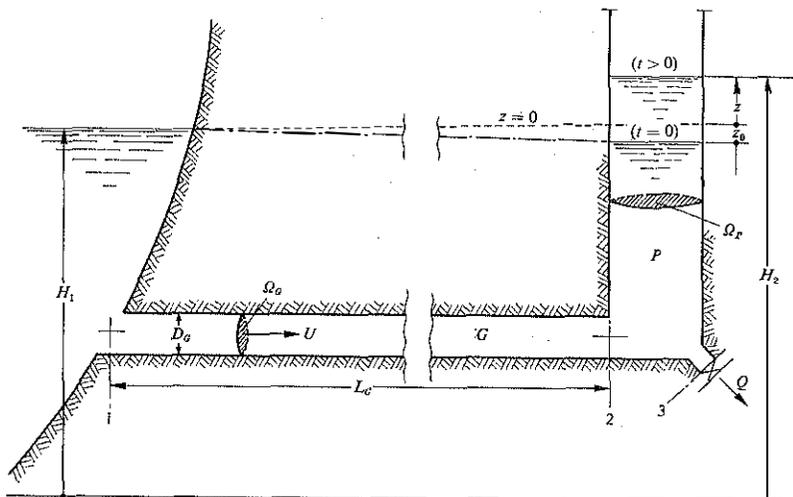


Fig. 16.3. - Sistema galleria-pozzo piezometrico di un impianto idroelettrico.

Il fenomeno delle oscillazioni di massa s'interpreta analiticamente con ottima approssimazione assumendo *trascurabili la comprimibilità del fluido e l'elasticità del condotto* contenente la massa fluida. S'impongono allora le condizioni:

$$q = \text{cost}$$

per il fluido, e

$$d\Omega_g/dt = 0$$

per la galleria in pressione di sezione Ω_g uniforme in tutto il suo sviluppo di lunghezza L_g .

L'equazione di continuità [16.1] si riduce alla

$$\partial Q / \partial s = 0 \quad [16.11]$$

che ammette l'integrale generale

$$Q = Q_0 + f(t) \quad (\text{per } t \geq 0) \quad [16.12]$$

avendo indicato con Q_0 la portata del regime permanente all'istante $t = 0$, assunto quale istante iniziale della manovra e con $f(t)$ una funzione del tempo, nulla per $t = 0$.

Anche la velocità media nella galleria in pressione $U = Q(t)/\Omega_G$ è quindi funzione soltanto del tempo: la condizione $\partial U/\partial s = 0$ evidenzia l'ipotesi posta di moto in blocco, uniforme ma non permanente, nel quale le variazioni di velocità si propagano con celerità infinitamente grande.

Per il moto in esame, l'eq. [16.5], con la condizione $\varrho = \text{cost}$ e con l'espressione [16.10] delle perdite distribuite, diventa

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} \right) = -\frac{1}{g} \frac{dU}{dt} - \frac{\lambda}{D_G} \frac{U|U|}{2g}$$

od anche, indicando al solito con

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{U^2}{2g}$$

il carico totale (od effettivo) della corrente in una sezione,

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{dU}{dt} - \frac{\lambda}{D_G} \frac{U|U|}{2g}. \quad [16.13]$$

Questa equazione può essere integrata fra le sezioni 1 e 2 distanti L_G , assumendo che in tali sezioni il carico totale coincida, in ogni istante, con il carico del serbatoio confinante; trascurando, in altre parole, le perdite localizzate d'imbocco e di sbocco. Segue

$$H_1 - H_2 = \frac{1}{g} \frac{dU}{dt} L_G + \frac{\lambda}{D_G} \frac{U|U|}{2g} L_G. \quad [16.14]$$

Posta l'origine dell'asse verticale z al livello del pelo libero nel lago-serbatoio S , si ha

$$H_1 - H_2 = -z.$$

Il volume che attraversa nel tempo dt una sezione della galleria è uguale al volume immagazzinato nello stesso tempo nel pozzo piezometrico cilindrico di sezione Ω_p , in seguito alla variazione di livello dz :

$$U\Omega_G dt = \Omega_p dz,$$

e quindi

$$U = \frac{\Omega_p}{\Omega_G} \frac{dz}{dt},$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\Omega_p}{\Omega_G} \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Sostituendo nell'eq. [16.14] le espressioni ora trovate risulta

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\lambda}{2D_G} \frac{\Omega_P}{\Omega_G} \frac{dz}{dt} + \frac{g\Omega_G}{L_G\Omega_P} z = 0. \quad [16.15]$$

Questa equazione non è lineare, ma si integra senza difficoltà con metodi numerici alle differenze finite, poste le condizioni iniziali:

$$z = -z_0, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\Omega_G}{\Omega_P} U_0, \quad \text{per } t = 0, \quad [16.16]$$

essendo z_0 ed U_0 i valori delle perdite distribuite e della velocità nel regime di moto permanente che precede il transitorio.

Le oscillazioni di livello nel pozzo piezometrico sono smorzate a causa delle resistenze, rappresentate dal secondo termine della [16.15]. Il transitorio di moto vario si esaurisce di solito in un tempo pari a 3 o 4 volte il periodo delle oscillazioni del sistema.

16.4. Oscillazioni di massa senza resistenze.

Se si trascurano le resistenze, l'eq. [16.15] si riduce alla

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{g\Omega_G}{L_G\Omega_P} z = 0 \quad [16.17]$$

che è l'equazione di un moto armonico con pulsazione $\omega = \sqrt{g\Omega_G/L_G\Omega_P}$, cioè con periodo

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi \sqrt{\frac{L_G\Omega_P}{g\Omega_G}}. \quad [16.18]$$

L'integrale generale

$$z = C_1 \text{sen } \omega t + C_2 \text{cos } \omega t,$$

tenuto conto che per $t = 0$ è $z = 0$, perché si sono trascurate le resistenze, e che è ancora $(dz/dt)_0 = (\Omega_G/\Omega_P) U_0$, diventa

$$z = z_{\max} \text{sen } \omega t \quad [16.19]$$

con

$$z_{\max} = U_0 \sqrt{\frac{L_G\Omega_G}{g\Omega_P}} \quad [16.20]$$

massima ampiezza dell'escursione del pelo libero nel pozzo piezometrico di forma cilindrica. Evidentemente basta che la condizione di forma cilin-

drica sia rispettata nel tronco dove avviene l'escursione del pelo libero. La presenza però di una strozzatura alla base del pozzo può modificare sostanzialmente l'importanza delle dissipazioni sul fenomeno. Vedi ad esempio, per questi problemi, Evangelisti (1947), Stucky (1958) e Datei (1970).

16.5. Oscillazioni in un tubo ad U con resistenze.

Come esempio di calcolo delle oscillazioni di massa tenendo conto delle resistenze, si riporta qui lo studio delle oscillazioni di una colonna liquida nel tubo ad U della figura 16.4.

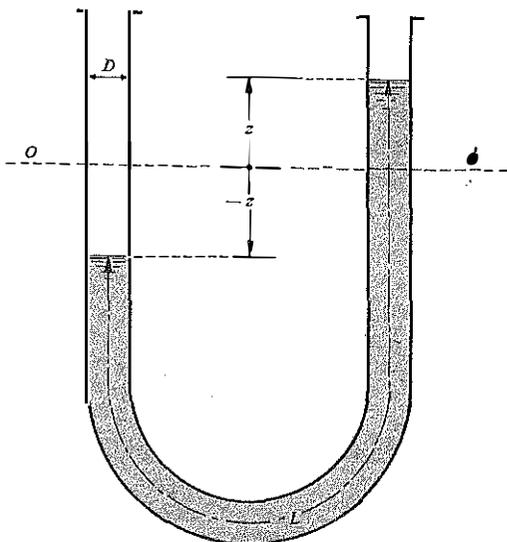


Fig. 16.4. - Oscillazioni in un tubo ad U con rami verticali.

L'eq. [16.14], essendo $H_1 - H_2 = -2z$ diventa

$$-2z = \frac{1}{g} \frac{dU}{dt} L + \frac{\lambda}{D} \frac{U|U|}{2g} L$$

e poiché $U = dz/dt$, segue

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\lambda}{2D} \frac{dz}{dt} \left| \frac{dz}{dt} \right| + \frac{2g}{L} z = 0. \quad [16.21]$$

Questa equazione può essere integrata una volta nell'intervallo di tempo nel quale dz/dt non cambia segno (fra un massimo e un minimo suc-

cessivi) con il seguente risultato

$$\left\{ \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 - \frac{4gD^2}{\lambda^2 L} \left(1 + \frac{\lambda z}{D} \right) \right\} \exp[-\lambda z/D] = C$$

dove C è una costante di integrazione. Indicando con z_1 il primo massimo di z , dalla condizione $dz/dt = 0$ resta determinata la costante

$$C = - \frac{4gD^2}{\lambda^2 L} \left(1 + \frac{\lambda z_1}{D} \right) \exp[-\lambda z_1/D].$$

Sostituendo nell'equazione precedente segue

$$\left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = \frac{4gD^2}{\lambda^2 L} \left\{ 1 + \frac{\lambda z}{D} - \left(1 + \frac{\lambda z_1}{D} \right) \exp[\lambda(z - z_1)/D] \right\}. \quad [16.22]$$

L'eq. [16.22] è facilmente integrabile con metodi numerici; ma può essere anche utilizzata direttamente per calcolare le ampiezze $z_m > 0$ e $z_{m+1} < 0$, massima e minima di due oscillazioni successive. Tali ampiezze si verificano negli istanti in cui $dz/dt = 0$ e la [16.22] diventa

$$1 + \frac{\lambda z_m}{D} = \left(1 + \frac{\lambda z_1}{D} \right) \exp[\lambda(z_m - z_1)/D]$$

nel caso $z = z_m$ e analoga nel caso $z = z_{m+1}$; ne deriva

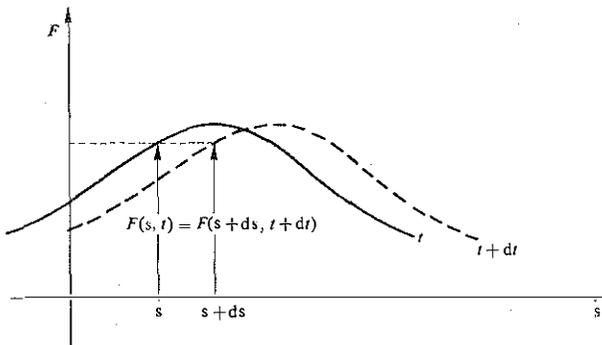
$$\left(1 + \frac{\lambda z_m}{D} \right) \exp[-\lambda z_m/D] = \left(1 + \frac{\lambda z_{m+1}}{D} \right) \exp[-\lambda z_{m+1}/D] \quad [16.23]$$

equazione che può essere risolta per tentativi per calcolare z_{m+1} , noto z_m .

16.6. Oscillazioni elastiche. Celerità di un'onda.

Sia $F = F(s, t)$ una funzione di classe C^1 atta a rappresentare una generica perturbazione che si propaga inalterata nella direzione s . Ciò significa che essa assume in una sezione $s + ds$ e ad un istante $t + dt$ lo stesso valore che aveva nella sezione s all'istante t (v. fig. 16.5). Il rapporto ds/dt esprime la velocità con cui si propaga ciascun valore della perturbazione rappresentata dalla F ed è chiamata *celerità*. Conseguentemente, se per un dato incremento ds esiste sempre un incremento dt che verifica la condizione

$$F(s + ds, t + dt) - F(s, t) = dF = (\partial F/\partial s) ds + (\partial F/\partial t) dt = 0,$$

Fig. 16.5. - Funzione $F(s, t)$ che si propaga.

la celerità c risulta espressa dall'equazione

$$c = \frac{ds}{dt} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{\frac{\partial F}{\partial s}}. \quad [16.24]$$

Nel caso della propagazione di un'onda in un fluido in moto, dividendo la [16.24] per la velocità effettiva U del fluido si ottiene la seguente relazione fra i valori assoluti delle grandezze in gioco

$$\left| \frac{c}{U} \right| = \frac{\left| \frac{\partial F}{\partial t} \right|}{\left| U \frac{\partial F}{\partial s} \right|}, \quad [16.25]$$

la quale dimostra che termini del tipo $|U \partial F / \partial s|$ stanno a termini del tipo $|\partial F / \partial t|$ nello stesso rapporto in cui la velocità U sta alla celerità c dell'onda.

16.7. Le equazioni differenziali semplificate.

Per lo studio del fenomeno di *colpo d'ariete* in un fluido in pressione, cioè per lo studio della propagazione delle onde causate da manovre abbastanza rapide degli organi di intercettazione negli impianti idraulici, sono accettabili alcune semplificazioni che non alterano la sostanza dei risultati. Benché sia ora possibile rinunciare almeno ad una parte di tali

semplificazioni, cercando la soluzione con il *metodo delle caratteristiche* che si dimostra particolarmente efficace nei casi in esame, riteniamo utile riportare prima le *equazioni semplificate* ed il relativo metodo di soluzione proposto da Allievi (1903, 1913) per una più facile comprensione del fenomeno e del meccanismo risolutivo.

Per ottenere le equazioni semplificate si trascurano:

(a) la velocità U rispetto alla celerità c , e quindi termini del tipo $|U \partial F / \partial s|$ rispetto a $|\partial F / \partial t|$;

(b) l'effetto delle resistenze, assumendo il comportamento di fluido ideale;

(c) le variazioni della densità dovute alle eventuali variazioni di quota lungo l'asse della condotta.

Indichiamo con $h(s, t)$ la funzione

$$h = z + \int \frac{dp}{\gamma}; \quad [16.26]$$

nei liquidi essa coincide praticamente con il carico piezometrico $z + p/\gamma$ perché l'entità delle variazioni di densità sono sempre trascurabili, pur potendo non esserlo il *tasso* di variazione della stessa densità. Le derivate di h , funzione che chiameremo ancora carico piezometrico, sono espresse dalle

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial s} \quad \text{e} \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial t}$$

essendo nulla la derivata $\partial z / \partial t$.

Con l'introduzione del carico h , l'equazione dinamica [16.5] si scrive

$$\frac{\partial h}{\partial s} + \frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial s} = - \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} - j. \quad [16.27]$$

Trascurando $U \partial U / \partial s$ in confronto a $\partial U / \partial t$ per la posizione (a) e le perdite j per la posizione (b), la [16.27] si riduce all'equazione semplificata del moto

$$\frac{\partial h}{\partial s} = - \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t}. \quad [16.28]$$

L'equazione di continuità [16.1], tenuto conto che $Q = \Omega U$, si sviluppa nella

$$e \Omega \frac{\partial U}{\partial s} + e U \frac{\partial \Omega}{\partial s} + U \Omega \frac{\partial e}{\partial s} + e \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \Omega \frac{\partial e}{\partial t} = 0.$$

Il termine $\rho U(\partial\Omega/\partial s)$ si trascura in confronto a $\rho(\partial\Omega/\partial t)$ per l'ipotesi (a) e così pure $\Omega U(\partial\rho/\partial s)$ in confronto a $\Omega(\partial\rho/\partial t)$ perché, per l'ipotesi (c), il contributo permanente alla $(\partial\rho/\partial s)$ dovuto alle differenze di quota lungo la condotta non viene tenuto in considerazione. Segue

$$\rho\Omega \frac{\partial U}{\partial s} + \rho \frac{\partial\Omega}{\partial t} + \Omega \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0. \quad [16.29]$$

Le variazioni $\partial\rho/\partial t$ e $\partial\Omega/\partial t$ si possono esprimere in funzione delle variazioni di pressione $\partial p/\partial t$ oppure delle variazioni di carico piezometrico $\partial h/\partial t$. Per giungere a questo risultato si deve mettere in conto la comprimibilità del fluido e l'elasticità della condotta.

Assunto *barotropico* il comportamento del fluido, la densità risulta determinata, istante per istante, in funzione della pressione: dalla corrispondente relazione $\rho = \rho(p)$ deriva

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{d\rho}{dp} \frac{\partial p}{\partial t}.$$

La variazione $d\rho/dp$ si può esprimere attraverso l'equazione che definisce il *modulo ϵ_s di comprimibilità* adiabatica del fluido: $dp = \epsilon_s(d\rho/\rho)$. Segue quindi

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\rho}{\epsilon_s} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad [16.30]$$

Per quanto riguarda il legame tra $\partial\Omega/\partial t$ e $\partial p/\partial t$ si è già detto che esso va ricercato nel *comportamento elastico* della condotta, contenuto generalmente nel campo lineare. Nel caso più semplice di un tubo di caratteristiche costanti, con spessore S piccolo rispetto al diametro D e modulo di elasticità normale E , ad una variazione della pressione interna dp consegue una variazione della tensione, considerata distribuita uniformemente nella sezione della parete del tubo, data dall'equazione di Mariotte: $d\sigma = dp \cdot D/2S$. A quest'ultima corrisponde una deformazione lineare unitaria

$$\frac{dD}{D} = \frac{d\sigma}{E} = \frac{dpD}{2ES}.$$

Poiché Ω è proporzionale a D^2 , la variazione relativa di sezione risulta $d\Omega/\Omega = 2dD/D$. Sostituendo nell'equazione soprascritta, essendo nel caso in esame $dp = (\partial p/\partial t)dt$, si ottiene la variazione $d\Omega = (\partial\Omega/\partial t)dt$ e quindi

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} \cdot \frac{\Omega D}{ES}. \quad [16.31]$$

Introducendo le [16.30] e [16.31] nell'eq. [16.29] si ottiene

$$\varrho\Omega \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial p}{\partial t} \left(\frac{\varrho\Omega}{\varepsilon_e} + \frac{\varrho\Omega D}{ES} \right) = 0.$$

Si può infine sostituire in questa equazione la variazione di pressione $\partial p/\partial t$ con la variazione $\gamma(\partial h/\partial t)$, come si è visto in precedenza, ottenendo l'equazione semplificata di continuità

$$\frac{\partial h}{\partial t} \left(\frac{\varrho}{\varepsilon_e} + \frac{\varrho D}{ES} \right) = -\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial s}. \quad [16.32]$$

Poniamo $1/a^2 = \varrho/\varepsilon_e + \varrho D/ES$, cioè introduciamo la grandezza

$$a = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_e}{\varrho}}}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon_e D}{ES}}} \quad [16.33]$$

che ha le dimensioni di una velocità e che rappresenta, come si dimostra facilmente, la celerità delle onde di pressione in un fluido di caratteristiche ϱ ed ε_e entro una condotta elastica rettilinea ed indefinita di caratteristiche D , S , E uniformi.

In tale condotta, infatti, un'onda di pressione si può propagare nella direzione dell'asse senza incontrare altre perturbazioni. Essa è allora accompagnata dalle variazioni *contemporanee* delle caratteristiche del fluido, della condotta e del moto stazionario preesistente, in particolare dalle variazioni della velocità media U . Indichiamo con

$$c = -\frac{\frac{\partial h}{\partial t}}{\frac{\partial h}{\partial s}} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial t}}{\frac{\partial U}{\partial s}}$$

la celerità delle variazioni di carico e insieme delle variazioni di velocità. Dividendo la [16.28] per la [16.32] si ottiene

$$\frac{\frac{\partial h}{\partial s}}{\frac{\partial h}{\partial t} \frac{\varrho}{\varepsilon_e} \left(1 + \frac{\varepsilon_e D}{ES} \right)} = \frac{\frac{\partial U}{\partial t}}{\frac{\partial U}{\partial s}}$$

e con la posizione [16.33]

$$\frac{\frac{\partial h}{\partial s}}{\frac{1}{a^2} \frac{\partial h}{\partial t}} = \frac{\frac{\partial U}{\partial t}}{\frac{\partial U}{\partial s}}$$

Dal confronto con l'espressione precedente della celerità segue $c^2 = a^2$,
ossia

$$c = \pm a \quad [16.34]$$

avendo assunto per a la determinazione positiva della [16.33].

Il risultato evidentemente è valido anche per la propagazione di un'onda in una condotta di lunghezza limitata finché non si verificano interferenze con le onde di ritorno dall'estremità.

16.8. Lo studio del colpo d'ariete con il sistema delle equazioni semplificate.

Come nello studio delle oscillazioni di massa, anche nella trattazione del colpo d'ariete si fa riferimento ad una situazione tipica per questi problemi: lo stato di moto perturbato provocato da manovre di chiusura o di apertura dell'otturatore posto all'estremità di una condotta di derivazione, alimentata all'altra estremità da un serbatoio che si può ritenere a livello costante per tutta la durata del fenomeno di moto vario nella condotta.

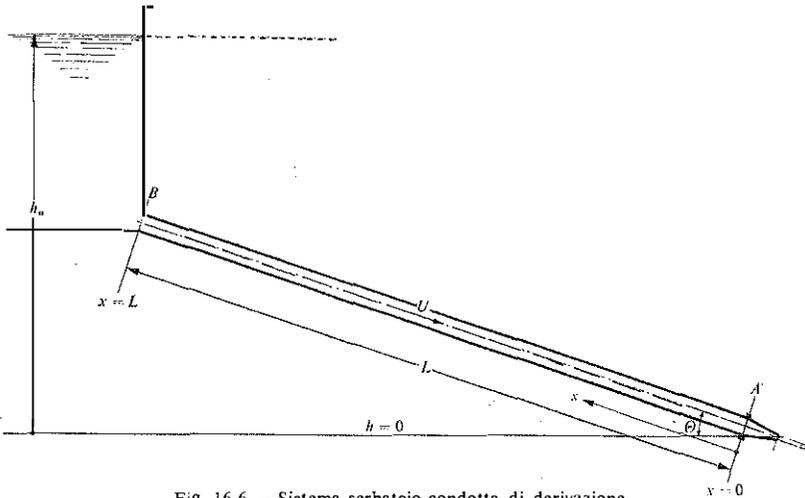


Fig. 16.6. - Sistema serbatoio-condotta di derivazione.

Come mostra la figura 16.6 è consuetudine, seguendo Allievi, assumere l'origine della coordinata spaziale, che indicheremo ora con x , nella sezione A' di sbocco, dove è situato l'otturatore, ed il verso positivo di tale coordinata verso monte, opposto quindi al verso della velocità di deflusso in regime permanente ($x = -s + cost$).

Con questa convenzione, il sistema delle equazioni differenziali semplificate assume la forma

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} \quad [16.35]$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{a^2}{g} \frac{\partial h}{\partial x} \quad [16.36]$$

dove a è la celerità delle perturbazioni espressa dalla [16.33]. In una condotta perfettamente rigida ($E \rightarrow \infty$), come in un mezzo fluido indefinito, la celerità delle onde piane di pressione vale

$$c_0 = \sqrt{\varepsilon_e \rho}. \quad [16.37]$$

Per l'acqua $c_0 = 1450 \text{ ms}^{-1}$ a 10°C .

Nelle condotte elastiche si può scrivere quindi

$$a = \frac{c_0}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon_e \cdot D}{E \cdot S}}} \quad [16.38]$$

e per l'acqua in tubi di acciaio, essendo $\varepsilon_e/E \cong 1/100$ e D/S prossimo normalmente a 100, si vede che la celerità a ha valori intorno a 1000 ms^{-1} .

Il sistema delle [16.35] e [16.36] resta valido, con il significato di celerità della grandezza a , anche quando tale grandezza non è più definita dalla [16.38] perché, ad esempio, le caratteristiche della condotta non sono uniformi lungo tutta la sua lunghezza (condotte rinforzate, condotte con differenti spessori dall'imbocco allo sbocco, ecc.).

Ferma restando l'ipotesi (a) di trascurabilità di termini del tipo $|U \partial F / \partial x|$ rispetto a quelli del tipo $|\partial F / \partial t|$, si verifica facilmente che il sistema delle equazioni semplificate si può applicare anche al caso delle condotte di sezione non uniforme sostituendo alla velocità U il rapporto Q/Ω , ossia assumendo come grandezza cinematica rappresentativa la *portata* anziché la velocità media, tenuto conto che la prima resta sempre costante nel moto permanente. Si ottiene così

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{g\Omega} \frac{\partial Q}{\partial t} \quad [16.39]$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{a^2}{g\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad [16.40]$$

avendo assunto ancora positivo l'asse x con verso opposto a quello della portata Q nel regime permanente.

Devono essere infine precisate le *condizioni iniziali*, che definiscono lo stato di moto permanente prima della manovra di variazione della portata. Con le posizioni assunte per ottenere le equazioni semplificate, il regime permanente è definito dalle condizioni

$$h = h_0 \quad \text{e} \quad U = U_0, \quad \text{per } t = 0, \quad [16.41]$$

se la condotta è cilindrica; e dalle condizioni

$$h = h_0 \quad \text{e} \quad Q = Q_0, \quad \text{per } t = 0$$

se la sezione non è uniforme lungo la condotta.

16.9. Le equazioni integrali del colpo d'ariete.

Tenuto conto delle predette condizioni iniziali, il sistema originario delle equazioni semplificate alle derivate parziali [16.35] e [16.36], con $a = \text{cost}$ ed h ed U funzioni di classe C^2 , ammette l'integrale generale

$$h - h_0 = F(t - x/a) - f(t + x/a) \quad [16.42]$$

$$U - U_0 = (-g/a)\{F(t - x/a) + f(t + x/a)\} \quad [16.43]$$

con F ed f funzioni rispettivamente degli argomenti

$$\xi_1 = t - \frac{x}{a} \quad \text{e} \quad \xi_2 = t + \frac{x}{a};$$

la forma delle funzioni $F(\xi_1)$ ed $f(\xi_2)$ viene determinata in base alle condizioni ai limiti.

Per mostrare il processo deduttivo di questi integrali, deriviamo la [16.35] rispetto ad x e la [16.36] rispetto a t ; sottraendole dopo aver diviso la seconda per a^2 , si ottiene

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = 0$$

che è l'equazione delle « corde vibranti », studiata da D'Alembert. Con l'introduzione delle variabili ξ_1 e ξ_2 indicate prima essa assume la forma « canonica » delle equazioni alle derivate parziali del 2° ordine di tipo iperbolico:

$$\partial^2 h / \partial \xi_1 \partial \xi_2 = 0.$$

L'integrale generale di questa equazione è evidentemente

$$h = \text{cost} + F_1(\xi_1) + F_2(\xi_2).$$

Il procedimento si applica identicamente ad un'equazione differenziale del 2° ordine dello stesso tipo in U .

Scelta convenzionalmente la posizione dei simboli e dei segni delle funzioni arbitrarie F ed f nella [16.42], la forma della [16.43] deriva necessariamente dalla condizione che esse soddisfino insieme al sistema delle equazioni differenziali di partenza.

Le funzioni F ed f rappresentano onde che si propagano con le celerità $c_{(F)} = +a$ e $c_{(f)} = -a$, cioè con la stessa velocità rispettivamente nel verso positivo e nel verso negativo dell'asse x ; infatti, dalla espressione della celerità [16.24] si ottiene

$$c_{(F)} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{\frac{\partial F}{\partial x}} = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial \xi_1}\right) \cdot 1}{\left(\frac{\partial F}{\partial \xi_2}\right) \left(-\frac{1}{a}\right)} = +a$$

$$c_{(f)} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{\frac{\partial f}{\partial x}} = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_1}\right) \cdot 1}{\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_2}\right) \left(+\frac{1}{a}\right)} = -a.$$

Entrambe le funzioni sono nulle ovunque finché si mantiene il regime permanente che precede la manovra. All'istante $t = 0$, nella sezione A dove è posto l'organo di manovra ha origine l'onda F che si propaga con celerità a lungo la condotta verso la sezione B d'imbocco e la raggiunge al tempo $t = L/a$. In quel momento si origina nella sezione B l'onda f che, a sua volta, procedendo con la stessa celerità ma in senso opposto alla F , ritorna alla sezione A dopo il tempo $2L/a$. L'intervallo di tempo necessario per la propagazione di un'onda di pressione lungo tutta la condotta, in andata e ritorno,

$$\vartheta = 2L/a \quad [16.44]$$

si chiama *durata di fase*. La semidurata $T = L/a$ viene chiamata *tempo di transito*.

Relativamente al tempo ϑ , una manovra dell'organo di intercettazione si dice *brusca* (o *rapida*) se si completa in un tempo τ minore od uguale della durata di fase, e *lenta* se si completa in un tempo τ maggiore di tale durata.

16.10. Chiusura totale brusca.

Si usa definire *colpo d'ariete diretto* il transitorio di moto vario durante la prima fase, cioè durante il primo intervallo di tempo di durata ϑ . Per $0 < t < \vartheta$, nella sezione di sbocco $A(x=0)$, la funzione f si mantiene nulla e le equazioni [16.42] e [16.43], eliminando fra loro la $F(t)$, si riducono alla

$$h - h_0 = \frac{a}{g}(U_0 - U). \quad [16.45]$$

Lo stesso risultato vale anche per una sezione $x \neq 0$ ma solo per il tempo $0 < t < (2L-x)/a$, dopo il quale la funzione f assume in quella sezione valori diversi da zero.

Se la manovra in esame è una *chiusura totale brusca*, ossia una chiusura completa dell'otturatore in un tempo $\tau < \vartheta$, l'eq. [16.45] rappresenta, per tutta la durata della manovra, l'andamento del sovraccarico $h - h_0$ nella sezione di sbocco al diminuire della velocità U . Poiché quest'ultima si annulla all'istante τ di completamento della chiusura, da quel momento il *sovraccarico nella sezione di sbocco* assume il suo valore massimo

$$h_{\max} - h_0 = \frac{a}{g} U_0 \quad [16.46]$$

e lo conserva fino all'istante $t = \vartheta$ nel quale interviene negativamente l'effetto dell'onda f .

L'eq. [16.46], espressa in termini di pressione, rappresenta la formula di Joukowski (1898)

$$p_{\max} - p_0 = \rho a U_0. \quad [16.46]$$

Il massimo sovraccarico nella sezione di manovra (e quindi anche la max sovrappressione) è indipendente dal valore del tempo τ , sempre che sia naturalmente $\tau < \vartheta$. Esso persiste in tale sezione per il tempo $\vartheta - \tau$, cioè tanto più a lungo quanto più breve è la manovra rispetto alla durata di fase. Inoltre lo stesso massimo sovraccarico si verifica in tutte le sezioni della condotta che soddisfano alla condizione di manovra brusca, cioè alla $\tau \leq 2(L-x)/a$; in altre parole, è interessato dallo stesso sovraccarico massimo un tratto di condotta lungo

$$x = L - \frac{1}{2} a \tau \quad [16.47]$$

a partire dalla sezione di manovra.

Si osservi infine che, se l'oscillazione positiva del carico piezometrico è sufficientemente elevata, nella successiva oscillazione negativa la pressione può scendere al di sotto della pressione atmosferica, ed anche fino a valori nulli o quasi (pari alla tensione di vapore) provocando la formazione di cavità vaporose e gassose ed eventualmente il distacco della vena. Si veda in proposito il paragrafo 16.19.

16.11. Manovre lente. Le condizioni ai limiti.

Lo studio delle oscillazioni di pressione e di velocità in una condotta di derivazione per effetto di una manovra dell'otturatore *lenta*, sia in chiusura, sia in apertura, si ottiene particolarizzando le equazioni [16.42] e [16.43], integrali del sistema semplificato, con le seguenti *condizioni ai limiti*.

Nella *sezione di imbocco*, situata all'ascissa $x = L$, la costanza di livello del pozzo piezometrico impone che sia

$$h = h_0 \quad [16.48]$$

per qualunque $t \geq 0$.

Nella *sezione di sbocco* la legge di deflusso dell'otturatore impone un vincolo fra velocità e carico piezometrico. Schematizzando l'ugello come una luce a battente di area variabile $\bar{\omega}$, entro i limiti di approssimazione già assunti si può scrivere la portata defluente, istante per istante, nella forma valida in condizioni permanenti:

$$Q = C_q \bar{\omega} \sqrt{2gh}$$

con C_q il coefficiente di portata della luce. Trascurando la variazione di densità del liquido nel breve tronco fra la sezione terminale A della condotta e lo sbocco, si può ritenere tale portata uguale al prodotto $U\Omega$ nella sezione A . Si scrive perciò l'equazione

$$U\Omega = C_q \bar{\omega} \sqrt{2gh}$$

e nel moto permanente che precede la manovra

$$U_0\Omega = C_q \bar{\omega}_0 \sqrt{2gh_0}$$

Dividendo la prima equazione per la seconda si ottiene la condizione

$$\frac{U}{U_0} = \eta \sqrt{\frac{h}{h_0}} \quad \text{per } x = 0. \quad [16.49]$$

Si è indicato con η il grado di apertura dell'otturatore: $\eta = \bar{\omega}/\bar{\omega}_0$, assumendo, come di consueto $C_a = \text{cost.}$ Altrimenti la [16.49] resta valida con il significato di $\eta = C_a \bar{\omega}/C_{a0} \bar{\omega}_0$.

16.12. Le equazioni concatenate di Allievi.

La condizione [16.48] consente di eliminare una delle due funzioni arbitrarie dal sistema degli integrali generali [16.42] e [16.43].

Infatti dal primo di questi, dovendo essere $h = h_0$ per $x = L$, segue

$$F(t - L/a) = f(t + L/a)$$

ossia, data l'arbitrarietà di t ,

$$f(\tilde{T}) = F(\tilde{T} - 2L/a) = F(\tilde{T} - \vartheta) \tag{16.50}$$

avendo indicato con \tilde{T} un generico argomento della funzione f .

Gli integrali predetti si possono quindi scrivere in funzione della sola funzione F sostituendo $f\{t + (x/a)\}$ con $F\{t + (x/a) - \vartheta\}$. In particolare, nella sezione $x = 0$, si ha

$$\begin{aligned} h(t) - h_0 &= F(t) - F(t - \vartheta) \\ U(t) - U_0 &= (g/a)\{F(t) + F(t - \vartheta)\}. \end{aligned}$$

Scegliamo una successione di tempi t_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) tale che sia

$$0 < t_1 < \vartheta; \quad t_2 = t_1 + \vartheta; \quad t_3 = t_2 + \vartheta; \quad \dots \quad t_i = t_{i-1} + \vartheta$$

e scriviamo le equazioni precedenti per $t = t_1, t = t_2$, ecc., tenendo presente che $F(t_0) = 0$ perché $t_0 = t_1 - \vartheta < 0$,

$$\begin{aligned} \text{per } t = t_1: \quad h(t_1) - h_0 &= F(t_1); & (a/g)\{U_0 - U(t_1)\} &= F(t_1) \\ \text{per } t = t_2: \quad h(t_2) - h_0 &= F(t_2) - F(t_1); & (a/g)\{U_0 - U(t_2)\} &= F(t_2) + F(t_1) \\ & \dots & \dots & \dots \\ \text{per } t = t_i: \quad h(t_i) - h_0 &= F(t_i) - F(t_{i-1}); & (a/g)\{U_0 - U(t_i)\} &= F(t_i) + F(t_{i-1}). \end{aligned}$$

Si possono quindi eliminare le F fra le due serie di equazioni ottenendo

$$\begin{aligned} h(t_1) - h_0 &= (a/g)\{U_0 - U(t_1)\} \\ h(t_2) + h(t_1) - 2h_0 &= (a/g)\{U(t_1) - U(t_2)\} \\ & \dots & \dots & \dots \\ h(t_i) + h(t_{i-1}) - 2h_0 &= (a/g)\{U(t_{i-1}) - U(t_i)\} \end{aligned}$$

ed in termini adimensionali

$$\frac{h(t_i)}{h_0} + \frac{h(t_{i-1})}{h_0} - 2 = \frac{aU_0}{gh_0} \left[\frac{U(t_{i-1})}{U_0} - \frac{U(t_i)}{U_0} \right]. \quad [16.51]$$

Introducendo la condizione al contorno [16.49], le [16.51] si trasformano nelle equazioni dei valori concatenati del carico di Allievi

$$z_i^2 + z_{i-1}^2 - 2 = 2Al(\eta_{i-1} z_{i-1} - \eta_i z_i) \quad (i = 1, 2, \dots) \quad [16.52]$$

valide nella sezione $x = 0$, con le posizioni

$$z_i^2 = h(t_i)/h_0; \quad \eta_i = \bar{\omega}(t_i)/\bar{\omega}_0$$

$$Al = \frac{aU_0}{2gh_0} = \text{numero di Allievi}. \quad [16.53]$$

Queste equazioni consentono la determinazione, nella sezione di sbocco, dei valori del carico piezometrico agli istanti t_1, t_2, t_3, \dots distanziati fra loro di una durata di fase. L'arbitrarietà della scelta di t_1 (purché $< \vartheta$) permette di infittire fin che si vuole l'indagine nei confronti della variabile tempo. Il procedimento è il seguente: è assegnata la manovra, cioè si conosce la funzione $\eta = \eta(t)$, che parte dal valore $\eta(0) = 1$ in tutte le manovre escluso in quelle di *apertura da otturatore* completamente chiuso; in quest'ultimo caso è $\bar{\omega}(0) = 0$ e le condizioni di riferimento per η ed Al sono quelle del regime permanente *finale*, cioè $\bar{\omega}_0$ è l'area della sezione dell'otturatore alla fine della manovra ed U_0 è la velocità di regime nella condotta a transitorio esaurito.

Si fissa un valore t_1 entro la prima fase; essendo $z_0 = 1$, noti η_0 ed η_1 , si ricava z_1 dalla prima delle equazioni [16.52] di Allievi

$$(i = 1) \quad z_1^2 - 1 = 2Al(\eta_0 - \eta_1 z_1)$$

e quindi si calcola il carico piezometrico $h(t_1) = z_1^2 h_0$. Noti z_1, η_1 ed η_2 , dalla seconda equazione

$$(i = 2) \quad z_2^2 + z_1^2 - 2 = 2Al(\eta_1 z_1 - \eta_2 z_2)$$

si ricava l'incognita z_2 e quindi il carico $h(t_2) = z_2^2 h_0$; e così via. Di solito si procede ad una doppia determinazione dei valori $h(t_i)$: per la serie degli istanti di ritmo intero, $t_1 = \vartheta, t_2 = 2\vartheta, t_3 = 3\vartheta, \dots$, e per quelli di metà fase, $t_1 = \vartheta/2, t_2 = 3(\vartheta/2), t_3 = 5(\vartheta/2), \dots$

Nel caso di una manovra di *chiusura totale*, per tutti gli istanti successivi alla fine della manovra ($t_i \geq \tau$) il grado di apertura η è nullo e le equazioni [16.52] si riducono alle

$$\frac{h(t_{i+1}) + h(t_i)}{2} = h_0 \quad (t_i \geq \tau)$$

che dimostrano la simmetria dei valori $h(t_{i+1})$ e $h(t_i)$ rispetto ad h_0 . Il carico piezometrico, dopo la chiusura totale, oscilla con periodo 2θ e con ampiezze che non si smorzano; conseguenza del fatto che il sistema è chiuso e, nello schema adottato, non dissipativo.

Naturalmente, nel caso di chiusura brusca, la prima delle equazioni di Allievi per $\tau < t_1$ ($\eta_0 = 1$, $\eta_1 = 0$) fornisce il risultato, già visto nel paragrafo 16.10, rappresentato dall'equazione di Joukowsky.

16.13. Manovre lineari. Metodi approssimati.

La figura 16.7 riporta la rielaborazione di un grafico proposto originariamente da Allievi. Essa fornisce, in funzione del numero di Allievi A e del tempo di chiusura misurato in fasi τ/θ , i valori del rapporto h_{\max}/h_0 per manovre di chiusura e h_{\min}/h_0 per manovre di apertura, purché sempre lineari nel tempo.

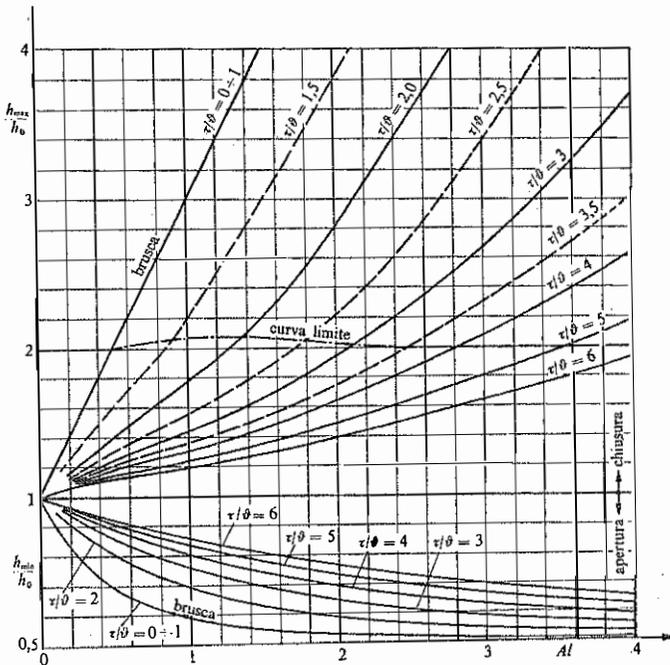


Fig. 16.7. - Diagramma per il calcolo del carico massimo per chiusure totali lineari e del carico minimo per aperture lineari, in funzione del numero di Allievi e del tempo di manovra in fasi.

La curva tratteggiata indica il limite oltre il quale la pressione minima successiva alle sovrappressioni di chiusura raggiunge valori inferiori alla pressione atmosferica.

Per $\tau \geq 3\theta$, il massimo sovraccarico si può calcolare con la formula approssimata

$$\frac{h_{\max}}{h_0} = (Z + \sqrt{1 + Z^2})^2 \quad [16.54]$$

con

$$Z = \frac{LU_0}{2g\tau h_0}.$$

Con approssimazione più grossolana, nel caso di chiusura totale lenta, si può valutare il massimo sovraccarico con la seguente *formula di Michaud-Allievi*

$$\frac{h_{\max}}{h_0} \leq 1 + 4Z. \quad [16.55]$$

La [16.55] si giustifica ammettendo che il max sovraccarico si verifichi alla fine della prima fase e che la velocità si riduca linearmente nel tempo, ipotesi quest'ultima cautelativa.

16.14. Il sistema delle equazioni differenziali complete.

In conformità alle trasformazioni riportate nel paragrafo 16.7 risulta

$$\varrho \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \varrho}{\partial t} = \Omega \left(\frac{\varrho D}{ES} + \frac{\varrho}{\varepsilon_s} \right) \frac{\partial p}{\partial t} = \gamma \Omega \left(\frac{\varrho D}{ES} + \frac{\varrho}{\varepsilon_s} \right) \frac{\partial h}{\partial t}$$

e con la posizione $1/a^2 = \varrho D/ES + \varrho/\varepsilon_s$, che definisce la celerità a , segue

$$\varrho \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \varrho}{\partial t} = \frac{\gamma \Omega}{a^2} \frac{\partial h}{\partial t}. \quad [16.56]$$

Il risultato resta valido anche quando l'effetto dell'elasticità della condotta dev'essere interpretato con espressioni più complesse della formula di Mariotte per tubi sottili; cambia soltanto l'espressione di a , o meglio il fattore di riduzione della celerità c_0 delle onde piane di pressione.

Analogamente, per le variazioni delle grandezze Ω e ϱ rispetto ad s si ottiene

$$\varrho \frac{\partial \Omega}{\partial s} + \Omega \frac{\partial \varrho}{\partial s} = \frac{\Omega}{a^2} \frac{\partial p}{\partial s}$$

ed essendo

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial h}{\partial s} - \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial h}{\partial s} + \text{sen} \Theta$$

con Θ l'angolo di inclinazione dell'asse della condotta, positivo se è declive nel senso del moto (v. fig. 16.8), segue

$$\rho \frac{\partial \Omega}{\partial s} + \Omega \frac{\partial \rho}{\partial s} = \frac{\gamma \Omega}{a^2} \left(\frac{\partial h}{\partial s} + \text{sen} \Theta \right). \quad [16.57]$$

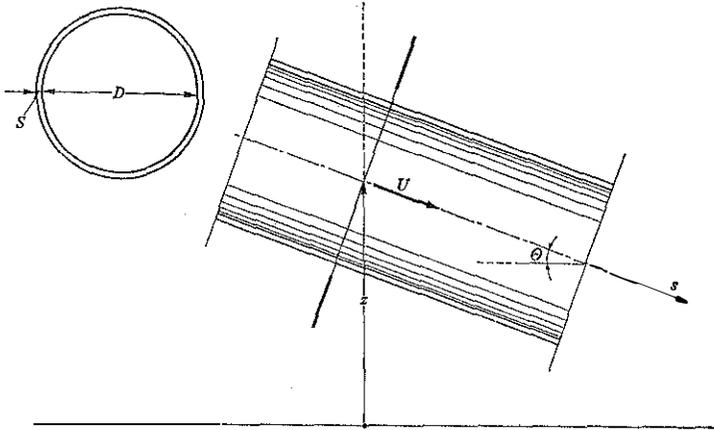


Fig. 16.8. - Tronco di condotta.

Sostituendo le [16.56] e [16.57] nell'equazione di continuità

$$\rho \Omega \frac{\partial U}{\partial s} + \rho U \frac{\partial \Omega}{\partial s} + U \Omega \frac{\partial \rho}{\partial s} + \rho \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

e moltiplicando tutto per $a^2/\gamma\Omega$, si ottiene la forma completa di *continuità*

$$\frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial s} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial U}{\partial s} + U \text{sen} \Theta = 0. \quad [16.58]$$

L'equazione *dinamica* è la già vista [16.27] che riscriviamo nella forma

$$\frac{\partial U}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial s} + U \frac{\partial U}{\partial s} + gj = 0 \quad [16.59]$$

essendo j la perdita distribuita di carico totale per unità di lunghezza, data dalla $j = \lambda U |U| / 2gD$.

16.15. Il metodo delle caratteristiche.

Il sistema delle equazioni [16.58] e [16.59] alle derivate parziali in s e t si può trasformare in un sistema di equazioni ai differenziali totali rispetto ad una sola variabile, ad esempio t , utilizzando il legame fra s e t rappresentato da una coppia di equazioni differenziali ordinarie che definiscono due famiglie di curve dette *caratteristiche*.

Tali curve hanno un comportamento particolare perché su di esse è indeterminato il *problema di Cauchy*: ciò significa che, data un'equazione alle derivate parziali del 2° ordine nella funzione incognita $y = f(s, t)$ (alla quale si riconduce subito, sotto opportune condizioni di continuità, il sistema delle equazioni del 1° ordine in esame), se si assegnano su una curva caratteristica i valori della y e delle sue derivate $\partial y/\partial s$ e $\partial y/\partial t$, non è unica la superficie $y = f(s, t)$ che aderisce alla striscia così definita e soddisfa l'equazione differenziale data. Nel caso dei fenomeni di propagazione ondosa le due equazioni delle caratteristiche sono reali e distinte, e l'equazione differenziale di partenza a derivate parziali del 2° ordine si dice *iperbolica* (*).

L'importanza delle caratteristiche deriva dal fatto che esse realizzano il sostegno di differenti superfici soluzioni del sistema differenziale dato, una delle quali può essere la soluzione relativa al moto permanente. Tali curve rappresentano le linee orarie, proiezioni sul *piano orario* s, t delle uniche possibili linee di discontinuità delle soluzioni, ossia dei fronti d'onda; i valori della pendenza ds/dt delle due curve che s'intersecano in ogni punto del piano orario esprimono i due valori della velocità di propagazione.

Per un osservatore che si muova seguendo una caratteristica, cioè che proceda insieme ad un'onda, il fenomeno appare sotto un aspetto meno confuso di quello che si presenta ad un osservatore fermo. Per il primo, infatti, l'onda che si propaga nello stesso verso del suo moto è ferma ed egli vede soltanto le variazioni provocate dall'onda che si propaga nel verso opposto. L'impiego della correlazione fra s e t , imposta dalle equazioni delle caratteristiche, consente di scrivere il modello matematico in termini di una sola variabile indipendente trasformando le equazioni di partenza alle derivate parziali in equazioni ai differenziali totali delle stesse funzioni incognite h ed U .

(*) Se le due famiglie di curve caratteristiche sono reali ma coincidenti, l'equazione differenziale si dice *parabolica* ed interpreta fenomeni di diffusione. Se le caratteristiche sono immaginarie, l'equazione differenziale si dice *ellittica* ed interpreta diversi fenomeni di interesse tecnico, in particolare nel campo della fluidodinamica i moti a potenziale. Per una trattazione esauriente si rimanda ai trattati specializzati, in particolare a A. G. Webster: *Partial differential equations of mathematical physics*, Dover, 1950, a F. Tricomi: *Equazioni e derivate parziali*, Cremonese, 1957, e a R. Courant: *Methods of mathematical physics*, Interscience, N.Y., 1962.

Il metodo deriva da un'applicazione fondamentale di Massau (1900) alla soluzione delle equazioni a derivate parziali. Per darne un'idea si richiama brevemente la trattazione dello studio di un sistema generale di due equazioni quasi-lineari del primo ordine nelle variabili indipendenti s e t e nelle variabili dipendenti h ed U :

$$a_1 \frac{\partial U}{\partial s} + a_2 \frac{\partial U}{\partial t} + a_3 \frac{\partial h}{\partial s} + a_4 \frac{\partial h}{\partial t} + \phi_1(s, t, h, U) = 0 \quad [16.60]$$

$$b_1 \frac{\partial U}{\partial s} + b_2 \frac{\partial U}{\partial t} + b_3 \frac{\partial h}{\partial s} + b_4 \frac{\partial h}{\partial t} + \phi_2(s, t, h, U) = 0 \quad [16.61]$$

dove i coefficienti a_i e b_i possono essere anch'essi funzioni di s , t , e di h ed U , ma non delle loro derivate.

Il problema di Cauchy si pone nella forma seguente: note su una curva l del piano (s, t) le funzioni h ed U di classe C^1 , trovare una coppia di soluzioni $h = h(s, t)$ ed $U = U(s, t)$ del sistema [16.60] e [16.61] che assuma su l i valori assegnati. Come si è detto, si chiamano caratteristiche quelle curve (C) per le quali il problema di Cauchy resta indeterminato. Alle equazioni [16.60] e [16.61] si devono aggiungere le condizioni

$$dU = \frac{\partial U}{\partial s} ds + \frac{\partial U}{\partial t} dt$$

$$dh = \frac{\partial h}{\partial s} ds + \frac{\partial h}{\partial t} dt$$

che le soluzioni h ed U devono soddisfare per incrementi ds e dt corrispondenti ad una variazione d lungo la curva l . Si ottiene così un sistema di quattro equazioni che può essere risolto nelle incognite $\partial U/\partial s$, $\partial U/\partial t$, $\partial h/\partial s$, $\partial h/\partial t$ se il relativo determinante jacobiano è diverso da zero. Evidentemente l'annullarsi di tale determinante rende *indeterminato* il problema di Cauchy; dunque la condizione

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ ds & dt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ds & dt \end{vmatrix} = 0$$

rappresenta l'equazione delle *curve caratteristiche*. Sviluppando il determinante si ottiene

$$(a_2 b_4 - a_4 b_2) \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 - \{(a_1 b_4 - a_4 b_1) + (a_2 b_3 - a_3 b_2)\} \frac{ds}{dt} + (a_1 b_3 - a_3 b_1) = 0. \quad [16.62]$$

Se il discriminante di questa equazione è positivo, esistono due famiglie reali e distinte di caratteristiche ed il sistema assegnato, come la equivalente equazione a derivate parziali del 2° ordine di cui si era parlato prima, si dice « iperbolico ».

Nel caso particolare in esame, rappresentato dal sistema di equazioni [16.58] e [16.59] del colpo d'ariete, l'equazione delle caratteristiche [16.62] diventa

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - 2U \frac{ds}{dt} + (U^2 - a^2) = 0,$$

da cui

$$\frac{ds}{dt} = U \pm \sqrt{U^2 - (U^2 - a^2)} = U \pm a. \quad [16.63]$$

Imponendo la condizione che su ciascuna caratteristica sia possibile calcolare una coppia di soluzioni h ed U , malgrado l'indeterminazione, si ottengono due *equazioni di compatibilità* in forma di equazioni a differenziali totali. Il sistema delle equazioni delle caratteristiche e delle associate equazioni di compatibilità è equivalente al sistema dato di equazioni a derivate parziali.

Le equazioni di compatibilità si possono ricavare con il procedimento che segue. Premesso che i differenziali totali delle funzioni h ed U lungo le caratteristiche sono dati da

$$dh = \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial s} (U \pm a) \right\} dt$$

$$dU = \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial s} (U \pm a) \right\} dt$$

essendo $U \pm a = ds/dt$, basta moltiplicare l'eq. [16.59] per $\pm a/g$ e sommarla all'eq. [16.58] del sistema dato per ottenere

$$\left\{ \frac{\partial h}{\partial t} + (U \pm a) \frac{\partial h}{\partial s} \right\} \pm (a/g) \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} + (U \pm a) \frac{\partial U}{\partial s} \right\} + U \operatorname{sen} \Theta \pm aj = 0$$

ossia, per quanto visto prima,

$$\frac{dh}{dt} \pm \frac{a}{g} \frac{dU}{dt} + U \operatorname{sen} \Theta \pm aj = 0. \quad [16.64]$$

Concludendo, il sistema differenziale dato [16.58]-[16.59] a derivate parziali è equivalente ai seguenti due sistemi di equazioni a differenziali totali

$$ds = (U + a) dt \quad \text{equazione delle caratteristiche } C^+ \quad [16.63']$$

$$dh + (a/g)dU + (U \operatorname{sen} \Theta + aj) dt = 0, \quad [16.64']$$

e insieme

$$ds = (U - a) dt \quad \text{equazione delle caratteristiche } C^- \quad [16.63^a]$$

$$dh - (a/g)dU + (U \operatorname{sen} \Theta - aj) dt = 0. \quad [16.64^a]$$

Un osservatore che procede con la velocità $U+a$, cioè che si muove sulla caratteristica C^+ , vede il legame fra h ed U rappresentato dall'eq. [16.64']; analogamente, un osservatore che procede con la velocità $U-a$ vede il legame fra h ed U rappresentato dall'eq. [16.64''].

Per l'applicazione del metodo delle caratteristiche a sistemi di condotte in serie è più conveniente l'impiego della portata Q in luogo della velocità U come variabile dipendente. Essendo $Q = \Omega U$ la trasformazione dei sistemi di equazioni a derivate parziali in h, Q è immediata.

16.16. Soluzione numerica.

Il metodo delle caratteristiche, utilizzato con il procedimento di soluzione numerica, presenta il vantaggio, rispetto al metodo di Allievi ed anche rispetto al procedimento grafico di cui si dirà più avanti, di essere applicabile anche allo studio dei fenomeni propagatori con celerità variabile, situazione che caratterizza i mezzi dispersivi ed è conseguenza, nella propagazione delle onde di pressione, delle resistenze e delle variazioni delle caratteristiche geometriche ed elastiche della condotta.

Alla base del procedimento generale sta la sostituzione delle equazioni a differenziali totali con corrispondenti equazioni alle differenze finite.

Supponiamo che le funzioni h ed U e la celerità relativa a siano note, per tutti i valori di s , ad un certo istante t_i , ossia sulla retta $t = t_i$ del piano s, t della figura 16.9. Fissati due punti A e B , sufficientemente vicini in relazione al procedimento che segue, si fa passare per A una caratteristica C^+ e per B una caratteristica C^- . L'intersezione di queste due curve avviene in un punto P all'istante $t_i + \Delta t$ e all'ascissa s_P dati dalla soluzione del sistema [16.63'] e [16.63''] nella forma approssimata

$$s_P - s_A = (U + a)_A \Delta t$$

$$s_P - s_B = (U - a)_B \Delta t.$$

Ovviamente è possibile migliorare l'approssimazione sia riducendo la distanza Δs fra i punti A e B , sia operando con il valore medio della celerità sui tronchi AP e PB mediante un procedimento iterativo di calcolo.

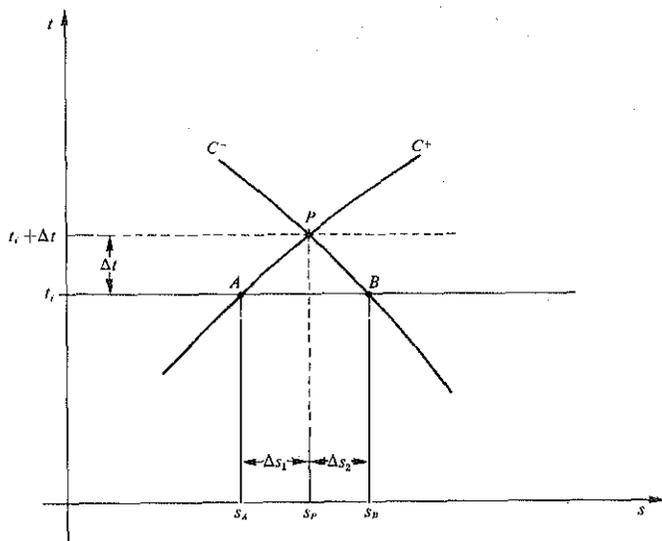


Fig. 16.9. - Determinazione di h ed U in un punto P a partire dai valori noti nei punti A e B con il metodo delle caratteristiche.

Le due equazioni [16.64'] e [16.64''], valide rispettivamente su AP e su PB , consentono di ricavare i valori di h ed U nel punto P . Infatti si ha, con l'approssimazione precedente,

$$\begin{aligned} \text{su } C^+: \quad h_P - h_A + \frac{a}{g}(U_P - U_A) + \\ + \left\{ U_A \sin \Theta + a_A \frac{\lambda}{D} \frac{U_A |U_A|}{2g} \right\} \Delta t = 0 \end{aligned} \quad [16.65]$$

$$\begin{aligned} \text{su } C^-: \quad h_P - h_B - \frac{a}{g}(U_P - U_B) + \\ + \left\{ U_B \sin \Theta - a_B \frac{\lambda}{D} \frac{U_B |U_B|}{2g} \right\} \Delta t = 0 \end{aligned} \quad [16.66]$$

sistema che si risolve immediatamente in h_P ed U_P per somma e sottrazione.

I valori di h ed U sono dati *inizialmente* in un tronco di lunghezza limitata P_1P_2 , compreso fra le ascisse $s = 0$ ed $s = L$ della condotta considerata. Il procedimento esposto consente di determinare le soluzioni nel

campo $P_1P_2P_3$ (v. fig. 16.10) compreso fra il segmento dell'asse s nel quale sono assegnate le condizioni iniziali e le due caratteristiche P_1P_2 e P_2P_3 per gli estremi di tale segmento.

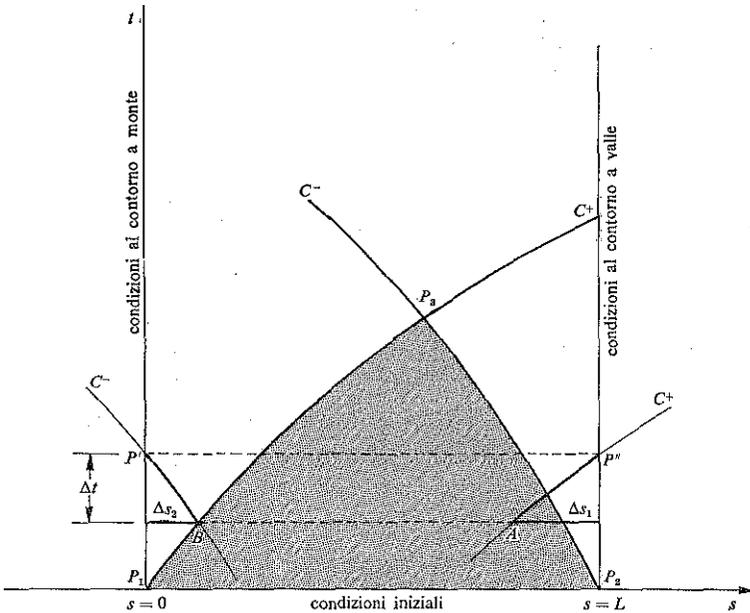


Fig. 16.10. - Campo di determinazione delle soluzioni di colpo d'ariete.

La soluzione si estende a tutta la striscia compresa fra le rette $s = 0$ ed $s = L$, nel semipiano positivo dei tempi, se si tiene conto delle condizioni al contorno assegnate rispettivamente nella sezione di monte e nella sezione di valle della condotta. Come mostra la figura 16.10, per la determinazione di h ed U nel punto P' si utilizza l'eq. [16.66] unita alla condizione al contorno a monte, per la determinazione di h ed U nel punto P'' si utilizza l'eq. [16.65] unita alla condizione al contorno a valle.

Normalmente la velocità U è trascurabile rispetto alla celerità relativa a , per cui si può assumere la celerità assoluta data da $\pm a$. Allora le equazioni delle caratteristiche diventano

$$ds = \pm a dt \tag{16.67}$$

ed il reticolo delle caratteristiche assume l'aspetto della figura 16.11 se per a si assumono i valori medi in ogni intervallo spaziale. Nei nodi si

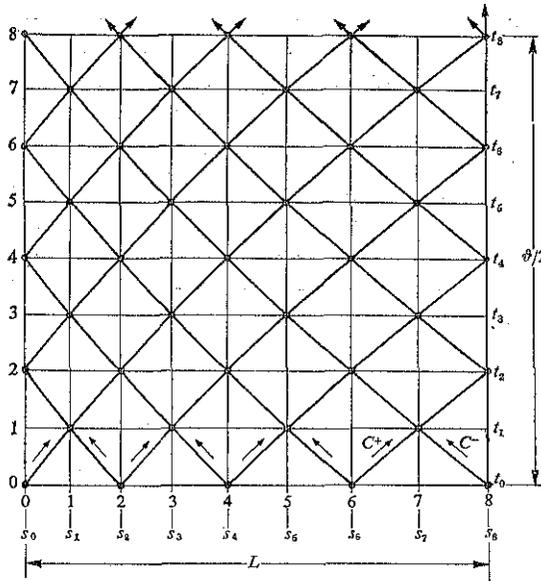


Fig. 16.11. - Reticolo di caratteristiche nel piano s, t .

può quindi procedere alla determinazione dei valori di h ed U utilizzando le equazioni di compatibilità nella forma ridotta

$$dh \pm (a/g)dU \pm ajdt = 0$$

con evidente corrispondenza dei segni con le equazioni delle caratteristiche, od anche, in base a queste ultime,

$$dh \pm (a/g)dU + jds = 0. \quad [16.68]$$

L'integrazione passo-passo non presenta difficoltà: con riferimento al procedimento precedente si ha

$$\text{su } C^+: \quad h_P - h_A + \frac{a}{g}(U_P - U_A) + \frac{\lambda}{D} \frac{U_A |U_A|}{2g} \Delta s = 0$$

$$\text{su } C^-: \quad h_P - h_A - \frac{a}{g}(U_P - U_A) + \frac{\lambda}{D} \frac{U_B |U_B|}{2g} \Delta s = 0.$$

In particolare, se la celerità a resta costante lungo tutta la condotta, il reticolo assume la forma semplice a maglie rettangolari della figura 16.12.

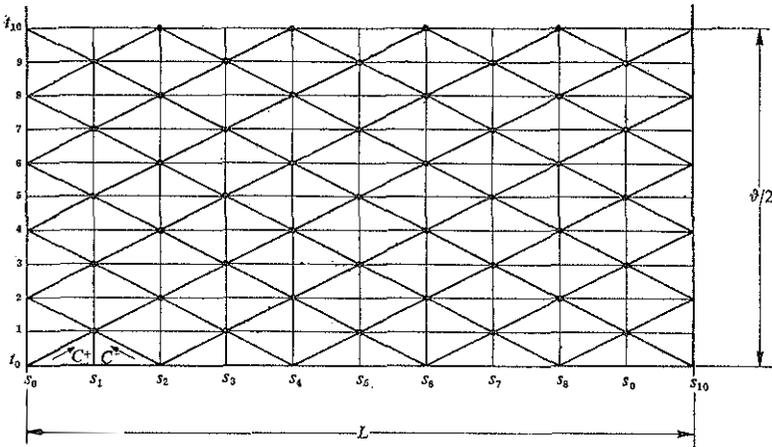


Fig. 16.12. - Reticolo di caratteristiche a maglie rettangolari: celerità costante $c = \pm a$.

Per ulteriori informazioni sull'impiego del metodo delle caratteristiche si veda anche il capitolo sul moto vario delle correnti a pelo libero. Un'approfondita esposizione del metodo, con diverse applicazioni allo studio dei fenomeni transitori negli impianti idraulici, è stata data da Evangelisti nelle pubblicazioni su *L'Energia Elettrica* del 1965 e del 1969 e da Streeter e Wylie: *Hydraulic Transients*, McGraw Hill, N.Y. 1967.

L'attenuazione delle sovrappressioni di colpo d'ariete si può ottenere con l'inserimento nella condotta di valvole automatiche; per l'applicazione del calcolo numerico a questo problema si veda, in particolare, la trattazione di Guerrini e Poggi (1979).

16.17. Il metodo grafico.

Nel caso in cui le caratteristiche del tronco di condotta che si considera siano costanti e le resistenze siano trascurabili, come si presuppone nella soluzione Allievi, il metodo numerico può essere convenientemente sostituito da un metodo grafico introdotto inizialmente da Loewy (1918) e da Schnyder (1929) ma sviluppato e sistematizzato soprattutto da Bergeron (1937). Il procedimento consente di tener conto anche delle resi-

stenze ma richiede un'artificiosa concentrazione degli effetti di tali resistenze continue in sezioni singolari del tronco considerato.

Per l'esposizione del metodo ci limitiamo allo studio del problema del colpo d'ariete nel caso già trattato con il processo di Allievi: condotta unica di sezione e spessore uniformi, e moto con resistenze trascurabili. Per fissare le idee supponiamo che si tratti di una condotta di derivazione come quella rappresentata nella figura 16.6.

Il metodo grafico ricerca la soluzione sul piano detto delle fasi h ed U , individuando le posizioni spaziali con lettere corrispondenti all'indicazione delle sezioni (ad esempio A per la sezione di sbocco, B per la sezione d'imbocco) ed il tempo in fasi con il corrispondente numero al piede di ogni lettera (ad es. $A_{2,5}$ per indicare la situazione nella sezione A all'istante $t = 2,5\theta$).

Eseguendo le semplificazioni viste nel paragrafo 16.7, ed assumendo l'ascissa $x = -s + \text{cost}$, le equazioni delle caratteristiche e le equazioni di compatibilità diventano

$$dx \pm a dt = 0 \quad [16.68]$$

$$dh \pm \frac{a}{g} dU = 0 \quad [16.69]$$

con corrispondenza dei segni. Date le ipotesi sulla condotta, la celerità a è costante, ed integrando le equazioni precedenti si ottiene

$$x = \pm at + \text{cost}$$

$$h = \pm \frac{a}{g} U + \text{cost} .$$

Nel piano h, U (v. fig. 16.13) le rette

$$h = (a/g) U + \text{cost} \quad [16.70]$$

indicano le coppie di valori h ed U visti da un osservatore che si muove con la celerità $+a$, cioè che si muove con l'onda $F = \text{cost}$ (cfr. paragrafo 16.9) dalla sezione A di sbocco verso la sezione B d'imbocco; le rette

$$h = - (a/g) U + \text{cost} \quad [16.71]$$

indicano le coppie di valori h ed U visti da un osservatore che procede con la celerità $-a$ (per il quale è $f = \text{cost}$).

Per determinare la soluzione occorre ancora rappresentare nel piano h, U , le condizioni al contorno: nel caso considerato, la retta $h = h_0$ rappresenta la condizione nella sezione B , dove la condotta è collegata al serbatoio a livello costante, e le parabole $U/U_0 = \eta\sqrt{h/h_0}$ rappresentano,

per assegnati valori costanti del grado di apertura η dell'otturatore, le condizioni nella sezione A di sbocco negli istanti corrispondenti ai valori predetti di η (cfr. paragrafo 16.11).

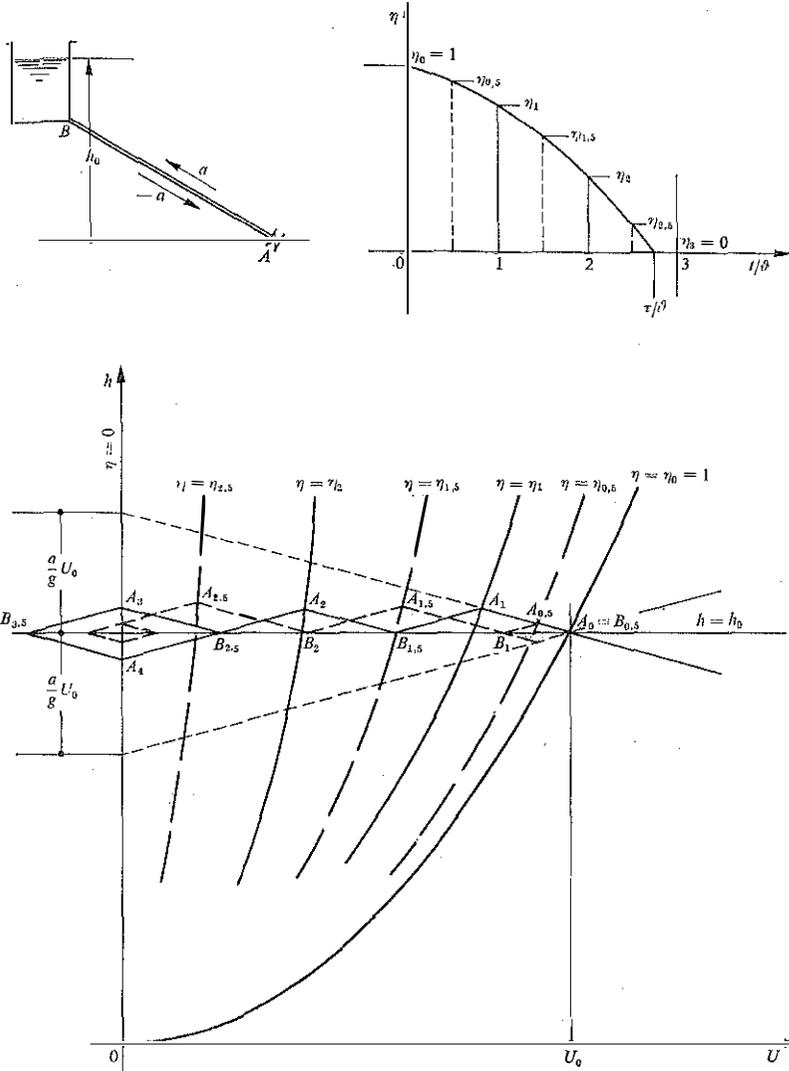


Fig. 16.13. - Studio del colpo d'ariete con il metodo grafico.

Supponiamo, a titolo di esempio, di eseguire una manovra di chiusura totale come quella rappresentata nella figura 16.13. Le condizioni iniziali sono rappresentate dal punto A_0 di coordinate $h = h_0$ ed $U = U_0$. Tracciamo prima di tutto le parabole corrispondenti agli istanti di ritmo intero, cioè con grado di apertura $\eta = \eta_0, \eta = \eta_1, \eta = \eta_2$ ed infine $\eta = \eta_3 = \eta_4 = \dots = 0$, parabola degenera che coincide con l'asse $U = 0$. Il punto A_0 rappresenta, oltre che le condizioni iniziali in A , anche quelle in B , che perdurano fino all'arrivo della perturbazione, ossia fino al tempo $t/\theta = 0,5$.

Partendo dalla sezione B al tempo 0,5 immaginiamo un osservatore che con la velocità $-a$ proceda verso la sezione A . Egli vede valori di h ed U posti sulla retta [16.71] passante per $B_{0,5}$; poiché giunge in A all'istante $t/\theta = 1$ e deve allora vedere valori di h ed U posti contemporaneamente sulla parabola $\eta = \eta_1$, resta determinato il punto A_1 nell'intersezione fra la retta e la parabola.

Si noti che, nel caso di *chiusura brusca*, essendo il tempo di chiusura inferiore alla durata di fase, risulta $\eta_1 = 0$ e la relativa parabola degenera nell'asse $U = 0$. L'ordinata h del punto di intersezione differisce da h_0 della quantità aU_0/g come previsto dalla formula di Joukowsky.

La costruzione delle rette [16.70] e [16.71], nel grafico, si fa appunto portando il segmento aU_0/g sopra e sotto l'ordinata $h = h_0$, sull'asse delle h , e congiungendo i punti trovati con il punto di coordinate h_0, U_0 .

Partendo dal punto A_1 e procedendo con la celerità $+a$ l'osservatore vede i valori di h ed U che devono stare sulla retta [16.70] passante per A_1 . All'istante $t/\theta = 1,5$ l'osservatore giunge in B e poiché allora il valore di h deve stare contemporaneamente anche sulla retta $h = h_0$, il punto $B_{1,5}$ resta determinato dall'intersezione di questa retta con la precedente.

Si prosegue quindi nello stesso modo fino alla chiusura totale, dopo la quale le parabole si riducono tutte all'asse $U = 0$. Il rombo $B_{2,5}-A_3-B_{3,5}-A_4$ rappresenta con la diagonale orizzontale l'oscillazione di velocità nella sezione d'imbocco, con la diagonale verticale l'oscillazione di carico nella sezione di sbocco. Le oscillazioni non sono smorzate perché, come si è già detto, il sistema è chiuso e non sono state considerate le perdite.

Naturalmente la successione dei tempi può essere diversa dagli istanti di ritmo intero (v. linee tratteggiate della fig. 16.15); ma, scelto arbitrariamente l'istante di partenza, i tempi successivi per i quali vanno tracciate le parabole $\eta(t_i) = \text{cost}$ devono essere necessariamente distanziati del tempo di andata e ritorno dell'osservatore che viaggia con l'onda, ossia di una durata di fase.

Si ricorda infine che volendo tener conto delle resistenze, pur considerando sempre trascurabile la velocità U in confronto alla celerità relativa a , il sistema delle equazioni delle caratteristiche e delle equazioni di com-

patibilità diventa

$$dx \pm a dt = 0$$

$$dh \pm \frac{a}{g} dU - j dx = 0$$

immediatamente integrabile su tronchi Δx nei quali si assumano costanti le grandezze a e j . L'effetto delle resistenze distribuite $j\Delta x$ viene graficamente concentrato all'inizio del tronco in esame.

16.18. Sistemi di condotte.

Il metodo delle caratteristiche consente di trattare problemi di moto vario in sistemi complessi di condotte purché si impongano le condizioni di congruenza nei nodi, condizioni che sono quelle al contorno per ciascun tronco di condotta con caratteristiche costanti.

Tuttavia, se una condotta è costituita da una successione di tubazioni in serie, di caratteristiche fra loro poco differenti, si può convenientemente studiare il fenomeno del moto vario su una condotta equivalente di caratteristiche costanti, definita dalle condizioni di avere durata di fase ed energia cinetica uguali alle corrispondenti grandezze totali della condotta data; ossia

$$\vartheta = \frac{2L}{a} = \sum_1^n \frac{2L_i}{a_i} \quad [16.72]$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \rho L \frac{Q^2}{\Omega} = \frac{1}{2} \rho Q^2 \sum_1^n \frac{L_i}{\Omega_i} \quad [16.73]$$

essendo L_i , Ω_i , a_i la lunghezza, la sezione e la celerità del tronco i -esimo ed $L = \sum_1^n L_i$ la lunghezza totale della condotta.

Dalla [16.72] si ricava la celerità a e dalla [16.73] la sezione Ω della condotta equivalente.

Nel caso di un nodo nel quale confluiscono due o più condotte (fig. 16.14), assumendo che il carico piezometrico sia lo stesso per tutte le condotte nel nodo si possono calcolare in modo semplice i coefficienti di trasmissione e di riflessione di un'onda di pressione in arrivo al nodo da una delle condotte: ad esempio, il sovraccarico nel nodo dovuto ad un'onda di celerità a_1 proveniente dalla condotta 1 (fig. 16.14 A)

$$h' - h_0 = \frac{a_1}{g} (U_1 - U_1')$$

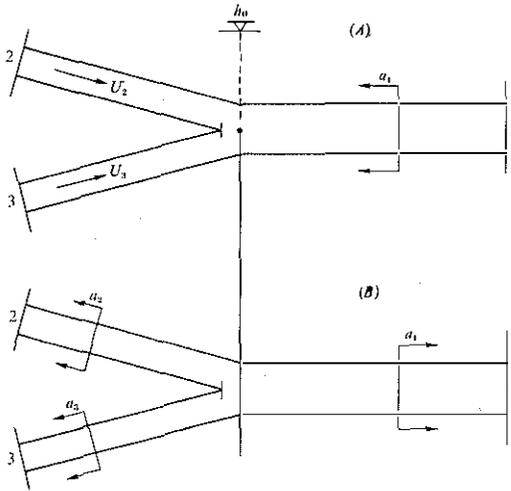


Fig. 16.14. -- Confluenza di due condotte.

si trasmette per la parte $h'' - h_0$ nelle condotte 2 e 3 e si riflette per la parte $h' - h''$ nella condotta 1. Le relative equazioni sono

$$h' - h'' = \frac{a_1}{g} (U_1' - U_1'')$$

$$h'' - h_0 = \frac{a_2}{g} (U_2 - U_2')$$

$$h'' - h_0 = \frac{a_3}{g} (U_3 - U_3').$$

Tenuto conto delle equazioni di continuità

$$U_1 \Omega_1 = U_2 \Omega_2 + U_3 \Omega_3$$

$$U_1'' \Omega_1 = U_2' \Omega_2 + U_3' \Omega_3$$

si ottiene, con qualche elaborazione, il coefficiente di trasmissione

$$c_t = \frac{h'' - h_0}{h' - h_0} = \frac{2\Omega_1/a_1}{\frac{\Omega_1}{a_1} + \frac{\Omega_2}{a_2} + \frac{\Omega_3}{a_3}} \quad [16.74]$$

e quindi il coefficiente di riflessione $c_r = (h' - h'')/(h' - h_0)$ che risulta evidentemente dato dalla $c_r = 1 - c_t$.

16.19. Fenomeni di cavitazione per colpo d'ariete.

Lo studio dei transistori nelle condotte degli impianti di pompaggio non differisce da quello visto nelle condotte di derivazione. Nelle prime però, e particolarmente nelle condotte prementi degli impianti di circolazione a bassa pressione, possono più facilmente verificarsi fenomeni di cavitazione dovuti all'abbassamento della pressione assoluta in qualche zona della condotta fino al valore della pressione di vapore del liquido. La caduta di pressione è provocata dalla brusca interruzione del deflusso, spesso in conseguenza dell'arresto delle pompe.

La formazione delle cavità vaporose e gassose conferisce alla zona interessata dalla depressione l'aspetto di un'emulsione a densità variabile; solo in condizioni particolari, e con velocità molto alte di deflusso, può formarsi un vuoto effettivo in un tratto della condotta. I modelli matematici del fenomeno che trovano ancora largo impiego fanno tuttavia riferimento ad un distacco netto della colonna liquida, con fronte normale all'asse del tubo e con la formazione di una cavità di lunghezza piccola rispetto a quella originaria della colonna liquida.

Dal punto di vista tecnico le conseguenze della cavitazione sono particolarmente temibili negli impianti perché, alla chiusura delle cavità, si producono forti sovrappressioni che possono raggiungere valori maggiori anche della sovrappressione massima di colpo d'ariete diretto.

In tubazioni orizzontali cilindriche, Escande e Nougaro (1953) eseguirono una serie di esperienze sistematiche provocando la cavitazione mediante la chiusura rapida di una saracinesca posta a monte del tratto di prova. Gli autori hanno interpretato il fenomeno di distacco di vena e calcolato le conseguenti sovrappressioni con un modello matematico basato sul moto in blocco, senza resistenze, della colonna liquida, ossia con lo schema delle oscillazioni di massa di cui si è parlato nel paragrafo 16.4. Nella situazione più gravosa, di manovra istantanea, la velocità del liquido all'atto della chiusura della cavità è, con tale schema, uguale e di verso opposto al valore iniziale U_0 ; il corrispondente sovraccarico ha quindi il valore

$$h_{\max} - h_0 = \frac{aU_0}{g}$$

dato dalla formula di Joukowsky. Detto h_{cav} il carico corrispondente alle condizioni di cavitazione, cioè il carico relativo alla pressione di vapore del liquido alla temperatura di esercizio, questo modello fornisce risultati

attendibili finché

$$\frac{h_0 - h_{cav}}{aU_0/g} \ll 1,$$

ossia finché la depressione raggiungibile nella condotta è molto minore della sovrappressione di Joukowski.

Conservando l'ipotesi di distacco netto di vena, si può calcolare la massima sovrappressione tenendo conto dell'elasticità del fluido e della

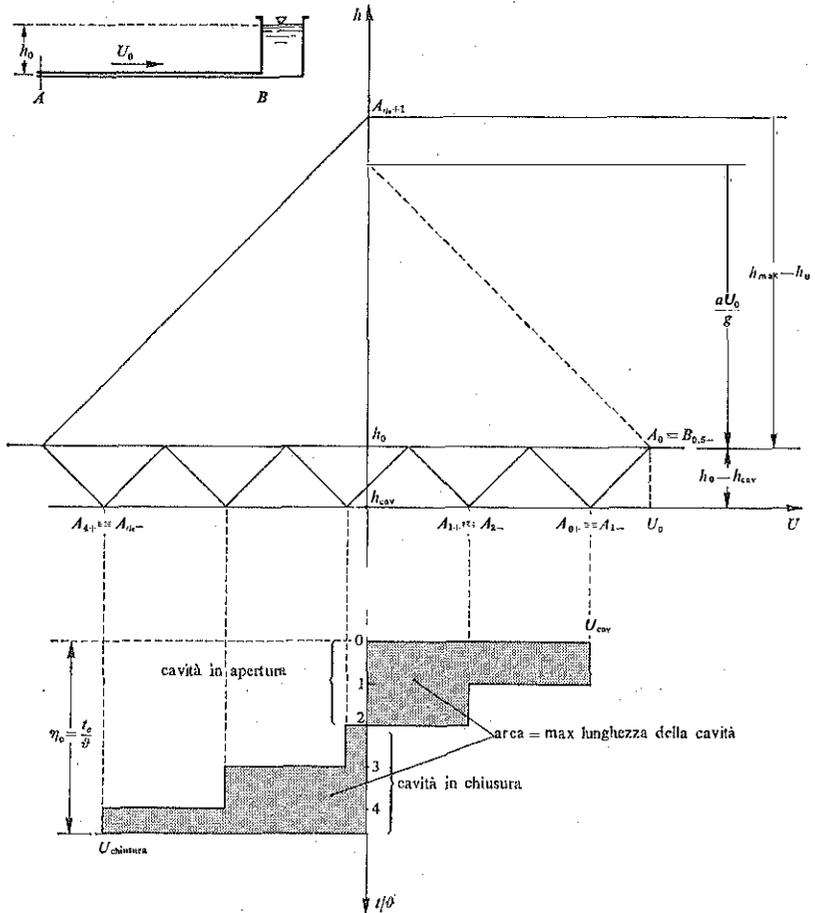


Fig. 16.15. - Cavitazione con distacco di vena.

condotta. Una trattazione svolta da Siccardi e Raiteri (1970) mostra, attraverso il confronto dei risultati con quelli sperimentali ottenuti dagli stessi autori, l'attendibilità delle previsioni nei riguardi della durata di permanenza della cavità e della possibilità di sovrappressioni maggiori di quelle di Joukowski, ma indica, per quest'ultime, valori in eccesso rispetto alle sovrappressioni misurate. Un esempio di soluzione con il metodo grafico è rappresentato nella figura 16.15 nel caso di manovra istantanea, senza tener conto delle resistenze. I carichi sono riportati a partire dal valore h_{cav} . Nella parte inferiore della figura è rappresentato, in funzione di t/θ , il grafico delle velocità del fronte della cavità, costante in ogni fase fino all'intervento dell'onda di ritorno. L'area racchiusa dal diagramma, nella parte positiva della velocità, rappresenta l'integrale $U\Delta t$ dal valore U_0 al valore nullo, ossia la lunghezza massima della cavità. Dovendo essere la stessa l'area in chiusura, resta determinata da tale condizione la durata totale di permanenza della cavità.

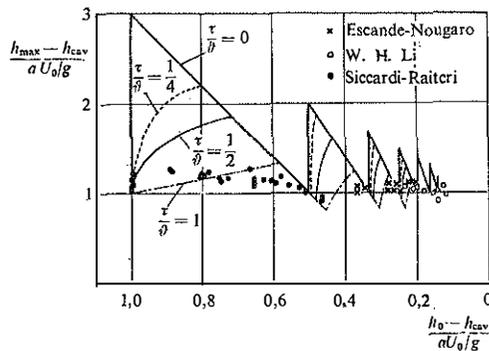


Fig. 16.16. - Rilievi sperimentali e valutazioni teoriche del sovraccarico massimo in presenza di cavitazione.

Nella figura 16.16 sono rappresentati in ordinate i valori $h_{max} - h_0$ ed in ascisse i valori $h_0 - h_{cav}$ rapportati entrambi al sovraccarico di Joukowski aU_0/g . Nella figura 16.17, con le stesse ascisse, sono riportate le durate delle cavità rapportate alla durata di fase. I risultati della trattazione analitica, corrispondenti a diverse durate di manovra, espresse in fasi, sono confrontati con i predetti risultati sperimentali e con quelli di W. H. Li (1963). Si nota che quando l'ascissa tende a zero il massimo sovraccarico tende al valore di Joukowski ed è verificato dalle esperienze. Quando l'ascissa tende ad 1 i risultati sperimentali si scostano invece decisamente dalle previsioni teoriche, superando il valore aU_0/g al massimo soltanto del 25% anche quando le manovre di arresto sono estremamente

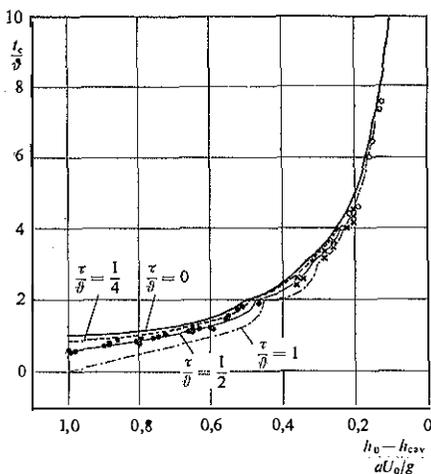


Fig. 16.17. — Rilevi sperimentali e valutazioni teoriche delle durate delle cavità rapportate alla durata di fase.

rapide. Mettendo in conto le resistenze s'introduce un'attenuazione nel massimo sovraccarico calcolato, che risulta tuttavia modesta rispetto alle differenze dai valori misurati sperimentalmente.

Un'interpretazione più fedele del fenomeno richiede di schematizzare il mezzo in esame con una maggiore aderenza alle informazioni sperimentali ed è appunto nella direzione di un modello di fluido bifase che si muovono le ricerche più recenti. Si ricorda, in particolare, il modello di Weyler, Streeter e Larsen (1971) basato sull'ipotesi che il calore ceduto dalle bolle al liquido in un ciclo sia una frazione non piccola del lavoro di compressione compiuto dal liquido sulla bolla e che la corrispondente dissipazione di energia meccanica sia rappresentabile mediante il lavoro di una tensione aggiuntiva alla parete. Sulla dissipazione di tipo termodinamico convengono anche altri autori ma con differenti interpretazioni: Siccardi e Bartolini (1975) hanno supposto ch'essa possa essere rappresentata attraverso un coefficiente di viscosità di volume capace di mettere in conto a livello globale i fenomeni irreversibili realizzati a piccola scala.

16.20. Le casse d'aria.

Il dispositivo impiegato più frequentemente per evitare fenomeni di cavitazione nelle condotte prementi è un serbatoio, detto *cassa d'aria*, che viene collegato alla condotta, subito a valle delle pompe, ed è riempito in parte con aria in pressione secondo lo schema di figura 16.18.

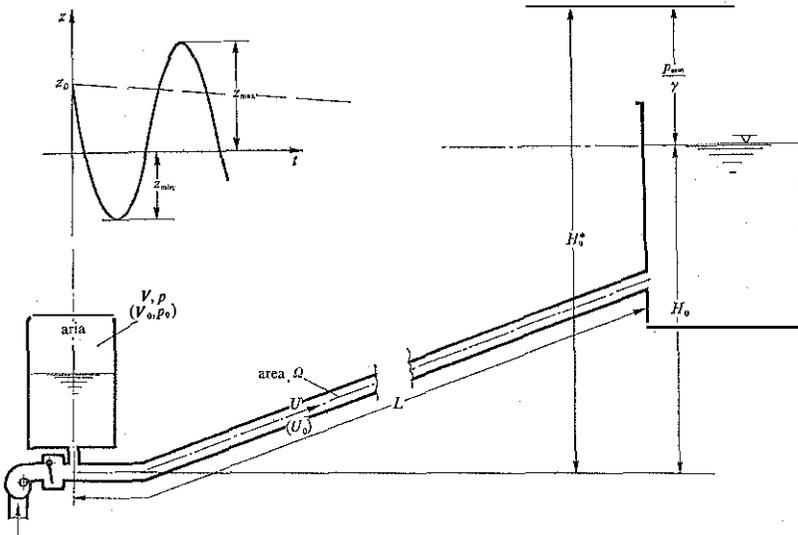


Fig. 16.18. - Schema di un impianto di pompaggio con cassa d'aria.

Il funzionamento del sistema è evidente: al distacco della pompa il moto del liquido nella condotta non si arresta bruscamente ma continua, alimentato dalla cassa; il volume dell'aria aumenta e la pressione diminuisce fino a valori inferiori a quelli corrispondenti al carico statico, raggiunge un minimo, dopo il quale s'inverte il flusso nella condotta, il volume d'aria comincia a diminuire e la pressione aumenta fino ad un valore massimo, quindi il processo continua con una serie di oscillazioni smorzate del flusso nella condotta e della pressione e del volume d'aria nella cassa.

Tale funzionamento si può interpretare con sufficiente approssimazione adottando lo schema delle oscillazioni di massa di fluido anelastico in una condotta rigida, già utilizzato nel paragrafo 16.3 per lo studio delle oscillazioni del sistema galleria-pozzo piezometrico degli impianti di derivazione.

L'equazione di continuità è espressa dalla

$$\Omega U = \frac{dV}{dt}$$

essendo Ω ed U la sezione e la velocità nella condotta e V il volume occu-

pato dall'aria. Dovendo la portata Q dipendere solo dal tempo si può porre

$$Q = Q_0 + f(t) \quad \text{per } t \geq 0$$

con Q_0 portata iniziale in condizioni di regime.

L'equazione dinamica

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{dU}{dt} - j,$$

dopo una prima integrazione rispetto ad s su tutta la lunghezza L della condotta, assume una forma analoga all'eq. [16.14] e si può scrivere come segue

$$H - H_0 = \frac{1}{g} \frac{dU}{dt} L + jL.$$

Indicando con z la differenza tra il carico totale H nella sezione della condotta corrispondente alla cassa d'aria ed il carico totale H_0 del serbatoio di mandata, ed introducendo accanto alle perdite distribuite anche l'eventuale perdita concentrata dovuta all'inserzione della cassa d'aria, l'equazione dinamica diventa

$$z = \frac{1}{g} \frac{dU}{dt} L + \left(\frac{\lambda}{D} L + \xi \right) \frac{U|U|}{2g} \quad [16.76]$$

avendo indicato con ξ il coefficiente delle perdite localizzate.

A queste due equazioni si deve aggiungere la relazione fra il volume V e la pressione assoluta p dell'aeriforme, a partire dai valori iniziale V_0 e p_0 . Assumendo una trasformazione di tipo politropico vale l'equazione

$$pV^n = p_0V_0^n$$

nella quale, per l'aria, l'esponente ha valori compresi fra $n = 1,41$ per la trasformazione adiabatica ed $n = 1$ per quella isoterma. Al rapporto p/p_0 si può sostituire, in condizioni tecnico-applicative, il rapporto fra i corrispondenti carichi totali assoluti misurati a partire dall'asse della condotta di uscita dalla pompa. Detto H_0^* il carico assoluto statico, relativo al volume iniziale V_0 , il carico assoluto generico H^* vale

$$H^* = H_0^* + z,$$

e l'equazione della trasformazione politropica diventa

$$V = V_0 \left(\frac{H_0^*}{H_0^* + z} \right)^{1/n} \quad [16.77]$$

Il sistema delle equazioni [16.75], [16.76] e [16.77] può essere integrato numericamente per differenze finite. Grafici di utile impiego sono stati proposti da Evangelisti (1935-38) e da Poggi (1956).

La soluzione del sistema in forma chiusa si può ricavare nel caso di resistenze nulle (si veda, ad esempio, Citrini e Nosedà: *Iraulica*, 1975). Il risultato è dato dall'equazione

$$\bar{\sigma} \left\{ 1 - \left(\frac{U}{U_0} \right)^2 \right\} = \frac{1}{n-1} \left\{ \left(1 + \frac{z}{H_0^*} \right)^{(n-1)/n} - 1 \right\} + \left\{ \left(1 + \frac{z}{H_0^*} \right)^{-1/n} - 1 \right\}$$

che cade in difetto per $n = 1$; in tal caso essa viene sostituita dalla

$$\bar{\sigma} \left\{ 1 - \left(\frac{U}{U_0} \right)^2 \right\} = \ln \left(1 + \frac{z}{H_0^*} \right) + \left(1 + \frac{z}{H_0^*} \right)^{-1} - 1$$

essendo in entrambi i casi

$$\bar{\sigma} = \frac{\Omega L}{H_0^* V_0} \cdot \frac{U_0^2}{2g}$$

il parametro caratteristico dell'impianto.

Imponendo la condizione $U = 0$ si determinano dalle equazioni precedenti i valori estremi della quota z del carico totale a valle della pompa rispetto al livello del serbatoio di carico. La figura 16.19 riporta grafica-

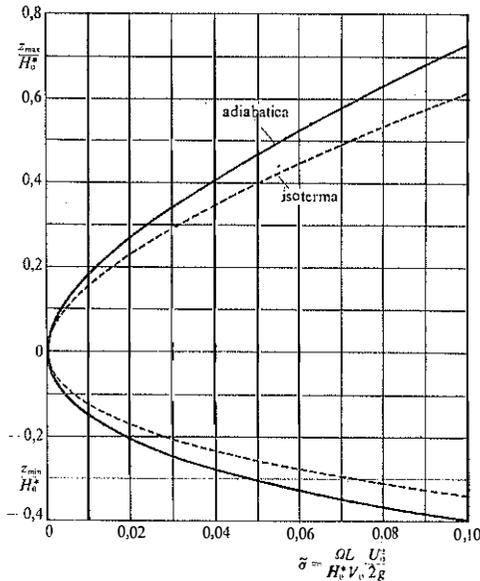


Fig. 16.19. - Diagramma per il calcolo dei carichi totali z_{max} e z_{min} a valle della pompa, rispetto al livello del serbatoio di carico.

mente i valori z_{\max}/H_0^* e z_{\min}/H_0^* in funzione di σ per $n=1,41$ ed $n=1,0$. Nelle applicazioni tecniche si adotta generalmente l'ipotesi di trasformazione adiabatica perché risulta evidentemente più cautelativa.

ESEMPI

Esempio 16.1

Calcolo delle ampiezze estreme successive dell'oscillazione libera di una colonna d'acqua in un tubo ad U a rami verticali con diametro 20 mm e coefficiente di resistenza $\lambda = 0,03$. Si assuma l'origine dei tempi al momento in cui la quota del pelo libero in uno dei rami è massima e vale 50 mm, misurata rispetto al livello di equilibrio.

Si utilizza l'eq. [16.23]

$$\left(1 + \frac{\lambda z_m}{D}\right) \exp[-\lambda z_m/D] = \left(1 + \frac{\lambda z_{m+1}}{D}\right) \exp[-\lambda z_{m+1}/D]$$

che si risolve rapidamente per tentativi.

Data, ad esempio sul ramo di destra, l'ampiezza del massimo

$$z_0 = +50 \text{ mm}$$

che si assume come valore z_m , dalla [16.23] segue

$$z_1 = -47,6 \text{ mm}$$

quale ampiezza del primo minimo sullo stesso ramo.

Essa corrisponde all'ampiezza del primo massimo sul ramo di sinistra. Posto allora nell'eq. [16.23] z_m uguale a

$$z_1' = +47,6 \text{ mm}$$

si ottiene

$$z_2' = -45,5 \text{ mm}$$

come valore dell'ampiezza del secondo minimo nel ramo di sinistra.

Tornando sul ramo di destra ed assumendo z_m uguale a

$$z_2 = +45,5 \text{ mm}$$

si ottiene il terzo minimo

$$z_3 = -43,5 \text{ mm}$$

e così via. La soluzione si può ricavare per via grafica utilizzando la rappresentazione della funzione $y = (1+x) \exp[-x]$ per valori di x compresi fra $\pm \lambda z_0/D$.

Esempio 16.2

Una condotta di acciaio, inclinata di 30° sull'orizzontale, con diametro interno 500 mm, spessore 6,3 mm, lunghezza 600 m, è percorsa da acqua alla temperatura di $\sim 10^\circ\text{C}$ con la velocità media $U_0 = 3,70 \text{ ms}^{-1}$.

Calcolare il massimo sovraccarico nella sezione di sbocco per effetto di una manovra di chiusura totale eseguita nel tempo $\tau = 1,0 \text{ s}$; determinare il tronco di condotta soggetto allo stesso massimo sovraccarico e l'andamento della pressione massima nel tronco medesimo.

Nella condotta di acciaio in esame, il cui modulo di elasticità si può ritenere $E = 2,0 \cdot 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$, e contenente acqua con modulo di comprimibilità isentropica $\varepsilon_s = 2,14 \cdot 10^9 \text{ Nm}^{-2}$, la celerità delle onde di pressione vale

$$a = \frac{\sqrt{\varepsilon_s/\rho}}{\sqrt{1 + \frac{D\varepsilon_s}{SE}}} = \frac{\sqrt{2,14 \cdot 10^9/1000}}{\sqrt{1 + \frac{500 \cdot 2,14 \cdot 10^9}{6,3 \cdot 2,0 \cdot 10^{11}}}} = 1076 \text{ ms}^{-1}.$$

La durata di fase è

$$\vartheta = \frac{2L}{a} = \frac{2 \times 600}{1076} = 1,115 \text{ s} > \tau = 1,0 \text{ s}$$

per cui la manovra è brusca.

Il massimo sovraccarico nella sezione di sbocco è dato dalla [16.46]

$$h_{\max} - h_0 = \frac{a}{g} U_0 = \frac{1076}{9,81} \cdot 3,70 = 406 \text{ m}$$

e corrisponde ad una sovrappressione (Joukowski [16.46'])

$$p_{\max} - p_0 = 39,81 \cdot 10^5 \text{ Nm}^{-2} = 39,81 \text{ bar}.$$

Il tronco di condotta nel quale si verifica il medesimo sovraccarico della sezione di sbocco è lungo

$$x = L - \frac{a\tau}{2} = 600 - \frac{1076 \times 1,0}{2} = 62 \text{ m}$$

secondo l'eq. [16.47].

Mentre il sovraccarico si conserva inalterato nel tronco in esame, la pressione massima nella condotta varia linearmente con la quota, a meno delle perdite qui trascurate. Quindi dal valore

$$p_{\max} = 39,81 \text{ bar}$$

nella sezione $x = 0$, al valore

$$p'_{\max} = 39,81 - 1000 \text{ g} \cdot 10^{-5} \times 62 \times \sin 30^\circ = 36,77 \text{ bar}$$

nella sezione $x=62 \text{ m}$, sempre rispetto a p_0 .

Esempio 16.3

Una tubazione orizzontale di acciaio, lunga 40 m e di diametro 25 mm, viene riempita progressivamente d'acqua mantenendo nella sezione iniziale un carico piezometrico costante $h_1 = 12$ m, misurato rispetto all'asse della condotta. All'altra estremità, chiusa da una flangia cieca, l'aria contenuta nella condotta esce attraverso un'apertura che ha diametro 5 mm e il cui coefficiente di efflusso si può ritenere pari a $C_Q = 0,60$.

Posto che l'interfaccia acqua-aria si mantenga piana e verticale durante il riempimento ed assumendo costanti la densità dell'aria $\rho_A = 1,30 \text{ kgm}^{-3}$, la densità dell'acqua $\rho_H = 1000 \text{ kgm}^{-3}$, e la celerità delle onde di pressione nella condotta piena d'acqua, con valore $a = 1100 \text{ m s}^{-1}$, calcolare la pressione massima nella sezione di sbocco al momento del completo riempimento della tubazione.

Quando la colonna liquida sta per raggiungere la flangia di chiusura della sezione di sbocco, detta p_2 la pressione (relativa all'atmosferica) in asse dell'interfaccia acqua-aria, l'equazione del moto della colonna liquida è

$$h_1 - \frac{p_2}{\rho_H g} = \frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2g} L$$

mentre la portata d'aria uscente nello stesso istante dall'apertura di area ω si può valutare con l'equazione dell'efflusso permanente di un fluido a densità costante

$$Q = C_Q \omega \sqrt{\frac{2p_2}{\rho_A}}$$

essendo $p_2/\rho_H g$ il carico piezometrico dell'aria a monte della flangia e risultando trascurabile il contributo dell'altezza cinetica $U^2/2g$ rispetto a tale termine.

In accordo con le ipotesi poste, la portata d'aria effluente uguaglia istante per istante la portata liquida nella condotta di sezione Ω , sicché

$$\Omega U = C_Q \omega \sqrt{\frac{2p_2}{\rho_A}}$$

Eliminando U tra questa equazione e quella del moto del liquido si ottiene

$$h_1 - \frac{p_2}{\rho_H g} = \frac{\lambda}{D} \frac{C_Q^2 \omega^2}{\Omega^2} \frac{p_2}{\rho_A} L$$

e quindi

$$\frac{p_2}{\rho_A} = g h_1 \left[\frac{\rho_A}{\rho_H} + \lambda C_Q^2 \left(\frac{\omega}{\Omega} \right)^2 \frac{L}{D} \right]^{-1}$$

Con i dati del problema si può ritenere il parametro di scabrezza pari a $\varepsilon = 0,2$ mm, da cui $\varepsilon/D = 0,008$. Basta che Re superi 10^5 , come certamente si verifica nel caso in esame, perché il moto sia assolutamente turbolento; risulta allora

$$\lambda = 0,035$$

Con

$$\omega = \pi(0,005)^2/4 = 1,964 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2; \quad C_q = 0,60$$

$$\Omega = \pi(0,025)^2/4 = 4,909 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\varrho_A/\varrho_H = 1,30/1000$$

$$L/D = 40/0,025$$

segue

$$\frac{p_2}{\varrho_A} = 9,81 \times 12(0,001300 + 0,032256)^{-1} = 3508 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$$

da cui

$$p_2 = 4560 \text{ Nm}^{-2},$$

e quindi

$$Q = 0,60 \times 1,964 \cdot 10^{-5} \times \sqrt{2 \times 3508} = 0,987 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1},$$

$$U = Q/\Omega = 2,010 \text{ m s}^{-1}.$$

Appena espulsa tutta l'aria, la portata cala *bruscamente* al valore

$$Q' = C_q \omega \sqrt{2 \frac{p_2}{\varrho_H}} = Q \sqrt{\frac{\varrho_A}{\varrho_H}}$$

ed in corrispondenza la velocità diventa

$$U' = U \sqrt{\frac{\varrho_A}{\varrho_H}} = 0,072 \text{ m s}^{-1}.$$

La massima sovrappressione dovuta alla brusca riduzione di velocità si calcola con l'equazione del colpo d'ariete diretto

$$h_{2\text{max}} - h_2 = \frac{a}{g}(U - U')$$

per cui

$$p_{2\text{max}} - p_2 = \varrho_H a (U - U') = 21,318 \cdot 10^6 \text{ Nm}^{-2},$$

$$p_{2\text{max}} = 21,318 + 0,046 = \underline{21,364 \text{ bar}}.$$

Esempio 16.4

Nella condotta dell'esempio 16.2, valutare con il metodo grafico, senza tener conto delle resistenze, le variazioni del carico piezometrico in relazione ad una manovra di apertura lineare nel tempo $\tau = 2,23$ s a partire da otturatore completamente chiuso.

I valori iniziali sono $h_0 = 300$ m, $U_0 = 0$ e la velocità di regime finale $U_r = 3,70$ m s⁻¹.

La costruzione grafica è rappresentata nella fig. 16.20, nella quale si è utilizzato il sistema di coordinate adimensionali

$$\frac{U}{U_f} \text{ in ascisse} \quad \text{e} \quad \frac{h}{h_0} \text{ in ordinate.}$$

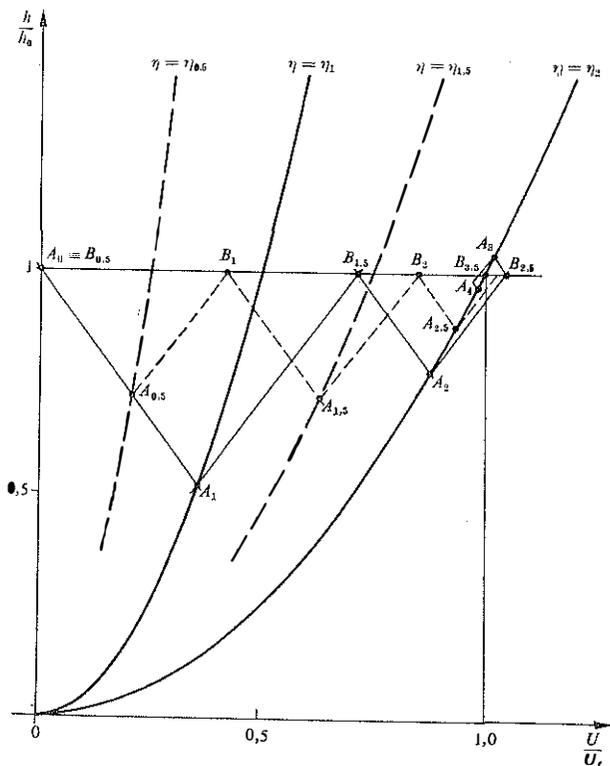


Fig. 16.20. - Metodo grafico per una manovra di apertura (esempio 16.4).

Le condizioni al contorno

$$\frac{h}{h_0} = 1 \quad \text{per la sezione d'imbocco } B$$

$$\frac{U}{U_f} = \eta \sqrt{\frac{h}{h_0}} \quad \text{per la sezione di sbocco } A$$

sono rappresentate la prima da una retta parallela alle ascisse di ordinata 1 e la seconda da un fascio di parabole, ciascuna determinata da un valore del grado di apertura η , ossia del tempo. Per il tracciamento delle parabole sono stati scelti gli

istanti di ritmo intero e quelli di mezza fase, per i quali il grado di apertura $\eta_i = t_i/\tau = i\vartheta/\tau$, con $\vartheta = 1,115$ s (cfr. es. 16.2), vale

$$\eta_0 = 0, \quad \eta_{0,5} = 0,25, \quad \eta_1 = 0,5, \quad \eta_{1,5} = 0,75, \quad \eta_2 = 1,0.$$

Infine le equazioni di compatibilità, scritte in termini adimensionali,

$$\frac{h}{h_0} = \pm \left(\frac{aU_f}{gh_0} \right) \frac{U}{U_0} + \text{cost}$$

sono rappresentate da rette con pendenza

$$\pm \frac{aU_f}{gh_0} = \pm 2Al = \pm 1,3528.$$

Il procedimento è illustrato dalla fig. 16.20. Il punto di partenza è $A_0 \equiv B_{0,5}$; da $B_{0,5}$ verso A l'osservatore che si muove con celerità $-a$ vede valori di h/h_0 e di U/U_0 che stanno sulla retta con pendenza negativa ($-1,3528$) ed il punto A_1 si trova nell'intersezione di questa retta con la parabola $\eta = \eta_1$; da A_1 si procede con una retta a pendenza positiva ($+1,3528$) fino all'intersezione con la condizione $h/h_0 = 1$ dove si trova il punto $B_{1,5}$, e così via. L'operazione è stata ripetuta partendo da B_0 (che coincide con $B_{0,5}$) e individuando le intersezioni con le parabole $\eta = \eta_{0,5}$, $\eta = \eta_{1,5}$ ed $\eta = \eta_{2,5} = 1$.

Si noti che l'oscillazione del carico, esaurita la manovra, si smorza rapidamente. Le spezzate si chiudono intorno al punto di coordinate (1,1) che rappresenta le condizioni di regime. Ciò è conseguenza del fatto che il sistema non è chiuso e quindi, essendovi una continua uscita di massa dalla sezione di sbocco, può non essere conservativo sebbene si siano trascurate le resistenze.

L'andamento del carico nella sezione di sbocco A è rappresentato nelle fig. 16.21.

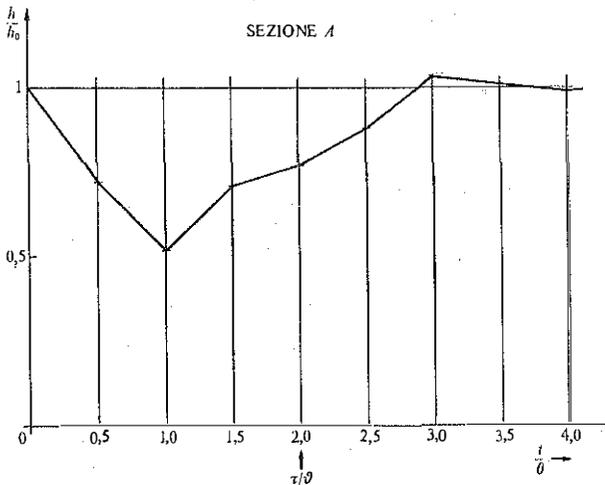


Fig. 16.21.— Variazioni del carico piezometrico nella sezione di sbocco di una condotta forzata in relazione ad una manovra di apertura.

Esempio 16.5

Calcolo delle variazioni del carico piezometrico e della velocità in una condotta di derivazione da un serbatoio, lunga 1200 m, soggetta ad una manovra di chiusura totale lineare dell'otturatore, posto all'estremità della condotta, nel tempo $\tau = 3$ s. Le condizioni iniziali sono: $h_0 = 600$ m, $U_0 = 5,60$ m s⁻¹ e le caratteristiche della condotta sono variabili dall'imbocco allo sbocco in modo tale che la celerità a si può assumere variabile linearmente tra i valori $a_{\text{imbocco}} = 960$ m s⁻¹ e $a_{\text{sbocco}} = 1110$ m s⁻¹.

In ogni sezione si assume il valore della celerità assoluta unico, nel verso positivo e nel verso negativo. Quindi, alla distanza x dallo sbocco, risulta

$$a = 1110 - \frac{1110 - 960}{1200} x = 1110 - 0,125 x$$

ed il tempo di transito T (pari alla semidurata di fase) vale

$$\begin{aligned} T = \frac{\phi}{2} &= \int_0^{1200} \frac{dx}{1110 - 0,125x} = -\frac{1}{0,125} \int_0^{1200} \frac{d(1110 - 0,125x)}{1110 - 0,125x} = \\ &= \frac{1}{0,125} \ln \frac{1110}{960} = 1,16146 \text{ s.} \end{aligned}$$

Dividiamo la condotta in 4 tratti di ugual tempo di transito

$$\Delta T = \frac{1,16146}{4} = 0,290364 \text{ s;}$$

la lunghezza di ciascun tratto si calcola con la

$$\Delta T = -\frac{1}{0,125} \int_0^{\Delta x_{i,i+1}} \frac{d(a_i - 0,125 \Delta x_{i,i+1})}{a_i - 0,125 \Delta x_{i,i+1}} = \frac{1}{0,125} \ln \left(\frac{a_i}{a_i - 0,125 \Delta x_{i,i+1}} \right)$$

dalla quale deriva

$$\Delta x_{i,i+1} = \frac{a_i}{0,125} (1 - \exp[-0,125 \Delta T]) = 0,285158 a_i.$$

Indicando con i numeri 0, 1, 2, 3, 4 gli estremi dei quattro tronchi, si ottengono i seguenti risultati

$$\begin{array}{ll} a_0 = 1110,00 \text{ m/s,} & \Delta x_{0-1} = 316,53 \text{ m} \\ a_1 = 1070,43 \text{ m/s,} & \Delta x_{1-2} = 305,24 \text{ m} \\ a_2 = 1032,28 \text{ m/s,} & \Delta x_{2-3} = 294,36 \text{ m} \\ a_3 = 995,48 \text{ m/s,} & \Delta x_{3-4} = 283,87 \text{ m} \\ a_4 = 960,00 \text{ m/s,} & \end{array}$$

$$L = 1200,00 \text{ m}$$

Si calcolano ora i valori di h ed U nelle posizioni 0, 1, 2, 3, 4 ed agli istanti $0, \Delta T, 2 \Delta T, \dots, k \Delta T$. Contrassegnando con l'indice i l'ascissa e con l'indice k il tempo, valgono i sistemi di equazioni che seguono. Nella sezione di sbocco ($i = 0$)

$$\left. \begin{aligned} \frac{U_{0,k}}{U_0} &= \eta_k \sqrt{\frac{h_{0,k}}{h_0}} \\ h_{0,k} + \frac{a_{0-1}}{g} U_{0,k} &= h_{1,k-1} + \frac{a_{0-1}}{g} U_{1,k-1} \quad (\text{su } C^-) \end{aligned} \right\} \quad [16.78]$$

dove a_{0-1} è il valor medio della celerità nel tratto 0-1.

Posto

$$\begin{aligned} A_k &= \left(h_{1,k-1} + \frac{a_0 + a_1}{2g} U_{1,k-1} \right) / h_0 \\ B_k &= \frac{(a_0 + a_1) U_0}{4g h_0} \eta_k = 0,51862 \eta_k \end{aligned}$$

si ricava dal sistema precedente

$$\frac{h_{0,k}}{h_0} = (-B_k + \sqrt{B_k^2 + A_k})^2; \quad \text{con } k = 1, 2, \dots \quad [16.79]$$

essendo

$$\eta_k = 1 - \frac{k \Delta T}{\tau} = 1 - 0,096788 k$$

per $k = 1, 2, \dots, 30$ ed $\eta_k = 0$ per $k > 30$.

Nella sezione di imbocco ($i = 4$)

$$\left. \begin{aligned} h_{4,k} &= h_0 \\ h_{4,k} - \frac{a_{3-4}}{g} U_{4,k} &= h_{3,k-1} - \frac{a_{3-4}}{g} U_{3,k-1} \quad (\text{su } C^+) \end{aligned} \right\} \quad [16.80]$$

da cui si ottiene, essendo a_{3-4} il valor medio della celerità nel tratto 3-4,

$$U_{4,k} = U_{3,k-1} + \frac{2g}{a_3 + a_4} (h_0 - h_{3,k-1}). \quad [16.81]$$

Si noti che $U_{4,k} = U_0$ finché $k \leq 4$, perchè solo all'istante $t = 4 \Delta T$ la perturbazione raggiunge la sezione d'imbocco.

Nelle sezioni intermedie ($i = 2, 3$)

$$\left. \begin{aligned} h_{i,k} + \frac{a_i + a_{i+1}}{2g} U_{i,k} &= h_{i+1,k-1} + \frac{a_i + a_{i+1}}{2g} U_{i+1,k-1} \quad (\text{su } C^-) \\ h_{i,k} - \frac{a_i + a_{i-1}}{2g} U_{i,k} &= h_{i-1,k-1} - \frac{a_i + a_{i-1}}{2g} U_{i-1,k-1} \quad (\text{su } C^+) \end{aligned} \right\}$$

da cui, indicando con $M_{i+1,k-1}$ il secondo membro della prima equazione sopra-

scritta e con $N_{i-1,k-1}$ quello della seconda, segue

$$U_{i,k} = \frac{M_{i+1,k-1} - N_{i-1,k-1}}{2a_i + a_{i-1} + a_{i+1}} 2g \quad [16.82]$$

e quindi

$$h_{i,k} = M_{i+1,k-1} - \frac{a_i + a_{i+1}}{2g} U_{i,k}. \quad [16.83]$$

Con le equazioni da [16.78] a [16.83] sono stati calcolati i valori di h e di U durante il transitorio di colpo d'ariete e i risultati relativi alla prima fase, $\vartheta = 2T = 2,32292$ s, sono riportati nel quadro seguente.

$$h_0 = 600,00 \text{ m}, \quad U_0 = 5,60 \text{ m/s}, \quad \tau = 3 \text{ s}, \quad \eta = 1 - t/\tau$$

k	Sez.	0		1		2		3		4	
	t	h	U	h	U	h	U	h	U	h	U
0	0	600,00	5,600	—	—	—	—	—	—	—	—
1	0,29036	641,24	5,229	600,00	5,600	—	—	—	—	—	—
2	0,58073	685,78	4,828	640,50	5,222	600,00	5,600	—	—	—	—
3	0,87110	732,77	4,392	684,23	4,814	639,77	5,215	600,00	5,600	—	—
4	$T =$ 1,16146	783,41	3,921	730,32	4,370	682,71	4,800	639,05	5,208	600,00	5,600
5	1,45183	836,70	3,413	780,10	3,891	727,95	4,348	681,19	4,785	600,00	4,816
6	1,74219	894,00	2,866	832,35	3,374	776,79	3,860	686,56	3,948	600,00	3,970
7	2,03256	954,21	2,277	888,55	2,817	788,33	2,963	692,37	3,043	600,00	3,079
8	$\vartheta =$ 2,32292	1018,6	1,647	907,20	1,854	800,57	1,996	698,34	2,092	600,00	2,116
9	2,61328	1009,2	0,936	—	—	—	—	—	—	—	—

Riferimenti citati.

- ALLIEVI, L., *Ann. Soc. Ing. Arch.*, Milano, 1903.
 — *Atti del Collegio Ing. e Arch.*, Milano, 1913.
 ARREDI, F., *Costruzioni idrauliche*, Vol. 2, UTET, 1972.
 BERGERON, L., *Mem. Soc. Ing. Civil de France*, 1937.
 CITRINI, D. e NOSEDA, G., *Idraulica*, Ambrosiana, Milano, 1973.
 DATEI, C., *Lezioni di Idraulica*, Libreria Cortina, Padova, 1970.
 ESCANDE, L. e NOUGARO, J., *La Houille Blanche*, n. 5, 1953.
 EVANGELISTI, G., *La regolazione delle turbine idrauliche*, Zanichelli, 1947.
 — *L'Elettrotecnica*, aprile, 1935.
 — *L'Energia Elettrica*, Vol. XV, n. 9, 1938.
 — *L'Energia Elettrica*, Vol. XLII, nn. 2-3, 1965.
 — *L'Energia Elettrica*, Vol. XLVI, nn. 10, 11-12, 1969.
 JOUKOWSKY, N. E., *Mem. Acc. Sc. St. Petersburg*, 1898.
 LI, W. H., *Transaction A.S.C.E.*, Part I, Vol. 128, 1963.

- LOEWY, R., *Druckschwankungen in Druckrohrleitungen*, Springer, Wien, 1928.
- MASSAU, J., *Mem. Ass. Ing.*, Gand, 1900.
- POGGI, B., *La Ricerca Scientifica*, 1956.
- POGGI, B. e GUERRINI, P., *Atti Acc. delle Scienze di Bologna*, Serie IV, n. 3, 1979.
- SCHNYDER, O., *Schweizerische Bauzeitung*, 1929.
- SICCARDI F. e BARTOLINI, P., *L'Energia Elettrica*, Vol. LII, nn. 7-8, 1975.
- SICCARDI, F. e RAITERI, E., *Atti XII Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche*, Bari, 1970.
- STUCKY, A., *Chambres d'équilibre*, La Concorde, Lausanne, 1958.
- WEYLER, M. E., STREETER, V. L. e LARSEN, P. S., *Journal of A.S.M.E.*, JBE, 1971.

CAPITOLO DICIASSETTESIMO

CORRENTI A PELO LIBERO. MOTO UNIFORME

17.1. Definizioni ed ipotesi.

Le correnti liquide che hanno una parte del contorno a contatto con l'atmosfera si dicono *correnti a pelo libero*, dal nome attribuito appunto alla superficie di contatto fra i due fluidi. Queste correnti defluiscono in condotti aperti, come i canali e gli alvei naturali, od anche in condotti chiusi, come le gallerie, occupando naturalmente solo una parte del condotto. Il loro comportamento presenta strette analogie con quello delle correnti in pressione per quanto riguarda i fenomeni di resistenza al moto.

Se l'alveo è cilindrico, si chiama linea di fondo la più bassa delle generatrici e *pendenza del fondo* i_f , il seno del corrispondente angolo di inclinazione θ sull'orizzontale. Se l'alveo presenta variazioni graduali di forma o di direzione, l'individuazione della pendenza del fondo, nel modo predetto, è ancora possibile localmente.

Salvo esplicita indicazione in contrario, si riterranno soddisfatte le seguenti ipotesi:

- densità ρ del liquido costante;
- pendenza del fondo i_f , così piccola, dell'ordine al massimo di qualche unità per cento, da potersi porre $i_f = \sin \theta \simeq \theta$ e $\cos \theta \simeq 1$;
- moto in regime turbolento; per cui le definizioni di moto permanente e di moto uniforme vanno riferite ai valori medi temporali delle velocità locali, come si è detto nel paragrafo 10.2.

Quando la corrente è *cilindrica*, od anche *quasi cilindrica*, ogni piano perpendicolare alla linea di fondo interseca la corrente secondo *sezioni*

pressoché normali alle traiettorie medie. Su tali sezioni la pressione varia con legge idrostatica o, in termini equivalenti, il carico piezometrico si mantiene uniforme, come si è visto nel paragrafo 11.2.

Si indica con Y la profondità della corrente nella sezione, intesa come la distanza del pelo libero dal punto più basso del fondo, e con z_f la quota di quest'ultimo punto. Adottando, come si usa abitualmente, la convenzione di valore nullo della pressione sul pelo libero, il carico piezometrico h è dato dalla

$$h = z_f + Y \cos \theta \tag{17.1}$$

e coincide perciò con la quota del pelo libero nella sezione in esame (fig. 17.1).

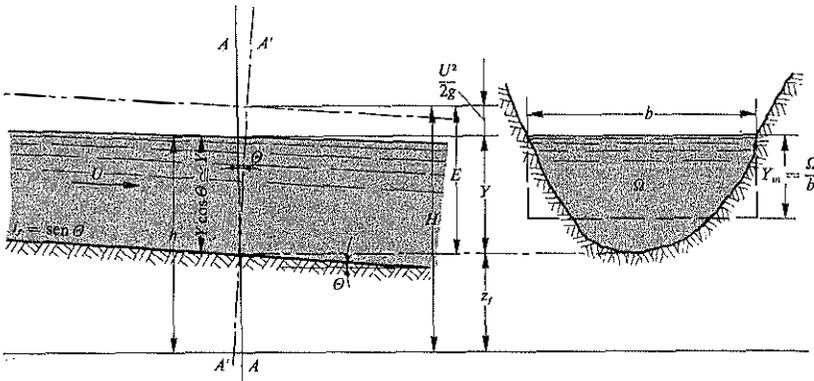


Fig. 17.1. - Corrente a pelo libero quasi cilindrica.

Qui, come si è premesso, ci si limita a considerare correnti a pelo libero per le quali è $\cos \theta \simeq 1$. Allora ogni sezione perpendicolare o sensibilmente perpendicolare alle traiettorie, come la $A'-A'$ nella figura 17.1, si confonde con una sezione verticale come la $A-A$, e l'espressione

$$h = z_f + Y \tag{17.2}$$

fornisce il *carico piezometrico* nella sezione.

Sempre nelle stesse sezioni normali, detta U la velocità media, il *carico totale* od *effettivo* H , già introdotto nei capitoli 7 e 11, vale

$$H = z_f + Y + \frac{U^2}{2g} = h + \frac{U^2}{2g} \tag{17.3}$$

In accordo con le considerazioni svolte al paragrafo 11.2, in questa espressione come in tutte le successive si assume uguale ad 1, nel moto

turbolento, il rapporto fra la media delle altezze generatrici delle velocità locali e l'altezza generatrice della velocità media. Valutazioni di tale rapporto, detto usualmente coefficiente di ragguglio dell'altezza cinetica ed indicato con il simbolo α , sono riportate nel paragrafo 17.10.

17.2. Carico specifico e profondità critica.

Si chiama *carico specifico* E in una sezione normale di una corrente cilindrica il carico totale misurato rispetto al punto più basso della sezione. Nelle condizioni specificate nel paragrafo precedente esso è dato perciò dall'espressione

$$E = Y + \frac{U^2}{2g} \quad [17.4]$$

Indicando con Ω l'area della sezione e con $Q = \Omega U$ la portata, il carico specifico si può scrivere nella forma

$$E = Y + \frac{Q^2}{2g\Omega^2} \quad [17.5]$$

Nella figura 17.2 sono riportati, per una sezione di forma qualunque, gli andamenti delle funzioni $E = E(Y)$ a portata costante e $Q = Q(Y)$ a carico specifico costante.

Osservando tale figura si nota che esiste almeno una profondità alla quale corrisponde per una data portata un valore minimo, assoluto o relativo, del carico specifico; ed almeno una profondità alla quale corrisponde per un dato carico specifico un valore massimo, assoluto o relativo, della portata. Questi valori Y_c sono detti *profondità critiche*.

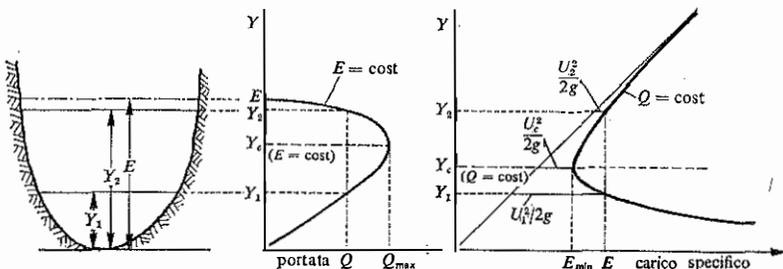


Fig. 17.2. - Portata e carico specifico in funzione della profondità.

La definizione non esclude quindi la possibilità che, per particolari forme di sezione, esistano più valori di profondità critica per un'assegnata condizione.

Derivando la [17.5] rispetto ad Y , con Q costante, segue

$$\left[\frac{\partial E}{\partial Y} \right]_{Q=\text{cost}} = 1 - \frac{Q^2}{g\Omega^3} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial Y}.$$

Detta b la larghezza del pelo libero relativa alla profondità Y , poiché ad un incremento di livello dY corrisponde un incremento d'area $b dY$, si ha

$$b dY = \frac{\partial \Omega}{\partial Y} dY$$

e quindi

$$b = \frac{\partial \Omega}{\partial Y}. \quad [17.6]$$

Sostituendo questa espressione nella derivata del carico specifico ed imponendo la condizione necessaria per l'esistenza dell'estremante

$$\left[\frac{\partial E}{\partial Y} \right]_{Q=\text{cost}} = 0,$$

si ottiene l'equazione

$$\left[\frac{\Omega^3}{b} \right]_{Y=Y_c} = \frac{Q^2}{g} \quad [17.7]$$

che, nota la forma della sezione, consente il calcolo della *profondità critica* Y_c per una assegnata portata Q . In particolare, per sezione rettangolare, essendo $\Omega = bY$, segue

$$Y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb^2}}. \quad [17.8]$$

Analogamente, mettendo in evidenza dalla [17.5] la portata

$$Q = \Omega \sqrt{2g(E - Y)}$$

e derivando questa espressione rispetto ad Y , con E costante, si ottiene

$$\left[\frac{\partial Q}{\partial Y} \right]_{E=\text{cost}} = -\frac{\Omega g}{\sqrt{2g(E - Y)}} + \sqrt{2g(E - Y)} \frac{\partial \Omega}{\partial Y}.$$

Tenuto conto che $\partial \Omega / \partial Y = b$ ed imposta ora la condizione

$$\left[\frac{\partial Q}{\partial Y} \right]_{E=\text{cost}} = 0$$

segue

$$Y_c + \left[\frac{\Omega}{2b} \right]_{Y=Y_c} = E \quad [17.9]$$

equazione che, nota la forma della sezione, fornisce la *profondità critica* Y_c per un dato carico specifico E . In particolare

$$Y_c = \frac{2}{3} E \quad [17.10]$$

se la sezione è *rettangolare*.

17.3. Velocità critica. Correnti veloci e correnti lente.

In corrispondenza dell'altezza critica Y_c per una data portata la velocità della corrente assume il valore U_c , detto *velocità critica* per la stessa portata. Essa vale

$$U_c = \frac{Q}{[\Omega]_{Y=Y_c}} = \sqrt{g \left[\frac{\Omega}{b} \right]_{Y=Y_c}};$$

in base alla [17.7]. Nella stessa forma si definisce anche la velocità critica per una *data profondità*, purché per Ω e b si assumano i valori corrispondenti a quella profondità. Indicando con Y_m la *profondità media* Ω/b , pari alla profondità della sezione rettangolare che ha la stessa larghezza al pelo libero e la stessa area della data (v. fig. 17.1), si può scrivere quindi

$$U_c = \sqrt{g Y_m} \quad [17.12]$$

ed in particolare, per *sezione rettangolare* con profondità Y ,

$$U_c = \sqrt{g Y}. \quad [17.13]$$

A parità di Q e di E si possono presentare due tipi di corrente, come mostrano le figure 17.2 e 17.3:

corrente veloce (o supercritica) con velocità $U_1 > U_c$ e profondità $Y_1 < Y_c$,
corrente lenta (o subcritica) con velocità $U_2 < U_c$ e profondità $Y_2 > Y_c$.

La stessa distinzione si evidenzia ricorrendo ad un *numero di Froude* (cfr. cap. 3), costruito nella forma

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{g Y_m}} \quad [17.14]$$

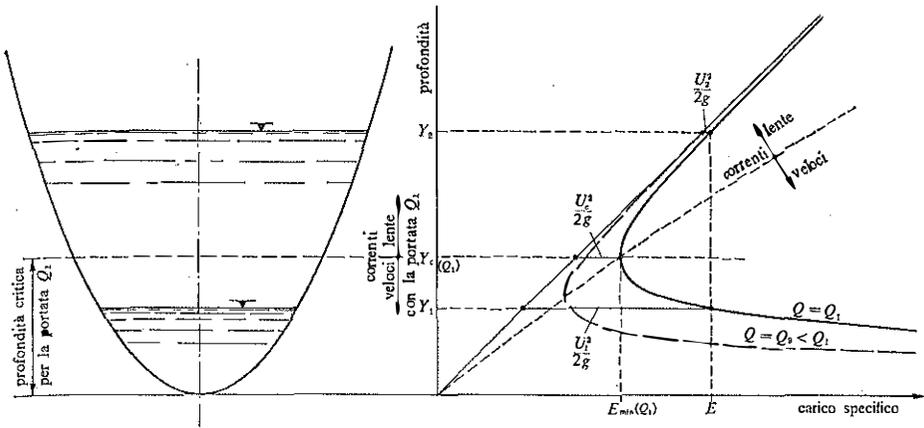


Fig. 17.3. - Profondità critica per una data portata. Correnti lente e correnti veloci.

Si vede ch'esso rappresenta il rapporto fra la velocità media U e la velocità critica U_c , per cui:

nelle correnti veloci, essendo $U > \sqrt{gY_m}$, risulta $Fr > 1$,
 nelle correnti lente, essendo $U < \sqrt{gY_m}$, risulta $Fr < 1$.

Una differenza notevole tra correnti veloci e correnti lente si rileva dal diagramma $E = E(Y)$ della figura 17.3: ad una diminuzione del carico specifico si vede che corrisponde un aumento della profondità per le correnti veloci, una diminuzione della profondità per quelle lente.

17.4. Moto uniforme nei canali.

Il movimento uniforme, come si è già detto nel paragrafo 9.7, è quel particolare moto di una corrente cilindrica nel quale i valori della velocità e la loro distribuzione sono gli stessi, contemporaneamente, in qualunque sezione normale della corrente.

Affinché una corrente a pelo libero possa muoversi di moto uniforme, l'alveo dev'essere quindi cilindrico e la superficie libera parallela al fondo. La condizione di uniformità comporta sempre l'invarianza della portata nello spazio e, se il moto è permanente, la sua costanza anche nel tempo. L'equazione conseguente

$$Q = \Omega U = \text{cost} \tag{17.15}$$

verifica la condizione di continuità a densità costante.

Anche la linea dei carichi totali è necessariamente parallela al fondo e al pelo libero, essendo costante l'altezza cinetica $U^2/2g$; il carico specifico E si mantiene quindi uniforme lungo la corrente. Riassumendo, detta s la coordinata spaziale misurata lungo la linea di fondo dell'alveo:

la pendenza del fondo $i_f = -dz_f/ds = \text{sen } \theta \simeq \theta$

coincide con la perdita di carico piezometrico per unità di lunghezza del canale $i = -dh/ds =$ pendenza del pelo libero

e coincide con la pendenza della linea dei carichi totali $j = -dH/ds$;

ossia

$$i_f = i = j. \quad [17.16]$$

L'equazione del moto uniforme nei canali non differisce formalmente da quella del moto uniforme nelle condotte circolari in pressione

$$j = \frac{\lambda}{4R} \frac{U^2}{2g},$$

salvo l'introduzione della lunghezza $4R$ in luogo del diametro D ; si ricorda che il *raggio idraulico* R è il rapporto fra l'area Ω ed il perimetro bagnato B della sezione.

Nell'equazione del moto uniforme delle correnti a pelo libero, si usa indicare, in luogo della pendenza j , la coincidente pendenza del fondo i_f e si preferisce mettere in evidenza al primo membro la velocità media U adottando la forma di Chézy

$$U = \chi \sqrt{Ri_f} \quad [17.17]$$

nella quale χ è un coefficiente di attrito che ha le dimensioni della radice di un'accelerazione; la relativa unità di misura è $\text{m}^{\frac{1}{2}} \text{s}^{-1}$.

In luogo di χ si può convenientemente impiegare un coefficiente di resistenza *adimensionale* C . Per questo basta sostituire l'equazione di Chézy con la

$$U = C \sqrt{gRi_f}. \quad [17.18]$$

Fra i coefficienti C e χ ed il richiamato coefficiente λ delle condotte in pressione valgono le relazioni

$$\chi = C \sqrt{g} \quad \text{e} \quad C = \sqrt{\frac{8}{\lambda}},$$

che derivano immediatamente dal confronto fra le corrispondenti forme dell'equazione del moto uniforme.

17.5. Caratteristiche geometriche degli alvei.

Riportiamo qui di seguito le espressioni dell'area della sezione Ω , della larghezza del pelo libero b e del perimetro bagnato B , in funzione della profondità Y , per le principali forme di alveo riportate nella figura 17.4.

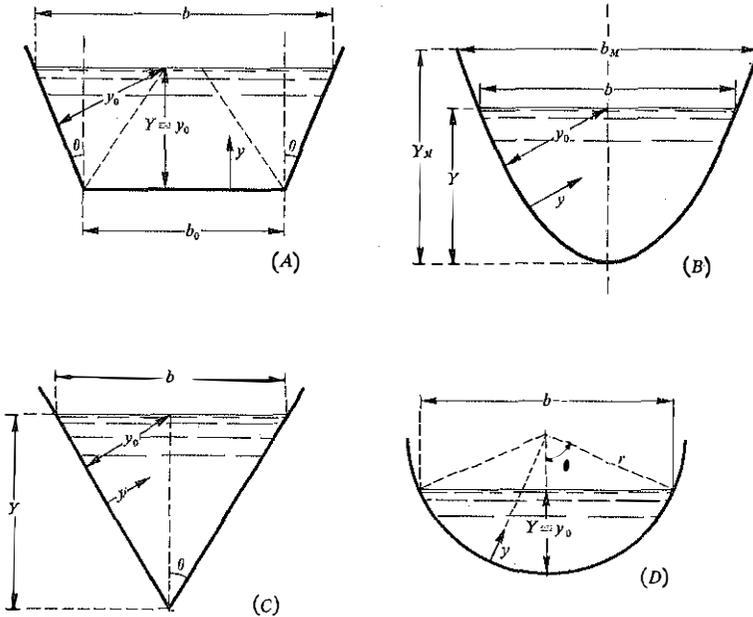


Fig. 17.4. - Caratteristiche geometriche di alcuni tipi di alveo.

Alveo con sezione trapezia (fig. 17.4A): larghezza b_0 al fondo e angolo θ delle sponde con la verticale

$$\begin{aligned} \Omega &= b_0 Y + Y^2 \operatorname{tg} \theta \\ b &= b_0 + 2Y \operatorname{tg} \theta \\ B &= b_0 + 2Y / \cos \theta . \end{aligned}$$

Alveo con sezione triangolare (fig. 17.4B): angolo al vertice 2θ .

$$\begin{aligned} \Omega &= Y^2 \operatorname{tg} \theta \\ b &= 2Y \operatorname{tg} \theta \\ B &= 2Y / \cos \theta . \end{aligned}$$

Alveo con sezione parabolica (fig. 17.4C): larghezza b_M alla profondità Y_M .

$$\Omega = \frac{2}{3} b_M \left(\frac{Y}{Y_M} \right)^3 Y_M$$

$$b = b_M (Y/Y_M)^3$$

$$B = 2 \sqrt{Y^2 + \frac{b_M^2 Y}{16 Y_M}} + \frac{b_M^2}{16 Y_M} \ln \left\{ \left(Y + \frac{b_M^2}{32 Y_M} + \sqrt{Y^2 + \frac{b_M^2 Y}{16 Y_M}} \right) / \frac{b_M^2}{32 Y_M} \right\}.$$

Alveo con sezione circolare (fig. 17.4D): raggio r ed angolo al centro θ .

$$\Omega = \theta r^2 - (r - Y) r \sin \theta \quad Y = r(1 - \cos \theta)$$

$$b = 2r \sin \theta$$

$$B = 2\theta r.$$

Per le seguenti forme di sezione della corrente il *raggio idraulico*, in funzione della profondità Y , vale:

sezioni semicircolari	$R = Y/2$
sezioni trapezie e rettangolari circoscritte ad una semicirconferenza di raggio uguale alla profondità	$R = Y/2$
sezioni triangolari equilatera	$R = Y/4$
sezioni infinitamente larghe	$R = Y$

Per le forme più frequenti di sezione adottate nei canali, il raggio idraulico ha valori compresi nel campo $Y/2 < R < Y$.

17.6. Pendenza critica.

In un alveo cilindrico declive con una data pendenza del fondo i_r la profondità Y_u necessaria per consentire il deflusso di una portata Q in moto uniforme è in genere differente dalla profondità critica Y_c per la stessa portata. Si dice *pendenza critica* i_c , per la portata Q , quella pendenza del fondo che, a parità di condizioni dell'alveo, rende coincidenti le profondità Y_u ed Y_c .

Dall'equazione del moto uniforme, scritta mettendo in evidenza la pendenza

$$i_r = \frac{U^2}{g C^2 R} = \frac{Q^2}{g [\Omega^3 C^3 R]_{Y=Y_u}},$$

si ottiene la pendenza i_c valutando tutte le grandezze che dipendono dalla

profondità Y_u in corrispondenza del valore Y_c . Segue quindi

$$i_c = \frac{Q^2}{g[\Omega^2 C^2 R]_{Y=Y_c}} \quad [17.19]$$

In base all'eq. [17.7] per il calcolo della profondità critica, si può sostituire Q^2/g con $[\Omega^3/b]_{Y=Y_c}$; ne deriva

$$i_c = \left[\frac{\Omega}{C^2 b R} \right]_{Y=Y_c} = \left[\frac{1}{C^2} \cdot \frac{B}{b} \right]_{Y=Y_c} \quad [17.20]$$

e se l'alveo è *molto largo*, tanto da poter ritenere $B \simeq b$,

$$i_c = \left[\frac{1}{C^2} \right]_{Y=Y_c} \quad [17.21]$$

Dato che i valori di C variano fra 11 e 25, come si vedrà nel paragrafo successivo, risulta che la pendenza critica ha valori compresi nel campo da 1,5‰ all'8‰, e frequentemente intorno al 3-4‰.

Gli alvei con pendenza del fondo $i_f < i_c$ si dicono *fluviali*, o a *debole pendenza* relativamente alla data portata Q : in essi il moto uniforme con la stessa portata è una corrente lenta, perché risulta $Y_u > Y_c$. Infatti, dividendo l'eq. [17.19] per quella del moto uniforme si ottiene

$$\frac{i_c}{i_f} = \frac{[\Omega^2 C^2 R]_{Y=Y_u}}{[\Omega^2 C^2 R]_{Y=Y_c}}$$

e poiché $\Omega^2 C^2 R$, per le sezioni dei canali aperti, è una funzione monotona crescente di Y si vede che ad $i_f \leq i_c$ corrisponde $Y_u \geq Y_c$.

Gli alvei con pendenza del fondo $i_f > i_c$ si dicono *torrentizi*, o a *forte pendenza* per la data portata Q : in essi il moto uniforme, con quella portata, è una corrente veloce.

Uno stesso alveo può avere differente comportamento al variare della portata; ad esempio, la [17.21] mostra che l'alveo rettangolare molto largo può comportarsi come fluviale con piccole portate e come torrentizio con portate più grandi, perché, aumentando la profondità, anchè C aumenta.

Quando un alveo ha la pendenza critica per una certa portata, questa vi può defluire, per quanto si è detto, in condizioni di moto uniforme; ma solo mediamente, perché la superficie libera non si mantiene piana ma presenta ondulazioni stazionarie intorno alla profondità del moto uniforme. Ciò è conseguenza del fatto che, essendo minima l'energia specifica per $Y = Y_c \equiv Y_u$, variazioni modeste della profondità si possono verificare intorno a questo valore senza apprezzabili variazioni del carico specifico (v. fig. 17.3).

TABELLA 17.1. - Coefficienti di scabrezza per i canali.

Tipo di canale	Scabrezza omogenea equivalente ϵ (mm)	Bazin γ_B (m ^{1/3})	Kutter m_K (m ^{1/3})	Gruickler-Sirickler k_s (m ^{1/3} s ⁻¹)	Manning n (m ^{-1/3} s)
1 - Pareti di cemento perfettamente liscio. Pareti di legno piillato. Pareti metalliche, senza risalti nei giunti. - Idem ma con curve.	0,15 ÷ 0,2 0,2 ÷ 0,4	0,06 0,10	0,12 0,18	100 ÷ 90 90 ÷ 85	0,011 0,012
2 - Pareti di cemento non perfettamente liscio. Muratura di mattoni molto regolare. Pareti metalliche con chiodatura ordinaria.	0,4 ÷ 1,0	0,16	0,20 ÷ 0,25	85 ÷ 75	0,013
3 - Pareti di cemento in non perfette condizioni. Muratura ordinaria più o meno accurata. Pareti di legno grezzo, eventualmente con fessure.	2 ÷ 5	0,23 ÷ 0,36	0,35 ÷ 0,55	70 ÷ 65	0,014 ÷ 0,015
4 - Pareti di cemento solo in parte intonacate; qualche deposito sul fondo. Muratura irregolare (o di pietrame). Terra regolarissima senza vegetazione.	8	0,46	0,55 ÷ 0,75	60	0,018
5 - Terra abbastanza regolare. Muratura vecchia, in condizioni non buone, con depositi di limo al fondo.	15 ÷ 30	0,60 ÷ 0,85	0,75 ÷ 1,25	50	0,020 ÷ 0,022
6 - Terra con erba sul fondo. Corsi d'acqua naturali regolari.	70	1,30	1,50	40	0,025
7 - Terra in cattive condizioni. Corsi d'acqua naturali con ciottoli e ghiaia.	120 ÷ 200	1,75	2,00	35	0,030
8 - Canali in abbandono con grande vegetazione. Corsi d'acqua con alveo in ghiaia e movimento di materiali sul fondo, oppure scavati in roccia con sporgenze.	300 ÷ 400	2,0 ÷ 2,3	3,00	30	0,035

17.7. Formule per il calcolo del coefficiente di resistenza.

Il coefficiente di resistenza C , come χ e λ , è in generale funzione del numero di Reynolds, della scabrezza relativa e della forma della sezione. Per le correnti a pelo libero il numero di Reynolds si scrive nella forma

$$Re = \frac{4eUR}{\mu} = \frac{4UR}{\nu}$$

Esso influisce poco sulla resistenza al moto uniforme delle correnti a pelo libero perché ha spesso valori così alti da rendere il regime del moto *assolutamente turbolento*; ciò è conseguenza delle maggiori dimensioni che hanno di solito i canali rispetto alle condotte.

Partendo da una distribuzione logaritmica della velocità lungo le normali al contorno, come si vedrà nei paragrafi 17.10/11/12, si può trasferire alle correnti a pelo libero una legge di resistenza di tipo logaritmico, analoga alla formula di Colebrook, ma comprensiva anche dell'effetto dovuto alla forma della sezione attraverso un coefficiente f (Marchi, 1961):

$$C = \frac{\chi}{\sqrt{g}} = -5,75 \log \left(\frac{C}{Re f} + \frac{\varepsilon}{13,3 R f} \right) \quad [17.22]$$

con ε = scabrezza equivalente di sabbia, data in relazione alla natura delle pareti del canale (v. tab. 17.1);

f = coefficiente di forma, di cui la tabella 17.2 riporta alcuni valori sperimentali.

L'andamento di C è evidenziato dai diagrammi delle figure 17.5 e 17.6; essi forniscono C in funzione del raggio idraulico di forma fR e della scabrezza assoluta ε , tenendo conto anche dell'eventuale influenza di Re in base alla conoscenza della pendenza i_f del fondo.

TABELLA 17.2. - Coefficienti di forma per i canali.

Forma sezione	Coeff. f
Triangolare equilatera	1,30 ÷ 1,25
Triangolare retta	1,20 ÷ 1,15
Semicircolare	0,90
Semiesagonale	1,00 ÷ 0,90
Trapezia molto larga	0,80
Rettangolare ($b = 2y$)	0,95
Rettangolare molto larga	0,80

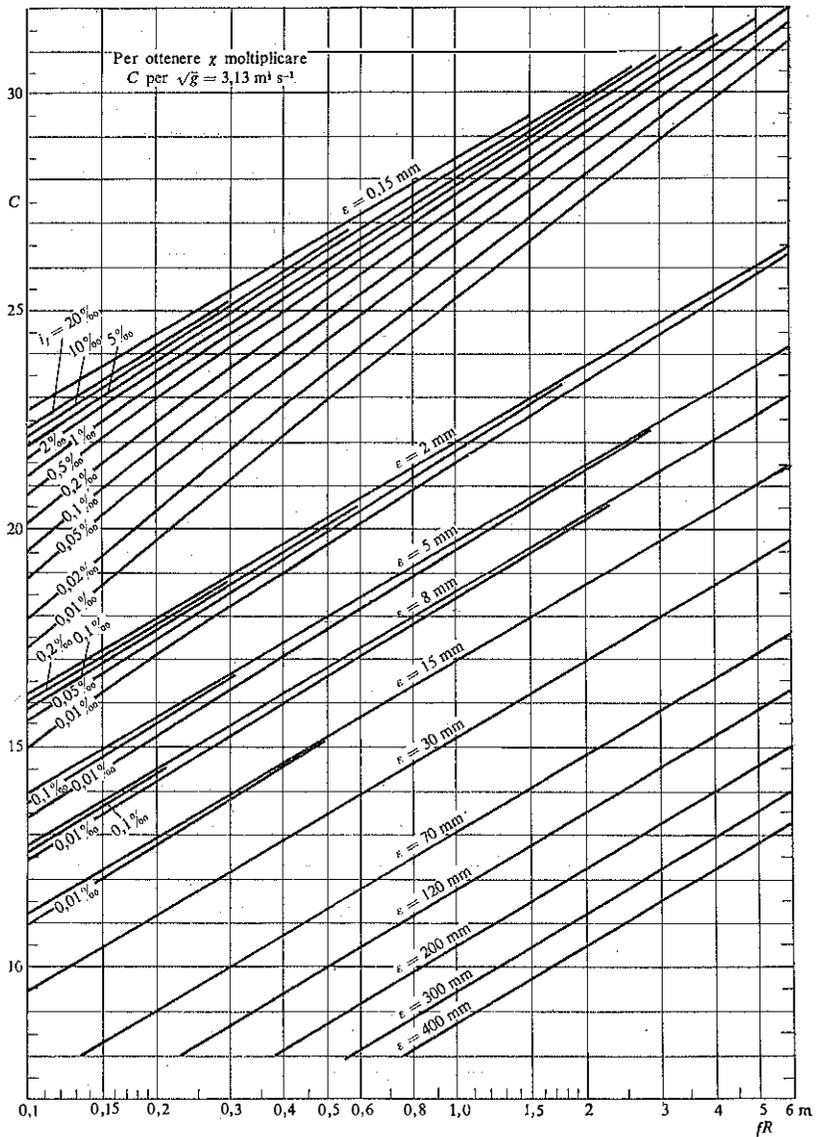


Fig. 17.5. - Diagramma per la valutazione del coefficiente adimensionale C di resistenza con varie scabrezze ϵ , in funzione del raggio idraulico di forma fR .

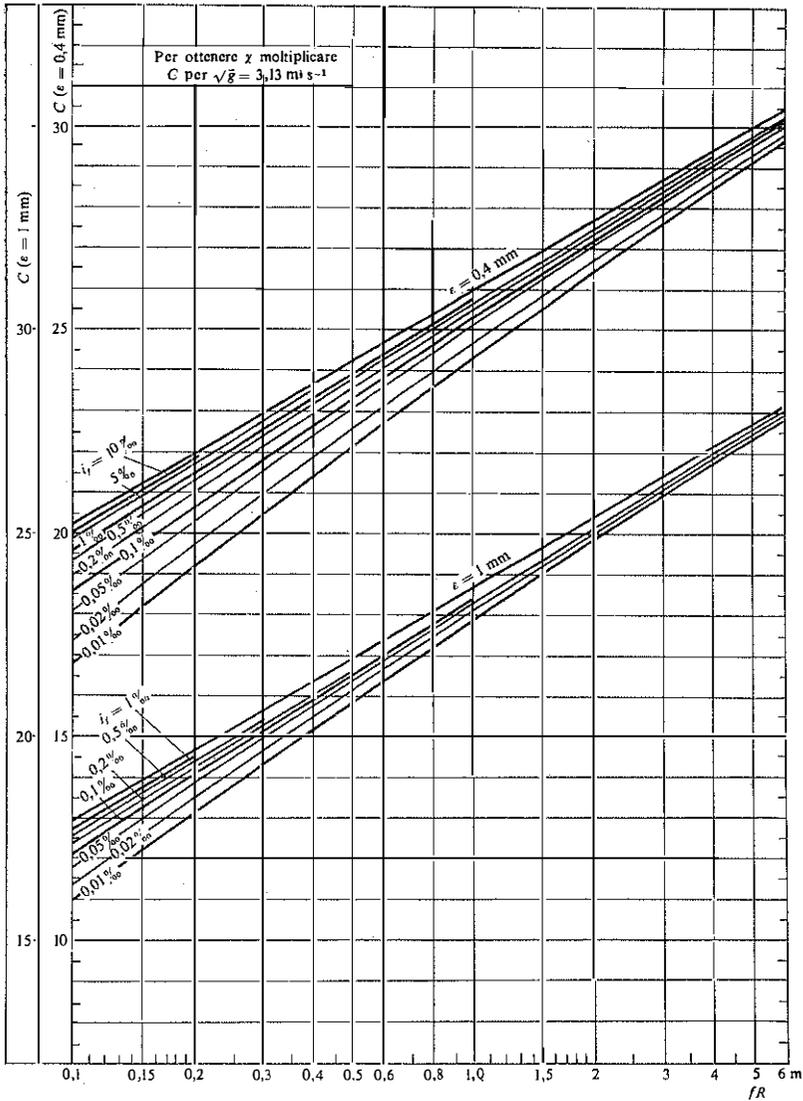


Fig. 17.6. - Diagramma per la valutazione del coefficiente adimensionale C di resistenza con sabbie e uguali a 0,4 mm e 1 mm, in funzione del raggio idraulico di forma $f.R$.

Se è verificata la condizione di *parete liscia*, l'eq. [17.22] diventa

$$C = 5,75 \log \left(\frac{R \epsilon f}{C} \right). \quad [17.23]$$

Nel caso, molto frequente, di *parete scabra e moto assolutamente turbolento*, condizione che si verifica praticamente per $\epsilon \sqrt{g} R i_j / \nu > 100$, l'eq. [17.22] si riduce alla forma esplicita

$$C = \frac{\chi}{\sqrt{g}} = 5,75 \log \left(\frac{13,3 R f}{\epsilon} \right). \quad [17.24]$$

Una formula di tipo logaritmico, per il moto assolutamente turbolento, era stata proposta precedentemente da Keulegan (1938) nella forma

$$C = 5,75 \log \left(\frac{R}{\epsilon} \right) + 6,25 = 5,75 \log \left(\frac{12,2 R}{\epsilon} \right)$$

attribuendo ad ϵ i valori ottenuti per confronto con le esperienze di Bazin (1865) su canali rettangolari.

Questa equazione, come diverse altre equazioni logaritmiche dello stesso tipo che sono state proposte con differenti valori delle costanti (si veda, ad esempio, ASCE, vol. 89, n. HY2, 1963), rientra nella legge di resistenza [17.24] assumendo un particolare valore del coefficiente f di forma. Così, per ottenere la formula di Keulegan, basta porre $f = 0,92$, che è un valore mediamente appropriato per canali di sezione rettangolare non larghissima.

Graficamente l'eq. [17.24] è rappresentata dalla retta più alta di ciascun fascio di curve $\epsilon = \text{cost}$ nei diagrammi delle figure 17.5 e 17.6. Valori di C calcolati con tale formula sono riportati nella tabella 17.3.

Nello stesso regime *assolutamente turbolento* trovano largo impiego diverse formule empiriche, che forniscono χ in funzione del raggio idraulico e della natura delle pareti, attraverso particolari parametri di scabrezza. Le più famose sono le formule di

Bazin	$\chi = 87 / (1 + \gamma_B / \sqrt{R})$
Kutter	$\chi = 100 / (1 + m_K / \sqrt{R})$
Gauckler-Strickler	$\chi = k_S R^{2/3}$

dove γ_B , m_K , k_S sono i parametri dimensionali di scabrezza, di cui la

TABELLA 17.3. - Valori del coefficiente di attrito C nel regime « assolutamente turbolento » in funzione del raggio idraulico di forma fR e della scabrezza ϵ . Eq. [17.24].

fR (m)	Valori di C per ϵ in mm =													
	0,15	0,4	1	2	3	5	8	15	30	70	120	200	300	400
0,06	21,4	19,0	16,7	15,0	13,9	12,7	11,5	9,9						
0,08	22,1	19,7	17,4	15,7	14,7	13,4	12,2	10,6	8,9					
0,10	22,7	20,2	18,0	16,2	15,2	13,9	12,8	11,2	9,5					
0,12	23,1	20,7	18,4	16,7	15,7	14,4	13,2	11,6	9,9					
0,14	23,5	21,1	18,8	17,1	16,1	14,8	13,6	12,0	10,3	8,2				
0,16	23,8	21,4	19,1	17,4	16,4	15,1	13,9	12,4	10,6	8,5				
0,18	24,1	21,7	19,4	17,7	16,7	15,4	14,2	12,7	10,9	8,8				
0,20	24,4	22,0	19,7	17,9	16,9	15,7	14,5	12,9	11,2	9,1				
0,25	25,0	22,6	20,3	18,5	17,5	16,2	15,0	13,5	11,8	9,6	8,3			
0,30	25,4	23,0	20,7	19,0	18,0	16,7	15,5	13,9	12,2	10,1	8,7			
0,35	25,8	23,4	21,1	19,4	18,3	17,1	15,9	14,3	12,6	10,5	9,1			
0,40	26,1	23,7	21,4	19,7	18,7	17,4	16,2	14,6	12,9	10,8	9,5	8,2		
0,45	26,4	24,0	21,7	20,0	19,0	17,7	16,5	14,9	13,2	11,1	9,8	8,5		
0,50	26,7	24,3	22,0	20,2	19,2	17,9	16,8	15,2	13,5	11,4	10,0	8,7		
0,60	27,2	24,7	22,4	20,7	19,7	18,4	17,2	15,7	13,9	11,8	10,5	9,2	8,2	
0,70	27,6	25,1	22,8	21,1	20,1	18,8	17,6	16,1	14,3	12,2	10,9	9,6	8,6	
0,80	27,9	25,4	23,1	21,4	20,4	19,1	17,9	16,4	14,7	12,5	11,2	9,9	8,9	8,2
0,90	28,2	25,7	23,4	21,7	20,7	19,4	18,2	16,7	15,0	12,8	11,5	10,2	9,2	8,5
1,00	28,4	26,0	23,7	22,0	21,0	19,7	18,5	16,9	15,2	13,1	11,8	10,5	9,5	8,7
1,20	28,9	26,4	24,2	22,4	21,4	20,1	19,0	17,4	15,7	13,5	12,2	10,9	9,9	9,2
1,40	29,3	26,8	24,6	22,8	21,8	20,5	19,4	17,8	16,1	13,9	12,6	11,3	10,3	9,6
1,60	29,6	27,2	24,9	23,1	22,1	20,8	19,7	18,1	16,4	14,3	12,9	11,6	10,6	9,9
1,80	29,9	27,5	25,2	23,4	22,4	21,1	20,0	18,4	16,7	14,6	13,2	11,9	10,9	10,2
2,00	30,2	27,7	25,4	23,7	22,7	21,4	20,2	18,7	16,9	14,8	13,5	12,2	11,2	10,5
2,40	30,6	28,2	25,9	24,1	23,2	21,9	20,7	19,1	17,4	15,3	13,9	12,6	11,6	10,9
2,80	31,0	28,6	26,3	24,5	23,5	22,3	21,1	19,5	17,8	15,7	14,3	13,0	12,0	11,3
3,20	31,3	28,9	26,6	24,9	23,9	22,6	21,4	19,8	18,1	16,0	14,7	13,4	12,4	11,6
3,60	31,6	29,2	26,9	25,2	24,2	22,9	21,7	20,1	18,4	16,3	15,0	13,7	12,7	11,9
4,00	31,9	29,5	27,2	25,4	24,4	23,1	22,0	20,4	18,7	16,6	15,2	13,9	12,9	12,2
4,50	32,2	29,8	27,5	25,7	24,7	23,4	22,3	20,7	19,0	16,9	15,5	14,2	13,2	12,5
5,00	32,5	30,0	27,7	26,0	25,0	23,7	22,5	21,0	19,2	17,1	15,8	14,5	13,5	12,8
6,00	32,9	30,5	28,2	26,4	25,4	24,1	23,0	21,4	19,7	17,6	16,2	14,9	13,9	13,2

tabella 17.1 riporta alcuni valori consigliabili. La figura 17.7 mostra un confronto fra i valori di C calcolati con diverse formule a parità di R (per $f=1$).

Sostituendo la formula di Gauckler-Strickler nell'equazione del moto

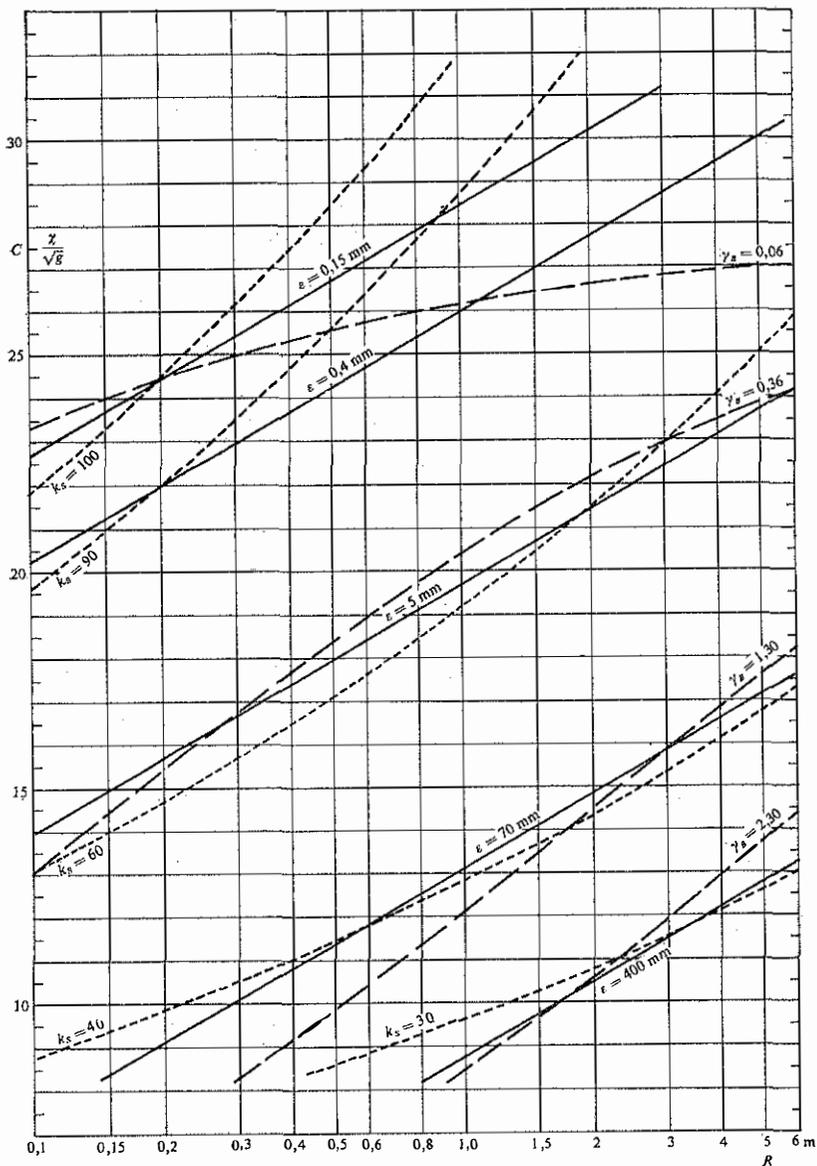


Fig. 17.7. - Confronto fra le valutazioni del coefficiente di resistenza fornite dalla formula logaritmica [17.24] con $f = 1$, e dalle formule di Gauckler-Strickler (parametro di scabrezza k_s) e di Bazin (parametro di scabrezza γ_B).

uniforme, si ottiene

$$U = k_s R^{2/3} i_f^{1/3} \quad [17.25]$$

che è l'equazione di Manning, probabilmente la più usata, almeno nei paesi di lingua inglese, per il calcolo delle grandezze del moto uniforme nelle correnti a pelo libero. Veramente l'indice di scabrezza proposto da Manning (1891-95), indicato con il simbolo n , è pari all'inverso del coefficiente k_s di Gauckler-Strickler e la tabella 17.1 ne riporta i valori consigliati. Si veda, in proposito, anche Ven Te Chow: *Open-Channel Hydraulics*, McGraw-Hill, 1959.

Tenuto conto della buona concordanza tra la formula logaritmica [17.24] e la formula di Manning-Gauckler-Strickler nel campo del moto assolutamente turbolento, almeno per scabrezze $\varepsilon > 2$ mm, si può conservare il vantaggio della semplicità della formula monomia, senza rinunciare a quello di mettere in conto l'influenza della forma della sezione, ponendo

$$\chi = k_s (fR)^{1/3} \quad [17.26]$$

17.8. Progetto dei canali.

La pendenza del fondo di un canale in progetto è generalmente fissata dalle condizioni topografiche della zona attraversata. Scelta la natura e la forma dell'alveo, se è assegnata la portata che in esso deve defluire, resta da valutare la corrispondente profondità del moto uniforme per avere un importante dato di riferimento sulle condizioni normali di funzionamento del canale.

Per questo, conviene scrivere l'equazione del moto uniforme nella forma

$$\frac{Q}{\sqrt{i_f}} = \chi \Omega \sqrt{R} = C \Omega \sqrt{gR}$$

nella quale il primo membro è noto ed il secondo, essendo funzione della profondità, fornisce la soluzione cercata $Y = Y_u$.

Se la sezione è rettangolare molto larga, tale da potersi porre $R \cong Y$, l'equazione precedente diventa

$$\frac{Q'}{\sqrt{i_f}} = [\chi]_{Y_u} \cdot Y_u^{3/2} = [C]_{Y_u} \cdot g^{1/2} Y_u^{3/2}$$

essendo Q' la portata per unità di larghezza del canale. In particolare, se si adotta l'equazione di Manning-Gauckler-Strickler si ottiene

$$\frac{Q'}{\sqrt{i_f}} = k_s Y_u^{5/3} \quad [17.27]$$

Quando il canale non è rivestito un'utile indicazione per il progetto è rappresentata dalla massima velocità ammissibile senza erosione del'alveo. La tabella 17.4 riporta alcuni valori limite per diversi terreni.

TABELLA 17.4. - Valori massimi ammissibili per la velocità media U nei canali in terra (secondo Fortier e Scobey)

Tipo di materiale al fondo	Acqua chiara senza detriti	Acqua con materiale colloidale	Acqua con melma non colloidale, sab- bia, ghiaia e frammenti di roccia U (m/s)
	U (m/s)	U (m/s)	U (m/s)
Sabbia non colloidale	0,46	0,76	0,46
Terra grassa, sabbiosa, non colloidale	0,53	0,76	0,61
Terra grassa fine, non colloidale	0,61	0,91	0,61
Limo alluvionale non colloidale	0,61	1,07	0,61
Terra grassa ordinaria compatta	0,76	1,07	0,69
Ceneri vulcaniche	0,76	1,07	0,61
Ghiaia fine	0,76	1,52	1,14
Argilla compatta molto colloidale	1,14	1,52	0,91
Terra grassa non colloidale con sassi	1,14	1,52	1,52
Limo alluvionale colloidale	1,14	1,52	0,91
Limo colloidale con sassi	1,22	1,68	1,52
Ghiaia ordinaria non colloidale	1,22	1,83	1,98
Sassi e ghiaia	1,52	1,68	1,98
Scisti e parti agglomerate	1,83	1,83	1,52

Quando la profondità dell'acqua supera 0,90 m, le velocità possono essere aumentate di 0,15 m/s.

Altro elemento utile in fase di progettazione è la conoscenza della tensione media sul contorno in condizioni di moto uniforme: $\tau_0 \cong \gamma R i_f$. Nei canali larghi R tende ad Y_w e quindi $\tau_0 = \gamma Y_w i_f$. La tabella 17.5 riporta valori indicativi della tensione ammissibile nei canali scavati in terreni incoerenti.

TABELLA 17.5. - Tensioni ammissibili sul fondo dei canali larghi in terreni incoerenti:

Diametro medio sedimenti (mm)	Tensione ammissibile sul fondo ($N m^{-2}$)		
	Acque chiare	Acque con scarso trasporto in sosp.	Acque con alto trasporto in sosp.
0,1 ÷ 0,5	1,0	2,5	4,0
0,5 ÷ 1,0	2,0	3,0	4,5
1 ÷ 2	2,5	3,5	5,0
2 ÷ 3	3,5	4,5	5,5
3 ÷ 5	5,0	5,5	6,5

17.9. Scala di deflusso.

La valutazione della portata dei corsi d'acqua naturali si basa tradizionalmente sulla misura della quota del pelo libero e sulla conoscenza, attraverso tarature dirette in condizioni di moto permanente, di una relazione fra le altezze d'acqua e le portate. Questa scala delle portate viene chiamata anche *scala di deflusso*; e data la dipendenza dell'area della sezione trasversale della corrente dal livello idrometrico, con lo stesso nome si indica anche il legame che sussiste tra portata e sezione in un dato alveo. Tale relazione si usa porre nella forma

$$Q = k\Omega^m, \quad [17.28]$$

Ai coefficienti k ed m si assegnano valori costanti, adeguati al campo di variazione delle portate entro il quale s'impiega la scala di deflusso.

Il coefficiente k varia poco se la pendenza del pelo libero si mantiene pressoché costante con le diverse portate, in particolare se il moto è prossimo alle condizioni *uniformi*, dato che allora la pendenza del pelo libero si confonde con quella del fondo. L'esponente m in tali condizioni dipende esclusivamente dalle caratteristiche geometriche della sezione; infatti, derivando la [17.28] rispetto ad Ω si ottiene

$$\frac{dQ}{d\Omega} = mk\Omega^{m-1} = m \frac{Q}{\Omega}$$

da cui

$$m = \frac{dQ/d\Omega}{Q/\Omega}.$$

Assumendo il moto senz'altro uniforme, ed impiegando la formula di Manning-Gauckler-Strickler per il calcolo del coefficiente di resistenza, si ha

$$Q = \chi\Omega\sqrt{Ri_f} = k_s i_f^{\frac{2}{3}} \Omega^{\frac{5}{3}} B^{-\frac{2}{3}}$$

e quindi, secondo la relazione precedente, l'esponente m assume la forma

$$m = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \frac{\Omega}{B} \left(\frac{dB}{d\Omega} \right).$$

Per le sezioni *rettangolari* i valori di m variano con la profondità nel

modo seguente:

$$\begin{array}{rcl}
 \text{per } \frac{Y}{b} = \frac{1}{2} & \frac{\Omega}{B} \left(\frac{dB}{d\Omega} \right) = \frac{1}{2} & m = \frac{4}{3} \\
 = 0,20 & = 0,286 & = 1,476 \\
 = 0,15 & = 0,231 & = 1,513 \\
 = 0,10 & = 0,167 & = 1,556 \\
 \rightarrow 0 & \rightarrow 0 & = \frac{5}{3}
 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \sim \frac{3}{2}$$

Per le sezioni *triangolari* di qualunque apertura e per la sezione *semicircolare* si ha

$$\frac{\Omega}{B} \left(\frac{dB}{d\Omega} \right) = \frac{1}{2} \quad m = \frac{4}{3}.$$

Per le sezioni *trapezie* i valori di m differiscono poco da quelli delle corrispondenti rettangolari. Quando le sezioni sono abbastanza *larghe*, ossia hanno rapporti fra la larghezza del pelo libero e la profondità compresi fra 5 e 10 ($0,10 < Y/B \leq 0,20$), il valore dell'esponente della scala di deflusso è approssimativamente

$$m \simeq \frac{3}{2},$$

mentre per le sezioni *larghissime* risulta sempre

$$m \simeq \frac{5}{3}$$

e k diventa effettivamente costante.

17.10. Distribuzione della velocità.

Nel moto turbolento, la legge logaritmica di distribuzione delle velocità medie temporali lungo le normali al contorno è soddisfatta sperimentalmente con sufficiente approssimazione anche nelle correnti a pelo libero. Ciò fa ritenere che la turbolenza sia sviluppata mediamente con la stessa intensità nei punti ad ugual distanza dalla parete. Indicando con τ_{0m} la *tensione tangenziale media* sul contorno e con $v_{*m} = \sqrt{\tau_{0m}/\rho}$ la corrispondente velocità di attrito, l'equazione logaritmica assume la

forma generale

$$\frac{v}{v_{*m}} = 5,75 \log\left(\frac{y}{y_0}\right) + f\left(\frac{y_0 v_{*m}}{\nu}, r_s, r_f\right) \quad [17.29]$$

dove y è la distanza dalla parete più vicina ed y_0 il valore massimo che tale distanza può assumere nella sezione, come è indicato per le forme trapezia, triangolare, parabolica e circolare nella figura 17.4. Con r_f ed r_s sono indicati parametri adimensionali di scabrezza e di forma.

Detta $v_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$ la velocità di attrito variabile sul contorno, con un procedimento analogo a quello seguito al paragrafo 13.5, dalla [17.29] si ottengono le seguenti forme per la legge di distribuzione della velocità:

regime di parete liscia
$$\frac{v}{v_{*m}} = 5,75 \log\left(\frac{y v_{*m}}{\nu}\right) + b_i \left(\frac{v_*}{v_{*m}}\right) \quad [17.30]$$

regime assol. turbolento
$$\frac{v}{v_{*m}} = 5,75 \log\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) + b_r \left(\frac{v_*}{v_{*m}}\right). \quad [17.31]$$

I parametri b_i e b_r , nelle sezioni di forma qualunque, variano lungo il contorno. Secondo le equazioni [17.30] e [17.31] la *pendenza* delle rette v/v_{*m} in funzione di $\log(y/y_0)$ è invece la stessa su qualunque normale al contorno, indipendentemente dalla forma della sezione: questa posi-

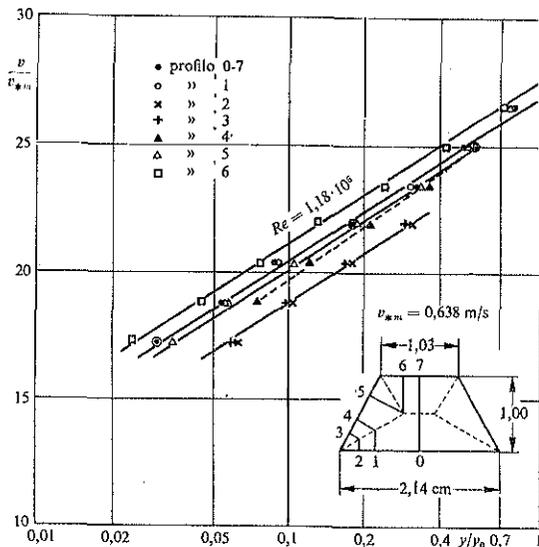


Fig. 17.8. - Misure di velocità di Nikuradse (1930) in un condotto liscio di sezione trapezia.

zione è suggerita dall'esame delle misure sperimentali di velocità, di cui sono riportati alcuni esempi nelle figure 17.8, 17.9, 17.10 e 17.11.

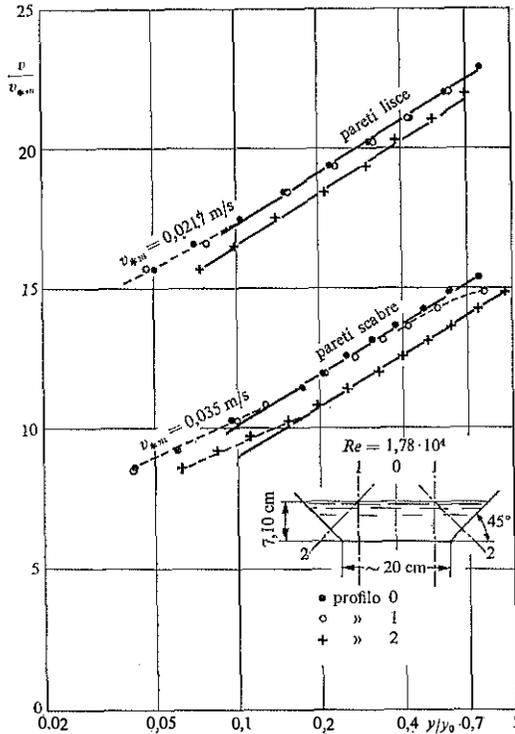


Fig. 17.9. - Misure di velocità di Varwick (1944) in un canale di sezione trapezia con pareti lisce e con pareti scabre.

Nelle sezioni molto larghe la corrente tende a defluire con l'assetto del *moto piano*, lo sforzo tangenziale sul fondo è uniforme e la velocità è massima sul pelo libero, od in prossimità di esso, come mostra la figura 17.12. L'eq. [17.29] si può scrivere allora nella forma

$$\frac{v}{v_*} = \frac{v_{\max}}{v_*} + 5,75 \log\left(\frac{y}{Y}\right)$$

essendo y la distanza dal fondo ed Y la profondità della corrente. Di qui deriva anche

$$\frac{U}{v_*} = \frac{v_{\max}}{v_*} + \frac{5,75}{Y} \int_0^Y \log\left(\frac{y}{Y}\right) dy = \frac{v_{\max}}{v_*} - 2,50.$$

Con queste relazioni si calcola facilmente il valor medio dello scarto quadratico della velocità relativa v/U , espresso dalla

$$\eta = \frac{1}{Y} \int_0^Y \left(\frac{v}{U} - 1 \right)^2 dy = 6,25 \left(\frac{v_*}{U} \right)^2.$$

Poiché nel moto uniforme è $\tau_0 = \gamma R i_f$, e quindi

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{g R i_f},$$

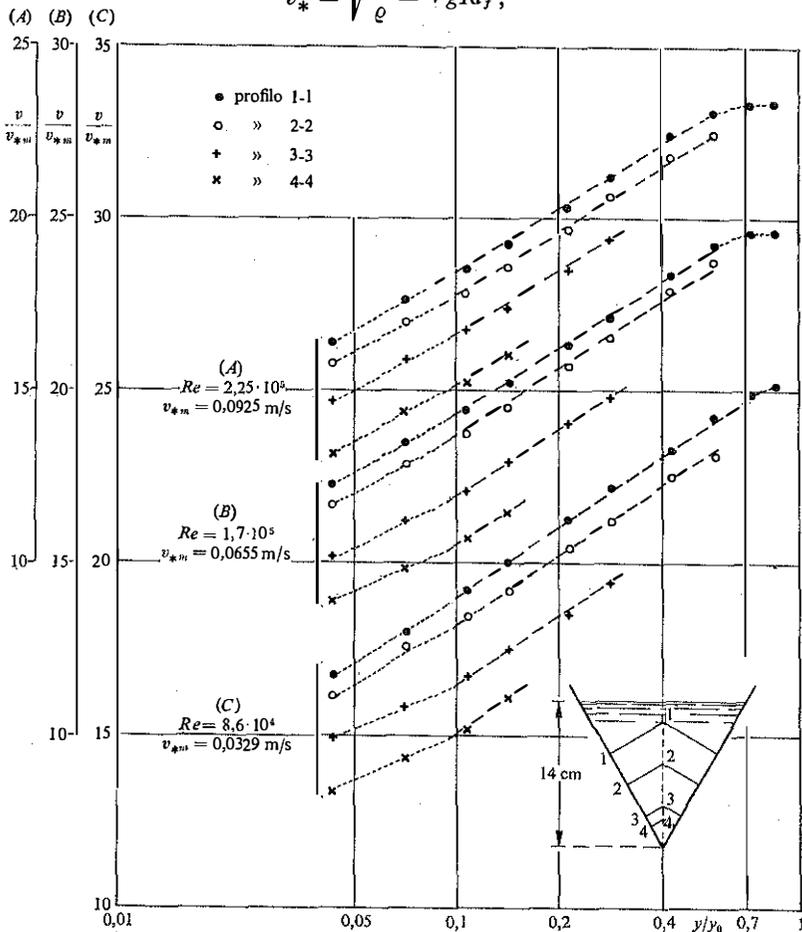


Fig. 17.10. - Misure di velocità di Marchi (1957-59) in un canale di sezione triangolare con pareti scabre ($\epsilon \simeq 0,2$ mm).

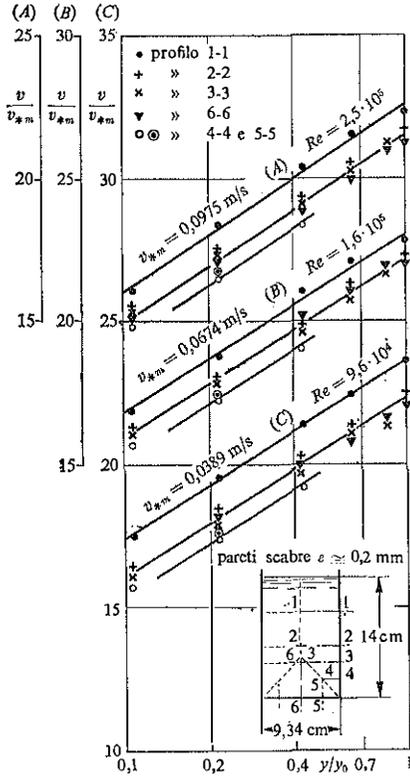


Fig. 17.11. - Misure di velocità di Marchi (1957-59) in un canale di sezione rettangolare con pareti scabre ($\epsilon \approx 0,2 \text{ mm}$).

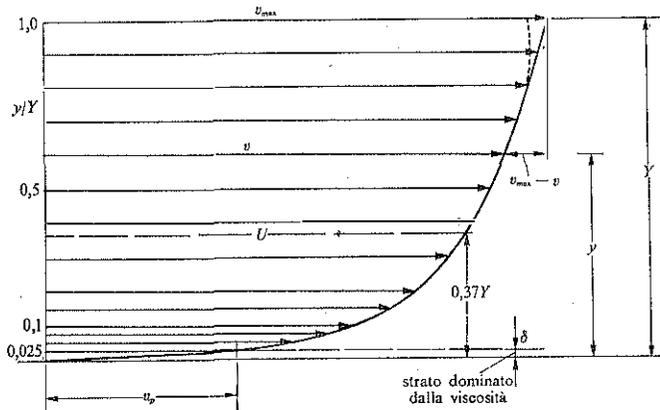


Fig. 17.12. - Distribuzione logaritmica della velocità nel moto piano.

in base all'eq. [17.18] si ha anche

$$\frac{U}{v_*} = C. \quad [17.32]$$

Sostituendo nella precedente espressione di η si ottiene

$$\eta = \frac{6,25}{C^2}$$

che consente una immediata correlazione del coefficiente di resistenza C con i coefficienti di Coriolis

$$\alpha = \frac{\int v^3 d\Omega}{U^3 \Omega} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{\int v^2 d\Omega}{U^2 \Omega}$$

di ragguglio rispettivamente delle portate di energia cinetica e di quantità di moto della corrente.

Infatti, essendo $\int_{\Omega} (v/U - 1) d\Omega = 0$, si ha

$$\alpha = 1 + \frac{3}{\Omega} \int_{\Omega} \left(\frac{v}{U} - 1\right)^2 d\Omega + \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \left(\frac{v}{U} - 1\right)^3 d\Omega \simeq 1 + 3\eta \simeq 1 + \frac{19}{C^2}$$

$$\beta = 1 + \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \left(\frac{v}{U} - 1\right)^2 d\Omega = 1 + \eta \simeq 1 + \frac{6,3}{C^2}.$$

Dato che i valori di C sono ordinariamente compresi fra 25 per canali quasi lisci e 11 per canali fortemente scabri, i valori di α e di β nel moto piano turbolento, in condizioni mediamente uniformi, variano rispettivamente nel campo: $\alpha = 1,03 \div 1,15$; $\beta = 1,01 \div 1,05$. Per sezioni semicircolari o ad esse circoscritte, rettangolari e trapezie, i coefficienti aumentano un poco: per analogia con le sezioni circolari si può assumere un aumento del 20% di $(\alpha - 1)$ e di $(\beta - 1)$.

17.11. Deduzione delle leggi logaritmiche di resistenza.

Partendo dalle leggi logaritmiche di distribuzione della velocità si ricavano le corrispondenti leggi di resistenza operando come si è visto nel paragrafo 13.5.

Tenuto presente che fra la tensione tangenziale media τ_{0m} , il raggio idraulico R e la pendenza del fondo i , sussiste l'equazione

$$\tau_{0m} = \gamma R i,$$

e che da questa deriva la relazione, analoga alla [17.32] del paragrafo precedente,

$$\frac{U}{v_{*m}} = C, \quad [17.33]$$

segue evidentemente

$$C = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \frac{v}{v_{*m}} d\Omega. \quad [17.34]$$

Eseguendo l'operazione [17.34] sulle equazioni [17.30] e [17.31] si può esprimere il risultato nella forma

$$\text{regime di parete liscia} \quad C = 5,75 \log \left(\frac{Re}{C} \right) + B_i'' \quad [17.35]$$

$$\text{regime assol. turbolento} \quad C = 5,75 \log \left(\frac{R}{\varepsilon} \right) + B_r'' \quad [17.36]$$

Per i coefficienti B_i'' e B_r'' conviene fare riferimento ai corrispondenti valori sperimentali $B_{i,c} \cong 0$ e $B_{r,c} \cong 6,46$ della sezione circolare, ottenuti riportando i risultati di Nikuradse nelle forme [17.35] e [17.36].

Le leggi precedenti si possono allora scrivere nella forma

regime di parete liscia

$$C = 5,75 \log \left(\frac{Re f}{C} \right) + B_{i,c} = 5,75 \log \left(\frac{Re f}{C} \right) \quad [17.37]$$

regime assol. turbolento

$$C = 5,75 \log \left(\frac{R f}{\varepsilon} \right) + B_{r,c} = 5,75 \log \left(\frac{13,3 R f}{\varepsilon} \right) \quad [17.38]$$

ricorrendo ancora una volta al coefficiente di forma f .

Per la sezione *rettangolare molto larga* risulta

$$f = 0,824$$

mentre, per la sezione circolare è per definizione $f = 1$.

17.12. Influenza della forma e del pelo libero.

Nelle sezioni aperte non è solo la forma della sezione ma anche la presenza della superficie libera ad avere influenza sulla distribuzione della velocità. L'effetto è reso evidente da una riduzione della velocità sul pelo libero rispetto a quella degli strati sottostanti, come mostra l'esempio

riportato nella figura 17.13. Il massimo di velocità si osserva sperimentalmente in corrispondenza ad un affondamento, rispetto alla superficie libera, variabile fra il 5% ed il 20% della profondità passando da sezioni larghe a sezioni strette.

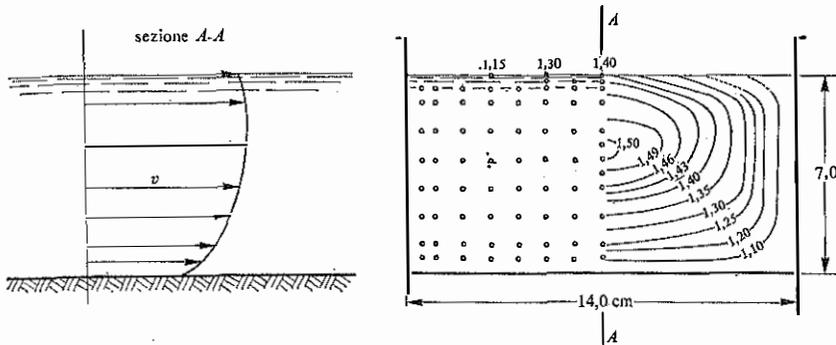


Fig. 17.13. - Misure di velocità, espresse in ms^{-1} , in un canale rettangolare con rapporto $b/Y = 2$.

Questa influenza del pelo libero si riflette sulle leggi di resistenza, nel senso che le costanti d'integrazione non possono essere le stesse della corrispondente sezione chiusa, cioè della sezione che si ottiene aggiungendo alla data la simmetrica rispetto al pelo libero.

Fra le diverse cause che sono state avanzate per giustificare l'effetto del pelo libero sull'assetto cinematico della corrente le più attendibili sembrano essere quelle derivanti dall'anisotropia della turbolenza e dall'incremento di viscosità dello strato pellicolare di confine della fase liquida con l'aeriforme.

La prima causa prevede un aumento delle tensioni tangenziali in vicinanza del pelo libero di una sezione aperta, rispetto alla corrispondente situazione nella sezione chiusa, perché, essendo impedita l'agitazione turbolenta nella direzione perpendicolare alla superficie, tende ad aumentare la componente turbolenta di agitazione trasversale, a parità delle altre condizioni. Questa ipotesi, che è stata suggerita da Cocchi (1958), porta a ritenere l'effetto del pelo libero praticamente nullo sulle sezioni molto larghe e crescente con il diminuire della larghezza. D'altra parte, l'importanza relativa della resistenza dovuta alla fascia prossima al pelo libero diminuisce, in confronto alla resistenza totale, con il diminuire della larghezza di quest'ultimo rispetto al contorno bagnato, e quindi diventa trascurabile nelle sezioni molto strette e profonde. In definitiva è prevedibile che l'influenza del pelo libero sia più sentita nelle sezioni semicircolari e in quelle altrettanto raccolte.

La seconda causa è stata suggerita per spiegare l'effetto del pelo libero rilevato sperimentalmente anche in correnti laminari da Straub, Silberman e Nelson (1956) e recentemente da P. Bartolini (1977). Già Boussinesq (1913), e poi Scriveni (1960) e Slattery (1967) avevano introdotto per l'interfaccia un'equazione costitutiva in cui compare un particolare coefficiente di viscosità tangenziale. L'ipotesi che lo stato di tensione al quale è soggetta la superficie libera possa provocare un'alterazione della resistenza viscosa della porzione fluida che costituisce questa membrana è stata ripresa ed utilizzata da Becchi e Seminara (1971) per interpretare l'influenza del pelo libero sulla distribuzione di velocità da loro rilevata sperimentalmente in correnti laminari di sezione semicircolare. I risultati sono stati incoraggianti sebbene il comportamento viscoso della superficie non sembri rientrare in uno schema lineare.

Comunque agiscano, o interagiscano, le cause predette, si può dire che il pelo libero esercita, in misura diversa secondo la forma della sezione, una funzione di contorno paragonabile, sia pure in modo molto attenuato, a quella di una parete.

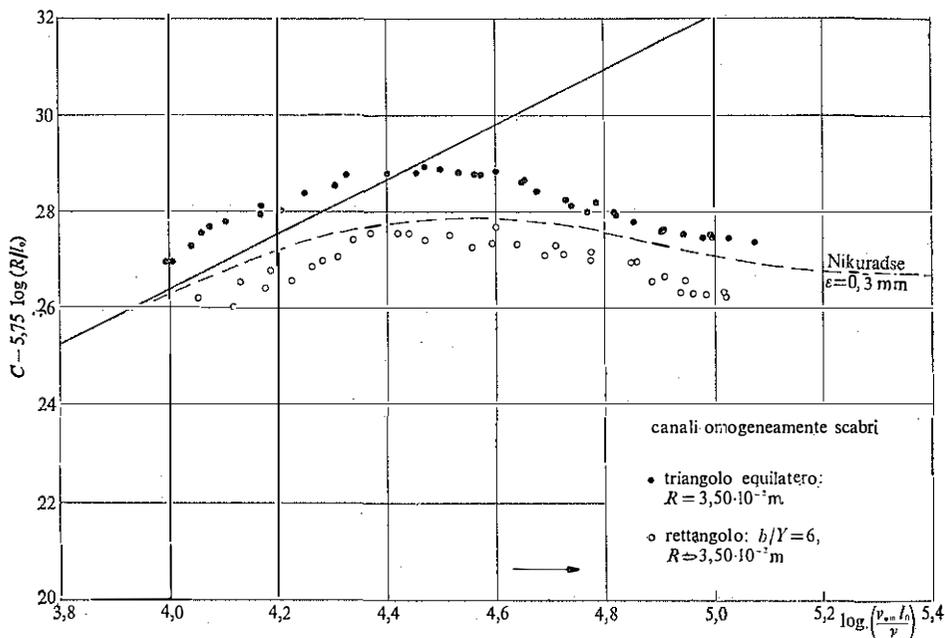


Fig. 17.14. - Esperienze su canali con scabrezza artificiale omogenea di sezioni equilatera e rettangolare larga. Lunghezza convenzionale $l_0 = 1 \text{ m}$.

La sua influenza sul moto della corrente può quindi essere interpretata, globalmente, attraverso una variazione del coefficiente f , già introdotto nelle leggi di resistenza. Si assume così che tale coefficiente non dipenda solo dalla forma della corrispondente sezione chiusa, ma risenta anche dell'effetto del pelo libero, e sia quindi un *coefficiente caratteristico della forma della sezione aperta*.

A questo scopo, una serie di misure del coefficiente di resistenza in moto uniforme è stata eseguita da Marchi (1956-1959) su canali artificialmente scabri con sabbie omogenee. Nel diagramma della figura 17.14 sono riportati, a titolo di esempio, i risultati relativi a una sezione triangolare equilatera e ad una rettangolare larga con lo stesso raggio idraulico. Nella figura 17.15, la sostituzione di fR al posto di R , con i valori di f riportati nella figura in relazione alle forme predette di sezione e ad altre indicate nella stessa figura, ha determinato l'addensamento dei punti sperimentali su una curva interpolare praticamente unica con andamento simile a quello delle curve a scabrezza costante ricavate dalle esperienze di Nikuradse nei tubi circolari omogeneamente scabri.

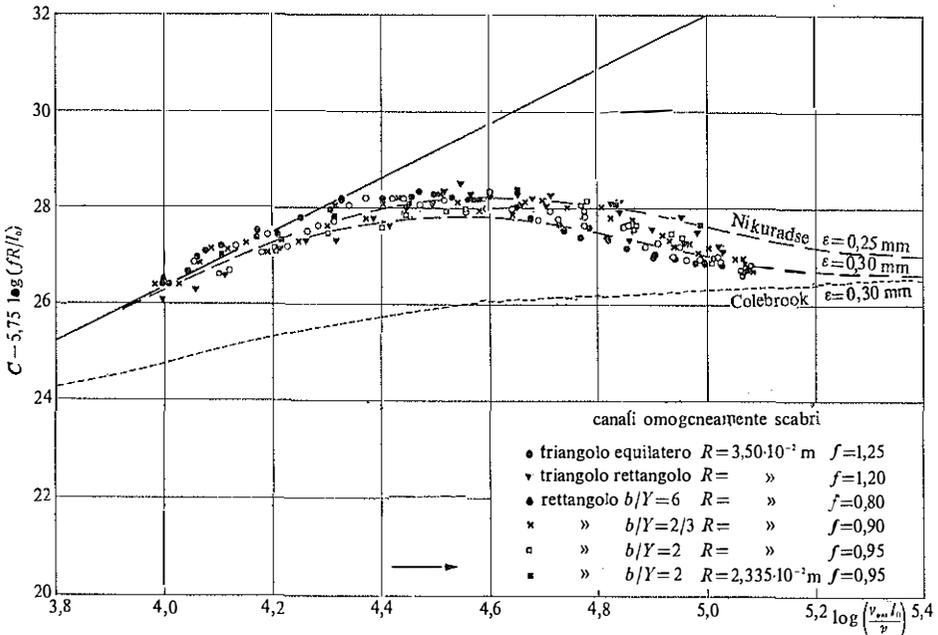


Fig. 17.15. - Esperienze su canali con scabrezza artificiale omogenea. Risultato dell'applicazione del coefficiente di forma f con i valori indicati. Lunghezza convenzionale $l_0 = 1 \text{ m}$.

Così pure nel regime intermedio fra quello di parete liscia e quello di parete « naturalmente » scabra, esperienze eseguite da Marchi (1956) su canali con pareti di cemento di sezione trapezia e triangolare hanno for-

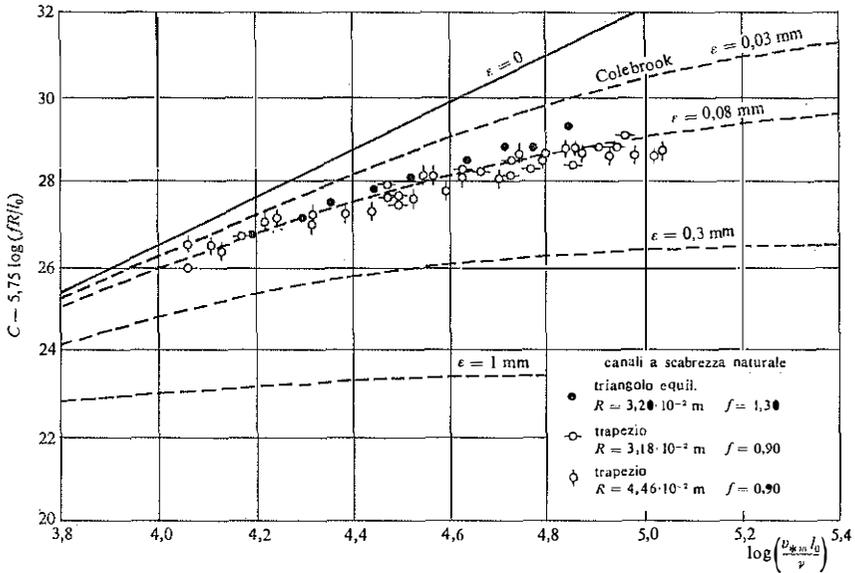


Fig. 17.16. — Esperienze su canali con scabrezza naturale di cemento liscio. Risultato dell'applicazione del coefficiente di forma f con i valori indicati. Lunghezza convenzionale $l_0 = 1 \text{ m}$.

nito i risultati riportati nella figura 17.16 con la stessa tecnica adottata nella figura 17.15. Si osserva che attribuendo al coefficiente di forma f i valori riportati nella stessa figura 17.16 la curva interpolare approssima bene l'andamento delle curve di Colebrook tracciate con valori costanti della scabrezza. Nella tabella 17.2 sono già stati riportati i valori consigliabili del coefficiente f per diverse forme di canale.

17.13. Alvei con sezioni composite o con scabrezza eterogenea.

La sezione trasversale dei corsi d'acqua a pelo libero è spesso costituita da parti chiaramente diverse fra loro per la forma, la profondità e talvolta anche per la scabrezza. Negli alvei naturali la parte centrale, più profonda, costituisce il letto di magra, mentre le parti laterali si estendono

sopra le aree «golenali» fino agli argini maestri, destinati al contenimento delle portate di piena.

Il deflusso in queste condizioni avviene con velocità differenti nelle varie parti ed il calcolo della portata totale si esegue valutando separatamente e sommando i contributi delle singole sottosezioni in cui si può suddividere l'intera sezione. La separazione si fa di solito mediante rette verticali e di ogni sottosezione si calcola il raggio idraulico assumendo come perimetro bagnato il solo contorno solido. Nota la scabrezza di tale contorno, si valuta la portata con le formule del moto uniforme, restando invariata la pendenza del fondo per le varie parti della sezione.

Altre volte può accadere che in una sezione compatta la scabrezza sia diversa su alcune parti del contorno, ad esempio sulle sponde rispetto al fondo. È opportuno allora valutare una scabrezza equivalente distribuita uniformemente sul perimetro.

A questo scopo sono stati proposti diversi metodi di calcolo, che si riferiscono tutti ad una immaginaria suddivisione dell'area Ω della sezione in N parti, aventi i perimetri bagnati B_1, B_2, \dots, B_N , su ciascuno dei quali è noto il valore del parametro di scabrezza. Si opera poi sulla base di adatte supposizioni. Uno dei procedimenti più seguiti è quello suggerito da Horton (1933) ed Einstein (1934): esso consiste nell'assumere che la velocità media sia la stessa nelle singole parti in cui è divisa la sezione e quindi coincida con la velocità media globale. Impiegando l'equazione di Manning-Gauckler-Strickler s'impone perciò

$$\frac{U}{\sqrt{i_j}} = k_s \left(\frac{\Omega}{B} \right)^{\frac{2}{3}} = k_{s_i} \left(\frac{\Omega_i}{B_i} \right)^{\frac{2}{3}} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

essendo

$$\Omega = \sum_1^N \Omega_i \quad B = \sum_1^N B_i.$$

Sostituendo Ω_i nella sommatoria per mezzo dell'equazione precedente, si ottiene il parametro di scabrezza equivalente

$$k_s = \left(\frac{B}{\sum_1^N \frac{B_i}{k_{s_i}^{\frac{3}{2}}}} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Se si vuole utilizzare l'altezza ε di Nikuradse come parametro di scabrezza, conviene approssimare la legge logaritmica con una legge di potenze $(R/\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$; la scabrezza equivalente, uniforme su tutto il contorno,

risulta allora

$$\varepsilon = \left(\frac{\sum_{i=1}^N B_i \varepsilon_i^4}{B} \right)^{\frac{1}{4}}$$

come diretta conseguenza della relazione precedente, essendo k_g e k_{g_i} proporzionali rispettivamente ad ε^{-4} e ad ε_i^{-4} .

ESEMPI

Esempio 17.1

Tracciamento del grafico, in funzione della profondità, delle seguenti grandezze relative alla sezione della corrente cilindrica rappresentata nella fig. 17.17: carico specifico $E(Y)$ con la portata $Q = 150 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ e portata $Q(Y)$ per dato carico $E = 4,60 \text{ m}$.

Calcolo delle profondità critiche relative ai predetti valori di portata e, rispettivamente, di carico specifico.

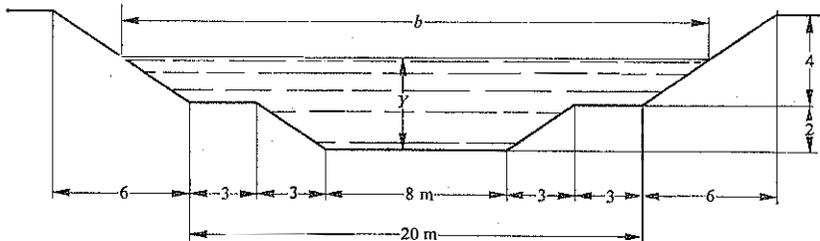


Fig. 17.17. - Sezione di una corrente cilindrica.

La larghezza del pelo libero b è data dalle relazioni

$$b = \begin{cases} (8 + 3Y) & \text{m per } Y < 2 \text{ m} \\ [20 + 3(Y - 2)] & \text{m per } Y > 2 \text{ m} \end{cases}$$

e l'area Ω si calcola con le

$$\Omega = \begin{cases} \frac{1}{2}(8 + b)Y & \text{m}^2 \text{ per } Y \leq 2 \text{ m,} \\ \left[\frac{1}{2}(20 + b)(Y - 2) + 22 \right] & \text{m}^2 \text{ per } Y > 2 \text{ m.} \end{cases}$$

Il grafico della funzione $\Omega(Y)$ è rappresentato nella fig. 17.18, insieme con le funzioni

$$\text{carico specifico} \quad E = Y + \frac{Q^2}{2g\Omega^2} \quad \text{per } Q = 150 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$$

$$\text{e portata} \quad Q = \Omega \sqrt{2g(E - Y)} \quad \text{per } E = 4,60 \text{ m}$$

calcolate con i precedenti valori di Ω .

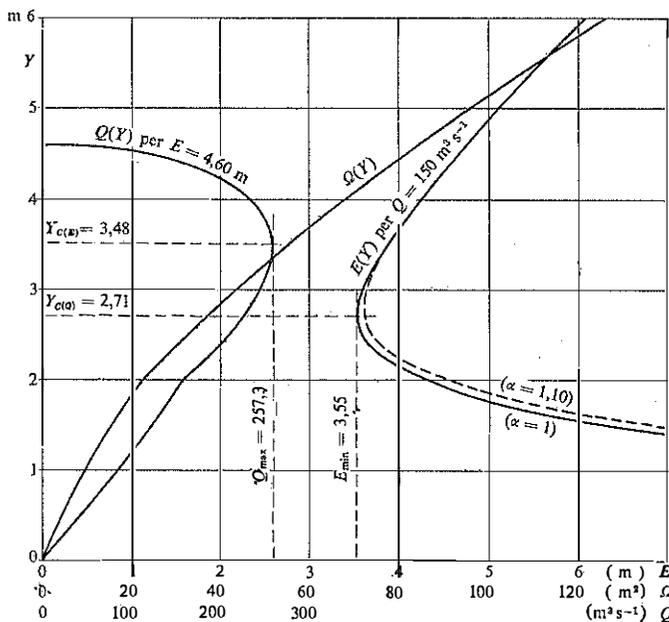


Fig. 17.18. - Le funzioni $E(Y)$ per $Q = 150 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ e $Q(Y)$ per $E = 4,60 \text{ m}$ relative alla sezione della corrente cilindrica di fig. 17.17.

A titolo indicativo nella stessa fig. 17.18 è riportato tratteggiato l'andamento della funzione carico specifico

$$E = Y + \alpha \frac{Q^2}{2g\Omega^2}$$

calcolata con il valore $\alpha = 1,10$ del coefficiente di ragguglio dell'altezza cinetica.

La profondità critica relativa alla portata $Q = 150 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ si ottiene dalla

$$\frac{\Omega^3}{b} = \frac{150^2}{g} = 2293,6 \text{ m}^5$$

e risulta

$$[Y_c]_{Q=150} = 2,713 \text{ m};$$

la profondità critica relativa al carico $E = 4,60 \text{ m}$ è data dall'equazione

$$Y + \frac{\Omega}{2b} = 4,60 \text{ m}$$

e risulta

$$[Y_c]_{E=4,60} = 3,478 \text{ m}.$$

Alla profondità $Y_c = 2,713 \text{ m}$ corrisponde il carico $E = 3,55 \text{ m}$, minimo con la portata data $Q = 150 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$; mentre alla profondità $Y_c = 3,478 \text{ m}$ corrisponde la portata $Q = 257,3 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, massima con il carico assegnato $E = 4,60 \text{ m}$.

Esempio 17.2

Calcolo della portata di moto uniforme che defluisce in un canale cilindrico, di sezione trapezia, con rivestimento di cemento liscio in ottime condizioni; larghezza al fondo $2,10 \text{ m}$, pendenza delle sponde $3/2$, profondità $0,95 \text{ m}$ e pendenza del fondo $1,0\%$.

Dati:

altezza d'acqua	$Y = 0,95 \text{ m}$
larghezza del fondo	$b_0 = 2,10 \text{ m}$
inclinazione delle sponde	$\beta = \arctg(3/2) = 56^\circ,3$
larghezza del pelo libero	$b = 2,10 + 2(2/3)0,95 = 3,37 \text{ m}$
larghezza bagnata delle sponde	$l_s = 0,95/\sin\beta = 1,14 \text{ m}$
area della sezione	$\Omega = \frac{1}{2}(2,10 + 3,37)0,95 = 2,60 \text{ m}^2$
perimetro bagnato	$B = 2,10 + 2 \times 1,14 = 4,38 \text{ m}$
raggio idraulico	$R = 2,60/4,38 = 0,59 \text{ m}$
coefficiente di forma	$f = 0,90 \quad (fR = 0,53 \text{ m})$
scabrezza equivalente	$\varepsilon = 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
pendenza del fondo	$i_f = 0,001$

Il grafico della fig. 17.6, con i dati $fR = 0,53 \text{ m}$, $\varepsilon = 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ed $i_f = 0,001$, fornisce il valore $C = 24,1$ (corrispondente a $\chi = C \cdot \sqrt{g} = 75,5 \text{ m}^{\frac{1}{2}} \text{ s}^{-1}$) nel campo di debole influenza della pendenza del fondo, ossia di Re . Trascurando tale influenza si troverebbe, nella tab. 17.3, il valore $C = 24,4$, corrispondente a $\chi = 76,4 \text{ m}^{\frac{1}{2}} \text{ s}^{-1}$.

Con altre formule, assumendo i valori dei parametri di scabrezza consigliati per il canale in esame e riportati qui sotto, si ottengono i risultati:

Bazin	$\gamma_B = 0,10$	$\chi = 74,4 \text{ m}^{\frac{1}{2}} \text{ s}^{-1}$
Gauckler-Strickler	$k_S = 85$	$= 77,8 \quad \gg$
Manning	$n = 0,012$	$= 76,3 \quad \gg$

con una differenza massima fra loro del 4% .

Assumendo il valore $C = 24,1$, dall'equazione del moto uniforme risulta

$$U = 24,1 \sqrt{g \cdot 0,59 \times 0,001} = 1,833 \text{ ms}^{-1},$$

$$Q = 2,60 \times 1,833 = 4,767 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

Con le altre formule si otterrebbero i risultati che seguono (con l'indicazione delle differenze dal precedente)

Bazin	$Q = 4,699 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$	- 1,4%
Gauckler-Strickler	$Q = 4,916 \text{ »}$	+ 3,1%
Manning	$Q = 4,819 \text{ »}$	+ 1,1%

Il valor medio fra i quattro valori calcolati di Q è $4,800 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, con scarti massimi - 2,10% (Bazin) e + 2,35% (Gauckler-Strickler). Calcolando χ con fR al posto di R secondo la [17.26], si otterrebbe $Q = 4,829 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ con scarto + 0,6%.

Esempio 17.3

Calcolo della profondità richiesta per il deflusso in moto uniforme della portata $Q = 7,45 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ in un canale rettangolare, largo 3,00 m avente pareti di cemento in condizioni di servizio corrente e pendenza del fondo $i_f = 3\%$.

L'equazione del moto uniforme si può scrivere nella forma

$$C\Omega\sqrt{gR} = \frac{Q}{\sqrt{i_f}} = \frac{7,45}{\sqrt{0,003}} = 136 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

Nel diagramma logaritmico della fig. 17.19 è rappresentato l'andamento della funzione $C\Omega\sqrt{gR} = f(Y)$, ottenuto assumendo per il parametro di scabrezza $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, per il coefficiente di forma $f = 0,90$ e per la profondità i valori 0,6-0,8-1,0-1,2 m, come risulta dal quadro che segue.

Y (m)	Ω (m ²)	B (m)	R (m)	fR (m)	C (tab. 17.3)	$C\Omega\sqrt{gR}$ (m ³ s ⁻¹)	$R\frac{3}{2}\Omega$ (m ³)
0,60	1,80	4,20	0,429	0,39	18,7	69,1	1,024
0,80	2,40	4,60	0,521	0,47	19,1	103,6	1,554
0,90	2,70	4,80	0,562	0,51	19,25	122,0	1,839
1,00	3,00	5,00	0,600	0,54	19,4	141,2	2,134
1,20	3,60	5,40	0,667	0,60	19,7	181,4	2,748

Interpolando, graficamente o numericamente, il valore $C\Omega\sqrt{gR} = 136 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ tra i precedenti tabellati si ottiene

$$Y_v = 0,97 \text{ m}.$$

La rappresentazione della fig. 17.19 mette in evidenza la linearità, in campo logaritmico, della $C\Omega\sqrt{gR} = f(Y)$ e, tenuto conto dell'equazione del moto uniforme, assicura quindi la possibilità di approssimare la funzione

$$\frac{Q}{\sqrt{i_f}} = f(Y)$$

con una scala di deflusso del tipo

$$Q = k\Omega^n = k_1 Y^m.$$

L'esponente m si calcola con la relazione

$$\log\left(\frac{Q_1}{Q_2}\right) = \log\left(\frac{C_1\Omega_1\sqrt{R_1}}{C_2\Omega_2\sqrt{R_2}}\right) = m \log\left(\frac{Y_1}{Y_2}\right)$$

nella quale Q_1 , Y_1 e Q_2 , Y_2 sono coppie di valori di portata e di profondità fra loro corrispondenti in moto uniforme. Nel caso in esame si ottiene mediamente

$$m = 1,39$$

per $0,80 \text{ m} \leq Y \leq 1,20 \text{ m}$.

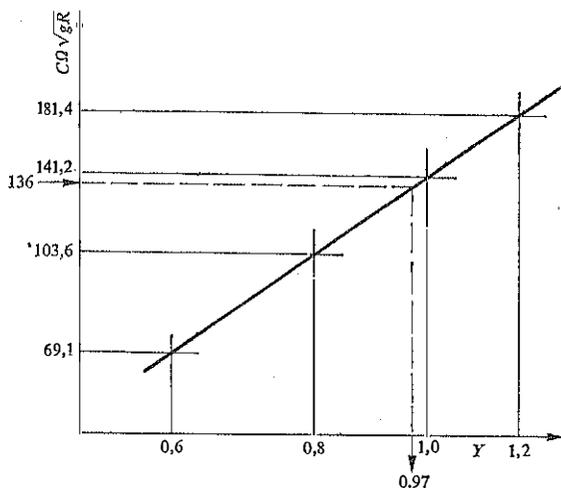


Fig. 17.19. - Diagramma logaritmico di $C\Omega\sqrt{gR}$ in funzione della profondità Y nell'esempio 17.3.

Volendo impiegare, per il calcolo della profondità di moto uniforme, la formula di Gauckler-Strickler (o di Manning) si può scrivere

$$k_g R^{\frac{2}{3}} \Omega = \frac{Q}{\sqrt{i_f}} = 136 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$$

e con $k_s = 65$ (corrispondente a $n = 1/k_s \cong 0,015$ di Manning)

$$R^{5/3} \Omega = \frac{136}{65} = 2,092 \text{ m}^5$$

ossia

$$R^{5/3} \Omega = \frac{\Omega^5}{B^5} = \frac{(3,00 Y_u)^5}{(3,00 + 2Y_u)^5} = 2,092 \text{ m}^5;$$

da questa relazione, oppure interpolando il valore 2,092 fra quelli riportati nell'ultima colonna del quadro precedente, si ottiene

$$Y_u = 0,99 \text{ m}$$

con un'approssimazione del 2% rispetto al calcolo precedente.

Esempio 17.4

Calcolo della larghezza al fondo e della profondità di un canale trapezio scavato in terra ordinaria, con erbe basse, sponde inclinate di 45° , pendenza del fondo 0,7‰ e portata defluente $Q = 1,80 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$. Si adotti la soluzione che, a parità di area della sezione, ha il minimo contorno bagnato ed è quindi la « più conveniente sotto l'aspetto idraulico ».

Dalle caratteristiche geometriche dell'alveo (cfr. paragrafo 17.5)

$$\Omega = b_0 Y + Y^2 \operatorname{tg} \theta$$

$$B = b_0 + 2Y/\cos \theta$$

imponendo le condizioni di costanza dell'area e di minimo del contorno bagnato

$$d\Omega = Y db_0 + (b_0 + 2Y \operatorname{tg} \theta) dY = 0$$

$$dB = db_0 + 2 dY/\cos \theta = 0$$

si ottiene

$$\frac{1}{2}(b_0 + 2Y \operatorname{tg} \theta) \cos \theta = Y$$

od anche, essendo la larghezza del pelo libero $b = b_0 + 2Y \operatorname{tg} \theta$,

$$\frac{1}{2} b \cos \theta = Y;$$

tale relazione mostra che le sponde devono avere una distanza dall'asse del pelo libero pari alla profondità, ossia il trapezio dev'essere *circoscritto ad una semicirconferenza di raggio Y*.

Nel caso in esame, essendo $\theta = 45^\circ$ ed indicando con Y_u la profondità del moto uniforme, si ha

$$\frac{\sqrt{2}}{4} (b_0 + 2Y_u) = Y_u$$

da cui

$$b_0 = 0,83 Y_u$$

e quindi $\Omega = 1,83 Y_u^2$, $B = 3,66 Y_u$ ed

$$R = \frac{1}{2} Y_u$$

risultato, quest'ultimo, che sussiste *qualunque sia l'angolo θ* .

L'equazione del moto uniforme diventa

$$\frac{Q}{\sqrt{i_f}} = 1,83 C Y_u^2 \sqrt{\frac{1}{2} g Y_u}$$

ossia

$$68,03 = 4,053 C Y_u^{\frac{5}{2}}$$

Assumendo $\varepsilon = 70$ mm ed $f = 0,95$ e calcolando C con la formula logaritmica [17.24], si ottiene rapidamente, per tentativi:

$$Y_u = 1,16 \text{ m}$$

cui corrisponde una larghezza del fondo $b_0 = 0,83 \times 1,16 = 0,96$ m.

In pratica, tenendo conto del fatto che è necessario assicurare all'alveo un « franco » al di sopra dell'altezza d'acqua e che il costo dello scavo aumenta in certa misura con la profondità, si progettano i canali di norma con larghezze maggiori, e quindi altezze minori, di quelle corrispondenti alla soluzione idraulica più conveniente.

Esempio 17.5

Un corso d'acqua scorre in un alveo costituito da una parte centrale, trapezia, larga al fondo 4,10 m e sponde inclinate 1/1 fino ad un'altezza di 2,05 m e da due aree golenali laterali larghe ciascuna 5,00 m e con sponde inclinate 2/3 (v. fig. 17.20). L'alveo centrale è rivestito con blocchi di pietra naturale ben sistemati ($\varepsilon = 30$ mm), mentre le golene sono in terra regolarizzata e ricoperta di erba ($\varepsilon = 70$ mm). La pendenza del fondo è del 3‰.

Calcolare la portata di moto uniforme con un'altezza d'acqua di 1 m sulle golene.

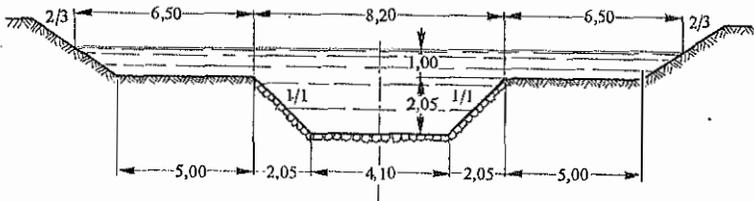


Fig. 17.20. - Sezione di corso d'acqua con contorno composto di parti a differente scabrezza.

Indichiamo con l'apice primo le caratteristiche dell'alveo centrale rivestito e con l'apice secondo quelle di ciascuna sezione golenale. Si usa la tabella 17.3 per il calcolo del coefficiente di resistenza.

Alveo rivestito:

$$Q' = \frac{1}{2}(4,10 + 8,20)2,05 + 8,20 \times 1,00 = 20,81 \text{ m}^3$$

$$B' = 4,10 + \sqrt{2} \times 2,05 \cdot 2 = 9,90 \text{ m}$$

$$R' = 2,10 \text{ m}, \quad f' = 0,90, \quad \varepsilon = 30 \text{ mm},$$

per cui:

$$C' = 16,8.$$

Sezione golenale

$$Q'' = \frac{1}{2}(5,00 + 6,50)1,00 = 5,75 \text{ m}^3$$

$$B'' = 5,00 + 1,00(\sqrt{13}/2) = 6,80 \text{ m}$$

$$R'' = 0,85 \text{ m}, \quad f'' = 0,80, \quad \varepsilon = 70 \text{ mm},$$

per cui:

$$C'' = 12,1.$$

La portata in condizioni di moto uniforme è data dalla

$$\begin{aligned} Q &= \sqrt{g i_f} (C' \Omega' \sqrt{R'} + 2C'' \Omega'' \sqrt{R''}) = \\ &= 0,1715(506,6 + 128,3) = 108,9 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}. \end{aligned}$$

Da notare che, mentre l'area complessiva delle sezioni golenali è più del 50% dell'area totale, il corrispondente contributo al deflusso risulta appena del 20% della portata totale.

Riferimenti citati.

A.S.C.E., *Friction Factors in Open Channels*, Journal of the Hydraulics Division, Vol. 89, n. HY2, 1963.

BARTOLINI, P., *Meccanica*, Vol. 12, n. 4, 1977.

BAZIN, H., *Mém. prés. div. savants à l'Acad. des Sciences*, Vol. 19, Paris, 1865. — *Ann. des ponts et chaussées*, Vol. 7, 1897.

BECCHI, I. e SEMINARA, G., *Atti del 1° Congresso AIMETA*, Udine, 1971.

BOUSSINESQ, M. J., *Comptes rendues, Academie des Sciences*, Paris, 1913.

COCCHI, G., *Atti Acc. delle Scienze di Bologna*, Serie XI, Tomo V, 1958.

GANGUILLET, E. e KUTTER, W. R., *Zeit. d. österreichischen Ing.-und Architekten Vereines*, Vol. 21, nn. 1, 2, 3, Wien, 1869.

GAUCKLER, PH., *Ann. des ponts et chaussées*, Vol. 15, sez. 4, 1868.

KEULEGAN, G. H., *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, Vol. 21, Res. Paper RP1151, 1938.

MANNING, R., *Trans. Institution of Civil Engineers of Ireland*, Vol. 20, Dublin, 1891.

— *Trans. Institution of Civil Engineers of Ireland*, suppl. Vol. 24, Dublin, 1895.

- MARCHI, E., *La Ricerca Scientifica*, n. 8, 1956.
— *Atti V Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche*, Torino, 1957.
— *La ricerca scientifica*, n. 12, 1959.
— *L'Energia Elettrica*, Vol. XXXVIII, nn. 4, 5, 1961.
- NIKURADSE, J., *Ing. Archiv.*, Vol. 1, 1930.
- SCRIVEN, L. E., *Chem. Eng. Science*, Vol. 98, n. 12, 1960.
- SLATTERY, J. C., *I and E.C. Fundamentals*, 6, 1, 1967.
- STRAUB, L., SILBERMAN, E. e NELSON, H., *Proc. A.S.C.E., Eng. Mech. Div.*, Paper 1031, EM3, 1956.
- STRICKLER, A., *Mitteilungen des eidgenössischen Amtes für Wasserwirtschaft*, n. 16, Bern, 1923.
- VARWICK, F., *Dissertation T.H. Dresden*, 1944. Vedi anche KIRSKHMER, O.: *Rev. Gen. de l'Hydraulique*, n. 51, 1949.

CAPITOLO DICIOTTESIMO

MOTO PERMANENTE DELLE CORRENTI A PELO LIBERO

18.1. Equazioni del moto permanente gradualmente variato.

Il moto permanente di una corrente a pelo libero quasi cilindrica prende anche il nome di *moto gradualmente variato* perché è caratterizzato da variazioni di forma, ed eventualmente di direzione, così lente da mantenere nelle singole sezioni le linee di corrente sensibilmente rettilinee e parallele fra loro.

In queste condizioni la pressione varia con legge idrostatica su ciascuna sezione normale all'asse della corrente. Con le usuali modeste pendenze del fondo tali sezioni si possono confondere con sezioni verticali (cfr. il paragrafo 17.1).

L'equazione di continuità delle correnti monodimensionali ricavata nel paragrafo 16.1,

$$\frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} + \frac{\partial(\rho \Omega)}{\partial t} = 0,$$

nelle condizioni di *moto permanente* e di *densità costante*, alle quali ci si riferisce in questo capitolo, assume la forma

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0$$

ossia

$$Q = \Omega U = \text{cost} \quad [18.1]$$

con l'area Ω della sezione e la velocità media U variabili lungo l'asse della corrente.

L'equazione dinamica, che deriva dall'applicazione del teorema della quantità di moto ad un tronco elementare di corrente, si può dedurre dall'equazione generale del moto vario ricavata nel paragrafo 16.1

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \int \frac{dp}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} \right) = -\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\tau_0}{\gamma R},$$

dove il significato dei simboli è quello consueto; si noti che z indica la quota di un punto generico della sezione, mentre si userà il simbolo z_f per contrassegnare la quota del fondo.

Imponendo le condizioni predette, di densità costante del fluido e di permanenza del moto, si ottiene

$$\frac{d}{ds} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} \right) = -\frac{\tau_0}{\gamma R}. \quad [18.2]$$

Tenuto conto che la distribuzione della pressione in ogni sezione è idrostatica, si può scrivere

$$z + \frac{p}{\gamma} = z_f + Y = h(s)$$

essendo Y la profondità nella sezione considerata ed h il relativo carico piezometrico.

Il trinomio

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} = z_f + Y + \frac{U^2}{2g} = h + \frac{U^2}{2g} \quad [18.3]$$

rappresenta il *carico totale* (od. *effettivo*) H della corrente nella sezione considerata, avendo assunto una velocità uniforme nella sezione con valore pari al valore medio U , conformemente a quanto si è detto nel paragrafo 17.1.

L'equazione del moto permanente si può scrivere quindi nella forma

$$-\frac{dH}{ds} = \frac{\tau_0}{\gamma R} = j. \quad [18.4]$$

Per quanto riguarda la cadente j del carico effettivo, essa si valuta con le espressioni consigliate per il calcolo della perdita di carico nel moto uniforme, assumendo che, come in quel caso, gli sforzi tangenziali sul contorno dipendano solo dalle condizioni della parete, dalla forma della sezione e dalla velocità media. Si pone così

$$j = \frac{U^2}{\chi^2 R} = \frac{U^2}{g C^2 R} = \frac{\lambda}{4R} \frac{U^2}{2g} \quad [18.5]$$

a seconda che s'impieghi il coefficiente di Chézy χ , oppure i coefficienti adimensionali di resistenza C o λ . Le formule per la valutazione di tali coefficienti in funzione della scabrezza della parete e della forma della sezione sono quelle riportate nel capitolo 17, con l'avvertenza che i valori dei coefficienti variano gradualmente da sezione a sezione cambiando l'area Ω ed il perimetro bagnato B , e conseguentemente il raggio idraulico e la scabrezza relativa. Il numero di Reynolds varia anch'esso, ma la sua influenza sulle leggi di resistenza delle correnti a pelo libero è di norma trascurabile.

18.2. Corsi d'acqua naturali.

Il problema del tracciamento del profilo della superficie libera di un corso d'acqua naturale in moto permanente con una data portata Q si risolve con procedimenti di calcolo numerico.

L'operazione richiede preliminarmente un rilievo dettagliato dell'alveo per suddividere il corso d'acqua in tronchi Δs , più o meno brevi, ma tali da poter confondere i valori medi della sezione e della velocità in ciascun tronco con i valori ad un estremo. Anche la natura dell'alveo deve conservarsi, in modo accettabile, in ciascun tronco. Eventuali variazioni rapide di forma faranno parte di tronchi speciali nei quali le perdite dovranno essere valutate tenendo conto anche degli effetti vorticosi localizzati.

Eseguita la suddivisione, è necessario il rilievo dettagliato delle caratteristiche geometriche di tutte le sezioni di separazione dei vari tronchi.

Siano (i) ed $(i + 1)$ due sezioni consecutive, distanti $\Delta s_{i,i+1}$ in asse, nella prima delle quali siano note tutte le grandezze idrauliche. La variazione di carico totale $\Delta H_{i,i+1}$ fra le due sezioni si può calcolare con l'eq. [18.4], trasformata alle differenze finite

$$\Delta H_{i,i+1} = - [j]_i \Delta s_{i,i+1}$$

calcolando il valore delle perdite con i dati della sezione (i) .

Tenuto conto dell'espressione [18.5] delle perdite e dell'equazione di continuità, l'equazione precedente diventa

$$\Delta H_{i,i+1} = - \frac{Q^2}{g} \cdot \frac{1}{[\Omega^2 C^2 R]_i} \Delta s_{i,i+1} \quad [18.6]$$

dove $\Delta H_{i,i+1}$ ha evidentemente valori negativi se si procede verso valle, ossia con $\Delta s_{i,i+1} > 0$.

Ottenuto così il carico totale $H_{i+1} = H_i + \Delta H_{i,i+1}$ nella sezione $(i+1)$, si determina il carico piezometrico h_{i+1} , che rappresenta la quota della superficie libera rispetto ad un prefissato piano di riferimento orizzontale (fig. 18.1), risolvendo l'equazione

$$H_{i+1} = h_{i+1} + \frac{Q^2}{2g\Omega_{i+1}^2} \quad [18.7]$$

nota la funzione $\Omega = \Omega(h)$ nella sezione $(i+1)$, come in tutte le altre sezioni prescelte. Dal carico piezometrico si può ovviamente dedurre la profondità, conoscendo la quota del fondo della sezione. Il profilo della superficie libera viene anche chiamato, secondo una denominazione tradizionale, *profilo di rigurgito*.

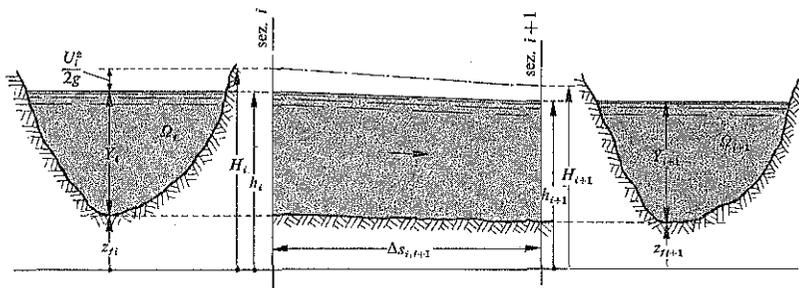


Fig. 18.1. - Tronco di corrente quasi cilindrica.

L'eq. [18.7] ammette due soluzioni, una nel campo delle correnti lente, ossia con profondità maggiori della critica, l'altra nel campo delle correnti veloci. Ciò non comporta indeterminazioni perché il procedimento di calcolo è valido solo nell'ambito di variazioni graduali della corrente, di variazioni dunque che non possono modificarne lo stato nel passaggio dalla sezione (i) alla $(i+1)$; la soluzione da assumere è evidentemente definita dalle condizioni esistenti nella sezione di partenza. Se il risultato approssima la quota corrispondente allo stato critico per la portata data, e nello stesso tratto non è critica la pendenza del fondo, il calcolo non può proseguire perché aumenta fortemente la pendenza del pelo libero e l'ipotesi premissa di corrente quasi-cilindrica non è più accettabile. Si verificano in tal caso fenomeni di risalto per i quali si rimanda ai paragrafi 18.10 e seguenti.

18.3. Correnti in alveo cilindrico.

Con l'introduzione, fatta nel paragrafo 17.2, del carico specifico $E = Y + U^2/2g$, per cui $H = z_f + E$, l'equazione del moto permanente gradualmente variato

$$\frac{dH}{ds} = -j$$

dove

$$j = U^2/gC^2R = Q^2/gC^2\Omega^2R$$

(se s'impiega il coefficiente adimensionale di attrito C , come faremo sempre in seguito) diventa

$$\frac{dz_f}{ds} + \frac{dE}{ds} = -j;$$

da questa, essendo $-dz_f/ds = i_f$, la pendenza del fondo, segue

$$\frac{dE}{ds} = i_f - j. \quad [18.8]$$

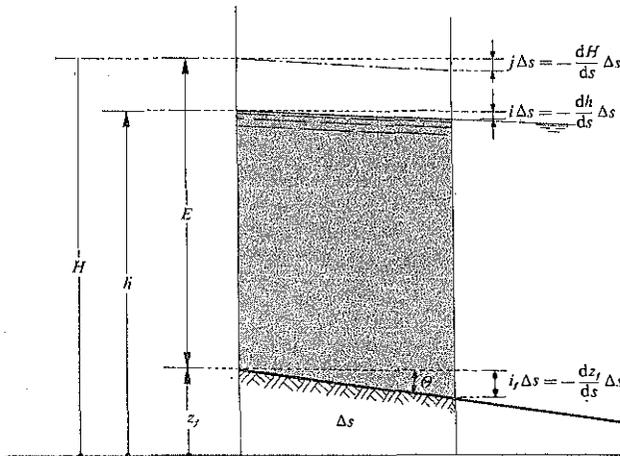


Fig. 18.2. - Pendenza del fondo i_f , cadente piezometrica i e cadente effettiva j .

Se l'alveo è cilindrico, le variazioni della sezione Ω con s sono dovute esclusivamente alle variazioni della profondità Y con s : $\Omega = \Omega[Y(s)]$. Quindi anche il carico specifico

$$E = Y + \frac{Q^2}{2g\Omega^2} = E[Y(s)]$$

è funzione di s solo attraverso Y , per cui $dE/ds = (dE/dY)(dY/ds)$. Sostituendo nella [18.8] si ottiene l'equazione dei profili di corrente in alveo cilindrico

$$\frac{dY}{ds} = \frac{i_f - j}{dE/dY}. \quad [18.9]$$

Questa equazione mostra che possono verificarsi due condizioni limite, purché la profondità di moto uniforme Y_u sia diversa dalla profondità critica Y_c per la data portata. Se la profondità Y approssima Y_u , i_f tende a j : allora il profilo della corrente si dispone *parallelo* al fondo. Invece, se la profondità Y approssima Y_c , tende a zero dE/dY e dY/ds può crescere oltre ogni limite: allora il pelo libero dovrebbe disporsi *perpendicolarmente* al fondo. Quest'ultimo risultato va considerato soltanto indicativo di una *tendenza*, perché al crescere della pendenza e della curvatura del pelo libero la condizione di corrente quasi cilindrica non è più soddisfatta e, di conseguenza, la distribuzione della pressione non è idrostatica e la componente della velocità nella direzione normale al fondo non è trascurabile.

18.4. Profili di corrente in alveo cilindrico declive.

L'andamento dei profili di rigurgito, in alveo cilindrico, cioè dei possibili profili longitudinali del pelo libero per un'assegnata portata Q , è rappresentato dall'eq. [18.9] che possiamo riscrivere nella forma

$$\frac{dY}{ds} = \frac{i_f - j}{dE/dY} = i_f \frac{1 - \frac{Q^3}{i_f g C^2 \Omega^2 R}}{1 - \frac{Q^2 b}{g \Omega^3}}. \quad [18.10]$$

Nei canali *declivi* si distinguono tre situazioni, secondo che la profondità Y_u del moto uniforme con la portata Q sia maggiore, minore od uguale alla profondità critica Y_c per la stessa portata. Come si è visto al paragrafo 17.6 i tre casi corrispondono rispettivamente al comportamento di alveo fluviale ($i_f < i_c$), alveo torrentizio ($i_f > i_c$) ed alveo a pendenza critica per la portata data.

Passiamo ora ad esaminare l'andamento dei profili di corrente. Conoscendo già il comportamento asintotico per Y tendente ad Y_u e per Y tendente ad Y_c è sufficiente determinare il segno della pendenza dY/ds nei vari settori in cui i limiti precedenti suddividono il campo di variazione della profondità per individuare l'andamento del pelo libero in ciascun settore.

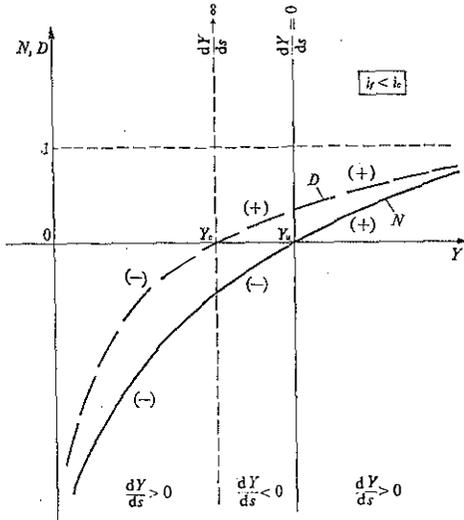


Fig. 18.3. - Andamento delle funzioni N a numeratore e D a denominatore della frazione a secondo membro dell'eq. [18.10] nel caso di alveo fluviale.

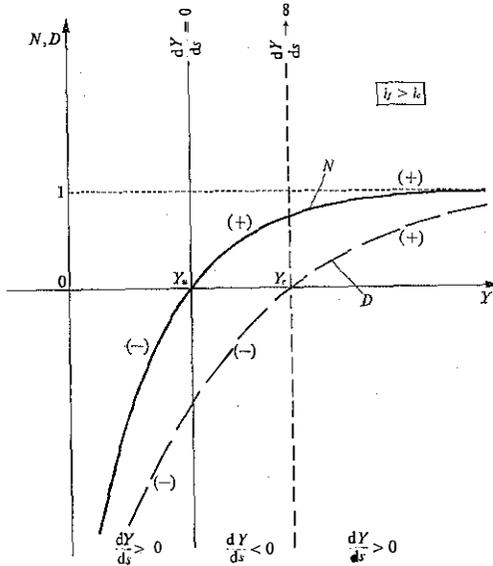


Fig. 18.4. - Andamento delle funzioni N a numeratore e D a denominatore della frazione a secondo membro dell'eq. [18.10] nel caso di alveo torrentizio.

Nelle figure 18.3 e 18.4, rispettivamente per i_f minore e per i_f maggiore di i_c , è rappresentato, in funzione della profondità, l'andamento indicativo del numeratore della frazione a secondo membro dell'eq. [18.10], contrassegnato con la lettera N , e del denominatore della stessa frazione, contrassegnato con D . Il numeratore si annulla per $Y = Y_u$ ed è positivo per $Y > Y_u$ e negativo per $Y < Y_u$; il denominatore si annulla per $Y = Y_c$ ed è positivo per $Y > Y_c$ e negativo per $Y < Y_c$.

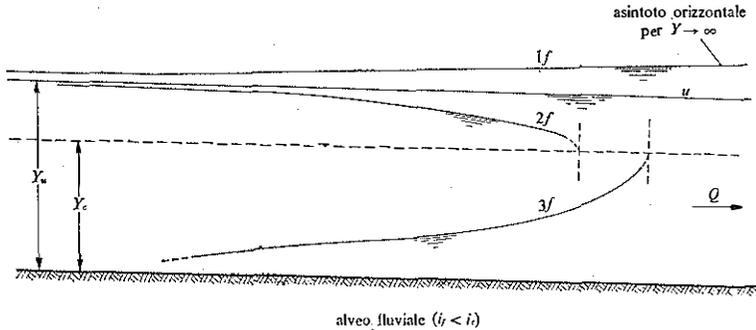


Fig. 18.5. - Profili di corrente in alveo fluviale per la portata data.

Al tendere della profondità a zero, il profilo tende a diventare ortogonale al fondo perché le perdite diventano infinitamente grandi, come la velocità. Il tracciato perde significato fisico, come in vicinanza di Y_c , e per questo nelle figure 18.5 e seguenti è indicato in quei tratti con linee punteggiate.

Finché Y non raggiunge il più piccolo dei valori Y_u o Y_c , numeratore e denominatore si mantengono entrambi negativi e dY/ds riesce positivo: la corrente è rallentata. Analoga conclusione vale quando Y supera il più alto dei valori Y_u o Y_c : la corrente è di nuovo rallentata e finisce con il presentare un profilo asintotico all'orizzontale quando Y è tanto grande da rendere sostanzialmente nulla la velocità U .

Se Y_u è distinto da Y_c esiste anche un profilo di corrente compreso fra questi due estremi. Sia per $Y_u < Y_c$, come per $Y_u > Y_c$, i segni del numeratore N e del denominatore D sono discordi, perciò la pendenza dY/ds è negativa e la corrente risulta accelerata.

Gli andamenti complessivi dei vari profili sono indicati con l'indice f nella figura 18.5 per alveo fluviale, e con l'indice t nella figura 18.6 per l'alveo torrentizio.

Se l'alveo ha *pendenza critica* per la portata data, quando la profondità Y approssima il valore $Y_u \equiv Y_c$ per la stessa portata, l'eq. [18.10] assume la forma indeterminata $dY/ds = 0/0$. La corrente uniforme (u)

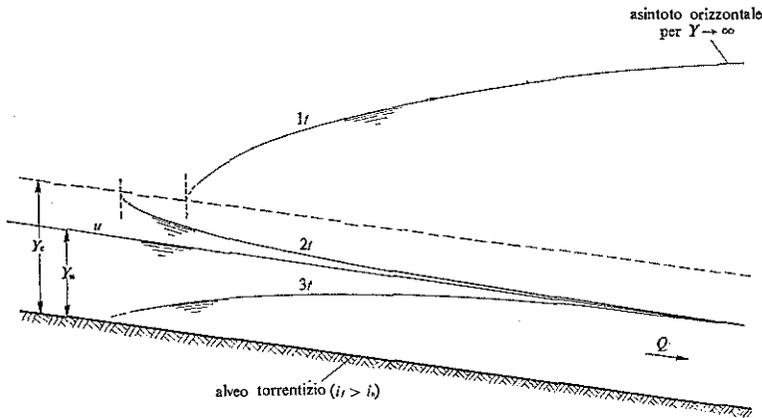


Fig. 18.6. - Profili di corrente in alveo torrentizio per la portata data.

non presenta una superficie libera piana parallela al fondo ma un andamento ondulato intorno alla profondità Y_u , come già osservato in base a considerazioni energetiche nel paragrafo 17.6.

Per valori di Y diversi da Y_u , l'andamento del profilo si ricava facilmente nel caso di alveo molto largo assumendo il coefficiente di resistenza C indipendente dalla profondità secondo l'ipotesi di Bresse (1860). Infatti l'eq. [18.10] assume allora la forma

$$\frac{dY}{ds} = i_f \frac{Y^3 - Y_u^3}{Y^3 - Y_c^3} \quad [18.11]$$

e per $Y \neq Y_u \equiv Y_c$ si ottiene

$$\frac{dY}{ds} = i_f,$$

per cui il profilo della corrente è orizzontale. Se si assume C variabile con il raggio idraulico, si può verificare senza difficoltà che i profili $1c$ e $3c$, tratteggiati nella figura 18.7, diventano lievemente crescenti verso valle, il primo con asintoto orizzontale.

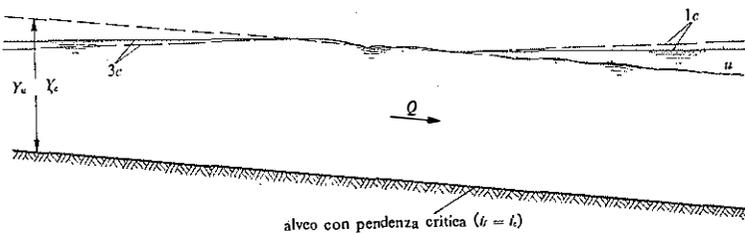


Fig. 18.7. - Profili di correnti in alveo a pendenza critica per la portata data (a linea intera con $C = cost$).

18.5. Canali orizzontali o acclivi.

Nei canali con pendenza del fondo nulla o negativa, quindi orizzontali od acclivi nel senso del moto, non si può realizzare una corrente uniforme. Facendo tendere a zero la pendenza del fondo la profondità del moto uni-

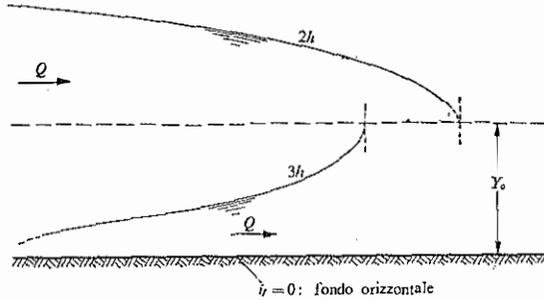


Fig. 18.8. - Profili di corrente in alveo orizzontale.

forme tende a diventare infinitamente grande e perciò tutti i profili possibili sono di depressione. Per estensione di quanto visto negli alvei tranquilli, tenuto conto che il numeratore dell'eq. [18.10] è sempre negativo, si ottengono i profili rappresentati nella figura 18.8 per alveo orizzontale e nella figura 18.9 per alveo acclive.

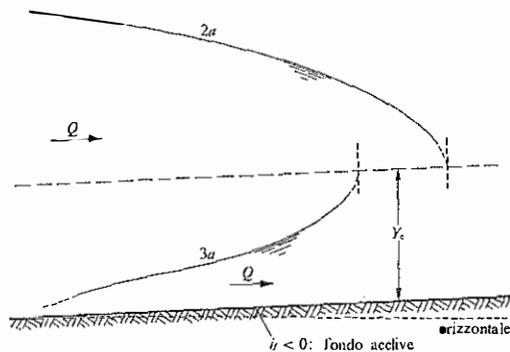


Fig. 18.9. - Profili di corrente in alveo acclive.

18.6. Profili con tangente orizzontale. Profondità caratteristiche.

I profili di rigurgito in alveo cilindrico, descritti dall'eq. [18.10]

$$\frac{dY}{ds} = i_r \frac{N(Y)}{D(Y)} = i_r \frac{1 - \frac{Q^2}{g i_r C^2 \Omega^2 R}}{1 - \frac{Q^2 b}{g \Omega^3}}$$

ammettono tangente orizzontale quando $N(Y) = D(Y)$, il che avviene quando Y è abbastanza grande perché entrambe le funzioni tendano ad 1, e per quelle profondità Y_T che rendono

$$\frac{1}{i_r C^2 R} = \frac{b}{\Omega}.$$

Queste profondità sono indicate come *profondità caratteristiche* o *tipiche* dell'alveo per sottolineare il fatto ch'esse dipendono soltanto dall'alveo e non dalla portata convogliata (Mouret, 1922). Posto $C = k_s R^k / \sqrt{g}$, secondo la formula di Gauckler-Strickler, i valori di Y_T sono forniti dai grafici delle figure 18.10/11/12/13 per alvei di sezione trapezia, triangolare, parabolica e circolare.

Il tratto di profilo di rigurgito a tangente orizzontale si presenta nella corrente veloce ritardata quando l'alveo è torrentizio, nella corrente lenta ritardata quando l'alveo è fluviale.

Nelle correnti accelerate, qualunque sia la forma e la pendenza dell'alveo, non possono realizzarsi tratti di profilo a tangente orizzontale. Infatti, basta derivare rispetto alla coordinata spaziale s l'espressione del carico totale

$$H = h + \frac{U^2}{2g}$$

per ottenere

$$\frac{dh}{ds} = \frac{dH}{ds} - \frac{U}{g} \frac{dU}{ds},$$

da cui deriva che la linea dei carichi piezometrici h , ossia il profilo del pelo libero, non può avere tangente orizzontale se s'impone la condizione di corrente accelerata. Infatti, essendo necessariamente $dH/ds < 0$, quando si pone $dU/ds > 0$ risulta sempre $dh/ds < 0$.

La presenza di un'altezza Y_T nella corrente lenta ritardata comporta un lungo tratto del profilo di rigurgito a quota praticamente costante,

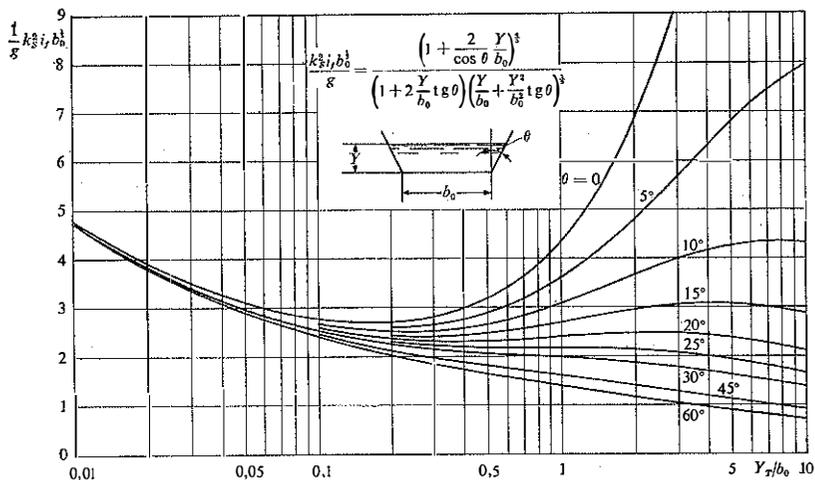


Fig. 18.10. - Grafico per la determinazione delle profondità caratteristiche in alveo trapezoidale.

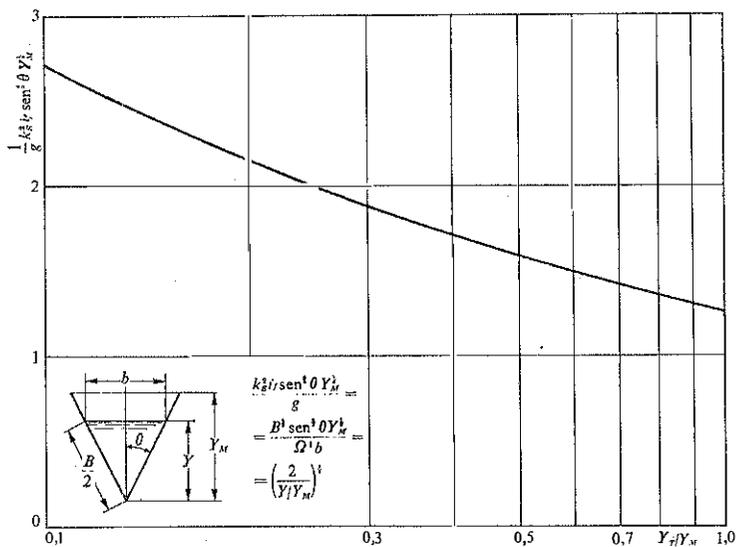


Fig. 18.11. - Grafico per la determinazione delle profondità caratteristiche in alveo triangolare.

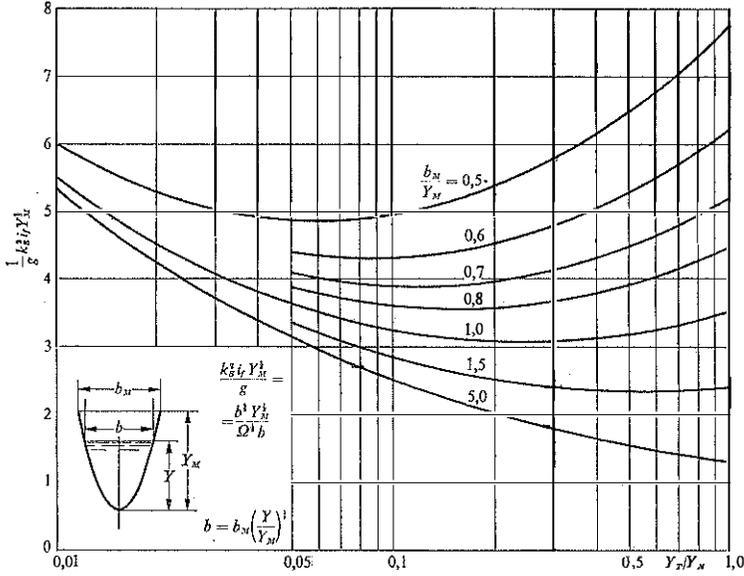


Fig. 18.12. - Grafico per la determinazione delle profondità caratteristiche in alveo di sezione parabolica.

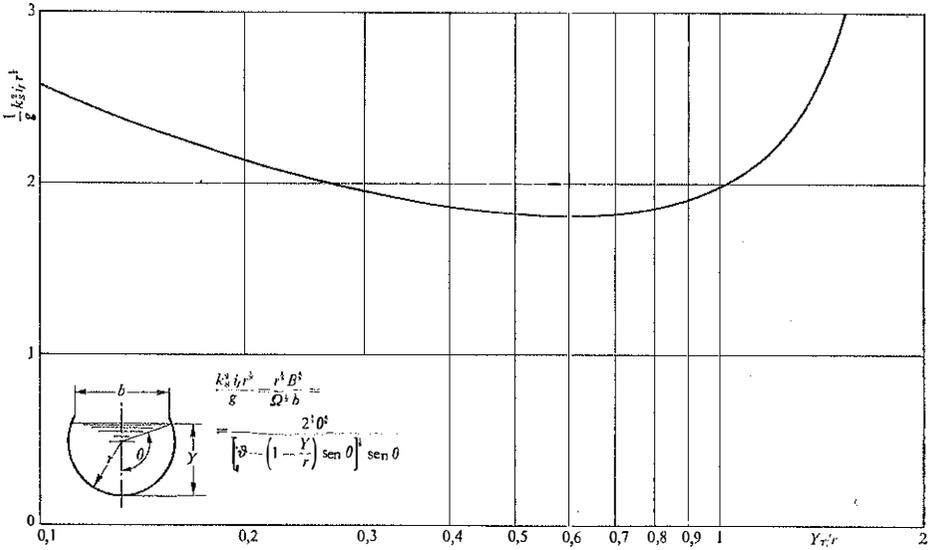


Fig. 18.13. - Grafico per la determinazione delle profondità caratteristiche in alveo di sezione circolare.

e di conseguenza un considerevole aumento della profondità verso valle, così che le successive vicende del pelo libero risultano tecnicamente irrilevanti. Anche la presenza di un'altezza caratteristica sulla corrente veloce ritardata implica un considerevole sviluppo del tratto suborizzontale del profilo di rigurgito, ma questo fatto influisce solo sulla rapidità dell'acostamento alla profondità Y_u od Y_c più prossima.

In alcuni casi, come in quello di alveo rettangolare, la curva caratteristica presenta un minimo assoluto, che conduce ad un valore limite inferiore i_L per le pendenze di fondo compatibili con l'esistenza di profondità di transizione Y_T . Allora, quando $i_f < i_L$, tutti i profili sono privi di altezze caratteristiche. Nel caso particolare dell'alveo rettangolare di larghezza b , i_L assume il valore

$$i_L = \frac{8}{3} \frac{g}{k_s^2 b^3}$$

che si presenta per

$$Y_u = Y_c = b/6.$$

18.7. L'integrale dell'equazione dei profili in alveo cilindrico.

L'integrale generale dell'equazione dei profili di rigurgito è esprimibile in forma semplice quando l'alveo è declive nel senso del moto, rettangolare larghissimo e si assume, seguendo Bresse, $C = \text{cost}$. Allora l'equazione del profilo si riduce alla forma [18.11] già vista nel paragrafo 18.4

$$\frac{dY}{ds} = i_f \frac{Y^3 - Y_u^3}{Y^3 - Y_c^3}.$$

Posto

$$y = Y/Y_u \quad \text{e} \quad k = Y_c/Y_u \quad [18.12]$$

si ha

$$ds = \frac{Y_u}{i_f} \left(\frac{y^3 - k^3}{y^3 - 1} \right) dy = \frac{Y_u}{i_f} \left(1 - \frac{1 - k^3}{1 - y^3} \right) dy.$$

La funzione

$$\phi(\xi) = \int_0^\xi \frac{dy}{1 - y^3} \quad [18.13]$$

è stata tabellata da Bresse. Impiegando tale tabella, riportata nella pagina seguente, il calcolo del profilo è immediato con l'equazione

$$s_0 - s = \frac{Y_0 - Y}{i_f} - \frac{Y_u}{i_f} (1 - k^3) \left[\phi \left(\frac{Y_0}{Y_u} \right) - \phi \left(\frac{Y}{Y_u} \right) \right]. \quad [18.14]$$

nella quale Y_0 indica la profondità data all'ascissa s_0 .

TABELLA 18.1. - Valori della funzione ϕ di Bresse.

ζ	ϕ	ζ	ϕ	ζ	ϕ	ζ	ϕ
0,00	0,000	0,65	0,703	1,001	2,184	1,46	0,273
0,02	0,020	0,66	0,717	1,005	1,649	1,48	0,263
0,04	0,040	0,67	0,731	1,010	1,419	1,50	0,255
0,06	0,060	0,68	0,746	1,015	1,286	1,55	0,235
0,08	0,080	0,69	0,761	1,02	1,191	1,60	0,218
0,10	0,100	0,70	0,776	1,03	1,060	1,65	0,203
0,12	0,120	0,71	0,791	1,04	0,967	1,70	0,189
0,14	0,140	0,72	0,807	1,05	0,896	1,75	0,177
0,16	0,160	0,73	0,823	1,06	0,838	1,80	0,166
0,18	0,180	0,74	0,840	1,07	0,790	1,85	0,156
0,20	0,200	0,75	0,857	1,08	0,749	1,90	0,147
0,22	0,221	0,76	0,874	1,09	0,713	1,95	0,139
0,24	0,241	0,77	0,892	1,10	0,681	2,0	0,132
0,26	0,261	0,78	0,911	1,11	0,652	2,1	0,119
0,28	0,282	0,79	0,930	1,12	0,626	2,2	0,107
0,30	0,302	0,80	0,950	1,13	0,602	2,3	0,098
0,32	0,323	0,81	0,971	1,14	0,581	2,4	0,089
0,34	0,343	0,82	0,993	1,15	0,561	2,5	0,082
0,36	0,364	0,83	1,016	1,16	0,542	2,6	0,076
0,38	0,385	0,84	1,040	1,17	0,525	2,7	0,070
0,40	0,407	0,85	1,065	1,18	0,509	2,8	0,065
0,42	0,428	0,86	1,092	1,19	0,494	2,9	0,060
0,44	0,450	0,87	1,120	1,20	0,480	3,0	0,056
0,46	0,472	0,88	1,151	1,22	0,454	3,5	0,041
0,48	0,494	0,89	1,183	1,24	0,431	4,0	0,031
0,50	0,517	0,90	1,218	1,26	0,410	4,5	0,025
0,52	0,540	0,91	1,257	1,28	0,391	5,0	0,020
0,54	0,563	0,92	1,300	1,30	0,373	6,0	0,014
0,56	0,587	0,93	1,348	1,32	0,357	7,0	0,010
0,58	0,612	0,94	1,403	1,34	0,342	8,0	0,008
0,60	0,637	0,95	1,467	1,36	0,329	9,0	0,006
0,61	0,650	0,96	1,545	1,38	0,316	10,0	0,005
0,62	0,663	0,97	1,644	1,40	0,304	20,0	0,002
0,63	0,676	0,975	1,707	1,42	0,293		
0,64	0,690	0,980	1,783	1,44	0,282		
		0,985	1,880				
		0,990	2,017				
		0,995	2,250				
		0,999	2,788				

Questa equazione si utilizza per calcolare la distanza $s_0 - s$ (positiva verso monte, come mostra la fig. 18.14) di una sezione di profondità Y dalla sezione nota di profondità Y_0 .

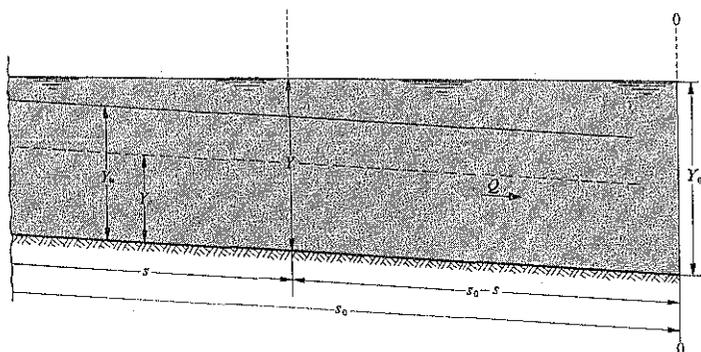


Fig. 18.14. - Tracciamento di un profilo di corrente.

In generale, l'equazione dei profili di corrente, che riscriviamo ora alle differenze finite

$$\Delta Y = \frac{i_j - \frac{Q^2}{gC^2\Omega^2R}}{1 - \frac{Q^2b}{g\Omega^3}} \Delta s, \quad [18.15]$$

consente, qualunque sia la forma dell'alveo cilindrico, il calcolo numerico passo-passo. Le grandezze Ω , R , b e C si valutano tutte in funzione della profondità ed il calcolo procede, partendo da un valore noto di Y nella direzione prescelta (con Δs positivo se diretto verso valle).

18.8. Alvei con pendenza del fondo variabile.

Un cambiamento graduale della pendenza del fondo lungo l'alveo può consentire il passaggio con profilo continuo da corrente veloce a corrente lenta e viceversa (Massé, 1938; De Marchi, 1950).

Per mostrare le differenti possibilità di transizione facciamo riferimento alla condizione semplice, già più volte richiamata, di alveo molto largo con coefficiente di resistenza costante.

Indichiamo con Y_n , chiamata profondità normale, la soluzione dell'equazione $i_j - j = 0$ in una data sezione; ossia la profondità che avrebbe il moto uniforme nello stesso alveo supposto cilindrico con la pendenza

del fondo che vi è nella sezione in esame. Se la linea delle profondità normali lungo l'alveo incontra la linea delle profondità critiche $Y = Y_c$, l'equazione del profilo della corrente

$$\frac{dY}{ds} = \frac{i_f - j}{1 - (Y_c/Y)^3} = \frac{F(s, Y)}{D(s, Y)} \quad [18.16]$$

ha in quel punto M ($Y_M = Y_c = Y_n$) una singolarità.

Nell'intorno del punto singolare M si può studiare il comportamento della corrente in base all'equazione abbreviata (v. ad es. Tricomi, 1953)

$$\frac{dY}{ds} = \frac{\tilde{c} \cdot s + \tilde{d} \cdot Y}{\tilde{a} \cdot s + \tilde{b} \cdot Y}; \quad [18.17]$$

in questo caso è

$$\tilde{a} = \left[\frac{\partial D}{\partial s} \right]_M = 0 \quad \tilde{b} = \left[\frac{\partial D}{\partial Y} \right]_M = \frac{3}{Y_c} \quad [18.18]$$

$$\tilde{c} = \left[\frac{\partial F}{\partial s} \right]_M = \left[\frac{di_f}{ds} \right]_M = \tilde{p} \quad \tilde{d} = \left[\frac{\partial F}{\partial Y} \right]_M = \left[\frac{3Q'^2}{C^2 g Y^4} \right]_M = \frac{3i_c}{Y_c} \quad [18.19]$$

essendo Q' la portata per unità di larghezza dell'alveo ed i_c la relativa pendenza critica, data dalla

$$i_c = \frac{1}{[C^2]_{Y=Y_c}}.$$

Se la *pendenza del fondo è crescente* procedendo verso valle, cioè se risulta $\tilde{p} > 0$, la singolarità è sempre un *colle* perché

$$(\tilde{a} - \tilde{d})^2 + 4\tilde{b}\tilde{c} = \frac{9i_c^2}{Y_c^2} + \frac{12}{Y_c} \tilde{p} > 0$$

e

$$\tilde{a}\tilde{d} - \tilde{b}\tilde{c} = -\frac{3\tilde{p}}{Y_c} < 0.$$

Due profili, indicati con f_1 ed f_2 nella figura 18.15, passano per il punto singolare M , ed il primo è asintotico alla linea $F = 0$. Gli altri possibili profili, indicati con f , non passano per M , sono asintotici ai profili f_1 ed f_2 e terminano con tangente perpendicolare al fondo negli eventuali punti d'incontro con la linea della profondità critica $D = 0$.

Invece, se la *pendenza del fondo è decrescente* procedendo verso valle,

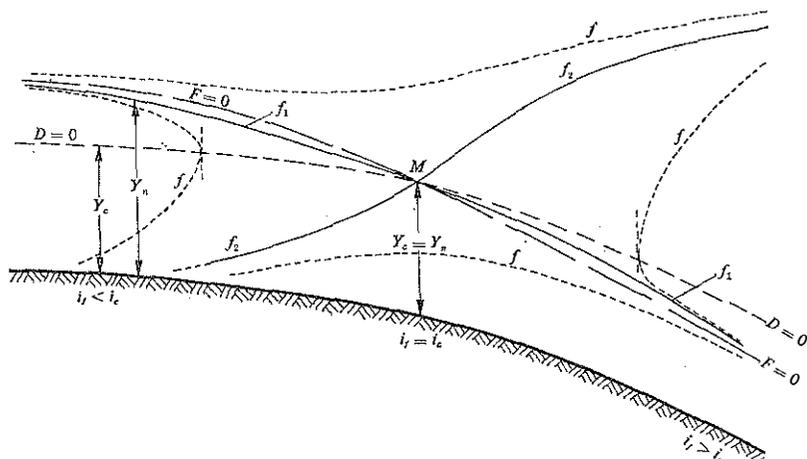


Fig. 18.15. - Profili di corrente in alveo molto largo con pendenza del fondo crescente.

cioè se $\tilde{p} < 0$, la singolarità può assumere due forme diverse secondo che la variazione $|\tilde{p}| = |di_t/ds|$ è maggiore o minore di $(3/4)i_c^2/Y_c$.

Nel caso $|\tilde{p}| < (3/4)i_c^2/Y_c$ il punto singolare M è un *nodo* perché

$$(\bar{a} - \bar{d})^2 + 4\bar{b}\bar{c} = \frac{3}{Y_c} \left(\frac{3i_c^2}{Y_c} + 4\tilde{p} \right) > 0$$

e

$$\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c} = -\tilde{p}(3/Y_c) > 0.$$

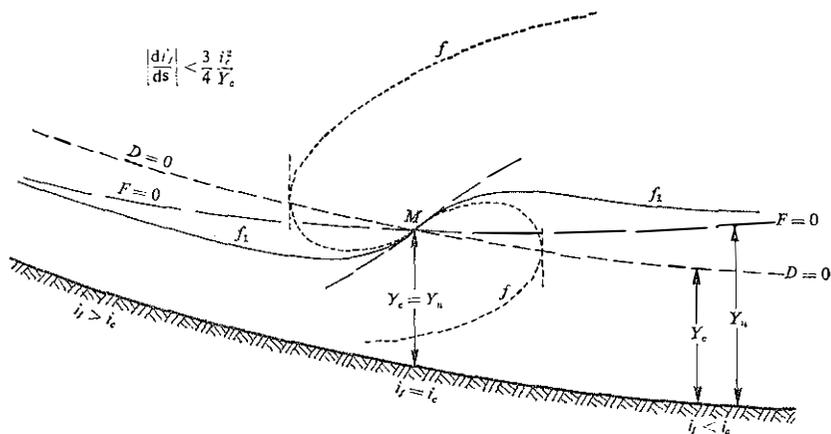


Fig. 18.16. - Profili di corrente in alveo molto largo con pendenza del fondo decrescente. Caso in cui la variazione della pendenza, in valore assoluto, è minore di $(3/4)i_c^2/Y_c$.

Come mostra la figura 18.16 i possibili profili passano tutti per M con la medesima pendenza. Con f_1 sono indicati i profili asintotici alla linea $F=0$, con f altri profili possibili.

Nel caso $|\bar{p}| > (3/4)i_c^2/Y_c$ il punto singolare M è un *fuoco* perché

$$(\tilde{a} - \tilde{d})^2 + 4\tilde{b}\tilde{c} = \frac{3}{Y_c} \left(\frac{3i_c^2}{Y_c} + 4\bar{p} \right) < 0$$

e

$$\tilde{a} + \tilde{d} = \frac{3i_c}{Y_c} \neq 0.$$

I profili raggiungono tutti spiralmemente il punto M , come si vede nella figura 18.17, sempre intersecando con pendenza infinita la linea $Y=Y_c$. Con f_1 sono indicati i profili asintotici alla linea $F=0$, con f altri profili possibili.

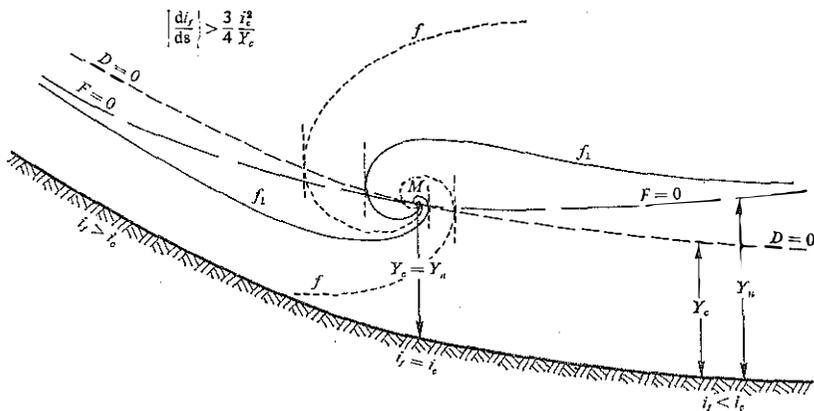


Fig. 18.17. - Profili di corrente in alveo molto largo con pendenza del fondo decrescente. Caso in cui la variazione della pendenza, in valore assoluto, è maggiore di $(3/4)i_c^2/Y_c$.

18.9. Condizioni ai limiti.

La portata immessa a monte in un canale vi può defluire con differenti profili di rigurgito e con differenti caratteri della corrente. Sono le quote di pelo libero imposte alle estremità del canale quelle che determinano la forma della corrente in transito.

Più precisamente si osserva che quote di pelo libero inferiori all'altezza critica Y_c corrispondente alla portata data, imposte nella sezione

iniziale del canale, fissano il profilo della corrente veloce, mentre quote maggiori di Y_c , assegnate nella sezione terminale, individuano la forma della corrente lenta. Così le correnti veloci risultano determinate da monte e quelle lente da valle.

I fatti ora esposti sono conseguenza dei fenomeni di moto vario nel tempo che precede l'instaurarsi del moto permanente, e verranno perciò analizzati in dettaglio nel capitolo successivo.

18.10. Il risalto idraulico.

I profili delle correnti veloci in alveo tranquillo sono limitati verso valle dal raggiungimento della profondità critica, ed i profili delle correnti lente in alveo torrentizio sono limitati dalla stessa condizione verso monte. Un solo tipo di corrente può pertanto non essere in grado di percorrere tutto un canale. In uno stesso alveo cilindrico, una corrente veloce ed una corrente lenta possono però susseguirsi: il loro raccordo si verifica allora attraverso un fenomeno di tipo ondoso stazionario con o senza frangimento, detto *risalto idraulico*. Indicando con Y_{m1} la profondità media nella sezione iniziale del risalto, profondità data dal rapporto fra l'area della sezione e la larghezza del pelo libero, le diverse forme con cui può realizzarsi il risalto sono individuabili in base ai valori del numero di Froude $Fr_1 = U_1/\sqrt{gY_{m1}}$ della corrente a monte. Si riportano qui di seguito informazioni sulle varie forme di risalto e sui valori di transizione.

a) *Risalto ondulato*

Il pelo libero ha la forma di una successione di ondulazioni stazionarie e smorzate intorno al livello di valle, come illustra la figura 18.18.

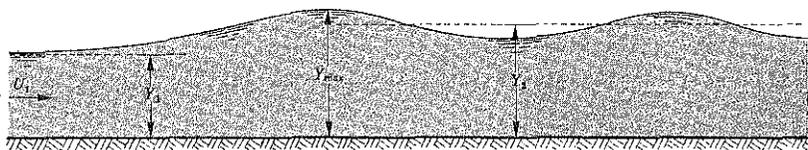


Fig. 18.18. - Risalto ondulato.

Questo tipo di risalto si presenta quando la corrente è prossima allo stato critico sia nel tronco veloce a monte del risalto, sia in quello lento a valle. Come limite indicativo per la formazione del risalto ondulato senza apprezzabili frangimenti, in alveo cilindrico di forma qualunque, si può assu-

mere il campo

$$1 < Fr_1^2 < 2.$$

In alveo *rettangolare* il profilo della corrente del ramo ascendente, fino al colmo della prima onda, risulta molto vicino a quello dell'onda solitaria; per lo studio di questo fenomeno di moto vario, che è stato oggetto di numerose indagini teoriche e sperimentali, si rimanda ai paragrafi 19.13 e 19.15 del capitolo successivo. Sulla base di quei risultati si può precisare il limite superiore

$$Fr_1 \leq 1,28$$

per la formazione del risalto ondulato in alveo rettangolare. Così pure si può valutare, con buona approssimazione, la profondità al colmo della prima onda assumendo

$$Y_{\max} \cong Fr_1^2 \cdot Y_1 = \frac{U_1^2}{g} \quad [18.20]$$

nella quale Y_1 ed U_1 sono evidentemente la profondità e la velocità a monte del risalto.

b) *Risalto ondulato con frangimento*

Quando il numero di Froude assume valori compresi nell'intervallo

$$2 < Fr_1^2 < 3$$

le ondulazioni del pelo libero tendono a frangere sulle creste e si riducono di numero come indica la figura 18.19. Si tratta di un fenomeno di transizione fra il risalto ondulato ed il risalto diretto, nel quale tutte le onde successive alla prima scompaiono.

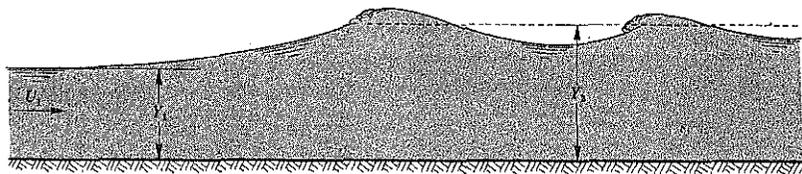


Fig. 18.19. - Risalto ondulato con frangimento.

c) *Risalto diretto o salto di Bidone*

Il risalto diretto raccorda bruscamente, attraverso un'unica onda, i profili tra loro discontinui di una corrente veloce a monte e di una corrente lenta a valle. Il fenomeno è stato oggetto di un'indagine sperimentale.

tale per la prima volta da parte di Bidone nel 1820, e per questo prende anche il nome di *salto di Bidone*. Esso si presenta quando Fr_1^2 è ≥ 3 , ossia per

$$Fr_1 \geq 1,70 \quad (\text{oppure } Fr_2 \leq 0,6 \text{ a valle del risalto}) \quad [18.21]$$

ed ha l'aspetto di un'onda stazionaria con fronte in frangimento, come mostra la figura 18.20. La corrente veloce si espande verso valle al di sotto del grande vortice nel quale il movimento superficiale avviene nel verso opposto a quello di trasporto. Bolle d'aria sono continuamente trascinate dal fronte frangente all'interno del vortice e si liberano via via più a valle, finché la distribuzione della pressione torna ad essere idrostatica.

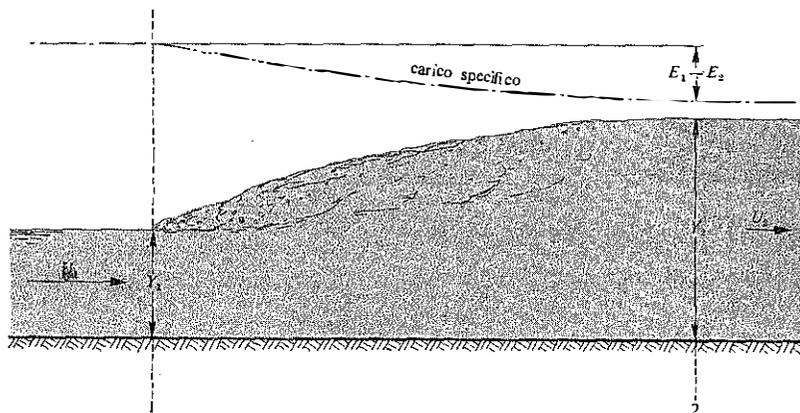


Fig. 18.20. - Risalto diretto (salto di Bidone).

Per lo studio di questo fenomeno si applica l'equazione globale della quantità di moto al volume di controllo occupato dal tronco di corrente compreso tra la sezione 1 immediatamente a monte del salto e la sezione 2 di valle (fig. 18.21). Tenuto conto della permanenza del moto, la proie-

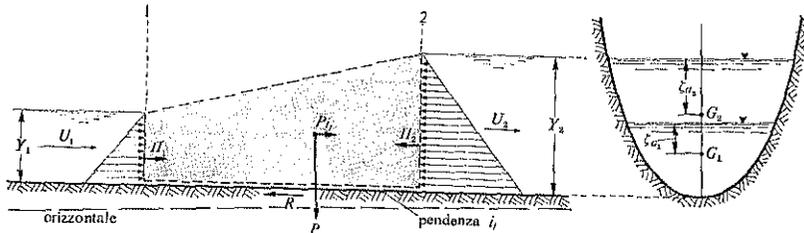


Fig. 18.21. - Schema per lo studio del risalto diretto in canale cilindrico.

zione dell'equazione predetta nella direzione del fondo risulta

$$\Pi_1 - \Pi_2 - R + Pi_i = \mathcal{Q}_2 - \mathcal{Q}_1 \quad [18.22]$$

dove \mathcal{Q}_1 ed \mathcal{Q}_2 sono le portate di quantità di moto che attraversano le sezioni 1 e 2, Π_1 e Π_2 sono le forze dovute alle pressioni normali agenti sulle sezioni Ω_1 e Ω_2 , R è il risultante delle resistenze dovute al fondo e alle pareti, Pi_i la componente nella direzione del fondo, di pendenza i , del peso P del fluido contenuto nel volume di controllo.

Le forze R e Pi_i hanno valori molto piccoli rispetto alla $\Pi_1 - \Pi_2$ e si possono trascurare entrambe, tanto più che nei canali declivi esse hanno anche versi opposti. L'eq. [18.22] si riduce quindi alla

$$\Pi_1 + \mathcal{Q}_1 = \Pi_2 + \mathcal{Q}_2 \quad [18.23]$$

che esprime la relazione fra le profondità nelle sezioni 1 e 2.

18.11. La funzione quantità di moto totale.

La funzione

$$S = \Pi + \mathcal{Q} \quad [18.24]$$

è nota come *quantità di moto totale* (cfr. Nebbia, 1936-37) o come *spinta totale*, perché è la somma della spinta Π dovuta alle pressioni normali che agiscono sulla sezione considerata e della portata \mathcal{Q} di quantità di moto che attraversa la stessa sezione.

Se la distribuzione delle pressioni è idrostatica e se le velocità sono parallele fra loro ed hanno valori quasi uniformi si ha

$$S = \gamma \zeta_G \Omega + eQU \quad [18.25]$$

dove ζ_G è l'affondamento del baricentro della sezione Ω rispetto al pelo libero (v. fig. 18.21).

L'andamento della funzione $S = S(Y)$, a parità di portata, è rappresentato nella figura 18.22 per una sezione rettangolare. La rappresentazione è in termini adimensionali con riferimento al valore S_c della spinta totale corrispondente alla profondità critica Y_c per la portata data. Tale valore è il minimo, rispetto ad Y , della funzione $S(Y)$. Per dimostrarlo, seguiamo la derivata

$$\frac{\partial S}{\partial Y} = \gamma \frac{\partial}{\partial Y} (\zeta_G \Omega) - e \frac{Q^2}{\Omega^3} \frac{\partial \Omega}{\partial Y};$$

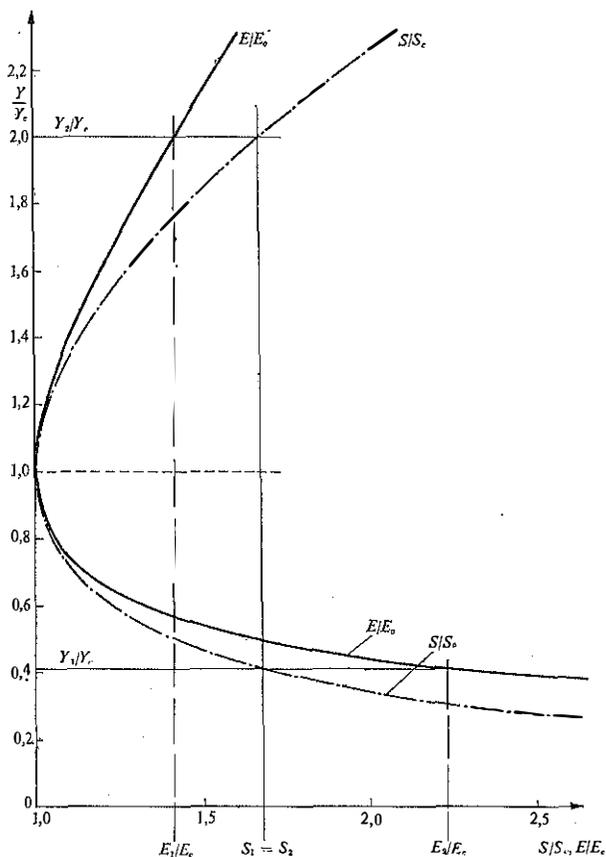


Fig. 18.22. - Grafico del carico specifico E e della quantità di moto totale S in funzione della profondità in alveo rettangolare.

la grandezza $\zeta_G \Omega$ è il momento statico dell'area della sezione liquida rispetto al pelo libero ed è immediato verificare che ad un incremento dY del livello di quest'ultimo corrisponde un aumento del momento statico pari a ΩdY , a meno di infinitesimi di ordine superiore.

Quindi

$$\frac{\partial}{\partial Y} (\zeta_G \Omega) = \Omega$$

ed essendo inoltre $\partial \Omega / \partial Y = b$, come si è visto nel paragrafo 17.2, segue

$$\frac{\partial S}{\partial Y} = \gamma \Omega - \rho \frac{Q^2 b}{\Omega^2}.$$

La condizione necessaria per l'esistenza di un estremante, $\partial S/\partial Y = 0$, diventa perciò

$$\frac{\Omega^3}{b} = \frac{Q^2}{g}$$

equazione coincidente con quella che definisce la profondità critica Y_c per la portata Q .

Imponendo la condizione di conservazione della quantità di moto totale attraverso il salto di Bidone, note la portata e la profondità Y_1 a monte o quella Y_2 a valle del salto, si deduce subito l'altra profondità. Allo scopo si può impiegare il diagramma della figura 18.22, se l'alveo è rettangolare. Nello stesso diagramma è rappresentata pure la funzione carico specifico E in termini adimensionali rispetto al valore E_c corrispondente alla predetta profondità critica.

Alle profondità *coniugate* Y_1 ed Y_2 competono due diversi valori dell'energia specifica: la differenza $E_1 - E_2$ rappresenta la perdita di carico specifico dovuta al salto di Bidone, perdita che, in accordo con l'ipotesi assunta in questo studio di trascurare l'effetto della pendenza del fondo, coincide con la perdita di carico totale $H_1 - H_2$ fra le sezioni iniziale e finale del salto. Si può verificare che è sempre $E_1 > E_2$ corrispondentemente a $Y_1 < Y_2$; dato che l'energia meccanica totale di una corrente permanente, in assenza di apporti esterni, diminuisce sempre nel verso del moto, si comprende come il salto possa realizzarsi solo da Y_1 ad Y_2 , cioè fra una corrente veloce a monte ed una lenta a valle.

18.12. Localizzazione del risalto diretto.

Quando in un alveo cilindrico sono noti, per una data portata, i due profili di corrente veloce e di corrente lenta possibili con le condizioni al contorno assegnate, si determinano i rispettivi tratti effettivamente realizzabili localizzando la posizione del risalto che raccorda il tronco di corrente veloce a monte con l'altro a valle.

Per questo si può tracciare la linea delle profondità coniugate ad uno dei due profili prima calcolati; l'intersezione con l'altro profilo individua la posizione del risalto. Naturalmente l'impiego di un diagramma del tipo di quello della figura 18.22 rende immediata la costruzione grafica della curva delle profondità coniugate e fornisce la perdita di carico specifico corrispondente al risalto individuato.

18.13. Il risalto in alveo rettangolare.

La quantità di moto totale S , espressa dalla [18.25], in alveo rettangolare assume la forma

$$\frac{S}{\gamma b} = \frac{Y^2}{2} + \frac{Q^2}{gYb^2} \quad [18.26]$$

essendo al solito b la larghezza della sezione. In corrispondenza della profondità critica $Y_c = (Q^2/gb^2)^{\frac{1}{3}}$ si ha

$$\frac{S_c}{\gamma b} = \frac{Y_c^2}{2} + Y_c^2 = \frac{3}{2} Y_c^2$$

per cui

$$\frac{S}{S_c} = \frac{1}{3} \left(\frac{Y}{Y_c} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{Y_c}{Y} \right). \quad [18.27]$$

Questa equazione è stata rappresentata graficamente nella figura 18.22 insieme alla funzione

$$\frac{E}{E_c} = \frac{2}{3} \left(\frac{Y}{Y_c} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{Y_c}{Y} \right)^2 \quad [18.28]$$

essendo

$$E_c = Y_c + \frac{Q^2}{2gY_c^2 b^2} = Y_c + \frac{Y_c}{2} = \frac{3}{2} Y_c.$$

Uguagliando la quantità di moto totale S nelle sezioni 1 e 2, rispettivamente a monte e a valle del salto di Bidone, si ottiene

$$\frac{Y_1^2}{2} + \frac{Q^2}{gY_1^2 b^2} = \frac{Y_2^2}{2} + \frac{Q^2}{gY_2^2 b^2},$$

dalla quale deriva, con facili semplificazioni,

$$Y_1 Y_2 (Y_1 + Y_2) = \frac{2Q^2}{gb^2} \quad [18.29]$$

che ammette la soluzione

$$\frac{Y_2}{Y_1} = \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{1 + 8Fr_1^2}) \quad [18.30]$$

avendo introdotto il numero di Froude

$$Fr_1 = U_1 / \sqrt{gY_1}$$

Poiché l'eq. [18.29] è simmetrica, vale anche il risultato

$$\frac{Y_1}{Y_2} = \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{1 + 8 Fr_2^2}) \quad [18.31]$$

che fornisce la profondità a monte del risalto in funzione delle caratteristiche di valle.

La perdita di carico specifico nel salto si ricava dalla

$$E_1 - E_2 = Y_1 + \frac{Q^2}{2gY_1^2 b^2} - \left(Y_2 + \frac{Q^2}{2gY_2^2 b^2} \right) = Y_1 - Y_2 + \frac{Q^2}{2gb^2} \left(\frac{Y_2^2 - Y_1^2}{Y_1 Y_2} \right);$$

sostituendo Q^2/gb^2 per mezzo della [18.29], con qualche trasformazione, si ottiene

$$E_1 - E_2 = \frac{(Y_2 - Y_1)^3}{4Y_1 Y_2} \quad [18.32]$$

equazione che conferma la necessità del salto all'in su nel senso del moto affinché sia $E_1 - E_2 > 0$, e mette in evidenza la rapida crescita delle perdite con l'ampiezza $(Y_2 - Y_1)$ del risalto.

La *lunghezza del risalto* è un elemento che non si può valutare con precisione perché, mentre è abbastanza ben individuabile sperimentalmente la sezione iniziale, altrettanto non può dirsi per la sezione terminale del risalto stesso. D'altra parte, dal punto di vista tecnico, è importante poter prevedere la lunghezza del tratto d'alveo interessato dal fenomeno. Assumendo il termine del risalto in corrispondenza dell'inizio a valle del profilo spianato, senza ondulazioni, l'U.S. Bureau of Reclamation (1955) ha proposto alcuni valori sperimentali di lunghezza del risalto. I rapporti fra tale lunghezza L e la profondità di valle Y_2 o l'ampiezza del salto $(Y_2 - Y_1)$ sono riportati nel quadro seguente, in funzione del numero di Froude Fr_1 .

Fr_1	L/Y_2	$L/(Y_2 - Y_1)$
2	4,4	7,6
3	5,3	7,2
5	6,0	7,0
10	6,1	6,6
15	5,9	6,2
20	5,5	5,7

In conclusione la lunghezza del risalto si può ritenere variabile da $7(Y_2 - Y_1)$ a $6(Y_2 - Y_1)$ per valori di Fr_1 varianti da 3 a 15; oppure si può dire che L ha valori intorno a $\sim 6Y_2$ per Fr_1 compreso fra 5 e 15.

18.14. Il risalto in canali divergenti o convergenti.

Il fenomeno del risalto, che pure può realizzarsi in canali di larghezza gradualmente variabile, non è suscettibile in tal caso di un'indagine esauriente dal punto di vista teorico. Infatti, l'applicazione del teorema della quantità di moto richiederebbe la valutazione della componente della spinta esercitata dalle sponde nella direzione dell'asse del canale e quindi la preventiva conoscenza della lunghezza del risalto.

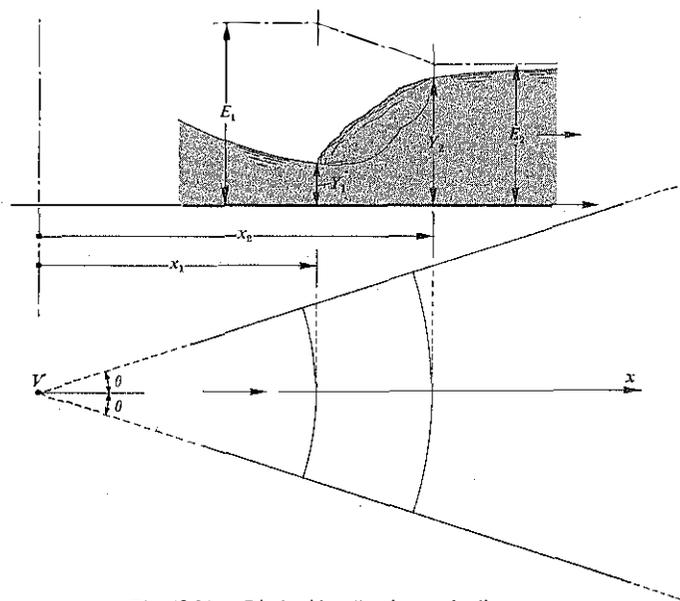


Fig. 18.23. - Risalto idraulico in canale divergente.

Nel caso di canali a fondo orizzontale, con sponde piane verticali divergenti (fig. 18.23) o convergenti (fig. 18.24) che formino fra loro l'angolo 2θ , uno studio condotto da Rubatta (1963-64) consente di valutare le ascisse di monte e di valle del risalto, note le quali il calcolo delle altezze d'acqua e delle velocità medie si svolge con i procedimenti consueti.

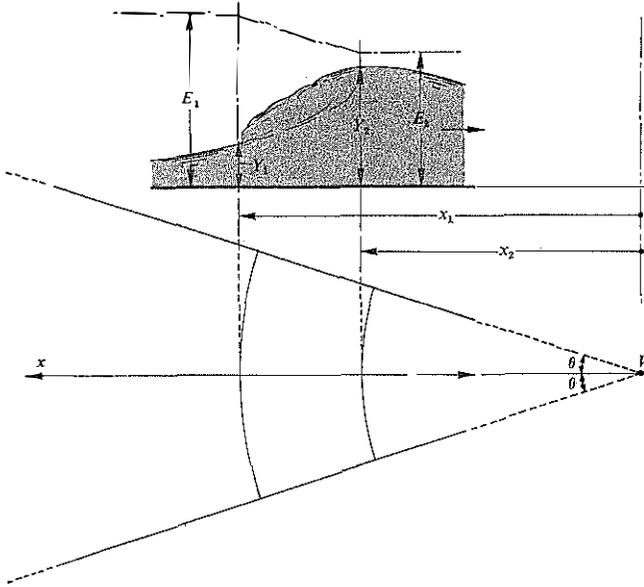


Fig. 18.24. - Risalto idraulico in canale convergente.

Introdotta il parametro

$$f_r = \frac{Q}{2\theta E_1^2 \sqrt{2gE_1}},$$

l'indagine sperimentale mostra che le ascisse x_1 di monte e x_2 di valle del risalto, misurate a partire dal vertice di convergenza delle sponde, sono calcolabili con le equazioni

$$\begin{aligned} x_1 &= E_1 f_r^{0,335} f_1 \left(\frac{E_2}{f_r^{0,318} E_1} \right) \\ x_2 &= E_2 f_r^{0,335} f_2 \left(\frac{E_2}{f_r^{0,318} E_1} \right) \end{aligned} \quad [18.33]$$

nel caso di *canale divergente*, e con le equazioni

$$\begin{aligned} x_1 &= E_1 f_r^{0,335} f_2 \left(\frac{E_2}{f_r^{0,318} E_1} \right) \\ x_2 &= E_2 f_r^{0,335} f_1 \left(\frac{E_2}{f_r^{0,318} E_1} \right) \end{aligned} \quad [18.34]$$

nel caso di *canale convergente*. I valori delle funzioni f_1 ed f_2 sono dati graficamente nel diagramma della figura 18.25.

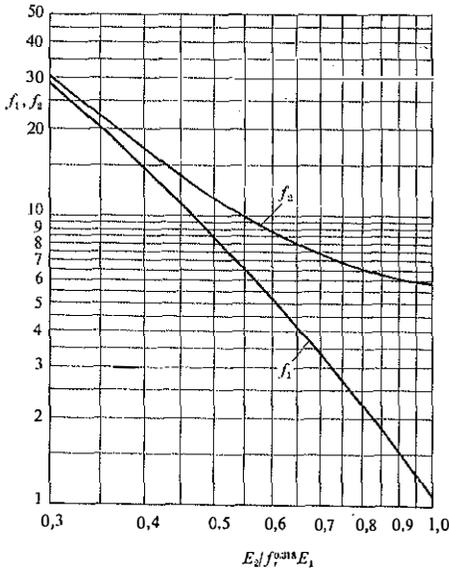


Fig. 18.25. - Le funzioni f_1 ed f_2 per la localizzazione del risalto in canali divergenti e convergenti.

Inoltre, in entrambi i casi, sussiste la relazione sperimentale

$$\frac{x_2 - x_1}{Y_2 - Y_1} = 8 \frac{E_2}{E_1} + 3,6$$

fra la lunghezza e l'ampiezza del risalto.

Occorre infine notare che, mentre il risalto è stabile in canale divergente, esso è instabile in quello convergente.

18.15. Variazioni di sezione dell'alveo.

Le correnti a pelo libero possono presentare *bruschi allargamenti* di sezione, oltre che in corrispondenza di un risalto diretto, anche per variazioni rapide dell'alveo dovute ad abbassamenti del fondo o ad allargamenti laterali.

Per ottenere una relazione tra le caratteristiche della corrente a monte e quelle a valle del raccordo si può applicare l'equazione della quantità

di moto proiettata nella direzione dell'asse del canale analogamente a quanto si è fatto per lo studio del risalto in alveo cilindrico. In questo caso però occorre tener presente che nel computo delle forze esterne interviene anche la componente della spinta dovuta alle pressioni normali esercitate da quella parte dell'alveo che non è parallela all'asse.

Allargamenti o restringimenti più o meno gradualmente di sezione, soglie di fondo, ostruzioni od ostacoli in alveo hanno effetti notevolmente diversi sulle correnti a pelo libero se il moto lungo il tronco considerato avviene in condizioni di corrente lenta, in quelle di corrente veloce, oppure con transizione attraverso lo stato critico.

Se la corrente si mantiene *ovunque lenta*, od *ovunque veloce*, il carico totale, passando da una sezione a monte ad una sezione a valle della singolarità, dove si indica con U_2 la velocità media, subisce una diminuzione che, come perdita localizzata di carico effettivo, si può esprimere nella forma

$$\Delta H = \xi \frac{U_2^3}{2g} \quad [18.35]$$

Se la corrente è ovunque accelerata, si attribuiscono al coefficiente ξ di perdita valori di norma compresi fra 0,05 e 0,15 in relazione con la forma della singolarità.

Nel caso di corrente ritardata è più difficile valutare a priori il coefficiente ξ perché il suo campo di variazione risulta abbastanza ampio. Quando le informazioni disponibili lo consentono, conviene utilizzare l'equazione della quantità di moto, come per il brusco allargamento di sezione, per correlare direttamente le caratteristiche a monte con quelle a valle della singolarità.

A titolo di esempio di valutazione delle perdite localizzate si può considerare il caso del *moto attraverso una griglia*.

Secondo Kirschmer (1926) il coefficiente di perdita vale in questo caso

$$\xi = k_1 (\bar{S}/d)^3 \sin \theta \quad [18.36]$$

con \bar{S} spessore delle sbarre, di lunghezza \bar{L} in sezione,

d distanza netta fra le sbarre,

θ inclinazione della griglia su un piano orizzontale,

k_1 coefficiente di forma, con i seguenti valori:

fronti anteriore e posteriore squadrate	$\bar{L}/\bar{S} = 5$	$k_1 = 2,42$
fronte ant. semicircolare, post. squadrata	$\bar{L}/\bar{S} = 5$	$k_1 = 1,83$
fronti ant. e post. semicircolari	$\bar{L}/\bar{S} = 5$	$k_1 = 1,67$
barre circolari		$k_1 = 1,79$
barre profilate posteriormente		$k_1 = 0,76$

Altro esempio tecnicamente interessante è costituito dal passaggio di una corrente attraverso le pile di un ponte.

Il rapido restringimento dell'alveo, prodotto dalle pile di un ponte o da altre ostruzioni, può avere sulla corrente un effetto tale da alterarne lo stato portandola ad assumere la profondità critica, oppure può limitarsi a provocare un rigurgito, a monte se la corrente è lenta, a valle se è

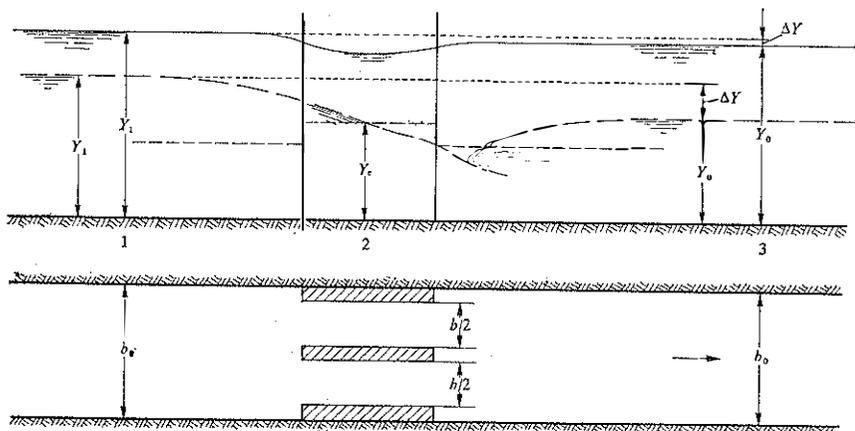


Fig. 18.26. - Deflusso attraverso un'ostruzione; a linea intera il profilo nel caso di corrente ovunque lenta, a tratteggio il profilo nel caso di attraversamento della profondità critica.

veloce, conservandole ovunque il carattere originario. Le due situazioni sono rappresentate nella figura 18.26. In alveo rettangolare, largo b_0 , dette Y_0 ed U_0 rispettivamente la profondità e la velocità della corrente indisturbata e b la larghezza del restringimento, la condizione perché, in assenza di perdite, non si verifichi l'attraversamento della profondità critica

$$Y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb^2}}$$

è che il carico specifico della corrente indisturbata sia maggiore od uguale al carico critico per la portata data

$$E_c = \frac{3}{2} Y_c = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb^2}},$$

ossia che risulti

$$Y_0 + \frac{U_0^2}{2g} > \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb^2}}. \quad [18.37]$$

Se la corrente indisturbata è lenta, il primo membro riproduce il carico a valle del restringimento, in una sezione come la 3 della figura 18.26. Poiché perdite, dell'ordine di qualche unità per cento del carico specifico, sono temibili fra la sezione di minima area e la sezione 3 se la corrente si mantiene *sempre lenta*, la condizione limite non si verifica rigorosamente nel caso di uguaglianza dei due membri della [18.37], ma quando il primo diventa inferiore al secondo di qualche unità per cento, in misura variabile secondo l'entità della strozzatura.

Indicando con

$$Fr_0 = \frac{U_0}{\sqrt{gY_0}}$$

il numero di Froude della corrente indisturbata, la [18.37] diventa

$$1 + \frac{Fr_0^2}{2} - \frac{3}{2} \frac{Fr_0^3}{(b/b_0)^3} \geq 0. \tag{18.38}$$

Nel caso di uguaglianza, ad ogni valore di b/b_0 corrispondono due soluzioni positive per i numeri di Froude Fr_0 , che si indicano come numeri limite F_L : rispettivamente $F_L' < 1$ ed $F_L'' > 1$. La corrente si mantiene ovunque lenta nel passaggio attraverso il restringimento se risulta $Fr_0 \leq F_L'$, ed analogamente ovunque veloce se $Fr_0 \geq F_L''$.

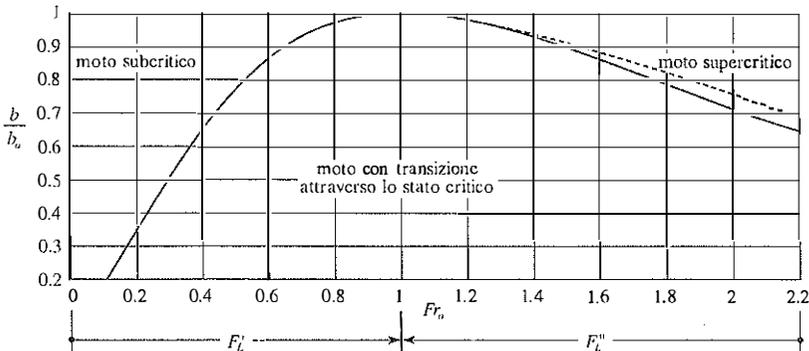


Fig. 18.27. - Grafico per individuare l'eventuale attraversamento della profondità critica in corrispondenza di un restringimento del canale.

Nel diagramma della figura 18.27 è rappresentato con linea continua l'andamento delle soluzioni F_L in funzione del rapporto di restringimento b/b_0 e con linea tratteggiata un andamento indicativo delle curve limite tenendo conto delle perdite. Il campo sottostante queste curve rappresenta quello del moto con transizione attraverso la profondità critica.

A destra delle curve limite è il campo del moto supercritico, cioè del moto in condizioni di corrente sempre veloce. Un'indagine sperimentale sull'effetto del restringimento in tali condizioni è stata effettuata da Becchi e al. (1973) nel campo $1 < Fr_0 < 2$: i risultati hanno confermato la curva inferiore, a linea intera, per il passaggio da moto supercritico a moto con transizione al diminuire del numero di Froude, e la curva limite superiore, a tratteggio, per il passaggio inverso al crescere di Fr_0 .

Quando il punto di coordinate assegnate ($Fr_0, b/b_0$) cade nella regione a sinistra della curva F'_2 , il moto si mantiene sempre lento ed il *rigurgito* ΔY , cioè la sopraelevazione del pelo libero a monte del restringimento rispetto alla profondità Y_0 della corrente indisturbata, si può calcolare con la seguente formula empirica di Yarnell (1934)

$$\frac{\Delta Y}{Y_0} = k_2(k_2 - 0,6 + 5 Fr_0^2) \left\{ 1 - \frac{b}{b_0} + 15 \left(1 - \frac{b}{b_0} \right)^4 \right\} Fr_0^2 \quad [18.39]$$

dove k_2 è un fattore di forma delle pile che ha i valori indicati nella figura 18.28.

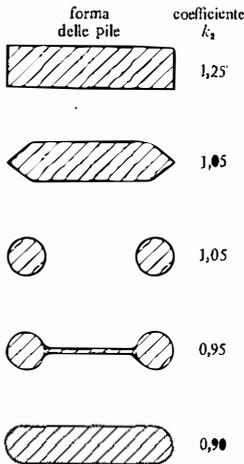


Fig. 18.28. - Coefficienti di forma delle pile dei ponti per il calcolo del rigurgito su corrente che si conserva lenta.

18.16. Transizione attraverso lo stato critico. Sezioni di controllo.

L'attraversamento della profondità critica, a partire da condizioni di *corrente lenta a monte*, si può verificare se l'alveo presenta una variazione della

pendenza del fondo, come si è visto al paragrafo 18.8, oppure se presenta una variazione di sezione, per restringimento o allargamento laterale, per un rialzo del fondo o per un abbassamento rapido dello stesso.

La sezione dove si verifica l'attraversamento dello stato critico viene chiamata *sezione di controllo* perché rende le caratteristiche della corrente a monte indipendenti dalla situazione di valle. Tale assetto del moto richiede che il deflusso nella sezione di controllo non venga sommerso dal rigurgito dell'eventuale corrente lenta di valle; e quindi richiede, per ogni portata, che il carico effettivo corrispondente alla profondità critica nella sezione di controllo sia maggiore del carico effettivo nella sezione della corrente indisturbata a valle, ed in misura tale da sopportare le perdite fra le due sezioni.

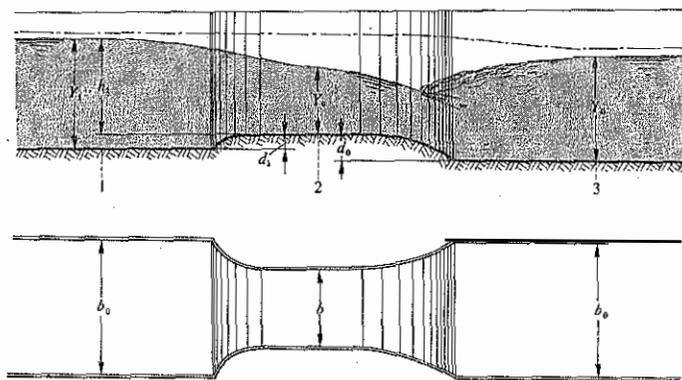


Fig. 18.29. - Canale Venturi.

Nella figura 18.29 è rappresentata una strozzatura in un canale rettangolare dovuta insieme ad un restringimento laterale dalla larghezza originaria b_0 alla minima b e ad un rialzo del fondo con una soglia di altezza d_1 rispetto alla quota di monte e d_0 rispetto a quella di valle. Tale disposizione è caratteristica di un misuratore di portata delle correnti a pelo libero: il *misuratore a risalto*, detto anche *canale Venturi* per l'analogia con l'omonimo misuratore di portata delle correnti in pressione. Esso controlla la portata in funzione soltanto del livello di monte e come tale rientra nella classe dei misuratori detti semimoduli.

Nelle condizioni di corretto funzionamento, la corrente lenta di monte accelera nel tronco ristretto, attraversa lo stato critico passando a corrente veloce e si raccorda con la corrente lenta di valle per mezzo di un risalto idraulico che si localizza nel tratto divergente del canale. Sono sempre piccole le perdite di energia fra la sezione 1 della corrente cilin-

drica a monte del restringimento e la sezione 2 dove avviene l'attraversamento della profondità critica con distribuzione ancora idrostatica della pressione.

In condizioni di moto *ideale* sussiste l'equazione

$$h_1 + \frac{U_1^2}{2g} = \frac{3}{2} Y_c$$

essendo U_1 la velocità media, Y_1 la profondità ed $h_1 = Y_1 - d_1$ il carico piezometrico riferito alla soglia, nella sezione 1 a monte della chiamata, mentre Y_c è la profondità critica per la data portata nel tratto ristretto.

In termini di portata Q e di carico h_1 l'equazione precedente si trasforma nella

$$h_1 + \frac{Q^2}{2gb_0^2(h_1 + d_1)^2} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb^2}} \quad [18.40]$$

adottata da De Marchi nel 1936 per studiare il funzionamento del misuratore a risalto.

Definito il coefficiente C_q di portata nella forma

$$Q = C_q b h_1 \sqrt{2gh_1} \quad [18.41]$$

l'eq. [18.40] del misuratore a risalto diventa un'equazione cubica in C_q^2 ,

$$C_q^2 - \frac{3}{2^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{1 + d_1/h_1}{b/b_0} \right)^2 C_q^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{1 + d_1/h_1}{b/b_0} \right)^3 = 0, \quad [18.42]$$

la quale ammette due radici positive di cui la minore corrisponde ad $h_1/Y_c > 1$, cioè al caso qui considerato di corrente lenta a monte del restringimento. I valori di tale radice, calcolati in funzione del parametro

$$\frac{b/b_0}{1 + d_1/h_1}$$

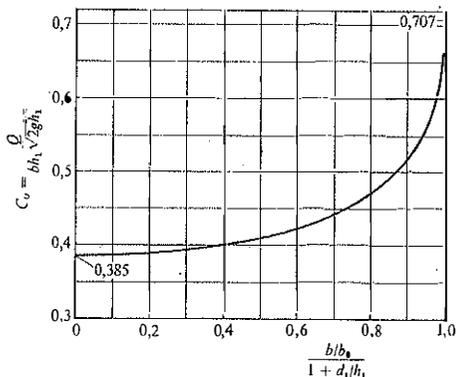


Fig. 18.30. - Coefficiente di portata teorico di un canale Venturi.

sono riportati nel diagramma della figura 18.30. Essi rappresentano i valori teorici del coefficiente di portata, valori che differiscono poco da quelli sperimentali risultando di norma maggiori soltanto di qualche unità per cento. Se si vuole ottenere un più elevato grado di precisione il misuratore a risalto richiede una taratura diretta, almeno su modello.

L'analisi del moto attraverso il canale Venturi può essere condotta in modo da fornire direttamente il rigurgito provocato da un restringimento di sezione quando la corrente attraversa lo stato critico. Per questo conviene riscrivere l'equazione del misuratore a risalto in funzione della profondità di monte Y_1 mettendo in conto anche un termine di perdita ΔH ; si ha

$$Y_1 - d_1 + \frac{Q^2}{2gb_0^2Y_1^2} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb^2}} + \Delta H$$

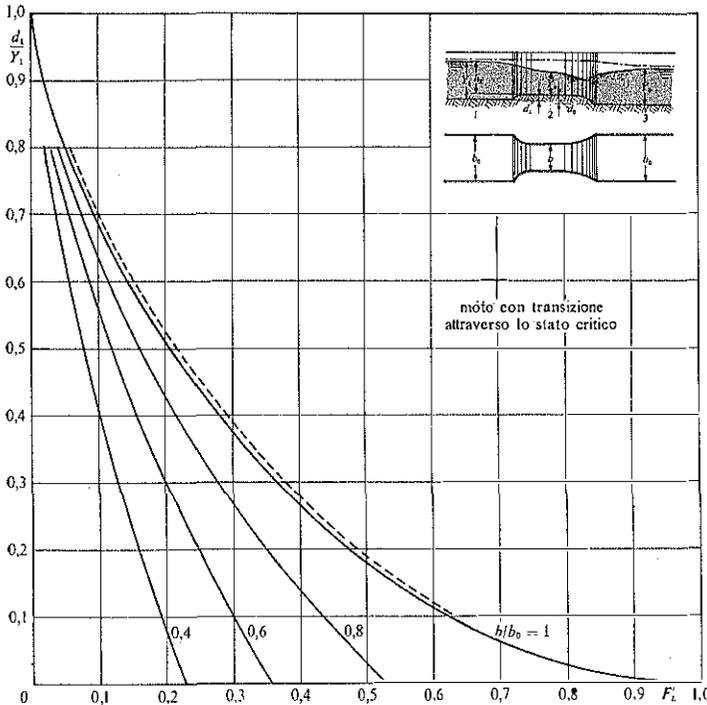


Fig. 18.31. - Valori del numero di Froude limite F'_L in funzione di d_1/Y_1 per valori del rapporto di restringimento da 0,4 a 1.

oppure, introducendo il numero di Froude

$$Fr_1 = \frac{U_1}{\sqrt{gY_1}} = \frac{Q}{b_0 Y_1 \sqrt{gY_1}},$$

anche

$$1 + \frac{Fr_1^2}{2} - \frac{3}{2} \frac{Fr_1^4}{(b/b_0)^3} = \frac{d_1}{Y_1} + \frac{\Delta H}{Y_1}.$$

In assenza di perdite di carico ΔH questa equazione fornirebbe una sola radice Fr_1 , positiva e minore di 1; radice che è già stata chiamata F'_L nel paragrafo 18.15, con riferimento al caso di soglia di fondo nulla.

I valori F'_L in funzione di d_1/Y_1 , per assegnati valori del rapporto di restringimento, sono rappresentati graficamente dalle curve tracciate nel diagramma della figura 18.31. Fra il precedente coefficiente di portata C_d ed il limite F'_L sussiste l'evidente relazione: $F'_L = 2C_d(b/b_0)^{3/2}(1 + d_1/h_1)^{-3/2}$.

Si fa ora riferimento alle caratteristiche della corrente lenta indisturbata: velocità media U_0 , profondità Y_0 e quindi numero di Froude

$$Fr_0 = \frac{U_0}{\sqrt{gY_0}} = \frac{Q}{b_0 Y_0 \sqrt{gY_0}}$$

per cui

$$\frac{Fr_0}{Fr_1} = \left(\frac{Y_1}{Y_0}\right)^{3/2}.$$

In condizioni *ideali* è $Fr_1 = F'_L$ ed in tal caso il grafico della relazione precedente è costituito dalla retta tratteggiata nel diagramma bilogarithmico della figura 18.32. Marchi (1968) ha osservato che i risultati sperimentali

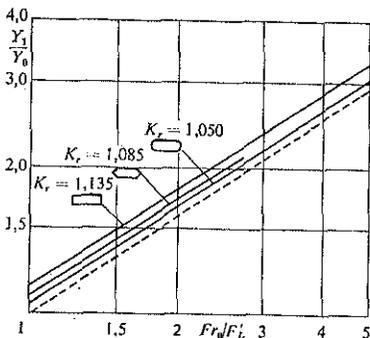


Fig. 18.32. - Correlazione tra Y_1/Y_0 e Fr_0/F'_L in base ai risultati sperimentali di Yarnell.

di Yarnell (1934) sul rigurgito provocato dalle pile dei ponti nelle condizioni in esame stanno su rette *parallele* alla precedente, con scarti inferiori al 5%. Dal caso ideale di moto senza perdite si può quindi passare ad una interpretazione aderente alle condizioni reali ponendo

$$\frac{Y_1}{Y_0} = K_f \left(\frac{Fr_0}{F'_L} \right)^{\frac{2}{3}} \quad [18.43]$$

nella quale K_f assume valori legati solo alla forma del restringimento.

L'eq. [18.43] si può scrivere nella forma

$$Y_1 = K_f \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb_0^3 F'_L}} \quad [18.44]$$

utile per il calcolo diretto della profondità a monte del restringimento, e quindi per il calcolo del rigurgito $\Delta Y = Y_1 - Y_0$; oppure si può porre nella forma

$$Q = \frac{F'_L}{\sqrt{2K_f}} b_0 Y_1 \sqrt{2gY_1} \quad [18.45]$$

adatta al calcolo diretto della portata defluente, in funzione della profondità Y_1 a monte del misuratore anziché del carico piezometrico di monte h_1 . Quando il canale Venturi è ben sagomato, i risultati delle esperienze su modello di Contessini (1936) e di De Marchi (1937) forniscono i seguenti valori di K_f , con un'approssimazione contenuta entro il 5%:

$b/b_0 = 1$	$d_1 = d_0 \neq 0$	$K_f = 1,012$
$b/b_0 = 2/3$	$d_1 = d_0 = 0$	$K_f = 1,023$
	$d_1 = 0, \quad d_0 \neq 0$	$K_f = 1,016$
	$d_1 = d_0 \neq 0$	$K_f = 1,007$
$b/b_0 = 1/3$	$d_1 = d_0 = 0$	$K_f = 1,023$
	$d_1 = 0, \quad d_0 \neq 0$	$K_f = 1,022$
	$d_1 = d_0 \neq 0$	$K_f = 1,020$

È chiaro che lo stesso moltiplicatore $1/K_f^{\frac{2}{3}}$ dell'eq. [18.45] rappresenta la correzione sperimentale del coefficiente teorico di portata C_0 della [18.41].

Nel caso del deflusso fra le *pile di un ponte* con passaggio della corrente *attraverso lo stato critico* la profondità a monte del ponte si calcola

con l'eq. [18.44]

$$Y_1 = K_f \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb_0^3 F_L'^2}}$$

dove F_L' è dato graficamente dalla curva del diagramma di figura 18.33 che riporta ingrandita la parte F_L' del diagramma della figura 18.27. Per quanto riguarda il coefficiente K_f , il confronto con i risultati sperimentali di Yarnell (1934) ha fornito i seguenti valori:

pile con fronti squadrate	$K_f = 1,135$
pile con fronti triangolari a 90°	$K_f = 1,085$
pile con fronti semicircolari	$K_f = 1,050$

come mostra anche la figura 18.32.

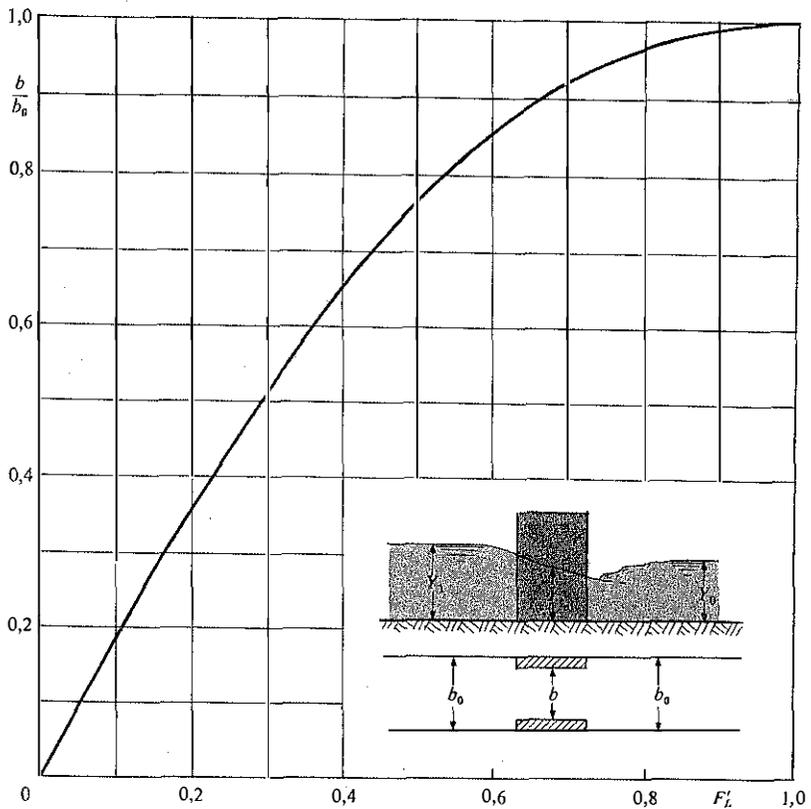


Fig. 18.33. - Grafico per la valutazione di F_L' in funzione del rapporto di restringimento b/b_0 , nel caso di fondo piano.

18.17. **Stramazzo Belanger.**

Un rialzo localizzato del fondo è detto anche *soglia* di fondo, ma se la sopraelevazione è confrontabile con lo spessore della lama sulla soglia si preferisce adottare il termine di *stramazzo*. Quando anche lo sviluppo assiale della soglia è notevole si dice che lo stramazzo è in *parete grossa*. Esso è realizzato ordinariamente con arrotondamento dello spigolo di monte allo scopo di evitare distacchi di vena, e presenta altezza tale da rendere trascurabile il carico cinetico di arrivo rispetto al carico piezometrico h di monte, misurato rispetto alla soglia. Lo stramazzo è detto allora *stramazzo Belanger* dal nome dello studioso che ne esaminò il funzionamento nel 1845, avanzando per primo l'ipotesi che il deflusso si realizzi con la portata massima relativa al carico assegnato (v. fig. 18.34).

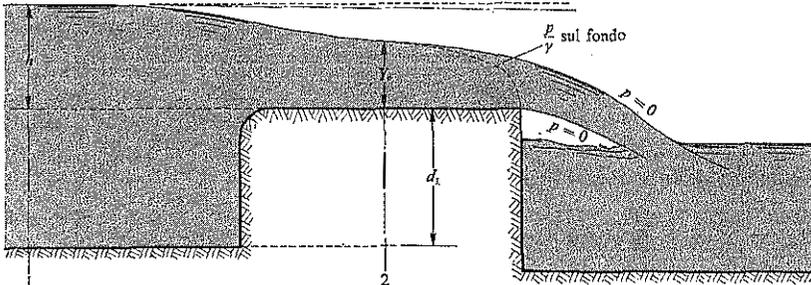


Fig. 18.34. - Stramazzo in parete grossa: tipo Belanger.

Detta Y la profondità della corrente sulla soglia in una sezione dove la distribuzione della pressione si possa ritenere idrostatica, la conservazione del carico effettivo H , coincidente a monte con h , porta a scrivere

$$U = \sqrt{2g(h - Y)}$$

e quindi

$$Q = bY\sqrt{2g(h - Y)}.$$

Il massimo valore della portata, per dato h , si verifica quando $Y = (2/3)h$, cioè in corrispondenza della profondità critica per il carico effettivo assegnato. Il risultato

$$Q = \frac{2}{3\sqrt{3}} bh\sqrt{2gh} \tag{18.46}$$

coincide evidentemente con quello che deriva dalla [18.40] trascurando l'altezza cinetica a primo membro e può essere espresso nella forma generale

$$Q = C_q bh\sqrt{2gh}$$

assumendo per il coefficiente di portata il valore

$$C_q = \frac{2}{3\sqrt{3}} = 0,385. \quad [18.47]$$

L'esperienza conferma questo valore entro il 3-4%, convalidando così l'ipotesi che la portata sia la massima compatibile con il carico di monte. Com'è ovvio la curva di De Marchi relativa al canale Venturi, riportata nella figura 18.30, termina con lo stesso valore di C_q per grandi altezze di soglia e restringimento nullo.

Il comportamento della corrente che scorre sulla soglia di uno stramazzo in parete grossa e che è completamente aerata a valle dello stramazzo stesso, costituisce un esempio di lama liquida con *caduta libera* (fig. 18.35). Nella sezione di sbocco la distribuzione della pressione è evidentemente non idrostatica, dovendo assumere il valore atmosferico sia in superficie sia sul fondo. La riduzione delle pressioni rispetto al valore idrostatico della corrente cilindrica determina aumenti di velocità e quindi riduzione della quota idrica.

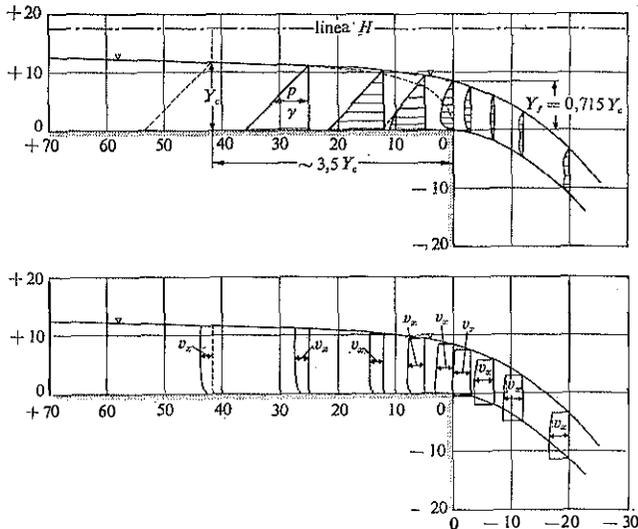


Fig. 18.35. - Caduta libera di una corrente inizialmente lenta (da Rouse, 1933).

Misure sperimentali, in particolare di Rouse (1933-36), provano che la profondità Y , nella sezione di sbocco vale

$$Y, = 0,715Y_c = 0,715 \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb^2}}. \quad [18.48]$$

Mediante questa equazione, misurando la profondità Y , si può valutare la portata:

$$Q = \frac{1}{(0,715)^3} bY, \sqrt{gY,} = 1,17 bY, \sqrt{2gY,}.$$

In effetti l'utilizzazione del processo di caduta libera come misuratore di portata non consente un elevato grado di approssimazione per la imprecisione insita nella misura della profondità allo sbocco.

Anche il riferimento alla profondità critica Y_c , esistente più a monte, e quindi l'impiego della

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} bY_c \sqrt{2gY_c} = 0,707 bY_c \sqrt{2gY_c}$$

presenta analoghe incertezze, per la indeterminazione della posizione in cui si presenta la profondità critica. I rilievi sperimentali indicano una distanza dallo sbocco intorno a $3,5Y_c$.

18.18. Stramazzo in parete sottile.

Gli stramazzi che garantiscono il più alto grado di precisione nella misura della portata, fino all'1%, sono quelli in parete sottile.

Il prototipo è lo *stramazzo Bazin*, caratterizzato oltre che dalla soglia a forma di lama sottile orizzontale, dall'assenza di contrazione laterale e dalla completa aerazione sotto la vena effluente.

Le norme UNI stabiliscono i particolari esecutivi di questo tipo di stramazzo, indicati nella figura 18.36, ed anche le caratteristiche del canale di alimentazione, che hanno influenza non trascurabile sul coefficiente di portata dello stramazzo. Tale canale deve avere fondo piano, sponde verticali lisce e lunghezza non minore di 20 volte il massimo valore del carico h , né di 3 volte la larghezza dello stramazzo. A valle della soglia, le pareti verticali devono accompagnare la vena tracimante per un tratto sufficientemente lungo da evitare perturbazioni.

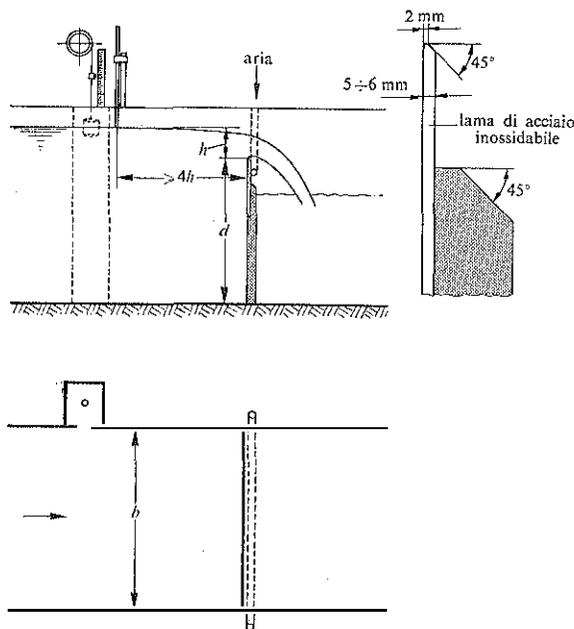


Fig. 18.36. - Stramazzo in parete sottile: tipo Bazin.

Attraverso una serie di esperienze sistematiche pubblicate fra il 1888 ed il 1898, Bazin ha fornito i valori del coefficiente C_Q di portata dell'equazione

$$Q = C_Q b h \sqrt{2gh}$$

in un campo di variazione del carico h fra 0,05 e 0,60 m e con altezze di traversa d pari a 0,24-0,35-0,50-0,75-1,135 m; Bazin riassume i risultati delle sue esperienze nella formula

$$C_Q = \left[0,405 + \frac{0,003}{h} \right] \left[1 + 0,55 \left(\frac{h}{h+d} \right)^2 \right] \quad [18.49]$$

valida per $0,10 \text{ m} \leq h \leq 0,60 \text{ m}$.

Questa formula ha la struttura proposta da Weisbach nel 1844: in essa è presente un fattore correttivo adimensionale, dipendente da $h/(h+d)$, che mette in conto il contributo al carico dato dalla velocità di arrivo nel canale. Vi compare inoltre un fattore $0,003/h$, nel quale h deve essere espresso in metri; questo termine è apprezzabile soprattutto per piccoli

valori di h ed interpreta l'influenza della tensione superficiale sulla contrazione della vena.

Rehbock, dall'esame di numerose esperienze proprie e di altri autori, ha proposto nel 1929 la seguente formula

$$Q = \tilde{C}_0 b (h + 0,0011) \sqrt{2g(h + 0,0011)}$$

con

$$\tilde{C}_0 = 0,4023 + 0,0542 \left(\frac{h + 0,0011}{d} \right).$$

Ad essa corrisponde, nell'equazione usuale

$$Q = C_0 b h \sqrt{2gh}$$

il valore del coefficiente di efflusso

$$C_0 = \left[0,4023 + 0,0542 \frac{h}{d} \left(1 + \frac{0,0011}{h} \right) \right] \left[1 + \frac{0,0011}{h} \right]^{\frac{3}{2}}. \quad [18.50]$$

Evidentemente, a parte la correzione adimensionale h/d dovuta all'effetto della velocità di arrivo, anche qui il parametro dimensionale 0,0011, espresso in metri, mette in conto l'influenza della tensione superficiale sulla vena effluente.

La formula di Bazin fornisce valori delle portate maggiori di quelli della formula di Rehbock dell'1-2%, finché il carico supera 0,20 m. Le differenze aumentano se il carico è $< 0,20$ m, raggiungendo il 5% per $h \simeq 0,10$ m.

La causa, per quanto riguarda le espressioni formali, sta essenzialmente nel diverso contributo dei fattori dimensionali che mettono in conto l'effetto della tensione superficiale: prescindendo da tali fattori, le due formule forniscono infatti valori che differiscono meno dello 0,5% per $h/d \leq 0,7$. D'altra parte, per carichi non troppo piccoli, differenze mediamente dell'1-2% si riscontrano fra i risultati stessi delle serie sperimentali da cui sono state derivate le formule in esame. La spiegazione più attendibile sta, secondo Puppini, nel diverso tipo di canale alimentatore impiegato: un lungo canale a sezione completamente libera nel caso delle esperienze di Bazin, un canale più corto, con griglie per uniformare la distribuzione della velocità, nelle serie sperimentali di Rehbock. Nel primo caso l'accentuarsi della velocità superficiale poteva quindi determinare, a parità di carico, portate lievemente maggiori.

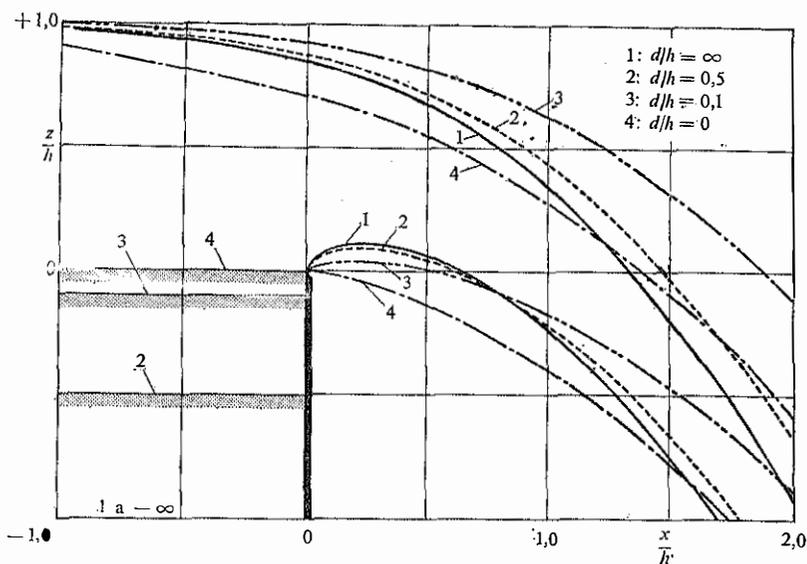


Fig. 18.37. - Profili di lame tracimanti con diverse altezze della traversa (da Rouse, 1938).

L'andamento dei contorni superiore ed inferiore della lama tracimante dallo stramazzo tipo Bazin è rappresentato nella figura 18.37 per diversi valori del rapporto h/d (Rouse, 1938). Nella figura 18.38 sono riportate, in termini adimensionali, l'ascissa x/h e la quota z/h rispetto alla soglia dello stramazzo dei punti delle stesse curve di contorno, in funzione di h/d (cfr. Ippen, 1950). Particolarmente importante è il profilo inferiore della vena, perché con riferimento a tale profilo, calcolato per il massimo carico previsto, si progetta il tracciato del paramento delle dighe sfioranti in modo da assicurare ovunque una buona aderenza della lama tracimante ed evitare depressioni locali e fenomeni di separazione. Un'equazione del profilo inferiore della vena libera è stata proposta da Scimemi (1937) nella forma

$$\frac{\bar{z}}{h} = 0,5 \left(\frac{\bar{x}}{h} \right)^{1,85},$$

avendo assunto l'origine delle coordinate nel vertice superiore della curva e l'asse \bar{z} verticale e positivo verso il basso (cfr. fig. 18.39).

Uno stramazzo in parete sottile di largo impiego nelle reti di distribuzione irrigua è lo *stramazzo Cipolletti* (1886), progettato in modo da rendere trascurabile l'effetto della velocità di arrivo nel canale di calma,

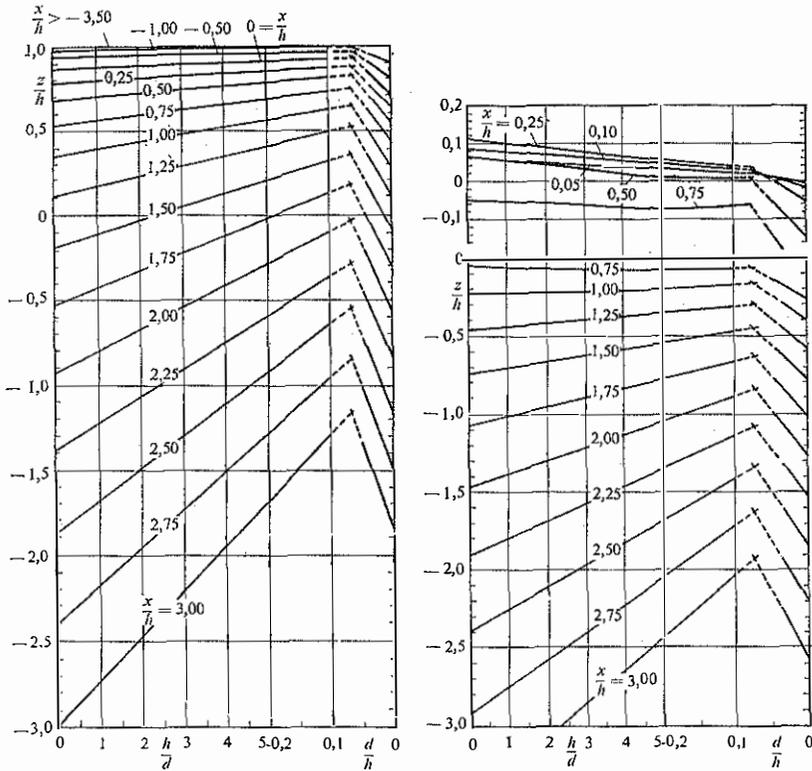


Fig. 18.38. - Coordinate dei profili superiore ed inferiore di una lama tracimante (da Ippen, 1950).

più largo della luce, e in modo da compensare l'effetto di contrazione laterale. I fianchi di questo stramazzo sono inclinati di 1 di base su 4 di altezza: così il coefficiente di efflusso resta quasi costante e la portata si può calcolare con la formula

$$Q = 0,42 bh\sqrt{2gh} \tag{18.51}$$

essendo b la larghezza della soglia.

Per la misura di piccole portate riesce conveniente l'uso di stramazzi in parete sottile di forma *triangolare* con il vertice in basso. Indicando con h il carico sul vertice, la portata si valuta con la

$$Q = C_q h^2 \sqrt{2gh}. \tag{18.52}$$

Thomson (1858), per stramazzi ad *angolo retto*, aveva proposto il coefficiente $C_Q = 0,33$ per $0,05 \text{ m} < h < 0,18 \text{ m}$. Successive esperienze di J. Barr (Puppini, 1947) hanno precisato i seguenti valori di C_Q con vena libera

$h =$	5	10	15	20	25 cm
$C_Q =$	0,320	0,318	0,316	0,314	0,312

Una taratura diretta consente di raggiungere, con questi stramazzi triangolari, un buon grado di precisione anche nella misura di portate molto piccole, perché essi richiedono carichi notevolmente più alti, e quindi meglio misurabili, di quelli degli stramazzi rettangolari a parità di portata e di larghezza al pelo libero.

La valutazione delle portate nei canali, e particolarmente delle grandi portate, si può eseguire integrando sulla sezione una serie contemporanea di misure locali di velocità, opportunamente distribuite. Per una esauriente esposizione dei metodi si veda A. Ghetti: *Idraulica*, Libreria Cortina, 1980.

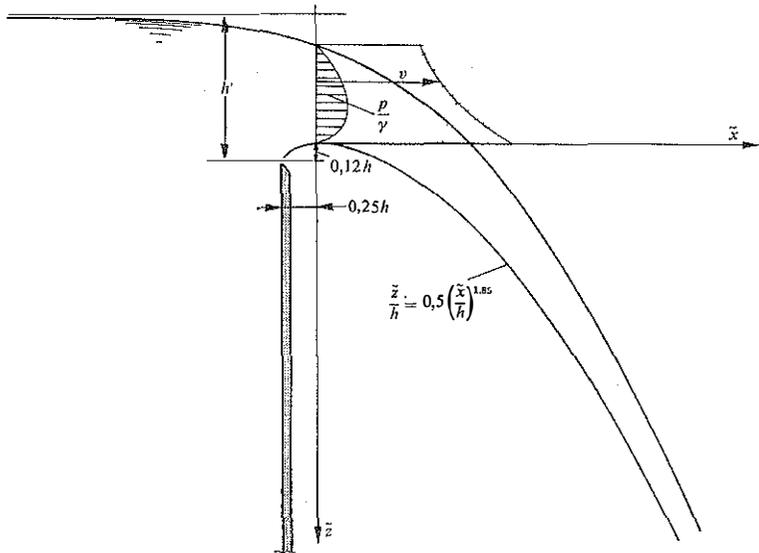


Fig. 18.39. – Profilo della lama trascinata da uno stramazzo in parete sottile; equazione di Sciemi (1937) per il profilo inferiore.

18.19. Variazioni di portata.

Per lo studio degli effetti di una variazione di portata, dovuta ad un afflusso o a un deflusso laterale, quando tale variazione si verifica gradualmente in un tronco d'alveo cilindrico di breve lunghezza, si possono utilizzare le equazioni che seguono (cfr. De Marchi, 1947, e Nosedà, 1957).

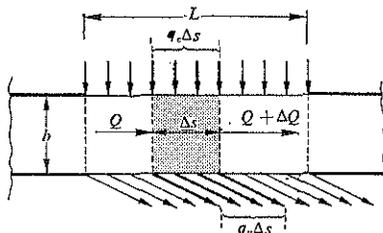


Fig. 18.40. - Schema di afflusso e di deflusso laterali.

L'afflusso di una portata $q_e(s)$ per unità di lunghezza s della corrente, in direzione ad essa normale come mostra la figura 18.40, è un fenomeno che può essere esaminato impiegando l'equazione della quantità di moto proiettata sul fondo del tratto di corrente in esame. Trascurando l'eventuale componente del peso e la resistenza al contorno, come nell'applicazione al risalto diretto (cfr. paragrafi 18.10 e 18.11), si ritrova la condizione di conservazione della quantità di moto totale, con la sola differenza che qui la portata varia con continuità. Si utilizzano quindi le equazioni

$$\begin{cases} dQ = q_e(s) ds \\ S = \gamma_c \Omega + \rho Q^2 / \Omega = \text{cost.} \end{cases} \quad [18.53]$$

Le grandezze caratteristiche del moto sono assegnate ad una estremità del tronco di lunghezza L . Conoscendo la portata affluente $q_e(s)$, si può calcolare in qualsiasi sezione la portata Q , utilizzando la prima eq. [18.53] e successivamente la profondità, utilizzando la seconda equazione con il valore della quantità di moto totale S noto nella sezione di estremità.

In alveo rettangolare, dalla

$$S = \frac{1}{2} \gamma b Y^2 + \rho \frac{Q^2}{bY} = \text{cost}$$

deriva la curva $Y = Y(Q)$ riportata nella figura 18.41.

Il procedimento risolutivo è stato esteso da Citrini (1942, 1948) al caso di canali convergenti e divergenti e al caso in cui l'apporto della quantità di moto della portata affluente non sia nullo nella direzione della corrente.

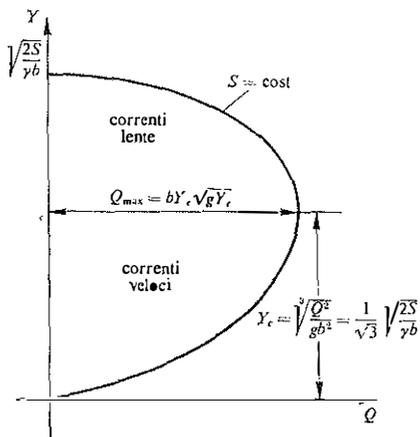


Fig. 18.41. - Relazione profondità-portata a quantità di moto totale $S = \text{cost}$ in alveo rettangolare.

Il deflusso laterale libero di una portata $q_u(s)$, per unità di lunghezza s della corrente, è il processo tipico di funzionamento di uno stramazzo che ha la soglia orizzontale disposta lungo la sponda del canale, ed è detto per questo *stramazzo laterale*. La modesta importanza delle perdite nel tronco di corrente interessato dallo stramazzo consente di assumere l'ipotesi semplificativa di carico specifico costante lungo lo stesso tronco (De Marchi, 1934). Indicando, come al solito, con Y la profondità della corrente, con d la quota della soglia dello stramazzo sul fondo e con C_0 il coefficiente di portata, si utilizzano allora le equazioni

$$\begin{cases} dQ = -q_u(s) ds \\ q_u(s) = C_0 \sqrt{2g}(Y-d)^{3/2} \\ E = Y + Q^2/2g\Omega^2 = \text{cost.} \end{cases} \quad [18.54]$$

Il coefficiente di portata si ritiene ordinariamente costante con valori $C_0 = 0,38 \div 0,40$.

Il sistema delle equazioni [18.54] può essere risolto rispetto ad Y per differenze finite, conoscendo le grandezze caratteristiche del moto in una

sezione di estremità. Il profilo lungo la soglia dello sfioratore è crescente verso valle nel caso di corrente lenta, ed è decrescente verso valle nel caso di corrente veloce, come mostra la figura 18.42.

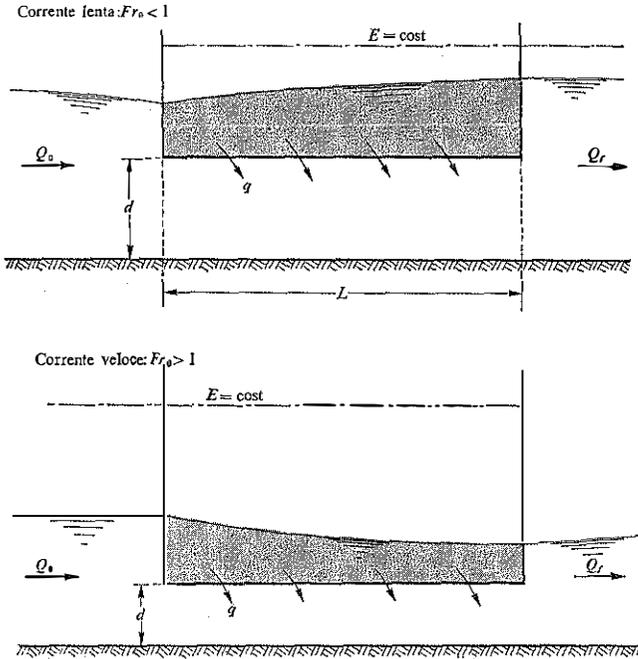


Fig. 18.42. – Profili su uno stramazzo laterale nel caso di corrente in arrivo lenta oppure veloce. Il carico E è dato nel primo caso dalla corrente indisturbata di valle, nel secondo dalla corrente indisturbata di monte.

18.20. Deviazioni e curve nei canali.

a) Correnti lente.

L'effetto di una curva su una corrente lenta è messo in evidenza dalla inclinazione che assume la sua superficie libera, con una sopraelevazione sulla sponda esterna ed una depressione su quella interna.

Lo studio del fenomeno si può condurre in modo semplificato su una curva circolare a fondo piano e pareti verticali assumendo che le velocità dipendano dal raggio di curvatura r come nel vortice irrotazionale, esami-

nato nel paragrafo 8.3. Ogni elemento fluido è soggetto ad una forza centrifuga specifica orizzontale pari a v^2/r , oltre alla consueta forza specifica verticale g dovuta al geopotenziale. Il pelo libero deve perciò assumere una pendenza trasversale per disporsi perpendicolarmente al risultante di queste due forze. Ne deriva, indicando con h la quota del pelo libero,

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{v^2}{gr},$$

ed avendo assunto

$$v = \frac{c_1}{r}$$

si ottiene pure

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{c_1^2}{gr^3}.$$

Integrando questa equazione fra i raggi r_1 interno ed r_2 esterno della curva e le corrispondenti quote del pelo libero h_1 ed h_2 , si ha

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{c_1^2}{2g} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right)$$

od anche, essendo v_m la velocità sulla curva di raggio medio r_m e $b = r_2 - r_1$ la larghezza del canale,

$$\Delta h = \frac{v_m^2 b}{g} \cdot \frac{r_m^3}{r_1^2 r_2^2}. \quad [18.55]$$

Con buona approssimazione si può sostituire $r_m^3/r_1^2 r_2^2$ con $1/r_m$ e v_m con la velocità U media nella sezione, per cui risulta

$$\Delta h \cong \frac{U^2 b}{gr_m} \quad [18.56]$$

conosciuta come formula di Grashof (1869). Per $r_m/b \gg 1,5$ essa fornisce una valutazione tecnicamente soddisfacente del dislivello Δh .

b) Correnti veloci: deviazioni brusche.

Una deviazione θ della parete verticale di un canale provoca, nelle correnti veloci, un cambiamento delle caratteristiche del moto — dire-

zione delle velocità, profondità ed energia — soltanto a valle di una *linea di disturbo* che ha origine nel vertice della deviazione. La linea di disturbo è rappresentata dal fronte di un'onda positiva o di un'onda negativa corrispondentemente ad una deviazione della parete verso l'interno o verso l'esterno rispetto alla corrente, ed è inclinata di un angolo β_1 , detto *angolo di Mach*, funzione del rapporto fra la celerità dell'onda e la celerità della corrente.

Se il numero di Froude della corrente incidente è sufficientemente maggiore di 1, in relazione con l'entità della deviazione, come sarà precisato più avanti, l'onda positiva frange ed assume l'aspetto di un'onda di shock che raccorda, con un risalto, le regioni a monte e a valle della linea di disturbo. Questa situazione, studiata particolarmente da Ippen e Knapp nel 1936-39 e da Rouse nel 1937-38, è rappresentata schematicamente nella figura 18.43.

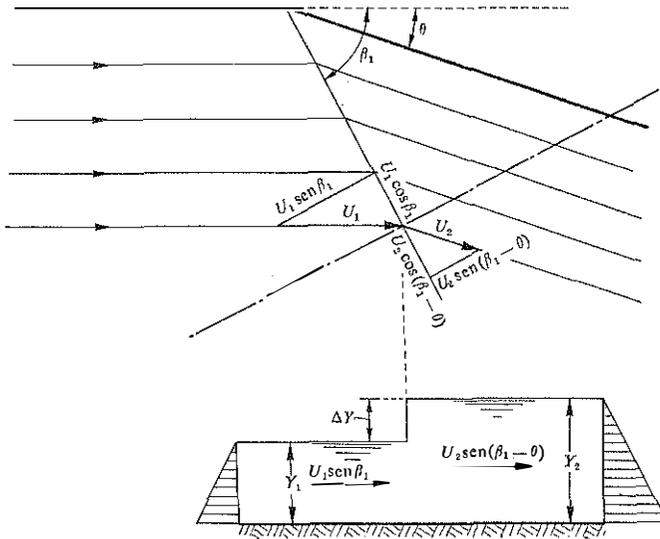


Fig. 18.43. — Schema dell'onda provocata, in corrente veloce, da una deviazione.

Si ritengono trascurabili le componenti verticali della velocità e idrostatica la distribuzione della pressione a monte e a valle del salto. Applicando l'equazione della quantità di moto nella direzione perpendicolare al fronte d'onda, su una larghezza unitaria, con le approssimazioni adottate

usualmente per lo studio del risalto idraulico, si ottiene

$$\gamma \left(\frac{Y_1^2}{2} - \frac{Y_2^2}{2} \right) = \rho Y_2 U_2^2 \sin^2(\beta_1 - \theta) - \rho Y_1 U_1^2 \sin^2 \beta_1. \quad [18.57]$$

Unendo questa equazione a quella di continuità

$$Y_1 U_1 \sin \beta_1 = Y_2 U_2 \sin(\beta_1 - \theta) \quad [18.58]$$

si ha

$$U_1 \sin \beta_1 = \sqrt{g Y_1} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{Y_2}{Y_1} \left(1 + \frac{Y_2}{Y_1} \right)},$$

dalla quale deriva per l'angolo di Mach β_1 l'espressione

$$\sin \beta_1 = \frac{1}{Fr_1} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{Y_2}{Y_1} \left(1 + \frac{Y_2}{Y_1} \right)}. \quad [18.59]$$

Lungo il fronte d'onda dev'essere

$$U_1 \cos \beta_1 = U_2 \cos(\beta_1 - \theta),$$

perché non si hanno variazioni della quantità di moto parallelamente al fronte stesso. Dal rapporto fra la [18.58] e l'equazione precedente segue

$$Y_1 \operatorname{tg} \beta_1 = Y_2 \operatorname{tg}(\beta_1 - \theta). \quad [18.60]$$

Il sistema delle equazioni [18.59] e [18.60] consente di calcolare β_1 ed Y_2 partendo dalla conoscenza della deviazione θ e delle caratteristiche della corrente a monte. Nel diagramma della figura 18.44 sono rappresentate con tratto intero le curve $Fr_1 = \text{cost}$ che forniscono, per assegnati valori di θ , i corrispondenti valori β_1 nel quadro di sinistra ed Y_2/Y_1 nel quadro di destra. Tale rappresentazione è stata introdotta da Ippen (1949) ed i valori sono stati calcolati utilizzando il sistema di equazioni predetto. Si nota che, per ogni dato Fr_1 , esiste un massimo dell'angolo di deviazione θ consentito; ad ogni valore di θ minore del massimo competono due valori di β_1 e di Y_2/Y_1 . I valori tecnicamente più interessanti sono quelli della regione al di sotto della linea $Fr_2 = 1$, che corrispondono a $Fr_2 > 1$, ossia a correnti che si conservano veloci a valle del fronte d'onda.

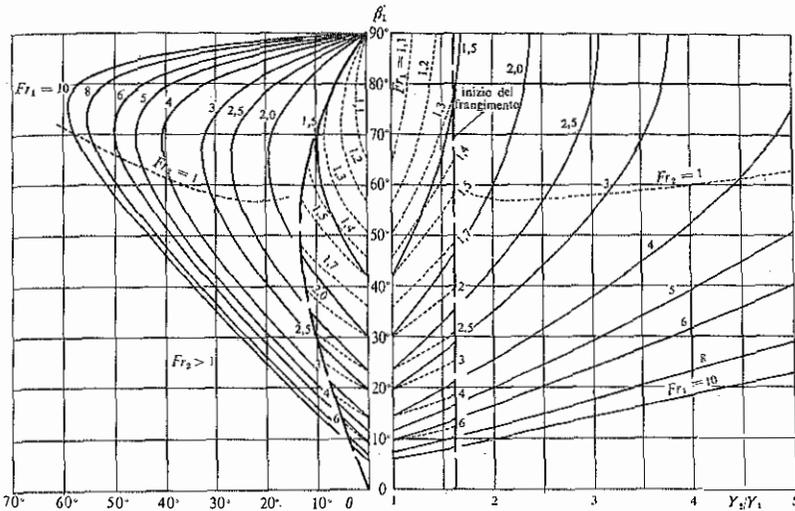


Fig. 18.44. - Grafico per la determinazione dell'angolo di Mach β_1 , e della profondità di valle Y_2 partendo dalla conoscenza della deviazione θ e delle caratteristiche della corrente a monte.

L'onda frangente non si forma in condizioni prossime alle critiche e la linea di disturbo assume allora l'aspetto di un *risalto ondulato*. Corrispondentemente a quanto si verifica in alveo rettangolare nel caso di fronte normale alla direzione della corrente, il risalto ondulato con fronte inclinato di un angolo β_1 si conserva finché è verificata la condizione

$$\frac{U_1 \text{sen} \beta_1}{\sqrt{gY_1}} = Fr_1 \text{sen} \beta_1 < 1,28 . \tag{18.61}$$

Tenendo presente che la celerità del risalto ondulato è data con buona approssimazione da $\sqrt{gY_2}$, essendo Y_2 la profondità in corrispondenza del colmo della prima onda, si può ritenere, per la stazionarietà del treno d'onde, che la componente della velocità del moto nella direzione dell'onda, $U_1 \text{sen} \beta_1$, uguagli tale celerità, ossia

$$U_1 \text{sen} \beta_1 = \sqrt{gY_2} .$$

Di qui deriva

$$\text{sen} \beta_1 = \frac{1}{Fr_1} \sqrt{\frac{Y_2}{Y_1}} \tag{18.62}$$

in luogo della [18.59], mentre sussiste sempre l'eq. [18.60]. Il sistema di queste due equazioni fornisce i valori β_1 ed Y_2/Y_1 in funzione di θ e di Fr_1 per il fronte ondulato. Le curve corrispondenti sono state riportate nel diagramma della figura 18.44 con linee punteggiate. Il campo di validità, in base alla condizione [18.61] e alla relazione [18.62], è

$$Y_2/Y_1 = \frac{U_1^2 \operatorname{sen}^2 \beta_1}{g Y_1} \leq 1,6$$

e tale limite è stato tracciato sul quadro di destra, e quindi riportato, con ovvia costruzione, sul quadro di sinistra. Fra la situazione del fronte a forma di risalto ondulato e quella a salto diretto resta un campo limitato con ondulazioni parzialmente frangenti.

Per quanto riguarda la valutazione del rapporto Y_2/Y_1 i risultati che si ottengono, nella zona di confine tra i due casi esaminati, sono fra loro così vicini da poter ritenere l'impiego del diagramma della figura 18.44 soddisfacente in tutte le situazioni tecniche.

c) Curve nelle correnti veloci.

La parete curva di un canale esercita un'azione su una corrente veloce che può interpretarsi come il risultato di successive deviazioni infinitesime $d\theta$, ciascuna delle quali provoca una sopraelevazione dY . Dette U e Y la velocità e la profondità della corrente incidente, le equazioni che esprimono l'angolo di Mach β , la [18.59] come la [18.62], si riducono, per un'ampiezza d'onda infinitesima, all'unica equazione

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{1}{Fr} = \frac{\sqrt{gY}}{U}. \quad [18.63]$$

La [18.60] assume la forma

$$Y \operatorname{tg} \beta = (Y + dY) \operatorname{tg} (\beta - d\theta)$$

da cui

$$\frac{dY}{d\theta} = \frac{Y}{\operatorname{sen} \beta \cos \beta}$$

e sostituendo Y per mezzo della precedente [18.63] segue

$$\frac{dY}{d\theta} = \frac{U^2}{g} \operatorname{tg} \beta. \quad [18.64]$$

Questa equazione è stata integrata assumendo la *costanza del carico specifico*. Il risultato è

$$\theta = \sqrt{3} \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{Fr^2 - 1}} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{\sqrt{Fr^2 - 1}} - \theta_1 \quad [18.65]$$

dove θ_1 è una costante data dalla condizione che per $\theta = 0$ la profondità della corrente abbia il valore iniziale Y_1 , e quindi sia $Fr = Fr_1$.

Un'altra forma integrale è stata proposta da Ippen e Knapp (1939) sulla base dell'ipotesi di *costanza della velocità*. Il risultato è

$$\frac{Y}{Y_1} = Fr_1^2 \operatorname{sen}^2 \left(\beta_1 + \frac{\theta}{2} \right) \quad [18.66]$$

con

$$\beta_1 = \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{Fr_1}. \quad [18.67]$$

Malgrado l'arbitrarietà dell'ipotesi, la valutazione fornita dalla [18.66] si discosta poco da quella dell'equazione precedente ed in molti casi approssima meglio i risultati sperimentali (cfr. Poggi, 1956).

Per quanto riguarda l'effetto di una curva, nel caso di canale rettangolare con pareti concentriche, si può schematizzare il processo come è indicato nella figura 18.45. Dal punto A inizia una prima onda positiva, cui si sovrappongono le successive onde elementari a valle della linea di disturbo AC inclinata rispetto alla direzione rettilinea originaria dell'angolo β_1 , dato in prima approssimazione dalla [18.67]. Analogamente, dall'origine A' della parete convessa inizia un'onda negativa che si propaga fino al punto C , dove incontra l'onda positiva proveniente da A . Oltre C le due onde si influenzano mutuamente e le perturbazioni si propagano secondo le curve CD e CD' . Nella regione a valle della linea di disturbo AC le onde positive continuano a crescere per la progressiva influenza della parete concava fino alla linea CD , a valle della quale interferiscono le onde negative provenienti dalla parete convessa. Perciò lungo la parete esterna il profilo del pelo libero cresce fino al punto D e lì raggiunge un massimo di profondità.

Per un calcolo tecnico è sufficientemente approssimato assumere i punti di massima e minima profondità D e D' allineati con il centro O della curva e con il punto P' , la cui distanza da A è $b/\operatorname{tg} \beta_1$. Allora

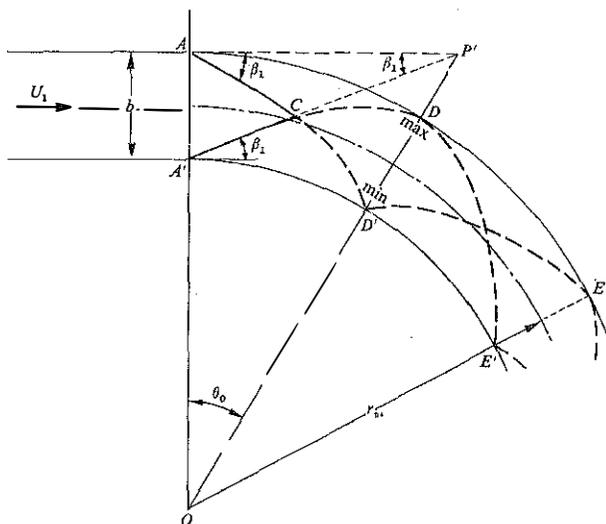


Fig. 18.45. - Effetto schematico di una curva su una corrente veloce.

l'angolo al centro θ_0 è fornito dalla

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{b}{(r_m + b/2) \operatorname{tg} \beta_1}$$

essendo r_m il raggio di curvatura dell'asse del canale largo b .

Calcolato l'angolo di deviazione θ_0 relativo al primo massimo in D , la corrispondente profondità può essere calcolata con l'eq. [18.65] o, più semplicemente con la relazione [18.66] di Knapp ed Ippen che fornisce

$$\frac{Y_{\max}}{Y_1} = Fr_1^2 \operatorname{sen}^2 \left(\beta_1 + \frac{\theta_0}{2} \right).$$

Un sistema efficace per attenuare gli effetti delle curve è quello di operare la suddivisione longitudinale del canale curvilineo mediante setti divisori concentrici con le pareti laterali. Su altri artifici e sulle migliori soluzioni di progetto delle contrazioni e delle espansioni in corrente veloce si rimanda ai testi specializzati sulle correnti a pelo libero (si veda anche il capitolo *Channel Transitions and Controls* di A. T. IPPEN su « Engineering Hydraulics », J. Wiley, 1950).

ESEMPI

Esempio 18.1

Calcolo del carico totale e del carico piezometrico in una sezione ($i+1$) posta 20 m a monte della sezione (i) di un corso d'acqua defluente entro un alveo di geometria nota, in moto permanente con la portata $Q = 555 \text{ m}^3/\text{s}$.

Per la valutazione del coefficiente di attrito C si usa la formula logaritmica [17.24], valida in moto assolutamente turbolento, assumendo $\varepsilon = 0,36 \text{ m}$ ed $f = 0,90$ ($f/\varepsilon = 2,5 \text{ m}^{-1}$).

Nella sezione (i) sono note le grandezze riportate nel quadro seguente, (la quota del pelo libero coincide naturalmente con il carico piezometrico h).

Sezione (i)

Quota p.l. h (m)	Area Ω (m^2)	Contorno bagnato B (m)	Raggio R (m)	Velocità U (m/s)	$U^2/2g$ (m)	Coeff. C	$j = \frac{Q^2}{g\Omega^2 C^2 R}$	Carico totale H (m)
17,90	134,3	36,38	3,69	4,135	0,871	12,01	0,00327	18,771

Nella sezione ($i+1$), nota la geometria dell'alveo e la portata, sono state calcolate le stesse grandezze per assegnati valori della quota del pelo libero, con passo 0,10 m. Si riportano alcuni valori intorno al dato precedente $h = 17,90 \text{ m}$.

Sezione ($i+1$)

h	Ω	B	R	U	$U^2/2g$	C	j	H
17,70	137,2	35,96	3,82	4,045	0,834	12,09	0,00299	18,534
17,80	140,2	36,16	3,88	3,96	0,799	12,13	0,00280	18,599
17,90	143,2	36,36	3,94	3,875	0,765	12,17	0,00262	18,665
18,00	146,2	36,56	4,00	3,795	0,734	12,21	0,00246	18,734
18,10	149,2	36,76	4,06	3,72	0,705	12,25	0,00231	18,805
18,20	152,2	36,96	4,12	3,645	0,677	12,28	0,00218	18,877
18,30	155,2	37,16	4,18	3,575	0,651	12,32	0,00205	18,951

a) Calcolo delle perdite e del carico totale H_{i+1} con le eq.ni [18.6] e [18.7], essendo $\Delta s_{i,i+1} = 20 \text{ m}$:

$$j_{(i)} = 0,00327$$

$$\Delta H_{i,i+1} = 20 \times 0,00327 = 0,0654 \text{ m}$$

$$H_{i+1} = 18,771 + 0,065 = 18,836 \text{ m}$$

cui corrisponde, interpolando fra i valori tabellati nella sezione $(i+1)$, $h_{i+1} = 18,140$ m.

b) Calcolo delle perdite mediando i valori j fra quelli della sezione (i) e della sezione $(i+1)$ a parità di quota del pelo libero:

$$\begin{aligned} j_{(i,i+1)} &= \frac{1}{2}(0,00327 + 0,00262) = 0,00295 \\ \Delta H_{i,i+1} &= 20 \times 0,00295 = 0,0590 \text{ m} \\ H_{i+1} &= 18,771 + 0,059 = 18,830 \text{ m} \end{aligned}$$

cui corrisponde, interpolando fra i valori tabellati, $h_{i+1} = 18,135$ m.

c) Calcolo delle perdite con procedimento iterativo, mediando i valori j fra quello della sezione (i) e quello che deriva dal calcolo a) nella $(i+1)$:

$$\begin{aligned} j_{(i+1)} &= 0,00221 \quad \text{per} \quad h_{i+1} = 18,14 \text{ m} \\ j_{(m)} &= \frac{1}{2}(0,00327 + 0,00221) = 0,00274 \\ \Delta H_{i,i+1} &= 20 \times 0,00274 = 0,0548 \text{ m} \\ H_{i+1} &= 18,771 + 0,055 = 18,826 \text{ m} \end{aligned}$$

cui corrisponde, interpolando fra i valori tabellati, $h_{i+1} = 18,130$ m.

Esempio 18.2

Rappresentazione qualitativa di profili di correnti a pelo libero in moto permanente.

a) Correnti in alveo cilindrico con pendenza del fondo i_f minore della pendenza critica i_c per la portata data (alveo fluviale): figure 18.46 e 18.47.

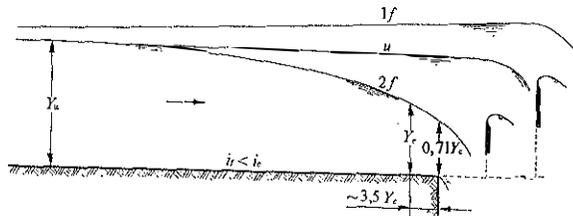


Fig. 18.46. - Profili di correnti lente determinati dalla posizione di una paratoia di valle con deflusso a stramazzo. Nel caso di caduta libera — profilo 2f — la profondità nella sezione di estremità è $\sim 0,71 Y_c$ e la linea della profondità critica è attraversata ad una distanza pari a $\sim 3,5 Y_c$ dallo sbocco.

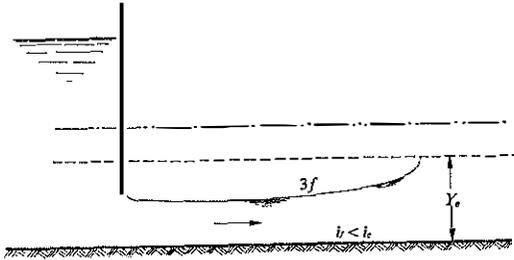


Fig. 18.47. -- Profilo di corrente veloce determinato da una luce di fondo.

b) Correnti in alveo cilindrico con pendenza del fondo i_f maggiore della pendenza critica i_c per la portata data (alveo torrentizio): figure 18.48 e 18.49.

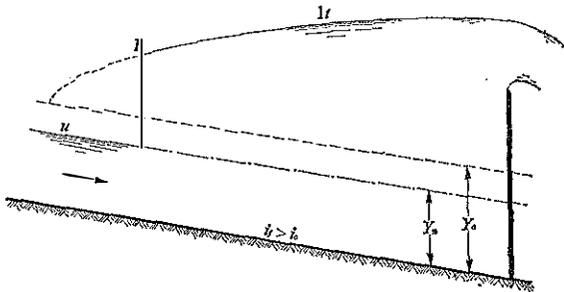


Fig. 18.48. -- Profilo di corrente lenta sostenuto da uno stramazzo di valle. È indicato schematicamente il risalto idraulico R che raccorda questo profilo con una corrente uniforme a monte.

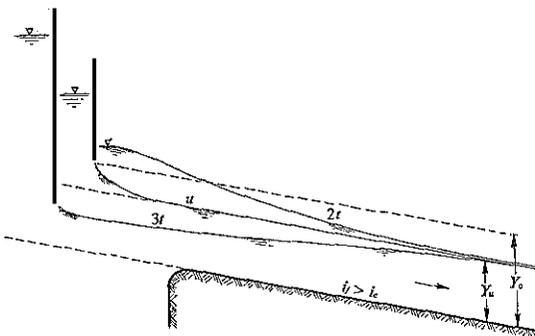


Fig. 18.49. -- Profili di correnti veloci controllati dalla posizione di una paratoia con luce di fondo, posta a monte del tronco considerato. Nel caso del profilo $2f$ il deflusso all'imbocco è libero.

c) Correnti in presenza di cambiamenti della pendenza del fondo (alveo di sezione invariante): figure 18.50 e 18.51.

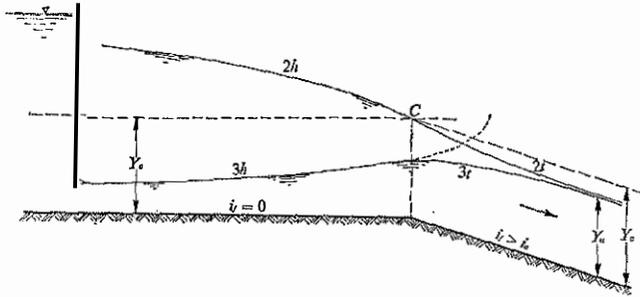


Fig. 18.50. - Correnti in alveo orizzontale che si raccordano con correnti in alveo torrentizio. Il profilo $2h-2r$ è relativo ad una corrente libera a monte e a valle ed è imposto dalla condizione $Y = Y_c$ nella sezione di raccordo. Il profilo $3h$ è invece controllato dalla posizione della paratoia di monte.

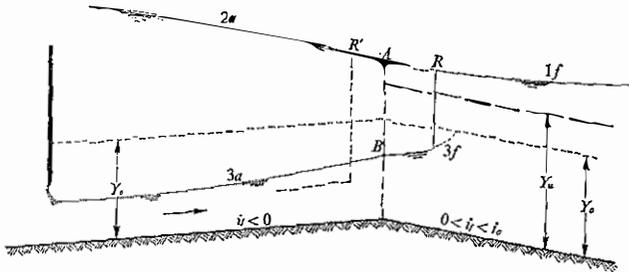


Fig. 18.51. - Correnti in alveo acclive che si raccordano con correnti in alveo fluviale. Il profilo $2a$ è determinato dal punto A di arrivo da valle del profilo $1f$. Il profilo $3a$ è controllato dalla posizione della paratoia di monte ed impone, a partire da B , il profilo $3f$ fino al risalto idraulico R . Per differenti condizioni di monte il risalto può spostarsi nel tronco acclive, come indicato dal tratteggio R' (cfr. paragrafo 18.12 sulla localizzazione del risalto).

Esempio 18.3

Calcolo del profilo di una corrente permanente che defluisce con la portata $Q' = 2,80 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, per unità di larghezza, in un alveo rettangolare larghissimo avente pendenza del fondo $i_f = 0,00125$ e scabrezza naturale di terra con erbe basse sul fondo ($\varepsilon = 70 \text{ mm}$, oppure $n = 0,025$ di Manning). È richiesto il tracciato verso monte a partire da una sezione dove la profondità vale $Y_0 = 2,20 \text{ m}$.

La profondità del moto uniforme può essere calcolata utilizzando l'espressione logaritmica del coefficiente di resistenza C , (assumendo $f = 0,8$ ed $R = Y_u$), con l'equazione

$$Q' = CY_u \sqrt{g Y_u i_f} = \left[5,75 \log \left(\frac{13,3 \times 0,8 Y_u}{0,070} \right) \right] Y_u^{3/2} (g 0,00125)^{1/2}$$

oppure utilizzando la formula di Manning, con l'equazione

$$Q' = \left(\frac{1}{n} Y_u^{1/6} \right) Y_u \sqrt{Y_u i_f} = 40 Y_u^{5/3} (0,00125)^{1/2}.$$

Con il dato $Q' = 2,80 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ si ottiene, in entrambi i casi,

$$Y_u = 1,51 \text{ m}$$

arrotondando alla seconda cifra decimale.

La profondità critica è data dalla [17.8] ed essendo $Q' = Q/b$, risulta

$$Y_c = \sqrt[3]{\frac{Q'^2}{g}} = 0,928 \text{ m};$$

ponendo, secondo la [18.12],

$$k = \frac{Y_c}{Y_u} = 0,615,$$

l'integrale di Bresse [18.14] diventa

$$s_0 - s = \frac{2,20 - Y}{0,00125} - \frac{1,51}{0,00125} (1 - 0,615^3) \left[\phi(1,457) - \phi\left(\frac{Y}{1,51}\right) \right].$$

I risultati del calcolo delle ascisse, ottenuti assumendo valori di Y decrescenti da 2,20 m a 1,52 m, sono riportati nel quadro seguente.

Y (m)	$\zeta = Y/1,51$	$\phi(\zeta)$	$s_0 - s$ (m)
2,10	1,3907	0,310	113
2,00	1,3245	0,354	234
1,90	1,2583	0,412	368
1,80	1,1920	0,491	521
1,70	1,1258	0,612	713
1,60	1,0596	0,840	1005
1,55	1,02649	1,1060	1291
1,53	1,01325	1,3325	1517
1,52	1,00662	1,5745	1750

Si può invece tener conto della variazione di C con Y , impiegando ad esempio la formula di Manning-Gauckler-Strickler, ed eseguire l'integrazione passo-passo dell'equazione differenziale

$$\frac{dY}{ds} = \frac{i_f - \frac{Q'^2}{gC^2 Y^3}}{1 - \frac{Q'^2}{gY^3}} = \frac{i_f - \frac{Q'^2 n^2}{Y^{10/3}}}{1 - \frac{Q'^2}{gY^3}}$$

ossia, passando alle differenze finite,

$$\Delta Y = \frac{0,00125 - 0,00490 Y^{-10/3}}{1 - 0,79918 Y^{-3}} \Delta s.$$

I risultati del calcolo della profondità, eseguito con successivi passi $\Delta s = -5$ m, sono riportati ad intervalli di 100 m nel quadro che segue.

$s_0 - s$ (m)	Y (m)	$\Delta Y / \Delta s$
0	2,200	-0,0009689
100	2,105	9191
200	2,016	8607
300	1,933	7934
400	1,857	7175
500	1,790	6343
600	1,730	-0,0005465
700	1,680	4577
800	1,638	3723
900	1,605	2942
1000	1,579	2264
1100	1,559	-0,0001702
1200	1,544	1255
1300	1,533	-0,0000911
1400	1,525	653
1500	1,520	464

Come si vede, l'ampiezza del rigurgito risulta ridotta complessivamente di circa il 16%, da 1750 m a 1500 m, passando dalla posizione $C = \text{cost}$ alla $C \propto Y^{2/3}$.

Esempio 18.4

Un canale trapezoidale, con rivestimento di cemento, ha pendenza $i_b = 0,01$, larghezza al fondo 5,00 m e sponde inclinate di 60° rispetto all'orizzontale. Il canale termina con un breve tronco di sezione rettangolare largo 6,00 m, raccordato a monte con l'alveo di sezione trapezoidale e a valle con una soglia di fondo, a spigolo arrotondato, alta 0,60 m sul fondo. Determinare il profilo della corrente quando nel canale defluisce in moto permanente la portata $Q = 27,7 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$.

Le caratteristiche della sezione, in funzione della profondità, sono date dalle

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= 5,00Y + \frac{Y^2}{\sqrt{3}} \\ B &= 5,00 + \frac{4}{\sqrt{3}}Y \\ b &= 5,00 + \frac{2}{\sqrt{3}}Y \end{aligned} \right\} R = \frac{\Omega}{B}$$

$$C = 5,75 \log \left(\frac{13,3fR}{\varepsilon} \right) = 5,75 \log (3990R)$$

avendo assunto $f = 0,90$ ed $\varepsilon = 0,003$ m.

Dall'equazione del moto uniforme

$$Q = \Omega_u C_u \sqrt{g R_u i_f} = 27,7 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$$

si ottiene la profondità

$$Y_u = 0,940 \text{ m}$$

e dall'equazione

$$\left[\frac{\Omega^3}{b} \right]_{Y=Y_c} = \frac{Q^2}{g} = 78,215 \text{ m}^6$$

si ottiene la profondità critica

$$Y_c = 1,383 \text{ m};$$

i risultati mostrano che il moto uniforme è una corrente veloce, per cui l'alveo è torrentizio con la portata assegnata.

Per il calcolo del coefficiente di portata della soglia di fondo si assume tentativamente un carico a monte $h_1 = 1,50$ m (v. fig. 18.29) per cui

$$\frac{b/b_0}{1 + d_1/h_1} = \frac{1}{1 + 0,60/1,50} = 0,71$$

e ad esso corrisponde nel grafico riportato nella fig. 18.30

$$C_q = 0,44.$$

Ne deriva il carico

$$h_1 = \left[\frac{Q}{C_q b \sqrt{2g}} \right]^{2/3} = \left[\frac{27,7}{0,44 \times 6,00 \sqrt{2g}} \right]^{2/3} = 1,78 \text{ m}$$

per il quale resta confermato il valore assunto di C_q .

La profondità a monte della soglia risulta allora

$$Y_1 = h_1 + d_1 = 1,78 + 0,60 = 2,38 \text{ m}.$$

A partire da tale profondità, e procedendo con passi Δs negativi, si calcolano le successive variazioni ΔY con l'equazione

$$\Delta Y = \frac{i_r - \frac{Q^2}{g C^2 \Omega^2 R}}{1 - \frac{Q^2 b}{g \Omega^3}} \Delta s = \frac{0,01 - \frac{78,215}{C^2 \Omega^2 R}}{1 - \frac{78,215 b}{\Omega^3}} \Delta s,$$

fino a raggiungere un valore di Y prossimo ad Y_c .

Alcuni risultati del calcolo, eseguito con passo $\Delta s = -0,10$ m, sono riportati nel quadro seguente.

Distanze s (m)	Profondità Y (m)	Pendenza p.l. $\Delta Y/\Delta s$
0	2,380	0,0114920
-10	2,263	0,0118285
-20	2,143	0,0123032
-25	2,081	0,0126214
-30	2,017	0,0130213
-35	1,950	0,0135400
-40	1,881	0,0142423
-45	1,808	0,0152554
-50	1,728	0,0168735
-55	1,637	0,0200111
-57,5	1,583	0,0232200
-60	1,518	0,0306570
-62,5	1,391	0,3814014

Esempio 18.5

Nelle condizioni dell'esempio 18.4, canale trapezio con pendenza $i_r = 0,01$ e portata $Q = 27,7 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, determinare verso valle il profilo della corrente veloce che ha la profondità $Y = 0,50$ m alla distanza di 200 m a monte dalla soglia di fondo.

Localizzare il risalto che raccorda tale profilo con quello della corrente lenta di valle, calcolato nell'esempio 18.4, e valutare le profondità coniugate.

Si utilizza sempre l'equazione

$$Y = \frac{0,01 - \frac{78,215}{C^2 \Omega^2 R}}{1 - \frac{78,215 b}{\Omega^3}} \Delta s$$

procedendo con passi Δs positivi a partire dalla profondità $Y = 0,50$ m nella sezione posta all'ascissa $s = -200$ m rispetto alla soglia di valle.

Si è inoltre calcolata la funzione quantità di moto totale S con l'equazione

$$\frac{S}{\gamma} = \zeta_{\sigma} \Omega + \frac{Q^2}{g\Omega}$$

nella quale il termine $\zeta_{\sigma} \Omega$, momento statico della sezione rispetto al pelo libero, è stato calcolato valutando separatamente il momento statico dell'area rettangolare e quello delle due aree triangolari componenti la sezione; quindi con la

$$\frac{S}{\gamma} = \frac{b_0}{2} Y^2 + \frac{Y^3}{3\sqrt{3}} + \frac{Q^2}{g\Omega} = 2,50 Y^2 + \frac{Y^3}{3\sqrt{3}} + \frac{78,215}{\Omega}.$$

Nel quadro che segue sono stati riportati, a partire dall'ascissa -100 m, accanto a ciascuna profondità della corrente veloce i corrispondenti valori di S/γ e i valori delle profondità coniugate alle prime, cioè tali da dar luogo allo stesso valore di S/γ .

Distanze	Corrente veloce		Profondità coniugata	Corrente lenta (Es. 18.4)
	Y (m)	S/γ (m ²)		
-200	0,50			
-180	0,556			
-160	0,610			
-140	0,660		—	
-120	0,705		—	—
-100	0,745	20,801	2,288	
-90	0,764	20,360	2,249	
-80	0,781	19,989	2,216	
-70	0,7975	19,649	2,184	
-60	0,8125	19,355	2,156	1,518
-50	0,826	19,103	2,131	1,728
-40	0,839	18,8715	2,107	1,881
-35	0,845	18,768	2,097	1,950
-30	0,8505	18,675	2,087	2,017
-25	0,856	18,583	2,077	2,081
-20	0,861	18,5015	2,068	2,143
-10	0,8705	18,350	2,052	2,263
0	0,879	18,219	2,037	2,380

Dal confronto con le profondità della corrente lenta calcolate nell'esempio precedente, e riportate nell'ultima colonna del quadro, si vede che la profondità coniugata coincide praticamente con la profondità della corrente di valle all'ascissa $s = -25$ m ed il risalito, tenuto parzialmente conto della sua lunghezza, può loca-

lizzarsi tra le ascisse -25 m e -30 m. In tali condizioni la profondità a monte del risalto si può ritenere pari a

$$Y_1 = 0,850 \text{ m} \quad (s_1 = -30,5 \text{ m})$$

e quindi la profondità coniugata a valle risulta

$$Y_2 = 2,088 \text{ m} \quad (s_2 = -24,4 \text{ m})$$

con i corrispondenti valori di carico specifico

$$E_1 = Y_1 + \frac{Q^2}{2gY_1^3} = 2,645 \text{ m}$$

$$E_2 = Y_2 + \frac{Q^2}{2gY_2^3} = 2,321 \text{ m}.$$

La differenza

$$\Delta E = E_1 - E_2 = 0,324 \text{ m}$$

rappresenta la perdita di carico specifico dovuta al risalto.

Esempio 18.6

In un canale rettangolare si presenta un salto di fondo di altezza $d_1 = 1,00$ m. Con la portata per unità di larghezza $Q' = 6,00 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ la profondità, a valle del gradino, è di $3,50$ m. Calcolare entro quali limiti può oscillare la profondità della corrente a monte del gradino affinché il risalto resti localizzato in corrispondenza del gradino stesso.

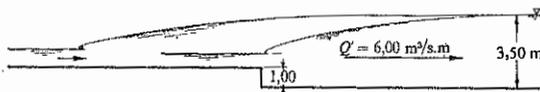


Fig. 18.52. - Localizzazione del risalto in corrispondenza di un salto di fondo (esempio 18.6).

Si considerano come posizioni estreme del risalto idraulico quella in cui la sua sezione iniziale coincide praticamente con la sezione del salto di fondo e quella in cui, spostandosi il risalto verso monte, la sua sezione terminale viene a trovarsi molto vicina al gradino senza sorpassarlo. Alla prima corrisponde il limite inferiore della profondità di monte Y_1 ed alla seconda il limite superiore, come mostra la figura 18.52.

Nel primo caso l'equazione della quantità di moto applicata al risalto, trascurando al solito le resistenze distribuite, assume la forma

$$\gamma \frac{(Y_1 + d_1)^2}{2} + \rho \frac{Q'^2}{Y_1} = \gamma \frac{Y_2^2}{2} + \rho \frac{Q'^2}{Y_2} = S'$$

avendo indicato con S' la quantità di moto totale per unità di larghezza. Con i dati

$d_1 = 1,00$ m, $Y_2 = 3,50$ m e $Q' = 6,00$ m² s⁻¹, risulta

$$\frac{Y_2^2}{2} + \frac{Q'^2}{gY_2} = \frac{S'}{\gamma} = 7,17 \text{ m}^2;$$

quindi, dall'equazione della quantità di moto divisa per γ ,

$$\frac{(Y_1 + 1,00)^2}{2} + \frac{6,00^2}{gY_1} = 7,17 \text{ m}^2$$

deriva $Y_1 = 0,63$ m.

Nell'altro caso, supponendo il risalto idraulico spostato tutto a monte del gradino, nella posizione limite in cui la sua sezione terminale coincide con il gradino stesso, l'equazione della quantità di moto assume la forma ordinaria valida per il risalto in alveo rettangolare

$$\frac{Y_1^2}{2} + \frac{Q'^2}{gY_1} = \frac{Y_2^2}{2} + \frac{Q'^2}{gY_2}.$$

Con $Y_2 = 3,50 - 1,00 = 2,50$ m segue

$$\frac{Y_1^2}{2} + \frac{3,670}{Y_1} = 4,59 \text{ m}^2$$

da cui $Y_1 = 0,87$ m.

In questo caso allo stesso risultato si poteva giungere applicando direttamente l'eq. [18.31]

$$\frac{Y_1}{2,50} = \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{1 + 8Fr_2^2})$$

con

$$Fr_2 = \frac{Q'}{Y_2 \sqrt{gY_2}} = \frac{6,00}{2,50 \sqrt{g \cdot 2,50}} = 0,485.$$

Riassumendo, il risalto resta localizzato sul gradino, con la portata e con le condizioni di valle assegnate, finché la profondità di monte è contenuta nel campo $0,63 \text{ m} < Y_1 < 0,87 \text{ m}$.

Esempio 18.7

Calcolo del tirante d'acqua necessario per mantenere il risalto idraulico aderente al piede di uno scivolo che raccorda un salto di fondo pari a $d = 2,70$ m, con uno sviluppo dello scivolo di circa 8 m in alveo rettangolare. A monte si trova un bacino la cui superficie libera è mantenuta alla quota $h = 1,20$ m rispetto alla soglia di tracimazione con la quale ha inizio il profilo dello scivolo in esame. Per il deflusso sul manufatto si assuma un coefficiente di portata pari a $C_Q = 0,50$, con riferimento al carico sulla soglia.

Data la breve lunghezza dello scivolo, lungo il quale il moto è ovunque accelerato, le perdite di carico totale si possono valutare globalmente nel 10% dell'altezza cinetica di valle. Si applica l'equazione di Bernoulli, in forma generalizzata, fra il bacino a monte e la sezione terminale dello scivolo. Con riferimento alla quota di quest'ultima ed indicando con Y_1 ed U_1 profondità e velocità media in tale sezione, si ha

$$h + d = Y_1 + \frac{U_1^2}{2g} + \xi \frac{U_1^2}{2g}$$

ossia, con i dati disponibili,

$$1,20 + 2,70 = Y_1 + 1,10 \frac{Q'^2}{2gY_1^2}$$

essendo $Q' = U_1 Y_1$ la portata per unità di larghezza, valutabile con la

$$Q' = C_{qh} \sqrt{2gh} = 0,50 \times 1,20 \sqrt{2g \cdot 1,20} = 2,911 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

Segue quindi

$$Y_1 + \frac{0,475}{Y_1^2} = 3,90 \text{ m}$$

da cui

$$Y_1 = 0,367 \text{ m};$$

l'altra radice positiva, $Y = 3,868 \text{ m}$, corrisponderebbe al caso di deflusso in condizioni subcritiche e quindi senza risalto.

La profondità Y_2 , coniugata nel risalto alla Y_1 , è data dall'eq. [18.30]

$$\frac{Y_2}{Y_1} = \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{1 + 8Fr_1^2})$$

dove

$$Fr_1 = \frac{Q'}{Y_1 \sqrt{gY_1}} = \frac{2,910}{0,367 \sqrt{g \cdot 0,367}} = 4,18,$$

e quindi vale

$$Y_2 = 5,432Y_1 = 1,994 \text{ m}.$$

Affinché il risalto si mantenga aderente al piede dello scivolo occorre che il tirante d'acqua sia $\geq 1,994 \text{ m}$ (e $< 3,868 \text{ m}$). Dato che una riduzione delle perdite previste porterebbe ad una diminuzione di Y_1 (contenuta però sempre entro il 5%) e quindi ad un aumento della profondità coniugata nella stessa misura, conviene imporre prudenzialmente un'altezza d'acqua della corrente di valle maggiorata del 5% rispetto a quella calcolata, ossia $\geq 2,10 \text{ m}$.

Esempio 18.8

Calcolo delle profondità coniugate del risalto che raccorda in moto permanente una corrente veloce con portata $Q = 20 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ e carico specifico $E_1 = 3,50 \text{ m}$ ad una corrente lenta con carico specifico $E_2 = 2,50 \text{ m}$, in un alveo divergente di sezione rettangolare con apertura $2\theta = 11^\circ 30' = 0,20 \text{ rad}$.

Seguendo le indicazioni del paragrafo 18.14 si calcola la funzione

$$f_r = \frac{Q}{2\theta E_1^2 \sqrt{2gE_1}} = \frac{20}{0,20 \times 3,50^2 \sqrt{2g \cdot 3,50}} = 0,985$$

e quindi l'argomento

$$\frac{E_2}{f_r^{0,318} E_1} = \frac{2,50}{0,985^{0,318} \times 3,50} = 0,72$$

delle funzioni f_1 ed f_2 rappresentate nel grafico della fig. 18.25. In corrispondenza del valore 0,72 in ascisse, si leggono i valori

$$f_1 = 3,0 \quad \text{ed} \quad f_2 = 7,1.$$

Con le [18.33] si possono ora calcolare le ascisse di monte e di valle del risalto

$$x_1 = E_1 f_r^{0,335} f_1 = 3,50 \times 0,985^{0,335} \times 3,0 = 10,45 \text{ m}$$

$$x_2 = E_2 f_r^{0,335} f_2 = 2,50 \times 0,985^{0,335} \times 7,1 = 17,66 \text{ m}$$

cui corrispondono le larghezze del canale rettangolare

$$b_1 = x_1 2\theta = 10,45 \times 0,2 = 2,09 \text{ m}$$

$$b_2 = x_2 2\theta = 17,66 \times 0,2 = 3,53 \text{ m}.$$

Essendo noti i valori dei carichi E_1 ed E_2 , dalle equazioni

$$E_1 = Y_1 + \frac{20^2}{2g \cdot 2,09^2 \cdot Y_1^2} = 3,50 \text{ m}$$

$$E_2 = Y_2 + \frac{20^2}{2g \cdot 3,53^2 \cdot Y_2^2} = 2,50 \text{ m}$$

si deducono i valori delle profondità coniugate

$$Y_1 = 1,55 \text{ m} \quad \text{e} \quad Y_2 = 2,15 \text{ m},$$

dati, rispettivamente, per la corrente veloce di monte dalla radice positiva minore della prima equazione (l'altra radice positiva vale 2,97 m) e per la corrente lenta di valle dalla radice positiva maggiore della seconda equazione (l'altra vale 1,07 m).

Esempio 18.9

Le spalle di un ponte provocano un restringimento graduale fino alla larghezza minima $b = 11,20$ m in un alveo rettangolare largo $b_0 = 13,0$ m a monte e a valle del ponte. Calcolare il rigurgito provocato dal restringimento in due differenti situazioni della corrente indisturbata, con la stessa portata $Q = 65$ m³ s⁻¹: a) profondità $Y_0 = 2,10$ m; b) profondità $Y_0 = 1,45$ m.

a) Nel primo caso si ha

$$Fr_0 = \frac{Q}{b_0 Y_0 \sqrt{g Y_0}} = \frac{65}{13,0 \times 2,10 \sqrt{g \cdot 2,10}} = 0,525$$

Essendo

$$\frac{b}{b_0} = \frac{11,20}{13,0} = 0,86$$

dal diagramma della fig. 18.27 risulta $F_L' = 0,60$ ed $F_L'' = 1,60$. Poiché Fr_0 è minore di F_L' il deflusso avviene in condizioni ovunque subcritiche. Il rigurgito ΔY si può calcolare con la formula di Yarnell [18.39] assumendo prudenzialmente $k_2 = 1,05$:

$$\frac{\Delta Y}{Y_0} = 1,05(1,05 - 0,6 + 5 \times 0,525^2) \{1 - 0,86 + 15(1 - 0,86)^4\} 0,525^2 = 0,077$$

$$\Delta Y = 0,077 \times 2,10 = 0,16 \text{ m}$$

b) Nel secondo caso si ha

$$Fr_0 = \frac{65}{13,0 \times 1,45 \sqrt{g \cdot 1,45}} = 0,914$$

per cui risulta $F_L' < Fr_0 < F_L''$ e la corrente deve passare attraverso lo stato critico nella strozzatura. Il calcolo del rigurgito si può eseguire impiegando l'eq. [18.44]

$$Y_1 = K_f \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g b_0^2 F_L'^2}}$$

Per fronti arrotondate, assumendo $K_f = 1,04$, si ottiene

$$Y_1 = 1,04 \sqrt[3]{\frac{65^2}{g \cdot 13,0^2 \times 0,60^2}} = 2,00 \text{ m}$$

e quindi il rigurgito vale

$$\Delta Y = 2,00 - 1,45 = 0,55 \text{ m.}$$

A monte dell'ostacolo il profilo della corrente si avvicina gradualmente a quello indisturbato, mentre a valle, dopo la transizione a corrente veloce, esso si raccorda al profilo della corrente indisturbata con un risalto, che nel caso in esame è ondulato perché il numero di Froude di valle, Fr_0 , è decisamente $> 0,6$.

Esempio 18.10

Uno sfioratore laterale sulla sponda di un canale rettangolare largo 5,0 m ha soglia lunga 8,0 m alla quota $d = 1,30$ m sul fondo. Calcolo della portata sfiorabile in moto permanente partendo da un valore a monte $Q_0 = 25 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ ed essendo imposta a valle l'altezza d'acqua di 2,10 m sul fondo.

In prima approssimazione, considerato che la profondità della corrente lungo lo sfioratore sarà mediamente intorno a 2 m, si valuta la portata media sfiorata per unità di lunghezza con la

$$q_m = C_q \sqrt{2g} (Y_m - d)^{3/2} = 1,0 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}/\text{m}$$

avendo assunto $C_q = 0,40$.

La portata finale deve risultare quindi intorno a $25 - 1,0 \times 8,0 = 17 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, e ad essa corrisponde il carico specifico

$$E = 2,10 + \frac{17^2}{2g \cdot 5^2 \times 2,10^2} = 2,234 \text{ m}.$$

Si esegue il calcolo del profilo con passo $\Delta s = 1$ m utilizzando le equazioni [18.54] che riscriviamo nel caso in esame nella forma

$$E = Y_i + \frac{Q_i^2}{2g \cdot 5^2 \cdot Y_i^2} = 2,234 \text{ m} \quad (i = 0, 1, \dots, 7)$$

$$\Delta Q_i = q_i = C_q \sqrt{2g} (Y_i - d)^{3/2}$$

$$Q_{i+1} = Q_i - \Delta Q_i.$$

I risultati sono riportati nel quadro che segue

x (m)	Q ($\text{m}^3 \text{ s}^{-1}$)	Y (m)	q ($\text{m}^3 \text{ s}^{-1}/\text{m}$)
0	25,000	1,869	0,760
1	24,240	1,903	0,829
2	23,411	1,9355	0,897
3	22,514	1,967	0,965
4	21,549	1,996	1,028
5	20,521	2,024	1,091
6	19,430	2,051	1,152
7	18,277	2,076	1,210
8	17,067	2,099	—

Si constata un'ottima concordanza del valore finale dell'altezza d'acqua con il dato 2,10 m. La portata complessivamente sfiorabile risulta $25,00 - 17,07 = 7,93 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$.

Esempio 18.11

Calcolo della massima altezza d'acqua provocata da una curva con raggio in asse $r_m = 30$ m in un canale rettangolare largo $b = 7,60$ m, percorso da una corrente con velocità media $U_1 = 6,20$ ms⁻¹ e profondità $Y_1 = 0,85$ m.

Valutare l'altezza massima anche nel caso di una suddivisione del canale in due corsie.

Il numero di Froude della corrente vale

$$Fr_1 = \frac{U_1}{\sqrt{gY_1}} = \frac{6,20}{\sqrt{g \cdot 0,85}} = 2,147.$$

Si tratta quindi di una corrente veloce, per la quale l'angolo di Mach vale

$$\beta_1 = \sin^{-1} \frac{1}{Fr_1} = 27^\circ,76 = 0,485 \text{ rad}$$

e l'angolo al centro θ_0 corrispondente al primo massimo si può calcolare con la

$$\theta_0 = \text{tg}^{-1} \left\{ \frac{b}{(r_m + b/2) \text{tg} \beta_1} \right\} = \text{tg}^{-1} \left\{ \frac{7,60}{(30 + 3,80)0,527} \right\} = 0,403 \text{ rad}.$$

La profondità massima, secondo la formula di Knapp ed Ippen, vale

$$\frac{Y_{\max}}{Y_1} = Fr_1^2 \sin^2 \left(\beta_1 + \frac{\theta_0}{2} \right) = 1,852$$

ossia

$$Y_{\max} = 1,852 \times 0,85 = 1,574 \text{ m}.$$

Se la curva viene suddivisa con un setto centrale in due corsie di uguale larghezza $b_1 = b_2 = 3,80$ m, si ha:

all'esterno $r_{m1} = 30 + 1,90 = 31,90$ m; all'interno $r_{m2} = 30 - 1,90 = 28,10$ m

$$[\theta_0]_1 = \text{tg}^{-1} \left\{ \frac{3,80}{(31,90 + 1,90)0,527} \right\} = 0,210 \text{ rad}$$

$$[\theta_0]_2 = \text{tg}^{-1} \left\{ \frac{3,80}{(28,10 + 1,90)0,527} \right\} = 0,236 \text{ rad}$$

da cui

$$\text{all'esterno: } [Y_{\max}]_1 = 2,147^2 \sin^2 \left(0,485 + \frac{0,210}{2} \right) \times 0,85 = 1,213 \text{ m}$$

$$\text{all'interno: } [Y_{\max}]_2 = 2,147^2 \sin^2 \left(0,485 + \frac{0,236}{2} \right) \times 0,85 = 1,260 \text{ m}.$$

In tal caso la sopraelevazione è un po' più grande nella corsia interna, che ha raggio di curvatura minore.

Si può fare in modo che l'altezza massima sia praticamente la stessa nei due settori aumentando un poco la larghezza della corsia esterna rispetto a quella interna. Ad esempio, con

corsia esterna

corsia interna

$$b_1 = 4,00 \text{ m}$$

$$b_2 = 3,60 \text{ m}$$

si ottiene

$$r_{m1} = 31,80 \text{ m}$$

$$r_{m2} = 28,00 \text{ m}$$

$$\theta_{01} = 0,221$$

$$\theta_{02} = 0,225$$

$$Y_{\max 1} = 1,233 \text{ m}$$

$$Y_{\max 2} = 1,240 \text{ m}$$

con una differenza tra le altezze massime calcolate di appena 7 mm.

Riferimenti citati

- BAZIN, H., *Experience nouvelles sur l'écoulement par déversoir*, Paris, 1898.
- BECCHI, I., LA BARBERA, E. e TETAMO, A., *Giornale del Genio Civile*, nn. 6, 7 e 8, 1973.
- BELANGER, J. B., *Essai sur la solution numérique de quelques problèmes relatifs au mouvement permanent des eaux courantes*, Paris, 1828.
- *Ecole royale des ponts e chaussées*, Session 1845-46.
- BIDONE, G., *Mem. della Reale Accademia di Torino*, Vol. XXV, 1820.
- BRESSE, J. C., *Cours de mécanique appliquées*, Hydraulique, Paris, 1860.
- CIPOLLETTI, C., *Canale Villoresi*, Milano, 1886.
- CITRINI, D., *L'Energia Elettrica*, Vol. XIX, nn. 5 e 6, 1942.
- *L'Energia Elettrica*, Vol. XXV, n. 4, 1948.
- CONTESSINI, F., *L'Energia Elettrica*, Vol. XIII, n. 5, 1936.
- DE MARCHI, G., *L'Energia Elettrica*, Vol. XI, n. 11, 1934.
- *L'Energia Elettrica*, Vol. XIII, n. 1, 1936.
- *L'Energia Elettrica*, Vol. XIV, n. 3, 1937.
- *Ricerca Scientifica e Ricostruzione*, febr.-marzo, 1947.
- *L'Energia Elettrica*, Vol. XXVII, n. 3, 1950.
- IPPEN, A. T. e KNAPP, R. T., Rep. prep. at the Calif. Inst. of Technology for the Los Angeles County Flood Control District, (1936).
- *Proc. Fifth International Congress of Applied Mechanics*, J. Wiley & Sons, 1939.
- IPPEN, A. T., *Mechanics of Supercritical Flow*, Proc. A.S.C.E., Nov., 1949.
- IPPEN, A. T., *Channels Transitions and Controls*, Engineering Hydraulics. J. Wiley & Sons, 1950.
- KIRSCHMER, O., *Mitt. d. Hydr. Inst. d. Techn. Hochschule*, München, 1926.
- KNAPP, R. T., *Proc. A.S.C.E.*, Nov., 1949.
- MARCHI, E., *L'Energia Elettrica*, Vol. XLV, n. 4, 1968.

- MASSÉ, P., *Revue Gén. de l'Hydraulique*, nn. 18, 19, 1938.
- MOURET, G., *Hydraulique: Cours de mécanique appliquée*, L'Ecole Nat. des Ponts et Chaussées, Paris, 1922-23.
- NEBBIA, G., *Acqua e Gas*, Anno XXV, nn. 2, 3, 1936.
- *Atti. Acc. Naz. dei Lincei*, Roma, 1937.
- NOSEMA, G., *L'Energia Elettrica*, Vol. XXXIV, n. 8, 1957.
- POGGI, B., *L'Energia Elettrica*, Vol. XXXIII, 1956.
- PUPPINI, U., *Idraulica*, Zanichelli, Bologna, 1947.
- REHBOCK, TH., *Zeit des Ver. deutsch. Ing.*, 73, 1929.
- ROUSE, H., *Civil Engineering*, April, 1936.
- *Fluid Mechanics for Hydraulic Engineers*, McGraw-Hill, 1938.
- (Editor), *Engineering Hydraulics*, J. Wiley & Sons, 1950.
- RUBATTA, A., *L'Energia Elettrica*, Vol. XL, n. 10, 1963.
- *L'Energia Elettrica*, Vol. XLI, n. 5, 1964.
- SCIMENI, E., *L'Energia Elettrica*, Vol. XIV, n. 12, 1937.
- *Compendio di Idraulica*, Libr. Univ., Padova, 1952.
- TRICOMI, F. G., *Equazioni differenziali*, Ed. Sci. Einaudi, 1953.
- YARNELL, D. L., *U.S. Dept. of Agriculture*, Tech. Bull. No. 429, July, 1934.
- *U.S. Dept. of Agriculture*, Tech. Bull. No. 442, Nov., 1934.

CAPITOLO DICIANNOVESIMO

MOTO VARIO DELLE CORRENTI A PELO LIBERO

19.1. Le equazioni del moto.

Si considerano in questo capitolo correnti a pelo libero soggette a variazioni graduali di sezione e di velocità nello spazio e nel tempo. Sebbene la loro superficie libera sia necessariamente in movimento, tali correnti conservano forma quasi cilindrica, velocità sensibilmente parallele alla direzione del moto e distribuzione idrostatica della pressione nelle sezioni trasversali (v. fig. 19.1). I fenomeni ondosi che rientrano in questo schema sono quindi caratterizzati da piccole pendenze e da piccole curvature del pelo libero. La densità del liquido si può ritenere sempre ed ovunque costante.

Si misura l'ascissa s lungo il fondo dell'alveo della corrente in esame.

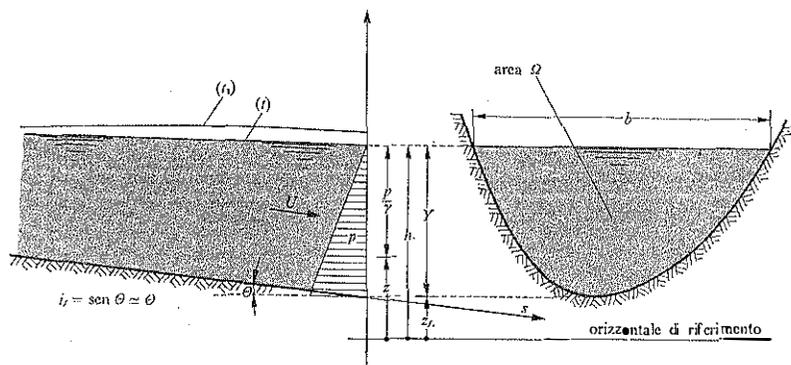


Fig. 19.1. - Schema di una corrente lineare in moto vario.

Le equazioni del moto vario, escludendo per ora afflussi o deflussi laterali, derivano da quelle ricavate nel paragrafo 16.1

$$\frac{\partial(\varrho Q)}{\partial s} + \frac{\partial(\varrho \Omega)}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \int \frac{dp}{\gamma} + \beta \frac{U^2}{2g} \right) = -\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\tau_0}{\gamma R}$$

con il consueto significato dei simboli (cfr. paragrafo 16.1). Imponendo la condizione di *densità costante*, si ottengono: l'equazione di continuità, che può essere scritta nella forma

$$\frac{\partial(\Omega U)}{\partial s} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0 \quad [19.1]$$

e l'equazione dinamica

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \beta \frac{U^2}{2g} \right) = -\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\tau_0}{\gamma R} \quad [19.2]$$

nella quale si ricorda che τ_0 indica il valor medio della tensione tangenziale sul contorno solido.

Introducendo il carico piezometrico $h = z + p/\gamma$, che rappresenta la quota del pelo libero rispetto ad un piano orizzontale di riferimento sotto l'ipotesi premissa di linearità della corrente, ed assumendo quasi uniforme la distribuzione delle velocità nella sezione in modo da poter porre il coefficiente di ragguglio della portata di quantità di moto $\beta = 1$, l'equazione dinamica assume la forma

$$\frac{\partial h}{\partial s} + \frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\tau_0}{\gamma R} \quad [19.3]$$

che è sostanzialmente quella proposta da de Saint-Venant nel 1871.

La posizione $\beta = 1$ trova giustificato impiego nelle applicazioni tecniche, come si è detto precedentemente, anche per la modesta importanza del termine cinetico e per la limitata approssimazione con cui è valutabile il termine rappresentativo delle perdite di carico effettivo per unità di lunghezza dovute alle resistenze al contorno,

$$\frac{\tau_0}{\gamma R}$$

termine che verrà indicato al solito con il simbolo j .

Avendo posto l'ipotesi di gradualità delle variazioni della corrente nello spazio e nel tempo, la resistenza al contorno può essere valutata

con un'equazione analoga a quella adottata nel moto permanente, ossia

$$\frac{\tau_0}{\gamma R} = j = \frac{U|U|}{gC^2 R}. \quad [19.4]$$

Si tratta evidentemente dell'espressione introdotta nel paragrafo 18.1, ma scritta in modo che il termine dissipativo $-j$ abbia sempre segno cambiato rispetto alla velocità U .

La valutazione della *cadente* j , richiede la scelta di una legge di resistenza per esprimere il coefficiente C . Le formule consigliabili sono quelle già viste nello studio delle correnti uniformi (cfr. cap. 17).

19.2. Integrazione delle equazioni del moto vario nei canali rettangolari senza resistenze d'onda.

Indicando con z_f la quota del fondo della sezione normale di un canale e con Y la profondità misurata nel piano della sezione, coincidente con la quota del pelo libero sul fondo, se la pendenza

$$i_f = \text{sen } \theta = -\frac{dz_f}{ds}$$

è abbastanza piccola da potersi porre $\cos\theta \approx 1$, il carico piezometrico vale

$$h = z_f + Y,$$

e quindi

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial z_f}{\partial s} + \frac{\partial Y}{\partial s} = -i_f + \frac{\partial Y}{\partial s}. \quad [19.5]$$

Le equazioni [19.1] e [19.3] di de Saint-Venant, per alveo di sezione rettangolare, diventano

$$\frac{\partial}{\partial s}(UY) + \frac{\partial Y}{\partial t} = 0 \quad [19.6]$$

$$\frac{\partial Y}{\partial s} + \frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} = i_f - j. \quad [19.7]$$

Lo stesso de Saint-Venant ha proposto il seguente procedimento di integrazione del sistema di equazioni [19.6] e [19.7], nell'ipotesi di *alveo prismatico*. Sotto tale condizione la velocità U è funzione di s e di t soltanto attraverso Y , cioè $U = U[Y(s, t)]$, e le equazioni precedenti si pos-

sono scrivere

$$\begin{aligned} \frac{d}{dY}(UY) \frac{\partial Y}{\partial s} + \frac{\partial Y}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial Y}{\partial s} \left(1 + \frac{U}{g} \frac{dU}{dY}\right) + \frac{1}{g} \frac{dU}{dY} \frac{\partial Y}{\partial t} &= i_t - j \end{aligned}$$

dalle quali, eliminando $\partial Y/\partial t$, si ottiene

$$\frac{\partial Y}{\partial s} \left\{1 - \frac{Y}{g} \left(\frac{dU}{dY}\right)^2\right\} = i_t - j. \quad [19.8]$$

De Saint-Venant (1871) integrò questa equazione assumendo che la cadente j fosse costantemente uguale alla pendenza del fondo, come accade nel movimento uniforme. Con tale ipotesi la [19.8] si riduce all'equazione alle derivate ordinarie

$$\frac{dU}{dY} = \pm \sqrt{\frac{g}{Y}} \quad [19.9]$$

che ammette l'integrale

$$U \mp 2\sqrt{gY} = \text{cost.} \quad [19.10]$$

Utilizzando la precedente equazione differenziale si ottiene inoltre

$$\frac{d}{dY}(UY) = U + Y \frac{dU}{dY} = U \pm \sqrt{gY}$$

per cui l'equazione di continuità diventa

$$(U \pm gY) \frac{\partial Y}{\partial s} + \frac{\partial Y}{\partial t} = 0.$$

Essa rappresenta il profilo di onde di superficie le cui ordinate Y si propagano con la celerità

$$c = - \frac{\frac{\partial Y}{\partial t}}{\frac{\partial Y}{\partial s}} = U \pm \sqrt{gY} \quad [19.11]$$

e mostra che la propagazione può avvenire con celerità relativa alla corrente \sqrt{gY} , positiva o negativa. La relazione [19.10], corrispondentemente, indica un legame tra U ed Y valido con il segno superiore per l'onda che passa con la celerità $U + \sqrt{gY}$ e con il segno inferiore per l'onda che passa con celerità $U - \sqrt{gY}$.

Avendo presente l'associazione dei segni tra l'espressione della celerità e l'equazione differenziale [19.9]

$$\frac{dU}{dY} = \pm \sqrt{\frac{g}{Y}},$$

si osserva che le onde che si propagano con celerità $U + \sqrt{gY}$ inducono variazioni di velocità dU di segno concorde con le variazioni di profondità dY , mentre le onde che si propagano con celerità $U - \sqrt{gY}$, e quindi in particolare le onde ascendenti sulle correnti lente, comportano variazioni di velocità discordi con le variazioni di profondità. Il risultato non cambierebbe sostanzialmente se si mettessero in conto anche gli effetti della pendenza del fondo e delle resistenze, salvo che allora la presenza di attenuazioni e di uno sfasamento fra le variazioni di velocità e di profondità renderebbe meno semplice il confronto.

Assumendo la condizione

$$U = 0 \quad \text{per } Y = Y_0,$$

e considerando la propagazione con celerità relativa positiva, vale la relazione

$$U - 2\sqrt{gY} = 0 - 2\sqrt{gY_0}$$

che sostituita nella [19.11] fornisce il valore

$$c = U - \sqrt{gY} = 3\sqrt{gY} - 2\sqrt{gY_0} \quad [19.12]$$

della celerità dell'onda; per $Y \rightarrow Y_0$, essa tende al valore $\sqrt{gY_0}$ di Lagrange.

Con il valore [19.12] della celerità l'equazione di continuità diventa

$$(3\sqrt{gY} - 2\sqrt{gY_0}) \frac{\partial Y}{\partial s} + \frac{\partial Y}{\partial t} = 0,$$

il cui integrale generale è

$$s = (3\sqrt{gY} - 2\sqrt{gY_0})t + \Psi(Y) \quad [19.13]$$

avendo indicato con Ψ una funzione arbitraria di Y .

L'eq. [19.13] fornisce la forma del profilo dell'onda, ad un istante t , conoscendone la configurazione

$$s = \Psi(Y)$$

all'istante $t = 0$. Il profilo si propaga come se ciascun suo punto, posto all'altezza Y sul fondo, fosse animato dalla velocità orizzontale $3\sqrt{gY} - 2\sqrt{gY_0}$.

19.3. Le equazioni del moto vario di correnti con afflussi e deflussi laterali.

Consideriamo nuovamente una corrente a pelo libero soggetta a variazioni di velocità e di sezione graduali nel tempo e nello spazio in modo tale da assicurare la conservazione della forma quasi cilindrica della corrente stessa. Ora si vuole mettere in conto anche il contributo di eventuali afflussi e deflussi laterali.

I primi possono derivare dall'apporto di piogge, di deflussi superficiali e di moti di filtrazione verso l'alveo. La direzione di arrivo di queste portate in entrata, indicate con q_e per unità di lunghezza della corrente, è di norma perpendicolare all'alveo. Escludendo la presenza di veri e propri corsi d'acqua affluenti, che non rientrano d'altra parte nell'ipotesi di portate distribuite, si può assumere senz'altro q_e diretta perpendicolarmente alla linea d'asse della corrente.

I deflussi, indicati con q_u per unità di lunghezza, possono invece derivare, oltre che da moti filtranti dispersivi, da tracimazioni continue lungo le sponde. Le portate di filtrazione, qualunque sia il loro segno, hanno influenza trascurabile sui fenomeni ondosi, in particolare sulle onde di piena, mentre le portate sottratte per tracimazione sono spesso importanti perché imposte dalla presenza di soglie artificiali predisposte lateralmente proprio allo scopo di derivare acqua o di scolare le piene.

L'equazione di continuità si ottiene subito partendo dalla forma nota [19.1] valida in assenza di portate laterali

$$\frac{\partial(\Omega U)}{\partial s} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0$$

ed imponendo che la variazione di volume per unità di lunghezza e per unità di tempo, espressa dal primo membro dell'equazione predetta, uguagli la differenza tra afflussi e deflussi laterali; risulta così

$$\frac{\partial(\Omega U)}{\partial s} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = q_e - q_u. \quad [19.14]$$

Per quanto riguarda l'equazione della quantità di moto, nella direzione dell'asse della corrente, è diverso il contributo delle portate q_e da quello delle portate q_u . Considerando un tronco di lunghezza unitaria (fig. 19.2), la portata entrante q_e ha componente della quantità di moto, nella direzione s , nulla all'ingresso e pari a $q_e U$ quando attraversa la sezione terminale facendo ormai parte della corrente di velocità media U . La portata uscente q_u non comporta invece variazioni al bilancio descritto dal-

l'equazione della quantità di moto senza deflussi laterali, quando è proiettata nella direzione s . Infatti, o la quantità di moto della portata q_u conserva proiezione costante nella direzione originaria del moto, perché la velocità della vena che effluisce mantiene componente in tale direzione uguale alla velocità della corrente nella sezione d'ingresso; oppure la sua eventuale variazione, sempre nella direzione del moto, è pari alla componente della forza esterna esercitata sul liquido da quella parte del contorno che concorre alla deviazione della vena, e quindi i due termini si elidono insieme nell'equazione dinamica.

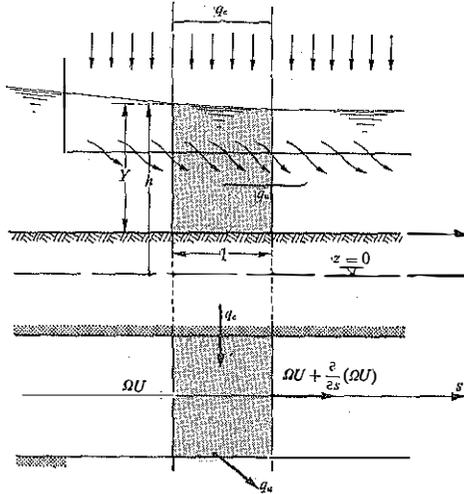


Fig. 19.2. - Corrente con afflussi e deflussi laterali.

Resta la sola variazione $q_e U$ da aggiungere alla valutazione della quantità di moto fatta nel paragrafo 16.1. Indicando al solito con h il carico piezometrico $z + p/\gamma$, si ottiene

$$\gamma \Omega \frac{\partial h}{\partial s} + \rho \Omega U \frac{\partial U}{\partial s} + \rho \Omega \frac{\partial U}{\partial t} + \rho q_e U = -\tau_0 B.$$

Da questa, divisa per $\gamma \Omega$, deriva la forma

$$\frac{\partial h}{\partial s} + \frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{q_e U}{g \Omega} = -j \tag{19.15}$$

dell'equazione della quantità di moto, valida per correnti lineari con afflussi

e deflussi laterali, nella quale, come in precedenza, si è indicato con

$$j = \frac{\tau_0}{\gamma R} = \frac{|U|U}{C^2 g R}$$

la perdita di carico totale per unità di lunghezza dovuta alle sole resistenze sul contorno e valutata come nel moto permanente.

19.4. L'integrazione numerica delle equazioni del moto vario.

Il sistema di equazioni [19.14] e [19.15] può essere scritto in termini di due sole funzioni incognite di s e t , scelte l'una fra le grandezze cinematiche, la velocità U o la portata Q , e l'altra fra le grandezze geometriche, il carico piezometrico h , o la profondità Y oppure la sezione Ω . Tra queste ultime, il carico piezometrico h , pari alla quota del pelo libero, è la grandezza d'impiego più conveniente nell'esame dei corsi d'acqua naturali.

Scelte U ed h , il sistema si scrive

$$\begin{cases} \Omega \frac{\partial U}{\partial s} + Ub \frac{\partial h}{\partial s} + b \frac{\partial h}{\partial t} + U \left[\frac{\partial \Omega}{\partial s} \right]_h - (q_e - q_u) = 0 \\ U \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial s} + q_e \frac{U}{\Omega} + g j = 0 \end{cases} \quad [19.16]$$

essendo b la larghezza del pelo libero alla quota h .

Le forme precedenti derivano dalla considerazione della sezione Ω come funzione della coordinata s e del carico h , il quale, a sua volta, è funzione di s e t , ossia $\Omega = \Omega[s, h(s, t)]$, sicché

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial t} &= b \frac{\partial h}{\partial t} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial s} &= b \frac{\partial h}{\partial s} + \left[\frac{\partial \Omega}{\partial s} \right]_h. \end{aligned}$$

In termini invece di Q ed h il sistema assume la forma

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial s} + b \frac{\partial h}{\partial t} - (q_e - q_u) = 0 \\ \frac{Q}{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial Q}{\partial t} + \left(g \Omega - \frac{Q^2 b}{\Omega^2} \right) \frac{\partial h}{\partial s} - \frac{Q b}{\Omega} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{Q^2 b}{\Omega^2} i_{(h)} + \frac{q_e Q}{\Omega} + g \Omega j = 0 \end{cases} \quad [19.17]$$

avendo posto

$$i_{(h)} = \frac{1}{b} \left[\frac{\partial \Omega}{\partial s} \right]_h,$$

fattore che, nella situazione di alveo cilindrico, coincide con la pendenza del fondo i_f .

L'esperienza di calcolo indica generalmente come preferibile questa ultima forma del sistema di equazioni del moto vario di una corrente liquida. L'integrazione si può eseguire per differenze finite, salvo ricorrere a particolari semplificazioni, come quelle utilizzate nei paragrafi 19.8 e 19.9. Due procedimenti di calcolo possono essere seguiti: il metodo delle caratteristiche, già richiamato per il calcolo della propagazione delle onde di pressione, e i metodi diretti alle differenze finite.

19.5. Il metodo delle caratteristiche.

Per l'impostazione generale del metodo si rimanda al paragrafo 16.15. Come si è visto allora, il sistema di equazioni alle derivate parziali [19.17] si trasforma in un sistema di equazioni ai differenziali totali sulle linee caratteristiche

$$\frac{ds}{dt} = \frac{Q}{\Omega} \pm \sqrt{\frac{g\Omega}{b}}. \quad [19.18]$$

Tali linee esistono e sono reali e distinte finché il sistema dato è di tipo *iperbolico*. Le relative equazioni [19.18] sono state ottenute applicando la condizione indicata nel paragrafo 16.15 già richiamato. Sulle linee caratteristiche, le equazioni di compatibilità assumono la forma

$$dQ - b \left(\frac{Q}{\Omega} \mp \sqrt{\frac{g\Omega}{b}} \right) dh + \left[g\Omega j - \frac{Q^2 b}{\Omega^2} i_{(0)} + \left(\frac{Q}{\Omega} \mp \sqrt{\frac{g\Omega}{b}} \right) q_e \pm \sqrt{\frac{g\Omega}{b}} q_u \right] dt = 0 \quad [19.19]$$

con ovvia corrispondenza dei segni.

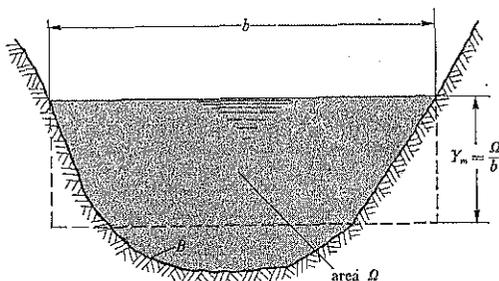


Fig. 19.3. - Profondità media Y_m di una sezione trasversale.

Le equazioni delle caratteristiche mettono in evidenza la celerità c di propagazione di un'onda di ampiezza infinitesima su una corrente caratterizzata dalla velocità media U e dalla *profondità media* $Y_m = \Omega/b$, pari all'altezza della sezione rettangolare che ha la stessa area Ω e la stessa larghezza b del pelo libero della sezione data, come mostra la figura 19.3. Essendo $c = ds/dt$, si ha dalla [19.18]

$$c = \frac{Q}{\Omega} \pm \sqrt{\frac{g\Omega}{b}} = U \pm \sqrt{gY_m}.$$

La dipendenza della celerità dell'onda dalla profondità media deriva dall'ipotesi di monodimensionalità del moto, che comporta necessariamente l'identità di fase dell'onda in tutta la sezione. Tale risultato è giustificato negli alvei di sezione compatta; non in quelli di sezione mista, come gli alvei con golene od i canali lagunari, per i quali si deve ricorrere ad una divisione della sezione in parti a differente comportamento o a schemi di moto bidimensionale. Si vedano su questo tema, in particolare, gli studi di propagazione della marea nella laguna di Venezia (cfr. Ghetti, 1979).

Evidentemente $\pm \sqrt{gY_m}$ rappresenta la celerità relativa alla corrente di velocità U . Tenendo presente la distinzione fra

correnti lente, o subcritiche, per le quali è

$$U < \sqrt{gY_m}, \quad \text{ossia} \quad Fr_m = \frac{U}{\sqrt{gY_m}} < 1,$$

correnti veloci, o supercritiche, per le quali è

$$U > \sqrt{gY_m}, \quad \text{ossia} \quad Fr_m > 1,$$

si vede che soltanto nelle prime le perturbazioni in esame possono propagarsi contro corrente.

Sul piano orario s, t le caratteristiche sono rappresentate da due famiglie di curve C^+ e C^- che, nel caso di corrente lenta, hanno pendenze di segno opposto. Nel caso di correnti veloci, le pendenze delle curve caratteristiche sono invece concordi. La figura 19.4 mostra un reticolo di caratteristiche C^+ e C^- nella situazione di corrente subcritica.

Le soluzioni $h(s, t)$ e $Q(s, t)$ del sistema in esame restano determinate se sono note, oltre che la geometria dell'alveo e gli eventuali valori delle portate laterali in funzione del tempo, affluenti q_e e defluenti q_u , anche: le *condizioni iniziali*, cioè i valori $h(s, 0)$ e $Q(s, 0)$ sull'asse $t = 0$ per il tratto di alveo di lunghezza L considerato, e le *condizioni al contorno*.

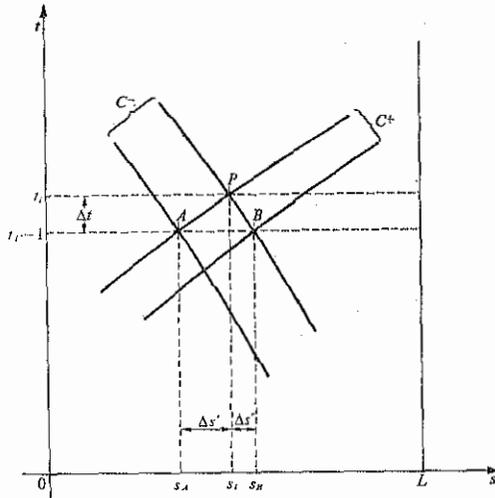


Fig. 19.4. - Rappresentazione delle curve caratteristiche.

Nel caso di *corrente veloce* queste ultime condizioni sono date in *una sola sezione*, quella di monte del tronco considerato, ed esprimono l'evoluzione nel tempo delle grandezze $h = h(0, t)$ e $Q = Q(0, t)$ in quella sezione. Nel caso di *corrente lenta*, nella sezione di monte del tronco considerato è di solito assegnato l'andamento della portata $Q = Q(0, t)$, mentre nella sezione di valle è noto un legame del tipo $Q(L, t) = f[h(L, t)]$. Anche nella situazione di corrente lenta talvolta possono essere conosciute entrambe le grandezze $Q = Q(t)$ ed $h = h(t)$ in una stessa sezione la quale, necessariamente, dev'essere situata alla chiusura di valle del tronco considerato (v. Lombardo e Rebaudengo Landò, 1970).

Il calcolo numerico delle soluzioni procede quindi passo-passo sostituendo ai differenziali ds e dt gli incrementi finiti Δs e Δt lungo le caratteristiche e ricavando le corrispondenti variazioni Δh e ΔQ .

Ad esempio, il calcolo dei valori h e Q nel punto P della figura 19.4, ossia nella sezione s_i all'istante t_i , è immediato a partire dalla conoscenza di tutte le grandezze nei punti A e B posti sulle caratteristiche C^+ e C^- passanti per P all'istante t_{i-1} , che precede t_i dell'intervallo fisato Δt . Supposto, solo per semplificare la scrittura, che nel tronco $A-B$ siano nulle le portate q_e e q_w e indicato con

$$\left. \begin{aligned} M' \\ M'' \end{aligned} \right\} = b \left(\frac{Q}{\Omega} \mp \sqrt{\frac{g\Omega}{b}} \right)$$

$$N = \frac{Q^2 b}{\Omega^2} i_{(h)} - g\Omega j$$

si ottiene

$$\text{sulla } C^+: \quad Q_P - Q_A - M'_A(h_P - h_A) = N_A \Delta t$$

$$\text{sulla } C^-: \quad Q_P - Q_B - M''_B(h_P - h_B) = N_B \Delta t$$

da cui si ricavano subito i valori Q_P ed h_P .

L'approssimazione naturalmente migliora riducendo l'intervallo Δt , ma il numero dei punti di calcolo diventa presto proibitivo; si può allora ricorrere a procedimenti iterativi per il calcolo dei coefficienti M' , M'' ed N con valori medi fra A e P nella prima equazione e medi fra B e P nella seconda. Il reticolo di calcolo non è regolare e ciò comporta tediose interpolazioni se si vuole procedere per istanti contemporanei su tutto il tronco d'alveo considerato oppure su sezioni prestabilite per intervalli di tempo variabili.

Numerosi artifici sono consigliati per facilitare ed accelerare il processo numerico e per questi si rimanda ai testi specializzati (si veda, per esempio, M. B. Abbott: *Computational Hydraulics*, 1979).

19.6. I metodi diretti alle differenze finite.

Il sistema di equazioni del moto vario di una corrente monodimensionale può essere risolto algebricamente eseguendo il calcolo delle derivate parziali per mezzo di rapporti incrementali finiti.

Il reticolo numerico ha in questo caso maglie regolari di forma rettangolare, come mostra la figura 19.5. Contiamo lo spazio con multipli i del-

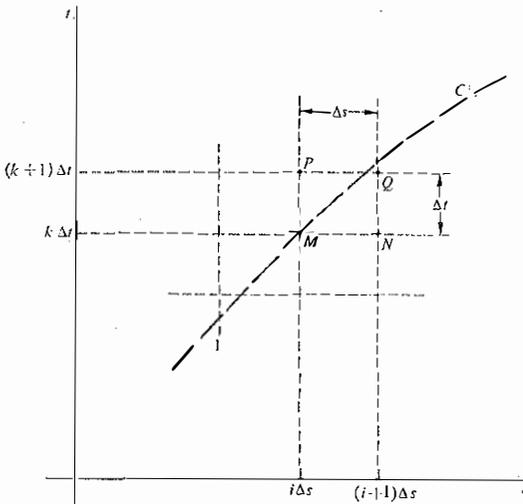


Fig. 19.5. - Reticolo per il calcolo numerico alle differenze finite.

l'intervallo Δs ed il tempo con multipli k dell'intervallo Δt . Si introducono dei coefficienti p_s e p_t , di valore compreso fra 0 ed 1, come coefficienti di peso per mediare rispettivamente nello spazio e nel tempo le grandezze che compaiono nel sistema in esame e le derivate di Q e di h . Allora, per una generica grandezza A , si ottiene:

media pesata temporale fra i punti MP : $p_t A_i^k + (1-p_t) A_i^{k+1}$

media pesata temporale fra i punti NQ : $p_t A_{i+1}^k + (1-p_t) A_{i+1}^{k+1}$

media pesata spaziale fra le medie precedenti

$$A \cong p_s [p_t A_i^k + (1-p_t) A_i^{k+1}] + (1-p_s) [p_t A_{i+1}^k + (1-p_t) A_{i+1}^{k+1}].$$

Il risultato non cambia invertendo l'ordine di mediazione, per cui si può scrivere

$$A \cong p_s p_t A_i^k + p_s (1-p_t) A_i^{k+1} + (1-p_s) p_t A_{i+1}^k + (1-p_s) (1-p_t) A_{i+1}^{k+1}$$

e analogamente per le derivate

$$\frac{\partial A}{\partial s} \cong p_t \frac{A_{i+1}^k - A_i^k}{\Delta s} + (1-p_t) \frac{A_{i+1}^{k+1} - A_i^{k+1}}{\Delta s}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} \cong p_s \frac{A_i^{k+1} - A_i^k}{\Delta t} + (1-p_s) \frac{A_{i+1}^{k+1} - A_{i+1}^k}{\Delta t}.$$

Se si sostituiscono queste valutazioni approssimate nel sistema di equazioni [19.17], si ottengono due equazioni algebriche nelle quattro incognite h_i^{k+1} , h_{i+1}^{k+1} , Q_i^{k+1} , Q_{i+1}^{k+1} . Ripetendo l'applicazione a tutte le maglie comprese tra gli istanti $k\Delta t$ e $(k+1)\Delta t$ fino a raggiungere la sezione di estremità del tronco considerato si ottiene un sistema formato da un numero di equazioni che, con l'aggiunta delle due condizioni al contorno, è pari al numero delle incognite. Restano così determinate le grandezze h e Q all'istante $(k+1)\Delta t$, in sezioni della corrente distanti Δs fra loro, note che siano le stesse grandezze all'istante $k\Delta t$.

La soluzione è *esplicita* soltanto nel caso $p_t = 1$. Allora le grandezze h e Q all'istante $(k+1)\Delta t$ sono infatti esprimibili esplicitamente in funzione dei valori all'istante $k\Delta t$. Il procedimento è abbastanza semplice ma richiede che sia soddisfatta la condizione di *stabilità* di Courant-Friedrichs-Levy

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} > \frac{Q}{\Omega} + \sqrt{\frac{g\Omega}{b}};$$

essa impone, ad esempio, che il punto Q della figura 19.5 si trovi al di sotto o tutt'al più sulla caratteristica C^+ passante per il punto M . Tale

condizione limita l'ampiezza della scansione temporale per un assegnato passo spaziale e , come nel caso del metodo delle caratteristiche, moltiplica rapidamente il numero delle operazioni di calcolo.

Assumendo $p_t < 1$ si ottengono invece equazioni che definiscono implicitamente le grandezze incognite. Tale metodo *implicito* comporta qualche complicazione nella risoluzione del sistema di equazioni ma presenta il grande vantaggio, per $p_t < 0,5$, di fornire una soluzione stabile qualunque sia la scelta di Δs e Δt . Per questa possibilità di aumentare la scansione temporale, lo schema implicito è spesso preferito come metodo di calcolo numerico.

Nelle applicazioni è conveniente scrivere le equazioni del moto vario nella forma

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + b \frac{\partial h}{\partial t} - (q_e - q_u) = 0 \quad [19.20]$$

derivata dalla [19.14] e

$$\frac{\partial h}{\partial s} + \frac{1}{g} \left\{ \frac{Q}{\Omega} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{Q}{\Omega} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q}{\Omega} \right) \right\} + \frac{q_e Q}{g \Omega^2} + j = 0 \quad [19.21]$$

derivata evidentemente dalla [19.15].

Assumendo, a titolo di esempio, $p_s = 0,5$ e $p_t = 0$, si perviene al sistema di equazioni algebriche non lineari

$$\begin{aligned} & \frac{Q_{i+1}^{k+1} - Q_i^{k+1}}{\Delta s} + \left(\frac{b_i^{k+1} + b_{i+1}^{k+1}}{2} \right) \left(\frac{h_i^{k+1} - h_i^k + h_{i+1}^{k+1} - h_{i+1}^k}{2 \Delta t} \right) - (q_e - q_u) = 0 \\ & \frac{h_{i+1}^{k+1} - h_i^{k+1}}{\Delta s} + \frac{1}{2g \Delta s} \left(\frac{Q_i^{k+1}}{\Omega_i^{k+1}} + \frac{Q_{i+1}^{k+1}}{\Omega_{i+1}^{k+1}} \right) \cdot \left(\frac{Q_{i+1}^{k+1}}{\Omega_{i+1}^{k+1}} - \frac{Q_i^{k+1}}{\Omega_i^{k+1}} \right) + \\ & + \frac{1}{2g \Delta t} \left(\frac{Q_i^{k+1}}{\Omega_i^{k+1}} - \frac{Q_i^k}{\Omega_i^k} + \frac{Q_{i+1}^{k+1}}{\Omega_{i+1}^{k+1}} - \frac{Q_{i+1}^k}{\Omega_{i+1}^k} \right) + \frac{q_e}{2g} \left\{ \frac{Q_i^{k+1}}{(\Omega_i^{k+1})^2} + \frac{Q_{i+1}^{k+1}}{(\Omega_{i+1}^{k+1})^2} \right\} + \\ & + \frac{1}{2} (j_i^{k+1} + j_{i+1}^{k+1}) = 0 \end{aligned} \quad [19.22]$$

nelle quali le grandezze b ed Ω sono funzioni note di h .

Un chiaro esempio di applicazione di questi metodi di calcolo alla propagazione di un'onda di piena si trova nel « modello matematico delle piene dell'Arno », che costituisce il risultato di una ricerca condotta parallelamente presso l'Istituto di Idraulica dell'Università di Pavia ed il Centro Scientifico IBM di Pisa (Gallati *e al.*, 1977).

19.7. Le onde di piena.

Una delle applicazioni più importanti delle equazioni del moto vario delle correnti a pelo libero riguarda la simulazione matematica della propagazione delle onde di piena negli alvei naturali. I procedimenti richiamati nei paragrafi precedenti, dal metodo delle caratteristiche ai metodi alle differenze finite, sia quello esplicito, sia soprattutto il metodo implicito, trovano largo impiego nella formulazione del modello matematico del fenomeno propagatorio delle piene. Si richiede generalmente, nella preparazione del modello relativo all'asta principale, l'introduzione degli effetti delle onde di piena degli affluenti, con combinazioni che possono essere opportunamente variate.

Per questi calcoli l'equazione di continuità e l'equazione dinamica della corrente, senza afflussi o deflussi laterali, si usano scrivere nelle forme

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0 \quad [19.23]$$

$$\frac{\partial Y}{\partial s} + \frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} = i_r - j \quad [19.24]$$

che differiscono dalle precedenti [19.1] e [19.3] per avere introdotto la portata $Q = \Omega U$ nella prima ed eseguito nella seconda la sostituzione [19.5]

$$\frac{\partial h}{\partial s} = -i_r + \frac{\partial Y}{\partial s}.$$

Va osservato che l'impiego delle equazioni di de Saint-Venant impone la determinazione di *un solo parametro*, agli effetti della taratura del modello: il coefficiente di scabrezza dell'alveo corrispondente alla legge di resistenza adottata per esprimere C nella

$$j = \frac{U^2}{gC^2R} = \frac{Q^2}{gC^2\Omega^2R};$$

nel caso delle onde di piena il ricorso al prodotto $U|U|$ in luogo di U^2 non è necessario perché non sono temibili inversioni di segno della velocità.

La complicazione numerica richiesta per la soluzione del sistema [19.23]-[19.24] consiglia tuttavia, in alcuni casi, il ricorso a modelli semplificati, utili anche per mettere in evidenza qualche aspetto di carattere generale delle onde di piena.

Il più semplice di questi modelli, che fornisce già risultati interessanti nonostante la drastica semplificazione da cui deriva, è quello suggerito

da Boussinesq nel 1872, basato sull'assunzione che il passaggio dell'onda di piena dia luogo ad una successione di stati quasi uniformi, in modo che risulti sempre

$$i_r - j = 0.$$

L'ipotesi si giustifica con il riferimento ad onde di periodo molto lungo, per cui la corrente è soggetta a variazioni estremamente graduali nello spazio e nel tempo. L'equazione dinamica si riduce allora ad una relazione fra la portata Q e la profondità Y , o la sezione Ω , espressa dall'equazione del moto uniforme. Tale legame si può scrivere nella forma

$$Q = k\Omega^m \quad [19.25]$$

con k ed m assunti costanti, ed essa viene tradizionalmente chiamata *scala di deflusso*. L'argomento è stato trattato nel paragrafo 17.9 dedicato ai problemi del moto uniforme. In quel paragrafo è stata anche ricavata un'espressione dell'esponente m in funzione dell'area della sezione e del perimetro bagnato e sono stati forniti alcuni valori di m , che si richiamano qui brevemente:

Sezioni	m
Triangolari, semicirculari, rettangolari con $Y/B = 1/2$	4/3
Rettangolari e trapezie con $0,10 < Y/B < 0,20$	$\sim 3/2$
Larghissime ($Y/B \rightarrow 0$)	5/3

In generale, per le sezioni larghe e larghissime l'esponente m ha dunque valori compresi fra $3/2$ e $5/3$.

19.8. Il modello cinematico.

Dalla considerazione della scala di deflusso

$$Q = k\Omega^m,$$

insieme all'equazione di continuità

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0,$$

si ottiene l'equazione del modello di propagazione delle piene detto *cinematico*. La denominazione deriva dall'importanza del ruolo svolto dalla condizione cinematica di continuità in questo schema di calcolo.

Indicando con c la derivata di Q rispetto ad Ω

$$c = \frac{dQ}{d\Omega} = m \frac{Q}{\Omega} = c(Q)$$

e tenuto conto che

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{dQ}{d\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial t} = c(Q) \frac{\partial \Omega}{\partial t}$$

dall'equazione di continuità si deduce

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c(Q) \frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \quad [19.26]$$

che è l'equazione differenziale del modello cinematico.

L'integrazione è immediata con il metodo delle caratteristiche. Infatti, l'equazione a derivate parziali [19.26] è equivalente al sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\frac{ds}{dt} = c(Q) \quad [19.27]$$

$$dQ = 0 \quad [19.28]$$

di cui la prima definisce l'unica famiglia di curve caratteristiche. Qui c indica la velocità di propagazione di uno stesso valore di portata. Con riferimento ai predetti valori di m si ha

$$c = m \frac{Q}{\Omega} = \left(\frac{3}{2} \div \frac{5}{3} \right) U \quad [19.29]$$

risultato che trova soddisfacente conferma nella propagazione delle piene in alvei regolari larghi a debole pendenza.

Dalla condizione di costanza di Q sulle caratteristiche, espressa dalla eq. [19.28], deriva che le caratteristiche stesse sono rette la cui pendenza sul piano s, t cresce con il crescere del valore della portata nella sezione $s = 0$. Come mostra la figura 19.6, assegnata per $s = 0$ la condizione al contorno

$$Q(0, t) = F(t) \quad \text{per } t \geq 0,$$

e posta inoltre la condizione che Q sia limitata per $s \rightarrow \infty$, è immediata la conoscenza della $Q = Q(s, t)$ in tutto il tratto in esame:

$$Q(s, t) = F(\tau)$$

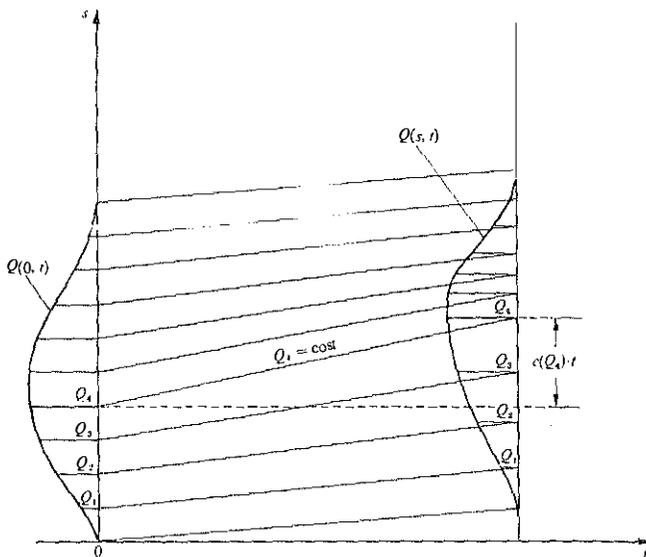


Fig. 19.6. - Propagazione di un'onda di piena secondo lo schema cinematico.

dove τ è un tempo definito implicitamente dalla

$$t = \tau + \frac{s}{c[F(\tau)]},$$

ottenuta integrando l'equazione delle caratteristiche [19.27].

Dato il legame tra Q ed Ω rappresentato dalla scala di deflusso, le variazioni di sezione si propagano con la stessa celerità delle variazioni di portata. Inoltre, poiché c risulta crescente con Q , la propagazione è tendenzialmente accompagnata da una distorsione che, in assenza di attenuazione, dovrebbe rendere il fronte dell'onda sempre più ripido con l'avanzamento.

Va osservato che la scala di deflusso potrebbe in generale anche cambiare da sezione a sezione, cioè essere del tipo $Q = Q(\Omega, s)$, conseguenza, in particolare, di variazioni del coefficiente k della scala $Q = k\Omega^m$ con l'ascissa s . Ciò non modifica formalmente l'equazione del modello cinematico

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c \frac{\partial Q}{\partial s} = 0,$$

salvo introdurre la dipendenza da s anche della celerità: $c = c(Q, s)$. Sotto

la condizione

$$Q(0, t) = F(t) \quad \text{per } t > 0$$

l'equazione data ammette ancora l'integrale

$$Q(s, t) = F(\tau)$$

dove però il tempo τ è ora definito implicitamente dalla relazione

$$t = \tau + \int_0^s \frac{ds}{c[F(\tau), s]}.$$

Quest'ultima è l'integrale dell'equazione delle caratteristiche

$$\frac{ds}{dt} = c(Q, s) = c[F(\tau), s]$$

le quali, evidentemente, non sono più rette nel piano s, t .

19.9. Il modello parabolico.

Un secondo schema semplificato, per lo studio delle onde di piena, si ottiene considerando trascurabili i termini inerziali dell'equazione di Saint-Venant, per cui quest'ultima si riduce a

$$\frac{\partial Y}{\partial s} = i_f - j. \quad [19.30]$$

L'approssimazione risulta del tutto giustificata, come si dimostrerà più avanti, negli alvei con pendenza molto dolce.

In base all'eq. [19.25], con cui si è definita una scala di deflusso, ed all'equazione del moto uniforme, si può scrivere

$$C\Omega\sqrt{gRi_f} = k\Omega^m \quad [19.31]$$

e quindi

$$j = \frac{Q^2}{C^2\Omega^2 gR} = \frac{Q^2 i_f}{k^2 \Omega^{2m}}. \quad [19.32]$$

Sostituendo questa espressione nella [19.30] e derivando l'equazione risultante rispetto a t , segue

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial Y}{\partial s} \right) = - \frac{2Qi_f}{k^2 \Omega^{2m}} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2mQ^2 i_f}{k^2 \Omega^{2m+1}} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial t}.$$

Posto che sia trascurabile la variazione della larghezza b con s e tenuto conto della equazione di continuità, si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial Y}{\partial s} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial Y}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{b} \frac{\partial Q}{\partial t} \right) = - \frac{1}{b} \frac{\partial^2 Q}{\partial s^2}.$$

e complessivamente

$$\frac{1}{b} \frac{\partial^2 Q}{\partial s^2} = \frac{2Q i_r}{k^2 \Omega^{2m}} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2m Q^2 i_r}{k^2 \Omega^{2m+1}} \cdot \frac{\partial Q}{\partial s}.$$

Questa equazione si può scrivere nella forma

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c \frac{\partial Q}{\partial s} = D \frac{\partial^2 Q}{\partial s^2} \quad [19.33]$$

con la stessa espressione [19.29] della celerità c del modello cinematico

$$c = m \frac{Q}{\Omega}$$

e con il coefficiente D dato dalla

$$D = \frac{k^2 \Omega^{2m}}{2bQ i_r} = \frac{Q}{2bj} \cong \frac{Q}{2bi_r}. \quad [19.34]$$

L'equazione a derivate parziali [19.33] è del tipo parabolico e spiega il nome attribuito al modello in esame che, sostanzialmente, è stato proposto da Hayami nel 1951.

La possibilità di sostituire il sistema iperbolico di partenza cui corrisponde un doppio valore della celerità, con una forma parabolica che ammette una sola determinazione della celerità, è giustificata dal particolare tipo di fenomeni propagatori in esame: quello delle *onde di piena*. Esse sono caratterizzate, oltre che da variazioni della sezione e della portata molto lente nel tempo e gradualmente nello spazio, da una propagazione esclusivamente verso valle.

Dalla [19.33] risulta evidente anche l'attenuazione del colmo dell'onda: per un osservatore che si muova con la velocità c la portata varia infatti con la legge

$$D \frac{\partial^2 Q}{\partial s^2}$$

e quindi, essendo $D > 0$, essa si attenua certamente procedendo con il colmo, dove è $\partial^2 Q / \partial s^2 < 0$.

L'eq. [19.33] del modello parabolico si può risolvere in forma analitica se la si linearizza assumendo valori costanti per i coefficienti c e D . Per questa linearizzazione conviene attribuire ad essi i valori corrispondenti, in moto permanente, ad una portata media dell'evento di piena.

La soluzione è data nella forma di un integrale di convoluzione

$$Q(s, t) = \int_0^t u(s, \tau) Q(0, t - \tau) d\tau \quad [19.35]$$

dove $Q(0, t)$ è la portata nella sezione $s = 0$ per $t > 0$

$u(s, \tau)$ è la risposta del sistema lineare a una portata impulsiva unitaria ed è espressa dalla

$$u(s, t) = \frac{s}{2t\sqrt{\pi t D}} \exp\left[-\frac{(ct - s)^2}{4Dt}\right].$$

Ad un'equazione di tipo parabolico si perviene pure con procedimento di semplificazione dell'equazione di de Saint-Venant (cfr. Marchi, 1978) che evidenzia anche il legame tra variazioni di sezione e variazioni di portata.

Per questo conviene esprimere la scala di deflusso nella forma

$$\Omega = KQ^N \quad [19.36]$$

dove K ed N sono correlati ai precedenti coefficienti k ed m dalle equazioni

$$K = \frac{1}{k^{1/m}}, \quad N = \frac{1}{m},$$

e quindi N è compreso fra $3/5$ e $3/4$, con valori più frequenti intorno a $2/3$.

L'eq. [19.36] è sempre soluzione della $i_r - j = 0$ in condizioni di moto uniforme. La si può assumere come soluzione di prima approssimazione dell'equazione di de Saint-Venant

$$\left(\frac{1}{b} - \frac{Q^2}{g\Omega^3}\right) \frac{\partial \Omega}{\partial s} + \frac{Q}{g\Omega^2} \left(\frac{\partial Q}{\partial s} - \frac{\partial \Omega}{\partial t}\right) + \frac{1}{g\Omega} \frac{\partial Q}{\partial t} = i_r - j$$

scritta in termini di Q ed Ω per alveo cilindrico ($\partial b/\partial s = 0$; $i_{(h)} = i_r$), e ritenere piccolo del primo ordine lo scostamento dalla soluzione effettiva. Allora, indicando sempre con c la celerità, unica per le grandezze Q ed Ω ,

$$c = \frac{dQ}{d\Omega} = \frac{1}{KNQ^{N-1}} = \frac{1}{N} \frac{Q}{\Omega} \quad [19.37]$$

a meno di termini piccoli del secondo ordine, risulta

$$\frac{\partial \Omega}{\partial s} = \frac{1}{c} \frac{\partial Q}{\partial s} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \Omega}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial Q}{\partial t}.$$

Dato che inoltre $\partial Q / \partial s = -\partial \Omega / \partial t$ per l'equazione di continuità, tutte le derivate presenti nell'equazione dinamica possono essere sostituite in funzione di $\partial Q / \partial t$. Complessivamente si ottiene, trascurando i termini piccoli del secondo ordine,

$$\left\{ -\left(\frac{1}{b} - \frac{Q^2}{g\Omega^2} \right) \frac{1}{c^2} - \frac{2Q}{g\Omega^2} \cdot \frac{1}{c} + \frac{1}{g\Omega} \right\} \frac{\partial Q}{\partial t} \frac{1}{i_r} = \left(\frac{\Omega}{KQ^N} \right)^{2/N} - 1$$

e quindi, nello stesso ordine di approssimazione,

$$\frac{\Omega}{KQ^N} = 1 - \frac{N^3}{2i_r} \frac{\partial Q}{\partial t} \left\{ \frac{\Omega^2}{Q^2} \left(1 - \frac{Q^2 b}{g\Omega^2} + \frac{2}{N} \frac{Q^2 b}{g\Omega^2} - \frac{1}{N^2} \frac{Q^2 b}{g\Omega^2} \right) \right\}.$$

Moltiplicando per KQ^N e tenendo conto che nell'ultimo termine si può sostituire KQ^N con Ω , resta infine l'equazione

$$\Omega = KQ^N - \frac{\eta}{g} \frac{\partial Q}{\partial t} \quad [19.38]$$

avendo posto

$$\eta = \frac{N^3}{2i_r} \left\{ \frac{g\Omega^2}{Q^2 b} - \left(\frac{1}{N} - 1 \right)^2 \right\}. \quad [19.39]$$

L'equazione dinamica [19.38] è interpretabile come una *scala di deflusso dell'onda di piena*. Associata all'equazione di continuità, essa conduce ad un'equazione a derivate parziali del tipo parabolico. Basta infatti derivare la [19.38] rispetto a t e sostituire il risultato nell'equazione di continuità; trascurando i termini piccoli del secondo ordine, si ha

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + KNQ^{N-1} \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\eta}{g} \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}$$

e quindi, introducendo la celerità c definita dalla [19.37], $c^{-1} = KNQ^{N-1}$, segue

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{1}{c} \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\eta}{g} \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}. \quad [19.40]$$

Questa equazione ha evidenti analogie con la [19.33]; il differente ruolo delle variabili t ed s consente tuttavia un diverso procedimento di integrazione, valido assunto η costante, ma anche in condizioni di celerità c

variabile con s . Per questo si rimanda alle pubblicazioni specializzate (v. ad esempio Whitham: *Linear and non linear waves*, J. Wiley & Sons, 1974).

Da notare che il coefficiente η dipende debolmente da Q attraverso il fattore

$$\frac{Q^2 b}{g\Omega^3} \cong \frac{b}{gK^3} Q^{2-3N}, \quad [19.41]$$

Se $N = 2/3$ e l'alveo è rettangolare, la dipendenza è addirittura nulla. Essendo

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{g\Omega/b}} = \frac{Q}{\Omega\sqrt{g\Omega/b}}$$

il numero di Froude della corrente, la [19.41] si può anche esprimere nella forma

$$\frac{Q^2 b}{g\Omega^3} = Fr^2. \quad [19.42]$$

Si osserva allora che nella [19.39] il termine

$$\frac{Q^2 b}{g\Omega^3} \left(\frac{1}{N} - 1\right)^2 = Fr^2 \left(\frac{1}{N} - 1\right)^2$$

è trascurabile rispetto ad 1 quando nella corrente quasi uniforme è $Fr^2 \ll 1$. In tali condizioni sono trascurabili i corrispondenti termini dell'equazione di de Saint-Venant, che risultano essere proprio i termini inerziali trascurati nel modello parabolico proposto da Hayami.

È chiaro che un procedimento analogo a quello svolto si può seguire assumendo come soluzione di prima approssimazione dell'equazione di de Saint-Venant la $Q = k\Omega^m$. Si giunge allora ad un'equazione dinamica della forma

$$Q = k\Omega^m + \frac{\eta}{g} c^2 \frac{\partial Q}{\partial t} \quad [19.43]$$

con le espressioni di c e di η già trovate (cfr. [19.29] e [19.39]).

Derivando la [19.43] rispetto al tempo e sostituendo il risultato nella equazione di continuità, nei limiti di approssimazione più volte richiamati, si ottiene l'equazione

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c \frac{\partial Q}{\partial s} = \frac{\eta c^3}{g} \frac{\partial^2 Q}{\partial s^2}, \quad [19.44]$$

che rappresenta un'estensione dell'equazione parabolica di Hayami, in quanto la sua validità non è limitata a correnti molto lente.

19.10. Onde pulsanti e frangenti (roll waves).

Il parametro adimensionale η , introdotto nel paragrafo precedente con l'espressione [19.39], ha, come si è visto per D , il significato di coefficiente di attenuazione dell'onda finché il suo valore è positivo. Esso si può scrivere in termini dell'esponente m della scala di deflusso

$$Q = k\Omega^m$$

e del numero di Froude Fr ; essendo $m = 1/N$ e utilizzando la relazione [19.42] si ha

$$\eta = \frac{1}{2m^3 i_f} \left\{ \frac{1}{Fr^2} - (m-1)^2 \right\}.$$

Tale espressione del coefficiente di attenuazione dell'onda mostra che per valori

$$Fr(m-1) > 1$$

η assume valori negativi. Ciò significa che le perturbazioni ondose si amplificano procedendo verso valle e possono raggiungere il frangimento. Il campo di *stabilità* resta quindi limitato dalla condizione

$$Fr < \frac{1}{m-1}. \quad [19.45]$$

Numericamente ciò significa $Fr < 1,5 \div 3,0$ passando da sezioni infinitamente larghe a sezioni circoscritte ad una semicirconferenza.

La velocità media nella sezione, in conformità alla condizione di stabilità [19.45], è critica quando assume il valore

$$U_{cs} = \frac{1}{m-1} \sqrt{g \frac{\Omega}{b}}.$$

Definendo il numero di Vedernikov come

$$Ve = \frac{U}{U_{cs}} = (m-1) Fr \quad [19.46]$$

si può scrivere il limite di stabilità anche nella forma

$$Ve < 1. \quad [19.47]$$

Il moto negli alvei con elevati numeri di Froude, in pratica con pendenza del fondo molto forte, assume un aspetto irregolare per la pre-

senza di piccole ondulazioni che conferiscono alla superficie libera una caratteristica rugosità. In tali correnti possono verificarsi fenomeni di aerazione e si possono formare spontaneamente treni d'onde frangenti, spesso chiamati con il termine inglese di « roll waves » (v. fig. 19.7).

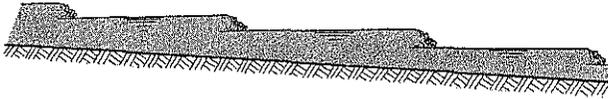


Fig. 19.7. - Onde pulsanti e frangenti (roll waves).

Il superamento del limite di stabilità, cioè la condizione $Ve > 1$ non è tuttavia sufficiente perché appaiono treni d'onde frangenti; occorre anche un percorso della corrente abbastanza lungo per consentire l'amplificazione, la distorsione e il frangimento delle piccole perturbazioni iniziali. Secondo Montuori (1961), tale condizione si può precisare mediante il numero

$$L/C^2R$$

unito al numero Ve di Vedernikov. Nel piano $Ve, L/C^2R$ è stato possibile tracciare una famiglia di curve, ciascuna caratterizzata da un particolare valore del coefficiente m , delimitanti il campo (tratteggiato nella fig. 19.8) nel quale possono verificarsi treni d'onde frangenti. Nella stessa figura 19.8 sono riportate le curve corrispondenti ai valori $m = 5/3 = 1,67$ ed $m = 11/9 = 1,22$, e ad un valore intermedio di un ulteriore parametro le cui variazioni hanno però un'influenza molto moderata sulle

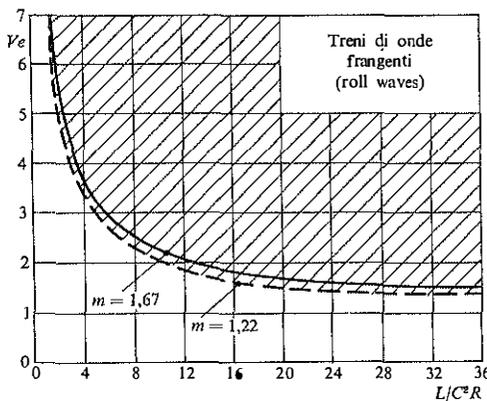


Fig. 19.8. - Diagramma per individuare la formazione di roll waves.

curve precedenti. La limitazione rappresentata da tali curve, poco discoste tra loro, è stata verificata con soddisfacente aderenza dai risultati sperimentali riportati da Fedorov (1937-38 e 1952) e da Arseniscvili (1952-53).

19.11. Onde di traslazione con fronte frangente (onde di shock).

Onde positive di traslazione si formano per effetto di manovre eseguite rapidamente e localmente in un canale, quali l'immissione di una portata liquida oppure la chiusura totale o parziale di una paratoia. Quando l'altezza dell'onda è considerevole rispetto alla profondità della corrente, il fronte frange ed assume forma di un risalto idraulico in movimento. La propagazione avviene con forti dissipazioni energetiche localizzate sul fronte e l'onda viene per questo chiamata *onda di shock*.

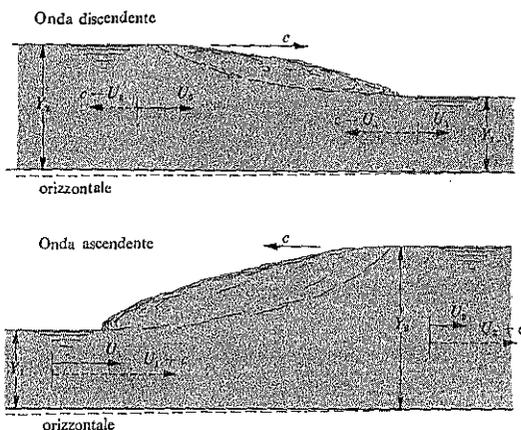


Fig. 19.9. - Onde di traslazione con fronte frangente. A tratteggio le velocità relative ad un riferimento in moto con la celerità c .

Nei confronti di un osservatore che si muova con la celerità c del fronte, la configurazione del profilo liquido appare quella di un ordinario risalto diretto. La figura 19.9 illustra la situazione sia nel caso di onde discendenti, sia in quello di onde ascendenti. Nel riferimento mobile con la celerità c , i cambiamenti sono di norma così lenti nel tempo che si può considerare il fenomeno stazionario. Supposto l'alveo rettangolare, possiamo allora scrivere l'equazione di continuità nella forma

$$(U_1 - c)Y_1 = (U_2 - c)Y_2$$

e l'equazione dinamica nella forma

$$\gamma \frac{Y_1^2}{2} - \gamma \frac{Y_2^2}{2} = \rho Y_1 (U_1 - c)(U_2 - U_1),$$

avendo trascurato l'effetto delle resistenze sul contorno del tronco 1-2 insieme a quello della pendenza del fondo. Da notare che la celerità ha segno positivo se le onde sono discendenti e segno negativo se sono ascendenti.

Ricavato U_2 dalla prima equazione, sostituendolo nella seconda si ottiene

$$\frac{g}{2} (Y_1^2 - Y_2^2) = Y_1 (U_1 - c)^2 (Y_1 - Y_2)$$

da cui deriva la seguente espressione della *celerità assoluta* c dell'onda

$$c = \pm \sqrt{\frac{gY_2}{2Y_1} (Y_1 + Y_2)} + U_1, \quad [19.48]$$

dove il doppio segno distingue, come s'è detto, le onde discendenti da quelle ascendenti.

Il valore *relativo* $\tilde{w} = c - U_1$ della celerità risulta

$$\tilde{w} = \pm \sqrt{\frac{gY_2}{2Y_1} (Y_1 + Y_2)} \cong \pm \sqrt{gY_1 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\mathcal{A}}{Y_1}\right)} \quad [19.49]$$

essendo $\mathcal{A} = Y_2 - Y_1$ l'altezza dell'onda.

Per quanto riguarda la valutazione dell'altezza d'onda minima necessaria per la formazione del fronte frangente, si può fare riferimento alla analoga limitazione ottenuta sperimentalmente per la formazione del *risalto diretto* in condizioni stazionarie. Dovendo essere in quel caso > 3 il quadrato del numero di Froude della corrente di profondità Y_1 , si ha nella corrispondente situazione attuale

$$\frac{(U_1 - c)^2}{gY_1} > 3$$

e quindi, per la [19.48],

$$\frac{Y_2}{2Y_1^2} (Y_1 + Y_2) > 3,$$

da cui deriva la condizione limitativa

$$\frac{Y_2}{Y_1} > 2. \quad [19.50]$$

Per valori minori il fronte si prolunga in più onde frangenti e irregolari; quando il rapporto fra la profondità media di valle e quella di monte risulta $\approx 1,25$ il profilo dell'onda assume una forma regolare e continua perfettamente simile a quella di un risalto ondulato in movimento. Per lo studio di quest'ultimo fenomeno non è più sufficiente il modello di corrente monodimensionale fin qui considerato, perché le componenti della velocità normali al fondo non possono più essere trascurate.

19.12. Moto vario bidimensionale.

Scott Russel (1837 e 1844) studiò per primo sperimentalmente un'onda particolare, con ampiezza e curvatura accentuate, che si propaga senza cambiamenti di forma su acque basse. A quell'onda, che è tutta sopraelevata rispetto al profilo di quiete, con un solo colmo, e che può percorrere tratti molto lunghi senza deformarsi e senza attenuarsi apprezzabilmente, fu dato il nome di *onda solitaria* (v. paragrafo 19.13). All'interpretazione teorica del fenomeno hanno fornito contributi essenziali Boussinesq (1871), Rayleigh (1876), Stokes (1883) e McCowan (1891-94).

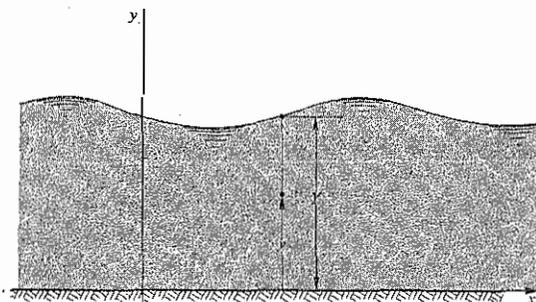


Fig. 19.10. - Moto vario bidimensionale.

Per lo studio delle onde che si propagano con forma invariante poniamo il sistema di riferimento solidale con le onde stesse, in modo che la loro configurazione ed il moto stesso risultino *stazionari*. Si assume che il moto sia *piano* e che si possa perciò rappresentare con il sistema di coordinate cartesiane ortogonali x, y della figura 19.10, dove x è un asse orizzontale posto sul fondo del canale considerato. Si può ammettere inoltre che il moto sia irrotazionale.

Volendo mettere in conto l'effetto delle resistenze di attrito si potrebbe pensare ad una vorticità concentrata in uno strato molto sottile aderente

al fondo. Il risultato che ne deriva è allora che le grandezze caratteristiche, energia specifica E' e quantità di moto totale S , costanti in ogni sezione normale al fondo, possono variare da una sezione ad un'altra per effetto delle resistenze al fondo.

Dato che la densità del fluido si mantiene costante, nel moto piano permanente qui considerato si può determinare la funzione di corrente ψ , che dev'essere armonica per l'ipotesi di irrotazionalità. Assunto il valore $\psi = 0$ sul fondo, il suo sviluppo in serie di potenze della quota y sul fondo si può scrivere nella forma

$$\psi(x, y) = yf(x) - \frac{y^3}{3!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{y^5}{5!} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - \dots \quad [19.51]$$

dove $f(x)$ è una funzione da determinare e le potenze di ordine pari sono nulle per soddisfare la condizione di armonicità $\nabla^2 \psi = 0$.

Nello studio di prima approssimazione, valido per onde di ampiezza molto piccola, si limita lo sviluppo della funzione ψ al solo *primo termine*. Indichiamo con Q' la portata per unità di larghezza, costante per la permanenza del moto e per l'invarianza della densità del liquido. Poiché il pelo libero, dove $y = Y$, è una linea di corrente sulla quale dev'essere $\psi = Q'$, segue

$$Q' = Yf(x),$$

e quindi

$$\psi = Q' \frac{y}{Y}; \quad v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{Q'}{Y}; \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0; \quad [19.52]$$

il moto avviene con distribuzione uniforme e unidirezionale della velocità in ogni sezione.

Il carico specifico

$$E = y + \frac{p}{\gamma} + \frac{v_x^2 + v_y^2}{2g}$$

è costante, per l'irrotazionalità del moto, e si può valutare con riferimento ad un punto del pelo libero; risulta allora

$$E = Y + \frac{v_x^2 + v_y^2}{2g} = Y + \frac{Q'^2}{2gY^2} \quad [19.53]$$

tenuto conto dei valori [19.52] delle componenti della velocità.

Il confronto tra le due espressioni di E mostra che in ogni sezione la distribuzione della pressione è idrostatica. In tali condizioni la quantità di moto totale S , somma della quantità di moto della portata e del risul-

tante delle pressioni normali sulla sezione, vale

$$S = \int_0^Y (p + \rho v_x^2) dy = \int_0^Y \gamma \left(E - y + \frac{v_x^2}{2g} \right) dy = \gamma \left(EY - \frac{Y^2}{2} \right) + \frac{1}{2} \rho \frac{Q'^2}{Y}$$

da cui

$$\frac{S}{\gamma} = EY - \frac{Y^2}{2} + \frac{Q'^2}{2gY} \quad [19.54]$$

oppure, sostituendo ad E l'espressione [19.53],

$$\frac{S}{\gamma} = \frac{Y^2}{2} + \frac{Q'^2}{gY}. \quad [19.55]$$

Si tratta di risultati già noti, validi per il moto piano monodimensionale. L'ultimo, in particolare, consegue immediatamente dalle distribuzioni uniforme della velocità e idrostatica della pressione in ogni sezione normale alla corrente. Il procedimento seguito ha però lo scopo di introdurre il passo successivo, che consiste nell'arrestare lo sviluppo della funzione di corrente ψ al *secondo ordine*, tenendo conto così delle potenze fino al 3° ordine in y .

La componente orizzontale della velocità vale allora

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = f(x) - \frac{y^2}{2} \frac{d^2 f}{dx^2};$$

poiché dalla condizione $\psi = Q'$ per $y = Y$ risulta

$$f(x) = \frac{Q'}{Y} + \frac{1}{6} Y^2 \frac{d^2 f}{dx^2},$$

sostituendo nella precedente si ottiene

$$v_x = \frac{Q'}{Y} + \left(\frac{Y^2}{6} - \frac{y^2}{2} \right) \frac{d^2 f}{dx^2}.$$

Nell'ordine di approssimazione premesso la $d^2 f/dx^2$ in questa equazione si può ricavare dall'espressione della $f(x)$ di prima approssimazione:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{2Q'}{Y^3} \left(\frac{dY}{dx} \right)^2 + \frac{Q'}{Y^2} \frac{d^2 Y}{dx^2},$$

e quindi, sostituendo, si ottiene la relazione

$$v_x = \frac{Q'}{Y} \left\{ 1 + \left(\frac{y^2}{Y^2} - \frac{1}{3} \right) \left[\frac{Y}{2} \frac{d^2 Y}{dx^2} - \left(\frac{dY}{dx} \right)^2 \right] \right\} \quad [19.56]$$

la quale fornisce la distribuzione della componente orizzontale della velocità nella sezione.

Per quanto riguarda la componente verticale, nello stesso ordine di approssimazione si ha

$$v_v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -y \frac{df}{dx} = +y \frac{Q'}{Y^2} \left(\frac{dY}{dx} \right). \quad [19.57]$$

Se $dY/dx = d^2Y/dx^2 = 0$, la distribuzione della velocità è uniforme e unidirezionale. Altrimenti la legge di distribuzione della componente orizzontale è parabolica e della componente verticale è lineare. La prima

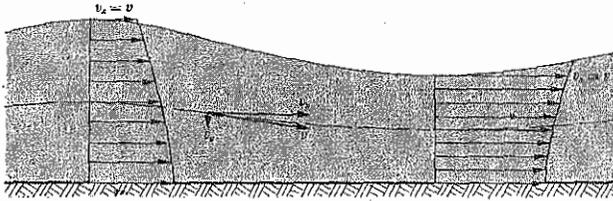


Fig. 19.11. - Distribuzione della velocità sotto il colmo e sotto il cavo di un'onda piana.

ha sul fondo il valore massimo relativo in corrispondenza di un colmo d'onda ed il minimo relativo in corrispondenza di un cavo, come mostra la figura 19.11. Sul pelo libero, in particolare, risulta

$$[v_x]_Y = \frac{Q'}{Y} \left[1 + \frac{1}{3} Y \frac{d^2 Y}{dx^2} - \frac{2}{3} \left(\frac{dY}{dx} \right)^2 \right]$$

$$[v_v]_Y = \frac{Q'}{Y} \left(\frac{dY}{dx} \right).$$

Il carico specifico si può ancora scrivere con riferimento ad un punto sul pelo libero, e nell'ordine di approssimazione fissato vale

$$E = Y + \frac{[v_x]_Y^2}{2g} + \frac{[v_v]_Y^2}{2g} = Y + \frac{Q'^2}{2gY^2} \left[1 + \frac{2}{3} Y \frac{d^2 Y}{dx^2} - \frac{1}{3} \left(\frac{dY}{dx} \right)^2 \right]. \quad [19.58]$$

La quantità di moto totale S si ottiene dalla

$$\frac{S}{\gamma} = \int_0^Y \left(\frac{p}{\gamma} + \frac{v_x^2}{g} \right) dy = \int_0^Y \left(E - y + \frac{v_x^2}{2g} - \frac{v_v^2}{2g} \right) dy$$

sostituendovi le espressioni [19.56] e [19.57] delle componenti della velo-

cià. Si ottiene

$$\int_0^Y (v_x^2 - v_y^2) dy = \frac{Q'^2}{Y^2} \left[Y - \frac{1}{3} Y \left(\frac{dY}{dx} \right)^2 \right]$$

e quindi

$$\frac{S}{\gamma} = EY - \frac{Y^2}{2} + \frac{Q'^2}{2gY} - \frac{Q'^2}{6gY} \left(\frac{dY}{dx} \right)^2. \quad [19.59]$$

Dal confronto di questa equazione con la [19.58] risulta anche

$$\frac{S}{\gamma} = \frac{Y^2}{2} + \frac{Q'^2}{gY} \left[1 + \frac{1}{3} Y \frac{d^2Y}{dx^2} - \frac{1}{3} \left(\frac{dY}{dx} \right)^2 \right].$$

Si noti che i termini $Y(d^2Y/dx^2)$ e $(dY/dx)^2$ sono piccoli dello stesso ordine, il che significa che il primo, proporzionale alla curvatura del profilo, è più piccolo della pendenza dY/dx dello stesso profilo.

19.13. Onda solitaria.

L'eq. [19.59], che deve soprattutto a Benjamin e Lightill (1954) un contributo fondamentale, anche per l'approfondimento del significato dei suoi termini, può essere scritta nella forma adimensionale

$$\left(\frac{dY}{dx} \right)^2 = \frac{6gY_0^3}{Q'^2} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{Y}{Y_0} \right)^3 + \frac{E}{Y_0} \left(\frac{Y}{Y_0} \right)^2 - \frac{S}{\gamma Y_0^2} \left(\frac{Y}{Y_0} \right) + \frac{Q'^2}{2gY_0^3} \right]$$

dove Y_0 è la profondità della corrente *cilindrica* di portata Q' per unità di larghezza. Introducendo il numero di Froude Fr_0 della stessa corrente si ha

$$\left(\frac{dY}{dx} \right)^2 = \frac{3}{Fr_0^2} \left[-\left(\frac{Y}{Y_0} \right)^3 + \frac{2E}{Y_0} \left(\frac{Y}{Y_0} \right)^2 - \frac{2S}{\gamma Y_0^2} \left(\frac{Y}{Y_0} \right) + Fr_0^2 \right]. \quad [19.60]$$

Diverse situazioni possono essere esaminate, sia assumendo E ed S costanti, sia mettendo in conto variazioni con x di E ed S per effetto delle resistenze. Nel primo caso possono verificarsi tre situazioni: (a) che E ed S abbiano costantemente i valori relativi alla corrente cilindrica di profondità Y_0 : l'unica soluzione possibile di moto vario è in tal caso l'*onda solitaria*; (b) che S abbia il valore precedente, mentre E assuma un valore diminuito rispetto al precedente della perdita del risalto idraulico $(Y - Y_0)^3/4YY_0$: fra le sezioni di profondità Y_0 ed Y si verifica una brusca discontinuità, ossia un *risalto diretto*; (c) che una od entrambe le grandezze E ed S abbiano valori minori di quelli relativi alla corrente

cilindrica di profondità Y_0 : tale situazione consente il formarsi di un treno di onde che si propagano mantenendo forma invariata e che sono dette *onde cnoidali* (Korteweg e de Vries, 1895).

Esaminiamo ora il caso (a). Si assume che le grandezze E ed S abbiano costantemente i valori

$$E_0 = Y_0 + \frac{Q'^2}{2gY_0^2} \quad \text{ed} \quad \frac{S_0}{\gamma} = \frac{Y_0^2}{2} + \frac{Q'^2}{gY_0}$$

Allora l'eq. [19.60] diventa

$$\left(\frac{dY}{dx}\right)^2 = \frac{3}{Fr_0^2} \left\{ -\left(\frac{Y}{Y_0}\right) \left[\left(\frac{Y}{Y_0}\right)^2 - 2\left(\frac{Y}{Y_0}\right) + 1 \right] + Fr_0^2 \left[\left(\frac{Y}{Y_0}\right)^2 - 2\left(\frac{Y}{Y_0}\right) + 1 \right] \right\}$$

ossia

$$\left(\frac{dY}{dx}\right)^2 = \frac{3}{Fr_0^2} \left(\frac{Y}{Y_0} - 1\right)^2 \left(Fr_0^2 - \frac{Y}{Y_0}\right) \quad [19.61]$$

che è l'equazione differenziale dell'onda solitaria ottenuta in prima approssimazione da Rayleigh (1876).

Si osserva subito che il colmo dell'onda ha la profondità data dall'equazione

$$\frac{Y_{\max}}{Y_0} = Fr_0^2; \quad [19.62]$$

da cui, essendo $Fr_0^2 = Q'^2/gY_0^3$ e poiché la portata Q' del moto stazionario, al quale è stato ricondotto il fenomeno propagatorio, è pari al prodotto della celerità c dell'onda per la profondità Y_0 della corrente cilindrica, segue

$$c = \sqrt{gY_{\max}} = \sqrt{g(Y_0 + \mathcal{A})} \quad [19.63]$$

avendo indicato con \mathcal{A} l'altezza dell'onda (fig. 19.12). Questo risultato era stato ottenuto sperimentalmente già da Scott Russel (1844).

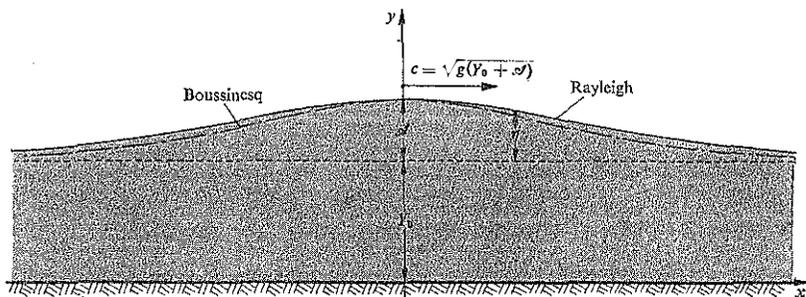


Fig. 19.12. - Onda solitaria.

L'equazione del profilo dell'onda, che ha forma simmetrica rispetto al colmo e tende asintoticamente alla profondità Y_0 per $x \rightarrow \pm \infty$, si ottiene integrando la precedente equazione differenziale. Per questo conviene scriverla nella forma

$$\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 = \frac{3}{Y_0^2(Y_0 + \mathcal{A})} (\mathcal{A} - \eta)\eta^2$$

avendo posto $\eta = Y - Y_0$ ed essendo $Fr_0^2 = \frac{c^2}{gY_0} = \frac{Y_0 + \mathcal{A}}{Y_0}$.

L'integrale di questa equazione, ossia della

$$\frac{d\eta}{\eta\sqrt{\mathcal{A} - \eta}} = \sqrt{\frac{3}{Y_0 + \mathcal{A}}} \frac{dx}{Y_0},$$

assumendo $x = 0$ in corrispondenza del colmo $\eta = \mathcal{A}$, vale

$$\eta = \mathcal{A} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{2Y_0} \sqrt{\frac{3\mathcal{A}}{Y_0 + \mathcal{A}}}\right) \quad [19.64]$$

ed il relativo profilo dell'onda è rappresentato nella figura 19.12.

Secondo la trattazione di Boussinesq (1871) il profilo dell'onda, sempre in prima approssimazione, è fornito dall'equazione

$$\eta = \mathcal{A} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{2Y_0} \sqrt{3 \frac{\mathcal{A}}{Y_0}}\right) \quad [19.65]$$

ed è pure rappresentato nella figura 19.12. I risultati sperimentali concordano meglio con la forma più ripida dell'onda espressa da quest'ultima equazione (Daily e Stephan, 1951). Si tratta comunque di soluzioni approssimate valide per ampiezze \mathcal{A} decisamente minori della profondità Y_0 .

Aumentando il valore dell'ampiezza dell'onda le esperienze mostrano che si raggiunge una condizione limite di frangimento dell'onda intorno a valori 0,7 del rapporto \mathcal{A}/Y_0 . Finora, su fondo orizzontale, non è mai stato superato sperimentalmente il valore $\mathcal{A}/Y_0 = 0,75$ senza che avesse inizio il frangimento. Esperienze accurate di Daily e Stephan (1951) e di Ippen e Kulin (1955) hanno indicato valori limiti di frangimento intorno a 0,72.

McCowan, imponendo la condizione al frangimento proposta da Stokes (1880) — che la velocità del liquido sulla cresta fosse uguale alla celerità dell'onda — aveva ottenuto nel 1894 le limitazioni

$$\frac{\mathcal{A}}{Y_0} \leq 0,78 \quad \frac{c}{\sqrt{gY_0}} \leq 1,25 \quad [19.66]$$

che hanno riscosso larga notorietà per la loro sostanziale concordanza con i risultati sperimentali.

Un diverso criterio è stato seguito da Laitone (1960), a partire da una soluzione di seconda approssimazione dell'onda solitaria. Egli ha assunto che l'onda diventi instabile quando la variazione con la quota della componente verticale della velocità cessa di essere monotona; così ha ottenuto le limitazioni

$$\frac{\mathcal{A}}{Y_0} \leq \frac{8}{11} = 0,727 \quad \frac{c}{\sqrt{gY_0}} \leq 1,284 \quad [19.67]$$

la prima delle quali era già stata richiamata nel paragrafo 8.6. L'altra limitazione deriva dalla seguente espressione della celerità dell'onda solitaria in seconda approssimazione

$$c = \sqrt{gY_0} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{A}}{Y_0} \right) - \frac{3}{20} \left(\frac{\mathcal{A}}{Y_0} \right)^2 \right] \quad [19.68]$$

che, come mostra la figura 19.13, è ben verificata dalle misure sperimentali.

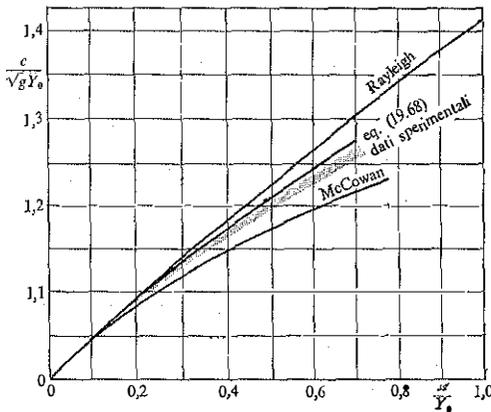


Fig. 19.13. - Relazione tra la celerità e l'ampiezza dell'onda solitaria.

Si noti infine che, se il fondo non è orizzontale ma acclive nel verso della propagazione, l'onda frange con ampiezze relative alla profondità sensibilmente più alte di quelle prima indicate, fino a valori \mathcal{A}/Y_0 maggiori di 1. Un'utile espressione, di origine sperimentale, è stata proposta da Scarsi e Stura (1980) per il calcolo del rapporto \mathcal{A}/Y_0 delle onde che frangono su bassi fondali acclivi con pendenza $\leq 5\%$.

19.14. Onde cnoidali.

Per esaminare il caso (b), citato nel paragrafo precedente, seguiamo il procedimento proposto da Benjamin e Lightill nel 1954. Si adimensionalizza l'eq. [19.60] con riferimento ai valori Y_c , E_c , S_c corrispondenti alle condizioni critiche della corrente cilindrica che ha la portata Q' per unità di larghezza. Allora:

$$Y_c = \sqrt[3]{\frac{Q'^2}{g}} \quad (\text{e naturalmente } Fr_c = 1)$$

$$E_c = \frac{3}{2} Y_c$$

$$\frac{S_c}{\gamma} = \frac{3}{2} Y_c^2.$$

Posto

$$\frac{Y}{Y_c} = w \quad \frac{x}{Y_c} = \xi \quad \frac{E}{E_c} = e \quad \frac{S}{S_c} = m$$

l'equazione differenziale delle onde [19.60] diventa

$$\frac{1}{3} \left(\frac{dw}{d\xi} \right)^2 = -w^3 + 3ew^2 - 3mw + 1.$$

Per fornire soluzioni finite, gli zeri della cubica a secondo membro devono essere reali e le soluzioni devono quindi oscillare periodicamente fra due di tali zeri. Dette w_1 , w_2 , w_3 , in ordine decrescente le radici della cubica, la lunghezza L delle onde che possono verificarsi è espressa dalla

$$\begin{aligned} \frac{L}{Y_c} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{w_2}^{w_1} \frac{dw}{[(w_1 - w)(w - w_2)(w - w_3)]^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{4}{3(w_1 - w_3)} \psi \left(\sqrt{\frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_3}} \right) \end{aligned} \quad [19.69]$$

essendo $\psi(\ell)$ l'integrale ellittico completo del primo ordine di modulo

$$\ell = \sqrt{\frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_3}}.$$

Il profilo dell'onda è rappresentato dal grafico del quadrato della funzione ellittica di Jacobi in x per il dato modulo ℓ . Un estremo, $\ell = 0$, corrisponde all'onda sinusoidale di ampiezza infinitesima, l'altro, $\ell \rightarrow 1$,

corrisponde all'onda solitaria per la quale la lunghezza d'onda diventa infinitamente grande.

Si noti che le assunzioni della teoria cnoidale non sono soddisfatte quando i valori di E ed S superano più del 2% i valori critici E_c ed S_c . Per valori inferiori e costanti, la formazione di un treno d'onde di forma invariante appare giustificata ed è sperimentalmente realizzabile con buona approssimazione su acqua ferma (v., ad esempio, Bazin 1865, Favre 1935, Sandover e Zienkiewicz 1957).

19.15. Onde di traslazione con resistenze.

La situazione (c) del paragrafo 19.13, definita da un valore della quantità di moto totale S pari a quello S_0 della corrente uniforme di profondità Y_0 e da un valore del carico specifico E pari al valore E_0 diminuito della quantità

$$\frac{(Y - Y_0)^3}{4YY_0},$$

corrisponde al caso già visto di onda di traslazione con fronte frangente.

Infatti, l'equazione delle onde [19.60] diventa

$$\begin{aligned} \left(\frac{dY}{dx}\right)^2 &= \frac{3}{Fr_0^2} \left[\left(Fr_0^2 - \frac{Y}{Y_0} \right) \left(\frac{Y}{Y_0} - 1 \right)^2 - \frac{(Y - Y_0)^3}{2Y_0^3} \left(\frac{Y}{Y_0} \right) \right] = \\ &= \frac{3}{Fr_0^2} \left[\left(\frac{Y}{Y_0} - 1 \right)^2 \left(Fr_0^2 - \frac{1}{2} \frac{Y}{Y_0} - \frac{1}{2} \frac{Y^2}{Y_0^2} \right) \right]; \end{aligned}$$

ed essa mostra che l'onda si sviluppa raccordando fra loro due correnti cilindriche, corrispondenti cioè a $dY/dx = 0$: la prima con la profondità

$$Y_1 = Y_0$$

e la seconda con la profondità che è la soluzione positiva dell'equazione

$$\left(\frac{Y}{Y_0}\right)^2 + \frac{Y}{Y_0} - 2Fr_0^2 = 0,$$

ossia con la profondità

$$Y = \frac{Y_0}{2} [-1 + \sqrt{1 + 8Fr_0^2}].$$

Tali altezze d'acqua sono evidentemente quelle coniugate dal risalto idraulico ed il fenomeno è quello studiato al cap. 18 (v. paragrafo 18.13).

Un problema significativo come esempio di propagazione ondosa del tipo qui considerato è quello connesso con la rapida chiusura totale di

una paratoia all'estremità di valle di un canale (v. fig. 19.14). La formazione dell'onda e la sua propagazione si richiamano in sostanza a risultati già visti, ma l'influenza delle resistenze sul fenomeno non è trascurabile. Il problema può essere posto così nei termini più semplici: una corrente uniforme con profondità Y_0 e velocità U_0 viene arrestata bruscamente ed un'onda positiva si propaga verso monte attenuandosi, mentre anche il profilo a valle dell'onda continua a modificarsi molto gradualmente. Se la corrente uniforme è una corrente veloce, l'onda ha e conserva sempre il fronte frangente; la sua velocità di propagazione diminuisce procedendo verso monte in relazione con l'influenza, relativamente sempre minore, della portata entrante sul volume invasato a valle dell'onda. Più interessante è il caso di corrente indisturbata lenta. Allora il fronte è all'inizio totalmente frangente solo se la sopraelevazione del pelo libero provocata dalla chiusura è almeno pari alla profondità Y_0 . Si veda in proposito l'esempio 19.3. Procedendo verso monte l'ampiezza dell'onda diminuisce, per quanto detto in precedenza, e quindi il fronte non si mantiene frangente indefinitamente.

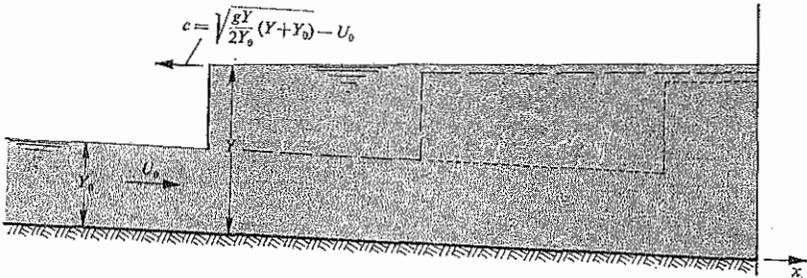


Fig. 19.14. - Onda di traslazione ascendente provocata dalla chiusura di una paratoia a valle.

La propagazione dell'onda di shock si studia utilizzando l'equazione che possiamo chiamare del *risalto*, ottenuta eliminando c fra l'equazione di continuità e l'equazione dinamica dell'onda positiva frangente (cfr. paragrafo 19.11). Indicando con U ed Y le grandezze subito a valle del fronte, si ha

$$c = \frac{U_0 Y_0 - UY}{Y_0 - Y} \quad [19.70]$$

dall'equazione di continuità, e

$$c = -\sqrt{\frac{gY}{2Y_0}(Y+Y_0)} + U_0 \quad [19.71]$$

dalla [19.48] riferita all'onda ascendente; e quindi, eliminando c tra le due equazioni precedenti

$$U = U_0 - \left(\frac{Y}{Y_0} - 1 \right) \sqrt{\frac{gY_0}{2} \left(1 + \frac{Y_0}{Y} \right)}. \quad [19.72]$$

A questa equazione, che rappresenta la condizione sul fronte mobile, occorre aggiungere un'altra condizione relativa allo stato della corrente a valle del fronte. Il problema si presenta in generale piuttosto complesso, per l'indeterminazione del contorno; tuttavia, dato che la velocità in tutto il tronco di valle si riduce a valori molto bassi, è di norma accettabile una schematizzazione drastica: quella di considerare sempre orizzontale il pelo libero a valle del fronte, seguendone il movimento in base alla condizione di continuità.

Quando la corrente indisturbata è lenta, si è già detto che la propagazione ondosca può avvenire anche senza frangimento e comunque raggiunge tale stato dopo avere percorso il tratto necessario per ridurre l'ampiezza del fronte a valori inferiori alla profondità della corrente incidente. Il profilo del fronte assume allora una configurazione continua e si prolunga in una serie di ondulazioni smorzate di tipo cnoidale. Le dissipazioni che accompagnano i fenomeni ondosi senza frangimento sono molto piccole, ma anche variazioni deboli di energia hanno un effetto sensibile sull'ampiezza delle onde. Se si trascurano del tutto le perdite e quindi si analizza l'eq. [19.60] delle onde assumendo per E ed S valori costanti e pari a quelli E_0 ed S_0 della corrente indisturbata, sappiamo che la soluzione che si trova è il profilo dell'onda solitaria. Ed effettivamente il primo

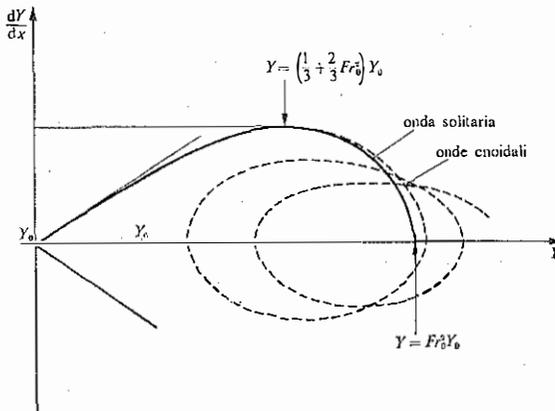


Fig. 19.15. - Relazione fra la profondità e la pendenza del pelo libero per l'onda solitaria e per onde cnoidali con resistenze.

colmo corrisponde abbastanza bene a tale soluzione, per cui si può calcolare la profondità massima con la [19.62]: con riferimento alla corrente uniforme a monte, di velocità U_0 e profondità Y_0 , si ha perciò

$$Y_{\max} \cong \frac{U_0^2}{g},$$

quale profondità dell'onda in corrispondenza del primo colmo.

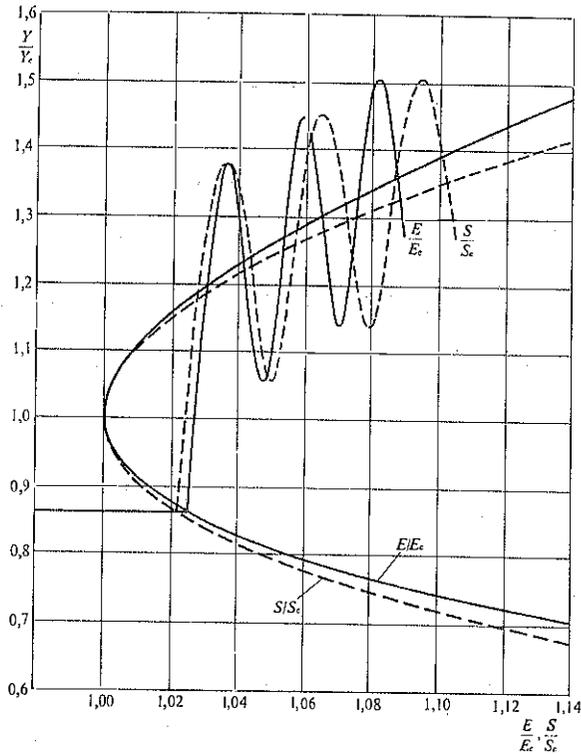


Fig. 19.16. - Andamento delle funzioni E/E_c ed S/S_c lungo il fronte di un risalto ondolato in condizioni stazionarie.

Il profilo discendente non è simmetrico di quello ascendente e non raggiunge lo stato asintotico di profondità Y_0 , ma si rialza dopo un primo cavo e continua con una serie di ondulazioni smorzate. Nel piano Y , dY/dx della figura 19.15 è indicato l'andamento della soluzione in condizioni stazionarie, mentre le corrispondenti variazioni di E e di S , rapportate ai valori critici E_c ed S_c , sono visibili nella figura 19.16. Tali varia-

zioni sono state calcolate passo-passo per mezzo delle equazioni

$$\frac{dE}{dx} = i_r - j$$

$$\frac{dS}{dx} = Y(i_r - j)$$

che mettono in conto l'effetto della pendenza del fondo i_r e delle perdite j . Per la valutazione di quest'ultime si è adottata l'espressione

$$j = \frac{U^3}{gC^2Y} = \frac{q^2}{gC^2Y^3} = i_r \left(\frac{Y_0}{Y} \right)^{10/3}$$

del moto permanente, assumendo che anche nelle condizioni in esame la variazione del coefficiente di resistenza segua la legge di Manning-Gauckler-Strickler.

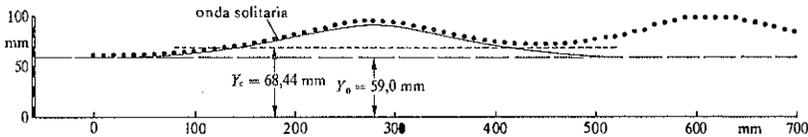


Fig. 19.17. - Profilo di un risalto stazionario calcolato passo-passo con la portata per unità di larghezza $Q' = 0,05608 \text{ m}^2/\text{s}$ e con la pendenza del fondo $i_r = 0,0108$.

Il profilo del pelo libero, ottenuto con passo $\Delta x = 1 \text{ mm}$, è riportato nella figura 19.17. Si nota ch'esso resta molto vicino a quello dell'onda solitaria fino al primo colmo, come si era detto, e si sviluppa successivamente in una serie di oscillazioni smorzate intorno ad una linea a profondità crescente; tale linea prolunga idealmente verso monte il profilo della corrente stazionaria che si trova a valle del treno di onde smorzate.

ESEMPI

Esempio 19.1

Studio della propagazione della marea in un estuario fluviale.

Il procedimento esposto nel paragrafo 19.2 è stato impiegato da de Saint-Venant (1871) per lo studio in esame.

A questo scopo conviene scrivere l'integrale generale [19.13] nella forma

$$s = (3\sqrt{gY} - 2\sqrt{gY_0})[t - F(Y)]$$

nella quale si ricorda che Y_0 è il valore della profondità quando la velocità del moto è nulla. Per $s = 0$ è evidentemente $F(Y) = t$.

Si fissa l'origine delle ascisse nella sezione di sbocco dell'estuario, e si assume positivo il verso dal mare verso l'interno. Imponendo nella sezione $s = 0$ un'oscillazione periodica della marea di ampiezza totale $2\mathcal{A}$ e periodo $2T$ data dalla formula di Laplace

$$Y = Y_0 + \mathcal{A} \left(\sin \frac{\pi t}{T} \right)^2,$$

segue

$$F(Y) = t = \frac{T}{\pi} \sin^{-1} \sqrt{\frac{Y - Y_0}{\mathcal{A}}}.$$

Allora, in una generica sezione di ascissa s , l'equazione

$$s = (3\sqrt{gY} - 2\sqrt{gY_0}) \left(t - \frac{T}{\pi} \sin^{-1} \sqrt{\frac{Y - Y_0}{\mathcal{A}}} \right)$$

fornisce la profondità della marea ad un istante qualunque t .

Esempio 19.2

Apertura brusca di una paratoia (caduta di una diga).

Il metodo di de Saint-Venant, esposto nel paragrafo 19.2, si può applicare anche allo studio dell'onda dovuta all'apertura brusca di una paratoia in un canale orizzontale, riempito con un'altezza d'acqua Y_0 a monte della paratoia e inizialmente vuoto a valle. Lo schema in esame riproduce, in sostanza, il fenomeno della caduta di una diga (v. fig. 19.18).

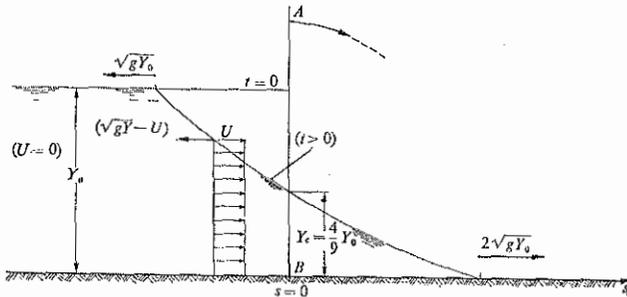


Fig. 19.18. - Onda provocata dalla caduta di una diga.

La condizione assegnata è sempre

$$U = 0 \quad \text{per} \quad Y = Y_0.$$

Fissata l'origine delle ascisse nella sezione della paratoia ed il verso positivo nella direzione di valle, si considera la propagazione dell'onda di depressione che

ha celerità

$$c = U - \sqrt{gY},$$

per la quale è valido il legame tra U ed Y espresso dalla [19.10] con segno positivo, cioè la

$$U + 2\sqrt{gY} = \text{cost} = 0 + 2\sqrt{gY_0}.$$

Di qui

$$U = 2\sqrt{gY_0} - 2\sqrt{gY}$$

e sostituendo nell'espressione della celerità si ottiene

$$c = 2\sqrt{gY_0} - 3\sqrt{gY};$$

essa mostra che il fronte d'onda, di profondità Y_0 , procede con la celerità $c = -\sqrt{gY_0}$ verso monte, mentre l'unghia, dove la profondità tende a zero, procede con celerità $c = 2\sqrt{gY_0}$ verso valle.

Con questo valore della celerità, l'equazione di continuità

$$(2\sqrt{gY_0} - 3\sqrt{gY}) \frac{\partial Y}{\partial s} + \frac{\partial Y}{\partial t} = 0$$

ammette l'integrale

$$s = (2\sqrt{gY_0} - 3\sqrt{gY})t,$$

avendo assunto la sezione $s = 0$ coincidente con la posizione originaria della paratoia. In questa sezione, per $t \neq 0$, la profondità, che indichiamo con Y_c , è data dalla

$$2\sqrt{gY_0} - 3\sqrt{gY_c} = 0,$$

per cui vale

$$Y_c = \frac{4}{9}Y_0.$$

Tale profondità può definirsi *critica* per le assegnate condizioni, perché ad essa corrisponde il massimo valore della portata (per unità di larghezza \bullet'). Infatti, dalla

$$Q' = UY = (2\sqrt{gY_0} - 2\sqrt{gY})Y,$$

segue evidentemente $dQ/dY = 0$ per $Y = (4/9)Y_0$.

Per $Y > Y_c$, cioè a monte della paratoia, la celerità c è negativa, mentre per $Y < Y_c$ essa è positiva. Il valore massimo della portata, corrispondente come si è detto ad $Y = Y_c$, vale

$$Q'_{\max} = \frac{8}{27}Y_0\sqrt{gY_0}.$$

Questo valore, oltre che indicare il limite del deflusso per lo schema prenesso di « caduta della diga », rappresenta anche la portata massima che un impianto di pompaggio potrebbe derivare dal canale in esame senza provocare scoprimiento del fondo.

Esempio 19.3

Onda positiva, senza frangimento, provocata dalla chiusura totale di una paratoia.

Con lo stesso procedimento dell'esempio precedente si può valutare l'altezza dell'onda che si verifica alla chiusura di una paratoia in un canale percorso inizialmente da una corrente uniforme di profondità Y_0 e velocità U_0 , quando l'altezza della sopraelevazione non raggiunge i limiti di frangimento.

La condizione assegnata è in tal caso

$$U = U_0 \quad \text{per} \quad Y = Y_0.$$

L'onda positiva, che si forma alla chiusura della paratoia, procede verso monte con la celerità

$$c = U - \sqrt{gY}$$

e per essa, trascurando le resistenze relative alla propagazione, vale il legame espresso dalla [19.10] con segno positivo

$$U + 2\sqrt{gY} = \text{cost} = U_0 + 2\sqrt{gY_0};$$

ne deriva

$$U = U_0 - 2(\sqrt{gY} - \sqrt{gY_0})$$

e quindi

$$c = U_0 - 3\sqrt{gY} + 2\sqrt{gY_0}.$$

Contro la paratoia la velocità U si annulla e l'altezza d'acqua raggiunge il valore Y_M dato dall'equazione

$$2\sqrt{gY_M} = U_0 + 2\sqrt{gY_0}$$

ossia

$$\frac{Y_M}{Y_0} = \left(1 + \frac{U_0}{2\sqrt{gY_0}}\right)^2 = 1 + Fr_0 + \frac{Fr_0^2}{4} \quad [19.73]$$

essendo $Fr_0 = U_0/\sqrt{gY_0}$ il numero di Froude della corrente uniforme.

L'eq. [19.73] fornisce il valore della profondità Y_M dell'onda contro la paratoia al momento della chiusura; propagandosi poi l'onda verso monte, il livello dell'acqua alla paratoia aumenta ulteriormente per effetto delle resistenze al moto propagatorio, resistenze che tuttavia non possono essere messe in conto con il procedimento esposto.

Il risultato è valido finché la sopraelevazione del pelo libero non è tale da portare al frangimento completo dell'onda. Se si verifica questa condizione, il legame tra profondità e velocità si riconduce a quello del risalto diretto, espresso dall'eq. [19.72]. Contro la paratoia, dove U si annulla, la profondità assume il valore Y_M dato dalla

$$U_0 - \left(\frac{Y_M}{Y_0} - 1\right) \sqrt{\frac{gY_0}{2} \left(1 + \frac{Y_0}{Y_M}\right)} = 0$$

ossia dalla relazione

$$\left(\frac{Y_M}{Y_0} - 1\right) \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{Y_0}{Y_M}\right)} = Fr_0. \quad [19.74]$$

Poiché si tratta di un risalto che si muove relativamente alla corrente con la velocità ricavata dalla [19.71]

$$\tilde{w} = c - U_0 = -\sqrt{\frac{g Y_M}{2 Y_0}} (Y_0 + Y_M),$$

la sua realizzazione nella forma di un unico vortice frangente, richiede, analogamente al salto di Bidone stazionario, che il corrispondente numero di Froude al quadrato

$$\frac{\tilde{w}^2}{g Y_0}$$

superi circa 3 (cfr. paragrafo 18.10 c).

Ne deriva che il completo frangimento del fronte si verifica se

$$\frac{1}{2} \frac{Y_M}{Y_0} \left(1 + \frac{Y_M}{Y_0} \right) \geq 3$$

corrispondente alla condizione, già detta al paragrafo 19.15,

$$\frac{Y_M}{Y_0} \geq 2,$$

o, in termini del numero di Froude della originaria corrente uniforme

$$Fr_0 \geq 0,87.$$

La fig. 19.19 riporta la rappresentazione grafica delle relazioni [19.73] e [19.74] e l'indicazione del limite delle onde di shock con fronte frangente.

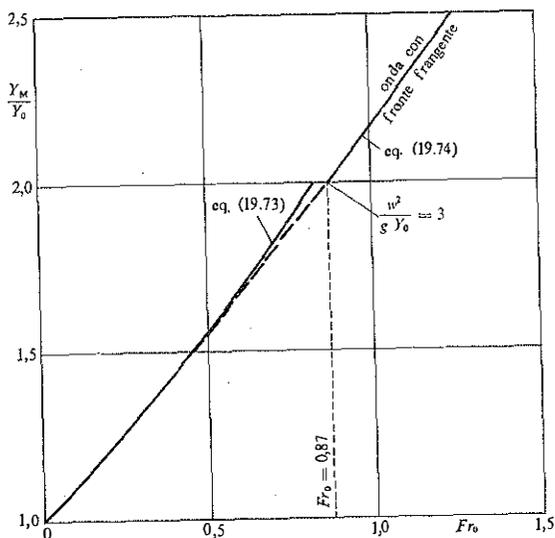


Fig. 19.19. - Grafico delle equazioni [19.73] e [19.74] e limitazione dell'onda con fronte frangente.

Esempio 19.4

Studio della propagazione dell'onda di shock, provocata dalla chiusura brusca dello sbarramento a valle di un canale rettangolare, con pendenza $i_s = 0,0037$, inizialmente percorso da una corrente uniforme con velocità media $U_0 = 2,66 \text{ ms}^{-1}$ e profondità $Y_0 = 0,55 \text{ m}$. (Si veda la fig. 19.14).

Per eseguire il calcolo passo-passo suddividiamo il canale in tratti di breve lunghezza Δx .

Poiché il numero di Froude della corrente uniforme vale

$$Fr_0 = \frac{U_0}{\sqrt{gY_0}} = 1,145,$$

sulla base delle considerazioni riportate nell'esempio 19.3 il fronte dell'onda è prevedibilmente accompagnato da frangimento e l'altezza d'acqua contro la paratoia al momento della chiusura totale, altezza che indichiamo con $Y_{0,1}$, è data dalla [19.74]

$$\left(\frac{Y_{0,1}}{Y_0} - 1\right) \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{Y_0}{Y_{0,1}}\right)} = Fr_0.$$

Assumiamo che tale elevazione si mantenga inalterata per il tempo Δt_1 necessario a percorrere il primo passo con la celerità [19.70]

$$c_1 = \frac{U_0 Y_0}{Y_0 - Y_{0,1}};$$

ossia per il tempo

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta x}{|c_1|}.$$

Ritenendo il pelo libero orizzontale e fermo durante tale primo intervallo, la profondità Y_1 sul fronte dell'onda alla distanza Δx dalla paratoia vale

$$Y_1 = Y_{0,1} - i_s \Delta x$$

al tempo $t_1 = \Delta t_1$; si passa quindi al calcolo della velocità media U_1 sul fronte con la [19.72]

$$U_1 = U_0 - \sqrt{gY_0} \left(\frac{Y_1}{Y_0} - 1\right) \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{Y_0}{Y_1}\right)}.$$

Per i passi successivi si procede in modo iterativo calcolando, per $n = 2, 3, \dots$, la celerità dell'onda

$$c_n = \frac{U_0 Y_0 - U_{n-1} Y_{n-1}}{Y_0 - Y_{n-1}}$$

ed il tempo di percorrenza dell' n -simo passo

$$t_n = \frac{\Delta x}{|c_n|}.$$

Assunto, con ipotesi semplificativa, che il pelo libero a valle del fronte d'onda si alzi mantenendosi sempre orizzontale, il volume invasato in quel tronco, per variazione della profondità, è $n \Delta x \Delta Y_n$ per unità di larghezza dell'alveo, e dev'essere uguale al volume che entra dal fronte d'onda nell'intervallo Δt_n e che si può stimare in $U_{n-1} Y_{n-1} \Delta t_n$. Ne deriva perciò, per il calcolo della variazione di profondità ΔY_n , l'espressione

$$\Delta Y_n = \frac{U_{n-1} Y_{n-1} \Delta t_n}{n \Delta x} = \frac{U_{n-1} Y_{n-1}}{n |c_n|}$$

Si completa quindi il calcolo valutando la profondità $Y_{0,n}$ contro la paratoia e Y_n sul fronte d'onda al tempo $t_n = t_{n-1} + \Delta t_n$ con le equazioni

$$Y_{0,n} = Y_{0,n-1} + \frac{U_{n-1} Y_{n-1}}{n |c_n|}$$

e

$$Y_n = Y_{0,n} - n i_n \Delta x$$

I risultati relativi alla propagazione dell'onda nei 50 m finali del canale in esame, ottenuti assumendo prima $\Delta x = 2,5$ m e poi $\Delta x = 5,0$ m, sono riportati per un confronto nel quadro che segue, ad intervalli spaziali di 10 m. Si nota che le differenze fra i risultati dei due calcoli sono praticamente trascurabili e derivano, per la maggior parte, dal calcolo del primo passo.

x (m)	$\Delta x = 2,5$ m					$\Delta x = 5,0$ m				
	$Y_{0,n}$ (m)	Y_n (m)	U_n (ms ⁻¹)	c_n (ms ⁻¹)	t_n (s)	$Y_{0,n}$ (m)	Y_n (m)	U_n (ms ⁻¹)	c_n (ms ⁻¹)	t_n (s)
0	1,296	—	0	—1,960	0	1,296	—	0	—1,960	0
10	1,319	1,282	0,047	—1,923	5,16	1,317	1,280	0,055	—1,904	5,18
20	1,344	1,270	0,086	—1,880	11,74	1,341	1,267	0,094	—1,890	10,44
30	1,370	1,259	0,122	—1,857	15,77	1,367	1,256	0,132	—1,855	15,81
40	1,396	1,248	0,158	—1,820	21,22	1,393	1,245	0,168	—1,821	21,27
50	1,421	1,236	0,196	—1,787	26,78	1,419	1,234	0,205	—1,787	26,84

Esempio 19.5

In un canale rettangolare largo 70 m e con pendenza del fondo 0,0012, è valida, in moto permanente, la scala di deflusso

$$Q = 0,120 \Omega^{1,025}$$

per portate comprese tra 100 e 500 m³ s⁻¹.

Calcolare la portata che defluisce in moto vario quando la profondità è 2,00 m e cresce con il tasso di 7 cm al minuto.

Si utilizza la relazione [19.43]

$$Q = k\Omega^m + \frac{\eta}{g} c^2 \frac{\partial \Omega}{\partial t}$$

nella quale:

$$k = 0,120 \quad m = 1,625 = 1/N$$

$$c = \frac{dQ}{d\Omega} \cong km\Omega^{m-1} = 0,120 \cdot 1,625\Omega^{0,625} = 0,195\Omega^{0,625}$$

$$\begin{aligned} \text{(eq. [19.39])} \quad \eta &= \frac{1}{2i, m^3} \left\{ \frac{g\Omega^3}{bQ^2} - (m-1)^2 \right\} = \\ &\cong \frac{1}{2 \times 0,0012 \times 1,625^3} \left\{ \frac{9,81\Omega^3}{70 \times 0,120^2 \Omega^{3,25}} - 0,625^2 \right\} = 945,0\Omega^{-0,25} - 37,93 . \end{aligned}$$

In moto permanente, con $Y = 2,00$ m e quindi $\Omega = 2,00 \times 70 = 140$ m² risulta

$$Q = 0,120 \times 140^{1,625} = 368,7 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} .$$

In moto vario si ottiene invece (eq. [19.43])

$$Q = 368,7 + \left(\frac{945,0\Omega^{-0,25} - 37,93}{9,81} \right) 0,195^2 \Omega^{1,25} \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 368,7 + (3,663 - 0,147\Omega^{0,25}) \Omega \frac{\partial \Omega}{\partial t} .$$

Con l'assegnato tasso di variazione della profondità

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{0,07}{60} \text{ m s}^{-1} ,$$

si ha

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = 70 \frac{0,07}{60} = 0,0817 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

e quindi

$$Q = 368,7 + 36,1 = 404,8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$$

con una differenza in più del 9% rispetto al valore di portata calcolato in moto permanente a pari profondità.

Nel caso di una diminuzione della profondità con lo stesso tasso, la portata in moto vario differirebbe evidentemente da quella in moto permanente della stessa quantità, ma in meno.

Riferimenti citati

ABBOTT, M. B., *Computational Hydraulics*, Pitman Publ., 1979.

ARSENISCVILI, K. J., *Gidrotechniceskoje Stroitelstvo*, n. 1, 1955.

— *Gidrotechniceskoje Stroitelstvo*, n. 3, 1956.

BAZIN, H., *Mém. prés. div. savants à l'Acad. des Sciences*, Vol. 19, Paris, 1865.

- BOUSSINESQ, J., *Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences*, Vol. 72, Paris, 1871.
— *Mém. prés. div. savants à l'Acad. des Sciences*, Paris, 1877.
- BENJAMIN, T. B. e LIGHTILL, M. J., *Proc. Royal Society*, 224, 1954.
- COURANT, R. e LAX, P. D., *Symposium on Theoretical Compressible Flow*, 1949.
- COURANT, R., ISAACSON, E. e REES, M., *Comm. Pure Appl. Math.*, 5, 1952.
- DAILY, J. W. e STEPHAN, S. C., *Proc. A.S.C.E.*, Vol. 77, n. 107, 1951.
— *Proc. 3rd Conference on Coastal Engineering*, Cambridge (Mass.), 1952.
- DE SAINT-VENANT, B., *Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences*, nn. 3, 4, 1871.
- FAVRE, H., *Etude théorique et expérimentale des ondes de translation dans les canaux découverte*, Dunod, Paris, 1935.
- FEDOROV, E. P., *Gidrotechniceskoje Stroitelstvo*, n. 3, 1954.
— *Gidrotechniceskoje Stroitelstvo*, n. 6, 1956.
- GALLATI, M., GRECO, F., MAIONE, U., MARTELLI, S., NATALE, L., PANATTONI, L. e TODINI, E., *Modello matematico delle piene dell'Arno*, IBM-Italia, Centro Scientifico di Pisa, 1977.
- GHETTI, A., *General Lecture*, XVIIIth Congress I.A.H.R., Cagliari, 1979.
- HAYAMI, S., *Disaster Prevention Research Institute*, Kyoto University, 1951.
- IPPEN, A. T. e KULIN, Ġ., M. I. T., *Hydr. Lab.*, Techn. Rep. 15, 1955.
- KORTEWEG, D. e DE VRIES, G., *Phil. Mag.*, 5, Vol. XXXIX, 1895.
- LAITONE, E. V., *J. of Fluid Mechanics*, Vol. 9, par. 3, 1960.
- LOMBARDO, G. e REBAUDENGO LANDÓ, L., *Atti XII Convegno di Idraulica e Costruzioni idrauliche*, Bari, 1970.
- MARCHI, E., *Atti Acc. Naz. dei Lincei*, Vol. LXIV, fasc. 6, 1978.
- MCCOWAN, J., *Phil. Mag.*, 5, Vol. XXXII, 1891.
— *Phil. Mag.*, 5, Vol. XXXVIII, 1894.
- MONTUORI, C., *L'Energia Elettrica*, Vol. XXXVIII, n. 2, 1961.
- RAYLEIGH, Lord, *Phil. Mag.*, 5, Vol. I, 1876.
- SANDOVER, J. A. e ZIENKIEWICZ, O. C., *Water Power*, Vol. 9, n. 11, 1957.
- SCARSI, G. e STURA, S., *Atti Ist. Lombardo Scienze e Lettere*, Milano, 1980.
- SCOTT RUSSELL, J., *Rep. Brit. Ass.*, 1837.
— *Rep. Brit. Ass.*, 1844.
- STOKES, G. G., *Math. and Phys. Papers*, Vol. 1, Camb. Univ. Press, 1880.
- VEDERNIKOV, V. V., *Acad. Sci. USSR*, Vol. 48, 1945.
— *Acad. Sci. USSR*, Vol. 52, 1946.
- WHITHAM, G. B., *Linear and Non-linear Waves*, J. Wiley & Sons, 1974, Ch. 2, 3, 4.

CONCETTI DI IDRAULICA FLUVIALE: IL TRASPORTO SOLIDO

20.1. Considerazioni generali.

Le correnti idriche trasportano frequentemente in natura materiali solidi incoerenti che derivano dalle azioni erosive sui versanti e dagli sforzi esercitati dalla corrente stessa sull'alveo. I materiali solidi trasportati da una corrente possono muoversi strisciando e rotolando sul fondo dell'alveo ma possono in parte essere tenuti in sospensione dall'agitazione turbolenta del moto.

Risulta conveniente, sia dal punto di vista dell'inquadramento interpretativo, sia dal punto di vista espositivo, distinguere il trasporto solido al fondo da quello in sospensione, sebbene spesso, nei corsi d'acqua naturali, non esista un vero e proprio limite di separazione fra i due processi ma piuttosto un graduale passaggio da un moto di sedimenti per strisciamento ad un moto per rotolamento e per salti fino alla sospensione completa nel nucleo turbolento della massa fluida in moto.

Così pure separeremo l'analisi del trasporto vero e proprio, con le valutazioni della portata solida e dell'inizio del trasporto al fondo, dai fenomeni di modellamento dell'alveo e di resistenza.

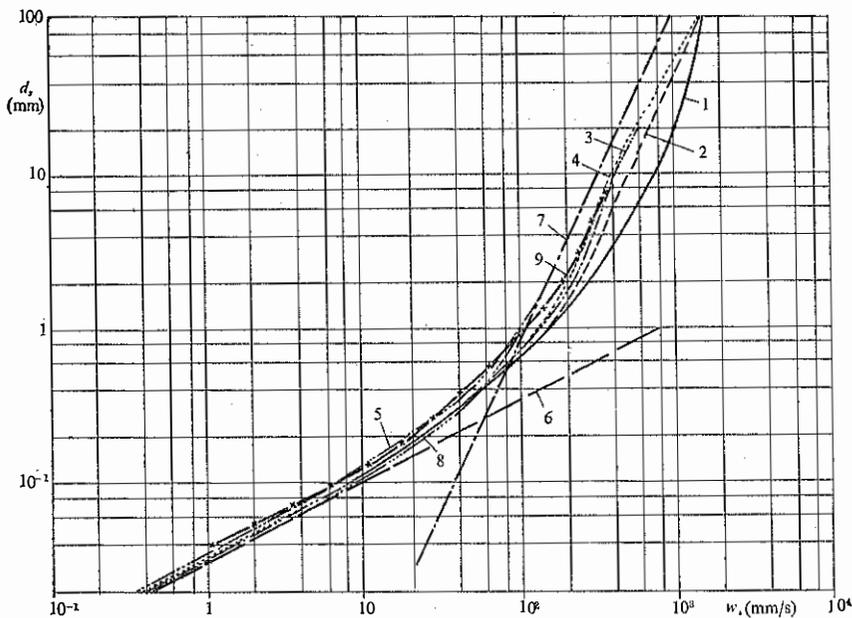
20.2. Caratteristiche dei materiali trasportati.

Dal punto di vista idraulico la caratteristica distintiva dei materiali trasportati dalle correnti è la loro densità ρ_s . Altro fattore essenziale è la dimensione dei granuli, variabile dal centesimo di millimetro di certe sospensioni finissime di carattere argilloso fino alle decine di centimetri

di ciottoli e massi. Essa è rappresentata con il diametro d_s della particella o con il diametro d_n di un miscuglio di sedimenti, inteso quest'ultimo come il diametro delle maglie del setaccio che consente il passaggio a $n\%$ del peso dei granuli componenti il miscuglio. Una misura delle dimensioni e della distribuzione granulometrica del miscuglio è rappresentata dal suo diametro medio e dalla deviazione standard della curva cumulativa.

Strettamente connessa con la dimensione e con la densità della particella è la sua velocità w_s di caduta libera in acqua ferma. La sua espressione, per sfere di diametro d_s e densità ρ_s , è

$$w_s = \frac{1}{\sqrt{C_R}} \sqrt{\frac{4}{3} \left(\frac{\rho_s - \rho}{\rho} \right) g d_s} \quad [20.1]$$



Quarzo $\rho_s/\rho = 2,65$ in acqua a 20 °C

Dati di Pettyjohn e al.

1 $\psi_s = 1,000$

2 $\psi_s = 0,906$

3 $\psi_s = 0,846$

4 $\psi_s = 0,806$

5 $\psi_s = 0,670$

6 equazione di Stokes

7 equazione di Newton

8 equazione di Rubey

9 dati di Mamak

Fig. 20.1. - Velocità di caduta libera di granuli di quarzo con diversi parametri di forma ψ_s (da Graf e al., 1966).

dove C_R è il coefficiente di resistenza il cui andamento, in funzione del numero di Reynolds

$$Re_s = \frac{w_s d_s}{\nu}$$

è stato riportato nella figura 12.20 del paragrafo 12.11.

La stessa relazione vale per particelle di forma diversa dalla sferica, salvo la difficoltà di esprimere la dipendenza del coefficiente di resistenza C_R del numero di Reynolds. La caratterizzazione della forma può essere introdotta con il grado di sfericità ψ_s di Wadell definito come il rapporto fra la superficie di una sfera di ugual volume della particella e la superficie della particella stessa. Si riportano, come esempio, i seguenti valori (da Graf: *Hydraulics of Sediment Transport*, McGraw-Hill, 1971):

Sfera	$\psi_s = 1$
Cubo-ottaedro	= 0,906
Ottaedro	= 0,846
Cubo	= 0,806
Tetraedro	= 0,670

Nella figura 20.1 è rappresentata la funzione $w_s = w_s(d_s)$, con d_s diametro della sfera di ugual volume del granulo, per granuli quarziferi di diversa forma in acqua a 20 °C ($\rho_s/\rho = 2,65$).

20.3. Condizioni critiche: inizio del trasporto solido.

I primi tentativi di esprimere quantitativamente la condizione dell'equilibrio del materiale incoerente posto sul fondo di canali percorsi da acque torbide risalgono alla fine del secolo scorso ad opera di R. G. Kennedy e di altri ingegneri inglesi incaricati della progettazione di grandi canali di irrigazione in India. Da quelle indagini, essenzialmente empiriche, è derivato anche il concetto di *regime* di un corso d'acqua, considerato come lo stato nel quale il deflusso di una data portata mantiene in movimento tutto il carico di materiale solido, senza depositi e senza erosione dell'alveo.

La ricerca della larghezza, della profondità e della pendenza necessarie per raggiungere tale situazione richiede di associare all'equazione del moto della corrente altre condizioni che riguardano appunto il fenomeno del trasporto solido e lo stato di equilibrio del fondo. Sono state così proposte formule empiriche che esprimono un legame fra la velocità media U_{cr} alla quale dovrebbe corrispondere tale condizione e la pro-

fondità Y della corrente. Va ricordata, per l'importanza storica e per il suo largo impiego nella prima metà del '900, la formula di Kennedy (1895)

$$U_{cr} = 0,55 Y^{0,64}$$

qui riportata nel sistema di misura SI.

Fra le altre numerose relazioni di carattere empirico meritano un particolare richiamo le velocità limite per evitare escavazioni del fondo proposte da Fortier e Scobey (1926) in relazione alla natura del materiale costituente l'alveo e al grado di torbidità della corrente idrica. Questi dati, che rappresentano ancora un'utile indicazione per la progettazione di canali scavati in terra, sono stati riportati al capitolo 17 nella tabella 17.4.

A Shields (1936) si deve la prima interpretazione del fenomeno di inizio del trasporto al fondo. L'indagine fu rivolta ad individuare la relazione che il valore τ_{cr} della tensione al contorno τ_0 , quella che provoca il primo movimento del materiale incoerente ed omogeneo posto sul fondo, ha con le proprietà μ e ρ del fluido e con le caratteristiche d_s e ρ_s dei granuli. Si usa chiamare condizione *critica* per il fondo questo inizio di instabilità dell'equilibrio dei sedimenti.

In alveo rettangolare molto largo, il raggio idraulico si confonde con la profondità Y e la tensione sul fondo τ_0 è correlata ad essa, al peso specifico γ del liquido e alla pendenza j della linea dei carichi totali, coincidente nel moto uniforme con la pendenza del fondo i_j , dall'equazione (cfr. cap. 13)

$$\tau_0 = \gamma Y j. \quad [20.2]$$

Nella formulazione più semplice la relazione di Shields si deduce ponendo che, in condizioni critiche, la resistenza al moto dei granuli di diametro d_s e peso specifico γ_s , che dipende linearmente dal peso del granulo immerso ed è quindi proporzionale a

$$(\gamma_s - \gamma) d_s^3,$$

uguagli la forza di trascinamento al fondo all'inizio del trasporto

$$C_R \tau_{cr} d_s^2.$$

Sulla base delle informazioni sperimentali si può ritenere che il coefficiente C_R sia funzione, a parità di forma dei sedimenti, di un numero tipo Reynolds costruito con le grandezze caratteristiche del moto attorno al granulo:

la velocità di attrito	$v_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$
il diametro del granulo	d_s
la viscosità cinematica del fluido	$\nu = \mu/\rho;$

ossia dal numero

$$Re_* = \frac{v_* d_s}{\nu} \quad [20.3]$$

Ne deriva complessivamente

$$\frac{\tau_{cr}}{(\gamma_s - \gamma) d_s} = f\left(\frac{v_* d_s}{\nu}\right) \quad [20.4]$$

Il legame fra Re_* ed il parametro di stabilità

$$\tau_* = \frac{\tau_0}{(\gamma_s - \gamma) d_s} = \frac{\rho}{\rho_s - \rho} \frac{v_*^2}{g d_s} \quad [20.5]$$

è rappresentato, in condizioni critiche, dalla *curva di Shields* riportata nel grafico della figura 20.2. Tale curva è stata ricavata sulla base di numerose esperienze su materiali incoerenti di differente densità, ma sempre con forme pseudosferiche, tipo sabbie, e con granulometria uniforme. È evidente l'analogia con l'andamento delle curve che rappresentano la dipendenza funzionale del coefficiente di resistenza dal numero di Reynolds sia nei moti interni (resistenza nei tubi) sia nei moti esterni (resistenza

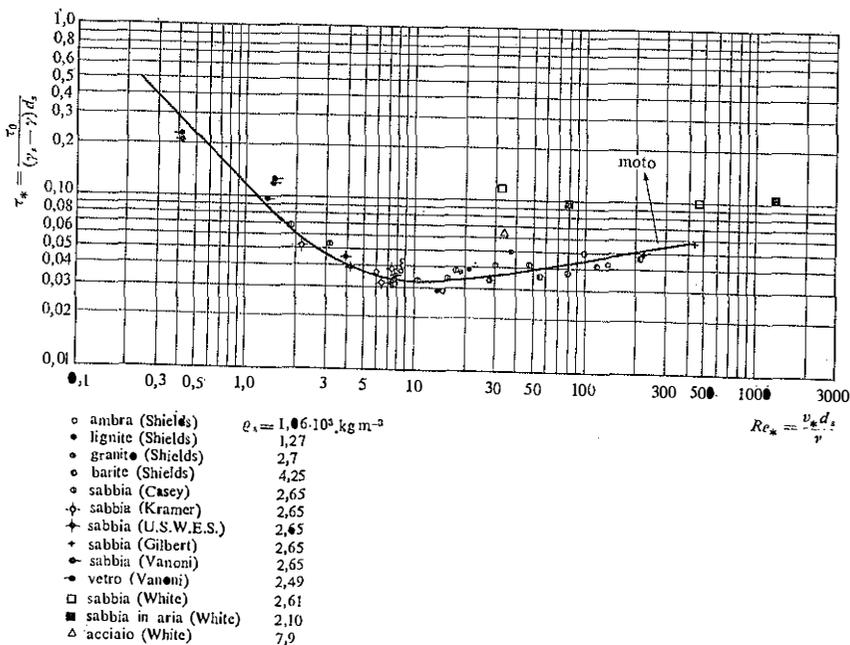


Fig. 20.2. - Curva di Shields.

di sfere, cilindri, ecc.), conseguenza dello stesso meccanismo dei fenomeni, come ha osservato Pezzoli (1963) fornendo un'interpretazione del risultato.

Anche in questo caso sono ben visibili due regimi limite: per bassi Re_* , fino a circa 2, le particelle restano immerse nello strato dominato dalla viscosità e

$$\tau_{*cr} = \frac{\tau_{cr}}{(\gamma_s - \gamma) d_s} = \frac{8.9}{75.75} = \quad [20.6]$$

è inversamente proporzionale a Re_* ; invece, per alti valori di Re_* , maggiori di 300~400, la turbolenza è completamente sviluppata e τ_{*cr} diventa indipendente dal numero di Reynolds.

Secondo Shields tale valore costante è $\sim 0,06$; valori più bassi sono stati invece ottenuti da altri ricercatori, in particolare 0,047 da Zeller (1963).

Nella modellistica fluviale va diffondendosi l'impiego di materiali plastici granulari che sono largamente disponibili in commercio in forma di bastoncini cilindrici o parallelepipedi. Per questi materiali l'inizio del movimento, secondo i risultati sperimentali di Scarpi (1968) e di Montefusco (1969), si verifica per valori τ_{*cr} più alti di quelli corrispondenti alla curva di Shields per lo stesso Re_* , compresi fra 0,055 e 0,10 per $Re_* = 60 \div 100$. In proposito si veda anche lo studio di Bogárdi del 1974.

La limitazione più restrittiva alla curva di Shields deriva dal fatto di essere riferita a materiali omogenei, cioè con granulometria praticamente uniforme. Nel caso di miscugli non omogenei Egiazaroff (1965) ha proposto, nel campo del regime assolutamente turbolento, l'impiego della relazione

$$\frac{\tau_{cr}}{(\gamma_s - \gamma) d_s} = \frac{0,1}{\{\log 19(d_s/d_{50})\}^2} \quad [20.7]$$

per valutare la tensione critica di trascinamento dei granuli di diametro d_s , appartenenti ad un miscuglio disuniforme di cui d_{50} indica evidentemente il diametro medio. Questa relazione, per $d_s = d_{50}$, assume al secondo membro il valore 0,06 di Shields.

20.4. Il trasporto solido al fondo.

Numerose equazioni sono state proposte per il calcolo della portata solida trascinata al fondo da una corrente liquida, portata che indicheremo con i simboli:

- Q_s per la portata solida al fondo, in volume;
- G_s per la stessa portata in massa, per cui $G_s = \rho_s Q_s$;
- q_s, g_s per le corrispondenti portate per unità di larghezza dell'alveo.

La prima espressione che ha trovato conferme sperimentali è stata quella suggerita da Du Boys nel 1879 sulla base di un modello di trasporto per strati striscianti sovrapposti:

$$q_s = K'_s \tau_0 (\tau_0 - \tau_{cr}), \quad [20.8]$$

nella quale K'_s rappresenta un coefficiente caratteristico del materiale trasportato. L'importanza che la formula di Du Boys ha avuto sul condizionamento di una lunga serie di relazioni per il calcolo della portata solida al fondo e la sua buona verifica sperimentale sono andate ben oltre l'attendibilità dello schema elementare di rappresentazione del fenomeno.

Shields (1936), con considerazioni basate sempre sull'effetto dell'eccesso di sforzo al fondo rispetto al valore critico, propose l'equazione

$$\frac{\gamma_s q_s}{\gamma Q'} \frac{\varrho_s - \varrho}{\varrho} = 10j \frac{\tau_0 - \tau_{cr}}{(\gamma_s - \gamma) d_s} \quad [20.9]$$

dove Q' è la portata liquida per unità di larghezza. Tenuto conto della relazione $\tau_0 = \gamma Y j$ in alveo molto largo, si vede che l'equazione di Shields è del tipo Du Boys con una specificata dipendenza di K'_s non solo dalle caratteristiche d_s e ϱ_s del materiale, ma anche dalla velocità media della corrente idrica.

Di tipo diverso è invece l'equazione che fu proposta da Schoklitsch (1930, 1934) sulla base dell'analisi di numerosi risultati sperimentali, in particolare di Gilbert (1914), e di misure eseguite sui fiumi Mur, Reno e Danubio. La formula di Schoklitsch ha la forma

$$q_s = K''_s j^\eta (Q' - Q'_{cr}) \quad [20.10]$$

dove K''_s è un nuovo coefficiente caratteristico del materiale trasportato, η un esponente con valori intorno a $3/2$ e Q'_{cr} la portata idrica per unità di larghezza alla quale inizia il movimento del fondo. Lo stesso Autore propose successivamente i valori $K''_s = 2500/\varrho_s$ e $\eta = 3/2$ per il trasporto al fondo di miscugli formati da sedimenti caratterizzati con il diametro d_{40} (in m) e con

$$Q'_{cr} = 0,26 \left(\frac{\varrho_s - \varrho}{\varrho} \right)^{\frac{5}{8}} \frac{d_{40}^{\frac{3}{2}}}{j^{\frac{3}{8}}}$$

Kalinske (1947), assumendo la portata solida proporzionale al volume della particella, al numero di quelle partecipanti al moto e alla loro velocità, considerata approssimativamente pari alla differenza media temporale fra la velocità al fondo e la velocità critica di trascinamento, ha

ottenuto un'equazione del tipo

$$\frac{q_s}{v_* d_s} = f\left(\frac{\tau_0}{\tau_{cr}}\right); \quad [20.11]$$

l'andamento della funzione f , espresso analiticamente da Kalinske, è rappresentato graficamente nella figura 20.3.

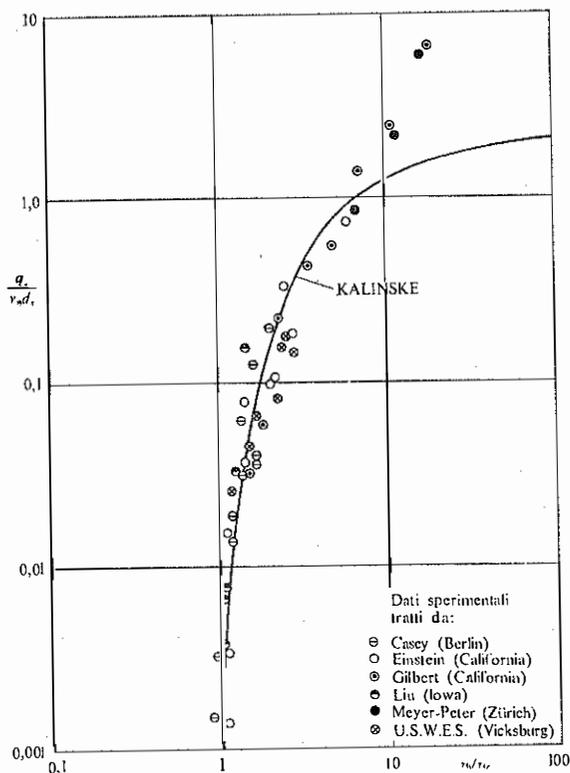


Fig. 20.3. - Equazione di Kalinske (1947) per il calcolo della portata solida al fondo q_s (per unità di larghezza).

Una ricerca sperimentale di Fernandez Luque e van Beek (1976) ha messo in evidenza che la concentrazione areale del trasporto solido, cioè la frazione dell'area del letto coperta dalla proiezione del materiale in moto, assunta da Kalinske quale coefficiente costante di proporzionalità

fra g_s e la velocità media delle particelle moltiplicata per il diametro, varia invece quasi linearmente con $(\tau_0 - \tau_{cr})$.

Un contributo importante per la valutazione del trasporto solido al fondo, ottenuto separando gli effetti della resistenza dovuta ai granuli da quelli dovuti alla morfologia del fondo, è stato dato dai lavori sperimentali della Eidgenössische Technische Hochschule di Zurigo e dagli studi di Meyer-Peter e Müller che hanno fornito una interpretazione soddisfacente di quelle esperienze. La formula da loro proposta nel 1948 si è dimostrata in accordo sia con i risultati della E.T.H., sia con numerosi altri rilievi di laboratorio e di campagna, anche successivi.

Per miscugli di varia granulometria, essa si può scrivere nella seguente forma adimensionale

$$\frac{Rj'}{d_s} - 0,047 \frac{\rho_s - \rho}{\rho} = 0,25 \frac{g_s^{\frac{3}{2}}}{d_s \sqrt{g \rho^2}} \left(\frac{\rho_s - \rho}{\rho} \right)^{\frac{3}{2}} \quad [20.12]$$

nella quale j' sta a rappresentare quella parte della pendenza j che è dovuta alla sola resistenza dei grani e non alla conformazione del fondo.

Il confronto con numerosi risultati sperimentali è riportato nella figura 20.5.

Per la valutazione di j' , gli Autori consigliano l'impiego della relazione

$$\frac{j'}{j} = \left(\frac{k_s}{k'_s} \right)^{\frac{3}{2}} \quad [20.13]$$

dove k_s è il parametro di scabrezza di Gauckler-Strickler e k'_s è lo stesso parametro riferito alla scabrezza dovuta esclusivamente ai granuli del materiale mobile. Il rapporto k_s/k'_s può variare da 0,5, quando la morfologia del fondo ha una forte influenza sulla resistenza, fino a 1,0, quando il fondo è piano e la resistenza è tutta dovuta alla scabrezza granulare del fondo. Müller aveva proposto, nel 1943, di calcolare k'_s con la formula $k'_s = 26/d_{50}^{\frac{1}{2}}$.

Tenendo conto della [20.13], il primo termine dell'eq. [20.12] si scrive

$$\frac{R}{d_s} \left(\frac{k_s}{k'_s} \right)^{\frac{3}{2}} j$$

e si nota che, ferma restando la velocità media della corrente, si può introdurre un raggio idraulico R' , tale che sia

$$R' = R \left(\frac{k_s}{k'_s} \right)^{\frac{3}{2}},$$

per sostituire Rj' con $R'j$.

Se la portata solida si annulla, l'eq. [20.12] fornisce la condizione critica di inizio del movimento al fondo

$$\frac{\rho}{\rho_s - \rho} \frac{Rj'}{d_s} = 0,047; \quad \text{oppure} \quad \frac{\rho}{\rho_s - \rho} \frac{R'j}{d_s} = 0,047;$$

essendo $gRj' = gR'j = \tau'_0/\rho$ e $\tau'_0 = \tau'_{cr}$ nelle condizioni in esame, essa può essere posta nella forma

$$\frac{\tau'_{cr}}{(\gamma_s - \gamma)d_s} = 0,047,$$

che conferma il valore 0,047 poi proposto da Zeller per τ_{*cr} .

20.5. L'equazione di Einstein per la portata solida al fondo.

Attraverso una serie di studi, iniziati negli anni '40 e portati a conclusione nel 1950, Einstein introdusse un metodo probabilistico per la valutazione della portata solida al fondo e propose una formula che ha avuto largo impiego tecnico. Nel 1954 Chien dimostrò la sostanziale concordanza della formula di Einstein con quella di Meyer-Peter e Müller ponendo anche quest'ultima in termini dei parametri adimensionali introdotti da Einstein. Essi sono:

il parametro Ψ , che risulta uguale all'inverso del parametro di stabilità di Shields,

$$\Psi = \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \frac{g d_s}{v_*^2} = \frac{1}{\tau_*} \quad [20.14]$$

ed il parametro del trasporto o «intensità» di trasporto

$$\Phi = q_s \left(\frac{\rho_s - \rho}{\rho} g d_s^3 \right)^{-1/4} \quad [20.15]$$

Il metodo seguito da Einstein, per l'originalità che presenta rispetto ai metodi che l'avevano preceduto e per l'influenza che ha avuto sulla comprensione del meccanismo del trasporto solido, merita un richiamo delle linee deduttive essenziali.

Nello schema di Einstein (1942) il trasporto al fondo è il risultato di un certo numero di *passi* che ogni granulo del materiale sedimentario compie saltuariamente.

Detta $A_L d_s$ la distanza media percorsa dai granuli di diametro d_s dal momento in cui sono erosi al momento in cui sono depositati, il numero

di granuli *depositati* per unità di tempo e di area è proporzionale a

$$\frac{g_s}{(A_L d_s)(\rho_s d_s^3)}$$

essendo $A_L d_s \cdot l$ l'area del fondo interessata dal deposito e $\rho_s d_s^3$ una massa proporzionale a quella del granulo.

Si indica con p la frazione temporale nella quale la portanza istantanea dovuta alla turbolenza supera il peso della particella. Si indica inoltre con t_s il tempo richiesto per lo spostamento. Allora il numero dei granuli *erosi* per unità di tempo e di area è proporzionale a

$$\frac{p}{t_s d_s^2}$$

essendo $1/d_s^2$ proporzionale al numero delle particelle di diametro d_s per unità di area. Einstein avanzò l'ipotesi che il tempo t_s fosse valutabile quale tempo di caduta del granulo in un percorso proporzionale a d_s , ossia assunse

$$t_s \propto \frac{d_s}{\sqrt{\left(\frac{\rho_s - \rho}{\rho}\right) g d_s}}$$

come si verifica ricordando l'espressione [20.1] della velocità di caduta libera.

Sostituendo t nell'espressione precedente ed uguagliando questo numero a quello delle particelle depositate attraverso un coefficiente globale di proporzionalità K , si ottiene l'equazione del trasporto solido

$$\frac{g_s}{A_L \rho_s d_s^4} = K \frac{p}{d_s^2} \sqrt{\frac{g}{d_s} \cdot \frac{\rho_s - \rho}{\rho}}$$

Einstein ha mostrato la possibilità di esprimere la distanza $A_L d_s$ in funzione della lunghezza media $\lambda_s d_s$ del *singolo passo* di un granulo e della frequenza p , detta probabilità di erosione, nella forma

$$A_L d_s = \frac{\lambda_s d_s}{1-p};$$

con questo l'equazione del trasporto solido diventa

$$\frac{p}{1-p} = \frac{1}{K \lambda_s} \left(g_s \sqrt{\frac{\rho}{\rho_s - \rho} \cdot \frac{1}{g d_s^3}} \right) = A \Phi$$

ossia

$$p = \frac{A\Phi}{1 + A\Phi} \quad [20.16]$$

avendo il parametro di trasporto Φ l'espressione già riportata in precedenza (v. eq. [20.15]).

Misure dirette della lunghezza del passo dei granuli sono state eseguite, nella ricerca già citata, da Fernandez Luque e van Beek (1975) con tre diversi materiali incoerenti di dimensioni 0,9-1,5-1,8 mm, di densità variabile nel rapporto da 1 a 3 e con differenti sforzi al contorno. Esse hanno fornito valori di λ_s poco diversi fra loro, sempre mediamente intorno a 16. Il risultato giustifica l'assunzione del coefficiente A come costante.

La probabilità di erosione p può essere espressa, secondo Einstein, in funzione del rapporto fra il peso della particella immersa nel fluido e la portanza fluido dinamica, per cui si può scrivere

$$p = f \left[\frac{(\rho_s - \rho) g d_s^3}{C_p \rho d_s^2 v_f^2} \right]$$

dove C_p è il coefficiente di portanza e v_f la velocità al fondo, assunta di norma pari al valore al confine inferiore della regione turbolenta. Occorre distinguere la resistenza dovuta alla presenza dei granuli, influente sul trasporto, da quella dovuta alla modellazione del fondo: indicando con v'_* la velocità di attrito relativa alla prima causa, cioè alla resistenza dovuta alla scabrezza, essa è stata valutata da Einstein dividendo il raggio idraulico R in due parti, R' ed R'' , con ovvio riferimento alle due forme di resistenza ed in analogia con quanto proposto da Meyer-Peter sulla suddivisione della pendenza. Essendo

$$v'^2_* = g R' j,$$

per quanto detto prima risulta

$$v_f \propto v'_*$$

e quindi

$$p = f \left[\frac{\rho_s - \rho}{\rho} \cdot \frac{g d_s^3}{v'^2_*} \right] = f(\Psi')$$

con il significato del parametro Ψ' già premesso, ossia anche

$$\Psi' = \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \frac{d_s}{R' j}.$$

Ne segue in definitiva una relazione fra i parametri Φ e Ψ , che ora indicheremo senza apice sottintendendo la considerazione della resistenza dovuta soltanto alla scabrezza granulare: essa esprime l'equazione del trasporto solido al fondo. Per trasporto debole, cioè per valori $\Phi < 0,4$, Einstein aveva proposto nel 1942 l'equazione

$$0,465 \Phi = e^{-0,391\Psi'}$$

rappresentata da una retta nel diagramma della figura 20.4.

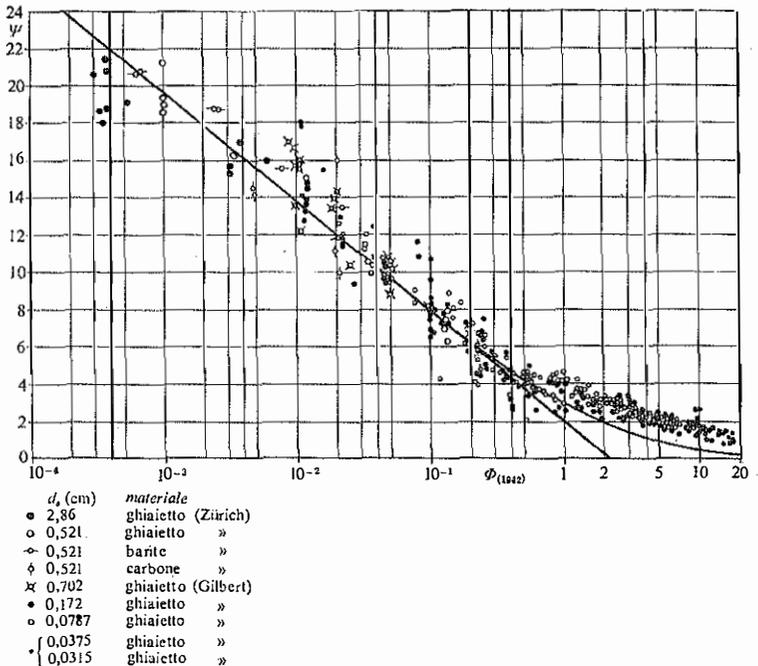
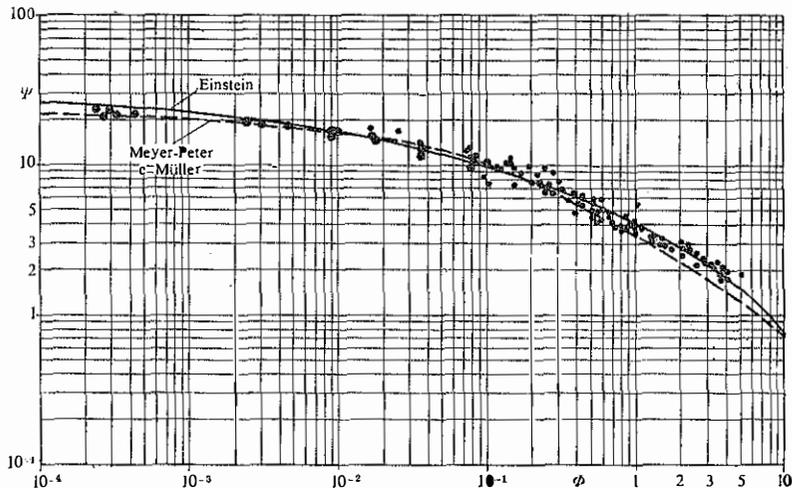


Fig. 20.4. - Relazione fra le funzioni Φ e Ψ di Einstein (1942).

Successivamente, nel 1950, assunto che la distribuzione della probabilità p segua la legge normale gaussiana, Einstein ottenne l'equazione della portata solida al fondo nella forma

$$1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\Psi-2}^{\Psi-2} e^{-z^2} dz = \frac{A\Phi}{1 + A\Phi} \quad [20.17]$$

con A e B costanti da determinare sperimentalmente. Con le misure su sedimenti uniformi di Gilbert e Meyer-Peter e al. è risultato $A = 43,5$, $B = 1/7 = 0,143$. Con questi valori l'eq. [20.17] è riportata nel grafico della figura 20.5 insieme con i citati risultati sperimentali.



- $d_s = 28,65$ mm (Meyer-Peter e al.)
- $d_s = 0,785$ mm (Gilbert)

Fig. 20.5. - Relazione grafica di Einstein (1950), curva a linea intera, e di Meyer-Peter e Müller (1948), curva a tratti, per il calcolo della portata solida al fondo (da Chien, 1954).

Come si è detto, il confronto fra l'equazione di Einstein e quella di Meyer-Peter e Müller è stato eseguito da Chien che, a questo scopo, ha trasformato la seconda equazione esprimendola con gli stessi parametri di Einstein nella forma

$$\Phi = 8 \left(\frac{1}{\Psi} - 0,047 \right)^{\frac{3}{2}} \quad [20.18]$$

nella quale $1/\Psi^{\frac{1}{2}} = \tau_*$ è il parametro di Shields e 0,047 è il valore assunto per τ_{*cr} .

Il confronto fra le curve rappresentatrici delle due equazioni [20.17] e [20.18] e i risultati sperimentali su sedimenti uniformi è rappresentato nella stessa figura 20.5 e ne mostra la buona concordanza. L'accordo si riscontra anche con miscugli a granulometria non uniforme, per i quali

però è consigliato assumere per il diametro d_s due differenti valori: d_{35} nell'equazione di Einstein e d_{50} nell'equazione di Meyer-Peter e Müller.

Anche le già richiamate esperienze di Fernandez Luque e van Beek (1976) hanno sostanzialmente verificato un'equazione del tipo Meyer-Peter e Müller nella forma

$$\Phi = 5,7 \left(\frac{1}{\bar{\Psi}} - \frac{1}{\bar{\Psi}_{cr}} \right)^{\frac{3}{2}}$$

per deboli valori di portata solida su fondo praticamente piano.

20.6. Altre formule per il trasporto di fondo.

Un'equazione del trasporto solido nella forma introdotta da Kalinske è stata proposta da Pezzoli nel 1978. Egli ha ricavato un'espressione della funzione $f(\tau_0/\tau_{cr})$ nella [20.11] con considerazioni basate sulla distribuzione della velocità del materiale trasportato in strati di spessore proporzionale al diametro d_s del materiale ed al rapporto τ_0/τ_{cr} . L'equazione risultante è

$$\frac{q_s}{v_* d_s} = K_p \left(\frac{\tau_{cr}}{\tau_0} \right)^{\frac{1}{6}} \left(\sqrt{\frac{\tau_0}{\tau_{cr}}} - 1 \right)^{\frac{5}{3}}$$

In una prima versione, con riferimento ai risultati sperimentali utilizzati da Kalinske nella forma elaborata dallo stesso autore, l'adattamento ottimale era stato ottenuto con $K_p = 0,66$. Successivamente, dal confronto con le più complete serie sperimentali utilizzate da Einstein nel 1950, Pezzoli ha ritenuto consigliabile, per il migliore adattamento, porre $K_p = 1,5$; sicché la formula precedente diventa

$$\frac{q_s}{v_* d_s} = 1,5 \left(\frac{\tau_{cr}}{\tau_0} \right)^{\frac{1}{6}} \left(\sqrt{\frac{\tau_0}{\tau_{cr}}} - 1 \right)^{\frac{5}{3}} \quad [20.19]$$

nella quale lo stesso autore suggerisce di assumere per τ_{cr} il valore $0,047(\gamma_s - \gamma)d_s$. La formula [20.19] può essere espressa ovviamente anche in termini delle variabili di Einstein.

Diverse altre equazioni sono state proposte per il calcolo della portata solida al fondo, tutte riconducibili a relazioni fra i parametri Φ , Ψ e Ψ_{cr} . Si richiamano quelle introdotte da Bagnold nel 1956 e da Yalin nel 1953, soprattutto per l'interesse dei procedimenti seguiti.

Il primo ha impostato il calcolo della g_s sulla valutazione della potenza richiesta al fluido per il trasporto degli elementi solidi; di questo procedimento, nella versione presentata da Bagnold in un successivo lavoro

del 1966, sono riportati gli elementi essenziali nel paragrafo 20.9 dedicato al trasporto solido totale.

Yalin (1963) ha ottenuto la sua formula per il calcolo di q_s partendo dall'ipotesi che il moto dei granuli avvenga per salti e che ogni salto si presenti come la traiettoria di un proiettile la cui massima altezza è conseguenza non dell'azione continua di una forza di trascinamento, ma della velocità acquistata inizialmente dal granulo. Il risultato viene qui riportato in termini dei parametri Φ e Ψ di Einstein, con riferimento specifico al trasporto di granuli di quarzo in acqua ($\rho_s/\rho = 2,65$):

$$\Phi = \text{cost} \frac{\Psi_{cr}}{\sqrt{\Psi}} \left(\frac{1}{\Psi} - \frac{1}{\Psi_{cr}} \right) \left[1 - \frac{1}{a_s} \ln(1 + a_s) \right]$$

con

$$a_s = 1,66 \sqrt{\Psi_{cr}} \left(\frac{1}{\Psi} - \frac{1}{\Psi_{cr}} \right);$$

la costante è risultata pari a 0,635 dal confronto con i risultati sperimentali di Gilbert e di Meyer-Peter e al. Con l'aumentare della portata solida, a_s diventa molto grande e

$$\frac{1}{a_s} \ln(1 + a_s) \rightarrow 0,$$

sicché l'equazione di Yalin si riduce alla

$$\Phi = 0,635 \frac{\Psi_{cr}}{\sqrt{\Psi}} \left(\frac{1}{\Psi} - \frac{1}{\Psi_{cr}} \right). \quad [20.20]$$

A questa stessa forma si può riportare, con opportune trasformazioni (si veda Yalin, 1972), anche l'equazione di Bagnold per il trasporto di fondo del 1956. La differenza dalla formula di Meyer-Peter e Müller sta nell'esponente 1, in luogo di 3/2, del termine fra parentesi.

Le equazioni di Yalin e di Bagnold, pur esprimendo nella stessa forma la dipendenza $\Phi = \Phi(\Psi, \Psi_{cr})$, si differenziano tuttavia fra loro per i valori numerici dei coefficienti consigliati dagli autori: 0,635 secondo Yalin, per elevate portate solide, e 0,21 secondo Bagnold per granuli ≥ 4 mm.

20.7. L'equazione della diffusione-dispersione.

Lo studio del trasporto solido in sospensione utilizza la condizione di conservazione della massa della sostanza dispersa. Detta C_s la sua concentrazione, ossia la massa di materiale sospeso nell'unità di volume,

si assume

$$\frac{D}{Dt} \int_V C_s dV = 0 \quad [20.21]$$

qualunque sia il volume mobile V . Indicando con \mathbf{n} il versore normale interno della superficie A che delimita V , e con \mathbf{v}_s la velocità di migrazione del materiale disperso, si può applicare alla [20.21] il teorema di trasporto per ottenere

$$\int_V \frac{\partial C_s}{\partial t} - \int_A C_s \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n} dA = 0$$

avendo supposto C_s e \mathbf{v}_s di classe C^1 .

Applicando il teorema della divergenza, segue

$$\int_V \left[\frac{\partial C_s}{\partial t} + \text{div}(C_s \mathbf{v}_s) \right] dV = 0$$

da cui, per l'arbitrarietà del volume di controllo V e per la continuità dell'integrando si ha

$$\frac{\partial C_s}{\partial t} + \text{div}(C_s \mathbf{v}_s) = 0. \quad [20.22]$$

A produrre la velocità \mathbf{v}_s concorrono meccanismi diversi, che possono anche presentarsi insieme. Può verificarsi una *diffusione* a livello molecolare, causata dalle variazioni di concentrazione, una *dispersione* per agitazione turbolenta del fluido ambiente, una *convezione* indotta dal moto medio di quest'ultimo od una *sedimentazione* per difetto della spinta di galleggiamento rispetto al peso.

Nel primo caso la migrazione avviene verso le zone a concentrazione più bassa e la velocità di diffusione si assume di norma proporzionale al gradiente della concentrazione, ossia

$$C_s \mathbf{v}_s = -E_d \text{grad } C_s \quad [20.23]$$

introducendo il *coefficiente di diffusione* E_d , espresso in $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$.

In presenza di turbolenza conviene scindere C_s e \mathbf{v}_s nei loro valori medi temporali di Reynolds, \bar{C}_s e $\bar{\mathbf{v}}_s$, e nelle loro componenti fluttuanti C'_s e \mathbf{v}'_s :

$$C_s = \bar{C}_s + C'_s \quad \mathbf{v}_s = \bar{\mathbf{v}}_s + \mathbf{v}'_s.$$

Ne segue

$$C_s \mathbf{v}_s = \bar{C}_s \bar{\mathbf{v}}_s + \bar{C}'_s \mathbf{v}'_s.$$

Per analogia con lo schema diffusivo si usa porre

$$\overline{C_s v_s} = - \mathbf{E} \cdot \text{grad } C_s \quad [20.24]$$

definendo il *tensore di dispersione*

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{xy} & E_{xz} \\ E_{yx} & E_{yy} & E_{yz} \\ E_{zx} & E_{zy} & E_{zz} \end{bmatrix},$$

le cui componenti hanno le stesse dimensioni di E_s .

La velocità media di migrazione \bar{v}_s è legata invece alla velocità media temporale \bar{v} del fluido ambiente. Spesso basta porre

$$\bar{C}_s \bar{v}_s = \bar{C}_s E_c \bar{v} \quad [20.25]$$

dove E_c rappresenta un *coefficiente di convezione* adimensionale, eventualmente unitario.

La distinzione, valida in presenza di turbolenza, fra trasporto convettivo, espresso dal prodotto dei valori medi di concentrazione e di velocità, e trasporto per dispersione, dato dalla media del prodotto delle componenti residue delle stesse grandezze, può essere utilizzata anche quando esiste un moto medio variabile nel tempo, purché le fluttuazioni di C_s e di v_s ammettano medie temporali nulle a lungo termine. La separazione fra i modi dispersivo e convettivo del trasporto di massa dipende allora dall'ampiezza dei domini spaziale e temporale nei quali si opera la ricerca dei valori medi di concentrazione e di velocità; e tale scelta può essere rivolta allo studio di fenomeni di mescolamento non dipendenti strettamente dalla turbolenza, quali le dispersioni dovute al passaggio di onde periodiche in un canale o alle azioni della marea trasmesse in una laguna (v. ad es. Ghetti, Di Silvio, 1978). Ne deriva la possibilità di attribuire un diverso significato, e valori diversi, al coefficiente di dispersione in relazione allo schema adottato.

Nei moti turbolenti la diffusione molecolare ha spesso importanza trascurabile e l'equazione di continuità per la fase dispersa diventa

$$\frac{\partial \bar{C}_s}{\partial t} + \text{div}(\bar{C}_s E_c \bar{v}) - \text{div}(\mathbf{E} \cdot \text{grad } \bar{C}_s) = 0. \quad [20.26]$$

Infine, se la fase dispersa ha densità ρ_s diversa da quella ρ del fluido, nascono spinte di galleggiamento differenti dal peso proprio del materiale sospeso, che acquista di conseguenza una velocità v_s propria, distinta da quella del fluido ambiente.

Assumendo come assi coordinati x, y, z gli assi principali del tensore della dispersione, ed indicando con $E_x, E_y,$ ed E_z i relativi coefficienti,

si ottiene complessivamente in termini scalari

$$\frac{\partial \bar{C}_s}{\partial t} + E_c \left(\bar{v}_x \frac{\partial \bar{C}_s}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{C}_s}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{C}_s}{\partial z} \right) + v_{sx} \frac{\partial \bar{C}_s}{\partial x} + v_{sy} \frac{\partial \bar{C}_s}{\partial y} + v_{sz} \frac{\partial \bar{C}_s}{\partial z} - \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left(E_w \frac{\partial \bar{C}_s}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(E_w \frac{\partial \bar{C}_s}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(E_w \frac{\partial \bar{C}_s}{\partial z} \right) = 0 \quad [20.27]$$

avendo assunto $\text{div} \mathbf{v} = \text{div} \mathbf{v}_s = 0$.

20.8. Il trasporto solido in sospensione.

Un'applicazione particolarmente semplice dell'equazione della dispersione si presenta nello studio del moto *piano uniforme* di un miscuglio costituito da una corrente liquida a pelo libero che trasporta materiale *solido in sospensione*, in condizioni permanenti. Per semplificare la scrittura omettiamo nel seguito il soprassegno su C_s , intendendo con questo simbolo sempre il valore medio temporale della massa di materiale sospeso per unità di volume.

Si assume x, y come piano del moto, con l'asse x sul fondo, positivo nel verso della corrente, e l'asse y ad esso perpendicolare, positivo verso l'alto; per le condizioni poste di permanenza, uniformità e bidimensionalità del moto del fluido e della sospensione, si ha

$$\bar{v}_y = \bar{v}_z = 0 \\ \frac{\partial C_s}{\partial t} = \frac{\partial C_s}{\partial x} = \frac{\partial C_s}{\partial z} = 0.$$

Inoltre, data la modesta pendenza del fondo, l'asse y è quasi verticale e risulta

$$v_{sy} = -w_s$$

essendo w_s la velocità di caduta libera del materiale nel fluido in esame.

L'eq. [20.27] si riduce perciò alla

$$-w_s \frac{dC_s}{dy} - \frac{d}{dy} \left(E_w \frac{dC_s}{dy} \right) = 0,$$

da cui, integrando, deriva

$$C_s w_s + E_w \frac{dC_s}{dy} = 0. \quad [20.28]$$

Nell'ipotesi di una distribuzione della turbolenza tale da rendere il coefficiente E_w indipendente da y , l'integrazione della [20.28] è imme-

diata e porta alla

$$\frac{C_s}{C_{sa}} = \exp \left[-\frac{w_s}{E_v} (y-a) \right] \quad [20.29]$$

con y distanza generica dal fondo, alla quale corrisponde la concentrazione C_s , ed a la distanza alla quale la concentrazione ha il valore noto C_{sa} .

In generale, per una corrente liquida in moto uniforme il coefficiente di dispersione E_v è funzione di y . Il ruolo determinante che la turbolenza del fluido esercita nel mantenere in sospensione il materiale solido ha suggerito la possibilità di correlare E_v con il coefficiente di viscosità turbolenta ε_t introdotto da Boussinesq per esprimere lo sforzo tangenziale nel moto uniforme turbolento:

$$\tau = \rho \varepsilon_t \frac{dv_x}{dy}.$$

Rouse (1937-38), seguì questo criterio, utilizzando la legge di distribuzione logaritmica della velocità per valutare dv_x/dy . Tenuto conto della variazione lineare dello sforzo τ , dal valore τ_0 al fondo al valore nullo, alla quota Y del pelo libero egli ottenne

$$\varepsilon_t = kv_* y \left(1 - \frac{y}{Y} \right)$$

dove k è il coefficiente detto di Kármán, pari all'inverso del coefficiente moltiplicatore del logaritmo nella distribuzione della velocità. Secondo Nikuradse $k = 1/2,5 = 0,4$ (cfr. paragrafo 10.6).

Assumendo il coefficiente di dispersione E_v coincidente con il coefficiente ε_t ora calcolato, Rouse sostituì l'eq. [20.28] con la

$$\frac{dC_s}{C_s} = -\frac{w_s}{kv_*} \cdot \frac{dy}{y(1-y/Y)}$$

e ne scrisse l'integrale nella forma

$$\frac{C_s}{C_{sa}} = \left(\frac{Y-y}{y} \cdot \frac{a}{Y-a} \right)^{w_s/kv_*} \quad [20.30]$$

essendo C_{sa} la concentrazione alla quota a dal fondo.

Alcune curve, ricavate da questa equazione per valori $w_s/kv_* = \text{cost}$, sono riportate nella figura 20.6 a linea continua e poste a confronto con i risultati sperimentali di Vanoni (1946). La concordanza risulta soddisfacente sebbene le ipotesi non siano del tutto esenti da critiche. Ma la verifica sperimentale conferma l'*andamento*, in funzione della profondità, della

concentrazione della sospensione a partire da un valore noto alla quota a e la buona coincidenza è affidata ad una opportuna scelta del valore dell'esponente w_s/kv_* . Per quanto riguarda la distanza a dal fondo, il valore consigliato normalmente è $0,05 Y$, come risulta nel grafico della figura 20.6. Evidentemente il procedimento è applicabile se lo strato di fondo, che è la regione nella quale il movimento del materiale solido avviene per trascinarsi senza sospensione continua nella corrente liquida, ha dimensione minore di a . Secondo Einstein (1940), lo spessore dello strato di fondo si può assumere pari a $2d_s$, essendo d_s il diametro del materiale al fondo e quindi dev'essere $a \gg 2d_s$.

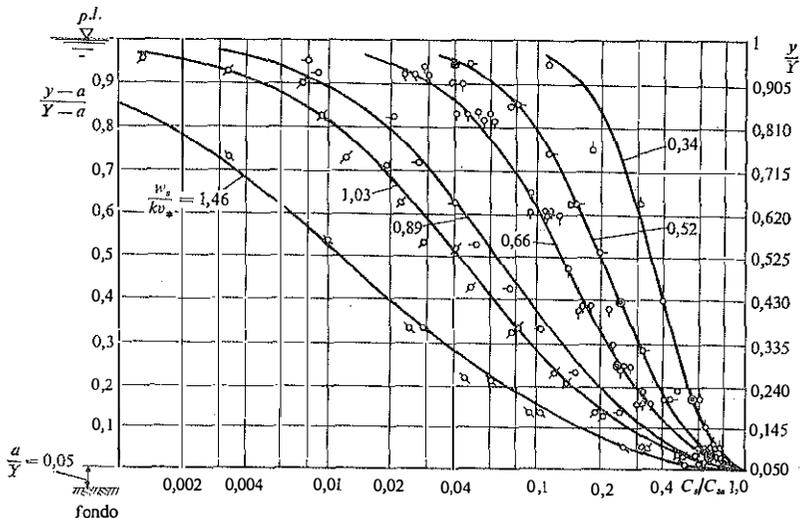


Fig. 20.6. - Curve di distribuzione della concentrazione C_s , rapportata alla concentrazione C_{sa} alla quota a dal fondo, a confronto con i risultati sperimentali di Vanoni (1946).

La presenza del materiale solido in sospensione influisce sul meccanismo della turbolenza del fluido principalmente attenuando l'ampiezza delle oscillazioni turbolente di velocità. In tal modo gli effetti dissipativi dovuti alla turbolenza devono diminuire, ma al fluido in moto è richiesta una maggiore quantità di energia per mantenere in atto la sospensione stessa. Uno degli aspetti cinematici più evidenti dell'influenza del materiale sospeso è, secondo Vanoni (1941, 1946), un aumento del gradiente della velocità nella sezione trasversale. Si veda nella figura 20.7 la rappresentazione grafica delle distribuzioni di velocità rilevate sperimentalmente da Vanoni e Nomicos (1959).

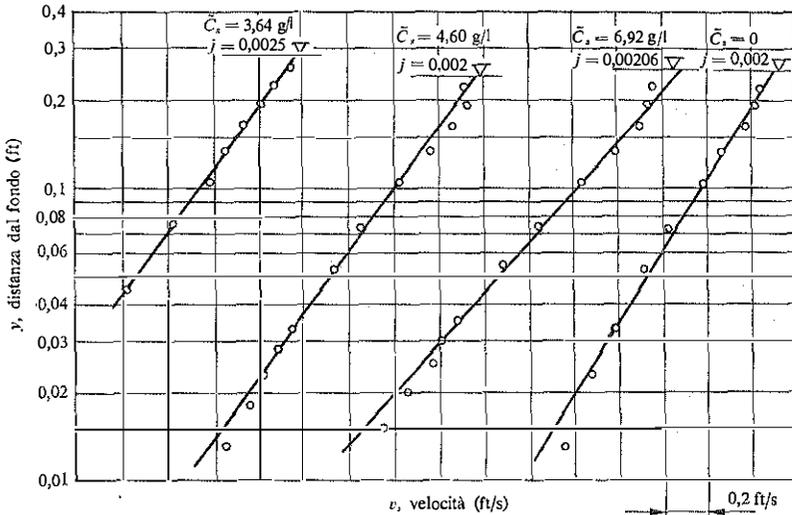


Fig. 20.7. - Misure di velocità in funzione della distanza dal fondo eseguite da Vanoni e Nomicos (1959) su correnti con materiale in sospensione a varie concentrazioni medie-spaziali \bar{C}_s .

È tuttavia importante notare che correzioni della distribuzione della velocità e del rapporto fra il coefficiente di dispersione e il coefficiente di viscosità turbolenta non possono introdurre sostanziali cambiamenti di forma nella dipendenza di C_s da y . Conoscendo la concentrazione in un punto è quindi possibile valutare, con approssimazione sufficiente per gli scopi pratici, la distribuzione di C_s lungo la verticale passante per quel punto utilizzando l'eq. [20.30] di Rouse. Più semplicemente si può seguire la proposta di Lane e Kalinske (1941), che consiste nel calcolare C_s con l'eq. [20.29] assumendo per il coefficiente di dispersione E_v il valore medio sulla verticale del coefficiente ε_t di Rouse

$$E_v \simeq \frac{kv_*}{Y} \int_0^y y \left(1 - \frac{y}{Y}\right) dy = \frac{kv_* Y}{6}.$$

Con $k = 0,4$ si ottiene $E_v \simeq v_* Y/15$.

Altri problemi che presentano interesse tecnico sono quelli riguardanti la ricerca della distribuzione longitudinale della concentrazione in condizioni permanenti non uniformi o la sua variazione temporale in una situazione transitoria. Per questi si rimanda ai trattati specializzati (Graf, 1971; Yalin, 1972).

Per quanto riguarda la *portata massica* g_{ss} del materiale in sospensione per unità di larghezza, essendo la concentrazione C_s espressa in massa per unità di volume, si ha

$$g_{ss} = \int_0^Y C_s v_s dy,$$

con v_s velocità media locale del materiale trasportato nella direzione della corrente. Nota la distribuzione sulla verticale di C_s/C_{sa} a partire da una altezza a sul fondo, molto piccola rispetto a Y , e assunta la distribuzione logaritmica della velocità v_s/v_* , l'equazione della portata massica in sospensione diventa

$$g_{ss} = C_{sa} v_* Y \int_{a/Y}^1 \left(\frac{C_s}{C_{sa}} \right) \left[2,5 \ln \left(\frac{y}{Y} \right) + f \left(\frac{d_s}{Y} \right) \right] d \left(\frac{y}{Y} \right) \quad [20.31]$$

essendo $f(d_s/Y)$ un termine dipendente dalla scabrezza relativa d_s/Y del materiale di fondo. Per (C_s/C_{sa}) si può utilizzare ad esempio l'espressione data da Rouse, oppure quella proposta da Lane e Kalinske. Se si impiega la prima, l'integrazione in forma chiusa non è possibile, ma l'integrazione numerica non presenta difficoltà.

Einstein (1950) ha utilizzato, per la distribuzione della velocità lungo la verticale, l'espressione logaritmica

$$\frac{v_s}{v_*'} = 5,75 \log \left(\frac{30,2 \kappa y}{d_{65}} \right)$$

essendo v_*' la velocità di attrito dovuta alla sola scabrezza granulare e κ un coefficiente correttivo assegnato in forma grafica (v. fig. 20.8) in fun-

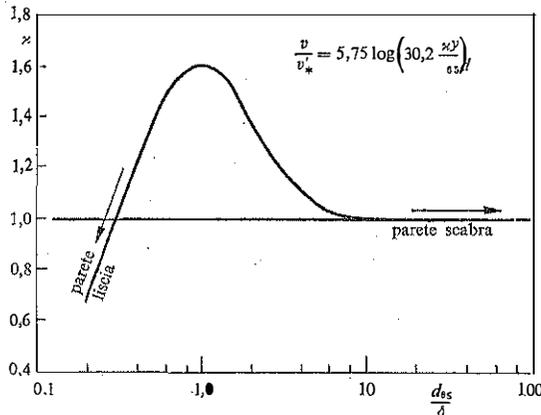


Fig. 20.8. - Coefficiente correttivo κ di Einstein da introdurre nella legge di distribuzione logaritmica della velocità.

zione del rapporto fra d_{65} e lo spessore convenzionale $\delta = 11,6 \nu/v_*'$ dello strato viscoso: per $d_{65}/\delta \geq 10$ è sempre $\kappa = 1$. Con tale distribuzione di velocità e con l'equazione di Rouse [20.30] per esprimere la C_s/C_{sa} , la portata solida massica in sospensione, per unità di larghezza, vale

$$g_{ss} = \int_0^Y C_{sa} \left(\frac{Y-y}{a} \cdot \frac{a}{Y-a} \right)^{w_s/kv_*'} \cdot 5,75 v_*' \log \left(\frac{30,2 \kappa y}{d_{65}} \right) dy \quad [20.32]$$

dove C_{sa} rappresenta la concentrazione alla quota $a = 2d_s$, al di sotto della quale il movimento del materiale solido avviene in forma di trasporto al fondo. L'integrale dell'equazione precedente è stato espresso nella forma

$$g_{ss} = 11,6 C_{sa} v_*' a \left[2,303 I_1 \log \left(\frac{30,2 \kappa Y}{d_{65}} \right) + I_2 \right]$$

nella quale I_1 ed I_2 sono integrali tabellati (Einstein, 1950) o dati in forma grafica (Colby e Hembree, 1955) in funzione di a/Y e per diversi valori dell'esponente w_s/kv_*' .

Assumendo $11,6 C_{sa} v_*' 2d_s$ pari alla portata solida (in massa) al fondo g_s relativa ai sedimenti di diametro d_s , si ottiene

$$g_{ss} = g_s \left[2,303 I_1 \log \left(\frac{30,2 \kappa Y}{d_{65}} \right) + I_2 \right], \quad [20.33]$$

equazione che correla il trasporto in sospensione g_{ss} con quello al fondo g_s , sempre per unità di larghezza.

20.9. Il trasporto solido totale.

Il carico globale di sedimenti trasportato da una corrente liquida può essere valutato sommando le portate solide al fondo e in sospensione, calcolate con i metodi visti in precedenza, oppure utilizzando formule destinate specificamente a questo scopo.

Al primo procedimento appartiene il metodo di Einstein, con il quale si calcola la portata massica totale g_{sti} , per unità di larghezza, del materiale solido di dimensione media d_{si} , contenuto nel campione granulometrico nella misura percentuale p_i , con la

$$g_{sti} = g_{si} \left[1 + 2,303 I_1 \log \left(\frac{30,2 \kappa Y}{d_{65}} \right) + I_2 \right] \quad [20.34]$$

ottenuta sommando alla portata in sospensione, data dall'eq. [20.33], la portata solida al fondo g_{si} del materiale di dimensione d_{si} ; questa ultima

deriva dalla conoscenza del parametro Φ_i in funzione del dato

$$\Psi_i = \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \frac{g d_{si}^3}{v_*'^2},$$

e si calcola con la

$$g_{si} = p_i \Phi_i \rho_s d_{si}^{\frac{3}{2}} \sqrt{g \frac{\rho_s - \rho}{\rho}}.$$

La portata totale per unità di larghezza è quindi

$$g_{st} = \sum_i g_{sti}.$$

Al problema del trasporto solido globale ha dato un importante contributo Bagnold con due memorie del 1956 e del 1966. Il metodo seguito si basa su considerazioni energetiche relative al lavoro richiesto e al rendimento sperimentale del processo.

La potenza necessaria per il trasporto del peso immerso gM_s' di materiale solido al fondo, per unità di superficie, con la velocità media U , è

$$N_s = gM_s' U, \operatorname{tg} \alpha = g(\rho_s - \rho) q_s \operatorname{tg} \alpha$$

essendo q_s la portata (volumetrica) solida al fondo per unità di larghezza e $\operatorname{tg} \alpha$ il coefficiente di attrito del materiale; analogamente la potenza richiesta dal trasporto in sospensione, sempre per unità di larghezza, vale

$$N_{ss} = g(\rho_s - \rho) q_s \left(\frac{w_s}{U_s} \right)$$

essendo U_s la velocità media di trasporto in sospensione e w_s , al solito, la velocità di caduta libera.

La potenza disponibile da parte della corrente liquida, per unità di larghezza b della sezione rettangolare, è

$$N = \frac{\tau_0 B U}{b} = \gamma Y j U$$

avendo indicato con B il perimetro bagnato e con j la perdita di carico effettivo per unità di percorso.

Bagnold ha introdotto un coefficiente di rendimento e_f per esprimere la frazione della potenza disponibile utilizzata dal trasporto al fondo

$$N_s = e_f N$$

e un coefficiente e_s di rendimento del trasporto in sospensione rispetto

alla restante potenza disponibile $(1 - e_f)N$

$$N_{s_s} = e_s(1 - e_f)N.$$

Tenendo conto di queste posizioni e delle precedenti relazioni energetiche si può scrivere la portata totale q_{st} , per unità di larghezza, nella forma

$$\begin{aligned} q_{st} = q_s + q_{s_s} &= \frac{N}{g(\varrho_s - \varrho)} \left[\frac{e_f}{\text{tg}\alpha} + e_s(1 - e_f) \frac{U_s}{w_s} \right] = \\ &= \varrho \frac{YjU}{\varrho_s - \varrho} \left[\frac{e_f}{\text{tg}\alpha} + e_s(1 - e_f) \frac{U_s}{w_s} \right]. \end{aligned} \quad [20.35]$$

Il calcolo della portata q_{st} richiede la conoscenza dei quattro parametri e_f , e_s , $\text{tg}\alpha$ e U_s . Per rendere pratico l'impiego della sua formula Bagnold ha suggerito di porre U_s uguale alla velocità media U della corrente e di assumere, per sospensioni in moto turbolento completamente sviluppato, $e_s(1 - e_f) \cong 0,015(2/3) = 0,01$, per cui risulta

$$q_{st} = \varrho \frac{YjU}{\varrho_s - \varrho} \left(\frac{e_f}{\text{tg}\alpha} + 0,01 \frac{U}{w_s} \right). \quad [20.36]$$

Bagnold ha inoltre fornito graficamente valori consigliabili di $\text{tg}\alpha$ e di e_f , quest'ultimi variabili fra 0,11 e 0,15 (cfr. Graf, 1972).

Numerose altre equazioni sono state proposte per il calcolo diretto della portata solida totale; meritano particolarmente d'essere ricordate, per l'accordo con i risultati sperimentali, le formule di Laursen (1958), Colby (1964), Engelund e Hansen (1967) e Toffaleti (1969) per le quali si rimanda alla relazione su « *Sediment Discharge Formulas* » del Task Committee for Preparation of Sediment Manual (Proc. ASCE 1971). Si richiama ancora il risultato delle ricerche di Bogárdi (1958, 1965): indicando con \bar{C}_{st} la concentrazione media del trasporto totale — data dal rapporto fra la portata massica solida e la portata liquida — la relazione è stata fornita empiricamente da Bogárdi ed è rappresentata graficamente nel diagramma della figura 20.11. Esso consente il calcolo della portata massica totale ed è inoltre indicativo della morfologia del fondo dell'alveo.

20.10. Il modellamento del fondo.

Il movimento di una corrente fluida su un fondo incoerente, quando è accompagnato da trasporto solido, influisce sulla configurazione del fondo stesso che assume forme correlate con le caratteristiche della corrente e

del materiale trasportato. Sebbene nessuno dei numerosi criteri proposti risulti completamente esente da eccezioni, una classificazione che trova attualmente largo credito è quella proposta da Simons e al. (1961) sulla base delle sistematiche ricerche sperimentali condotte alla Colorado State University.

Il criterio fa riferimento in primo luogo al regime del moto caratterizzato dal numero di Froude

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gY_m}}$$

relativo alla velocità media U e alla profondità media Y_m della corrente.

Per quanto riguarda la caratterizzazione dello stato dell'alveo, la scelta più conveniente è apparsa quella basata sui numeri seguenti:

numero di Reynolds del trasporto solido

$$Re_* = \frac{v_* d_s}{\nu} \quad [30.37]$$

formato con la velocità di attrito v_* relativa alla sola scabrezza granulare del fondo (indicata con v'_* quando occorre distinguerla dalla totale; v. successivo paragrafo 20.12), con il diametro equivalente d_s del materiale mobile costituente il fondo e con la viscosità cinematica ν del fluido;

numero di Froude del trasporto solido

$$Fr_* = \frac{v_*}{w_s} \quad [20.38]$$

formato con la stessa velocità v_* e con la velocità di caduta libera w_s dei granuli in acqua ferma.

È evidente che il riferimento Fr_* , Re_* può essere sostituito con Fr_s , Re_s , essendo quest'ultimo il numero di Reynolds formato con la velocità w_s , anziché con v_* , e quindi dato dalla $Re_s = w_s d_s / \nu = Re_* / Fr_*$. A volte viene invece indicato come numero di Froude del trasporto solido il numero $\bar{Fr}_* = w_s \sqrt{g d_s}$, correlato a quello Fr_* dato dalla [20.38] attraverso il parametro di stabilità di Shields (cfr. paragrafo 20.3).

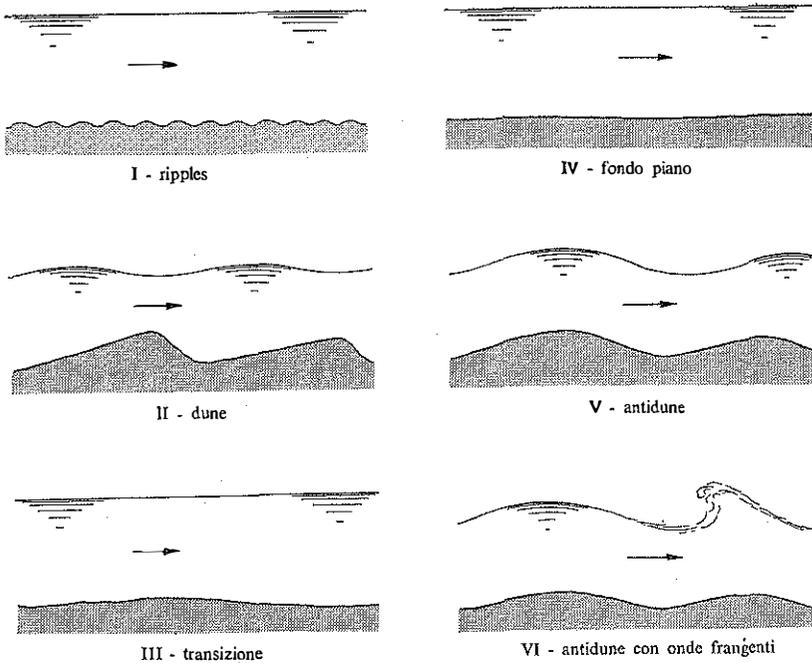


Fig. 20.9. - Forme del fondo mobile secondo Simons e al. (1961).

Al crescere di Fr ed Fr_* , a parità di numero di Reynolds del trasporto solido, si osservano generalmente le seguenti configurazioni (v. fig. 20.9)

$Fr < 1$ Regime inferiore	I - ripples:	piccoli corrugamenti della superficie del fondo, lunghi da 5 a 50 cm e alti da 0,5 a 5 cm;
	II - dune:	ondulazioni più accentuate con pendenza dolce a monte e ripida a valle, e con movimento lento verso valle. I ripples possono formarsi anche sopra le dune le quali hanno lunghezza variabile da 50 cm fino a qualche metro;
$Fr \sim 1$	III - transizione:	corrisponde a uno stato di fondo con ondulazioni lievi e lunghe, quasi piatto; esso segue allo spianamento ed all'asportazione delle dune;

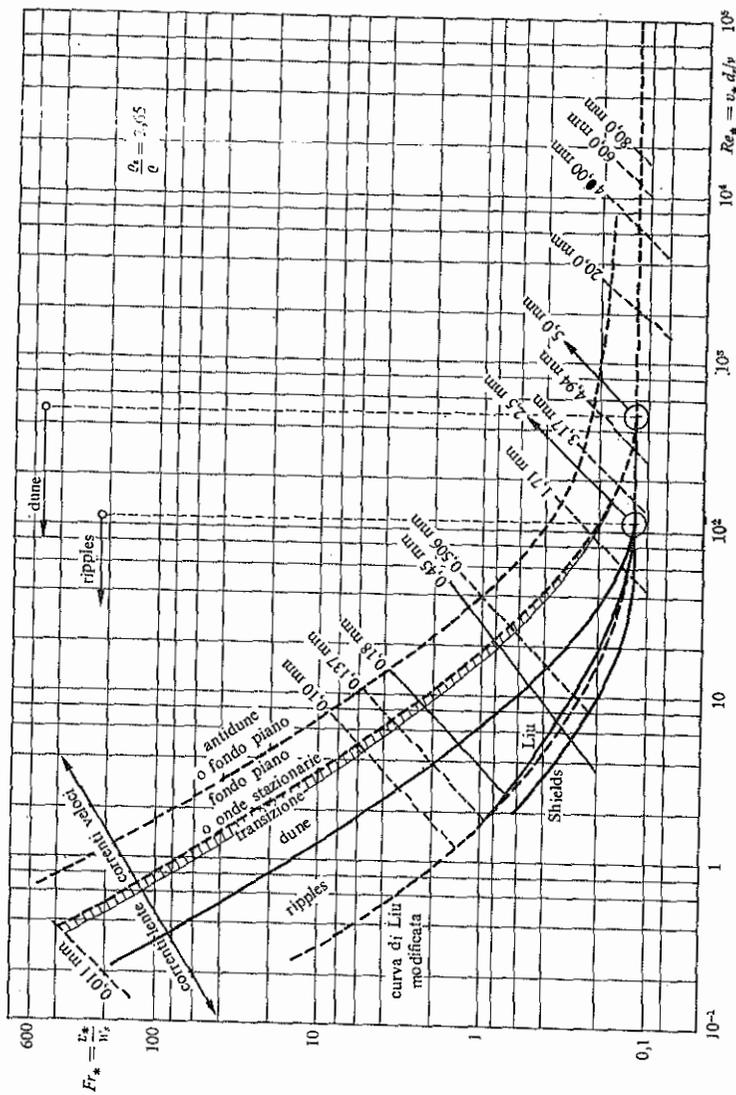


Fig. 20.10. - Grafico di Simons e Richardson (1961) per individuare la configurazione del fondo.

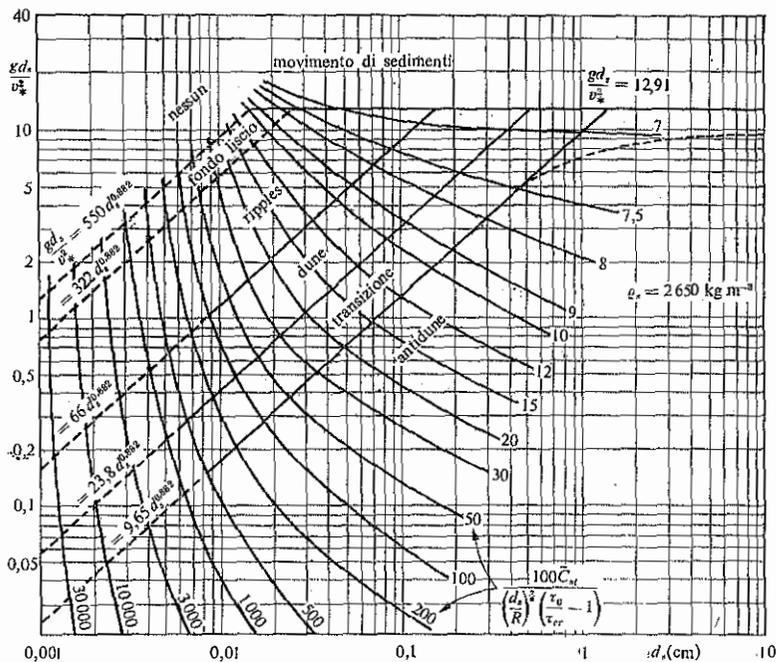


Fig. 20.11. - Grafico di Bogárdi (1965) per il calcolo del trasporto solido totale e per individuare le configurazioni del fondo.

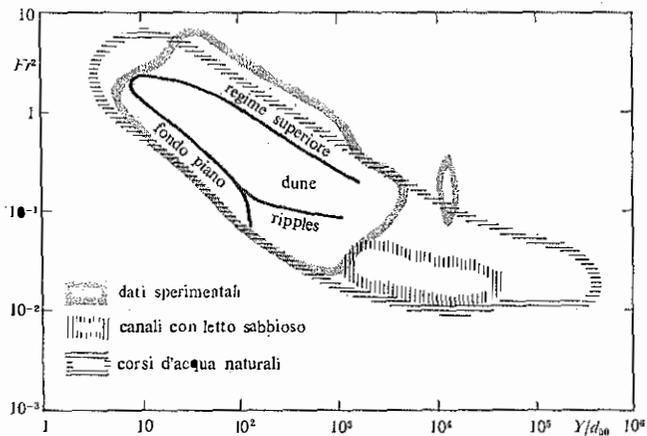


Fig. 20.12. - Campi di moto con modellazione del fondo: sperimentale e naturale.

$Fr > 1$ IV - fondo piano: assenza di modellamento del fondo;

Regime

superiore V - antidune: ondulazioni regolari e simmetriche, stazionarie o in moto più frequentemente verso monte.

Le antidune sono accompagnate da ondulazioni della superficie della corrente più accentuate di quelle che si presentano con le dune. A differenza di quest'ultime, le onde del pelo libero si mantengono in fase con le antidune finché il numero di Froude è basso. Per valori più elevati di Fr esse diventano instabili e frangono nella direzione controcorrente.

Il modellamento del fondo non è un fenomeno riservato alle sole correnti fluviali. Sono facilmente osservabili le formazioni di ripples sui bassi fondali sabbiosi del mare per effetto del moto ondoso. Strette analogie con le forme predette presentano anche le superfici delle sabbie e delle nevi lambite dal vento. Il profilo ad antidune è stato osservato però soltanto in presenza di una corrente a pelo libero.

Simons e Richardson (1961) hanno esteso a tutte le forme la rappresentazione delle curve limite delle varie configurazioni nel piano Re_* , Fr_* originariamente proposta da Liu (1957) per individuare la formazione dei ripples. Tale rappresentazione è riportata nella figura 20.10, nella quale l'inizio del moto è definito dalla curva di Shields (già tracciata nella fig. 20.2).

Il grafico di Simons e Richardson, pur presentando una indubbia utilità, non esaurisce tutte le possibili situazioni e va quindi impiegato con cautela. Diversi altri criteri, generalmente grafici, sono stati proposti per la soluzione del problema di individuare le configurazioni del fondo. Per l'attendibilità e l'utilità d'impiego nel campo tecnico è stato riportato nella figura 20.11 il diagramma proposto da Bogárdi (1959). La figura 20.12 mostra il risultato di un'indagine di Cooper, Peterson e Blench (1972): oltre a fornire un'utile indicazione sul tipo di modellamento del fondo in base ai parametri Fr ed Y/d_{50} , il grafico evidenzia il campo di possibili situazioni naturali non coperto da misure sperimentali.

20.11. L'equazione dello strato mobile di fondo.

Una prima schematizzazione del processo di modellamento del fondo mobile di un alveo percorso da una corrente idrica è stato impostato da Exner nel 1925 esaminando il moto piano dell'interfaccia fra liquido e

materiale di fondo, schematizzato nella figura 20.13. L'ipotesi fondamentale è che il tasso di erosione locale del fondo sia proporzionale al gradiente della velocità media della corrente nella direzione del moto. Ne deriva l'equazione

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -C_E \frac{\partial U}{\partial x} \quad [20.39]$$

nella quale C_E è il coefficiente di erosione di Exner. Unendo questa equazione alla condizione di costanza della portata liquida, si ottiene un sistema analogo a quello impiegato per lo studio della propagazione delle onde di piena in alveo fisso. Si ricava corrispondentemente un'espressione della celerità di propagazione verso valle delle ondulazioni di fondo, supposte inizialmente sinusoidali; essa mostra come la velocità della cresta sia maggiore della velocità del cavo in accordo, almeno in modo qualitativo, con la forma asimmetrica delle dune.

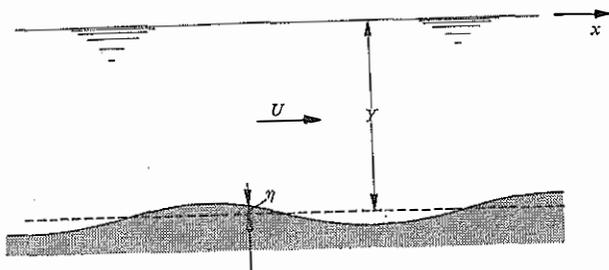


Fig. 20.13. - Strato mobile di fondo: schema di Exner.

Sul problema del modellamento del fondo e particolarmente sulla formazione delle *antidune*, alcuni risultati interessanti sono stati ottenuti assumendo la condizione di *irrotazionalità* del moto del liquido. Nel caso del moto bidimensionale, Anderson (1953), utilizzando anche la relazione di Exner per il movimento del fondo, ha ottenuto la seguente equazione, verificata sperimentalmente, fra il numero di Froude Fr della corrente e il rapporto Y/L tra la sua profondità e la lunghezza d'onda L delle antidune

$$Fr^2 = \frac{\sinh(4\pi Y/L)}{\frac{2\pi Y}{L} \left(\tanh \frac{2\pi Y}{L} \cdot \sinh \frac{4\pi Y}{L} - 2 \right)}$$

J. F. Kennedy (1963) ha pure utilizzato un modello di moto bidimensionale a potenziale su fondo mobile, assumendo per quest'ultimo un profilo sinusoidale rappresentato da una linea di corrente alla profondità Y

rispetto al pelo libero e come fondo virtuale un piano orizzontale posto alla profondità h , come mostra la figura 20.14. Alle usuali condizioni al contorno occorre aggiungere la condizione di continuità del movimento di materiale al fondo

$$\frac{\partial g_s}{\partial x} + (1 - m) e_s \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad [20.40]$$

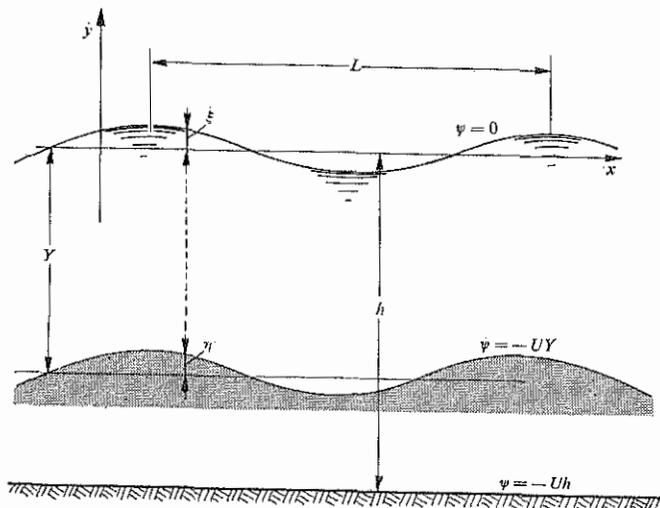


Fig. 20.14. - Schema di moto irrotazionale su fondo mobile ondulato.

essendo m la porosità. Kennedy ha introdotto inoltre una equazione del trasporto di fondo derivata dall'ipotesi che la portata solida g_s alla ascissa x sia proporzionale ad una potenza, da determinare, della velocità del fluido misurata alla quota $-Y$ del fondo e ad un'ascissa $(x - \delta_s)$. Da questo sistema di equazioni derivano le espressioni della lunghezza d'onda e della celerità delle ondulazioni del fondo sotto la condizione che l'onda dominante sia quella che ha il maggior tasso possibile di amplificazione. I risultati più interessanti sono: (a) la relazione fra Fr ed Y/L che, nel caso $\delta_s \ll Y$, vale

$$Fr^2 = \frac{2 + \frac{2\pi Y}{L} \tanh \frac{2\pi Y}{L}}{\left(\frac{2\pi Y}{L}\right)^2 + \frac{6\pi Y}{L} \tanh \frac{2\pi Y}{L}}$$

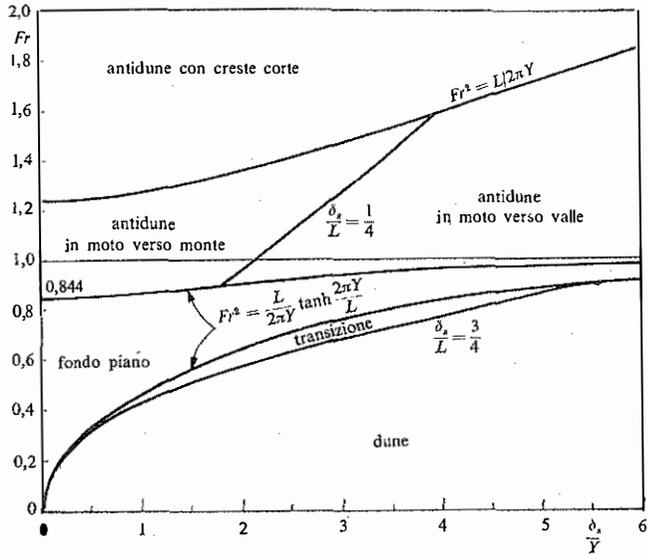


Fig. 20.15. - Condizioni per il verificarsi di differenti configurazioni del fondo quando il moto è irrotazionale.

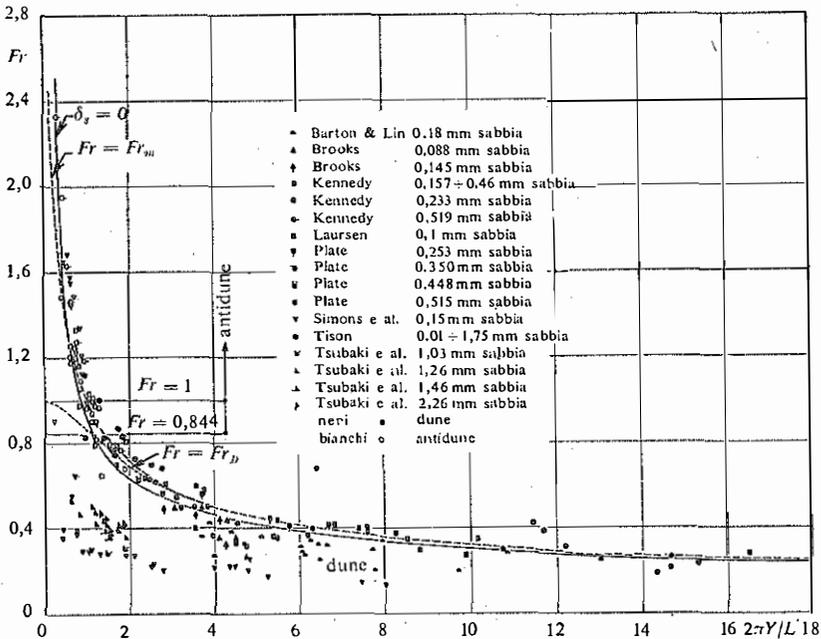


Fig. 20.16. - Regioni a differenti configurazioni del fondo, secondo Kennedy (1963). Confronto con i risultati sperimentali.

ed è poco diversa da quella di Anderson per $(2\pi Y/L) \simeq 5$; (b) la rappresentazione delle condizioni per cui si verificano differenti configurazioni del fondo, espresse in termini del numero di Froude e del rapporto δ_s/Y , come mostra la figura 20.15. La grandezza δ_s , che rappresenta in sostanza lo sfasamento spaziale fra le oscillazioni di velocità del fluido e delle particelle solide, non è generalmente nota e ciò limita l'importanza dei risultati. Ma restano alcune conclusioni significative, come quella che, qualunque sia δ_s , la formazione delle antidune richiede un numero di Froude della corrente liquida maggiore di 0,844 (il limite è variabile fra 0,844 e 1,0 come si vede dalla fig. 20.15). Questo risultato è confermato dai rilievi sperimentali, riportati nella figura 20.16. E conferma trova pure la limitazione superiore del numero di Froude Fr_D per la formazione delle dune,

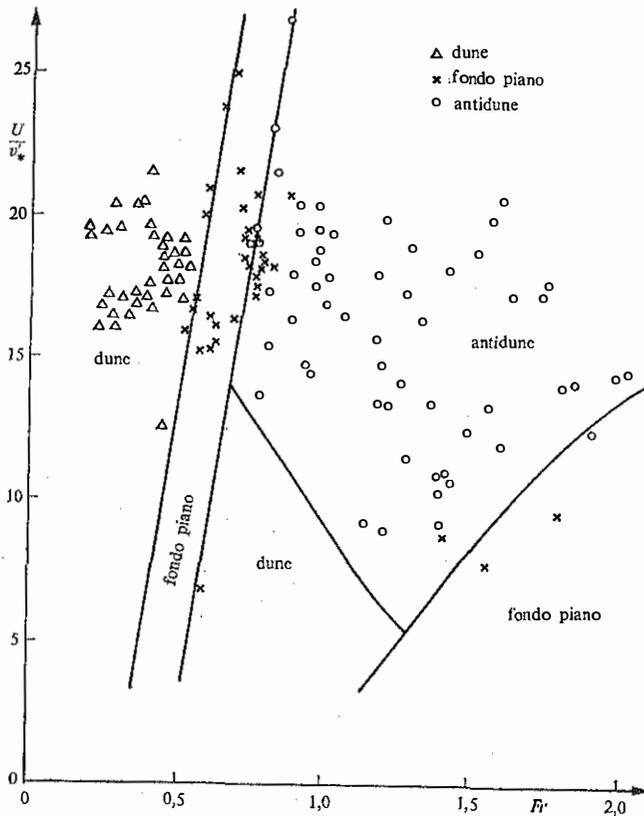


Fig. 20.17. - Grafico di Engelund (1966) per individuare la configurazione del fondo.

ottenuto imponendo la condizione $Y = h$; il risultato è

$$Fr_D^2 = \frac{L}{2\pi Y} \tanh \frac{2\pi Y}{L}$$

e fornisce una curva che i punti sperimentali non oltrepassano nella grande maggioranza dei casi.

Lo schema di moto a potenziale fornisce, come si è detto inizialmente, informazioni interessanti soprattutto sul fenomeno del moto con anti-dune; per il moto con dune o con ripples sembra più conveniente lo schema di fluido viscoso.

Considerando la formazione delle diverse configurazioni di un fondo sabbioso come fenomeno di instabilità, Engelund (1966) ha ottenuto il diagramma riportato nella figura 20.17 che consente la determinazione del tipo di modellamento del fondo sulla base dei parametri Fr e U/v'_* , senza che vi figuri un'influenza esplicita della dimensione del materiale di fondo. Il diagramma di Engelund, verificato in varie situazioni sperimentali, è consigliabile in campo tecnico.

20.12. La resistenza al moto degli alvei con fondo mobile.

Il modellamento del fondo induce una resistenza al moto della corrente fluida che si ritiene in generale separabile da quella dovuta alla scabrezza superficiale e con essa sommabile, seguendo una posizione che risale ad Einstein (1950). Detta τ'_0 la tensione dovuta alla *resistenza superficiale* e τ''_0 la tensione dovuta alla *resistenza di forma*, si pone dunque

$$\tau_0 = \tau'_0 + \tau''_0 \quad [20.41]$$

dove τ_0 è la tensione totale media sul contorno. La stessa equazione, essendo $\tau_0 = \gamma j R$, si può scrivere

$$\tau_0 = \gamma j (R' + R'')$$

oppure

$$\tau_0 = \gamma R (j' + j'')$$

separando l'effetto della scabrezza da quello della forma del fondo, nel

primo caso attraverso i raggi idraulici R' ed R'' , nell'altro caso attraverso le due pendenze j' e j'' . In termini di velocità di attrito

$$v_* = \sqrt{\tau_0/\rho} = \sqrt{gRj}$$

si ha

$$v_*' = \sqrt{\tau_0'/\rho} = \sqrt{gR'j'} = \sqrt{gRj'}$$

$$v_*'' = \sqrt{\tau_0''/\rho} = \sqrt{gR''j''} = \sqrt{gRj''}$$

e quindi l'eq. [20.41] diventa

$$v_*^2 = v_*'^2 + v_*''^2. \quad [20.42]$$

In condizioni di moto uniforme, j coincide con la pendenza del fondo i , e l'equazione

$$U = C\sqrt{gRi},$$

si può scrivere

$$\frac{U}{v_*} = C;$$

quindi, introducendo la solita suddivisione sul coefficiente adimensionale di resistenza C , questa equazione è separabile nelle

$$\frac{U}{v_*'} = C'$$

$$\frac{U}{v_*''} = C''$$

con il legame, che discende dalla [20.42],

$$\frac{1}{C^2} = \frac{1}{C'^2} + \frac{1}{C''^2}. \quad [20.43]$$

Per la *determinazione di C'* si impiegano le formule già viste per il moto uniforme delle correnti a pelo libero in alveo fisso: in particolare la formula di Manning-Gauckler-Strickler oppure le formule logaritmiche. Se come valore del raggio idraulico si assume il raggio effettivo della sezione, dal calcolo di C' deriva evidentemente il valore della pendenza j' dovuta alla resistenza superficiale.

Per quanto riguarda i coefficienti di scabrezza, si è già ricordato il suggerimento di Müller di porre il parametro di Strickler $k'_s = 26/d_{90}^{\frac{1}{2}}$; l'esperienza sembra però giustificare una valutazione più bassa, che si richiama alla posizione originaria di Strickler per quanto riguarda il coefficiente numerico: $k'_s = 24/(md_{90})^{\frac{1}{2}}$ con $m = 1 \div 2$. Nel caso d'impiego delle formule logaritmiche, Einstein e Barbarossa (1952) consigliavano di assumere come parametro ε di scabrezza il diametro d_{65} del materiale, Englund (1966) ha proposto invece $\varepsilon = 2d_{65}$. Qualche autore fa riferimento al diametro d_{90} e, per fondi granulari fissi, esperienze recenti indicano il valore $\varepsilon = (1,5 \div 2)d_{90}$. I valori trovati da Kamphuis (1974) oscillano fra $1,5d_{90}$ per $Y/d_{90} \rightarrow 10$ e il massimo $2,5d_{90}$ per $Y/d_{90} \rightarrow 100 \div 200$. Come si vede, è abbastanza pronunciata la dispersione fra i valori proposti dai diversi autori o risultanti da differenti sperimentazioni. Probabilmente una giustificazione sta nel fatto che, a parità di diametro caratteristico, la disomogeneità del materiale ha peso considerevole sull'effetto di scabrezza del fondo essendo dominante su di esso l'influenza delle frazioni a dimensioni maggiori.

In definitiva, pur con le riserve imposte ancora dalla scarsità delle informazioni sperimentali, i valori consigliabili del parametro di scabrezza si possono ritenere compresi fra $2d_{50}$ e $2d_{90}$.

Sui fondi piani, costituiti con materiale in movimento, diverse misure sperimentali del coefficiente di resistenza, riportate da Lovera e Kennedy (1969) in un diagramma (C' , Re), hanno messo in evidenza un'influenza spiccata del numero di Reynolds sulle curve interpolari a scabrezza relativa $R/d_{50} = \text{cost}$, con un comportamento decisamente differente da quello osservato nelle correnti omogenee su fondi fissi. Becchi (1978) ha avanzato l'ipotesi che in effetti tale dipendenza da Re possa essere interpretata come una dipendenza della resistenza dall'entità del trasporto solido, ossia di $C' - 5,75 \log(R/d_{50})$ dal parametro Φ . Queste influenze, ancora non del tutto precisabili in modo quantitativo per la carenza di adeguate misure sperimentali, spiegano le incertezze, di cui si è parlato prima, sul valore da assegnare al parametro di scabrezza.

Difficile si presenta pure la *valutazione di C''* , coefficiente della resistenza dovuta al modellamento del fondo. In generale, l'effetto di incremento della resistenza risulta sensibile quando la configurazione del fondo è a ripples, e si accentua se essa passa a dune. Nella fase di transizione il comportamento del fondo quasi-piano è praticamente quello di un contorno puramente scabro, cioè con $C = C'$; infine nella fase delle antidune il comportamento è incerto, ma sembra evidente un progressivo aumento della resistenza.

Einstein (1950) ed Einstein e Barbarossa (1952) hanno suggerito di

valutare l'effetto della resistenza di forma attraverso una dipendenza funzionale del coefficiente di resistenza dal parametro

$$\psi_{35} = \frac{e_s - e}{e} \cdot \frac{d_{35}}{R'j}$$

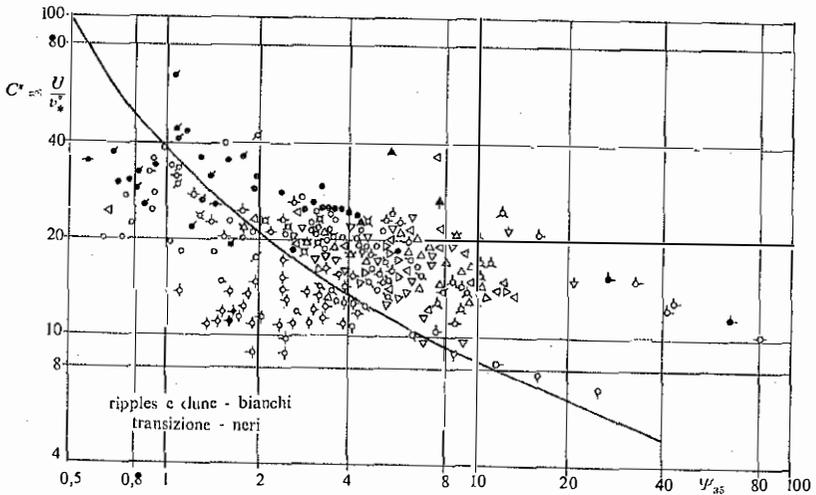


Fig. 20.18. - Curva proposta da Einstein e Barbarossa (1952) per valutare l'effetto della resistenza di forma dell'alveo.

ottenuta graficamente e rappresentata dalla curva a tratto intero nel diagramma $C'' = U/v_*'' = f(\psi_{35})$ della figura 20.18. Nella stessa figura sono stati riportati anche valori sperimentali rilevati successivamente alla proposta di Einstein e si nota come la determinazione di C'' come funzione del solo parametro ψ_{35} risulti insufficiente. Per migliorare l'interpretazione dei risultati sperimentali, Shen (1962) ha proposto di introdurre accanto a ψ_{35} anche il parametro $Re_s = w_s d_s / \nu$. La relazione

$$C'' = f(\psi_{35}, Re_s)$$

è stata proposta da Shen in forma grafica attraverso il confronto con numerosi risultati su corsi d'acqua naturali.

Diverse proposte sono state avanzate per rappresentare la *resistenza globale*, ossia il relativo coefficiente C , con relazioni logaritmiche analoghe a quelle utilizzate per il calcolo di C' negli alvei a fondo fisso.

Richardson e al. (1967) hanno fornito le relazioni seguenti, per alvei molto larghi ($R \simeq Y$) e fondo piano:

— con trasporto solido scarso o nullo

$$C = 5,9 \log \frac{Y}{d_{85}} + 5,44 ;$$

— con trasporto solido apprezzabile

$$C = 7,4 \log \frac{Y}{d_{85}} .$$

Per correnti lente, Vanoni e al. (1967) hanno proposto, sulla base di esperienze di laboratorio, la seguente formula

$$C = 9,9 \log \frac{R}{e \Delta h_m} - 6,5$$

qui riportata in termini di C in luogo dell'originario parametro λ ; in questa equazione Δh_m è l'altezza media delle ondulazioni del fondo di lunghezza L ed e è il parametro di esposizione dato dal rapporto fra la proiezione orizzontale di tutto il fondo ondulato e la proiezione della sua parte riparata rispetto alla corrente. Se e non è valutabile, è stata proposta l'equazione

$$C = 9,3 \log \frac{LR}{(\Delta h_m)^2} - 6,5$$

dove l'esposizione è sostituita dall'altezza media relativa $\Delta h_m/L$ delle dune.

Altri metodi per il calcolo degli effetti della resistenza totale si basano su formule del tipo Manning-Gauckler-Strickler. Così, Liu e Hwang (1959) hanno proposto l'impiego dell'equazione

$$U = C_a R^x i_f^y \quad [20.44]$$

nella quale C_a , x ed y sono coefficienti forniti graficamente in funzione del diametro medio del materiale e della configurazione del fondo.

Nello stesso indirizzo un'espressione semplice dell'equazione del moto in presenza di trasporto è stata proposta da Garde e Ranga Raju (1966), sulla base di un confronto con diversi risultati sperimentali; la forma

suggerita dagli autori è

$$\frac{U}{\sqrt{gd_s \frac{\rho_s - \rho}{\rho}}} = K_s \left(\frac{R}{d_s} \right)^3 \left(\frac{i_r \rho}{\rho_s - \rho} \right)^{\frac{1}{2}}$$

assumendo i valori

$$K_s = 3,2 \text{ con fondo a ripples e a dune}$$

$$K_s = 6,0 \text{ nello stato di transizione (quasi piano), e nel moto con antidune.}$$

L'equazione precedente si può scrivere anche nella forma classica

$$U = C \sqrt{gRi_r}$$

con

$$C = K_s \left(\frac{R}{d_s} \right)^{\frac{5}{2}} \quad [20.45]$$

e si nota allora che, se si assume come diametro d_s del miscuglio il diametro medio d_{50} , l'espressione del coefficiente di resistenza C con $K_s = 6$ è accettabile anche per fondo piano fisso. Se si pone $d_s = d_{50}$ occorre invece aumentare il valore di K_s fino a $K_s \cong 7 \div 8$, secondo la maggiore o minore disuniformità della granulometria del miscuglio di fondo.

Adottando un'impostazione diversa, Engelund (1966, 1967) ha consigliato il procedimento di calcolo della resistenza totale basato sulla seguente equazione

$$\tau_0 = \tau'_0 + \gamma \frac{U^2 Y}{2g} \frac{Y}{L} \left(\frac{\Delta h}{Y} \right)^3, \quad [20.46]$$

nella quale la resistenza di forma del fondo è espressa in maniera analoga alle resistenze localizzate, tenendo conto dell'altezza Δh delle ondulazioni e della loro lunghezza L rispetto alla profondità Y della corrente.

Posto

$$\tau_* = \frac{\tau_0}{(\gamma_s - \gamma) d_s} = \frac{\rho R j}{(\rho_s - \rho) d_s}$$

e

$$\tau'_* = \frac{\tau'_0}{(\gamma_s - \gamma) d_s} = \frac{\rho R' j}{(\rho_s - \rho) d_s}$$

segue

$$\tau_* = \tau'_* + \frac{1}{2} Fr^2 \frac{\rho}{\rho_s - \rho} \cdot \frac{\Delta h^2}{L d_s}$$

La dipendenza funzionale della tensione totale adimensionalizzata τ_* da quella τ'_* dovuta alla scabrezza superficiale è stata ottenuta e rappresentata graficamente da Englund e Hansen (1967) sulla base dei risul-

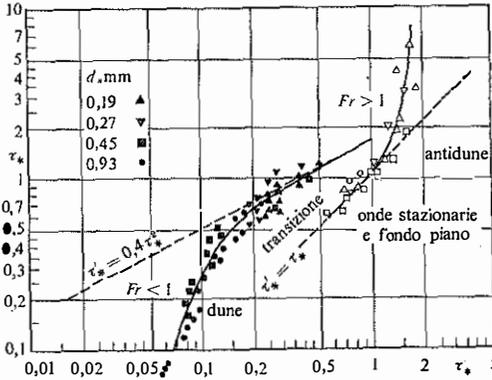


Fig. 20.19. - Relazione fra la tensione totale adimensionalizzata τ_* e la tensione τ'_* dovuta alla scabrezza superficiale, secondo Englund (1966-67).

tati sperimentali di Guy e al. (1966). Il grafico è riportato nella figura 20.19 e mette in evidenza gli effetti delle dune e delle antidune che sono rappresentati dagli scostamenti delle curve a tratto intero dalla retta tratteggiata che corrisponde al fondo *piano*

$$\tau'_* = \tau_*$$

Nel campo della formazione delle dune, la curva si può approssimare con l'equazione

$$\tau'_* = 0,06 + 0,4\tau_*^2 \tag{20.47}$$

valida per $0,06 < \tau'_* < 0,60$. Per il calcolo diretto di τ'_* si deve ricorrere alle formule consigliate per fondi piani mobili; Englund e Hansen (1967) hanno proposto l'impiego dell'equazione

$$\frac{U}{v_*'} = 9,45 \left(\frac{R'}{2,5d_s} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{20.48}$$

che, unita alla relazione che deriva dalle posizioni precedenti

$$\frac{R'}{R} = \frac{\tau'_*}{\tau_*} = \left(\frac{v_*'}{v_*} \right)^2,$$

consente di correlare τ_* , e quindi la perdita di carico totale j per unità di lunghezza, alla velocità media U del moto nei casi in cui è nota la funzione $\tau_* = f(\tau_*)$ (v. fig. 20.19).

Un confronto fra i risultati dei metodi di Einstein e di Engelund, riportati entrambi a relazioni del tipo $U/\sqrt{gd_s} = f(j, Y/d_s)$, è stato presentato da Cholley e Cunge (1979), insieme ad un diagramma utile per il calcolo rapido delle perdite di carico totale nel moto con trasporto solido.

Si ricorda infine il metodo suggerito da Raudkivi (1967) basato sulla considerazione che la resistenza, nel caso di fondo mobile, dipenda dalla eccedenza della tensione effettiva sul fondo rispetto al valore critico all'inizio del movimento. Il risultato è rappresentato graficamente da una curva sperimentale che esprime la relazione

$$\frac{U}{\sqrt{v_*^2 - v_{*cr}^2}} = f(\tau_*) \quad [20.49]$$

valida finché la rata del trasporto solido resta modesta. La curva di Raudkivi è riportata nella figura 20.20.

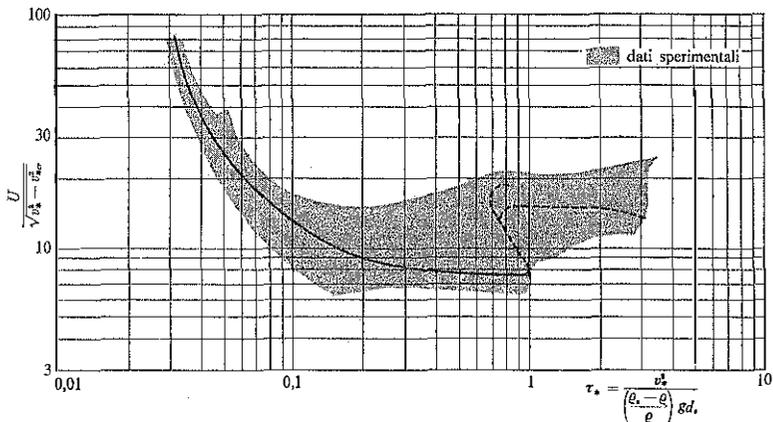


Fig. 20.20. - La curva di Raudkivi (1967) per il calcolo della resistenza al moto in alvei con fondo mobile.

Un confronto dei metodi di calcolo di Einstein, Engelund e Raudkivi con numerosi risultati sperimentali, di laboratorio e di campagna, è stato eseguito da White e al. (1979) e prova che il metodo di Engelund, che nel complesso mostra il più alto grado di affidabilità sperimentale, presenta scarti contenuti entro un fattore 2 nell'83% dei casi e compresi fra 0,80 ed 1,25 nel 38% dei casi.

20.13. Erosioni localizzate attorno alle pile dei ponti.

Variazioni rapide di direzione e di intensità nella distribuzione della velocità di correnti a pelo libero e la conseguente formazione di vortici possono provocare erosioni localizzate, specialmente se l'alveo è costituito da materiali incoerenti. Il fenomeno si presenta nei restringimenti, nelle curve, nei salti di fondo e attorno ad ostacoli posti in alveo, quali le pile dei ponti. In quest'ultimo caso il problema della determinazione delle caratteristiche dello scavo, ed in particolare della profondità massima di erosione, per i suoi importanti riflessi tecnici, è stato affrontato

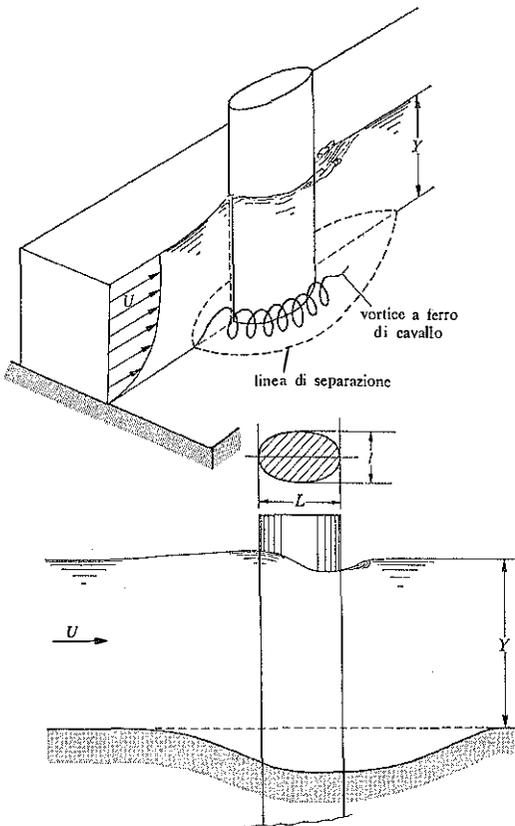


Fig. 20.21. - L'erosione attorno ad una pila di ponte.

con numerose ricerche sperimentali, soprattutto su modello. Si ritiene utile, per gli scopi applicativi, riportare le conclusioni di un esame critico condotto da Breusers, Nicollet e Shen nel 1977 sulle ricerche svolte sull'argomento.

La figura 20.21 mostra schematicamente l'aspetto del fenomeno di erosione attorno ad una pila di ponte; il processo è indotto da un grosso vortice a ferro di cavallo e interessa planimetricamente tutta l'area circostante la pila fino alla linea di separazione del vortice. Per un'indagine sulle caratteristiche del moto, sulla distribuzione delle velocità e delle tensioni tangenziali si vedano gli studi di Melville (1975) e di Melville e Raudkivi (1977). Le grandezze che hanno influenza importante sul processo sono:

- la densità ρ del fluido e la densità ρ_s del materiale di fondo;
- la velocità media U e la profondità Y della corrente;
- la dimensione d_s del materiale e la larghezza l della pila;
- l'angolo di attacco α e il rapporto L/l fra lunghezza e larghezza della pila (v. fig. 20.22);
- la velocità critica di trascinamento U_{cs} , intesa come la velocità media della corrente alla quale inizia il movimento del materiale al fondo.

Per quanto riguarda quest'ultima grandezza, è consigliabile assumere, secondo Hancu (1971):

$$U_{cs} = (1,0 \div 1,2) \sqrt{g \frac{\rho_s - \rho}{\rho} d_s \left(\frac{Y}{d_s}\right)^{0,2}} \quad [20.50]$$

Una valutazione prossima alla precedente si ottiene partendo dalla tensione critica di trascinamento

$$\frac{\tau_{cr}}{(\gamma_s - \gamma) d_s} = \tau_{*cr}$$

tenendo presente che

$$\frac{\tau_{cr}}{\rho} = v_{*cr}^2 = \frac{U_{cs}^2}{C^2}$$

ed assumendo per il coefficiente di resistenza C l'espressione [20.45] vista nel paragrafo precedente, con $R = Y$,

$$C = K_s \left(\frac{Y}{d_s}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ne deriva

$$U_{cs} = K_s \sqrt{\tau_{*cr}} \sqrt{g \frac{\rho_s - \rho}{\rho} d_s \left(\frac{Y}{d_s}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

e con $K_s = 6,0$ e $\tau_{*cr} = 0,047$

$$U_{cs} = 1,30 \sqrt{g \frac{\rho_s - \rho}{\rho} d_s} \left(\frac{Y}{d_s} \right)^{\frac{1}{2}} \quad [20.51]$$

La stessa equazione si può scrivere, per $(\rho_s - \rho)/\rho = 1,65$,

$$\frac{U_{cs}}{U} = \frac{1,70}{Fr} \left(\frac{d_s}{Y} \right)^{\frac{1}{2}} \quad [20.52]$$

con l'introduzione del numero di Froude Fr della corrente. Per quanto riguarda la scelta di d_s , nel caso di miscugli, si pone generalmente $d_s = d_{5\phi}$.

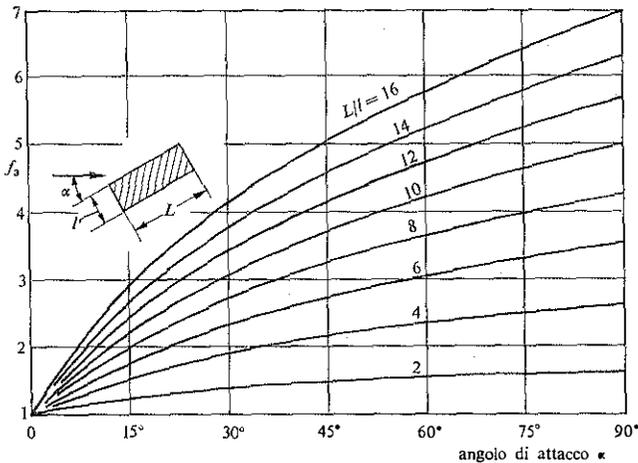


Fig. 20.22. - Fattore che esprime l'influenza sull'erosione dell'angolo di attacco α e del rapporto L/l .

Con le grandezze premesse, la profondità ΔY dello scavo può essere rappresentata con una funzione del tipo

$$\frac{\Delta Y}{l} = f \left(\frac{U}{U_{cs}}, \frac{Y}{l}, \text{forma}, \alpha \right)$$

e per le applicazioni tecniche è stata suggerita la relazione

$$\frac{\Delta Y}{l} = f_1 \left(\frac{U}{U_{cs}} \right) \left[2,0 \tanh \left(\frac{Y}{l} \right) \right] \cdot f_2(\text{forma}) \cdot f_3 \left(\alpha, \frac{L}{l} \right) \quad [20.53]$$

dove

$$\begin{aligned}
 f_1\left(\frac{U}{U_{cs}}\right) &= 0 && \text{per } \frac{U}{U_{cs}} \leq 0,5 \\
 &= \left(2\frac{U}{U_{cs}} - 1\right) && \text{per } 0,5 < \frac{U}{U_{cs}} < 1,0 \\
 &= 1 && \text{per } \frac{U}{U_{cs}} \geq 1,0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2(\text{forma}) &= 1,0 && \text{per pile circolari o con fronti arrotondate} \\
 &= 0,75 && \text{per pile sagomate in modo da accompagnare la corrente}
 \end{aligned}$$

$$= 1,30 \quad \text{per pile rettangolari}$$

$$f_3(\alpha, L/l) \quad \text{ha i valori rappresentati dalle curve della figura 20.22.}$$

ESEMPI

Esempio 20.1

Calcolo dei valori limiti di profondità, velocità e pendenza consentiti ad una corrente uniforme per defluire in un canale rettangolare larghissimo con fondo in sabbia incoerente omogenea, di diametro $d_s = 2$ mm e densità $\rho_s = 2700$ kg m⁻³, senza che si verifichino movimenti del fondo con una portata d'acqua limpida $Q' = 0,80$ m³ s⁻¹ per unità di larghezza del canale.

Si presuppone, salvo verifica, che Re_* abbia valori abbastanza alti da poter ritenere costante $\tau_{*cr} = \tau_{cr}/(\gamma_s - \gamma)d_s$. Assumendo per la costante il valore 0,06 consigliato da Shields, si deduce che la tensione al fondo τ_0 dev'essere

$$\tau_0 < 0,06g(\rho_s - \rho)d_s = 2,00 \text{ N m}^{-2}$$

onde evitare l'inizio del movimento al fondo. Tale limite appare prudenziale rispetto ai valori delle tensioni ammissibili riportati nella tabella 17.5 del paragrafo 17.8; è presumibile che ciò vada imputato alla differente resistenza che presenta l'inizio del trasporto di materiale incoerente sul fondo rispetto all'instaurarsi di un processo erosivo del fondo medesimo, sebbene costituito con lo stesso materiale.

Dalle equazioni del moto uniforme in canale larghissimo

$$\begin{aligned}
 \tau_0 &= \gamma Y i_f \\
 Q'^2 &= C^2 Y^3 g i_f
 \end{aligned}$$

eliminando i_f , si ottiene

$$CY = \frac{Q'}{\sqrt{\tau_0/\rho}}$$

e quindi, in base alla limitazione trovata per τ_0 ,

$$CY > \frac{0,80}{\sqrt{2,00/1000}} = 17,89 \text{ m.}$$

Se si valuta il parametro di scabrezza di Strickler con la

$$k_s = \frac{24}{(2d_s)^{1/6}} = 60,24$$

segue

$$CY = \frac{60,24}{\sqrt{g}} Y^{2/3} > 17,89 \text{ m}$$

da cui

$$Y > 0,94 \text{ m.}$$

Se invece si calcola il coefficiente di attrito C con la formula logaritmica

$$C = 5,75 \log \left(\frac{13,3fY}{\varepsilon} \right)$$

con $f = 0,80$ ed $\varepsilon = 2d_s = 0,004 \text{ m}$, si ottengono i risultati

$$Y = 0,91 \text{ m} \quad C = 19,46 \quad CY = 17,71$$

$$Y = 0,92 \text{ m} \quad C = 19,485 \quad CY = 17,92$$

da cui segue la limitazione

$$Y > 0,91 \text{ m}$$

che concorda con il risultato precedente e rende accettabile il valore medio 0,93 m.

Corrispondentemente devono essere verificati i limiti

$$U = \frac{Q'}{Y} < \frac{0,80}{0,93} = 0,86 \text{ m s}^{-1}$$

$$i_f = \frac{\tau_0}{\gamma Y} < \frac{1,50}{1000 \times 9,81 \times 0,93} = 1,64 \cdot 10^{-4}$$

per la velocità media e per la pendenza del fondo nelle condizioni di moto uniforme.

Esempio 20.2

Calcolo della portata solida al fondo in un corso d'acqua che ha cadente effettiva $j = 8,2 \cdot 10^{-4}$ e profondità media $Y = 3,50 \text{ m}$. L'alveo, sensibilmente cilindrico,

ha sezione rettangolare larga $b = 200$ m. Il fondo è costituito da materiale incoerente che ha densità $\rho_s = 2650 \text{ kg m}^{-3}$ diametro medio $d_{50} = 5 \cdot 10^{-3}$ m e $d_{35} = 2 \cdot 10^{-3}$ m.

Con i dati del problema si ricavano le grandezze

$$R = \frac{200 \times 3,50}{200 + 7,00} = 3,38 \text{ m}$$

$$\tau_0 = \gamma_s j = 9,81 \times 1000 \cdot 3,38 \times 8,2 \cdot 10^{-4} = 27,19 \text{ N/m}^2$$

$$v_* = \sqrt{\tau_0 / \rho} = \sqrt{27,19 / 1000} = 0,165 \text{ m/s}.$$

Si riportano qui di seguito diversi procedimenti per il calcolo della portata solida.

a) Formula di Kalinske

$$\frac{q_s}{v_* d_s} = f\left(\frac{\tau_0}{\tau_{cr}}\right).$$

Il valore di τ_{cr} , assumendo $d_s = d_{50}$ ed essendo

$$Re_* = \frac{v_* d_s}{\nu} = \frac{0,165 \times 0,005}{10^{-6}} = 825,$$

si ricava dalla limitazione di Zeller

$$\tau_{*cr} = \frac{\tau_{cr}}{(\gamma_s - \gamma) d_s} = 0,047;$$

per cui

$$\tau_{cr} = 0,047 \times 9,81 \times 1650 \times 0,005 = 3,804 \text{ N/m}^2.$$

Sulla curva di Kalinske della fig. 20.3, con

$$\frac{\tau_0}{\tau_{cr}} = \frac{27,19}{3,804} = 7,15$$

si legge

$$\frac{q_s}{v_* d_s} = 1,0.$$

Ne deriva la portata solida al fondo volumetrica, per unità di larghezza,

$$q_s = 1,0 \times 0,165 \times 0,005 = 0,000825 \text{ m}^3/\text{s} \cdot \text{m}$$

e la portata massica totale

$$G_s = 0,000825 \times 2650 \times 200 = 437 \text{ kg/s}.$$

b) Formula di Meyer-Peter e Müller

$$\frac{Rj'}{d_s} - 0,047 \frac{\rho_s - \rho}{\rho} = 0,25 \frac{g_s^{2/3}}{d_s \sqrt{g \rho_s}} \left(\frac{\rho_s - \rho}{\rho} \right)^{2/3}.$$

Si assume che j' sia praticamente coincidente con j , ritenendo il fondo piano e la scabrezza essenzialmente dovuta al materiale mobile. Allora, ponendo ancora $d_s = d_{s0}$, segue

$$\frac{3,38 \times 8,2 \cdot 10^{-4}}{0,005} - 0,047 \times 1,65 = 0,25 \frac{g_s^{2/3} 1,65^{2/3}}{0,005^3 / 9,81 \times 2650^2}$$

da cui

$$0,55432 - 0,07755 = 0,17032 g_s^{2/3}$$

ossia

$$g_s = 4,683 \text{ kg/s} \cdot \text{m}$$

quale portata massica al fondo per unità di larghezza, e quindi

$$G_s = 4,685 \times 200 = 937 \text{ kg/s}$$

in totale.

c) Formula di Meyer-Peter con i parametri di Einstein

$$\Phi = q_s \left(\frac{q_s - \rho}{\rho} g d_s^3 \right)^{-1/2} = q_s (1,65 \times 9,81 \times 0,005^3)^{-1/2} = 703 q_s;$$

$$\Psi = \frac{q_s - \rho}{\rho} \frac{g d_s}{v_*^2} = 1,65 \cdot \frac{9,81 \times 0,005}{0,165^2} = 2,973.$$

Dall'eq. [20.18] si ricava

$$\Phi = 8 \left(\frac{1}{\Psi} - 0,047 \right)^{3/2} = 8(0,33636 - 0,047)^{3/2} = 1,245$$

e quindi dalla prima relazione segue

$$q_s = \frac{\Phi}{703} = \frac{1,245}{703} = 0,00177 \text{ m}^3/\text{s} \cdot \text{m}$$

e in totale

$$G_s = 0,00177 \times 2650 \times 200 = 939 \text{ kg/s},$$

in ottima concordanza con il risultato precedente.

d) Formula di Einstein.

In corrispondenza a $\Psi = 2,973$ la curva di Einstein delle fig. 20.5 fornisce il valore

$$\Phi = 1,85$$

per cui dalla

$$\Phi = q_s \left(\frac{q_s - \rho}{\rho} g d_s^3 \right)^{-1/2} = 703 q_s,$$

deriva

$$q_s = 1,85/703 = 0,00263 \text{ m}^3/\text{s} \cdot \text{m}$$

e quindi, quale portata massica totale al fondo,

$$G_s = 0,00263 \times 2650 \times 200 = 1394 \text{ kg/s.}$$

Assumendo invece per d_s il valore consigliato $d_{35} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, si ottiene

$$\Psi_{35} = 1,65 \frac{9,81 \times 0,002}{0,165^2} = 1,189$$

cui corrisponde sulla curva di Einstein: $\Phi_{35} = 6,0$, ed essendo

$$\Phi_{35} = q_s (1,65 \times 9,81 \times 0,002^3)^{-1/2} = 2779 q_s,$$

segue

$$q_s = 6,0 / 2779 = 0,00216 \text{ m}^3/\text{s} \cdot \text{m}$$

$$G_s = 0,00216 \times 2650 \times 200 = 1145 \text{ kg/s.}$$

e) Formula di Pezzoli

$$\frac{q_s}{v_* d_s} = 1,5 \left(\frac{\tau_{cr}}{\tau_0} \right)^{1/6} \left(\sqrt{\frac{\tau_0}{\tau_{cr}}} - 1 \right)^{6/3}.$$

Assumendo $d_s = d_{30}$ ed il valore $\tau_{*cr} = 0,0047$, si ottiene, come in a),

$$\tau_{cr} = 3,804 \text{ N/m}^2;$$

dalla formula soprascritta deriva

$$q_s = 1,5 \times 0,165 \times 0,005 \left(\frac{3,804}{27,19} \right)^{1/6} \left(\frac{27,19}{3,804} - 1 \right)^{6/3} = 0,00210 \text{ m}^3/\text{s} \cdot \text{m}$$

e quindi

$$G_s = 0,00210 \times 2650 \times 200 = 1113 \text{ kg/s.}$$

f) Formula di Yalin

$$\Phi = 0,635 \frac{\Psi_{cr}}{\sqrt{\Psi}} \left(\frac{1}{\Psi} - \frac{1}{\Psi_{cr}} \right).$$

Assumiamo, in accordo con l'autore,

$$\frac{1}{\Psi_{cr}} = 0,05$$

e ricordiamo che, con $d_s = d_{50}$, risulta (v. caso c))

$$\Phi = 703 q_s$$

$$\Psi = 2,973.$$

Sostituendo quest'ultimo valore nella formula di Yalin si ottiene

$$\Phi = \frac{0,635}{0,05 \sqrt{2,973}} \left(\frac{1}{2,973} - 0,05 \right) = 2,109$$

e quindi

$$q_s = 2,109/703 = 0,0030 \text{ m}^3/\text{s}\cdot\text{m}$$

$$G_s = 0,0030 \times 2650 \times 200 = 1590 \text{ kg/s}$$

Assumendo invece per $1/\overline{\Psi}_{cr}$ il valore di Shields

$$\frac{1}{\overline{\Psi}_{cr}} = 0,06$$

si ottiene

$$\Phi = 1,696$$

e quindi

$$q_s = 0,0024 \text{ m}^3/\text{s}\cdot\text{m} \quad \text{e} \quad G_s = 1272 \text{ kg/s}$$

I risultati ottenuti con le diverse formule sono riassunti nel quadro seguente

Formula di	d_s	τ_{*cr}	q_s ($\text{m}^3/\text{s}\cdot\text{m}$)	G_s (kg/s)
Kalinske	d_{50}	0,047	$0,825 \cdot 10^{-3}$	437
Meyer-Peter	d_{50}	0,047	1,77 »	938
Einstein	d_{50} d_{35}	— —	2,63 » 2,16 »	1394 1145
Pezzoli	d_{50}	0,047	2,10 »	1113
Yalin	d_{50}	0,05 0,06	3,00 » 2,40 »	1590 1272

Si vede che la formula di Kalinske fornisce risultati decisamente inferiori a quelli delle altre. In parte ciò è dovuto al fatto che, come si è detto, nel campo delle alte portate solide l'adeguamento di tale formula alle esperienze non è soddisfacente.

Esempio 20.3

Calcolo della velocità media della corrente idrica che defluisce, in condizioni di moto permanente con pendenza effettiva $j = 0,00105$ e con la profondità di 1,20 m, in un alveo alluvionale molto largo con fondo mobile costituito da sabbie di densità $\rho_s = 2700 \text{ kg m}^{-3}$ caratterizzate da $d_{90} = 4 \text{ mm}$, $d_{30} = 1,2 \text{ mm}$ e $d_{50} = 2,0 \text{ mm}$.

Assumendo

$$R \cong Y = 1,20 \text{ m} \quad \text{e} \quad d_s = d_{50} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

risulta, con i dati assegnati,

$$\begin{aligned}\tau_0 &= \gamma R j = 9,81 \times 1000 \times 1,20 \times 0,00105 = 12,36 \text{ N/m}^2 \\ v_* &= \sqrt{\tau_0 / \rho} = \sqrt{g R j} = 0,1111 \text{ m/s} \\ \tau_* &= \frac{\rho}{\rho_s - \rho} \frac{v_*^2}{g d_s} = \frac{1}{1,7} \frac{0,1111^2}{9,81 \times 0,002} = 0,370.\end{aligned}$$

Si esegue il calcolo della velocità della corrente con diversi procedimenti (cfr. paragrafo 20.12).

a) Metodo di Einstein e Barbarossa.

Posto tentativamente: $R' = 0,45 \text{ m}$ ed $R'' = 0,75 \text{ m}$, segue

$$V_{35} = \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \cdot \frac{d_{35}}{R' j} = 1,7 \frac{0,0012}{0,45 \times 0,00105} = 4,32.$$

Sulla curva del diagramma di fig. 20.18 si legge in corrispondenza a $V_{35} = 4,32$, il valore del coefficiente di resistenza dovuto alla « forma » del fondo

$$C'' = 12,8$$

da cui essendo

$$v_*'' = \sqrt{g R'' j} = \sqrt{9,81 \times 0,75 \times 0,00105} = 0,0879 \text{ m/s}$$

segue

$$U = C'' v_*'' = 12,8 \times 0,0879 = 1,125 \text{ m/s}.$$

Inoltre, dalla

$$v_*^2 = v_*'^2 + v_*''^2$$

si ottiene

$$v_*' = \sqrt{0,1111^2 - 0,0879^2} = 0,0679 \text{ m/s}$$

$$C' = \frac{U}{v_*'} = \frac{1,125}{0,0679} = 16,6.$$

A questo valore del coefficiente di resistenza «granulare superficiale» si perviene con la formula logaritmica

$$C' = 5,75 \log \left(\frac{13,3 f R'}{\varepsilon} \right) \quad (f = 0,80)$$

oppure con la formula di Strickler

$$C' = \frac{\gamma'}{\sqrt{g}} = \frac{1}{\sqrt{g}} 24 \left(\frac{R'}{m d_{50}} \right)^{1/6}$$

assumendo, con $R' = 0,45 \text{ m}$:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= 0,0061 \text{ mm} = 3,1 d_{60} = 1,5 d_{90} \text{ nel primo caso} \\ m d_{90} &= 0,0043 \text{ mm}, \quad \text{cioè } m = 1,1 \text{ nel secondo caso.}\end{aligned}$$

Entrambe le valutazioni appaiono appropriate e quindi tale anche la scelta del raggio idraulico R' .

Il calcolo è stato ripetuto con altri valori di R' intorno a 0,45 m ed i risultati sono riassunti nel quadro che segue:

R' (m)	R'' (m)	Y'_{35}	C''	v''_* (m/s)	U (m/s)	$v^{*'}_*$ (m/s)	C'	ε/d_{90}	m
0,40	0,80	4,86	12,0	0,0908	1,090	0,0640	17,0	1,3	0,9
0,45	0,75	4,32	12,8	0,0879	1,125	0,0679	16,6	1,5	1,1
0,50	0,70	3,88	13,5	0,0849	1,146	0,0716	16,0	2,0	1,35

Come si vede, si tratta di risultati ancora accettabili, per cui si ritiene giustificato assumere medianamente i valori

$$R' = 0,45 \text{ m}, \quad v'_* = 0,068 \text{ m/s},$$

e

$$U = 1,13 \text{ m/s}.$$

b) Metodo di Garde e Ranga Raju

$$\frac{U}{\sqrt{gd_s \frac{\varrho_s - \varrho}{\varrho}}} = K_s \left(\frac{R'}{d_s} \right)^{2/3} \left(\frac{i_f \varrho}{\varrho_s - \varrho} \right)^{1/2}.$$

Assumendo $K_s = 3,2$, valore corrispondente al fondo con dune (v. verifica alla fine dell'esempio) si ottengono i risultati:

$$\text{con } d_s = d_{s0} = 0,0020 \text{ m} \quad U = 1,033 \text{ m/s};$$

$$\text{con } d_s = d_{s5} = 0,0012 \text{ m} \quad U = 1,125 \text{ m/s}.$$

c) Metodo di Engelund e Hansen.

Con il valore calcolato inizialmente

$$\tau_* = 0,370,$$

entrando nel diagramma della fig. 20.19, si osserva che la configurazione prevedibile del fondo è a dune e che vi corrisponde il valore τ'_* individuato dalla curva e dato anche dalla [20.47]

$$\tau'_* = 0,06 + 0,4\tau_*^2 = 0,115;$$

di qui deriva

$$\frac{R'}{R} = \left(\frac{v'_*}{v_*} \right)^3 = \frac{\tau'_*}{\tau_*} = 0,31$$

ossia

$$R' = 0,37 \text{ m}, \quad v'_* = 0,062 \text{ m/s}.$$

Con l'equazione di Engelund e Hansen

$$\frac{U}{v_*'} = 9,45 \left(\frac{R'}{2,5d_s} \right)^{1/8}$$

si ricava infine, con $d_s = d_{60}$,

$$U = 9,45 \times 0,062 \left(\frac{0,37}{2,5 \times 0,002} \right)^{1/8} = 1,003 \text{ m/s.}$$

I risultati sono riassunti qui di seguito e denotano una buona concordanza generale, che diventa ottima a parità di scelta del diametro d_s :

Einstein e Barbarossa	$d_s = d_{36}$	$U = 1,13 \text{ m/s}$
Garde e Ranga Raju	$d_s = d_{36}$	$U = 1,125 \text{ m/s}$
	$d_s = d_{50}$	$U = 1,033 \text{ m/s}$
Engelund e Hansen	$d_s = d_{60}$	$U = 1,003 \text{ m/s.}$

Si noti che, secondo la curva di Raudkivi riportata nella fig. 20.20, essendo

$$\frac{\rho}{\rho_s - \rho} \frac{v_*'^2}{gd_s} = \tau_* = 0,370$$

risulta

$$\frac{U}{\sqrt{v_*'^2 - (v_*')_{cr}^2}} \cong 8$$

e quindi, con $(v_*')_{cr} = 0,0233 \text{ m/s}$ (corrispondente a $\tau_{*cr} = 0,047$) e $v_*' = 0,1111 \text{ m/s}$, segue

$$U = 0,87 \text{ m/s}$$

risultato chiaramente in difetto rispetto ai precedenti. Ma la concordanza diventa buona, $U = 1,086 \text{ m/s}$, ponendo

$$\frac{U}{\sqrt{v_*'^2 - (v_*')_{cl}^2}} = 10$$

valore che, pur non cadendo sulla curva di Raudkivi, si colloca bene all'interno della fascia dei dati sperimentali utilizzati dall'autore (cfr. fig. 20.20).

Per quanto riguarda la morfologia del fondo, si possono eseguire alcune verifiche assumendo come diametro d_s il diametro d_{60} , come velocità media corrispondente $U = 1,02 \text{ m/s}$ e come valore della velocità di attrito, dovuta alla sola scabrezza granulare, quella calcolata con il metodo di Engelund

$$v_*' = 0,062 \text{ m/s.}$$

Secondo Simons e al., con una velocità di caduta libera dei granuli $w_s = 0,30 \text{ m/s}$, risulta (fig. 20.10)

$$\left. \begin{aligned} Re_* &= \frac{v_*' d_s}{\nu} = \frac{0,062 \times 0,002}{10^{-6}} = 124 \\ Fr_* &= v_*' / w_s = 0,062 / 0,30 = 0,207 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{transizione da fondo con dune a} \\ \text{fondo piano o con onde stazionarie} \end{array}$$

Secondo Bogárdi (fig. 20.11)

$$\left. \begin{aligned} d_s &= 0,2 \text{ cm} \\ gd_s/v_*'^2 &= 5,10 \end{aligned} \right\} \text{tra fondo con dune e regione di transizione}$$

Secondo Cooper, Peterson e Blench (fig. 20.12)

$$\left. \begin{aligned} Y/d_{50} &= 600 \\ Fr^2 &= \frac{U^2}{gY} = \frac{1,02^2}{9,81 \times 1,20} = 0,09 \end{aligned} \right\} \text{tra ripples e dune}$$

Secondo Engelund (fig. 20.17)

$$\left. \begin{aligned} Fr &= 0,30 \\ \frac{U}{v_*'} &= \frac{1,02}{0,062} = 16,5 \end{aligned} \right\} \text{fondo con dune}$$

Concludendo, si può dire che la configurazione prevedibile del fondo, nelle condizioni esaminate è a « dune »; ciò conferma l'indicazione già ricavata impiegando il diagramma di fig. 20.19 di Engelund e Hansen. L'osservazione di quel grafico esclude, inoltre, la possibilità di un passaggio a fondo piano con il valore assegnato $\tau_* = 0,370$.

Riferimenti citati

- ANDERSON, A. G., *Third Midwest Conf. Fluid Mechanics*, Univ. of Minnesota, Minneapolis, 1953.
- BAGNOLD, R. A., *Proc. Roy. Soc., Phyl. Trans.*, Sez. A, Vol. 249, n. 964, London, 1956.
- *U.S. Geol. Survey*, Prof. Paper 422-J, 1966.
- BECCHI, I., *L'Energia Elettrica*, Vol. LV, nn. 11, 12, 1978.
- BOGARDI, J. L., *Proc. A.S.C.E.*, Vol. 84, n. HY6, 1958.
- *VI Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche*, Padova, 1959.
- *Proc. A.S.C.E.*, Vol. 91, n. HY1, 1965.
- *Sediment Transportation in Alluvial Streams*, Third Course on Hydr. Meth. for Devel. Water Res. Management Budapest, 1970, UNESCO, Man. n. 13.
- BREUSERS, H. N. C., NICOLET, G. e SHEN, H. W., *J. of I.A.H.R.*, Vol. 15, n. 3, 1977.
- CHIEN, N., *Proc. A.S.C.E.*, Vol. 80, 1954.
- CHOLLET, J. P. e CUNGE, A., *J. of I.A.H.R.*, Vol. 17, n. 1, 1979.
- COLBY, B. R. e HEMBREE, C. H., *U.S. Geol. Survey*, Water Supply Paper 1357, 1955.
- COLBY, B. R., *Proc. A.S.C.E.*, Vol. 90, n. HY2, 1964.

- COOPER, R. H., PETERSON, A. W. e BLENCH, T., *Proc. A.S.C.E.*, Vol. 98, n. HY5, 1972.
- DI SILVIO, G., *XVI Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche*, Torino, 1978.
- DU BOYS, M. P., *Mem. Doc.*, Ann. pont et chaussées, Sez. 5, Vol. XVIII, 1879.
- EGIAZAROFF, J. V., *Proc. A.S.C.E.*, Vol. 91, n. HY4, 1965.
- EINSTEIN, H. A., ANDERSON, A. G. e JOHNSON, J. W., *Trans. Am. Geoph. Union*, Vol. 21, pt. 2, 1940.
- EINSTEIN, H. A., *Trans. A.S.C.E.*, Vol. 107, 1942.
- *U.S. Dept. Agric.*, Soil Conserv. Serv., TP-55, 1944.
- *U.S. Dept. Agric.*, Soil Conserv. Serv., TB-1026, 1950.
- EINSTEIN, H. A. e BARBAROSSA, N. L., *Trans. A.S.C.E.*, Vol. 117, 1952.
- ENGELUND, F., *Proc. A.S.C.E.*, Vol. 92, n. HY2, 1966.
- ENGELUND, F. e HANSEN, E., *Teknisk Forlag*, Copenhagen, 1967.
- EXNER, F. M., *Sitzber. Akad. Wiss. Wien*, p. II a, Bd. 134, 1925.
- FERNANDEZ LUQUE, R. e VAN BEEK, R., *J. of I.A.H.R.*, Vol. 14, n. 2, 1976.
- FORTIER, S. e SCOBAY, F. C., *Trans. A.S.C.E.*, Vol. 89, 1926.
- GARDE, R. J. e RANGA RAJU, K., *Proc. A.S.C.E.*, Vol. 92, n. HY4, 1966.
- GILBERT, K. G., *U.S. Geol. Survey*, Prof. Paper 86, 1914.
- GRAF, W. H., *Hydraulics of Sediment Transport*, McGraw-Hill, N. Y., 1971.
- GUY, H. P., SIMONS, D. B. e RICHARDSON, E. V., *U.S. Geol. Survey*, Prof. Paper 462-J, 1966.
- HANCU, S., *Proc. 14th I.A.H.R. Congress*, Vol. 3, Paris, 1971.
- KALINSKE, A. A., *Trans. Am. Geophys. Union*, Vol. 28, n. 4, 1947.
- KAMPHUIS, J. W., *J. of I.A.H.R.*, Vol. 12, n. 2, 1974.
- KENNEDY, R. G., *Min. Proc. Inst. Civil Engineers*, Vol. CXIX, 1895.
- KENNEDY, J. F., *J. of Fluid Mechanics*, Vol. 16, n. 4, 1963.
- LANE, E. W. e KALINSKE, A. A., *Trans. A.G.U.*, Vol. 20, 1941.
- LAURSEN, E. M., *Proc. A.S.C.E.*, Vol. 84, n. HY1, 1958.
- LIU, H. K., *Proc. A.S.C.E.*, Vol. 83, n. HY2, 1957.
- LIU, H. K. e HWANG, S. Y., *Proc. A.S.C.E.*, Vol. 85, n. HY11, 1959.
- LOVERA, F. e KENNEDY, J. F., *Proc. A.S.C.E.*, Vol. 95, n. HY4, 1969.
- MELVILLE, B. W., *Rep. n. 117 Univ. of Auckland*, School of Engineering Auckland New Zealand, 1975.
- MELVILLE, B. W. e RAUDKIVI, A. J., *J. of I.A.H.R.*, Vol. 15, n. 4, 1977.
- MEYER-PETER, E. e MÜLLER, R., *Intern. Ass. Hydr. Res.*, 2d Meeting Stockholm, 1948.
- MONTEFUSCO, L., *Atti Acc. delle Scienze di Bologna*, Serie XII, Tomo VI, 1969.
- MÜLLER, R., *Mitteil. VAWE*, Edigen. Techn. Hochschule, n. 4, Zurigo, 1943.
- PEZZOLI, G., *VIII Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche*, Pisa, 1963.
- *XVI Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche*, Torino, 1978.
- PICA, M., *L'Energia Elettrica*, Vol. XLIX, n. 8, 1972.
- *L'Energia Elettrica*, Vol. LI, n. 8, 1974.

- RAUDKIVI, A. J., *Loose Boundary Hydraulics*, Pergamon, Oxford, 1967.
- RICHARDSON, E. V. e SIMONS, D. B., *12th Congress I.A.H.R.*, Fort Collins, 1967.
- ROUSE, H., *Trans. A.S.C.E.*, Vol. 102, 1937.
- *Proc. 5th Intern. Congr. Appl. Mech.*, Cambridge, Mass., 1938.
- SCARPI, G. B., *L'Energia Elettrica*, Vol. XLV, n. 4, 1968.
- SCHOKLITSCH, A., *Handbuch des Wasserbaues*, Springer, Wien, 1930, (2^a ed. 1950).
Wasserkraft und Wasserwirtschaft, Jgg. 39, H. 3, 1934.
- SHEN, H. W., *Proc. A.S.C.E.*, Vol. 88, n. HY3, 1962.
- SHIELDS, A., *Mitteil. Preuss. Versuchanst. Wasser. Erd. Schiffbau*, Berlin, n. 26, 1936.
- SIMONS, D. B. e RICHARDSON, E. V., *Proc. A.S.C.E.*, Vol. 87, n. HY3, 1961.
- SIMONS, D. B., RICHARDSON, E. V. e ALBERTSON, M. L., *U.S. Geol. Survey, Water Supply Paper 1498-A*, 1961.
- TOFFALETI, F. B., *Proc. A.S.C.E.*, Vol. 95, n. HY1, 1969.
- VANONI, V. A., *Trans. Am. Geoph. Union*, 1941.
- *Trans. A.S.C.E.*, Vol. 111, 1946.
- VIPARELLI, M. e PICA, M., *L'Energia Elettrica*, Vol. XLIV, n. 9, 1967.
- YALIN, M. S., *Proc. A.S.C.E.* Vol. 89, n. HY3, 1963.
- WADELL, H., *J. Franklin Inst.*, Vol. 217, 1934, G. 73.
- WHITE, W. R., PARIS, E. e BETTES, R., *Rep. n. IT 187*, Hydr. Res. Station, Wallingford, 1979.
- ZELLER, J., *Schweiz. Bauzeitung*, Jgg. 81, 1963.



BIBLIOGRAFIA GENERALE

- ARREDI, F., *Costruzioni idrauliche*, UTET, Torino, Vol. 1°, 1969; Vol. 2°, parte I, 1972; vol. 2°, parte II, Tomi 1 e 2, 1977.
- BATCHELOR, G. K., *Theory of Homogeneous Turbulence*, Cambridge University Press, Cambridge, 1953.
- BIRD, R. B. - STEWART, W. E. e LIGHTFOOT, E. N., *Transport Phenomena*, J. Wiley & Sons, New York, 1960.
- BIRKHOFF, G., *Hydrodynamics*, Dover Publications, New York, 1955.
- BOUASSE H., *Capillarité; Hydrostatique; Resistance des Fluides; Hydrodynamique générale; Houle, Rides, Seiches et Marées*, Delagrave, Paris, 1924.
- BRIDGMAN, P. W., *Dymensional Analysis*, Yale University, New Haven, 1922.
- BRODKEY, R. S., *The Phenomena of Fluid Motions*, Addison-Wesley, Reading, 1967.
- CHANDRASEKHAR, S., *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Oxford University Press, London, 1961.
- CHIA-SUN YIH, *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1969.
- CIRIANI, T. A. - MAIONE, U. e WALLIS, J. R.: *Mathematical Models for Surface Water Hydrology*, J. Wiley & Sons, New York, 1977.
- CORCORAN, W. H. - OPFELL, J. B. e SAGE, B. H., *Momentum transfer in fluids*, Academic Press, New York, 1956.
- DRYDEN, H. L. - MURNAGHAM, F. P. e BATEMAN, H., *Hydrodynamics*, Dover Publ., New York, 1956.
- ECKERT, E. R. G. e DRAKE, R. M., *Heat and Mass Transfer*, McGraw-Hill, New York, 1959.
- ESCANDE L., *Hydraulique générale*, Privat, Toulouse, 1941.
- *Complements d'Hydraulique*, Dunod, Paris, 1951.
- FLAMANT, A., *Hydraulique*, Béranger, Paris, 1923.
- FORABOSCHI, F. P., *Principi di ingegneria chimica*, UTET, Torino, 1973.
- FORCHHEIMER, PH., *Hydraulik*, Teubner, Leipzig, 1930.
- FRIEDRICH, K. O. e VON MISES, R., *Fluid Dynamics*, Springer, New York, 1971.

- GOLDSTEIN, S., *Modern Developements in Fluid Mechanics*, Clarendon Press, Oxford, 1938.
- HAPPEL, J. e BRENNER, H., *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965.
- JAEGER, C., *Technische Hydraulik*, Birkhäuser, Basel, 1949.
- JANSEN, P. - BENDEGOM, L. - BERG, J. - DE VRIES, M. e ZANEN, A., *Principles of River Engineering*, Pitman, London, 1979.
- KAUFMANN, W., *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1963.
- KNUDSEN, J. G. e KATZ, D. L., *Fluid Dynamics and Heat Transfer*, McGraw-Hill, New York, 1958.
- KOZENY, J., *Hydraulik*, Springer, Wien, 1953.
- LAMB, H., *Hydrodynamics*, Dover Publ., New York, 1932.
- LANDAU, A. D. e LIFSCHITZ, E. M., *Fluid Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, 1959.
- LELIAVSKY, S., *River and Canal Hydraulics*, Chapman & Hall, London, 1965.
- LEVICH, V. G., *Physicochemical Hydrodynamics*, Prentice-Hall, New York, 1962.
- LICHTENSTEIN, L., *Grundlagen der Hydromechanik*, Springer, Berlin, 1929.
- LIN, C. C., *Theory of Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press, Cambridge, 1955.
- MILNE-THOMSON, L. M., *Theoretical Hydrodynamics*, MacMillan, London, 1968.
- MOORE, F. K., *Advances in Applied Mechanics*, Academic Press, New York, 1956.
- NOLL, W., *The Foundations of Mechanics and Thermodynamics*, Springer, Berlin, 1974.
- OSEEN, C. W., *Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1927.
- OSWATITSCH, K. e KUERTI, G., *Gas Dynamics*, Academic Press, New York, 1956.
- POLUBARINOVA-KOCHINA, P. YA., *Theory of ground water movement*, University Press, Princeton, 1962.
- PRANDTL, L., *Précis de Mécanique des Fluides*, Dunod, Paris, 1940.
- PRANDTL, L. e TIETJENS, O. G., *Fundamentals of Hydro—and Aeromechanics*, Dover Publ., New York, 1934.
- ROSENHEAD, L., *Laminar Boundary Layers*, Oxford University Press, New York, 1963.
- ROUSE, H., *Advanced Mechanics of Fluids*, J. Wiley & Sons, New York, 1959. — *Engineering Hydraulics*, J. Wiley & Sons, New York, 1950.
- SCHADE, H., *Kontinuumstheorie Strömender Medien*, Springer, Berlin, 1970.
- SCHLICHTING, H., *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill, New York, 1960.
- SEDOV, L. I., *A course in continuum mechanics*, Wolters - Noordhoff Publishing, Groningen, 1971.
- SHAPIRO, A. H., *The Dynamic and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*, Ronald Press, New York, 1953.
- SHIH-I PAI, *Viscous Flow Theory. Laminar Flow*, Van Nostrand, Princeton, 1956.

- STREETER, V. L., *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1958.
— *Handbook of Fluid Dynamics*, McGraw-Hill, New York, 1961.
- SUPINO, G., *Le reti idrauliche*, Patron, Bologna, 1965.
- TOWNSEND, A. A., *The structure of Turbulent Shear Flow*, Cambridge University Press, Cambridge, 1956.
- TRUESDELL, C., *Vorticity and the Thermodynamics State in a gas flow*, Memorial des Sciences Mathématiques, Fasc. 119, Paris, 1952.
— *Rational Thermodynamics*, McGraw-Hill, New York, 1969.
— *Introduction a la mécanique rationnelle des milieux continus*, Masson, Paris, 1974.
- VILLAT, H., *Leçons sur la Théorie des Tourbillons*, Gauthier-Villars, Paris, 1930.



INDICE ANALITICO

A

- Accelerazione, 5.
 - centripeta, 18.
 - di Coriolis, 18.
 - di Euler, 18.
 - di un punto, 17-18.
 - di trascinamento, 18.
 - locale ed istantanea, 94.
 - potenziale per l'—, 112, 170, 262.
- Acqua, marina, 47-49.
 - pura, 44-48.
 - vapor d'—, 54.
- Aderenza, condizioni di —, 108-109, 182, 185, 263.
- Aeriforme, moto di un —, 464-465, 485-486.
- Affondamento, 136.
- Alembert, paradosso di d'—, 184-185.
- Allargamento di sezione, 344-347, 452.
- Allievi, metodo di —, 525-527.
 - numero di —, 526.
- Altezza, generatrice della velocità, 175.
 - rappresentatrice della pressione, 136.
- Alvei, caratteristiche geometriche, 567-568.
 - con pendenza non uniforme, 616-619.
 - con sezioni composite, 590-591, 598-599.
- Ampiezza massima delle onde, 230, 710-711.
- Angolo, di contatto, 30, 153-154, 156, 159.
 - in cresta per onde alla forma limite, 230.

- Archimede, legge di —, 145.
- Aria, secca, 51-52.
 - umida, 53-54.
- Ascensione capillare, 153-161.
- Asse di inclinazione, 150.
- Assetto barotropico, 132.
- Assorbimento, di potenza termica, 22.
 - specifico di potenza termica, 79, 84.
- Atmosfera, 140-141.
- Azione, turbine ad —, 355-357.

B

- Bagnato, contorno o perimetro —, 275, 567-568.
- Baroclinico, moto —, 190-193.
- Barotropico, assetto —, 132.
 - moto —, 170, 172, 184, 194.
- Bazin, coefficiente di scabrezza secondo —, 431, 570.
 - formula di —, 433, 574, 594-595.
 - stramazzo tipo —, 643-648.
- Belanger, stramazzo tipo —, 641-642.
- Beltrami, equazione di —, 116-117.
- Bernoulli, teorema di —, 171-174, 325
- trinomio di — ed energia, 176-180.
- Bidone, localizzazione del salto di —, 625.
 - lunghezza del salto di —, 627-628.
 - salto di —, 621-623, 666-668.
 - salto di — in alveo rettangolare, 626-628, 668-670.
 - salto di — in divergenti o convergenti, 628-630, 671.

- Bifase, moto — liquido-aeriforme, 488-490.
 equazioni del moto — nei tubi, 490-492.
 metodo Martinelli e Lockhart, 492-496, 499-501.
- Bingham, fluido di —, 42.
- Blasius, equazione di —, 426.
 strato limite laminare, 393.
- Boccagli, 339-340, 342-343, 470-472.
- Bresse, integrale di —, 614-615.
- Brezza di mare, 192-193.
- C
- Cadente, effettiva, 275, 419.
 piezometrica, 265-266, 419.
- Caduta libera, sbocco con —, 642-643.
 velocità di —, 727-728.
- Calore, evaporazione, 33-35, 45, 47.
 di fusione, 35, 49-51.
 di sublimazione, 35, 49.
- Calori specifici, 35-37, 45, 47, 49-52, 54.
- Campo, del geopotenziale, 18-19.
 gravitazionale, 162-164.
 irrotazionale, 97.
 permanente, 11.
 scalare, 8.
 solenoidale, 97.
 stazionario, 11.
 tensoriale, 9-10.
 uniforme, 11.
 vettoriale, 8-9.
- Canale Venturi, 634-639.
- Capillarità, fenomeni di —, 153-161.
 onde di —, 230.
- Caratteristiche, esterne delle turbopompe, 362-363.
 metodo delle —, 530-532.
 metodo delle — per le onde nei tubi, 530-537.
 metodo delle — per le onde nei canali, 685-688.
- Carico, effettivo o totale, 175, 180, 275, 334, 561-562, 602.
 effettivo permanente ed energia per unità di peso, 335-337.
 piezometrico, 136, 561, 602, 678-679.
 piezometrico apparente, 300.
 specifico, 562, 592-594, 705, 707.
 totale od effettivo, 175, 180, 275, 334, 561-562, 602.
- Casse d'aria, 546-550.
- Cauchy, formula di —, 72-75.
- Cavitazione per colpo d'ariete, 543-546.
- Celerità, delle onde di piena, 693.
 delle onde di pressione nei tubi, 518-519, 520.
 delle onde di traslazione, 680-686, 703, 714.
 dell'onda solitaria, 709.
 di fase, 231-232.
 di gruppo, 232-233.
 di una perturbazione, 514-515.
- Celsius, grado —, 8.
- Centrifuga, equilibrio in una —, 161-162.
 forza specifica —, 19, 189.
- Centripeta, accelerazione —, 18.
- Centro, di carena, 147.
 di carena globale, 151.
 di spinta, 142-143.
- Cilindro circolare, moto intorno al —, 204-205, 206-208, 209, 303-309, 407-410.
- Circolazione, della velocità, 98, 106, 110, 113, 114, 186-189, 191-193, 201-202, 206, 209, 372-373, 409.
 fra cilindri coassiali in moto, 283-285.
 nei perni, 293-294.
- Circuiti idraulici, 478-485.
- Clapeyron, equazione di —, 35.
- Classe Cⁿ, 11.
- Coefficiente, di comprimibilità, 27.
 di conduttività idraulica, 301.
 di conduttività termica, 39, 45, 48-49, 51-52, 54.
- Coefficiente di contrazione, 339-342.
 per efflusso attraverso una fenditura, 246.
 per efflusso sotto una paratoia, 248.
- Coefficiente, di convezione, 743.
 di diffusione, 742.
 di diffusività termica, 40.
 di dilatazione termica, 27, 45-46, 49-50.
 di filtrazione, 301.
- Coefficiente di forma, 276.
 per il moto laminare, 277-278.

- per il moto turbolento nei canali, 571.
per il moto turbolento nelle condotte, 438.
- Coefficiente di perdita, concentrata, 343.
distribuita, 275.
- Coefficiente di portata, per il canale Venturi, 636, 639.
per il diaframma ed il boccaglio, 471.
per il venturimetro, 467-468.
per gli stramazzi, 642, 644-645, 647-648.
per lo sbocco libero, 643.
- Coefficiente di resistenza, 274-275, 421.
nei canali, 571-577, 594-599, 602-603, 678-679, 761-768, 777-780.
nei tubi, 276-278, 422, 425-433.
per il cilindro, 308-309, 407-408.
per la lamina piana, 396, 405-407.
per la lastra investita frontalmente, 243.
per la sfera, 312, 410-411.
- Coefficiente di scabrezza, nei canali, 570.
nei tubi, 431.
- Coefficiente di viscosità, cinematica, 43.
dinamica, 42-45, 48-49, 51-52, 54, 252-253, 257-259.
secondo — dinamica, 44, 252-253, 257-259.
- Coefficiente riduttore, della portata, 339-340.
della velocità, 339-341.
- Colpo d'ariete, 515.
chiusura totale brusca, 523, 551-553.
condizioni ai limiti per le equazioni del —, 521, 524-525.
equazioni concatenate di Allievi, 526.
equazioni differenziali semplificate per il —, 515-520.
equazioni differenziali complete per il —, 528-529.
metodi di calcolo approssimati, 527-528.
metodo delle caratteristiche, 530-537.
metodo di Allievi, 525-527.
metodo grafico, 537-541, 553-555.
metodo numerico, 533-537, 556-558.
nei sistemi di condotte, 541-542.
- Comprimibilità, coefficiente di —, 27.
moduli di —, 37-39, 44-46, 50.
concentrazione di solido in sospensione, 747.
- Condotte, di sezione non circolare, 268-274, 436-438.
in parallelo, 477-478.
in serie, 475-476.
- Conduttività idraulica, coefficiente di —, 301.
tensore della —, 301.
- Conduttività termica, coefficiente di —, 39, 45, 48-49, 51-52, 54.
- Configurazioni del fondo mobile, 753, 780-781.
grafico di Bogàrdi, 755, 781.
grafico di Englund, 760, 781.
grafico di Kennedy, 759.
grafico di Simons e Richardson, 754, 780.
- Contorno, bagnato, 275.
sforzi al —, 182-183, 263-264.
velocità normali al —, 181-182, 263.
- Continuità, equazione cardinale di —, 68.
equazione di — per il moto di filtrazione, 297-299.
equazione di — per il moto turbolento medio, 319-320.
equazione di — per una corrente, 503-504, 682.
equazione globale di —, 329-330.
equazione indefinita di —, 68-69, 124, 166, 254.
- Contrazione, coefficiente di —, 246, 248, 339-342.
- Controllo, dello strato limite, 411-413.
volume di —, 329.
- Convergente, 449-450, 473-475.
- Coriolis, accelerazione di —, 18.
forza specifica di —, 19-20, 185-190.
- Corpi immersi, equilibrio dei —, 147.
stabilità dell'equilibrio dei —, 149.
- Corrente irrotazionale, a simmetria assiale contro una parete, 211, 215.
piana contro una parete, 199-200, 208, 240-243.
uniforme, 199, 208, 210, 215.
- Corrente, euleriana intorno al cerchio, 204-205, 209.
euleriana intorno alla sfera, 213-214, 215.
linea di —, 95-96.
rettilinea, 333-334.

- traslocircolatoria intorno al cerchio, 206-208, 209.
 viscosa contro una parete, 381-386.
- Correnti, a getto, 188-189.
 a pelo libero, 560.
 laminari parallele, 396-400.
 lente e veloci, 564-565.
 profili di — in alvei cilindrici, 605-610, 614-616, 660-668.
- Corsi d'acqua naturali, profili nei —, 603-604, 659-660.
- Costante ciclica, 98, 106, 110.
- Couette, moto di —, 283-285.
- Cross, metodo di —, 459-462.
- Curve, nei canali con correnti lente, 651-652.
 nei canali con correnti veloci, 656-658, 674-675.
 nei tubi, 453-454.
- Dispersione, 471-474.
 tensore di —, 743.
- Dissipazione, di potenza meccanica, 23.
 specifica di potenza meccanica, 79.
- Distacco, dello strato limite, 400-401.
 di vena nel colpo d'ariete, 543-546.
- Distorsione, tensore delle velocità di —, 90, 91, 93.
- Distribuzione, camera di — nelle turbine, 365.
 della pressione nei fluidi viscosi, 259.
 della pressione nei moti irrotazionali, 197-198.
 della velocità media locale, 327, 405, 423-424, 439-443, 446-447, 580-585.
 idrostatica della pressione, 135.
 statica della densità, 133-134.
- Divergente, 449-450, 473-474.

D

- Darcy, equazione di —, 301.
- Deformazione, tensore delle velocità di —, 88, 89-90.
- Densità, 26, 44-46, 48-52, 54, 63, 316.
 distribuzione statica della —, 133-134.
- Densità del flusso di potenza termica, 78.
 vettore —, 80-82, 84.
- Derivata sostanziale, di uno scalare, 65-66.
 di un vettore, 67-68, 70.
- Deriva, velocità di —, 227, 229.
- Deviatore, 10, 90.
- Deviazioni brusche di correnti veloci 652-655.
- Diaframmi, 470-472.
- Diffusione, 741-744.
 coefficiente di —, 742.
- Diffusività termica, coefficiente di —, 40.
- Dilatante, fluido —, 42.
- Dilatazione, coefficiente di — termica, 27, 45-46, 49-50.
 tensore delle velocità di —, 90-91.
- Dimensioni di una grandezza fisica, 55-57.
- Dipolo, intensità di —, 204, 212.
 piano, 203-204, 209.
 sferico, 212-213, 215.

E

- Efflusso, piano attraverso una fenditura, 243-246.
 piano sotto una paratoia, 246-248.
- Einstein, curva di —, 738-739.
 parametri di —, 735.
- Ekman, numero di —, 62.
 problema di —, 386-390.
- Elemento fluido, 64.
- Elica, motori ad —, 369.
 teoria impulsiva dell'—, 366-369.
 turbina ad —, 364.
- Elicottero, rotori per —, 369.
- Emissione, linee di —, 96.
- Endoreattore, 371.
- Energia cinetica, 65.
 teorema di Kelvin sull'—, 109-110.
- Energia interna, 22.
 libera, 24.
- Energia, e carico effettivo, 335-337.
 e trinomio di Bernoulli, 176-180.
- Entalpia, 24.
 libera, 24.
- Entropia, 22-23.
 specifica, 79-80, 83-84, 85, 127-128, 167-168, 256-257.
- Equazione di Fourier, 128-129, 135, 169, 259-260.

- Equazione costitutiva, di Fourier, 128, 168, 259.
 meccanica, 125, 165-166, 249-254.
- Equazioni cardinali del moto, 71-72.
 nel caso statico, 126.
 per i fluidi ideali, 166.
 per i fluidi newtoniani, 254.
- Equazioni differenziali del moto, 75-77.
 nel caso statico, 126.
 per i fluidi ideali, 166-167.
 per i fluidi newtoniani, 254-255.
 per il moto turbolento medio, 319-322.
- Equazioni di stato, 21-22, 125, 165, 257.
- Equazioni globali del moto, 330-332.
 per una corrente, 504-508, 683-684.
- Equazioni termodinamiche, forme cardinali, 77-80.
 nel caso statico, 127.
 per i fluidi ideali, 167-168.
 per i fluidi newtoniani, 256.
- Equazioni termodinamiche, forme differenziali, 82-84.
 nel caso statico, 128.
 per i fluidi ideali, 168.
 per i fluidi newtoniani, 256-257.
 per il moto turbolento medio, 322-325.
- Equilibrio, dei corpi immersi, 147, 149.
 dei galleggianti, 148, 149-153.
 in riferimenti mobili, 161-162.
 nel proprio campo gravitazionale, 162-164.
- Euler, accelerazione di —, 18.
 equazione di —, 167.
 forza specifica di —, 20.
- Evaporazione, calore di, 33-35, 45, 47.
 pressione di, 31-33, 44, 45, 47.
- F
- Filtrazione, coefficiente di —, 301.
 moto di —, 297-302.
- Fluido, 40.
 di Bingham, 42.
 dilatante, 42.
 di Newton, 42, 251.
 di Stokes, 249-250.
 ideale, 165.
 pseudoplastico, 42.
 reopectico, 41.
 tixotropico, 41.
 viscoelastico, 40.
- Flusso di potenza termica, densità del —, 78.
 vettore densità del —, 80-82, 84.
- Fondo, pendenza del —, 560.
 variazioni di pendenza del —, 616-619.
- Fondo mobile, equazioni per lo strato superficiale, 756-761.
 forme del —, 753-756, 759, 760, 780-781.
 modellamento del —, 751-756.
 resistenze con —, 761-768, 777-780.
- Forma, coefficiente di —, 276.
 coefficienti di — per il moto laminare, 277-278.
 coefficienti di — per il moto turbolento nei canali, 571.
 coefficienti di —, per il moto turbolento nelle condotte, 438.
 influenza della —, 586-590.
- Forza specifica, centrifuga, 19, 189.
 del geopotenziale, 18-19.
 di Coriolis, 19-20, 185-190.
 di Euler, 20.
 inerziale, 18.
- Forze centrifughe, potenziale per le —, 19-20, 161-162.
- Forze esterne, di massa, 70-71.
 di superficie, 71.
- Forze peso, potenziale per le —, 18-19.
- Forze specifiche di massa, potenziale per le —, 131, 133.
 pseudopotenziale per le —, 130, 133.
- Fourier, equazione di —, 128-129, 135, 169, 259-260.
 equazione costitutiva di —, 128, 168, 259.
- Francis, turbine —, 364.
- Frangimento dell'onda solitaria, 710-711.
- Froude, numero di —, 61, 564.
 numero di — per il trasporto solido, 752.
- Funzione di corrente, di Lagrange, 99-101.
 di Stokes, 101-103.
 per i moti a densità permanente, 104.
- Funzioni armoniche coniugate, 119.

Fusione, calore di —, 35, 49-51.
pressione di —, 49.

G

Galleggianti, 148.
equilibrio dei —, 148.
stabilità dell'equilibrio dei —, 149-153.
Galleggiamento, piano di —, 148.
Gauckler, coefficienti di scabrezza secondo —, 431, 570.
formula di —, 433, 574, 594-595.
Geopotenziale, 18-19.
Geostrofico, moto —, 185-188.
Getto, correnti a —, 188-189.
rettilineo, 333.
urto frontale di un —, 352-354.
moto obliquo di un —, 354-355.
Ghiaccio, naturale, 50-51.
ordinario, 5, 49.
Giunzioni a T, 453.
Gomiti, 453.
Grado, Celsius, 8.
Kelvin, 5.
Grandezze, adimensionali, 57.
derivate, 4.
fondamentali, 4-5, 57-59.
Griglie, moto attraverso —, 631.

H

Hele-Shaw, moto di —, 295-296.
Helmholtz, scia di —, 238, 409, 410.
teoremi di —, 114-115.
Hienez, problema di —, 381-386.

I

Ideale, fluido —, 165.
Idroreattore, 370.
Idrosfera, 140-141.
Imbocco di una condotta, 342-344, 452.
Inerziale, forza specifica —, 18.
Inerzie locali, 331-332.
Iniettore, 349-351.
Intensità, del trasporto solido, 735.

di un dipolo, 204, 212.
di un pozzo o di una sorgente, 203, 212.
di un vortice piano, 201.
Isobare, superfici —, 131.
Isocoro, moto —, 97.
Isopicnotiche, superfici —, 131.
Isoterme, superfici —, 131-132.
Ipersostentatori, 411-412.

J

Joukowski, formula di — per il colpo d'ariete, 523.
teorema di Kutta e —, 209, 371-374, 409.
Jurin, legge di —, 161,

K

Kaplan, turbina —, 364.
Kàrmàn, scia di —, 409.
Kelvin, grado —, 5.
teorema di — sulla circolazione della velocità, 114.
teorema di — sull'energia cinetica, 109-110.
Kirchhoff, teorema di —, 108.
Kutta, teorema di — e Joukowski, 209, 371-374, 409.
Kutter, coefficienti di scabrezza secondo —, 431, 570.
formula di —, 433, 574.

L

Lagrange, funzione di corrente di —, 99-101.
teorema di —, 113.
Lamb, formula di —, 309.
Laminare, moto —, 314.
strato — aderente alla parete, 427.
strato limite —, 391-396.
Laplace, formula di —, 29, 154, 183, 222, 264, 334.
Limitazioni per i coefficienti di viscosità, 257-259.
Linee, di corrente, 95-96.

di emissione, 96.
 di sponda, 142.
 Liquidi, proprietà fisiche di —, 44.
 Lubrificazione, della slitta piana, 288-294.
 del perno, 293-294.
 studi di Reynolds sulla —, 288.
 Luce a battente, con bocceglio, 340.
 con tubo addizionale interno, 340-341.
 in parete sottile, 337-339.
 sotto una paratoia, 246-248.

M

Mach, angolo di —, 652-653.
 numero di —, 62.
 Manning, coefficienti di scabrezza secondo —, 570.
 formula di —, 577.
 Massa, 4, 63.
 volumica, 26.
 Maxwell, relazioni di —, 24.
 Menischi di emersione e di immersione, 150.
 Metacentro, 151.
 secondo —, 152.
 Metano, 51-53.
 Meyer-Peter, curva di — e Müller, 739.
 Misura, di una grandezza, 3.
 valore oggettivo della —, 3, 55.
 Misuratore a risalito, 634-639.
 Misure di portata, a pelo libero, 634-639, 641-648.
 in pressione, 465-472.
 Modellamento del fondo, 751-756.
 Modulo di comprimibilità, 37-39, 44-46, 50.
 Moto, baroclinico, 190-193.
 barotropico, 170, 172, 184, 194.
 bifase liquido-aeriforme, 488-490, 499-501.
 di Couette, 283-285.
 di filtrazione, 297-302.
 di Hele-Shaw, 295-296.
 di un aeriforme, 464-465, 485-486.
 geostrofico, 185-188.
 intorno al cilindro circolare, 204-205, 206-208, 209, 303-309, 407-410.

intorno alla sfera, 213-214, 215, 309-312, 410.
 inverso, 183-184.
 Moto irrotazionale, 97, 318.
 distribuzione della pressione nel —, 197-198.
 ed isocoro, 104.
 e spigolo vivo, 185.
 lungo pareti ondulate, 215-220.
 Moto isocoro, 69, 97, 318.
 Moto laminare, 314.
 fra piani paralleli, 270-271, 279-282, 295-296.
 in tubo cilindrico circolare, 264-267.
 in tubo cilindrico rettangolare, 272-274.
 lungo l'intercapedine fra cilindri circolari, 268-270.
 Moto permanente, 11, 64, 318.
 di correnti a pelo libero, 601-603, 659-660.
 di correnti in pressione, 449-450, 464-465, 473-486, 490-498, 499-501.
 Moto uniforme, 11, 275, 417, 565.
 di correnti a pelo libero, 565-566.
 di correnti in pressione, 421, 433-439.
 problemi di —, 433-436, 443-446, 577-578, 594-599.
 Moto turbolento, 314.
 medio, 316-318.
 Moto vario di una corrente, 503-508.
 a pelo libero, 677-679.
 con portate laterali, 682-685.
 con velocità verticali, 704-708.
 Motori, ad elica, 369.
 eolici, 369.
 Mulinelli, 369.

N

Navier, equazione di —, 255.
 equazione ridotta di —, 286.
 Newton, fluido di —, 42, 251.
 - numero di —, 61.
 Nodi di un'onda stazionaria, 234.
 Numeri puri, 57, 60-62.

O

Onda solitaria, 708-711.

- Onde, cnoidali, 712-713.
di capillarità, 230.
- Onde di piena, 691-692.
in modello cinematico per le —, 692-695.
modello parabolico per le —, 695-699,
723-724.
- Onde di traslazione, equazioni per le —,
677-679.
con fronte in frangimento, 702-704,
722-723.
con fronte ondulato, 715-717.
con resistenze, 713-717.
metodo alle differenze finite, 688-690.
metodo delle caratteristiche, 685-688.
metodo di de Saint-Venant, 679-681,
717-721.
- Onde progressive di Stokes, 220-234.
angolo in cresta alla forma limite del-
le —, 230.
ampiezza massima delle —, 230.
celerità di fase nelle —, 231-232, 234.
celerità di gruppo nelle —, 232-234.
condizioni sul pelo libero per le —,
222-224.
in acque profonde, 228-229.
periodo delle —, 224-225.
pressioni associate alle —, 227-228, 229.
traiettorie degli elementi fluidi di —,
226-227, 229.
velocità di deriva nelle —, 227, 229.
velocità di trasporto nelle —, 224.
- Onde pulsanti e frangenti (roll-waves),
700-702.
- Onde stazionarie di Stokes, 234-238.
ampiezza delle componenti nelle —,
238.
nodi delle —, 234.
pressioni associate alle —, 236-237.
traiettorie degli elementi fluidi di —,
235-236.
ventri delle —, 235.
- Oscillazioni di massa, 508-512.
senza resistenze, 512-513.
in un tubo ad U, 513-514, 550.
- Oseen, equazione di —, 303.
- p
- Parametri di Einstein, 735.
- Parametro di stabilità di Shields, 730.
- Paratoia, efflusso piano sotto una —,
246-248.
- Pareti ondulate, moto irrotazionale lun-
go —, 215-220.
- Pareti piane e parallele, fenomeni di ca-
pillarità fra —, 157-160.
moto laminare fra —, 270-271, 279-
282, 295-296.
- Pareti piane, fenomeni di capillarità con-
tro —, 153-156.
investite frontalmente, 199-200, 208,
211-215, 240-243, 352-354, 381-386.
moto indotto da — in movimento,
279-282, 376-381.
moto laminare di strato limite lungo —,
391-396.
moto turbolento di strato limite lun-
go —, 402-407.
- Pascal, legge di —, 136.
- Pelo libero, influenza del —, 586-590.
- Pelton, turbina —, 355-357.
- Pendenza critica, 568-569.
- Pendenza del fondo, 560.
variazioni della —, 616-619.
- Pendenza motrice, 265-266, 419.
- Perdite distribuite, coefficienti per le —,
275.
nei canali, 565-566, 570-577, 594-599,
602-603, 659-660, 678-679, 761-768,
777-780.
nei tubi, 276-278, 421, 422, 425-436,
443-446, 449-450, 464-465, 473-486,
490-498, 499-501, 508.
- Perdite localizzate, coefficiente per le —,
343.
nei tubi, 344-349, 451-454.
- Periodo delle onde progressive di Stokes,
224-225, 228.
- Permanente, moto —, 11, 64, 318.
moto — delle correnti a pelo libero,
601-603.
moto — delle correnti in pressione,
449-450.
- Piano, delle pressioni nulle, 136.
di galleggiamento, 148.
- Ponti, rigurgito prodotto dai —, 632-634,
639-640, 672.
erosione attorno alle pile, 769-772.

- Portanza, 371, 409.
- Portata, 65.
 coefficiente di —, 467-468, 471, 636, 639, 642-645, 647-648.
 coefficiente riduttore della —, 339-340.
 densità apparente di —, 297.
 di momento della quantità di moto, 331.
 di quantità di moto, 331.
 nei canali con afflussi laterali, 649-650.
 nei canali con deflussi laterali, 650-651.
- Potenza meccanica, dissipata, 23.
 dissipazione specifica di —, 79.
 fornita, 22.
- Potenza termica, assorbimento di —, 22.
 assorbimento specifico di —, 79, 84.
 densità di flusso di —, 78.
 vettore densità del flusso di —, 80-82, 84.
- Poteniale, complesso per le velocità, 120.
 scalare per le velocità, 97, 98-99, 104-107, 110-112.
 per il rotore della velocità, 261.
 per l'accelerazione, 112, 170, 262.
 per le forze centrifughe, 19-20, 161-162.
 per le forze peso, 18-19.
 per le forze specifiche di massa, 131-133.
 unicità del — per la velocità, 105-107.
 vettore per la velocità, 97, 111-112.
- Pozzo, intensità di un —, 203, 212.
 piano, 202-203, 209.
 sferico, 211-212, 215.
- Prandtl, concetto di strato limite, 392.
 legge logaritmica di —, 327.
 leggi di resistenza, 425, 426.
 strato limite turbolento, 402-407.
- Pressione, 20-21.
 altezza rappresentatrice della —, 136.
 atmosferica di riferimento, 2120-.
 di evaporazione, 31-33, 44, 45, 47, 457, 543.
 di fusione, 49.
 distribuzione della — nelle correnti, 333-334, 561, 602.
 distribuzione della — nei getti, 333.
 distribuzione idrostatica della —, 135.
 distribuzione subarmonica della —, 197-198.
 di sublimazione, 49.
 effettiva, 21.
 nei fluidi viscosi, 259.
 nei moti irrotazionali, 197-198.
 nelle onde progressive di Stokes, 227-228, 229.
 nelle onde stazionarie, 236-237.
 piano della — nulla, 136.
 relativa, 21.
- Prevalenza, dinamica, 361.
 manometrica, 362.
- Profili di corrente, in alveo cilindrico, 605-610, 614-616, 660-668.
 in alvei naturali, 603-604, 659, 660.
 condizioni ai limiti per i —, 619-620.
 con tangente orizzontale, 611-614.
- Profondità, caratteristiche, 611-614.
 critica, 562-564, 592-594.
 di moto uniforme, 565-566, 568, 577-578, 595-598.
 normale, 616.
- Proudman, teorema di —, 189-190.
- Pseudoplastico, fluido —, 42.
- Pseudopotenziale per le forze specifiche di massa, 130, 133.
- Punti di ristagno, 64, 117-119, 121-122, 205, 207, 214, 400, 409, 410
- π , teorema —, 59-60.
- Q
- Quantità di moto, 64.
 momento della —, 65.
 portata di —, 331.
 portata di momento della —, 331.
 teorema della —, 330-332.
 teorema del momento della —, 330-332.
 totale, 623-625, 666-669, 707-708.
- Quota geodetica, 135.
- R
- Raggio idraulico o medio, 275, 418, 567-568.
- Rayleigh, problema di —, 376-378.
- Reattore, 370-371.
- Reazione, grado di —, 360, 364.
 turbine a —, 363-366.

- Resistenza, coefficienti di —, 243, 27-4
278, 308-309, 312, 396, 405-408, 410-
411, 421, 422, 425-433, 571-577, 594-
599, 602-603, 678-679, 761-768, 777-
780.
- Resistenza con fondo mobile, 761-768,
777-780.
- Resistenza di forma, 761, 763-764.
- Resistenza, leggi di —, 422-423.
nel moto a pelo libero, 571-577, 594-
597, 761-768, 777-780.
nel moto laminare nei tubi, 264-267,
272-274, 276-278, 422.
nel moto turbolento nei tubi, 425-433,
438-439.
- Resistenza superficiale, 761-763, 766-767.
- Reti di condotte, 457-462, 482-485.
- Restringimento di sezione, 348-349, 452,
632-640.
- Reynolds, esperimento di —, 314-315.
moti di lubrificazione secondo —, 288.
numero di —, 62, 276, 315, 402, 407-
411, 417-418.
numero di — per il trasporto solido,
730, 752.
numero di — per la caduta libera, 728.
prima equazione di —, 320-322.
seconda equazione di —, 322.
tensore degli sforzi di —, 322.
- Riattacco dello strato limite, 401.
- Riferimenti mobili, equilibrio in —, 161-
162.
- Risalto diretto, 621-623, 666-668.
in alveo rettangolare, 626-628, 668-670.
in canali divergenti o convergenti, 628-
630, 671.
localizzazione del —, 625.
lunghezza del —, 627-628.
per effetto di deviazioni, 652-655.
- Risalto ondulato, 620-621, 655.
- Ristagno, punti di —, 64, 117-119, 121-
122, 205, 207, 214, 400, 409, 410.
- Rossby, numero di —, 61, 187-188.
- Rotori per elicottero, 369.
- metodo di integrazione di de —, 679-
681, 717-721.
- Salinità, 47.
- Saracinesche, perdite nelle —, 452.
- Sbocco, di una condotta in un serbatoio,
347, 452.
di un canale con caduta libera, 642-643.
- Scabrezza di parete, 423-428, 430.
nei canali, 570.
nei tubi, 431.
- Scabrezza eterogenea, 591-592, 598-599.
- Scale di deflusso, 579-580, 698, 723-724.
- Scia, di Helmholtz, 238, 409, 410.
di Kármán, 409.
- Sezione, contratta, 337.
di controllo, 635.
- Sfera, moto intorno alla —, 213-214,
215, 309-312, 410.
- Sfericità, grado di —, 728.
- Sfioratore laterale, 650-651, 673.
- Sforzi, al contorno, 182-183, 263-264.
distribuzione degli —, 417.
normali, 41, 74.
tangenziali, 41, 74.
- Shields, curva di —, 730.
parametro di —, 730.
- Sifone, 456-457.
- Slitta, lubrificazione della —, 288-294.
- Sorgente, intensità di una —, 203, 212.
piana, 202-203, 209.
sferica, 211-212, 215.
- Spinta totale o quantità di moto totale,
623-625, 707-708.
- Spinte idrostatiche contro superfici, gob-
be, 145-147.
piane, 141-144.
- Sponda, linea di —, 142.
- Stabilità dell'assetto statico per i fluidi,
133-134.
- Stabilità dell'equilibrio, dei corpi immer-
si, 149.
dei galleggianti, 149-153.
- Stokes, equazione di —, 255.
formula di —, 312.
fluido di —, 249-250.
funzione di corrente di —, 101-103.
onde progressive di —, 220-234.
problema di —, 379-381.
- Stramazzi, in parete grossa, 641-642.

S

Saint-Venant, equazione di de —, 678.

in parete sottile, 643-648.
 laterali, 650-651, 673.
 Strato limite, 390-391.
 controllo dello —, 411-413.
 distacco e riattacco dello —, 400-401.
 Strato limite lungo la lastra piana, laminare, 391-396.
 turbolento, 402-407.
 Strickler, coefficiente di scabrezza secondo —, 431, 570, 763.
 formula di —, 433, 574, 594-595.
 Strouhal, numero di —, 61, 409-410.
 Subarmoniche, pressioni —, 198.
 Sublimazione, calore di —, 35, 49.
 pressione di —, 49.
 Superfici, isobare, 131.
 isopicnotiche, 131.
 isoterme, 131, 132.
 Supino, teorema di —, 108-109.

T

Taylor, numero di —, 62.
 Temperatura assoluta, 5, 78-79.
 Tensione, critica di trascinamento, 729-731, 772-773.
 superficiale, 28-29, 44-45, 47, 153-161, 223-225, 230-233.
 Tensioni, ammissibili sul fondo, 578.
 distribuzione delle —, 419-420.
 Tensore, 9.
 degli sforzi, 72-75.
 degli sforzi di Reynolds, 322.
 degli sforzi nei fluidi ideali, 165-166.
 degli sforzi nei fluidi newtoniani, 251-253, 257-259.
 degli sforzi nella statica, 125.
 dei gradienti di velocità, 87.
 della conduttività idraulica, 301.
 delle velocità di deformazione, 88, 89-90.
 delle velocità di dilatazione, 90-91.
 delle velocità di distorsione, 90, 91, 93.
 delle velocità di rotazione rigida, 88-89.
 deviatore, 10, 90.
 di dispersione, 743.
 emisimmetrico, 10, 88.
 isotropo, 10, 125, 165.
 simmetrico, 10, 88, 322.
 traccia di un —, 10.
 unità, 10, 125, 165, 252, 254.
 Terra, velocità di rotazione della —, 19, 187.
 Tixotropico, fluido —, 41.
 Traiettorie, 95, 226-227, 229, 235-236.
 Transizione attraverso lo stato critico, 634-640.
 Trascinamento, accelerazione di —, 18.
 velocità di —, 17.
 Traslazione rigida, velocità di —, 88.
 Trasporto, teoremi di —, 66-67, 69-70.
 velocità di —, 224.
 Trasporto solido al fondo, 731-741.
 formula di Kalinske, 732-733, 774.
 formula di Meyer-Peter e Müller, 734-735, 739, 774-775.
 formula di Pezzoli, 740, 776.
 formula di Yalin, 741, 776-777.
 inizio del —, 728-731, 772-773.
 metodo di Einstein, 735-739, 775-776.
 Trasporto solido in sospensione, 744-749.
 equazione di Rouse per il —, 745.
 esperienze di Vanoni sul —, 746.
 Trasporto solido totale, 749-751.
 metodo di Einstein, 749-750.
 metodo di Bagnold, 750-751.
 Tubo addizionale, esterno, 342-343.
 interno, 340-341, 342, 343-344.
 Tubi, moto turbolento nei — lisci, 425-427.
 moto turbolento nei — scabri, 426-433.
 Turbine, ad azione, 355-357.
 ad elica, 364.
 a reazione, 363-366.
 camera di distribuzione, 365.
 forme costruttive, 364-365.
 Francis, 364.
 grado di reazione, 364.
 Kaplan, 364.
 Pelton, 355-357.
 rendimento complessivo, 365-366.
 rendimento della girante, 363-364.
 Turbolento, equazione per il moto medio —, 319-325.
 moto medio —, 316-318.
 strato limite —, 402-407.
 Turbopompe, 357-363.

caratteristiche esterne, 362-363.
 forme costruttive, 360-361.
 grado di reazione, 360.
 prevalenza dinamica, 361.
 prevalenza manometrica, 362.
 rendimento complessivo, 361-362.
 rendimento della girante, 360.

U

Umidità, 54.
 Uniforme, moto —, 11, 275, 417, 421,
 565-566.
 Urto, frontale di un getto, 352-354.
 obliquo di un getto, 354-355.

V

Valore oggettivo delle misure, 3, 55.
 Valvole, perdite nelle —, 452.
 Vapor d'acqua, 54.
 Variazioni di portata, lungo una condotta, 462-463.
 lungo un canale, 649-651.
 Velocità, 5.
 altezza generatrice della —, 175.
 ammissibili nei canali in terra, 578.
 apparente, 298-299.
 circolazione della —, 98, 106, 110, 113,
 114, 186-189, 191-193, 201-202, 206,
 209, 372-373, 409.
 coefficiente riduttore della —, 339-341.
 complessa, 120.
 componenti armoniche della —, 104.
 critica, 564.
 di attrito, 326.
 di caduta libera, 727-728.
 di deriva, 227, 229.
 di rotazione della terra, 19, 187.
 distribuzione delle — medie locali, 327,
 405, 423-424, 439-442, 580-585.

di trascinamento, 17.
 di traslazione rigida, 88.
 di trasporto, 224.
 locale ed istantanea, 64.
 massimi e minimi di —, 104-105.
 media locale, 317.
 media sulla sezione, 267.
 normali alla frontiera, 181-182, 263.
 potenziale complesso per la —, 120.
 potenziale per la —, 97, 98-99, 104-
 107, 110-112.
 rotore della —, 113-117, 118, 120, 122-
 123, 170-171, 196-197, 261-262.
 teorema di Kelvin sulla circolazione
 della —, 114.
 torricelliana, 338.
 unicità del potenziale per la —, 105-
 107.
 Vedernikov, numero di —, 700.
 Vena rettilinea, 333-334.
 Ventilatori, 369.
 Ventri di un'onda stazionaria, 235.
 Venturi, canale —, 634-639.
 Venturimetro, 465-470.
 Viscoelastico, fluido —, 40.
 Viscosità, cinematica, 43.
 dinamica, 42-45, 48-49, 51-52, 54, 252-
 253, 257-259.
 Volume, di carena, 147.
 di controllo, 329.
 Vortici, a delta, 408.
 intensità dei — piani, 201.
 piani, 200-202, 209.
 Vorticità, 113-117, 118, 120, 122-123,
 170-171, 196-197, 261-262.
 teoremi di Helmholtz sulla —, 114-115.
 equazione di Beltrami per la —, 116-
 117.

W

Weber, numero di —, 62.

