

RLZ0074687

BK MAR 4

Enrico Marchi

Ordinario di Idraulica nella Facoltà
di Ingegneria dell'Università di Genova

Antonello Rubatta

Ordinario di Idraulica nella Facoltà
di Ingegneria dell'Università di Bologna

Meccanica dei fluidi

principi e applicazioni idrauliche

Università degli Studi di Ferrara
Biblioteca Centralizzata
Scientifico - Tecnologica
N. Inventario UNI 100264



BIBLIOTECA SCIENTIFICO-TECNOLOGICA

DIDATTICA
BK
MAR
4

UNI 100264

UNIVERSITA' DI FERRARA
BIBLIOTECA SCIENTIFICO-TECNOLOGICA



UNI 100264

UTET

© 2004 *Ristampa* - Unione Tipografico-Editrice Torinese
corso Raffaello, 28 - 10125 Torino

© Prima edizione 1981

© Ristampa corretta 1999

Sito Internet Utet: www.utet.com
e-mail: utet@utet.it

I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica, di riproduzione e di adattamento totale o parziale, con qualsiasi mezzo (compresi i microfilm e le copie fotostatiche), sono riservati per tutti i Paesi.

Fotocopie per uso personale del lettore possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascun volume/fascicolo di periodico dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall'art. 68, comma 4, della legge 22 aprile 1941 n. 633 ovvero dall'accordo stipulato tra SIAE, AIE, SNS e CNA, CONFARTIGIANATO, CASA, CLAAI, CONFCOMMERCE, CONFESERCENTI il 18 dicembre 2000.

Le riproduzioni ad uso differente da quello personale potranno avvenire, per un numero di pagine non superiore al 15% del presente volume/fascicolo, solo a seguito di specifica autorizzazione rilasciata da AIDRO, via delle Erbe, n. 2 - 20121 Milano - Telefax 02/809506 - e-mail aidro@iol.it

Composizione: Monograf - Bologna

Stampa: Stamperia Artistica Nazionale - Torino

ISBN 88-02-03659-4

PREMESSA

La scrittura di un libro in collaborazione fra due Autori, anche se, come noi, provenienti da una stessa scuola e rimasti legati da una solida amicizia, presenta problemi non sempre facili da risolvere che vanno dalla scelta degli argomenti agli aspetti più formali dell'esposizione.

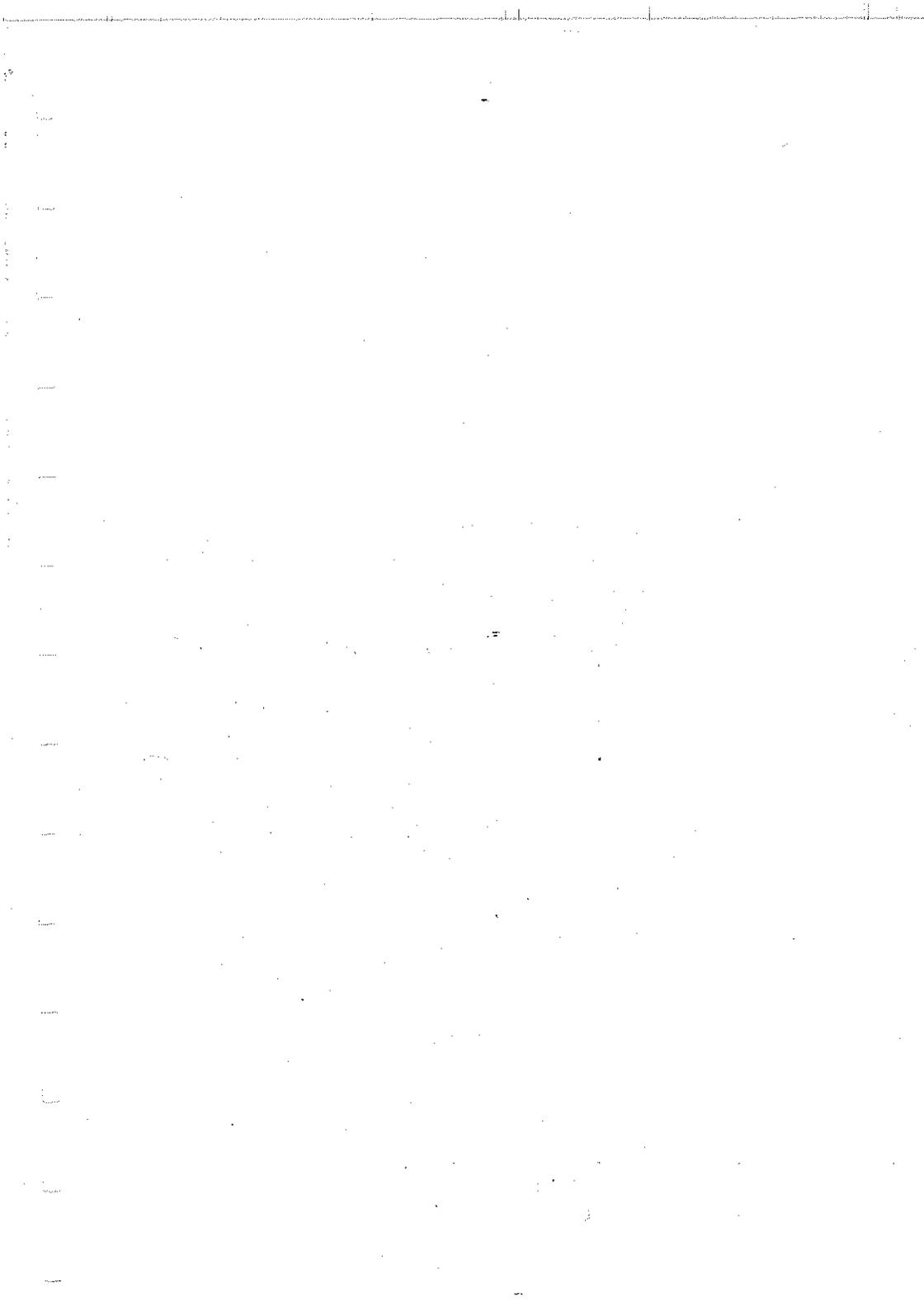
Abbiamo preferito assumere, almeno inizialmente, compiti in prevalenza separati: Rubatta dedicandosi alla stesura della prima parte, rivolta soprattutto ai principi della meccanica dei fluidi; Marchi alla stesura della seconda, destinata alle più frequenti applicazioni idrauliche.

Osservazioni critiche e consigli reciproci hanno reso più unitaria la redazione definitiva del testo. Rimangono naturalmente differenze esteriori, legate anche alle consuetudini seguite nel trattare i vari argomenti. Pensiamo, tuttavia, che il processo deduttivo risulti logicamente connesso ed assicuri la continuità fra le due parti.

Nell'indicare le fonti, ci siamo limitati ad elencare alla fine di ciascun capitolo le pubblicazioni che erano state esplicitamente richiamate nel testo. La bibliografia che chiude il volume cita invece opere di interesse generale relative agli argomenti qui trattati.

Avremmo voluto che la presentazione fosse stata scritta da Giulio Supino, un maestro indimenticabile, la cui guida ci è venuta a mancare il 5 luglio 1978. Alla Sua memoria dedichiamo questo lavoro.

E. MARCHI E A. RUBATTA



INDICE

<i>Premessa</i>	<i>P.</i>	III
<i>Simboli principali</i>	»	XIII

PARTE PRIMA

1. Introduzione	»	3
1.1. La misura delle grandezze fisiche	»	3
1.2. Notazioni e formule impiegate	»	8
1.3. Sistemi di riferimento in moto relativo	»	16
1.4. Proprietà dinamiche del riferimento	»	18
1.5. La pressione	»	20
1.6. Equazioni di stato	»	21
1.7. Funzioni di stato	»	22
2. Proprietà dei materiali	»	26
2.1. Densità e peso specifico	»	26
2.2. Dilatabilità e comprimibilità	»	26
2.3. Tensione superficiale	»	28
2.4. Pressione di evaporazione	»	31
2.5. Calore di trasformazione	»	33
2.6. Calore specifico	»	35
2.7. Modulo di comprimibilità	»	37
2.8. Conduttività termica	»	39
2.9. Coefficienti di viscosità	»	40
2.10. Valori numerici	»	44
3. Analisi dimensionale	»	55
3.1. Espressioni dimensionali	»	55
3.2. Gruppi equivalenti di grandezze fondamentali	»	57

3.3. Teorema π	p. 59
3.4. I numeri puri	» 60
4. Schemi di mezzo continuo	» 63
4.1. Valori locali ed istantanei	» 63
4.2. Derivate sostanziali	» 65
4.3. Equazione di continuità	» 68
4.4. Prime conseguenze dell'equazione di continuità	» 69
4.5. Equazioni cardinali del moto	» 70
4.6. Il tensore degli sforzi	» 72
4.7. Equazioni indefinite del moto	» 75
4.8. Equazioni termodinamiche cardinali	» 77
4.9. Il vettore densità del flusso di potenza termica	» 80
4.10. Equazioni indefinite della termodinamica	» 82
5. Cinematica dei fluidi	» 86
5.1. Le velocità di deformazione	» 86
5.2. L'accelerazione	» 94
5.3. Traiettorie, linee di corrente e linee di emissione	» 95
5.4. I potenziali di Stokes	» 97
5.5. Potenziale scalare delle velocità	» 98
5.6. Funzioni di corrente	» 99
5.7. Moti irrotazionali ed isocori	» 104
5.8. Moti con divergenza e rotore non nulli	» 110
5.9. Il potenziale delle accelerazioni	» 112
5.10. La vorticità	» 113
5.11. Moti piani	» 117
5.12. Moti a simmetria assiale	» 120
6. Statica dei fluidi.	» 124
6.1. Le equazioni meccaniche della statica	» 124
6.2. Le equazioni termiche della statica	» 127
6.3. Equilibrio in presenza di forze di massa preassegnate	» 130
6.4. Equilibrio nel campo del geopotenziale	» 134
6.5. Forze idrostatiche contro superfici piane	» 141
6.6. Forze idrostatiche contro superfici gobbe	» 145
6.7. Equilibrio di corpi immersi o galleggianti	» 147
6.8. Stabilità dell'equilibrio di corpi immersi o galleggianti	» 149
6.9. Fenomeni di capillarità	» 153
6.10. Equilibrio in riferimenti mobili rispetto al geoide	» 161
6.11. Forze specifiche dovute alle stesse masse in equilibrio	» 162
7. Dinamica dei fluidi ideali	» 165
7.1. Le equazioni meccaniche dei fluidi ideali	» 165
7.2. Le equazioni termodinamiche dei fluidi ideali	» 167
7.3. Aspetti del moto dei fluidi ideali	» 169

7.4. Teorema di Bernoulli	p. 171
7.5. Stime sull'energia	» 176
7.6. Condizioni al contorno	» 181
7.7. Limitazioni dello schema	» 183
7.8. Moti geostrofici	» 185
7.9. Moti baroclinici	» 190
8. Moti irrotazionali	» 194
8.1. Origine del moto irrotazionale	» 194
8.2. Distribuzione della pressione	» 197
8.3. Esempi di moti piani permanenti	» 198
8.4. Esempi di moti permanenti a simmetria assiale	» 210
8.5. Moto lungo pareti ondulate	» 215
8.6. Onde progressive di superficie	» 220
8.7. Velocità di propagazione	» 231
8.8. Moti ondosi stazionari	» 234
8.9. Le scie di Helmholtz	» 238
9. Dinamica dei fluidi viscosi	» 249
9.1. Il tensore degli sforzi nei fluidi viscosi	» 249
9.2. Le equazioni meccaniche dei fluidi newtoniani	» 254
9.3. Le equazioni termodinamiche dei fluidi viscosi	» 256
9.4. Aspetti generali del moto dei fluidi viscosi	» 260
9.5. Condizioni al contorno	» 263
9.6. Moto in tubi cilindrici	» 264
9.7. I coefficienti di resistenza distribuita	» 274
9.8. Moti indotti da scorrimento delle pareti	» 279
9.9. Moti con basse velocità	» 286
9.10. Il caso della lubrificazione	» 288
9.11. Moto alla Hele-Shaw	» 295
9.12. Moti di filtrazione	» 297
9.13. Corrente uniforme che investe un cilindro od una sfera	» 303
10. Moto turbolento	» 314
10.1. Moto laminare e moto turbolento	» 314
10.2. Il moto medio	» 316
10.3. Equazioni meccaniche per il moto medio	» 319
10.4. Equazioni termodinamiche del moto medio	» 322
10.5. Aspetti del moto turbolento medio	» 325
10.6. La distribuzione delle velocità medie	» 326
11. Equazioni globali della dinamica dei fluidi	» 328
11.1. I teoremi meccanici globali	» 328
11.2. Correnti e vene rettilinee	» 332
11.3. Fenomeni di efflusso libero	» 337
11.4. Imbocco di condotte	» 342

11.5.	Brusco allargamento di sezione della corrente	p. 344
11.6.	Iniettore	» 349
11.7.	Urti di getti.	» 752
11.8.	Turbine Pelton	» 355
11.9.	Pompe e turbine a reazione	» 357
11.10.	Eliche	» 366
11.11.	Propulsione a reazione	» 370
11.12.	Teorema di Kutta e Joukowsky	» 371
12.	Strato limite	» 375
12.1.	Genesi della vorticità	» 375
12.2.	Problema di Rayleigh	» 376
12.3.	Problema di Stokes	» 379
12.4.	Problema di Hiemenz	» 381
12.5.	Problema di Ekman	» 386
12.6.	Concetto di strato limite	» 390
12.7.	Strato limite laminare	» 391
12.8.	Attrito fra correnti laminari parallele	» 396
12.9.	Separazione dello strato limite	» 400
12.10.	Strato limite turbolento	» 402
12.11.	Resistenza del cilindro e della sfera	» 407
12.12.	Controllo dello strato limite	» 411

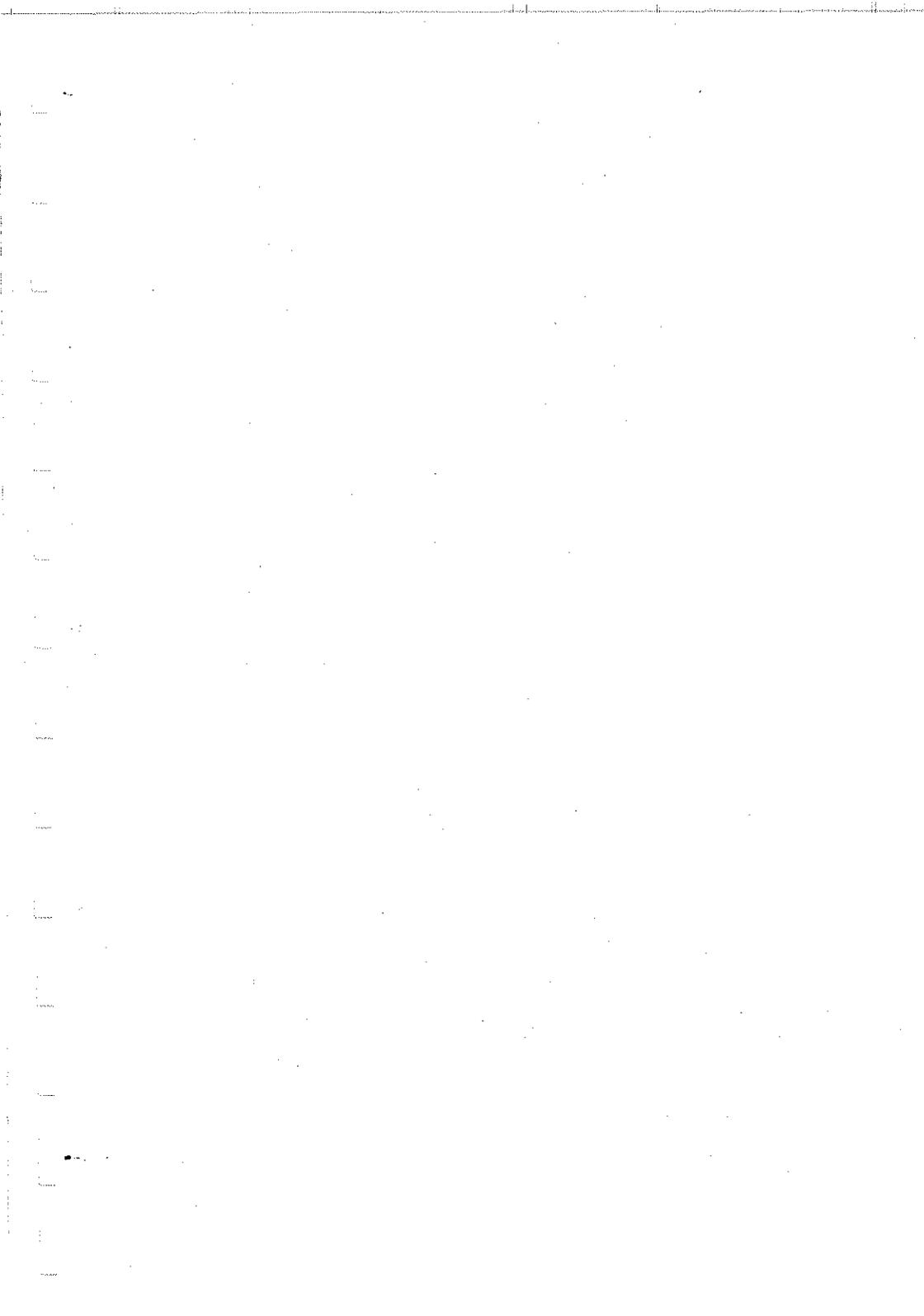
PARTE SECONDA

13.	Moto uniforme nelle condotte in pressione	» 417
13.1.	Definizioni	» 417
13.2.	Distribuzione delle tensioni. Perdite di carico distribuite	» 418
13.3.	L'equazione del moto uniforme	» 421
13.4.	Le leggi di resistenza dei tubi lisci e scabri	» 422
13.5.	Le leggi di resistenza dei tubi commerciali	» 428
13.6.	Formule antiche	» 432
13.7.	Problemi del moto uniforme	» 433
13.8.	Condotte di sezione non-circolare	» 436
13.9.	Complementi sulla distribuzione delle velocità	» 439
14.	Moto permanente nelle condotte	» 449
14.1.	Condizioni di moto permanente	» 449
14.2.	Condotte con variazioni graduali di sezione	» 449
14.3.	Perdite localizzate: accidentalità e curve	» 451
14.4.	Condotte collegate due serbatoi. Sifone	» 455
14.5.	Reti di condotte	» 457
14.6.	Variazioni graduali di portata	» 462
14.7.	Moto permanente isoterma di un aeriforme	» 464
14.8.	Misuratori di portata: venturimetri, diaframmi e boccagli	» 465

15. Correnti non omogenee in pressione: moto bifase liquido-aeriforme	p. 488
15.1. Introduzione	» 488
15.2. Aspetti e tipi del moto simultaneo liquido-aeriforme	» 488
15.3. Grandezze del moto bifase	» 490
15.4. Le equazioni del moto bifase nei tubi orizzontali	» 490
15.5. Correlazioni globali per il calcolo delle perdite per attrito	» 492
15.6. Il metodo di Martinelli e Lockhart (M. e L.)	» 495
15.7. Modelli a densità variabile	» 498
16. Moto vario nelle condotte in pressione	» 503
16.1. Le equazioni del moto vario di una corrente	» 503
16.2. Tipi di oscillazioni: elastiche e di massa	» 508
16.3. Condotta collegante due serbatoi. Oscillazioni di massa	» 509
16.4. Oscillazioni di massa senza resistenze	» 512
16.5. Oscillazioni in un tubo ad U con resistenze	» 513
16.6. Oscillazioni elastiche. Celerità di un'onda	» 514
16.7. Le equazioni differenziali semplificate	» 515
16.8. Lo studio del colpo d'ariete con il sistema delle equazioni semplificate	» 519
16.9. Le equazioni integrali del colpo d'ariete	» 521
16.10. Chiusura totale brusca	» 523
16.11. Manovre lente. Le condizioni ai limiti	» 524
16.12. Le equazioni concatenate di Allievi	» 525
16.13. Manovre lineari. Metodi approssimati	» 527
16.14. Il sistema delle equazioni differenziali complete	» 528
16.15. Il metodo delle caratteristiche	» 530
16.16. Soluzione numerica	» 533
16.17. Il metodo grafico	» 537
16.18. Sistemi di condotte	» 541
16.19. Fenomeni di cavitazione per colpo d'ariete.	» 543
16.20. Le casse d'aria	» 546
17. Correnti a pelo libero. Moto uniforme	» 560
17.1. Definizioni ed ipotesi	» 560
17.2. Carico specifico e profondità critica	» 562
17.3. Velocità critica. Correnti veloci e correnti lente	» 564
17.4. Moto uniforme nei canali	» 565
17.5. Caratteristiche geometriche degli alvei	» 567
17.6. Pendenza critica	» 568
17.7. Formule per il calcolo del coefficiente di resistenza	» 571
17.8. Progetto dei canali	» 577
17.9. Scala di deflusso	» 579
17.10. Distribuzione della velocità	» 580
17.11. Deduzione delle leggi logaritmiche di resistenza	» 585
17.12. Influenza della forma e del pelo libero	» 586
17.13. Alvei con sezioni composite o con scabrezza eterogenea	» 590

18.	Moto permanente delle correnti a pelo libero	p. 601
18.1.	Equazioni del moto permanente gradualmente variato	» 601
18.2.	Corsi d'acqua naturali	» 603
18.3.	Correnti in alveo cilindrico	» 605
18.4.	Profili di corrente in alveo cilindrico declive	» 606
18.5.	Canali orizzontali o acclivi	» 610
18.6.	Profili con tangente orizzontale. Profondità caratteristiche	» 611
18.7.	L'integrale dell'equazione dei profili in alveo cilindrico	» 614
18.8.	Alvei con pendenza del fondo variabile	» 616
18.9.	Condizioni ai limiti	» 619
18.10.	Il risalto idraulico	» 620
18.11.	La funzione quantità di moto totale	» 623
18.12.	Localizzazione del risalto diretto	» 625
18.13.	Il risalto in alveo rettangolare	» 626
18.14.	Il risalto in canali divergenti o convergenti	» 628
18.15.	Variazioni di sezione dell'alveo	» 630
18.16.	Transizione attraverso lo stato critico. Sezioni di controllo	» 634
18.17.	Stramazzo Belanger	» 641
18.18.	Stramazzo in parete sottile	» 643
18.19.	Variazioni di portata	» 649
18.20.	Deviazioni e curve nei canali	» 651
19.	Moto vario delle correnti a pelo libero	» 677
19.1.	Le equazioni del moto	» 677
19.2.	Integrazione delle equazioni del moto vario nei canali ret- tangolari senza resistenze d'onda	» 679
19.3.	Le equazioni del moto vario di correnti con afflussi e de- flussi laterali	» 682
19.4.	L'integrazione numerica delle equazioni del moto vario	» 684
19.5.	Il metodo delle caratteristiche	» 685
19.6.	I metodi diretti alle differenze finite	» 688
19.7.	Le onde di piena	» 691
19.8.	Il modello cinematico	» 692
19.9.	Il modello parabolico	» 695
19.10.	Onde pulsanti e frangenti (roll waves)	» 700
19.11.	Onde di traslazione con fronte frangente (onde di shock)	» 702
19.12.	Moto vario bidimensionale	» 704
19.13.	Onda solitaria	» 708
19.14.	Onde cnoidali	» 712
19.15.	Onde di traslazione con resistenze	» 713
20.	Concetti di idraulica fluviale: il trasporto solido	» 726
20.1.	Considerazioni generali	» 726
20.2.	Caratteristiche dei materiali trasportati	» 726
20.3.	Condizioni critiche: inizio del trasporto solido	» 728
20.4.	Il trasporto solido al fondo	» 731
20.5.	L'equazione di Einstein per la portata solida al fondo	» 735

20.6. Altre formule per il trasporto di fondo	p. 740
20.7. L'equazione della diffusione-dispersione	» 741
20.8. Il trasporto solido in sospensione	» 744
20.9. Il trasporto solido totale	» 449
20.10. Il modellamento del fondo	» 751
20.11. L'equazione dello strato mobile di fondo	» 756
20.12. La resistenza al moto degli alvei con fondo mobile	» 761
20.13. Erosioni localizzate attorno alle pile dei ponti	» 769
<i>Bibliografia generale</i>	» 785
<i>Indice analitico</i>	» 789



SIMBOLI PRINCIPALI

<p>A area generica.</p> <p>Al numero di Allievi.</p> <p>\mathcal{A} ampiezza di escursione.</p> <p>\mathcal{A}_I ampiezza di escursione per l'onda incidente.</p> <p>\mathcal{A}_R ampiezza di escursione per l'onda riflessa.</p> <p>\mathcal{A}_C ampiezza d'onda complessiva, fra colmo e cavo.</p> <p>a accelerazione.</p> <p>a modulo di a e sue componenti; celerità delle onde nelle condotte; contorno o perimetro bagnato.</p> <p>B</p> <p>b larghezza.</p> <p>C coefficiente di resistenza per i moti uniformi; fattore generico.</p> <p>C_C coefficiente di contrazione.</p> <p>C_Q coefficiente di portata.</p> <p>C_R coefficiente di resistenza per i moti esterni.</p> <p>C_V coefficiente riduttore della velocità.</p> <p>\mathcal{E} energia cinetica.</p> <p>c costante di integrazione.</p> <p>c_f celerità di fase.</p> <p>c_g celerità di gruppo.</p> <p>c_p calore specifico a pressione costante.</p> <p>c_v calore specifico a volume costante.</p> <p>D tensore delle velocità di deformazione.</p> <p>D_{ik} componente di D.</p> <p>D diametro.</p> <p>d distanza.</p>	<p>d_s diametro dei granuli solidi.</p> <p>E tensore di dispersione.</p> <p>E carico specifico.</p> <p>E_c coefficiente di convezione.</p> <p>E_d coefficiente di diffusione.</p> <p>Ek numero di Ekman.</p> <p>ϵ entropia.</p> <p>e entropia specifica.</p> <p>e vettore posizione sulla linea di emissione.</p> <p>F forza.</p> <p>F modulo di F e sue componenti.</p> <p>F' forza per unità di larghezza.</p> <p>F' modulo di F' e sue componenti.</p> <p>Fr numero di Froude.</p> <p>Fr_* numero di Froude per il trasporto solido.</p> <p>\mathcal{F} energia libera.</p> <p>f energia libera specifica.</p> <p>f coefficiente di forma; funzione generica.</p> <p>f forza specifica di massa.</p> <p>f modulo di f e sue componenti.</p> <p>f_{ce} forza centrifuga specifica.</p> <p>f_{ce} modulo di f_{ce} e sue componenti.</p> <p>f_{co} forza specifica di Coriolis.</p> <p>f_{co} modulo di f_{co} e sue componenti.</p> <p>f_{eu} forza specifica di Euler.</p> <p>f_{eu} modulo di f_{eu} e sue componenti.</p> <p>G risultante delle forze di massa.</p> <p>G modulo di G e sue componenti.</p> <p>G_m momento del risultante delle forze di massa.</p>
---	--

G_m	modulo di G_m e sue componenti.	\mathcal{A}	intensità di dipolo.
G_s	portata massica solida al fondo.	\mathcal{A}'	intensità di dipolo per unità di larghezza.
\mathcal{G}	entalpia libera.	M	massa.
\mathcal{P}	entalpia libera specifica.	m	esponente della scala di deflusso.
g	forze specifiche del geopotenziale.	m_c	indice di scabrezza secondo Kut- ter.
g	modulo di g e sue componenti.	Ma	numero di Mach.
g_s	portata massica solida al fondo per unità di larghezza.	N	massa per kilomole.
g_{ss}	portata massica solida in sospen- sione per unità di larghezza.	Ne	numero di Newton.
g_{st}	portata massica solida totale per unità di larghezza.	n	versore normale.
H	carico effettivo o totale.	n	componenti di n ; indice di sca- brezza secondo Manning.
\mathcal{H}	entalpia.	\mathcal{P}_d	potenza dissipata.
\mathcal{h}	entalpia specifica.	\mathcal{P}_m	potenza meccanica.
h	carico piezometrico.	\mathcal{P}_t	potenza termica.
h_a	carico piezometrico apparente.	f_d	dissipazione specifica di potenza.
\mathbf{I}	tensore unità.	f_t	assorbimento specifico di potenza termica.
I_{ik}	componente di \mathbf{I} .	P	peso.
\mathbf{I}	inerzia locale.	p	pressione in accordo con l'equa- zione di stato.
I_m	momento dell'inerzia locale.	P_{atm}	pressione atmosferica di riferimen- to.
\mathcal{I}	umidità.	p_e	pressione di evaporazione.
i	versore lungo una linea coordi- nata.	p_i	componente idrostatica della pres- sione.
i	pendenza motrice.	\hat{Q}	portata di quantità di moto.
i_f	pendenza del fondo.	\hat{Q}	modulo di \hat{Q} e sue componenti.
i_c	pendenza critica.	\mathcal{Q}	modulo di \hat{Q} e sue componenti (parte II).
J	momento d'inerzia.	\hat{Q}_m	portata di momento della quantità di moto.
j	cadente effettiva.	\hat{Q}_m	modulo di \hat{Q}_m e sue componenti.
j'	cadente dovuta alla resistenza su- perficiale del fondo.	Q	portata volumetrica.
j''	cadente dovuta alla forma del fondo.	Q'	portata volumetrica per unità di larghezza.
\mathbf{K}	tensore della conduttività idrau- lica.	Q_M	portata in massa.
K_{ik}	componente di \mathbf{K} .	Q_s	portata volumetrica solida al fon- do.
K	coefficiente di conduttività idrau- lica.	q	versore densità del flusso della po- tenza termica.
K_0	funzione di Bessel modificata di ordine zero.	q	modulo di q e sue componenti.
κ	coefficiente di diffusività termica.	q_a	velocità apparente.
k	coefficiente di conduttività termica.	q_a	modulo di q_a e sue componenti.
k_B	indice di scabrezza secondo Gauckler e Strickler.	q_e	portata volumetrica affluente per unità di lunghezza.
\mathcal{L}	modulo delle funzioni ellittiche.	q_s	portata volumetrica solida al fon- do per unità di larghezza.
\mathbf{L}	tensore delle velocità di dilatazio- ne.		
L_{ik}	componente di \mathbf{L} .		
L	lunghezza.		

q_{sv}	portata volumetrica solida in sospensione per unità di larghezza.	W	pseudopotenziale.
q_{st}	portata volumetrica solida totale per unità di larghezza.	W_e	numero di Weber.
q_u	portata volumetrica effluente per unità di lunghezza.	w	vettore vorticità.
q_R	vettore densità del flusso turbolento dell'energia interna.	w	modulo di w e sue componenti.
\mathcal{R}	costante per l'equazione dei gas molto rarefatti.	w_s	velocità di caduta libera.
R	raggio medio o idraulico.	X	vettore posizione sulla traiettoria.
Re	numero di Reynolds.	x	vettore posizione.
Re_*	numero di Reynolds per il trasporto solido.	x	coordinata cartesiana ortogonale.
Ro	numero di Rossby.	Y	profondità della corrente a pelo libero.
r	raggio generico.	Y_c	profondità critica.
r_0	raggio della parete.	Y_m	profondità media di una corrente a pelo libero.
S	tensore delle velocità di distorsione.	Y_u	profondità del moto uniforme.
S_{ik}	componente di S .	Y_0	spessore medio della corrente.
\mathcal{S}	salinità.	y	coordinata cartesiana ortogonale.
S	spinta totale o quantità di moto totale.	z	coordinata cartesiana ortogonale; quota.
St	numero di Strouhal.	\hat{z}	coordinata cartesiana ortogonale distinta dalla verticale.
s	coordinata curvilinea corrente.	α	coefficiente di dilatazione termica; coefficiente per l'energia cinetica.
T	tensore degli sforzi.	β	coefficiente di comprimibilità; coefficiente per la quantità di moto.
T_{ik}	componente di T .	β_r	coefficiente di resistenza secondo Darcy.
T_R	tensore degli sforzi di Reynolds.	Γ	circolazione della velocità.
T_{Rik}	componente di T_R .	γ	costante di Euler e Mascheroni.
T	intervallo di tempo.	γ	peso specifico.
Ta	numero di Taylor.	γ_B	indice di scabrezza secondo Bazin.
τ	temperatura.	δ	angolo di contatto.
t	tempo.	δ_{ik}	simbolo di Kronecker.
\mathcal{U}	energia interna.	ε	scabrezza assoluta.
u	energia interna specifica.	ε_T	modulo di comprimibilità a temperatura costante.
U	velocità media sullo spazio.	ε_e	modulo di comprimibilità ad entropia costante.
V	volume.	ε_R	grado di reazione.
v	vettore velocità.	ζ	affondamento.
v	modulo di v e sue componenti.	η	rendimento.
v_a	vettore velocità asintotica.	Θ	angolo di inclinazione.
v_a	modulo di v_a e sue componenti.	θ	angolo generico.
v_D	vettore velocità di deriva.	ϑ	colatitudine; durata di fase.
v_D	modulo di v_D e sue componenti.	ϑ'	latitudine.
v^*	velocità complessa.	\varkappa	costante gravitazionale.
v_*	velocità di attrito.	λ	coefficiente di perdita distribuita.
ω	densità del flusso di potenza termica.	μ	coefficiente di viscosità dinamica.
ω_a	densità apparente di portata volumetrica.	μ'	secondo coefficiente di viscosità dinamica.

ν	coefficiente di viscosità cinematica.	v	argomento delle funzioni ellittiche.
ε	potenziale complesso.	Φ	intensità del trasporto solido secondo Einstein.
ξ	coefficiente di perdita concentrata.	ϕ	longitudine; azimut.
Π	risultante degli sforzi di superficie.	ϕ	potenziale per le forze specifiche di massa.
Π	modulo di Π e sue componenti.	ϕ_{ce}	potenziale per le forze centrifughe specifiche.
Π_m	momento risultante degli sforzi di superficie.	φ	potenziale scalare per le velocità.
Π_m	modulo di Π_m e sue componenti.	χ	coefficiente di resistenza secondo Chézy.
ρ	densità.	Ψ	parametro di Einstein.
ρ_s	densità del materiale solido.	ψ	funzione di corrente di Stokes.
\mathcal{E}	posizione sul piano complesso.	Ψ	potenziale vettore per le velocità.
σ	tensione superficiale.	ψ	componenti di Ψ , funzione di corrente di Lagrange inclusa.
$\sigma_{L,A}$	tensione superficiale al contatto liquido aeriforme.	Ω	tensore delle velocità di rotazione rigida.
$\sigma_{S,A}$	tensione superficiale al contatto solido aeriforme.	Ω_{ik}	componenti di Ω .
$\sigma_{S,L}$	tensione superficiale al contatto solido liquido.	Ω	area piana.
ζ	variabile ausiliaria.	ω	vettore velocità di rotazione.
τ	vettore sforzo di superficie.	ω	modulo di ω e sue componenti.
τ	modulo di τ e sue componenti.	ω_s	vettore velocità di rotazione laterale.
τ_{cr}	sforzo critico di trascinamento.	ω_s	modulo di ω_s e sue componenti.
τ_1	sforzo di soglia secondo Bingham.	ω_s	vettore velocità di rotazione laterale del geoide.
τ_0	sforzo tangenziale al contorno.	ω_s	modulo di ω_s e sue componenti.
τ_0'	sforzo tangenziale connesso alla rugosità del fondo.		
τ_0''	sforzo tangenziale connesso alla forma del fondo.		
τ_*	parametro di stabilità secondo Shields.		

PARTE PRIMA

1. MARCHI-RUBATTA.



CAPITOLO PRIMO

INTRODUZIONE

1.1. La misura delle grandezze fisiche.

Per *misura* di una grandezza si intende il rapporto tra essa ed un'altra grandezza della stessa specie scelta come *unità*. Questo implica intanto l'esistenza di una definizione operativa che fissi il procedimento da seguire per effettuare il confronto della grandezza in esame con la grandezza adottata quale unità, permettendo nello stesso tempo di accertare che le due grandezze in questione, quella soggetta a misura e quella campione, siano effettivamente della stessa specie. Occorre poi che esista, o che si sappia almeno come produrre, la grandezza campione.

Al mutare della grandezza scelta come campione cambiano naturalmente tutti i valori delle misure per le grandezze della specie fisica considerata. Si richiede però che il rapporto fra le misure di due grandezze resti inalterato, in modo da assicurare a tali rapporti un *valore oggettivo*, indipendente dalla scelta particolare dell'unità di misura.

La codificazione di un procedimento di misura richiede una lunga serie di osservazioni sperimentali. Per molte grandezze fisiche, e per le lunghezze in particolare, l'accumulo delle conoscenze necessarie è stato iniziato in epoche ormai remote, ed i risultati sono ritenuti così ovvi, che i passi compiuti per giungere alla definizione delle loro misure riescono poco evidenti. Gli stessi procedimenti appaiono invece molto più chiari ripercorrendone la storia nel caso di grandezze fisiche assoggettate a misura solo in tempi recenti, come è avvenuto, ad esempio, per la temperatura.

La continua pratica sperimentale ha fornito dei legami fra le misure di grandezze di specie diversa, e questo consente di suddividere le grandezze fisiche in due gruppi: quello delle grandezze per le quali rimane

inalterata la definizione di misura proposta in partenza, che vengono dette *grandezze fondamentali*, e quello delle *grandezze derivate*, da misurare in funzione delle prime attraverso nuove definizioni operative. Si può considerare tipica la situazione che segue. Una volta stabiliti i procedimenti da seguire per misurare le forze statiche, le masse inerziali e le accelerazioni, l'indagine sperimentale ha avvertito che, nell'ambito del laboratorio, si manifesta costantemente una proporzionalità diretta tra le forze agenti su di un corpo, misurate staticamente, ed il prodotto della massa inerziale del corpo in quiete per la sua accelerazione di partenza connessa all'applicazione delle forze. Accertato questo fatto, non è più necessario mantenere in uso tre definizioni indipendenti per la misura delle forze statiche, delle masse inerziali, e delle accelerazioni: le misure di due di queste grandezze possono restare ancora inalterate, conservando ad esse il ruolo di grandezze fondamentali, mentre la terza può essere considerata come grandezza derivata. In particolare, volendo assegnare alla forza il carattere di grandezza derivata, si può definirne l'unità di misura adottando quale campione quella forza che, applicata ad una massa unitaria, determina in questa un primo atto di moto con accelerazione unitaria. Ciò fatto, la misura di una forza è ricondotta alla misura di una massa di prova, alla misura dell'accelerazione iniziale che tale massa subisce a seguito dell'applicazione della forza in esame, ed al calcolo del prodotto dei risultati di queste due operazioni.

Naturalmente, restano arbitrari il numero e la specie di grandezze per le quali mantenere inalterata la definizione di misura originaria, e da considerare perciò come fondamentali. È solo per lunga abitudine che si ritengono fondamentali le quattro grandezze fisiche lunghezza, tempo, massa e temperatura.

Ugualmente arbitraria è la scelta delle unità di misura e dei relativi campioni, che vengono fissati in base a convenzioni internazionali periodicamente aggiornate, con il fine di garantire uniformità nell'impiego delle unità di misura e disponibilità di campioni facilmente riproducibili con precisione elevata.

Al presente, sono in uso le convenzioni che seguono.

L'unità di misura di *lunghezza* è il *metro*, con simbolo m, e con campione legato alla lunghezza d'onda di una radiazione emessa dall'isotopo 86 del Krypton in particolari condizioni.

Per il *tempo*, l'unità di misura è il *secondo*, con simbolo s, e con campione ancorato al periodo di una specifica oscillazione dell'isotopo 133 del Cesio.

Per la *massa* si impiega quale unità di misura il *kilogrammo*, con simbolo kg, e se ne adotta il campione costituito dalla massa di un corpo

appositamente conservato a Parigi, anche se si conta di sostituire ad esso un numero appropriato di atomi di Carbonio nella forma isotopica 12.

Infine, l'unità di misura della *temperatura* è il *grado kelvin*, con simbolo K: esso è pari all'intervallo di temperature che consente di effettuare cicli di Carnot aventi rendimento numericamente uguale all'inverso della temperatura superiore; mentre il campione relativo è fissato in modo implicito imponendo il valore di 273,16 K alla temperatura del punto triplo dell'acqua, ossia alla temperatura che permette la coesistenza di ghiaccio ordinario, acqua e vapor d'acqua in condizioni di equilibrio.

Anche nella definizione di misura per le grandezze derivate, e nella scelta delle rispettive unità di misura sussiste un'ampia arbitrarietà. Così, una volta convenuto di considerare la forza come grandezza derivata, se ne può definire la misura non solo in base alla legge fondamentale della dinamica, come si è fatto prima, ma anche in base ad altra legge fisica che coinvolga la forza stessa: ad esempio, in base alla legge della gravitazione. Oppure, mantenendo ferma la definizione di misura che si appoggia alla legge fondamentale della dinamica, si può impiegare quale unità di misura un qualunque multiplo dell'unità precedentemente indicata.

Esiste tuttavia una larga convergenza sull'uso di un corpo di definizioni per le misure e per le unità delle grandezze derivate. Le unità di misura che lo compongono verranno ricordate in seguito, al momento del loro primo impiego; intanto, si indicano qui quelle che seguono, elencate insieme al loro simbolo ed al loro nome.

Le unità di misura per le *aree* ed i *volumi* sono il metro quadrato, ossia l'area di un quadrato di lato unitario, ed il metro cubo, ossia il volume di un cubo di lato unitario. I simboli corrispondenti sono m^2 , e m^3 , rispettivamente.

Per gli *angoli piani* si adotta come misura il rapporto fra la lunghezza dell'arco sotteso su una circonferenza avente il centro nel vertice dell'angolo e la lunghezza del raggio di tale circonferenza: l'unità di misura è il radiante, e viene indicato con l'abbreviazione rad.

Velocità lineari e *velocità angolari* sono misurate in termini di spazi percorsi rapportati al tempo impiegato a percorrerli. Le relative unità di misura sono, nell'ordine, il metro al secondo, $m s^{-1}$, ed il radiante al secondo, $rad s^{-1}$.

Definizioni simili valgono per le *accelerazioni lineari* e per le *accelerazioni angolari*; si tratta delle variazioni di velocità rapportate al tempo richiesto dal loro verificarsi. Le unità di misura sono il metro od il radiante al secondo per secondo, ed hanno simbolo $m s^{-2}$, ovvero $rad s^{-2}$.

La *frequenza*, ossia il numero di ripetizioni di un evento nell'intervallo di tempo di un secondo, è misurata in *hertz*, con simbolo Hz.

La *quantità di materia* viene espressa dal rapporto fra il numero di entità elementari presenti ed il numero di atomi di Carbonio della forma isotopica 12 necessario a formare una massa di 12 kg. L'unità di misura, la *kilomole*, va indicata con il simbolo kmol.

Il prodotto della massa di un corpo per la sua velocità costituisce la *quantità di moto* del corpo stesso. Essa va misurata in kilogrammi per metri al secondo, kg m s^{-1} . Il *momento della quantità di moto* si misura quindi in kilogrammi per metri quadrati al secondo, $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$.

Le *forze*, come si è già accennato, vengono misurate dall'accelerazione iniziale prodotta su una massa unitaria: l'unità di misura è indicata con N, ed è detta *newton*. È perciò $1 \text{ N} = 1 \text{ kg m s}^{-2}$. *Momenti e coppie* sono misurati di conseguenza in newton per metri, N m.

L'unità di misura per il *lavoro* svolto e per l'*energia* impegnata ha simbolo J, è detta *joule* ed è costituita dal lavoro eseguito dalla forza di un newton per spostare di un metro il suo punto di applicazione nella stessa direzione della forza. Così, $1 \text{ J} = 1 \text{ N m}$.

Rapportando il lavoro svolto al tempo impiegato si ha la *potenza*, la cui unità di misura, il *watt*, indicata con W, corrisponde quindi al lavoro di un joule prodotto in un secondo: $1 \text{ W} = 1 \text{ J s}^{-1}$.

Si ricorda ancora che alle unità dotate di nome proprio si possono sostituire i rispettivi multipli o sottomultipli, per esprimere le misure con cifre più maneggevoli. L'unità di misura così modificata conserva il nome dell'unità originaria, corretto però con uno dei prefissi riportati nella tabella 1.1.

TABELLA 1.1. - Prefissi per i nomi delle unità di misura.

Prefisso	Simbolo	Fattore moltiplicativo
exa	E	10^{18}
peta	P	10^{15}
tera	T	10^{12}
giga	G	10^9
mega	M	10^6
kilo	k	10^3
etto	h	10^2
deca	da	10^1
deci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
milli	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}
atto	a	10^{-18}

TABELLA 1.2. - Unità di misura di impiego frequente.

Grandezza	Unità SI		Unità estranee		
	nome	simbolo	nome	simbolo	equivalenza
Lunghezza	metro	m	miglio marino	n mi	1 n mi = 1852,0 m
Area	—	m ²	ettaro	ha	1 ha = 10 ⁴ m ²
Volume	—	m ³	litro	l	1 l = 10 ⁻³ m ³
Angolo piano	radiante	rad	grado sessagesimale minuto d'angolo secondo d'angolo grado centesimale angolo giro	° ' " g	360° = 2π rad 21 600' = 2π rad 1 296 000" = 2π rad 400g = 2π rad 1 ag = 2π rad
Tempo	secondo	s	minuto ora giorno solare	min h d	1 min = 60 s 1 h = 3 600 s 1 d = 86 400 s
Velocità	—	m s ⁻¹	nodo kilometro all'ora	kn km h ⁻¹	3 600 kn = 1 852,0 m s ⁻¹ 3,6 km h ⁻¹ = 1 m s ⁻¹
Velocità angolare	—	rad s ⁻¹	giri al minuto	giri min ⁻¹	60 giri min ⁻¹ = 2π rad s ⁻¹
Accelerazione	—	m s ⁻²	—	—	—
Accelerazione angolare	—	rad s ⁻²	—	—	—
Frequenza	hertz	Hz	—	—	—
Massa	kilogrammo	kg	— carato quintale tonnellata	— kgf m ⁻¹ s ² q t	1 kgf m ⁻¹ s ² = 9,806 65 kg 1 carato = 2 · 10 ⁻⁴ kg 1 q = 10 ³ kg 1 t = 10 ³ kg
Quantità di materia	kilomole	kmol	—	—	—
Quantità di moto	—	kg m s ⁻¹	—	—	—
Momento di quantità di moto	—	kg m ² s ⁻¹	—	—	—
Forza	newton	N	kilogrammo forza	kgf	1 kgf = 9,806 65 N
Momento di una forza	—	N m	—	—	—
Lavoro ed energia	joule	J	electronvolt piccola caloria	eV kgf m cal	1 eV = 1,602 19 · 10 ⁻¹⁹ J 1 kgf m = 9,806 65 J 1 cal = 4,186 8 J
Potenza	watt	W	cavallo	kgf m s ⁻¹ CV	1 kgf m s ⁻¹ = 9,806 65 W 1 CV = 75 · 9,806 65 W
Temperatura	grado kelvin	K	grado celsius	°C	7°C = 7(K) - 273,15

Parallelamente alle unità di misura fin qui richiamate, che fanno parte del *sistema internazionale delle unità di misura*, SI, vengono impiegate anche unità differenti. In particolare, è ancora molto usata, per le forze, l'unità chiamata kilogrammoforza, indicata con il simbolo kgf, il cui campione è costituito dalla forza capace di imprimere un'accelerazione di partenza uguale a $9,80665 \text{ m s}^{-2}$ al corpo depositato a Parigi e già ricordato quale prototipo per la massa unitaria. Sussiste quindi l'equivalenza $1 \text{ kgf} = 9,80665 \text{ N}$.

In molte applicazioni tecniche, le temperature τ sono espresse nella scala celsius, che è formata di gradi celsius, con simbolo $^{\circ}\text{C}$, e che è definita dalla relazione

$$\tau(^{\circ}\text{C}) = \tau(\text{K}) - 273,15.$$

Al punto triplo dell'acqua compete perciò la temperatura celsius di $0,01^{\circ}\text{C}$. L'impiego della scala celsius consente di esprimere le temperature ambientali correnti con numeri più semplici; ma la scala kelvin va preferita, in quanto l'esperienza porta ad ammettere che essa assegni solo valori positivi alle temperature che i corpi possono assumere. Anche per quest'ultimo motivo, la scala kelvin è detta scala delle temperature assolute.

Un quadro generale della situazione presente per la misura delle grandezze fisiche elencate fin qui è fornito dalla tabella 1.2, che riporta anche i fattori di conversione delle unità estranee al sistema SI alle corrispondenti unità di tale sistema.

1.2. Notazioni e formule impiegate.

I fenomeni esaminati in seguito verranno di norma riferiti ad un sistema di coordinate spaziali cartesiane ortogonali x, y, z , di orientamento destro. Del riferimento faranno parte anche i versori fondamentali $\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z$, di lunghezza unitaria, diretti nell'ordine parallelamente agli assi x, y, z , ed orientati nel verso delle coordinate crescenti. Il punto geometrico verrà indicato a mezzo delle sue coordinate x, y, z , oppure, di preferenza, ricorrendo al vettore \mathbf{x} , di componenti x, y, z , applicato nell'origine degli assi. L'istante di tempo verrà indicato con t .

Si prenderanno in considerazione *campi scalari*

$$b = b(x, y, z, t) = b(\mathbf{x}, t),$$

dipendenti perciò, in generale, anche dal tempo t . Verranno anche impiegate terne di campi scalari b_x, b_y, b_z , ciascuno dei quali associato all'asse della coordinata che figura al piede, e si dirà che essi costituiscono com-

plissivamente le *componenti scalari* lungo i medesimi assi di un *campo vettoriale*

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = b_x(\mathbf{x}, t)\mathbf{i}_x + b_y(\mathbf{x}, t)\mathbf{i}_y + b_z(\mathbf{x}, t)\mathbf{i}_z$$

solo se alla direzione individuata dal vettore

$$\mathbf{n} = n_x\mathbf{i}_x + n_y\mathbf{i}_y + n_z\mathbf{i}_z$$

venga contemporaneamente associata la quantità scalare

$$b_n(\mathbf{x}, t) = n_x b_x(\mathbf{x}, t) + n_y b_y(\mathbf{x}, t) + n_z b_z(\mathbf{x}, t).$$

Lo stesso campo vettoriale verrà indicato occasionalmente con la scrittura matriciale

$$\mathbf{b} \equiv [b_x \quad b_y \quad b_z].$$

Si farà ricorso pure a terne di campi vettoriali $\mathbf{b}(\mathbf{i}_x)$, $\mathbf{b}(\mathbf{i}_y)$, $\mathbf{b}(\mathbf{i}_z)$, associati nell'ordine alle direzioni degli assi x, y, z , e si dirà che essi costituiscono insieme le *componenti vettoriali* lungo gli stessi assi di un *campo tensoriale* del secondo ordine, da indicare come $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$, purché venga nello stesso tempo associato il vettore

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}) = n_x \mathbf{b}(\mathbf{x}, t; \mathbf{i}_x) + n_y \mathbf{b}(\mathbf{x}, t; \mathbf{i}_y) + n_z \mathbf{b}(\mathbf{x}, t; \mathbf{i}_z)$$

alla direzione individuata dal vettore

$$\mathbf{n} = n_x\mathbf{i}_x + n_y\mathbf{i}_y + n_z\mathbf{i}_z.$$

Dato che ciascun vettore componente $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t; \mathbf{i}_i)$, ove i può assumere le determinazioni x, y, z , presenta a sua volta tre componenti scalari $b_x(\mathbf{x}, t; \mathbf{i}_i)$, $b_y(\mathbf{x}, t; \mathbf{i}_i)$, $b_z(\mathbf{x}, t; \mathbf{i}_i)$, lo stesso campo tensoriale ammette pure nove componenti scalari. È comodo adottare per ciascuna di queste ultime il simbolo B_{ik} , in cui i e k vanno precisate singolarmente come $x, y, o z$. La B_{ik} è la componente scalare nella direzione dell'asse k della componente vettoriale $\mathbf{b}(\mathbf{i}_i)$ associata all'asse i , come indicato in figura 1.1. Tali componenti possono essere riunite nella matrice

$$\mathbf{B} \equiv \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xz} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{yz} \\ B_{zx} & B_{zy} & B_{zz} \end{bmatrix},$$

collocando cioè ciascuna B_{ik} all'incrocio della riga i con la colonna k .

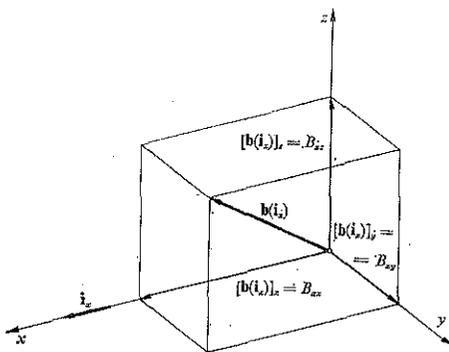


Fig. 1.1. — Il vettore $b(i_x)$ è la componente vettoriale del tensore \mathbf{B} correlata alla direzione ed al verso dell'asse x . Le componenti di $b(i_x)$ lungo gli assi coordinati sono a loro volta componenti scalari di \mathbf{B} correlate alla direzione ed al verso dell'asse x .

In questo quadro si distinguono i *termini diagonali*, aventi due indici uguali, dai *termini rettangolari*, con indici distinti. Il tensore rappresentato dal quadro è detto *simmetrico* se ciascun termine B_{ik} è uguale a quello B_{ki} ; lo si dice invece *emisimmetrico* se risulta sempre $B_{ik} = -B_{ki}$. Si ricorda ancora che la somma dei termini diagonali è detta *traccia*, e che quando la traccia è nulla, come avviene ad esempio per i tensori emisimmetrici, il tensore è detto *deviatore*. Inoltre, quando risulta $B_{ik} = c\delta_{ik}$, intendendo con δ_{ik} il simbolo di Kronecker

$$\delta_{ik} \equiv \begin{cases} 1 & \text{per } i = k \\ 0 & \text{per } i \neq k, \end{cases}$$

si dice che il tensore è *isotropo*. Un particolare tensore isotropo è il *tensore unità*, \mathbf{I} , con quadro

$$\mathbf{I} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

di termini $I_{ik} = \delta_{ik}$.

Sulle grandezze costituenti i campi ora definiti si eseguiranno le usuali operazioni algebriche. Oltre alla *somma*, che va sempre condotta sulle componenti omonime, ed alla *moltiplicazione per uno scalare*, che va sempre effettuata su tutte le componenti, si dovranno impiegare le operazioni seguenti: calcolo del *modulo di un vettore*

$$|\mathbf{b}| = b = \sqrt{\sum_k^3 b_k^2} = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2},$$

prodotto scalare di vettori

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \equiv \sum_1^3 b_k c_k = b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z,$$

prodotto vettoriale

$$\mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \\ = \mathbf{i}_x(b_y c_z - b_z c_y) + \mathbf{i}_y(b_z c_x - b_x c_z) + \mathbf{i}_z(b_x c_y - b_y c_x) = -\mathbf{c} \wedge \mathbf{b},$$

prodotto misto

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{B} \equiv \sum_1^3 i_{i,k} c_i B_{ik}, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{c} \equiv \sum_1^3 i_{i,k} i_k c_i B_{ki},$$

il primo dei quali può essere inteso come prodotto righe per colonne delle due matrici, nel senso che

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{B} = [c_x \quad c_y \quad c_z] \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xz} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{yz} \\ B_{zx} & B_{zy} & B_{zz} \end{bmatrix} = \\ = [c_x B_{xx} + c_y B_{yx} + c_z B_{zx} \quad c_x B_{xy} + c_y B_{yy} + c_z B_{zy} \quad c_x B_{xz} + c_y B_{yz} + c_z B_{zz}],$$

mentre il secondo è l'analogo prodotto righe per righe, ed infine *doppio prodotto scalare di tensori*

$$\mathbf{B} : \mathbf{C} \equiv \sum_1^3 i_{i,k} B_{ik} C_{ik} = B_{xx} C_{xx} + B_{xy} C_{xy} + B_{xz} C_{xz} + \\ + B_{yx} C_{yx} + B_{yy} C_{yy} + B_{yz} C_{yz} + \\ + B_{zx} C_{zx} + B_{zy} C_{zy} + B_{zz} C_{zz}.$$

Le componenti dei campi scalari, vettoriali e tensoriali dipendono, in genere, dal punto \mathbf{x} e dall'istante t . Quando le stesse componenti risultano invece indipendenti da \mathbf{x} si dice che il campo in esame è *uniforme*; per contro, si dice che il campo è *permanente* o *stazionario* quando le sue componenti non dipendono dal tempo.

Molte operazioni sui campi variabili richiedono vincoli al tipo della distribuzione con \mathbf{x} e t . Per richiamarli, si dirà che il campo è di *classe* C^n , ed è perciò costituito da componenti continue e dotate di derivate continue, fino a quelle di ordine n incluso, intendendo che l'appartenenza alla classe C^n è già sufficiente per svolgere le considerazioni presentate, mentre l'appartenenza alla classe C^{n-1} è soltanto necessaria.

Ammesso che i campi, scalari, vettoriali o tensoriali, siano di classe C^1 , si possono applicare ad essi gli operatori differenziali del primo ordine: *gradiente*, *divergenza* e *rotore*. Questi verranno impiegati in accordo con le definizioni riportate qui di seguito. Le stesse definizioni sono espresse anche in termini dell'operatore vettoriale *nabla*

$$\nabla \equiv \mathbf{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z},$$

per agevolare il confronto delle varie formule con quelle esposte in altri testi. Si intenderà dunque

$$\text{grad } b \equiv \sum_1^3 \mathbf{i}_k \frac{\partial b}{\partial x_k} = \mathbf{i}_x \frac{\partial b}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial b}{\partial y} + \mathbf{i}_z \frac{\partial b}{\partial z} = \nabla b,$$

$$\text{div } \mathbf{b} \equiv \sum_1^3 \frac{\partial b_k}{\partial x_k} = \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{b},$$

$$\text{rot } \mathbf{b} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i}_x \left(\frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z} \right) + \mathbf{i}_y \left(\frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x} \right) + \mathbf{i}_z \left(\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y} \right) = \nabla \wedge \mathbf{b},$$

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{B} &\equiv \sum_1^3 \frac{\partial b(\mathbf{i}_k)}{\partial x_k} = \sum_1^3 \mathbf{i}_k \frac{\partial B_{ik}}{\partial x_i} = \mathbf{i}_x \left(\frac{\partial B_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial B_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial B_{zx}}{\partial z} \right) + \\ &+ \mathbf{i}_y \left(\frac{\partial B_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial B_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial B_{zy}}{\partial z} \right) + \mathbf{i}_z \left(\frac{\partial B_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial B_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial B_{zz}}{\partial z} \right) = \nabla \cdot \mathbf{B}. \end{aligned}$$

A quest'ultima corrisponde la notazione matriciale

$$[(\text{div } \mathbf{B})_x \quad (\text{div } \mathbf{B})_y \quad (\text{div } \mathbf{B})_z] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xz} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{yz} \\ B_{zx} & B_{zy} & B_{zz} \end{bmatrix}.$$

Sempre nell'ipotesi che i campi siano di classe C^1 , valgono le relazioni

$$\text{grad}(cb) = c \text{ grad } b + (\text{grad } c) b$$

$$\text{div}(c\mathbf{b}) = c \text{ div } \mathbf{b} + (\text{grad } c) \cdot \mathbf{b}$$

$$\text{rot}(c\mathbf{b}) = c \text{ rot } \mathbf{b} + (\text{grad } c) \wedge \mathbf{b},$$

ossia

$$\begin{aligned}\nabla(cb) &= c\nabla b + (\nabla c)b \\ \nabla \cdot (c\mathbf{b}) &= c\nabla \cdot \mathbf{b} + (\nabla c) \cdot \mathbf{b} \\ \nabla \wedge (c\mathbf{b}) &= c\nabla \wedge \mathbf{b} + (\nabla c) \wedge \mathbf{b}.\end{aligned}$$

Se poi i campi sono di classe C^2 , si ha

$$\begin{aligned}\text{rot grad } b &= \nabla \wedge \nabla b = 0 \\ \text{div rot } \mathbf{b} &= \nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{b}) = 0,\end{aligned}$$

e si può impiegare il *laplaciano*, definito come

$$\begin{aligned}\nabla^2 b &\equiv \sum_1^3 \frac{\partial^2 b}{\partial x_k^2} = \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} \\ \nabla^2 \mathbf{b} &\equiv \sum_1^3 \mathbf{i}_k \nabla^2 b_k = \mathbf{i}_x \nabla^2 b_x + \mathbf{i}_y \nabla^2 b_y + \mathbf{i}_z \nabla^2 b_z.\end{aligned}$$

Si vede subito che è

$$\begin{aligned}\nabla^2 b &= \text{div grad } b = \nabla \cdot \nabla b, \\ \nabla^2 \mathbf{b} &= \text{grad div } \mathbf{b} - \text{rot rot } \mathbf{b} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{b}) - \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{b}).\end{aligned}$$

Saranno impiegate inoltre le trasformazioni integrali costituenti il *teorema di Gauss*,

$$\int_V \frac{\partial b}{\partial x_i} dV = - \int_A b n_i dA,$$

il *teorema del gradiente*,

$$\int_V \text{grad } b dV = - \int_A b \mathbf{n} dA,$$

il *teorema della divergenza*,

$$\int_V \text{div } \mathbf{b} dV = - \int_A \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} dA,$$

e la *formula di Kelvin*, nota anche come formula di Stokes,

$$\int_A \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{b} dA = \int_L \mathbf{b} \cdot d\mathbf{x},$$

ove \mathbf{n} indica il versore normale ad A , diretto verso il volume V racchiuso da A , come indicato nella figura 1.2, nel caso delle prime tre trasforma-

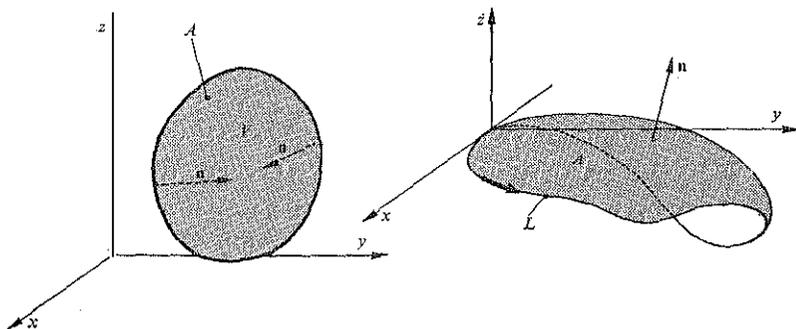


Fig. 1.2. - Normale n per le superfici chiuse, e rapporto della normale n con il verso di percorrenza sul bordo delle superfici orientate.

zioni, diretto invece nel caso della quarta, come riportato nella stessa figura 1.2, in modo da risultare concorde con il verso positivo dell'asse z , qualora l'asse x , tangente al bordo L di A in un suo punto, sia orientato concordemente al verso seguito su L per l'integrazione, e l'asse y , tangente ad A nello stesso punto, sia diretto verso A . Ciascuna delle relazioni integrali citate è subordinata al verificarsi di particolari condizioni sul campo considerato e sulla geometria coinvolta. Per l'uso che se ne dovrà fare in seguito, basterà ammettere che i campi siano di classe C^1 nei domini V connessi ai primi tre teoremi, oppure, nel caso della formula di Kelvin, in un dominio avente A quale confine parziale. Riguardo alla geometria, basterà ammettere che le superfici A siano limitate e regolari, ossia decomponibili in un numero finito di superfici dotate di normale variabile con continuità, ed abbiano, eventualmente, contorno L regolare, decomponibile quindi a sua volta in un numero finito di archi aventi tangente variabile con continuità.

Occasionalmente, si farà uso del *riferimento cilindrico* indicato in figura 1.3. Per individuare un punto si ricorre qui alla sua ascissa x lungo l'asse, alla sua distanza r dallo stesso asse, ed alla sua anomalia ϑ rispetto ad un piano assiale. Del riferimento fanno parte anche i vettori unitari $\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\vartheta$ associati a ciascun punto, diretti tangenzialmente alle linee lungo le quali varia solamente la coordinata indicata, ed orientati nel verso in cui questa cresce. Sul campo scalare

$$b = b(x, r, \vartheta)$$

e sul campo vettoriale

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}(x, r, \vartheta) = b_x \mathbf{i}_x + b_r \mathbf{i}_r + b_\vartheta \mathbf{i}_\vartheta$$

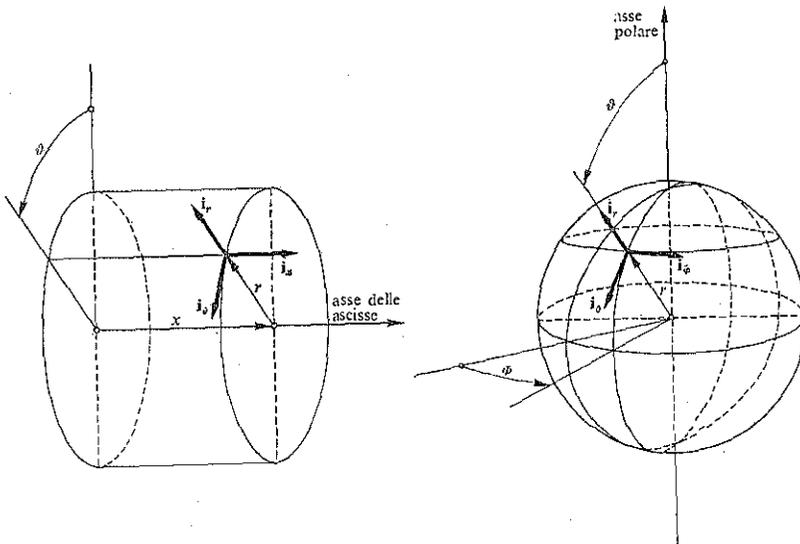


Fig. 1.3. - Coordinate cilindriche e sferiche.

si dovranno eseguire le operazioni

$$\text{grad } b = \frac{\partial b}{\partial x} \mathbf{i}_x + \frac{\partial b}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial b}{\partial \vartheta} \mathbf{i}_\vartheta$$

$$\text{div } \mathbf{b} = \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r b_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial b_\vartheta}{\partial \vartheta}$$

$$\text{rot } \mathbf{b} = \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial (r b_\vartheta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial b_r}{\partial \vartheta} \right\} \mathbf{i}_x + \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial b_x}{\partial \vartheta} - \frac{\partial b_\vartheta}{\partial x} \right\} \mathbf{i}_r + \left\{ \frac{\partial b_r}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial r} \right\} \mathbf{i}_\vartheta.$$

Da esse segue in particolare

$$\nabla^2 b = \text{div grad } b = \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial b}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 b}{\partial \vartheta^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{b} = \text{grad div } \mathbf{b} - \text{rot rot } \mathbf{b} =$$

$$= (\nabla^2 b_x) \mathbf{i}_x + \left(\nabla^2 b_r - \frac{b_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial b_\vartheta}{\partial \vartheta} \right) \mathbf{i}_r + \left(\nabla^2 b_\vartheta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial b_r}{\partial \vartheta} - \frac{b_\vartheta}{r^2} \right) \mathbf{i}_\vartheta.$$

Altrettanto saltuario sarà l'uso del *riferimento sferico*, schematizzato nella stessa figura 1.3. I singoli punti sono individuati qui a mezzo della loro distanza dall'origine r , della loro distanza angolare dall'asse polare,

ossia dalla loro colatitudine ϑ , e dalla loro distanza angolare da un piano assiale, e cioè dalla loro longitudine ϕ . I vettori unitari $\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\vartheta, \mathbf{i}_\phi$ sono ancora diretti tangenzialmente alle linee lungo le quali varia solamente la coordinata messa in evidenza, e sono sempre orientati nel verso in cui tale coordinata aumenta. Sul campo scalare

$$b = b(r, \vartheta, \phi)$$

e sul campo vettoriale

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}(r, \vartheta, \phi) = b_r \mathbf{i}_r + b_\vartheta \mathbf{i}_\vartheta + b_\phi \mathbf{i}_\phi$$

si eseguiranno le operazioni

$$\text{grad } b = \frac{\partial b}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial b}{\partial \vartheta} \mathbf{i}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial b}{\partial \phi} \mathbf{i}_\phi$$

$$\text{div } \mathbf{b} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 b_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial(b_\vartheta \sin \vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial b_\phi}{\partial \phi}$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{b} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left\{ \frac{\partial(b_\phi \sin \vartheta)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial b_\vartheta}{\partial \phi} \right\} \mathbf{i}_r + \\ &+ \frac{1}{r} \left\{ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial b_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r b_\phi)}{\partial r} \right\} \mathbf{i}_\vartheta + \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial(r b_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial b_r}{\partial \vartheta} \right\} \mathbf{i}_\phi. \end{aligned}$$

È quindi

$$\begin{aligned} \nabla^2 b &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial b}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial b}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 b}{\partial \phi^2} \\ \nabla^2 \mathbf{b} &= \left\{ \nabla^2 b_r - \frac{2b_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial(b_\vartheta \sin \vartheta)}{\partial \vartheta} - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial b_\phi}{\partial \phi} \right\} \mathbf{i}_r + \\ &+ \left\{ \nabla^2 b_\vartheta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial b_r}{\partial \vartheta} - \frac{b_\vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} - \frac{2 \cos \vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial b_\phi}{\partial \phi} \right\} \mathbf{i}_\vartheta + \\ &+ \left\{ \nabla^2 b_\phi + \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial b_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial b_\vartheta}{\partial \phi} - \frac{b_\phi}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right\} \mathbf{i}_\phi. \end{aligned}$$

1.3. Sistemi di riferimento in moto relativo.

A volte si dovranno collegare fra loro le descrizioni cinematiche fatte da osservatori che appartengono a riferimenti in moto uno rispetto all'altro. Si ricorda per questo che se \mathbf{x}_0 è la posizione istantanea, in un dato riferimento, dell'origine di un altro riferimento in moto rispetto al primo, fra i vettori \mathbf{x} ed $\bar{\mathbf{x}}$ che indicano la posizione istantanea di uno stesso punto

nei confronti della terna fissa e di quella mobile, sussiste la relazione

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \tilde{\mathbf{x}},$$

ossia

$$\sum_1^3 x_k \mathbf{i}_k = \sum_1^3 x_{0k} \mathbf{i}_k + \sum_1^3 \tilde{x}_k \tilde{\mathbf{i}}_k.$$

Si ammette che tutti questi vettori varino eventualmente nel tempo, presentando però derivate temporali prime e seconde finite e continue. In particolare, all'osservatore solidale con la terna fissa, i versori $\tilde{\mathbf{i}}_k$ dell'altra terna possono apparire in moto: se $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare istantanea di rotazione di quest'ultima terna rispetto alla prima si ha precisamente

$$\frac{d\tilde{\mathbf{i}}_k}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \tilde{\mathbf{i}}_k.$$

Derivando il legame tra i vettori posizione risulta allora

$$\sum_1^3 \frac{dx_k}{dt} \mathbf{i}_k = \sum_1^3 \frac{dx_{0k}}{dt} \mathbf{i}_k + \sum_1^3 \frac{d\tilde{x}_k}{dt} \tilde{\mathbf{i}}_k + \boldsymbol{\omega} \wedge \sum_1^3 \tilde{x}_k \tilde{\mathbf{i}}_k,$$

ossia

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \tilde{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \tilde{\mathbf{x}},$$

in cui

$$\mathbf{v} = \sum_1^3 \frac{dx_k}{dt} \mathbf{i}_k, \quad \mathbf{v}_0 = \sum_1^3 \frac{dx_{0k}}{dt} \mathbf{i}_k, \quad \tilde{\mathbf{v}} = \sum_1^3 \frac{d\tilde{x}_k}{dt} \tilde{\mathbf{i}}_k,$$

indicano la velocità del punto in esame e quella dell'origine della terna mobile, quali vengono stimate dall'osservatore fisso, o, rispettivamente, la velocità dello stesso punto in esame, secondo la misura che ne fa l'osservatore solidale con la terna mobile. È uso chiamare *velocità di trascinamento* la somma

$$\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \wedge \tilde{\mathbf{x}}.$$

Un'ulteriore derivazione fornisce

$$\begin{aligned} \sum_1^3 \frac{d^2 x_k}{dt^2} \mathbf{i}_k &= \sum_1^3 \frac{d^2 x_{0k}}{dt^2} \mathbf{i}_k + \sum_1^3 \frac{d^2 \tilde{x}_k}{dt^2} \tilde{\mathbf{i}}_k + \sum_1^3 \frac{d\tilde{x}_k}{dt} (\boldsymbol{\omega}' \tilde{\mathbf{i}}_k) + \\ &+ \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \wedge \sum_1^3 \tilde{x}_k \tilde{\mathbf{i}}_k + \boldsymbol{\omega} \wedge \sum_1^3 \frac{d\tilde{x}_k}{dt} \tilde{\mathbf{i}}_k + \boldsymbol{\omega} \wedge \sum_1^3 \tilde{x}_k (\boldsymbol{\omega} \wedge \tilde{\mathbf{i}}_k), \end{aligned}$$

e questo fatto può essere espresso scrivendo

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \tilde{\mathbf{a}} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \wedge \tilde{\mathbf{x}} + 2\boldsymbol{\omega}' \tilde{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \tilde{\mathbf{x}}),$$

dopo aver posto

$$\mathbf{a} = \sum_k^3 \frac{d^2 x_k}{dt^2} \mathbf{i}_k, \quad \mathbf{a}_0 = \sum_k^3 \frac{d^2 x_{0k}}{dt^2} \mathbf{i}_k, \quad \tilde{\mathbf{a}} = \sum_k^3 \frac{d^2 \tilde{x}_k}{dt^2} \tilde{\mathbf{i}}_k$$

per rappresentare, nell'ordine, l'accelerazione del punto in esame e quella dell'origine della terna mobile, quali appaiono all'osservatore fisso, e l'accelerazione del medesimo punto in esame, nel valore sperimentato dall'osservatore mobile. La somma

$$\mathbf{a}_0 + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \tilde{\mathbf{x}}) + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \wedge \tilde{\mathbf{x}}$$

è detta *accelerazione di trascinamento*, e comprende l'*accelerazione centripeta*

$$\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \tilde{\mathbf{x}})$$

e l'*accelerazione di Euler*

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \wedge \tilde{\mathbf{x}}.$$

Il termine

$$2\boldsymbol{\omega} \wedge \tilde{\mathbf{v}}$$

è noto come *accelerazione di Coriolis*.

1.4. Proprietà dinamiche del riferimento.

Le caratteristiche dinamiche del riferimento geometrico vanno determinate misurando l'accelerazione di un corpo di prova abbandonato nel vuoto con velocità $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Indicata con $\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ questa accelerazione, si può dire che nel punto \mathbf{x} ed all'istante t si manifesta una *forza inerziale per unità di massa*, ossia una *forza inerziale specifica*

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$$

pari ad $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$.

Nel seguito si adoteranno prevalentemente riferimenti solidali con il geoide. In questi particolari riferimenti, la forza inerziale \mathbf{f} per unità di massa a riposo è indicata abitualmente con \mathbf{g} . L'esperienza ha mostrato che \mathbf{g} è un campo indipendente dal tempo e conservativo: esiste cioè per esso un potenziale univoco

$$\phi = \phi(\mathbf{x})$$

in termini del quale si può scrivere

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \text{grad } \phi(\mathbf{x}).$$

Si osserva inoltre che in ambienti geometrici molto limitati rispetto al raggio medio del geoide le variazioni di \mathbf{g} sono percentualmente irrilevanti, e quindi che il campo \mathbf{g} può essere ritenuto uniforme in quasi tutte le applicazioni tecniche correnti. Infine, presso la superficie del geoide, il modulo g di \mathbf{g} varia solo da 9,780 a 9,832 m s⁻², passando dall'equatore al polo. Nell'impiego tecnico usuale, gli si può così assegnare il valore costante

$$g = 9,81 \text{ m s}^{-2},$$

medio fra quelli effettivi.

Quando il corpo di prova non è inizialmente in riposo nel riferimento collegato con il geoide, ma è invece animato rispetto ad esso dalla velocità \mathbf{v} , si riscontra che agisce sul corpo stesso anche la forza inerziale per unità di massa

$$\mathbf{f}_{\text{ca}} = -2\boldsymbol{\omega}_g \wedge \mathbf{v},$$

detta *forza di Coriolis*. Il vettore $\boldsymbol{\omega}_g$, di modulo

$$\omega_g = 0,000\,072\,9 \text{ rad s}^{-1},$$

è la velocità di rotazione siderale del geoide. Questa componente della forza inerziale specifica per i riferimenti solidali con il geoide non deriva, di norma, da un potenziale.

Nei sistemi di riferimento animati, rispetto al geoide, da accelerazione lineare \mathbf{a}_0 e da velocità di rotazione $\boldsymbol{\omega}$ si presentano ulteriori componenti delle forze di massa specifiche. In accordo con quanto ricordato nel paragrafo precedente, si ha

$$\tilde{\mathbf{a}} = -\mathbf{a}_0 + \mathbf{a} - 2\boldsymbol{\omega} \wedge \tilde{\mathbf{v}} - \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \tilde{\mathbf{x}}) - \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \wedge \tilde{\mathbf{x}},$$

e quindi

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{g} - \mathbf{a}_0 - 2(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_g) \wedge \tilde{\mathbf{v}} - \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \tilde{\mathbf{x}}) - \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \wedge \tilde{\mathbf{x}}.$$

Di queste nuove componenti, solo la *forza centrifuga* per unità di massa

$$\tilde{\mathbf{f}}_{\text{ce}} = -\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \tilde{\mathbf{x}})$$

risulta conservativa: il suo potenziale, univoco, è

$$\tilde{\phi}_{co} = \frac{\omega^2}{2} (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)$$

se si impongono all'asse \tilde{z} direzione e verso coincidenti con quelli del vettore ω , e se si indica con ω il modulo di tale vettore. La *forza di Coriolis* per unità di massa

$$\mathbf{f}_{co} = -2(\omega + \omega_g) \wedge \tilde{\mathbf{v}}$$

ammette potenziale solo per distribuzioni particolari della velocità $\tilde{\mathbf{v}}$. La *forza di Euler* per unità di massa

$$\mathbf{f}_{eu} = -\frac{d\omega}{dt} \wedge \tilde{\mathbf{x}}$$

non è dotata di potenziale.

1.5. La pressione.

Oltre che alle forze dipendenti dalla natura dinamica del riferimento prescelto, un corpo può essere assoggettato anche a forze applicate sulla sua superficie limite. Per le considerazioni preliminari da svolgere qui, è sufficiente ammettere che su ciascuna porzione di superficie limite, abbastanza piccola rispetto alle dimensioni del corpo da poter essere confusa con il piano tangente per un suo punto, il risultante delle forze applicate sia normale al piano tangente stesso. Il rapporto del modulo del risultante all'area interessata è la *pressione* p applicata sulla porzione di superficie limite in esame. Se il risultante è diretto verso il corpo si assegna a p valore positivo; a valori negativi di p corrispondono di conseguenza sforzi di trazione.

Sempre ai fini delle considerazioni introduttive presenti, si ammette che il rapporto p non muti se valutato su porzioni di superficie limite diverse per ampiezza o collocazione, e si riassume il fatto dicendo che si considerano solo pressioni uniformemente distribuite sulla superficie del corpo.

La pressione p va espressa in newton su metro quadrato, N m^{-2} , unità detta *pascal* ed indicata con il simbolo Pa. Sono però in uso anche unità di misura estranee al sistema internazionale: la tabella 1.3 ne ricorda alcune.

In particolare, la pressione esercitata dall'atmosfera sul geoide, pur presentando differenze nel tempo legate alle vicende meteorologiche, si

TABELLA 1.3. - *Unità di pressione estranee al SI.*

Nome	Simbolo	Equivalenza
bar	bar	1 bar = 10^5 Pa
baria	baria	1 baria = 10^{-1} Pa
	kgf m ⁻²	1 kgf m ⁻² = 9,806 65 Pa
atmosfera tecnica	at	1 at = 9,806 65 · 10 ⁴ Pa
atmosfera fisica	atm	1 atm = 101 325 Pa
torr	mm Hg	1 mm Hg = 133,322 Pa

discosta poco, meno del 10%, dal valore

$$p_{\text{atm}} = 101\,325 \text{ Pa},$$

che viene adottato come valore di riferimento per la pressione atmosferica stessa.

Spesso, nelle questioni tecniche, anziché la *pressione effettiva* ora introdotta, interessa più direttamente il suo eccesso sulla pressione atmosferica di riferimento, e si preferisce esprimere senz'altro quest'ultimo dato, parlando di *pressione relativa*: valori negativi della pressione relativa corrispondono perciò a pressioni inferiori alla pressione atmosferica convenzionale. Ad evitare confusione tra le due indicazioni, si precisa che, in seguito, verranno impiegate di norma le pressioni effettive, sottolineando esplicitamente l'uso della pressione relativa, ove questa risultasse più comoda.

1.6. Equazioni di stato.

Il volume V di un corpo è influenzato dalla pressione p e dalla temperatura τ . Il legame

$$V = V(p, \tau)$$

fra le tre grandezze viene detto *equazione di stato* del corpo in esame. L'esperienza ha mostrato che la complessità di questi legami è tale da consigliare l'impiego di equazioni di stato ridotte, dotate di forma analitica sufficientemente maneggevole, ma adatte, per contropartita, a rappresentare i fatti solamente in campi limitati di escursione delle variabili.

Tipica è l'equazione di stato dei gas molto rarefatti

$$pV = \frac{M\mathcal{R}}{N} \tau.$$

Qui N sta per la massa di una kilomole di gas puro, ossia per la massa di un numero di molecole del gas in questione uguale al numero di atomi ^{12}C necessari a formare una massa di 12 kg. Nel caso di miscele di n gas chimicamente inerti, e di masse rispettive M_i che concorrano a costituire la massa complessiva M in esame, N assume il valore dettato dalla relazione

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{M} \sum_i^n \frac{M_i}{N_i}.$$

La massa per kilomole, N , va espressa in kg kmol^{-1} . Il coefficiente \mathcal{R} risulta costantemente pari ad

$$\mathcal{R} = 8314 \text{ J K}^{-1} \text{ kmol}^{-1}.$$

In seguito, anche quando non sarà necessario precisare la forma da adottare per l'equazione di stato, si ammetterà senz'altro che essa sia almeno di classe C^2 nelle variabili p e τ , ossia che riesca continua in tali variabili, e che presenti derivate continue, fino a quelle del secondo ordine incluso. Queste condizioni di continuità non sono certamente verificate se avvengono cambiamenti nello stato di aggregazione: si condurranno allora esami paralleli ma distinti per ciascuna delle fasi presenti.

1.7. Funzioni di stato.

Un corpo di massa M e volume V può ricevere energia meccanica tramite il lavoro delle forze e delle coppie alle quali è assoggettato, ed assorbire energia termica per afflusso diretto attraverso la superficie che lo delimita. L'esperienza avverte che l'apporto globale di queste energie non eguaglia, di norma, l'aumento di energia cinetica \mathcal{E} del corpo. Si ammette pertanto l'esistenza di una *energia interna* \mathcal{U} , tale da assicurare la conservazione dell'energia nel suo complesso. Più precisamente, posto che \mathcal{E} sia dotata della derivata temporale, ed indicate con \mathcal{P}_m e con \mathcal{P}_t le potenze meccaniche e termiche somministrate al corpo, si vuole che sia

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{U} + \mathcal{E}) = \mathcal{P}_m + \mathcal{P}_t.$$

Questa definizione dell'energia interna ne fissa il valore a meno di una componente costante, peraltro inessenziale, che può quindi essere assegnata ad arbitrio. Come le altre energie, \mathcal{U} va misurata in joule.

Per un corpo che si trovi a temperatura uniforme τ , viene considerata anche l'*entropia* \mathcal{S} , definita implicitamente e sempre a meno di una

inessenziale costante additiva, dalla scrittura

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E} = \frac{\mathcal{P}_t}{T} + \frac{\mathcal{P}_a}{T},$$

nella quale \mathcal{P}_a sta per la potenza meccanica dissipata. La componente costante di \mathcal{E} può essere fissata in modo arbitrario, ed \mathcal{E} va misurata in joule al grado, J K^{-1} .

Entrambe le grandezze \mathcal{U} ed \mathcal{E} sono *funzioni di stato* del corpo al quale si riferiscono. Limitatamente ai fenomeni che verranno considerati in seguito, \mathcal{U} ed \mathcal{E} dipendono solo dalla pressione p e dalla temperatura T alle quali il corpo è sottoposto. Ricordando che il volume V dipende a sua volta dalla pressione e dalla temperatura, si conclude che deve essere pure

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathcal{E}, V).$$

Si supponrà inoltre che questa dipendenza di \mathcal{U} da \mathcal{E} e da V sia almeno di classe C^2 .

Le derivate parziali di \mathcal{U} rispetto ad \mathcal{E} ed a V hanno un significato fisico interessante. Per calcolarne il valore conviene fissare l'attenzione su fenomeni particolarmente semplici, fermo restando il fatto che il risultato così ottenuto mantiene validità generale, in quanto anche le derivate di \mathcal{U} devono dipendere solo da \mathcal{E} e da V . Così, se si verifica solamente una variazione del volume, si ha

$$\mathcal{P}_m = -p \frac{d}{dt} V, \quad \mathcal{P}_a = \mathcal{P}_t = \frac{d}{dt} \mathcal{E} = 0,$$

e quindi

$$\frac{d}{dt} \mathcal{U} = -p \frac{d}{dt} V, \quad \frac{d}{dt} \mathcal{E} = 0.$$

Ne segue intanto, per il caso specifico,

$$d\mathcal{U} = -p dV, \quad d\mathcal{E} = 0,$$

dalle quali si deduce, anche per trasformazioni più generali,

$$\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial V} \right]_{\mathcal{E}=\text{cost}} = -p.$$

Analogamente, quando si verifica soltanto un apporto termico \mathcal{P}_t , si ha

$$\mathcal{P}_m = \mathcal{P}_a = 0, \quad \frac{d}{dt} \mathcal{E} = 0,$$

ed è pertanto, nel caso esaminato,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{U} = \mathcal{P}_t, \quad \frac{d}{dt} \mathcal{E} = \frac{\mathcal{P}_t}{T},$$

così che risulta

$$\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathcal{E}} \right]_{V=\text{cost.}} = T,$$

con validità generale. Il differenziale totale dell'energia interna presenta dunque la forma

$$d\mathcal{U}(\mathcal{E}, V) = \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathcal{E}} \right)_V d\mathcal{E} + \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial V} \right)_\mathcal{E} dV = \tau d\mathcal{E} - p dV.$$

Oltre all'energia interna ed all'entropia, sono di uso corrente altre funzioni di stato. Sempre con riferimento a corpi sottoposti solo a pressione e temperatura uniformi, si definiscono l'*entalpia*

$$\mathcal{H} \equiv \mathcal{U} + pV,$$

l'*energia libera*

$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{U} - \tau \mathcal{E},$$

e l'*entalpia libera*

$$\mathcal{G} \equiv \mathcal{U} + pV - \tau \mathcal{E},$$

da misurare tutte in joule. Si ricorda anche, in particolare, che combinando i differenziali totali di queste nuove grandezze con quello della $\mathcal{U}(\mathcal{E}, V)$ si ottengono le espressioni

$$d\mathcal{H}(p, \mathcal{E}) = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \right)_\mathcal{E} dp + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{E}} \right)_p d\mathcal{E} = V dp + \tau d\mathcal{E},$$

$$d\mathcal{F}(V, \tau) = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial V} \right)_\tau dV + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \tau} \right)_V d\tau = -p dV - \mathcal{E} d\tau,$$

$$d\mathcal{G}(p, \tau) = \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p} \right)_\tau dp + \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \tau} \right)_p d\tau = V dp - \mathcal{E} d\tau.$$

Sempre nell'ipotesi che le varie funzioni di stato siano di classe C^2 nelle variabili indicate, l'ordine nel quale si eseguono le derivazioni per produrre le derivate seconde miste non altera il risultato. Ne conseguono delle relazioni, note cumulativamente come *relazioni di Maxwell*: in seguito ci si varrà di quella,

$$\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p} \right)_\tau = - \left(\frac{\partial V}{\partial \tau} \right)_p,$$

che si ottiene uguagliando le derivate seconde miste dell'entalpia libera.

Spesso, anziché impiegare i valori globali U , E , H , F , e G delle funzioni di stato, riesce più comodo riferirsi al rapporto degli stessi alla massa M del corpo considerato. Tali rapporti verranno chiamati *valori specifici* delle funzioni di stato, ed indicati con le stesse lettere adottate per i valori globali, utilizzando però il carattere minuscolo. Gli stessi rapporti verranno espressi in joule al chilogrammo, J kg^{-1} , salvo che per l'entropia specifica, da esprimere invece in joule al chilogrammo ed al grado, $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$.

CAPITOLO SECONDO

PROPRIETÀ DEI MATERIALI

2.1. Densità e peso specifico.

Si intende per *densità* ρ di un corpo il rapporto della sua massa al volume occupato. La grandezza così introdotta, che prende anche il nome di *massa volumica*, è sempre intrinsecamente positiva e limitata, e va misurata in kg m^{-3} .

Parallelamente alla densità, si considera pure il *peso specifico* γ , definito come rapporto tra il modulo del peso del corpo ed il suo volume. Questa grandezza va perciò espressa in N m^{-3} . Benché il modulo del peso cambi un poco passando da punto a punto del geoide o discostandosi da esso, le sue variazioni, e le conseguenti variazioni di peso specifico sono tuttavia tanto ridotte da non avere importanza negli impieghi tecnici usuali.

Fra pesi specifici e densità intercorre comunque la relazione

$$\gamma = \rho g,$$

nel quale g indica, al solito, il modulo dell'accelerazione inerziale di riposo rispetto al geoide.

2.2. Dilatabilità e comprimibilità.

L'equazione di stato

$$V = V(p, \tau)$$

considerata nel paragrafo 1.6, ricorda che il volume V di un corpo omo-

geneo è influenzato dalla pressione p e dalla temperatura τ . È uso esprimere queste variazioni attraverso il *coefficiente di dilatazione cubica* α , introducendolo come

$$\alpha \equiv \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial \tau} \right)_p,$$

ed il *coefficiente di comprimibilità cubica* β , intendendo per esso

$$\beta \equiv -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_\tau.$$

Il coefficiente α si misura in K^{-1} , quello β in $N^{-1} m^2$.

Analogamente a V , anche α e β mutano con la pressione e con la temperatura.

Nel caso particolare dei gas molto rarefatti, l'equazione di stato

$$pV = \frac{M\varrho}{N} \tau$$

avverte subito che è

$$\alpha = \frac{1}{\tau}, \quad \beta = \frac{1}{p}.$$

Per i corpi allo stato liquido o solido, α e β sono influenzati molto poco dalla pressione, tanto che nelle applicazioni tecniche correnti possono essere considerati indipendenti da essa. Comunque, β decresce in modo graduale all'aumentare di p , mentre α manifesta spesso cambiamenti con p di segno non costante. Giusta la relazione

$$\frac{\partial \alpha}{\partial p} = -\frac{\partial \beta}{\partial \tau},$$

che si ottiene immediatamente derivando come indicato le formule di definizione delle α e β , segue che neppure gli incrementi di β con la temperatura sono sempre dello stesso segno. Infine, α cresce, di norma, con la temperatura.

La costanza della massa $M = \varrho V$ del corpo in esame permette di esprimere i coefficienti α e β in termini della densità. Per essere

$$\frac{dV}{V} = -\frac{d\varrho}{\varrho},$$

si può scrivere infatti

$$\alpha = -\frac{1}{\varrho} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial \tau} \right)_p, \quad \beta = \frac{1}{\varrho} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial p} \right)_\tau.$$

2.3. Tensione superficiale.

L'attrazione mutua tra le singole molecole costituenti una fase decresce molto rapidamente con la distanza, riuscendo irrilevante al di là di pochi diametri molecolari. Ne segue che lungo la superficie limite della fase, e su uno strato di spessore confrontabile con le dimensioni molecolari, le forze d'attrazione mutua non sono più bilanciate, manifestando localmente un risultante diretto come la normale interna alla superficie di contorno, il cui modulo cresce con l'avvicinarsi a questa, e dipende anche dalla sostanza con la quale la fase considerata si trova a contatto.

Deformare la fase in modo da aumentarne la superficie di contorno richiede il trasferimento di molecole dalle zone interne alle zone superficiali di nuova formazione, e ciò implica l'esecuzione di un lavoro. Così, come mostra la figura 2.1, si può pensare che il lavoro necessario per

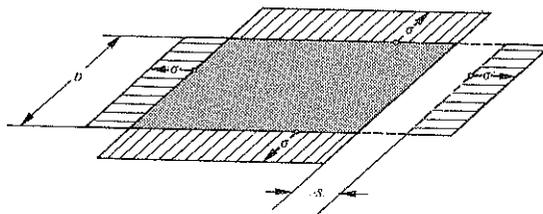


Fig. 2.1. - La tensione superficiale σ compie il lavoro $\sigma b s$ per aumentare di $b s$ l'area della superficie di confine fra due fasi.

allungare di s una porzione di superficie di confine larga b sia quello connesso allo spostamento s di una forza σb applicata lungo il bordo di larghezza b . Per l'esiguità dello spessore della pellicola superficiale entro la quale si presentano gli squilibri tra le forze intermolecolari, si assume che la forza σ per unità di sviluppo lineare di contorno sia concentrata al margine della fase. Si deve ammettere inoltre che la σ agisca tangenzialmente alla superficie limite e normalmente al suo contorno, e che sia orientata verso l'esterno. La superficie in esame si trova perciò in tensione. La σ è detta *tensione superficiale*, e va espressa in N m^{-2} .

È bene tener presente che, pur trattandosi di elemento introdotto per descrivere un fatto elastico, σ non dipende dall'entità della deformazione, ma conserva inalterato il suo valore al mutare dell'area della superficie di confine. Forti ed improvvisi aumenti della σ si osservano però quando la fase viene ridotta a spessori monomolecolari.

La temperatura modifica sostanzialmente la tensione superficiale: per i liquidi a contatto con il proprio vapore, σ decresce all'aumentare della temperatura fino ad annullarsi in corrispondenza della temperatura critica, alla quale scompare la superficie di separazione tra la fase liquida e quella di vapore.

Inoltre σ è influenzata fortemente dalla presenza di sostanze estranee presso la superficie. Anche sostanze in soluzione possono alterare σ . In alcuni casi, come quello dei sali inorganici nell'acqua, l'effetto è modesto e consiste in un leggero aumento della tensione superficiale, accompagnato da una ridotta concentrazione di soluto presso la superficie. In altri l'effetto è vistoso, come per molti esteri organici nell'acqua, e si manifesta con una forte riduzione di σ ed un addensamento del soluto presso la superficie.

Per contro, la presenza di aeriformi non influisce apprezzabilmente sulla tensione superficiale, e lo stesso valore di σ misurato per il contatto del liquido con il proprio vapore può essere adottato anche per il contatto del liquido con l'aria.

Il contatto con altri liquidi o solidi, infine, modifica radicalmente il valore della σ . È stato accertato sperimentalmente che la tensione superficiale fra due liquidi è sempre minore della differenza fra le tensioni superficiali che competono ai due liquidi quando questi si trovano a contatto con il rispettivo vapore. A volte, anzi, come avviene ad esempio per l'acqua in presenza di alcool etilico o di glicerina, la σ può essere negativa, determinando un'immediata soluzione di un liquido nell'altro.

Lo stato di tensione della superficie di separazione tra fasi diverse fa sì che, quando questa non è piana, si riscontri un salto di pressione attraversandola normalmente. Il salto di pressione Δp è dato dalla *formula di Laplace*

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right),$$

in cui r_1 ed r_2 indicano i raggi di curvatura locale della superficie limite, valutati lungo due direzioni reciprocamente ortogonali. La somma delle due curvature, giusto un teorema di Gauss, è indipendente dalle due particolari direzioni ortogonali considerate. Naturalmente le singole curvature vanno computate con il loro segno, e contribuiscono singolarmente al salto di pressione Δp determinando un aumento della pressione stessa nella fase che contiene il relativo centro di curvatura, come indicato in figura 2.2. La somma delle curvature può essere diversa nei vari punti della superficie di separazione, dando luogo a disuniformità delle pressioni in seno alle singole fasi, ma ciò, in condizioni di equilibrio, può

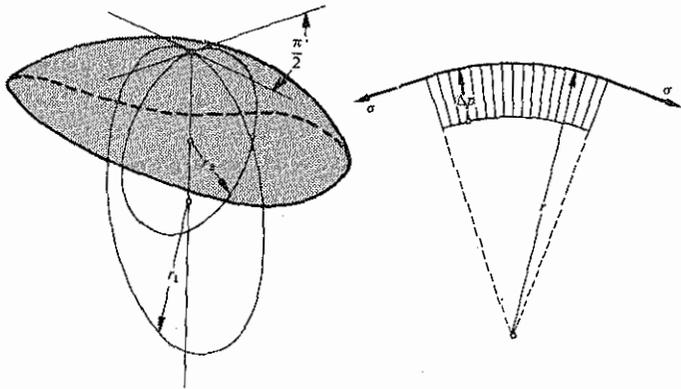


Fig. 2.2. - In corrispondenza ad una superficie gobba di confine fra fasi distinte, la tensione superficiale determina un salto di pressione legato alla somma delle curvatures della superficie relative a due direzioni ortogonali.

verificarsi solo se sono presenti anche forze di massa. In assenza di queste, le pressioni devono risultare uniformi, ed uniforme deve essere anche la somma delle curvatures. L'unica forma libera che la superficie di separazione può assumere è allora quella sferica, connessa ad una maggiore pressione interna

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r}.$$

Il caso di superfici di separazione fra tre fasi distinte è più complesso. Qui vanno considerate le tre tensioni superficiali fra le coppie di fasi interessate: lungo il bordo comune di contatto queste tre tensioni devono risultare in equilibrio. In particolare, può aversi contatto lungo una retta tra una fase solida, una fase liquida ed una aeriforme. Come schematizzato in figura 2.3, l'angolo diedro δ fra il semipiano tangente alla superficie di separazione del solido dal liquido ed il semipiano tangente all'interfaccia tra liquido ed aeriforme, condotti entrambi per il bordo comune alle tre fasi, è determinato dalla condizione di equilibrio

$$\sigma_{SA} - \sigma_{SL} = \sigma_{LA} \cos \delta,$$

in cui σ_{SA} indica la tensione superficiale fra solido ed aeriforme, σ_{SL} quella fra solido e liquido, e σ_{LA} quella fra liquido ed aeriforme. Si dice che la fase liquida *bagna*, o *non bagna*, il solido a seconda che l'angolo δ riesca acuto od ottuso. Non può invece esistere un contatto stabile lungo una retta fra due liquidi ed un aeriforme: la condizione di equilibrio richiede-

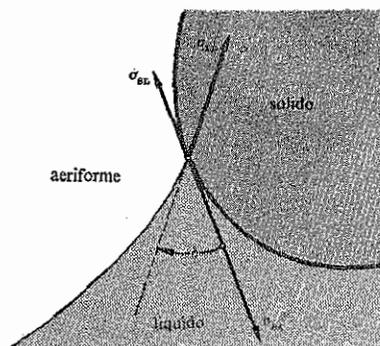


Fig. 2.3. - L'equilibrio delle superfici di separazione fra tre fasi differenti dipende dalle tensioni superficiali reciproche.

rebbe un legame fra tensioni superficiali in contrasto con quello che si presenta fra la tensione superficiale per l'interfaccia dei due liquidi e la differenza delle loro σ proprie.

2.4. Pressione di evaporazione.

Quando un liquido è separato dal proprio vapore da una superficie piana, e sussiste insieme ad esso in condizioni di equilibrio, la pressione comune alle due fasi, p_e , è detta *pressione di evaporazione*. Essa, per ciascuna sostanza, dipende unicamente dalla temperatura τ , e cresce con questa. In corrispondenza della temperatura critica τ_c , come si è già osservato, la superficie di separazione scompare e le due fasi riescono fra loro indistinguibili. Si chiama *pressione critica*, p_c , la pressione di evaporazione per la temperatura critica.

Nel caso in cui la superficie di separazione si presenta curva sussiste attraverso essa il salto di pressione indicato dalla formula di Laplace. Al solito, in assenza di forze di massa, la pressione deve essere distribuita in modo uniforme sulle singole fasi e la superficie di separazione deve essere sferica. Siano p_L e p_V le pressioni sulla fase liquida e su quella aeriforme.

Si consideri ora la trasformazione di una parte della massa fluida dallo stato liquido, ove ha volume V_L , allo stato di vapore, nel quale assume volume V_V , ferma restando la temperatura τ comune alle due fasi. Se non si verificano variazioni di energia cinetica, indicate con \mathcal{P}_m , la potenza meccanica somministrata nel corso della trasformazione, con \mathcal{P}_d la sua frazione dissipata, e con \mathcal{P}_t , globalmente, la potenza termica for-

nita e quella non meccanica degradata a livello termico, deve risultare

$$\frac{d\mathcal{U}}{dt} = \mathcal{P}_m + \mathcal{P}_t \quad \text{e} \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{\mathcal{P}_a}{T} + \frac{\mathcal{P}_t}{T},$$

in accordo con le definizioni di energia interna \mathcal{U} ed entropia \mathcal{E} esposte nel paragrafo 1.7. Poiché il lavoro meccanico compiuto ammonta complessivamente a

$$\int \mathcal{P}_m dt = \int \mathcal{P}_a dt + p_L V_L - p_V V_V,$$

si ha che

$$\mathcal{U}_V - \mathcal{U}_L + p_V V_V - p_L V_L = \tau(\mathcal{E}_V - \mathcal{E}_L)$$

ossia che l'entalpia libera

$$\mathcal{G} = \mathcal{U} + pV - \tau\mathcal{E}$$

resta invariata. Altrettanto avviene per l'entalpia libera specifica, perciò

$$\mathcal{G}_L(p_L, \tau) = \mathcal{G}_V(p_V, \tau).$$

In particolare, se la superficie di separazione è piana, risulta $p_L = p_V = p_e$ e

$$\mathcal{G}_L(p_e, \tau) = \mathcal{G}_V(p_e, \tau),$$

nel caso generale, invece, una volta messi in evidenza gli scarti $dp_L = p_L - p_e$, e $dp_V = p_V - p_e$, si può scrivere

$$\mathcal{G}_L(p_e + dp_L, \tau) = \mathcal{G}_V(p_e + dp_V, \tau).$$

Il differenziale totale dell'entalpia libera \mathcal{G} , come ricordato nel paragrafo 1.7, vale

$$d\mathcal{G} = V dp - \mathcal{E} d\tau,$$

ove V è il volume occupato dalla massa M in esame. Ma qui la temperatura τ è assegnata: indicando con ϱ la densità e riferendosi all'entalpia libera specifica riesce semplicemente

$$d\mathcal{G} = \frac{1}{\varrho} dp.$$

Ne segue

$$\frac{1}{\varrho_L} dp_L = \frac{1}{\varrho_V} dp_V.$$

Unendo a questo risultato il legame tra gli scarti dp_L e dp_V imposto dalla formula di Laplace è possibile calcolare i singoli scarti stessi. Ammesso che la bolla di raggio r sia occupata dal liquido, ed indicata con σ la tensione superficiale, si ha

$$p_L - p_e = p_V - p_e + \frac{2\sigma}{r}$$

e così

$$p_L - p_e = \frac{2\sigma}{r} \frac{\rho_L}{\rho_L - \rho_V} \quad \text{e} \quad p_V - p_e = \frac{2\sigma}{r} \frac{\rho_V}{\rho_L - \rho_V} :$$

if due fluidi presentano dunque pressioni maggiori della p_e . Inversamente, se la bolla è costituita da vapore, si ha

$$p_V - p_e = p_L - p_e + \frac{2\sigma}{r}$$

e quindi

$$p_L - p_e = -\frac{2\sigma}{r} \frac{\rho_L}{\rho_L - \rho_V} \quad \text{e} \quad p_V - p_e = -\frac{2\sigma}{r} \frac{\rho_V}{\rho_L - \rho_V}$$

di modo che entrambe le pressioni sono ora più basse della p_e .

Analoghe considerazioni, salvo gli ovvi cambiamenti nella nomenclatura, possono essere svolte per l'equilibrio fra solidi ed i rispettivi vapori, o fra solidi ed i relativi liquidi.

2.5. Calore di trasformazione.

L'apporto di calore al sistema formato da una fase liquida e dalla fase di vapore corrispondente determina l'evaporazione di una nuova frazione liquida, senza che si manifestino per questo cambiamenti nelle pressioni o nella temperatura.

Il valore h_e richiesto per l'evaporazione dell'unità di massa è detto *calore di evaporazione*; trattandosi di un'energia specifica, h_e va misurato in J kg^{-1} .

La cessione di calore può avvenire sia per dissipazione di potenza meccanica \mathcal{P}_d , sia per somministrazione di potenza termica \mathcal{P}_t , già presente a livello termico o proveniente dalla degradazione di energie non meccaniche: evaporata la massa M si ha sempre

$$M h_e = \int (\mathcal{P}_d + \mathcal{P}_t) dt .$$

Contemporaneamente, giusta la definizione data nel paragrafo 1.7, l'en-

tropia \mathcal{E} aumenta con tasso

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{\mathcal{P}_a}{\tau} + \frac{\mathcal{P}_v}{\tau},$$

così che, al termine della trasformazione, si ha, in termini dell'entropia specifica e_L del liquido e di quella e_v del vapore,

$$M\tau(e_v - e_L) = \int (\mathcal{P}_a + \mathcal{P}_v) dt.$$

Ne segue

$$h_e = \tau(e_v - e_L).$$

Il valore del calore di trasformazione è strettamente connesso alla forma del legame $p_e = p_e(\tau)$ fra pressione di evaporazione p_e e temperatura τ . Si è già riscontrato nel paragrafo precedente che l'entalpia libera \mathcal{G} del sistema formato dalle due fasi non muta durante l'evaporazione a temperatura costante. Se ne deduce che le variazioni dell'entalpia libera specifica per la fase liquida e per quella di vapore devono comunque coincidere, anche se varia la temperatura. L'espressione del differenziale totale dell'entalpia libera specifica, $g(p, \tau)$, si deduce immediatamente da quella dell'entalpia \mathcal{G} di un corpo di massa M e volume V ,

$$d\mathcal{G} = V dp - \mathcal{E} d\tau,$$

riportata nel paragrafo 1.7, ottenendo

$$dg = \frac{1}{\rho} dp - e d\tau.$$

nella quale ρ , al solito, è la densità. Come si è detto, questa espressione deve assumere gli stessi valori quando la si stima impiegando le quantità riferite alla fase liquida o le quantità che competono alla fase aeriforme. Inoltre, le variazioni di pressione dp da considerare sono costituite dalla somma degli scarti dp_L , e, rispettivamente, dp_v , dal valore $p_e = p_e(\tau)$, legati alla curvatura della superficie di separazione fra le due fasi, e dell'incremento dp_e della pressione di evaporazione dovuto alla variazione $d\tau$ della temperatura τ . Relativamente ai primi si è già osservato nel paragrafo precedente che sussiste l'equazione

$$\frac{1}{\rho_L} dp_L = \frac{1}{\rho_v} dp_v.$$

Resta quindi

$$\frac{1}{\rho_L} dp_e - e_L d\tau = \frac{1}{\rho_v} dp_e - e_v d\tau,$$

e perciò

$$\frac{dp_*}{d\tau} = \frac{h_e \varrho_L \varrho_V}{\tau(\varrho_L - \varrho_V)}.$$

Questo legame costituisce l'*equazione di Clapeyron*. Poiché la densità del vapore è sempre minore di quella del liquido, la pressione di evaporazione cresce costantemente all'aumentare della temperatura. Il calore di evaporazione h_e , invece, diminuisce all'aumentare della temperatura, fino ad annullarsi in corrispondenza della temperatura critica, quando le due fasi divengono indistinguibili.

Considerazioni simili valgono anche per le trasformazioni da solido a liquido o per quelle da solido a vapore: basta modificare di conseguenza la nomenclatura, parlando al caso di *calore di fusione* o di *calore di sublimazione*.

2.6. Calore specifico.

L'entropia specifica

$$e = e(p, \tau)$$

definita nel paragrafo 1.7, dipende dalla pressione p e dalla temperatura τ . Il tasso di variazione della e con la temperatura viene espresso attraverso il *calore specifico*

$$c \equiv \tau \frac{\partial e}{\partial \tau},$$

precisato con l'indicazione del tipo di cambiamenti imposti a p ed a τ . Come e , anche il calore specifico va misurato in $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$.

Interessano in particolare i valori connessi a trasformazioni nelle quali rimane costante la pressione p oppure il volume V , e cioè i valori del *calore specifico a pressione costante*

$$c_p \equiv \tau \left(\frac{\partial e}{\partial \tau} \right)_p$$

ed il *calore specifico a volume costante*

$$c_v \equiv \tau \left(\frac{\partial e}{\partial \tau} \right)_v.$$

Questi sono legati fra loro da una relazione particolarmente utile. Dall'espressione del differenziale totale dell'entropia specifica e ,

$$de = \left(\frac{\partial e}{\partial p} \right)_\tau dp + \left(\frac{\partial e}{\partial \tau} \right)_p d\tau,$$

e con riferimento ad una trasformazione a volume costante si ha intanto

$$\left(\frac{\partial e}{\partial \tau}\right)_v = \left(\frac{\partial e}{\partial p}\right)_\tau \left(\frac{\partial p}{\partial \tau}\right)_v + \left(\frac{\partial e}{\partial \tau}\right)_p.$$

Ora, per essere $V = V(p, \tau)$, risulta che

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \tau}\right)_v = - \left(\frac{\partial V}{\partial \tau}\right)_p \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_\tau^{-1},$$

e quindi, in accordo con le definizioni dei coefficienti α e β , introdotte nel paragrafo 2.2, anche che

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \tau}\right)_v = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Inoltre, come visto nel paragrafo 1.7,

$$\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p}\right)_\tau = M \left(\frac{\partial e}{\partial p}\right)_\tau = - \left(\frac{\partial V}{\partial \tau}\right)_p,$$

ove M indica la massa del corpo di volume V , e perciò

$$\left(\frac{\partial e}{\partial p}\right)_\tau = - \frac{V\alpha}{M} = - \frac{\alpha}{\rho}.$$

Complessivamente riesce dunque

$$c_p - c_v = \frac{\tau\alpha^2}{\rho\beta}.$$

L'esistenza di questo legame, fra l'altro, esonera dall'eseguire misure dirette di c_v . Il calore specifico a pressione costante, di regola, viene invece ricavato sperimentalmente, basandosi sul fatto che il prodotto della temperatura assoluta per l'incremento di entropia è pari all'apporto quasi stazionario di energia termica, sempre che le variazioni conseguenti di τ siano percentualmente irrilevanti.

Il calore specifico a pressione costante cambia poco con la pressione stessa, ed in modo che può essere valutato facilmente in termini di altre quantità già note. Basta scrivere

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial c_p}{\partial p}\right)_\tau &= \tau \left[\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial e}{\partial \tau}\right)_p \right]_\tau = \tau \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial e}{\partial p}\right)_\tau \right]_p = \tau \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \left(-\frac{V\alpha}{M}\right) \right]_p = \\ &= -\frac{\tau}{M} \left[\alpha \left(\frac{\partial V}{\partial \tau}\right)_p + V \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \tau}\right)_p \right], \end{aligned}$$

per avere

$$\left(\frac{\partial c_p}{\partial p}\right)_\tau = -\frac{\tau}{\rho} \left[\alpha^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \tau}\right)_p \right].$$

Nel caso particolare dei gas molto rarefatti, α è uguale all'inverso di τ , e questa relazione mostra che c_p riesce indipendente dalla pressione. In molti aeriformi c_p risulta costante pure con la temperatura, in altri, anche se molto rarefatti, cresce con essa. Di solito, c_p aumenta con τ nei solidi e nei liquidi; ma in alcuni di questi, quali l'acqua ed il mercurio, rimane praticamente costante, manifestando anche piccole riduzioni al crescere di τ .

Osservazioni analoghe possono essere ripetute in merito all'andamento di c_v , che differisce sempre molto poco da c_p , dato il legame che intercorre fra le due grandezze. Si nota solo che nel caso dei gas molto rarefatti, in accordo con la relativa equazione di stato

$$pV = \frac{MR}{N} \tau,$$

riesce

$$c_p - c_v = \frac{R}{N},$$

e quindi, in particolare, che anche c_v è indipendente dalla pressione.

A conclusione di questo paragrafo, si osserva ancora che l'introduzione del calore specifico a pressione costante c_p e l'esistenza del legame

$$\left(\frac{\partial e}{\partial p}\right)_\tau = -\frac{\alpha}{\rho}$$

permettono di trascrivere il differenziale totale dell'entropia specifica

$$de = \left(\frac{\partial e}{\partial p}\right)_\tau dp + \left(\frac{\partial e}{\partial \tau}\right)_p d\tau$$

nella forma

$$de = -\frac{\alpha}{\rho} dp + \frac{c_p}{\tau} d\tau$$

che verrà utilizzata in seguito.

2.7. Modulo di comprimibilità.

Anzi che ricorrere a combinazioni dei coefficienti di dilatazione α e di comprimibilità β , definiti nel paragrafo 2.2, si preferisce spesso indicare le variazioni di volume V con la pressione p a mezzo del *modulo di comprimibilità*

$$\varepsilon \equiv -V \frac{\partial p}{\partial V},$$

da precisare specificando il genere di trasformazione che viene imposta alla temperatura τ . La grandezza ε va espressa in N m^{-2} . Per la costanza della massa racchiusa in V si ha pure

$$\varepsilon = \varrho \frac{\partial p}{\partial \varrho}.$$

Il *modulo di comprimibilità a temperatura costante*, ε_T , ed il *modulo di comprimibilità ad entropia costante*, ε_s , sono di impiego particolarmente frequente. Il primo di questi è uguale all'inverso del coefficiente di comprimibilità β :

$$\varepsilon_T = \frac{1}{\beta}.$$

A proposito del secondo, va osservato che l'espressione del differenziale totale della $V = V(p, \tau)$,

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_\tau dp + \left(\frac{\partial V}{\partial \tau}\right)_p d\tau,$$

porge in ogni caso

$$\frac{\partial V}{\partial p} = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_\tau + \left(\frac{\partial V}{\partial \tau}\right)_p \frac{\partial \tau}{\partial p}.$$

Per contro, la condizione che l'entropia specifica $e = e(p, \tau)$ resti costante,

$$de = \left(\frac{\partial e}{\partial p}\right)_\tau dp + \left(\frac{\partial e}{\partial \tau}\right)_p d\tau = 0,$$

unita alla relazione maxwelliana del paragrafo 1.7,

$$\left(\frac{\partial e}{\partial p}\right)_\tau = M \left(\frac{\partial e}{\partial \tau}\right)_p = - \left(\frac{\partial V}{\partial \tau}\right)_p,$$

nella quale M è la massa del volume V , impone che sia

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial p}\right)_e = \frac{1}{M} \left(\frac{\partial V}{\partial \tau}\right)_p \left(\frac{\partial e}{\partial \tau}\right)_p^{-1}.$$

Perciò

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_e = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_\tau + \frac{1}{M} \left(\frac{\partial V}{\partial \tau}\right)_p^2 \left(\frac{\partial e}{\partial \tau}\right)_p^{-1}.$$

Riprendendo ora dal paragrafo 2.6 sia le espressioni di c_p e c_v , sia il legame fondamentale che intercorre fra tali calori specifici, si ha subito che

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_e = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_\tau \left[1 - \frac{\tau \alpha^2}{\beta c_p} \right] = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_\tau \frac{c_v}{c_p},$$

e quindi

$$\varepsilon_c = \frac{c_p}{c_v} \varepsilon_T.$$

Nel caso particolare dei gas molto rarefatti, l'equazione di stato

$$pV = \frac{M\mathcal{R}}{N} T$$

mostra che

$$\varepsilon_T = p,$$

e quindi che

$$\varepsilon_c = \frac{c_p}{c_v} p,$$

ove i coefficienti c_p e c_v , come osservato nel paragrafo 2.6, sono indipendenti dalla pressione. L'aumento dei moduli di comprimibilità con la pressione si mantiene, anche se in forma ridotta, pure quando il materiale si trova in uno stato di aggregazione differente. La dipendenza dei moduli di comprimibilità dalla temperatura è, di norma, più vistosa, ma non si manifesta con segno sempre costante. Per i liquidi e per i solidi, il modulo di comprimibilità isoentropica non differisce apprezzabilmente dal modulo di comprimibilità isoterma.

2.8. Conduttività termica.

Per mantenere una differenza di temperatura fra due porzioni distinte della superficie limite di un corpo occorre fornire energia termica alla parete più calda e sottrarla a quella più fredda. Se queste pareti sono piane, parallele e molto ampie rispetto alla loro mutua distanza, se il salto di temperatura è percentualmente limitato, e se il corpo racchiuso è in quiete, l'esperienza mostra che la potenza \mathcal{P} , necessaria risulta direttamente proporzionale sia alla superficie A di ciascuna parete, sia al salto ΔT della temperatura, mentre riesce inversamente proporzionale allo spessore d del corpo. Il fattore di proporzionalità

$$k \equiv \frac{\mathcal{P} \cdot d}{A \Delta T}$$

è detto *coefficiente di conduttività termica* del corpo. In accordo con questa definizione, k va espresso in $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$.

Il coefficiente di conduttività termica è praticamente indipendente dalla pressione, pur crescendo regolarmente con essa, ma varia invece, di norma, in modo apprezzabile con la temperatura. Cresce notevolmente nei gas e nei liquidi, quasi proporzionalmente alla temperatura assoluta; e cresce pure, sebbene in modo meno accentuato, in alcuni solidi amorfi, ma rimane sostanzialmente inalterato in altri, come nel vetro, e diminuisce all'aumentare di τ nei metalli puri.

In molti problemi connessi alla diffusione dell'energia termica, il coefficiente k si presenta in associazione monomia con la densità ρ ed il calore specifico a pressione costante c_p . Alla grandezza

$$\kappa \equiv \frac{k}{\rho c_p}$$

viene dato il nome di *coefficiente di diffusività termica*; essa va espressa in $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$.

2.9. Coefficienti di viscosità.

Per deformare un corpo occorre esercitare degli sforzi distribuiti sulla sua superficie limite, differenti dagli sforzi di pressione indicati dall'equazione di stato

$$V = V(p, \tau).$$

Può accadere che tali sforzi dipendano solo dal valore della deformazione complessivamente ottenuta: si dice allora che il corpo manifesta comportamento da materiale *elastico*. Può avvenire invece che l'entità degli sforzi richiesti dipenda unicamente dalla velocità con la quale si realizza la deformazione: in tal caso si dice che il materiale in esame si comporta come un *fluido*. Esistono anche comportamenti intermedi, con dipendenza degli sforzi sia dall'entità della deformazione impressa, sia dalla rapidità con la quale questa è raggiunta, che vengono classificati come comportamenti da materiale *viscoelastico*.

Le differenti risposte alle sollecitazioni, fin qui elencate, dipendono dal rapporto fra i tempi durante i quali hanno luogo le deformazioni da considerare, ed i tempi richiesti perché le strutture molecolari assumano il nuovo stato di equilibrio. Così, un dato materiale si comporta come elastico di fronte a deformazioni che si realizzano in tempi irrilevanti rispetto a quelli necessari al riassetto molecolare, e come fluido per le deformazioni tanto lente da risultare percentualmente apprezzabili solo

su durate molto maggiori dei tempi di riequilibrio interno, passando attraverso risposte da materiale viscoelastico per le deformazioni di durata intermedia.

Nel seguito si prenderanno in esame solo fenomeni nei quali i materiali coinvolti si comportano come fluidi. In campo tecnico, tale situazione è tipica degli aeriformi e della maggioranza dei liquidi. Per questi materiali, infatti, gli assestamenti delle molecole possono ritenersi conclusi già dopo tempi dell'ordine dei nanosecondi. Lo stesso comportamento da materiale fluido si presenta tuttavia anche nei solidi, purché i fenomeni siano sufficientemente lenti.

Sempre nel caso dei fluidi, i singoli materiali manifestano ancora risposte differenti ai vari tipi di deformazioni cui vengono assoggettati. Inoltre, gli sforzi richiesti per una data deformazione non sono sempre soltanto normali. Su ciascuna porzione del contorno del corpo in esame, sufficientemente piccola da poter essere confusa con il piano tangente per un suo punto, il risultante delle forze applicate ammette pure una componente tangenziale, oltre alla componente normale. I rapporti dei moduli di queste componenti all'area cui esse si riferiscono sono la *componente tangenziale* e la *componente normale dello sforzo di superficie*. Entrambe vanno misurate in newton su metro quadro, N m^{-2} .

Lo studio della componente tangenziale riesce particolarmente comodo quando la deformazione è dovuta ad un semplice scorrimento. Si consideri perciò un corpo fluido delimitato da due superfici piane e parallele. Per mantenere una di queste superfici limite in moto con velocità v_a rispetto all'altra, senza modificare la loro distanza reciproca d , è necessario esercitare sulle superfici stesse delle forze tangenziali uniformemente distribuite. L'esperienza avverte che questi sforzi tangenziali τ , dipendono innanzitutto dal valore del rapporto tra la velocità v_a e lo spessore d . Tuttavia τ può dipendere anche dalla durata dello scorrimento con velocità v_a che viene imposto: esistono sia *fluidi tixotropici* nei quali τ diminuisce al passare del tempo durante il quale il fluido viene deformato, sia *fluidi reopectici* per i quali τ risulta invece crescente. Fra i materiali del primo tipo figurano molte vernici, e molti lubrificanti. Alla seconda categoria appartengono, ad esempio, i sol di bentonite. Questi comportamenti sono legati a continue modifiche delle aggregazioni molecolari. Nei fluidi tixotropici, la quiete favorisce la formazione di legami strutturali in grado di contrastare le deformazioni, che vengono progressivamente distrutti dal moto, e che si ripristinano poi durante i nuovi stati di riposo. Inversamente, nei fluidi reopectici, il movimento conduce via via le molecole in posizioni reciproche favorevoli alla formazione di strutture relativamente stabili.

Più frequentemente τ rimane invariato nel tempo. Si usa esprimere allora la dipendenza di τ dalla velocità di scorrimento con lo sviluppo in serie

$$\tau = \tau_1 + \mu \left(\frac{v_d}{d} \right) + \mu_1 \left(\frac{v_d}{d} \right)^2 + \dots,$$

ed introdurre nomenclature particolari a seconda dell'importanza relativa assunta dai singoli termini dello sviluppo stesso. Si parla così di *fluido di Bingham* se τ_1 è diverso da zero, come indicato in figura 2.4, e come

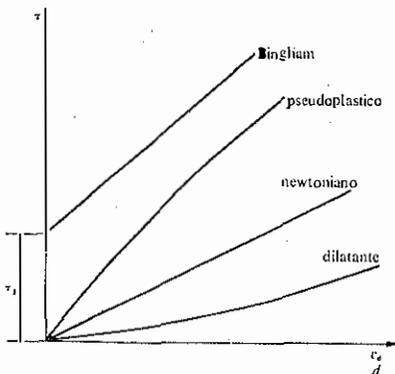


Fig. 2.4. - Indicazione schematica dei principali comportamenti, indipendenti dal tempo e dagli eventi pregressi, esibiti dai fluidi.

avviene, ad esempio, in alcuni fanghi e nella boiaccia di cemento. Il fatto è dovuto alla presenza di strutture interne, simili a quelle dei materiali solidi, che si distruggono quando lo sforzo supera τ_1 , e che si riformano quando questo cade al disotto di τ_1 . Si dice invece che il fluido presenta comportamento *newtoniano* quando tutti i termini risultano irrilevanti rispetto al secondo: questa circostanza si manifesta di norma per i gas, e per i liquidi, purché gli aggregati molecolari che li compongono siano costituiti da non più di qualche migliaio di atomi. Se poi i termini successivi dello sviluppo acquistano rilevanza, può accadere che gli incrementi dello sforzo τ richiesto siano, a pari aumento del rapporto tra v_d e d , via via più deboli o più forti, al crescere dello stesso rapporto. Nel primo caso, comune per le sospensioni di particelle asimmetriche e per le soluzioni di sostanze macromolecolari, il comportamento del fluido è detto *pseudoplastico*; al secondo, che si presenta nelle sospensioni ad alta concentrazione, ci si riferisce come a comportamento *dilatante*. Si ritiene che le manifestazioni pseudoplastiche siano connesse ad un progressivo orientamento nella dire-

zione del moto delle particelle in sospensione o delle molecole del soluto, al quale corrisponde una riduzione delle resistenze allo scorrimento; mentre si ammette che le proprietà dilatanti siano collegate alla perdita progressiva dell'assetto di massima compattezza da parte delle particelle solide, con dilatazione globale della sospensione, aumento degli interstizi, ed azione lubrificante del liquido sempre meno efficace.

Anche quando il fluido si comporta semplicemente come newtoniano, μ dipende ancora dalla pressione e dalla temperatura. Nei gas, ed in quasi tutti i liquidi, μ aumenta notevolmente con la pressione, ma nell'acqua, per contro, i mutamenti non hanno costantemente questo segno, e non sono tecnicamente rilevanti. Le variazioni dovute a cambiamenti della temperatura sono sempre molto importanti: nei liquidi μ diminuisce all'aumentare di τ , mentre negli aeriformi l'andamento osservato è quello opposto. L'influenza della temperatura risulta differente perché, nei liquidi, la resistenza allo scorrimento dipende innanzitutto dall'attrazione reciproca tra le singole molecole, che va attenuandosi al crescere di τ , mentre negli aeriformi la stessa resistenza è dovuta alle velocità disordinate di traslazione delle molecole, che tenderebbero a riportare mediamente in quiete il corpo, e che aumentano di intensità insieme a τ .

Al fattore μ , da misurare in $\text{N m}^{-2} \text{s}$, si riserva il nome di *coefficiente di viscosità dinamica*. Un'unità di misura estranea al SI, tuttora molto usata, è il *poise*, con simbolo P, pari a $10^{-1} \text{N m}^{-2} \text{s}$, o meglio il suo sottomultiplo centipoise, che ha simbolo cP, e che è pari a $10^{-3} \text{N m}^{-2} \text{s}$.

Si nota ancora che μ , nelle espressioni analitiche riguardanti il moto dei fluidi, compare spesso rapportato alla densità ρ . Ciò ha suggerito l'opportunità di introdurre pure il *coefficiente di viscosità cinematica*

$$\nu \equiv \frac{\mu}{\rho},$$

da misurare in $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$. Molto usata è anche l'unità *stoke*, con simbolo St, pari a $10^{-4} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$; più ancora il centistoke, con simbolo cSt, uguale perciò a $10^{-6} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$, che consente notazioni più snelle.

Sforzi legati alla deformazione od alla velocità della deformazione si presentano anche quando non è richiesto uno scorrimento, ma solo una variazione di volume. Se non si riscontrano effetti di ricordo delle configurazioni pregresse, è spesso sufficiente considerare aumenti della componente normale dello sforzo di deformazione, ossia aumenti di pressione Δp rispetto alle pressioni richieste dall'equazione di stato, direttamente proporzionali alla velocità con la quale ha luogo la riduzione percentuale del volume V . Il coefficiente di proporzionalità differisce da

quello μ , relativo allo scorrimento. Si usa porre

$$\Delta p = - \left(\mu' + \frac{2}{3} \mu \right) \frac{1}{V} \frac{dV}{dt},$$

e chiamare μ' *secondo coefficiente di viscosità dinamica*. Come μ , anche μ' va misurato in $\text{N m}^{-2} \text{ s}$.

2.10. Valori numerici.

La tabella 2.1 presenta, in cifra tonda, i valori di alcuni parametri fisici per i liquidi più frequentemente impiegati in campo tecnico. Salvo specifica indicazione contraria, i dati sono quelli corrispondenti alla pressione atmosferica di riferimento

$$p_{\text{atm}} = 1,013\,250 \text{ bar},$$

ed alla temperatura di 20 °C.

TABELLA 2.1. - *Proprietà fisiche di liquidi.*

Liquido	Densità	Modulo di comprimibilità isentropica	Tensione superficiale	Pressione di evaporazione	Viscosità dinamica
	ρ kg m^{-3}	ϵ_0 N m^{-2}	σ N m^{-1}	p_e N m^{-2}	μ $\text{N m}^{-2} \text{ s}$
Acqua	998	$2,2 \cdot 10^9$	$7,3 \cdot 10^{-2}$	2 300	$1,00 \cdot 10^{-3}$
Glicerina	1 263	4,5	6,3	0,011	1 490
Mercurio	13 546	25,0	48,4	0,16	1,55
Benzina	680	1,2	2,7	30 000	0,30
Kerosene	820	1,5	3,2	3 000	1,90
Alcool etilico	789	0,91	2,3	5 900	1,20
Acetone	792	0,78	2,4	24 000	0,33
Cloroformio	1 488	1,0	2,7	21 000	0,57
Acido acetico	1 055	1,1	2,8	1 500	1,29
Benzolo	879	1,1	2,9	10 000	0,65

Nella tabella 2.2 sono riportate, con maggior dettaglio, le proprietà fisiche dell'*acqua pura*, sempre per una pressione uguale a quella atmosferica di riferimento, se manca una precisazione diversa. Ulteriori dati sull'*acqua pura* sono raccolti in forma grafica nelle figure da 2.5 a 2.11 per mettere in maggior evidenza le variazioni dei parametri con la pressione e la temperatura.

TABELLA 2.2. — Proprietà fisiche dell'acqua pura.

Temperatura	Densità	Coefficiente di dilatazione termica	Modulo di comprimibilità isentropica	Tensione superficiale	Pressione di evaporazione	Calore di evaporazione	Calore specifico a pressione costante	Conducibilità termica	Viscosità dinamica
T °C	ρ kg m ⁻³	α K ⁻¹	ϵ_s N m ⁻²	σ N m ⁻¹	P_e N m ⁻²	λ_e J kg ⁻¹	c_p J kg ⁻¹ K ⁻¹	k W m ⁻¹ K ⁻¹	μ N m ⁻² s
- 10	998,14	- 29,47 · 10 ⁻⁵	1,801 · 10 ⁹	7,688 · 10 ⁻²	2,865 · 10 ⁵	2,524 · 10 ⁶	4,245 · 10 ³	0,550	2,585 · 10 ⁻³
- 5	999,28	- 16,92	1,885	7,625	4,217	2,513	4,230	0,560	2,100
0	999,87	- 6,81	1,962	7,560	6,108	2,502	4,217	0,569	1,751
5	999,99	1,60	2,029	7,493	8,718	2,490	4,202	0,578	1,506
10	999,73	8,79	2,088	7,424	12,270	2,478	4,192	0,587	1,302
15	999,13	15,07	2,138	7,352	17,039	2,466	4,186	0,596	1,136
20	998,23	20,66	2,178	7,278	23,37	2,454	4,182	0,604	1,000
25	997,08	25,71	2,210	7,201	31,66	2,443	4,179	0,611	0,889
30	995,68	30,31	2,235	7,123	42,41	2,431	4,178	0,618	0,797
35	994,06	34,57	2,251	7,043	56,22	2,419	4,178	0,625	0,718
40	992,25	38,54	2,261	6,961	73,75	2,407	4,178	0,632	0,651
45	990,24	42,26	2,265	6,877	95,82	2,395	4,179	0,637	0,591
50	988,07	45,78	2,264	6,793	123,35	2,383	4,181	0,643	0,544

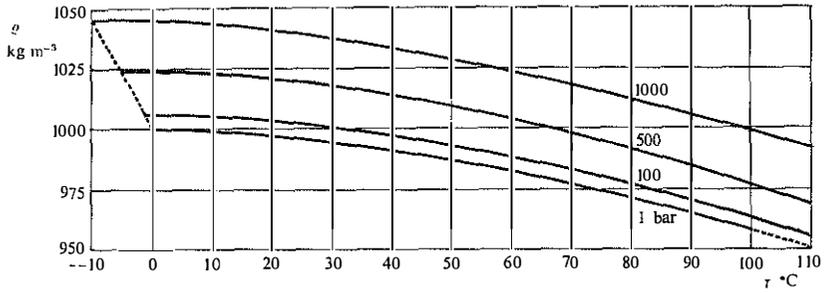


Fig. 2.5. - Densità dell'acqua.

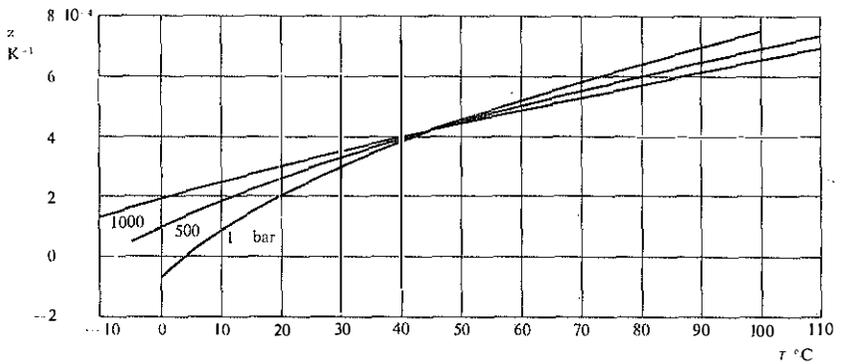


Fig. 2.6. - Coefficiente di dilatazione termica dell'acqua.

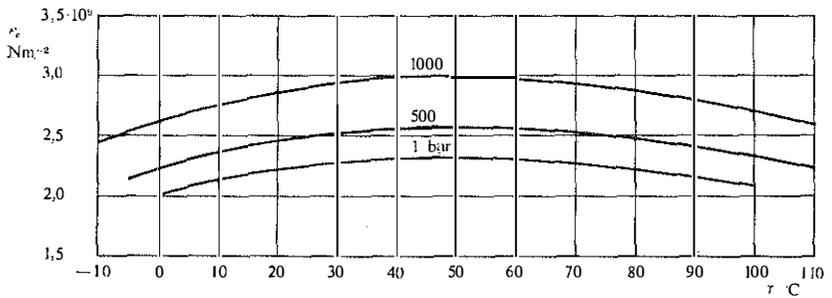


Fig. 2.7. - Modulo di comprimibilità isentropica dell'acqua.

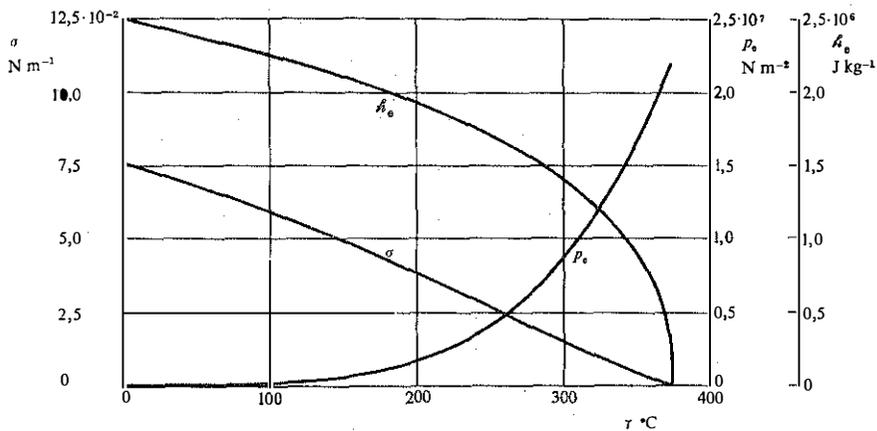


Fig. 2.8. - Calore di evaporazione λ_e , pressione di evaporazione p_e e tensione superficiale σ dell'acqua.

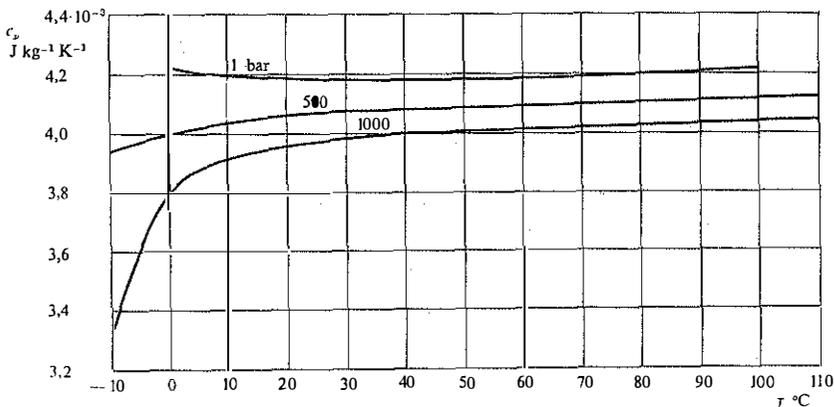


Fig. 2.9. - Calore specifico a pressione costante dell'acqua.

Le proprietà indicate cambiano quando l'acqua contiene sali in soluzione, come avviene per le acque naturali, e per quelle marine in particolare. Detta \mathcal{S} la *salinità*, ossia il numero di parti su mille della massa salina complessivamente disciolta, che riesce di solito inferiore a 40, i valori dei principali parametri fisici per le normali condizioni di ambiente

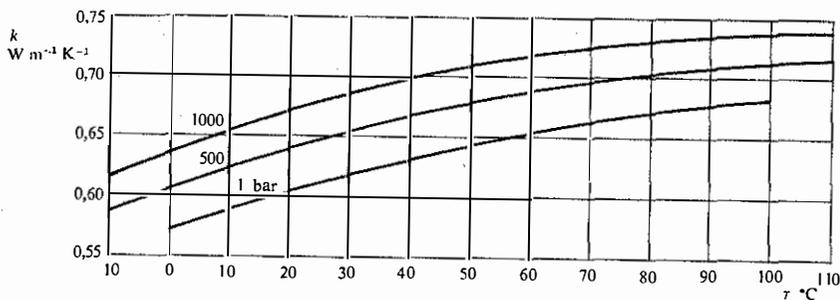


Fig. 2.10. - Coefficiente di conduttività termica dell'acqua.

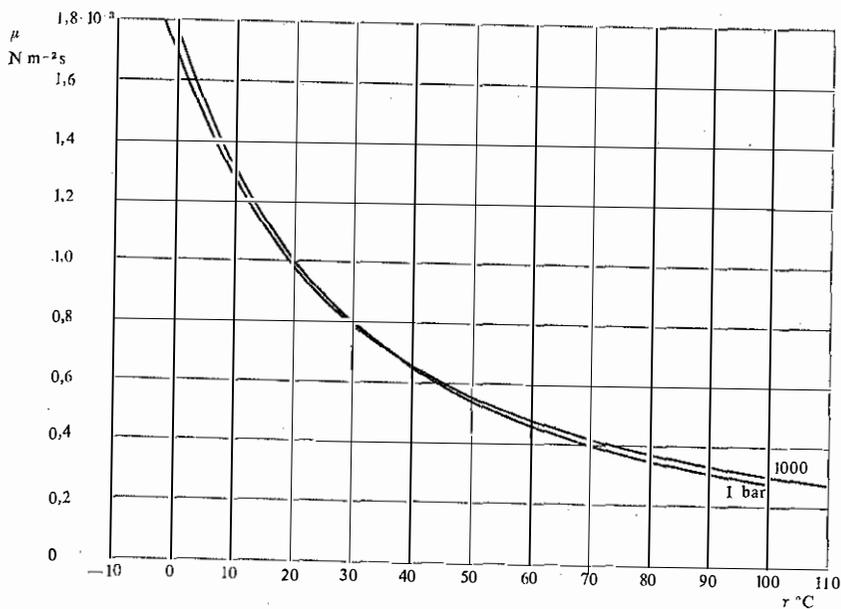


Fig. 2.11. - Viscosità dinamica dell'acqua.

possono essere dedotti da quelli corrispondenti all'acqua pura, contraddistinti qui dall'indice zero al piede, servendosi degli sviluppi che seguono: densità massima a pressione costante

$$\varrho_{\max} = \varrho_{\max,0}(1 + 8,1 \cdot 10^{-4} \vartheta) \text{ kg m}^{-3},$$

temperatura per la massima densità a pressione costante

$$T_{\rho_{\max}} = T_{\rho_{\max},0}(1 - 0,312\mathcal{P}) \text{ } ^\circ\text{C},$$

temperatura di congelamento

$$T_f = T_{f,0} - 5,5 \cdot 10^{-2}\mathcal{P} \text{ } ^\circ\text{C},$$

pressione di evaporazione

$$p_e = p_{e,0}(1 - 5,38 \cdot 10^{-4}\mathcal{P}) \text{ N m}^{-2},$$

calore specifico a pressione costante

$$c_p = c_{p,0}(1 - 1,85 \cdot 10^{-3}\mathcal{P}) \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1},$$

conduttività termica

$$k = k_0(1 - 1,12 \cdot 10^{-3}\mathcal{P}) \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1},$$

viscosità dinamica

$$\mu = \mu_0(1 + 1,85 \cdot 10^{-3}\mathcal{P}) \text{ N m}^{-2} \text{ s}.$$

L'ordinaria forma solida dell'acqua pura costituisce il *ghiaccio I*. Alcune sue caratteristiche sono riportate nella tabella 2.3, sempre per una pressione uguale a quella atmosferica di riferimento, quando la scelta della pressione è permessa. Alla stessa pressione ed alla temperatura di fusione corrispondente si ha inoltre:

calore di sublimazione	$2,836 \cdot 10^6 \text{ J kg}^{-1}$
calore di fusione	$3,34 \cdot 10^5 \text{ J kg}^{-1}$
conduttività termica	$0,84 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

TABELLA 2.3. - *Proprietà fisiche del ghiaccio I.*

Temperatura	Densità	Coefficiente di dilatazione termica	Pressione di fusione	Pressione di sublimazione	Calore specifico a pressione costante
T $^\circ\text{C}$	ρ kg m^{-3}	α K^{-1}	p_f N m^{-2}	p_0 N m^{-2}	c_p $\text{J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
-20	919,5	$1,51 \cdot 10^{-4}$	$1935 \cdot 10^5$	$1,032 \cdot 10^2$	$1,954 \cdot 10^3$
-15	918,8	1,54	1 560	1,656	1,999
-10	918,1	1,57	1 105	2,600	2,039
-5	917,4	1,59	598	4,019	2,078
0	916,7	1,62	1,013	6,108	2,118

Più spesso, però, si deve considerare ghiaccio di origine naturale. Questo presenta salinità \mathcal{S} ridotta rispetto a quella dell'acqua che ne è matrice, ed inferiore di norma al 15%. Nonostante la bassa salinità, il ghiaccio naturale ha caratteristiche globali molto diverse da quelle del ghiaccio I, perché è costituito da un tessuto minuto di ghiaccio I, di acqua salata soprafusa e di aria imprigionata. Le densità osservate variano da 850 a 960 kg m^{-3} , ed i moduli di comprimibilità isoentropici da $2 \cdot 10^5$ a $9 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2}$. Inoltre, all'aumentare della temperatura, si ha un continuo riassetto della struttura, con fusione parziale di ghiaccio I. Il coefficiente di dilatazione termica ed il calore specifico a pressione costante, quali appaiono per il corpo complessivo, subiscono così le forti variazioni indicate nei grafici della figura 2.12. Naturalmente, anche il calore di fusione ne risulta influenzato, ed è più comodo riferirsi all'energia termica necessaria per portare il ghiaccio da una temperatura assegnata fino a lique-

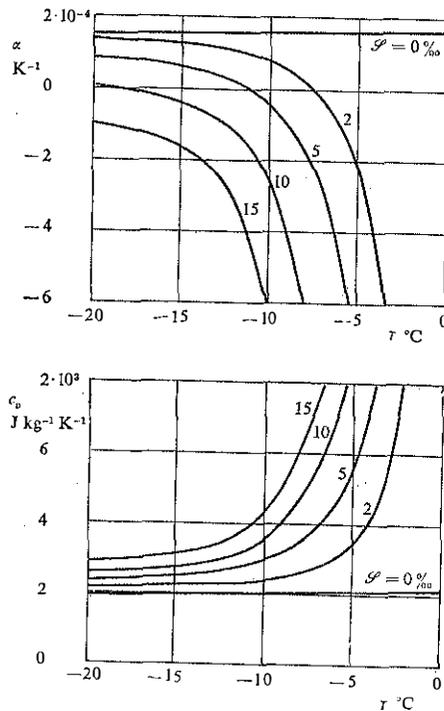


Fig. 2.12. - Coefficiente di dilatazione termica α e calore specifico a pressione costante c_p per il ghiaccio di origine naturale avente salinità in massa \mathcal{S} .

fazione completa: è richiesto il calore totale

$$h = 3,34 \cdot 10^3 (1 - 0,536 \rho) \text{ J kg}^{-1}$$

se si inizia la trasformazione da -1°C .

Fra i materiali allo stato aeriforme si considerano qui soltanto l'aria secca ed il metano. Per la prima si fa riferimento alla composizione che le compete nei primi 100 km dell'atmosfera più prossimi alla superficie del geode, e cioè alla composizione percentuale in massa

$$\text{N}_2 = 75,52\%, \quad \text{O}_2 = 23,15\%, \quad \text{Ar} = 1,28\%, \quad \text{CO}_2 = 0,05\%.$$

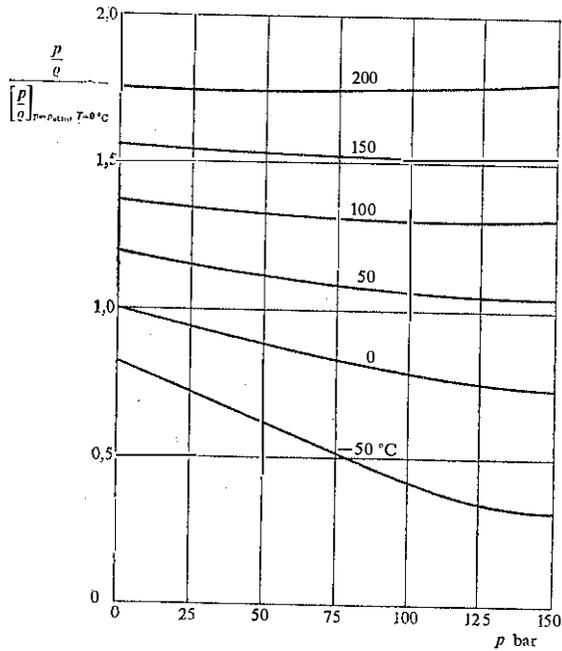
Le tabelle 2.4 e 2.5 presentano le più importanti caratteristiche fisiche dell'aria secca e del metano, per temperature crescenti e per una pressione pari a quella atmosferica di riferimento. Nelle figure 2.13 e 2.14, si riportano anche due grafici per illustrare l'andamento con la pressione e la temperatura del rapporto tra la pressione stessa e la densità, in modo da mettere in evidenza le differenze fra il comportamento di queste sostanze e quello dei gas molto rarefatti. Per comodità di lettura, il rapporto in questione è diviso per il valore assunto in corrispondenza della pressione atmosferica di riferimento e della temperatura di 0°C . Come si vede, per l'aria e per le normali condizioni ambientali si può far uso dell'equazione

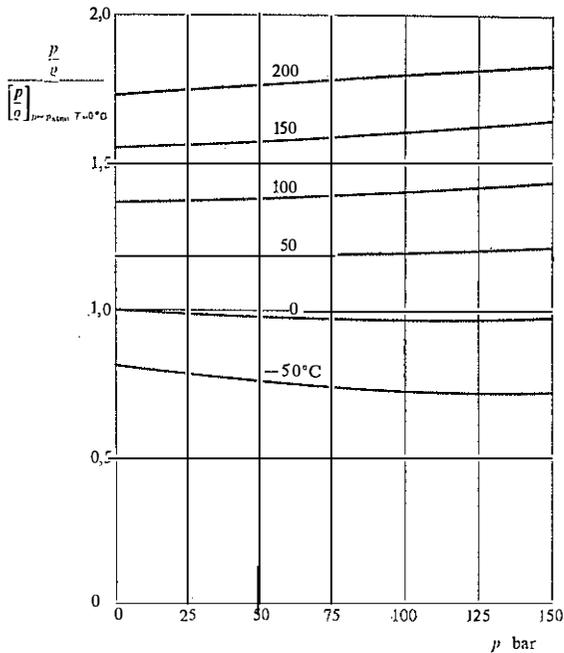
TABELLA 2.4. - *Proprietà fisiche dell'aria secca.*

Temperatura	Densità	Calore specifico a pressione costante	Conduttività termica	Viscosità dinamica
T $^\circ\text{C}$	ρ kg m^{-3}	c_p $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$	k $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$	μ $\text{N m}^{-2} \text{s}$
-100	2,040	$1,008 \cdot 10^3$	$1,58 \cdot 10^{-2}$	$1,16 \cdot 10^{-5}$
-50	1,582	1,009	2,00	1,45
-20	1,398	1,010	2,24	1,61
-10	1,344	1,011	2,32	1,66
0	1,293	1,011	2,40	1,71
10	1,247	1,012	2,48	1,76
20	1,205	1,012	2,55	1,81
30	1,165	1,013	2,63	1,86
40	1,127	1,013	2,71	1,90
50	1,093	1,014	2,79	1,95
100	0,946	1,019	3,17	2,18
200	0,746	1,033	3,90	2,58
500	0,456	1,105	5,80	3,58

TABELLA 2.5. - Proprietà fisiche del metano.

Temperatura	Densità	Calore specifico a pressione costante	Conduktività termica	Viscosità dinamica
T °C	ρ kg m ⁻³	c_p J kg ⁻¹ K ⁻¹	k W m ⁻¹ K ⁻¹	μ N m ⁻² s
-50	0,783	2,046 · 10 ³	2,34 · 10 ⁻²	0,86 · 10 ⁻⁶
-20	0,774	2,114	2,74	0,96
-10	0,744	2,140	2,87	1,00
0	0,717	2,166	3,01	1,03
10	0,691	2,192	3,14	1,06
20	0,668	2,218	3,29	1,09
30	0,646	2,245	3,43	1,13
40	0,625	2,276	3,58	1,16
50	0,605	2,304	3,70	1,19
100	0,524	2,459	4,43	1,33
200	0,413	2,799	5,85	1,60

Fig. 2.13. - Rapporto fra la pressione p e la densità ρ per l'aria secca.

Fig. 2.14. - Rapporto fra pressione p e densità ρ per il metano.

dei gas molto rarefatti,

$$pV = \frac{M\mathcal{R}}{N} T,$$

ricordata nel paragrafo 1.6. Data la composizione dell'aria secca, si ha

$$N_{\text{AS}} = 28,966 \text{ kg kmol}^{-1}.$$

La presenza di umidità nell'aria ne altera le caratteristiche fisiche. Sempre con riferimento alle normali condizioni ambientali, si può ricorrere all'equazione dei gas molto rarefatti anche per il vapor d'acqua, ponendo

$$N_{\text{VA}} = 18,015 \text{ kg kmol}^{-1}.$$

Per l'aria umida è dunque adeguata l'equazione di stato

$$pV = \left(\frac{M_{\text{AS}}}{N_{\text{AS}}} + \frac{M_{\text{VA}}}{N_{\text{VA}}} \right) \mathcal{R} T = M \left(\frac{(1 - \mathcal{J})}{N_{\text{AS}}} + \frac{\mathcal{J}}{N_{\text{VA}}} \right) \mathcal{R} T,$$

ove \mathcal{J} rappresenta l'umidità, ossia la massa di vapor d'acqua rapportata alla massa dell'aria umida. Con lo stesso grado di approssimazione è pure

$$c_p = (1 - \mathcal{J})c_{pAS} + \mathcal{J}c_{pVA}$$

$$k = (1 - \mathcal{J})k_{AS} + \mathcal{J}k_{VA}$$

$$\mu = (1 - \mathcal{J})\mu_{AS} + \mathcal{J}\mu_{VA}$$

Le proprietà fisiche del vapor d'acqua per le condizioni di evaporazione sono riportate nella tabella 2.6.

TABELLA 2.6. - *Proprietà fisiche del vapor d'acqua per lo stato di evaporazione.*

Temperatura	Densità	Calore specifico a pressione costante	Conduttività termica	Viscosità dinamica
T °C	ρ kg m ⁻³	c_p J kg ⁻¹ K ⁻¹	k W m ⁻¹ K ⁻¹	μ N m ⁻² s
- 10	2,155 · 10 ⁻³	1,849 · 10 ³	1,76 · 10 ⁻²	7,62 · 10 ⁶
0	4,847	1,854	1,82	8,02
10	9,396	1,860	1,88	8,42
20	17,29	1,866	1,94	8,82
30	30,37	1,875	2,00	9,22
40	51,16	1,885	2,06	9,62
50	83,02	1,899	2,12	10,02

CAPITOLO TERZO

ANALISI DIMENSIONALE

3.1. Espressioni dimensionali.

Le unità di misura delle grandezze fondamentali sono state fissate in base a convenzioni. Modificando queste, si possono così adottare come nuove unità per le masse, le lunghezze, i tempi e le temperature altre grandezze della stessa specie che abbiano, ordinatamente, misura r_M, r_L, r_T ed r_K nei confronti delle rispettive unità originarie.

Nello stesso momento, risulteranno diverse, in generale, anche le unità di misura delle grandezze derivate, pur mantenendo inalterate le definizioni di misura per tali grandezze e le convenzioni sulla scelta delle unità relative. La nuova unità per la grandezza derivata A avrà misura r_A rispetto all'unità primitiva di A, e questo valore dipenderà dai cambiamenti imposti alle unità fondamentali in maniera esprimibile scrivendo

$$r_A = f(r_M, r_L, r_T, r_K).$$

La struttura di questo legame funzionale è vincolata dal fatto, già ricordato nel paragrafo 1.1, che le misure sono sempre definite in modo da conservare il valore oggettivo dei rapporti. Si può scindere il mutamento delle unità fondamentali in due passi successivi, il primo dei quali porti a costruire una unità derivata intermedia di misura

$$r'_A = f(r'_M, r'_L, r'_T, r'_K)$$

rispetto a quella di partenza, ed il secondo ad individuare l'unità derivata finale, di misura

$$r''_A = f(r''_M, r''_L, r''_T, r''_K)$$

rispetto a quella intermedia. L'esistenza del valore obiettivo dei rapporti assicura che il quoziente tra la misura r_A dell'unità derivata definitiva e la misura r'_A dell'unità derivata intermedia deve coincidere con il rapporto tra le misure r''_A ed 1 delle medesime unità effettuate in base all'unità derivata intermedia. Deve essere cioè

$$r_A = r'_A r''_A,$$

e risultati analoghi devono sussistere per ciascuna grandezza fondamentale.

In complesso si ha dunque

$$f(r'_M r''_M, r'_L r''_L, r'_T r''_T, r'_K r''_K) = f(r'_M, r'_L, r'_T, r'_K) f(r''_M, r''_L, r''_T, r''_K).$$

Ponendo ora in evidenza i logaritmi, anziché i valori numerici, si può scrivere

$$\begin{aligned} \ln \tilde{f}(\ln r'_M + \ln r''_M, \ln r'_L + \ln r''_L, \ln r'_T + \ln r''_T, \ln r'_K + \ln r''_K) = \\ = \ln \tilde{f}(\ln r'_M, \ln r'_L, \ln r'_T, \ln r'_K) + \ln \tilde{f}(\ln r''_M, \ln r''_L, \ln r''_T, \ln r''_K), \end{aligned}$$

ove si intenda che sia

$$\tilde{f}(\ln r_M, \ln r_L, \ln r_T, \ln r_K) = f(r_M, r_L, r_T, r_K).$$

I logaritmi delle \tilde{f} sono dunque funzioni non solo continue, ma anche additive rispetto alle variabili $\ln r_M, \ln r_L, \ln r_T$ ed $\ln r_K$. Esse devono perciò essere lineari ed omogenee, ed avere quindi la struttura

$$\ln \tilde{f}(\ln r_M, \ln r_L, \ln r_T, \ln r_K) = s_{AM} \ln r_M + s_{AL} \ln r_L + s_{AT} \ln r_T + s_{AK} \ln r_K$$

con s_{AM}, s_{AL}, s_{AT} ed s_{AK} costanti, e legate unicamente alla definizione di misura della particolare grandezza derivata A. Di qui si trae subito

$$\ln f(r_M, r_L, r_T, r_K) = \ln (r_M^{s_{AM}} r_L^{s_{AL}} r_T^{s_{AT}} r_K^{s_{AK}})$$

e perciò anche

$$r_A = r_M^{s_{AM}} r_L^{s_{AL}} r_T^{s_{AT}} r_K^{s_{AK}}.$$

Così, il rispetto del valore obiettivo dei rapporti delle misure implica che la nuova unità di misura per ciascuna grandezza derivata, espressa secondo la primitiva, assuma un valore che è funzione monomia dei valori delle nuove unità per le grandezze fondamentali, stimati anch'essi in termini delle rispettive unità di partenza. Inversamente, è immediato verificare che l'esistenza del legame ora esaminato fra le unità di misura delle varie grandezze assicura la conservazione del valore obiettivo per i rapporti delle misure.

I risultati esposti vengono indicati normalmente con la notazione simbolica

$$A = M^{s_{AM}} L^{s_{AL}} T^{s_{AT}} K^{s_{AK}},$$

alla quale si riserva il nome di *espressione dimensionale* della grandezza derivata A rispetto al gruppo di grandezze fondamentali M, L, T e K , massa, lunghezza, tempo e temperatura, rispettivamente.

In particolare, se s_{AM}, s_{AL}, s_{AT} ed s_{AK} riescono tutti nulli, l'unità di misura della grandezza A resta invariata nonostante i mutamenti apportati alle unità di misura fondamentali, e si dice che A costituisce una *grandezza adimensionale*, ossia un *numero puro*.

3.2. Gruppi equivalenti di grandezze fondamentali.

Il cambiamento delle unità di misura delle quattro grandezze fondamentali porta a mutamenti ben determinati delle unità di tutte le grandezze derivate. Può anche accadere, inversamente, che una nuova scelta arbitraria delle unità di misura per quattro grandezze derivate implichi una variazione ben determinata sulle unità di misura delle grandezze fondamentali, ammesso che si mantengano fisse le definizioni di misura per le grandezze derivate e le convenzioni sul collegamento delle loro unità di misura con quelle fondamentali. Se questo avviene risultano fissate di conseguenza anche le variazioni delle unità di misura per le altre grandezze derivate, ed il gruppo di unità di misura per le quattro grandezze derivate in questione può assumere il ruolo, finora assegnato alle quattro unità fondamentali, di gruppo di partenza per la costruzione di tutte le unità di misura richieste. In questo senso, l'insieme delle quattro grandezze derivate risulta equivalente al gruppo delle grandezze fondamentali, e può essere adottato come nuovo gruppo fondamentale.

Se alle quattro grandezze derivate A_i in esame competono le espressioni dimensionali

$$A_i = M^{s_{A_i M}} L^{s_{A_i L}} T^{s_{A_i T}} K^{s_{A_i K}}$$

e se si adottano per tali grandezze delle nuove unità con misura r_{A_i} , nei confronti delle corrispondenti unità usuali, deve essere possibile individuare i valori r_M, r_L, r_T ed r_K delle misure rispetto alle unità convenzionali di quella massa, di quella lunghezza, di quell'intervallo di tempo e di quella differenza di temperature particolari che vanno contemporaneamente assunti come nuove unità di misura delle stesse grandezze fondamentali per

mantenere valide le relazioni

$$r_{A_i} = r_M^{s_{A_i M}} r_L^{s_{A_i L}} r_T^{s_{A_i T}} r_K^{s_{A_i K}}.$$

In altre parole, scelte arbitrariamente le r_{A_i} deve essere possibile ottenere dal sistema di queste equazioni le incognite r_M, r_L, r_T ed r_K , fermi restando gli esponenti $s_{A_i M}, s_{A_i L}, s_{A_i T}$ ed $s_{A_i K}$: Ma tale sistema è lineare e non omogeneo nei logaritmi delle variabili r_M, r_L, r_T ed r_K ed ammette perciò soluzione unica, sempre che sia diverso da zero il determinante estratto dalla matrice dei suoi coefficienti, e cioè sempre che sia

$$\begin{vmatrix} s_{A_1 M} & s_{A_1 L} & s_{A_1 T} & s_{A_1 K} \\ s_{A_2 M} & s_{A_2 L} & s_{A_2 T} & s_{A_2 K} \\ s_{A_3 M} & s_{A_3 L} & s_{A_3 T} & s_{A_3 K} \\ s_{A_4 M} & s_{A_4 L} & s_{A_4 T} & s_{A_4 K} \end{vmatrix} \neq 0$$

Si conclude così che il gruppo di grandezze A_i può costituire un nuovo insieme fondamentale se, e solo se, è diverso da zero il determinante della matrice formata con gli esponenti delle formule dimensionali riferite all'insieme fondamentale di partenza.

A questo risultato può essere data una formulazione del tutto equivalente, ma a volte più comoda nelle applicazioni. Basta osservare che l'annullarsi del determinante ora scritto è invece condizione necessaria e sufficiente perché le quattro grandezze A_i siano dimensionalmente dipendenti e consentano quindi la definizione di una grandezza B avente dimensioni non tutte nulle rispetto ad esse, ma dimensioni nulle rispetto alle grandezze fondamentali. Infatti, per rendere adimensionale

$$B = M^{s_{BM}} L^{s_{BL}} T^{s_{BT}} K^{s_{BK}}$$

occorre scegliere gli esponenti della

$$B = A_1^{s_{BA_1}} A_2^{s_{BA_2}} A_3^{s_{BA_3}} A_4^{s_{BA_4}}$$

in base al sistema lineare ed omogeneo

$$s_{BM} = s_{A_1 M} s_{BA_1} + s_{A_2 M} s_{BA_2} + s_{A_3 M} s_{BA_3} + s_{A_4 M} s_{BA_4} = 0$$

$$s_{BL} = s_{A_1 L} s_{BA_1} + s_{A_2 L} s_{BA_2} + s_{A_3 L} s_{BA_3} + s_{A_4 L} s_{BA_4} = 0$$

$$s_{BT} = s_{A_1 T} s_{BA_1} + s_{A_2 T} s_{BA_2} + s_{A_3 T} s_{BA_3} + s_{A_4 T} s_{BA_4} = 0$$

$$s_{BK} = s_{A_1 K} s_{BA_1} + s_{A_2 K} s_{BA_2} + s_{A_3 K} s_{BA_3} + s_{A_4 K} s_{BA_4} = 0$$

che ammette soluzioni non identicamente nulle se e solo se risulta uguale a zero il determinante estratto dalla matrice dei suoi coefficienti. E questo

determinante coincide con quello già considerato, salvo l'inessenziale scambio delle righe con le colonne. Se ne deduce che il gruppo di grandezze A_i può costituire un nuovo insieme fondamentale se, e solo se, le A_i stesse sono dimensionalmente indipendenti fra loro.

3.3. Teorema π .

La descrizione analitica dei fenomeni fisici è basata su *equazioni fisiche*. Si tratta di particolari relazioni matematiche comprendenti operazioni di somma fra grandezze fisiche. Queste operazioni vengono definite solo con riferimento a grandezze della stessa specie fisica, intendendo quale somma di tali grandezze la somma delle loro misure, effettuate con la medesima unità di misura, ed attribuendo al risultato significato di misura di una grandezza della stessa specie fisica di quella degli addendi.

È chiaro che le equazioni fisiche risultano perciò sempre costituite da termini tutti dimensionalmente omogenei, mentre non è vera la proposizione inversa, dato che esistono grandezze di specie fisica differente che hanno tuttavia le stesse dimensioni. È chiaro inoltre che un'equazione fisica rimane valida anche se la si assoggetta a cambiamenti delle unità di misura, pur non essendo vera nemmeno questa volta l'affermazione inversa.

Il fatto che i vari termini delle equazioni fisiche debbano avere tutti le stesse dimensioni può essere espresso anche in altra forma, del tutto equivalente. Se i valori a_1, a_2, \dots, a_n di n grandezze fisiche A_1, A_2, \dots, A_n sono legati fra loro da una legge fisica, da indicare simbolicamente come

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0,$$

deve esistere nella ennupla A_1, A_2, \dots, A_n almeno un gruppo di grandezze atto a svolgere le funzioni di gruppo fondamentale rispetto alla ennupla stessa, in modo che con esse si possano definire delle nuove grandezze fisiche aventi le stesse dimensioni di ciascuna delle altre grandezze legate dalla legge fisica in esame. È appena il caso di precisare che, di solito, questo gruppo sarà formato da quattro grandezze, e tale lo si supporrà in seguito, essendo immediate le modifiche da apportare qualora fosse sufficiente l'impiego di un gruppo più ridotto. Inoltre, salvo un mutamento inessenziale nella nomenclatura, si potrà sempre supporre che le quattro grandezze con funzione di gruppo fondamentale siano quelle A_1, A_2, A_3 ed A_4 . Indicate con $s_{A_1 A_1}, s_{A_1 A_2}, s_{A_1 A_3}$ ed $s_{A_1 A_4}$ le dimensioni rispetto alle A_1, A_2, A_3 ed A_4 di ciascuna delle $n-4$ grandezze A_i che rimangono,

si possono così definire $n-4$ nuove grandezze fisiche, tutte di dimensioni nulle, che assumono i valori

$$\frac{a_i}{a_1^{s_{A_1 A_1}} a_2^{s_{A_1 A_2}} a_3^{s_{A_1 A_3}} a_4^{s_{A_1 A_4}}}$$

Fra questi ed i valori a_1, a_2, a_3 ed a_4 sussiste ancora un legame funzionale

$$\tilde{f}\left(a_1, a_2, a_3, a_4, \frac{a_5}{a_1^{s_{A_5 A_1}} a_2^{s_{A_5 A_2}} a_3^{s_{A_5 A_3}} a_4^{s_{A_5 A_4}}}, \dots, \frac{a_n}{a_1^{s_{A_n A_1}} a_2^{s_{A_n A_2}} a_3^{s_{A_n A_3}} a_4^{s_{A_n A_4}}}\right) = 0$$

sia pure formalmente diverso da quello che intercorre fra le a_1, a_2, \dots, a_n . Mutando separatamente le unità di misura delle A_1, A_2, A_3 ed A_4 cambiano anche i corrispondenti valori a_1, a_2, a_3 ed a_4 , mentre restano inalterati i rapporti che figurano in questa relazione, proprio perché essi costituiscono misure di grandezze adimensionali. La dipendenza analitica risultante è dunque di fatto limitata ai soli valori dei rapporti adimensionali indicati, e va scritta più propriamente nella forma

$$\tilde{f}\left(\frac{a_5}{a_1^{s_{A_5 A_1}} a_2^{s_{A_5 A_2}} a_3^{s_{A_5 A_3}} a_4^{s_{A_5 A_4}}}, \dots, \frac{a_n}{a_1^{s_{A_n A_1}} a_2^{s_{A_n A_2}} a_3^{s_{A_n A_3}} a_4^{s_{A_n A_4}}}\right) = 0.$$

Se ne conclude che una legge fisica collegante fra loro n grandezze con dimensioni non tutte nulle può sempre essere rappresentata da un legame analitico tra un numero ridotto, in genere $n-4$, di grandezze adimensionali ottenute dalle grandezze di partenza. Questa conclusione costituisce il *teorema π* , enunciato da Vaschy nel 1890.

Fra le n grandezze fisiche considerate possono essere presenti più gruppi di grandezze capaci di svolgere le funzioni di insieme fondamentale rispetto alle rimanenti, gruppi che danno origine ad altrettante e diverse espressioni analitiche tra numeri puri differenti, ma che risultano tutte equivalenti, in quanto riconducibili le une alle altre attraverso trasformazioni matematiche.

3.4. I numeri puri.

Nei capitoli che precedono, sono state esaminate quattordici grandezze fisiche reciprocamente indipendenti, necessarie per descrivere la cinematica dei fenomeni da studiare, per precisare la natura dinamica dell'ambiente nel quale si svolgono, e per esprimere le proprietà del materiale interessato. Si tratta delle grandezze che vengono qui richiamate, insieme

ai simboli dei loro valori, e delle loro unità di misura:

lunghezze	L	m
tempi	t	s
velocità	v	m s^{-1}
modulo dell'accelerazione inerziale di riposo rispetto al geoide	g	m s^{-2}
modulo della velocità di rotazione siderale del geoide	ω_g	rad s^{-1}
pressioni	p	N m^{-2}
temperature	τ	K
densità	ρ	kg m^{-3}
coefficiente di dilatazione termica	α	K^{-1}
modulo di comprimibilità isoentropica	ε_e	N m^{-2}
tensione superficiale	σ	N m^{-1}
calore specifico a pressione costante	c_p	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
coefficiente di diffusività termica	κ	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
coefficiente di viscosità cinematica	ν	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$

Le leggi fisiche che coinvolgono le quattordici grandezze ora ricordate devono essere esprimibili, secondo il teorema π , anche attraverso relazioni tra dieci soli numeri puri. Fra i tanti che è possibile definire, hanno incontrato impiego particolarmente frequente i numeri puri che vengono costruiti in modo diretto dopo aver adottato come gruppo fondamentale quello formato dalla densità, dalla lunghezza, dalla velocità e dalla temperatura. Si ottengono così i numeri puri che seguono, elencati con il nome loro attribuito, con il simbolo che li rappresenta, e con la formula che ne definisce il valore numerico.

Strouhal	$St = \frac{L}{tv}$
Froude	$Fr = \frac{v}{\sqrt{gL}}$
Rossby	$Ro = \frac{v}{\omega_g L}$
Newton	$Ne = \frac{p}{\rho v^2}$
Gay-Lussac	$Ga = \alpha \tau$

$$\begin{aligned} \text{Mach} & \quad Ma = v \sqrt{\frac{\rho}{\varepsilon_e}} \\ \text{Weber} & \quad We = v \sqrt{\frac{\rho L}{\sigma}} \\ \text{Eckert} & \quad Ec = \frac{v^2}{c_p T} \\ \text{Péclet} & \quad Pe = \frac{vL}{\kappa} \\ \text{Reynolds} & \quad Re = \frac{vL}{\nu} \end{aligned}$$

La combinazione monomia di questi numeri puri fornisce a sua volta altri numeri puri, che possono risultare più comodi in talune applicazioni. Si ricordano, in particolare, quelli di

$$\begin{aligned} \text{Ekman} & \quad Ek = \frac{\nu}{\omega_g L^2} = Ro Re^{-1} \\ \text{Fourier} & \quad Fo = \frac{\kappa t}{L^2} = St^{-1} Pe^{-1} \\ \text{Grashof} & \quad Gr = \frac{gL^3 \alpha T}{\nu^2} = Fr^{-2} Ga Re^2 \\ \text{Prandtl} & \quad Pr = \frac{\nu}{\kappa} = Pe Re^{-1} \\ \text{Taylor} & \quad Ta = \frac{\omega_g L^2}{\nu} = Ro^{-1} Re \end{aligned}$$

Riferimenti citati.

VASCHY, A., *Traité d'électricité et de magnétisme*, Paris, 1890.

CAPITOLO QUARTO

SCHEMI DI MEZZO CONTINUO

4.1. Valori locali ed istantanei.

Le varie grandezze fisiche finora considerate sono state riferite a corpi materiali nel loro insieme, salvo rare eccezioni, e sono adatte solo alla descrizione dei fenomeni che coinvolgono globalmente i corpi materiali stessi. Quando è richiesto un esame più dettagliato, in grado di inquadrare anche informazioni sull'evoluzione di porzioni minute del sistema fisico oggetto di studio, si ricorre ad estrapolazioni delle definizioni originarie. Più precisamente, si introducono in questo caso dei valori virtuali per le varie grandezze che interessano, valori dipendenti dalla posizione \mathbf{x} e dall'istante t . Si richiede però che gli integrali di questi valori, o di loro combinazioni monomie, su volumi V abbastanza grandi da contenere un numero molto elevato di molecole ricostruiscano l'effettivo valore di grandezze fisiche del corpo racchiuso in V all'istante t .

Ad esempio, la *densità* locale ed istantanea $\varrho(\mathbf{x}, t)$ è definita richiedendo che

$$M = \int_V \varrho(\mathbf{x}, t) dV$$

fornisca la *massa* racchiusa in V all'istante t , comunque vengano scelti V e t , ma con la condizione che V sia sufficientemente ampio nel senso già precisato. Inversamente, fissata l'attenzione su un particolare punto \mathbf{x} e su un determinato istante t , si può sempre definire una densità per ogni volume V che comprenda \mathbf{x} , dividendo per V la massa in esso contenuta all'istante t . Al mutare della configurazione di V ed al cambiare del suo volume cambierà anche, in generale, il valore ottenuto per ϱ . Diminuendo

progressivamente V si giungerà a considerare numeri molto limitati di molecole, ed in queste circostanze le ϱ risultanti manifesteranno forti variazioni con la riduzione di V a parità di massa racchiusa, o con l'esclusione di una parte rilevante di molecole per una contrazione relativamente limitata del volume. L'introduzione del valore locale ed istantaneo $\varrho(\mathbf{x}, t)$ trascura queste ultime variazioni, e per questo motivo la $\varrho(\mathbf{x}, t)$ stessa non è una grandezza fisica direttamente misurabile.

Un secondo esempio è costituito dalla *velocità* locale ed istantanea $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Si vuole qui che

$$\mathbf{M} = \int_V \varrho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV$$

sia la *quantità di moto* della massa racchiusa in V all'istante t , comunque vengano scelti V e t . Ancora una volta $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ non è direttamente osservabile, ma il suo prodotto per la densità $\varrho(\mathbf{x}, t)$ fornisce attraverso l'integrazione su un volume adeguato una grandezza fisica che è suscettibile di misura diretta.

L'insieme dei valori virtuali locali ed istantanei costituisce uno *schema continuo* delle proprietà fisiche del corpo in esame, e dei fenomeni che lo interessano. Allo schema continuo si adattano immediatamente alcune locuzioni usuali. Così, la velocità può essere identicamente nulla, e si dice allora che il corpo è in *quiete*, oppure può essere indipendente dal tempo, e si parla in tal caso di *moto permanente*. Altre espressioni sono invece specifiche dello schema di mezzo continuo. In particolare, le linee ed i punti isolati nei quali la velocità si annulla si dicono *linee* e *punti di ristagno*. Inoltre, si fa spesso riferimento ad un *elemento fluido*, che va inteso come un volume di fluido avente dimensioni tanto ridotte rispetto a quelle del corpo complessivo da rendere inessenziale l'esame delle variazioni interne dei parametri fisici. L'elemento fluido passa perciò dal punto \mathbf{x} all'istante t con velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, ma va tenuto presente che le molecole o gli aggregati molecolari che lo compongono all'istante t si disperdono uniformemente in tutto il corpo fluido in un tempo più o meno lungo, perché le molecole sono animate da un intenso moto disordinato, cui partecipano sia singolarmente, come avviene nei gas, sia come componenti di aggregati aventi organizzazione relativamente stabile, come avviene invece nei liquidi.

I valori locali ed istantanei, sempre integrabili, possono presentare delle discontinuità. Di norma, queste vanno introdotte in corrispondenza di superfici, linee o punti isolati: così, in seguito e salvo esplicito avviso contrario, si supporrà che i valori locali ed istantanei siano almeno di classe C^0 .

L'integrazione dei valori locali ed istantanei porta a quantità direttamente osservabili. In particolare, il flusso della velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ attraverso una superficie A di versore normale \mathbf{n} ,

$$Q = \int_A \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA,$$

è detto *portata volumetrica*, o semplicemente *portata*, senza altre precisazioni. La grandezza Q costituisce la derivata temporale del volume di fluido che attraversa in direzione \mathbf{n} la superficie A , e va perciò espressa in metri cubi al secondo, $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$.

Analogamente, dati $\rho(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, si possono calcolare il *momento della quantità di moto* rispetto ad un punto fisso \mathbf{x}_0 della massa racchiusa in V come

$$\mathbf{M}_m = \int_V (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \rho \mathbf{v} dV$$

ed i valori dell'*energia cinetica* della stessa massa come

$$\mathcal{E} = \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV,$$

in cui v è il modulo di \mathbf{v} .

4.2. Derivate sostanziali.

In molti casi interessa il tasso di incremento nel tempo dei valori di una grandezza fisica $b(\mathbf{x}, t)$, di classe C^1 , associati ad un elemento fluido che passa dal punto \mathbf{x} all'istante t . Questo tasso è indicato usualmente come derivata sostanziale della b , ed è rappresentato con

$$\frac{D}{Dt} b.$$

Per calcolarlo basta scrivere il differenziale totale della funzione b :

$$db = \frac{\partial b}{\partial t} dt + \sum_1^3 \frac{\partial b}{\partial x_i} dx_i$$

insieme alla condizione che gli incrementi spaziali dx_i rappresentino lo spostamento dell'elemento fluido nell'intervallo di tempo dt , e valgano perciò

$$dx_i = v_i dt.$$

Si ottiene così

$$db = \frac{\partial b}{\partial t} dt + \sum_1^3 \frac{\partial b}{\partial x_i} v_i dt,$$

e quindi

$$\frac{D}{Dt} b = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \right) b.$$

Analogo problema si presenta quando ci si occupa del valore di b sommato su tutto un dominio materiale V , ossia su un dominio formato sempre dagli stessi elementi fluidi. La quantità

$$\int_V b dV$$

è allora una ben definita funzione del tempo: la sua derivata rispetto a t è detta ancora derivata sostanziale, per sottolineare il riferimento ad un volume in moto con il fluido, ed è indicata con il simbolo

$$\frac{D}{Dt} \int_V b dV.$$

Nell'intervallo di tempo dt successivo all'istante t , il volume passa dalla configurazione iniziale V all'assetto finale V' , e l'integrale in questione subisce un incremento

$$d \left(\int_V b dV \right) = \int_{V'} b(t+dt) dV' - \int_V b(t) dV.$$

Durante lo stesso intervallo di tempo i punti della superficie A , contorno che si suppone qui regolare del volume V , compiono spostamenti la cui componente nella direzione della normale interna locale \mathbf{n} ha modulo

$$|\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| dt.$$

Come schematizzato in figura 4.1, tali spostamenti avvengono verso l'interno di V su quella parte A_1 del contorno A per la quale $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ è positivo, e verso l'esterno di V sulla A_u rimanente, ove $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ è invece negativo. Perciò, indicato con V'' il dominio comune a V e V' , si ha

$$\begin{aligned} \int_{V'} b(t+dt) dV' &= \int_{V''} b(t+dt) dV'' + \int_{A_u} b(t+dt) |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| dt dA_u \\ \int_V b(t) dV &= \int_{V''} b(t) dV'' + \int_{A_1} b(t) |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| dt dA_1, \end{aligned}$$

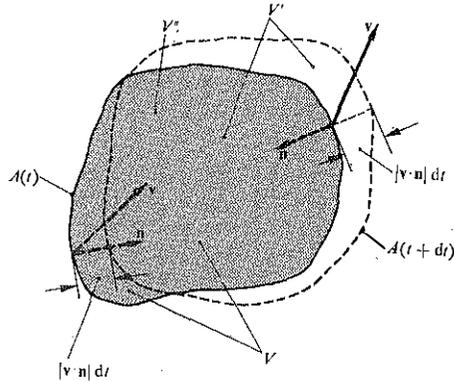


Fig. 4.1. – Elementi di rilievo nel calcolo della derivata sostanziale di una grandezza fisica connessa al fluido presente nel volume V all'istante t .

ossia, complessivamente,

$$d\left(\int_V b dV\right) = \int_{V'} [b(t+dt) - b(t)] dV' - \int_{A_u} b(t+dt) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dt dA_u - \int_{A_t} b(t) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dt dA_t.$$

Ne segue

$$\frac{D}{Dt} \int_V b dV = \int_V \frac{\partial b}{\partial t} dV - \int_A b \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA.$$

In alternativa, l'ultimo integrale scritto può essere trasformato in un integrale di volume, ricorrendo al teorema della divergenza: poiché si è già ammesso che la superficie-contorno A sia regolare e che la funzione $b(\mathbf{x}, t)$ sia di classe C^1 , basta supporre che anche $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ sia di classe C^1 . Si ottiene così

$$\frac{D}{Dt} \int_V b dV = \int_V \left(\frac{\partial b}{\partial t} + \operatorname{div}(b\mathbf{v}) \right) dV,$$

ovvero, raggruppando in modo diverso i termini dell'integrando, anche

$$\frac{D}{Dt} \int_V b dV = \int_V \left(\frac{Db}{Dt} + b \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV.$$

Queste due espressioni sono note come *teoremi di trasporto*, in quanto consentono di trasferire le operazioni di derivazione sotto il segno di integrale.

In seguito si avrà occasione di calcolare anche il tasso di incremento nel tempo di una grandezza vettoriale, anziché scalare, sempre seguendo i valori connessi con l'elemento fluido che passa per \mathbf{x} all'istante t .

Ferma restando l'ipotesi che la grandezza in esame, $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$, sia di classe C^1 , si dirà ancora che si vuole eseguire la derivata sostanziale, e si porrà il risultato nella forma

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{b}.$$

Dato che, nella scrittura

$$\mathbf{b} = b_x \mathbf{i}_x + b_y \mathbf{i}_y + b_z \mathbf{i}_z,$$

i versori che fanno parte del riferimento sono uniformi e permanenti, risulta subito

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{b} = \mathbf{i}_x \frac{D}{Dt} b_x + \mathbf{i}_y \frac{D}{Dt} b_y + \mathbf{i}_z \frac{D}{Dt} b_z.$$

Inoltre, quando interesseranno le variazioni temporali intrinseche della somma di una grandezza vettoriale \mathbf{b} estesa ad un dominio V formato costantemente dai medesimi elementi fluidi, si scriverà

$$\frac{D}{Dt} \int_V \mathbf{b} dV.$$

In tal caso si ha

$$\frac{D}{Dt} \int_V \mathbf{b} dV = \int_V \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} dV - \int_A \mathbf{b}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA,$$

come si controlla immediatamente operando sulle componenti.

4.3. Equazione di continuità.

Giusta la definizione introdotta al paragrafo 4.1, la densità $\rho(\mathbf{x}, t)$ fornisce il valore della massa compresa in ciascun volume V , a mezzo dell'operazione di somma

$$M = \int_V \rho dV.$$

Di norma si richiede che tale massa si conservi inalterata nel corso della variazione di assetto del volume materiale V , e che riesca quindi

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = 0.$$

Questa posizione è nota come *equazione cardinale di continuità*.

Amnesso che $\varrho(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ siano di classe C^1 , la derivazione può essere eseguita con il teorema del trasporto, ricordato nel paragrafo 4.2, ottenendo le due espressioni

$$\int_V \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v}) \right) dV = 0$$

$$\int_V \left(\frac{D\varrho}{Dt} + \varrho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV = 0,$$

fra loro equivalenti. Osservando poi che il volume di integrazione è arbitrario, e che le funzioni integrande sono continue si passa alle forme differenziali

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v}) = 0$$

$$\frac{D\varrho}{Dt} + \varrho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

alle quali è normalmente riservato il nome di *equazioni indefinite di continuità*.

Tutte le volte che le variazioni di densità dei singoli elementi fluidi sono irrilevanti, si può porre

$$\frac{D\varrho}{Dt} = 0.$$

L'equazione indefinita di continuità assume allora la forma

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

e si dice che il moto è *isocoro*. La divergenza di \mathbf{v} riesce nulla a maggior ragione se il fluido presenta sempre ed ovunque la medesima densità.

4.4. Prime conseguenze dell'equazione di continuità.

Unendo al teorema di trasporto

$$\frac{D}{Dt} \int_V b dV = \int_V \left(\frac{\partial b}{\partial t} + \operatorname{div}(b\mathbf{v}) \right) dV,$$

visto nel paragrafo 4.2. l'equazione indefinita di continuità

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v}) = 0,$$

dedotta nel paragrafo 4.3. si ottiene subito una importante relazione integrale valida quando la grandezza b contiene a fattore la densità ρ . Posto

$$b = \rho(\mathbf{x}, t)c(\mathbf{x}, t)$$

si ha intanto

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \rho c \, dV &= \int_V \left(\frac{\partial(\rho c)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho c \mathbf{v}) \right) dV = \\ &= \int_V \left\{ c \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right) + \rho \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} c \right) \right\} dV, \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho c \, dV = \int_V \rho \frac{Dc}{Dt} dV.$$

Questa forma particolare del teorema di trasporto verrà utilizzata di frequente in seguito. Essa è valida purché la densità ρ , la generica funzione c e la velocità \mathbf{v} siano tutte di classe C^1 , purché il volume V abbia contorno regolare, e purché si ammetta la conservazione delle masse.

Altra conseguenza immediata è la formula

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho c \, dV = \int_V \rho \frac{Dc}{Dt} dV,$$

che si controlla facilmente operando sulle componenti. Si ammette qui che il vettore c sia di classe C^1 .

4.5. Equazioni cardinali del moto.

Le forze esterne agenti sulla massa racchiusa entro una superficie A possono venir utilmente distinte in due categorie: quella delle forze esterne di massa, e quella delle forze esterne di superficie.

Per *forze esterne di massa* si intendono le forze che agiscono direttamente nei singoli punti interni ad A , e che potrebbero quindi essere messe in evidenza con corpi di prova collocati nei punti considerati, previa asportazione del fluido presente nella zona. Queste forze sono legate alla natura dinamica del sistema di riferimento adottato, e si ammette di solito che esse, rapportate all'unità di massa, siano rappresentate da un vettore \mathbf{f} , funzione nota ed integrabile della posizione, del tempo e della velocità del fluido. Ed anzi, per il caso particolare del riferimento collegato al

geoide, la \mathbf{f} stessa è stata indicata esplicitamente nel paragrafo 1.4. In altri casi, la \mathbf{f} può comprendere anche azioni gravitazionali delle masse fluide situate all'interno della superficie A .

Il calcolo della forza complessiva dovuta alla presenza nel volume V racchiuso da A del campo \mathbf{f} delle forze specifiche di massa è immediato, e porge

$$\mathbf{G} = \int_V \rho \mathbf{f} dV.$$

Fra le *forze esterne di superficie* si elencano invece quelle esercitate sul fluido interno ad A da quello esterno e contiguo, che sono dovute ad azioni molecolari a corto raggio. Nell'ambito dello schema di mezzo continuo, si ammette che esista su A una distribuzione di sforzi $\boldsymbol{\tau}$ equivalente all'insieme delle forze esterne di superficie agenti attraverso A . Gli sforzi $\boldsymbol{\tau}$, che sono rapportati all'unità di area, vengono perciò definiti implicitamente richiedendo che l'integrale

$$\mathbf{H} = \int_A \boldsymbol{\tau} dA$$

fornisca il risultante delle forze esterne di superficie.

In analogia con la legge fondamentale della dinamica, secondo la quale le forze applicate ad un corpo eguagliano la derivata temporale della sua quantità di moto, si ammette che la forza totale esterna, data dalla somma dei due integrali ora scritti, sia uguale, istante per istante, alla derivata sostanziale della quantità di moto della massa fluida sulla quale agisce. La relazione

$$\int_V \rho \mathbf{f} dV + \int_A \boldsymbol{\tau} dA = \frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV,$$

che si assume vera indipendentemente dalla scelta del volume V , costituisce la *prima equazione cardinale del moto*.

Alle forze esterne corrispondono altrettanti momenti rispetto ad un punto qualunque \mathbf{x}_0 : così al campo delle forze specifiche di massa è dovuto il momento complessivo

$$\mathbf{G}_m = \int_V (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \rho \mathbf{f} dV,$$

mentre agli sforzi superficiali compete il momento risultante

$$\mathbf{H}_m = \int_A (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \boldsymbol{\tau} dA.$$

Sempre in analogia con le leggi fondamentali della dinamica, ma ora con riferimento al fatto che il momento applicato ad un corpo deve eguagliare la derivata temporale del momento della sua quantità di moto, si ammette che il momento esterno totale sia pari alla derivata sostanziale del momento della quantità di moto della massa fluida coinvolta. Si pone cioè, quale che sia la scelta del volume V ,

$$\int_V (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \rho \mathbf{f} dV + \int_A (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \boldsymbol{\tau} dA = \frac{D}{Dt} \int_V (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \rho \mathbf{v} dV.$$

Questa relazione costituisce la *seconda equazione cardinale del moto*.

I due postulati ora introdotti sono reciprocamente indipendenti, e si basano solo sulla continua verifica sperimentale delle conseguenze che se ne traggono. Essi, inoltre, possono essere facilmente generalizzati, quando si debbano considerare anche azioni esterne di natura differente da quella qui esaminata, come ad esempio forze, momenti di forze o coppie intrinseche di origine elettromagnetica. Altra generalizzazione si rende necessaria quando si vogliono mettere in conto forze concentrate, come sono quelle legate alla tensione superficiale eventualmente presente all'interfaccia tra fluidi differenti.

4.6. Il tensore degli sforzi.

Gli sforzi $\boldsymbol{\tau}$ dipendono anche dalla superficie A attraverso la quale agiscono. Si osserva cioè che la $\boldsymbol{\tau}$ in un punto ed in un istante assegnati assume valori diversi modificando l'orientamento locale della superficie A che passa per il punto in esame. Questo fatto viene ricordato scrivendo

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n})$$

oppure

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{n}),$$

ove \mathbf{n} indica appunto la normale interna per A nel punto considerato.

Ciò posto, la struttura stessa della prima equazione cardinale suggerisce subito un'importante osservazione sull'assetto delle $\boldsymbol{\tau}$ vigente nelle zone in cui esse sono funzioni continue del punto e della direzione, ed in cui la densità ρ e la velocità \mathbf{v} sono di classe C^1 . Si nota intanto che, in queste condizioni, la derivata sostanziale presente nell'equazione cardinale

$$\int_V \rho \mathbf{f} dV + \int_A \boldsymbol{\tau} dA = \frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV,$$

può essere trasferita sotto il segno di integrale mediante il teorema di trasporto, già modificato nel paragrafo 4.4 a mezzo dell'equazione di continuità. Si ottiene così

$$\int_V \rho \mathbf{f} dV + \int_A \boldsymbol{\tau} dA = \int_V \rho \frac{D}{Dt} \mathbf{v} dV.$$

Si consideri poi il tetraedro in figura 4.2: $\mathbf{n} = n_x \mathbf{i}_x + n_y \mathbf{i}_y + n_z \mathbf{i}_z$ è il versore normale interno per la faccia obliqua, di area A_0 , mentre \mathbf{i}_x , \mathbf{i}_y , ed \mathbf{i}_z sono i versori normali interni relativi alle tre facce mutuamente per-

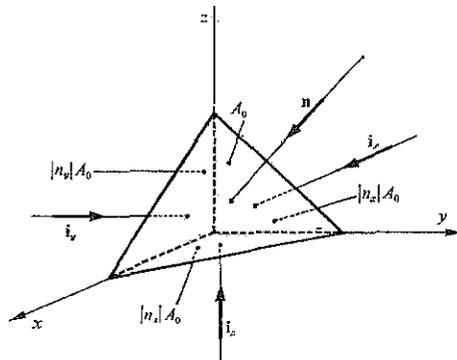


Fig. 4.2. - Tetraedro considerato per dedurre il teorema di Cauchy.

pendicolari, di aree rispettive $|n_x|A_0 = -n_x A_0$, $|n_y|A_0 = -n_y A_0$, $|n_z|A_0 = -n_z A_0$. Applicando la prima equazione cardinale, nella forma ora ottenuta, al fluido racchiuso nel tetraedro, dividendo per A_0 , e facendo tendere a zero il volume interno, si giunge alla

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{A_0} \int_A \boldsymbol{\tau} dA = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{n}) - n_x \boldsymbol{\tau}(\mathbf{i}_x) - n_y \boldsymbol{\tau}(\mathbf{i}_y) - n_z \boldsymbol{\tau}(\mathbf{i}_z) = 0$$

perché gli integrali di volume, eseguiti su funzioni necessariamente limitate, costituiscono infinitesimi di ordine più elevato. Ne segue

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{n}) = n_x \boldsymbol{\tau}(\mathbf{i}_x) + n_y \boldsymbol{\tau}(\mathbf{i}_y) + n_z \boldsymbol{\tau}(\mathbf{i}_z).$$

Si vede dunque che gli sforzi $\boldsymbol{\tau}$ relativi a tre facce ortogonali orientate sono sufficienti a descrivere compiutamente lo stato di tensione locale, consentendo il calcolo dello sforzo $\boldsymbol{\tau}$ coordinato a ciascun altro elemento orientato di superficie. La regola per eseguirne il calcolo, ora riportata, è

detta *teorema di Cauchy*, e risale al 1823. Giusta la definizione adottata nel paragrafo 1.2, la stessa regola indica che i vettori $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{i}_x)$, $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{i}_y)$ e $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{i}_z)$ costituiscono le componenti vettoriali di un tensore del secondo ordine, dipendente solo dal punto e dall'istante considerati. È uso rappresentare questo tensore con

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$$

e chiamarlo *tensore degli sforzi*.

Per mettere in evidenza le componenti scalari T_{ik} di \mathbf{T} basta scrivere le sue componenti vettoriali in funzione delle rispettive componenti scalari: si ha

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{i}_x) = T_{xx}\mathbf{i}_x + T_{xy}\mathbf{i}_y + T_{xz}\mathbf{i}_z$$

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{i}_y) = T_{yx}\mathbf{i}_x + T_{yy}\mathbf{i}_y + T_{yz}\mathbf{i}_z$$

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{i}_z) = T_{zx}\mathbf{i}_x + T_{zy}\mathbf{i}_y + T_{zz}\mathbf{i}_z$$

ove si intenda, ad esempio, che T_{xy} rappresenti la componente nella direzione dell'asse delle y dello sforzo trasmesso attraverso un elemento di superficie normale all'asse delle x , ed applicato al fluido che si trova a contatto con tale superficie dal lato delle x crescenti. Al solito, le componenti scalari T_{ik} di \mathbf{T} vanno riunite nel quadro

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix}.$$

Lo sforzo $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{n})$ può essere scisso in una componente diretta lungo \mathbf{n} , chiamata *sforzo normale*, ed in una componente perpendicolare ad \mathbf{n} , che viene detta *sforzo tangenziale*. Di conseguenza, le componenti diagonali del tensore degli sforzi, contraddistinte da indici uguali, rappresentano sforzi normali, mentre le altre componenti rappresentano proiezioni di sforzi tangenziali.

Indicate ora con $\tau_x(\mathbf{n})$, $\tau_y(\mathbf{n})$ e $\tau_z(\mathbf{n})$ le componenti di $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{n})$ secondo gli assi coordinati, il teorema di Cauchy porge

$$\tau_x(\mathbf{n}) = n_x T_{xx} + n_y T_{yx} + n_z T_{zx}$$

$$\tau_y(\mathbf{n}) = n_x T_{xy} + n_y T_{yy} + n_z T_{zy}$$

$$\tau_z(\mathbf{n}) = n_x T_{xz} + n_y T_{yz} + n_z T_{zz},$$

ossia

$$\tau_k(\mathbf{n}) = \sum_{i=1}^3 n_i T_{ik} = [\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}]_k,$$

in accordo con la definizione di prodotto misto data nel paragrafo 1.2. Ne segue che la scrittura

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$$

esprime in forma più compatta lo stesso teorema di Cauchy.

Il modulo del vettore $\boldsymbol{\tau}$, le sue componenti e le componenti scalari del tensore \mathbf{T} vanno misurati tutti in newton su metro quadrato, N m^{-2} .

4.7. Equazioni indefinite del moto.

La prima equazione cardinale del moto

$$\int_V \rho \mathbf{f} dV + \int_A \boldsymbol{\tau} dA = \frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV,$$

introdotta al paragrafo 4.5, assume, nelle regioni in cui la densità ρ e la velocità \mathbf{v} sono di classe C^1 , e gli sforzi $\boldsymbol{\tau}$ sono continui, la nuova forma

$$\int_V \rho \mathbf{f} dV + \int_A \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} dA = \int_V \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} dV,$$

a seguito dell'introduzione del tensore degli sforzi \mathbf{T} , effettuata nel paragrafo precedente, e dopo la trasformazione eseguita nello stesso paragrafo impiegando il teorema di trasporto modificato con l'uso dell'equazione di continuità. Se poi \mathbf{T} è anch'esso di classe C^1 , e non solamente continuo, l'integrale di superficie può essere sostituito da un integrale di volume, scrivendo

$$\int_A \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} dA = - \int_V \text{div } \mathbf{T} dV,$$

in cui

$$[\text{div } \mathbf{T}]_k = \sum_1^3 \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i},$$

come si controlla subito attraverso l'applicazione del teorema di Gauss alle componenti:

$$\int_A [\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}]_k dA = \int_A \sum_1^3 n_i T_{ik} dA = - \int_V \sum_1^3 \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i} dV.$$

Nelle ipotesi fatte è dunque

$$\int_V \rho \mathbf{f} dV - \int_V \operatorname{div} \mathbf{T} dV = \int_V \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} dV,$$

e se il campo \mathbf{f} delle forze esterne di massa, rapportate all'unità di massa, è continuo, segue, dalla continuità delle funzioni integrande e dall'arbitrarietà del volume V considerato, che è pure

$$\rho \mathbf{f} - \operatorname{div} \mathbf{T} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}.$$

Quest'ultima relazione è nota come *prima equazione indefinita del moto*, ed è valida, si ripete, nelle regioni in cui ρ , \mathbf{v} e \mathbf{T} sono di classe C^1 , ed \mathbf{f} è di classe C^0 . È necessario inoltre che le masse si conservino inalterate.

Trasformazioni analoghe possono essere effettuate sulla seconda equazione cardinale del moto

$$\int_V (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \rho \mathbf{f} dV + \int_A (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \boldsymbol{\tau} dA = \frac{D}{Dt} \int_V (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \rho \mathbf{v} dV,$$

già vista nel paragrafo 4.5. Il teorema di trasporto, specializzato con l'impiego dell'equazione di continuità, consente intanto di scrivere

$$\frac{D}{Dt} \int_V (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \rho \mathbf{v} dV = \int_V \rho \frac{D}{Dt} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \mathbf{v} dV,$$

e si verifica facilmente che sussiste l'identità

$$\frac{D}{Dt} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \mathbf{v} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \frac{D}{Dt} \mathbf{v}.$$

Contemporaneamente, ammesso che anche il tensore degli sforzi \mathbf{T} sia di classe C^1 , il teorema di Gauss assicura che

$$\begin{aligned} \int_A [(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \boldsymbol{\tau}]_j dA &= \int_A \left[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \sum_1^3 n_i T_{ik} \mathbf{i}_k \right]_j dA = \\ &= - \int_V \left[\sum_1^3 \frac{\partial}{\partial x_i} [(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge T_{ik} \mathbf{i}_k] \right]_j dV = \\ &= - \int_V \left[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \sum_1^3 \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i} \mathbf{i}_k \right]_j dV - \int_V \left[\sum_1^3 \mathbf{i}_i \wedge T_{ik} \mathbf{i}_k \right]_j dV. \end{aligned}$$

Riunendo questi risultati, si vede che la seconda equazione cardinale del moto assume la forma

$$\int_V (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \left(\rho \mathbf{f} - \operatorname{div} \mathbf{T} - \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right) dV = \int_V \sum_1^3 T_{ik} (\mathbf{i}_i \wedge \mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_j) \mathbf{i}_j dV.$$

Ammesso ora che \mathbf{f} sia di classe C^0 e che sia valida la prima equazione indefinita del moto, il primo degli integrali è identicamente nullo. La continuità del tensore degli sforzi e l'arbitrarietà nella scelta del volume V richiedono allora che sia identicamente nulla la seconda funzione integranda, e che risulti quindi

$$T_{ik} = T_{ki}.$$

Ciò significa che il tensore degli sforzi è simmetrico, quando ρ , \mathbf{v} e \mathbf{T} sono di classe C^1 ed \mathbf{f} è di classe C^0 , purché si ammetta che le masse si conservino inalterate, che valga la prima equazione indefinita del moto e che tutte le coppie in gioco siano solo momenti di forze. La condizione di simmetria ora scritta costituisce la *seconda equazione indefinita del moto*.

4.8. Equazioni termodinamiche cardinali.

Nell'ambito dello schema continuo, viene precisato in termini di valori locali ed istantanei anche il bilancio energetico

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{U} + \mathcal{E}) = \mathcal{P}_m + \mathcal{P}_t,$$

già considerato, in questa forma globale, nel paragrafo 1.7. Si ricorda che \mathcal{U} , \mathcal{E} , \mathcal{P}_m e \mathcal{P}_t indicano, nell'ordine, l'energia interna e quella cinetica del corpo in esame, e le potenze meccaniche e termiche ad esso trasmesse.

Posto, al solito, ρ e v per i valori locali ed istantanei della densità e del modulo della velocità, si può riprendere dal paragrafo 4.1 la scrittura

$$\mathcal{E} = \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV$$

per l'energia cinetica della massa racchiusa in V all'istante t .

In assenza di coppie intrinseche esterne, la potenza meccanica \mathcal{P}_m esplicitata sul corpo di volume V , delimitato dalla superficie A , si riduce a quella sviluppata dalle forze specifiche esterne \mathbf{f} e dagli sforzi esterni di

superficie τ , e va perciò espressa come

$$\mathcal{P}_m = \int_V \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f} dV + \int_A \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA,$$

ove \mathbf{v} sta sempre per la velocità locale ed istantanea.

Si introduce poi il valore locale ed istantaneo della *densità del flusso di potenza termica* ω , in modo che la potenza termica \mathcal{P}_t somministrata, istante per istante, a ciascuna porzione del corpo attraverso la relativa superficie limite A valga

$$\mathcal{P}_t = \int_A \omega dA.$$

la grandezza ω si misura in watt al metro quadro, W m^{-2} .

Infine, si definisce il valore locale ed istantaneo dell'*energia interna specifica* $u(\mathbf{x}, t)$, ossia dell'energia interna rapportata all'unità di massa, richiedendo che risulti

$$\frac{D}{Dt} \int_V \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) dV = \int_V \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f} dV + \int_A \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA + \int_A \omega dA$$

in corrispondenza a tutte le possibili scelte del volume V . La grandezza u si misura in joule al kilogrammo, J kg^{-1} , come già detto nel paragrafo 1.7.

In seguito ci si riferirà a questa scrittura come alla *forma cardinale del primo principio della termodinamica*, ma va sottolineato che ove esistessero sollecitazioni meccaniche, e relativi contributi alla potenza meccanica applicata, diversi da quelli qui considerati, oppure ove fossero presenti degradazioni fino a livello termico di energia non meccanica, il principio in questione andrebbe espresso in una forma più generale.

La definizione implicita dell'entropia,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E} = \frac{\mathcal{P}_t}{T} + \frac{\mathcal{P}_d}{T},$$

in funzione della potenza termica assorbita \mathcal{P}_t e della potenza meccanica dissipata \mathcal{P}_d è stata fornita nel paragrafo 1.7, con riferimento a corpi sottoposti a temperatura assoluta T uniforme. Per trasferire tale definizione al campo dello schema continuo occorre innanzitutto introdurre il valore locale ed istantaneo $\tau(\mathbf{x}, t)$ della *temperatura assoluta*, richiedendo che

$$\frac{1}{M} \int_V \rho \tau dV$$

fornisca il valore della temperatura assoluta all'istante t , ottenibile per misura diretta sulla massa M racchiusa in ciascun volume V comprendente il punto \mathbf{x} , con la precisazione che V stesso sia abbastanza grande da contenere un numero molto elevato di molecole, ed abbastanza piccolo rispetto alle dimensioni del corpo complessivo in esame.

Si definisce poi il valore locale ed istantaneo dell'*assorbimento specifico di potenza termica*, $\rho_t(\mathbf{x}, t)$, in termini del quale la potenza termica \mathcal{P}_t che penetra in V , all'istante t , attraverso il contorno A deve essere espressa da

$$\mathcal{P}_t = \int_V \rho_t dV.$$

La ρ_t va misurata in watt al kilogrammo, W kg^{-1} . A differenza della scrittura basata sulla ω , che è stata impiegata per la forma cardinale del primo principio della termodinamica, questa nuova espressione della \mathcal{P}_t si vale di una funzione additiva sul volume, e consente perciò di scrivere direttamente

$$\int_V \frac{\rho_t}{T} dV$$

per il contributo al tasso d'incremento dell'entropia offerto dalla potenza termica assorbita.

Si introduce anche il valore locale ed istantaneo della *dissipazione specifica di potenza meccanica*, $\rho_a(\mathbf{x}, t)$, richiedendo che la potenza meccanica \mathcal{P}_a degradata a livello termico nel volume V all'istante t sia

$$\mathcal{P}_a = \int_V \rho_a dV.$$

Anche ρ_a va misurata in watt al kilogrammo, W kg^{-1} . Il relativo apporto al tasso d'incremento dell'entropia è dato da

$$\int_V \frac{\rho_a}{T} dV.$$

Da ultimo, il valore locale ed istantaneo dell'*entropia specifica*, $e(\mathbf{x}, t)$, è definito imponendo che risulti

$$\frac{D}{Dt} \int_V e dV = \int_V \frac{\rho_t}{T} dV + \int_V \frac{\rho_a}{T} dV$$

per tutte le possibili scelte del volume V . L'entropia specifica, come si è già ricordato nel paragrafo 1.7, si misura in joule al kilogrammo ed al grado, $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$.

La variazione intrinseca nel tempo dell'entropia, così calcolata, non può assumere valori arbitrari: si richiederà che sia sempre

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho e dV \geq \int_A \frac{\omega}{T} dA$$

e ci si riferirà a questa condizione come alla *forma cardinale del secondo principio della termodinamica*. Si osserva esplicitamente che la definizione dell'entropia e la limitazione al relativo tasso d'accrescimento temporale, ora introdotte, devono essere generalizzate in presenza di scambi energetici di natura differente, quali, ad esempio, quelli connessi all'interazione con campi elettromagnetici.

I due principi della termodinamica sono indipendenti fra di loro e dalle equazioni cardinali del moto viste nel paragrafo 4.5. Come le equazioni cardinali del moto, anch'essi si basano solo sulla loro continua verifica sperimentale.

4.9. Il vettore densità del flusso di potenza termica.

Il flusso di potenza termica ω attraverso una superficie A dipende anche dall'orientamento locale della superficie A considerata. Si avrà perciò

$$\omega = \omega(\mathbf{x}, t; \mathbf{n})$$

ossia

$$\omega = \omega(\mathbf{n}),$$

intendendo al solito con \mathbf{n} il versore normale interno di A .

In piena analogia con quanto detto nel paragrafo 4.6 a proposito della prima equazione cardinale del moto e degli sforzi esterni di superficie τ , la struttura stessa dell'espressione del primo principio della termodinamica implica delle limitazioni sull'assetto della ω , nelle zone in cui questa è funzione continua del punto e della direzione, purché la densità ρ , l'energia specifica interna u , la velocità \mathbf{v} e gli sforzi τ siano di classe C^1 , e le forze specifiche esterne \mathbf{f} siano di classe C^0 .

Per ottenere questo risultato occorre eseguire alcune trasformazioni preliminari sugli integrali che figurano nell'espressione del primo principio della termodinamica

$$\frac{D}{Dt} \int_V \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) dV = \int_V \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f} dV + \int_A \mathbf{v} \cdot \tau dA + \int_A \omega dA.$$

Si osserva intanto che, se sono verificate le condizioni esposte, si può impiegare il teorema di trasporto, modificato nel paragrafo 4.4 con l'uso dell'equazione di continuità, per scrivere

$$\frac{D}{Dt} \int_V \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) dV = \int_V \rho \frac{D}{Dt} \left(u + \frac{1}{2} v^2 \right) dV.$$

Inoltre, ricorrendo al tensore degli sforzi \mathbf{T} , introdotto nel paragrafo 4.6, ed al teorema di Gauss, si può sostituire all'integrale di superficie relativo alla potenza meccanica esplicitata dagli sforzi $\boldsymbol{\tau}$ un integrale sul volume racchiuso

$$\int_A \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA = \int_A \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} dA = \int_A \sum_k v_k \sum_i n_i T_{ik} dA = - \int_V \sum_{i,k} \frac{\partial (v_k T_{ik})}{\partial x_i} dV.$$

Complessivamente, il primo principio si presenta ora nella forma

$$\int_V \rho \frac{D}{Dt} \left(u + \frac{1}{2} v^2 \right) dV = \int_V \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f} dV - \int_V \sum_{i,k} \frac{\partial (v_k T_{ik})}{\partial x_i} dV + \int_A \omega dA.$$

L'equazione così ottenuta può essere applicata al solito tetraedro avente tre facce disposte perpendicolarmente agli assi coordinati e la quarta faccia obliqua, di area A_0 e vettore normale interno \mathbf{n} . Divisa l'equazione per l'area della faccia obliqua e ridotto progressivamente a zero il volume del tetraedro senza variare le giaciture delle sue facce, risulta che deve essere

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{A_0} \int \omega dA = \omega(\mathbf{n}) - n_x \omega(\mathbf{i}_x) - n_y \omega(\mathbf{i}_y) - n_z \omega(\mathbf{i}_z) = 0$$

perché gli integrali di volume si annullano più rapidamente. Così

$$\omega(\mathbf{n}) = n_x \omega(\mathbf{i}_x) + n_y \omega(\mathbf{i}_y) + n_z \omega(\mathbf{i}_z).$$

La conoscenza della densità del flusso di potenza termica associata a tre direzioni fra loro ortogonali consente dunque il calcolo della stessa densità di flusso relativa alle altre possibili giaciture, e la relazione esistente fra tali grandezze è esattamente quella che vige fra le componenti di un vettore e che è stata ricordata nel paragrafo 1.2. Queste considerazioni consentono di costruire il *vettore densità del flusso della potenza termica*

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, t),$$

funzione del punto e dell'istante considerati, ma non più della giacitura \mathbf{n} ;

le componenti di \mathbf{q} lungo gli assi coordinati sono

$$q_x = \omega(\mathbf{i}_x), \quad q_y = \omega(\mathbf{i}_y), \quad q_z = \omega(\mathbf{i}_z).$$

In termini del vettore \mathbf{q} , la densità del flusso ω associata ad una generica giacitura orientata \mathbf{n} , e cioè la densità del flusso di potenza termica attraverso un elemento di superficie normale ad \mathbf{n} , da assumere come positiva se tale potenza si riversa sul materiale verso il quale è orientato \mathbf{n} , è espressa da

$$\omega(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}.$$

La prima introduzione del vettore \mathbf{q} risale al 1851, ed è dovuta a Stokes.

Insieme a ω , anche il modulo e le componenti di \mathbf{q} si esprimono in watt al metro quadro, W m^{-2} .

4.10. Equazioni indefinite della termodinamica.

Quando le variabili che figurano nelle forme cardinali dei due principi della termodinamica e nella formula per il tasso di accrescimento dell'entropia, viste nel paragrafo 4.8, soddisfano adeguate condizioni di continuità, risulta possibile dedurre da tali espressioni integrali altrettante forme indefinite.

Si è già osservato nel paragrafo precedente che se la densità ρ , l'energia interna specifica u , la velocità \mathbf{v} e gli sforzi di superficie $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ sono di classe C^1 , il primo principio della termodinamica

$$\frac{D}{Dt} \int_V \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) dV = \int_V \rho \mathbf{f} dV + \int_A \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA + \int_A \omega dA$$

può essere riscritto nella forma

$$\int_V \rho \frac{D}{Dt} \left(u + \frac{1}{2} v^2 \right) dV = \int_V \rho \mathbf{f} dV - \int_V \sum_{i,k} \frac{\partial (v_k T_{ik})}{\partial x_i} dV + \int_A \omega dA$$

impiegando il teorema di trasporto e l'equazione di continuità.

Un'ulteriore semplificazione è possibile quando le forze specifiche di massa \mathbf{f} sono continue ed è valida perciò la prima equazione indefinita del moto. Per essere

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) &= \frac{1}{2} \frac{D}{Dt} \sum_k v_k^2 = \sum_k v_k \frac{D}{Dt} v_k = \mathbf{v} \cdot \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \\ \sum_{i,k} \frac{\partial (v_k T_{ik})}{\partial x_i} &= \sum_{i,k} T_{ik} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \mathbf{v} \cdot \text{div} \mathbf{T}, \end{aligned}$$

in cui, al solito,

$$[\text{div } \mathbf{T}]_k = \sum_1^3 \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i},$$

si ha infatti

$$\varrho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) - \mathbf{v} \cdot \varrho \mathbf{f} + \sum_1^3 \frac{\partial (v_k T_{ik})}{\partial x_i} = \mathbf{v} \cdot \left(-\varrho \mathbf{f} + \text{div } \mathbf{T} + \varrho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right) + \sum_1^3 T_{ik} \frac{\partial v_k}{\partial x_i}.$$

Resta così

$$\int_V \varrho \frac{Du}{Dt} dV = - \int_V \sum_1^3 T_{ik} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} dV + \int_A \omega dA.$$

Amnesso ora che la densità del flusso di potenza termica ω sia di classe C^1 , esiste il relativo vettore \mathbf{q} , introdotto nel paragrafo 4.9, che riesce anch'esso di classe C^1 : il teorema della divergenza consente perciò di scrivere

$$\int_A \omega dA = \int_A \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} dA = - \int_V \text{div } \mathbf{q} dV.$$

Complessivamente si ha dunque

$$\int_V \left(\varrho \frac{Du}{Dt} + \sum_1^3 T_{ik} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \text{div } \mathbf{q} \right) dV = 0,$$

ossia, ricordando che il volume di integrazione è arbitrario e che le funzioni integrande sono continue,

$$\varrho \frac{Du}{Dt} = - \sum_1^3 T_{ik} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \text{div } \mathbf{q}.$$

Questa *forma indefinita del primo principio della termodinamica* è subordinata all'equazione di continuità ed alla prima equazione del moto, ed è valida purché ϱ , u , \mathbf{v} , \mathbf{T} e \mathbf{q} siano di classe C^1 , mentre è sufficiente che f sia di classe C^0 .

Relativamente alla definizione dell'entropia specifica e nella forma

$$\frac{D}{Dt} \int_V \varrho e dV = \int_V \frac{\varrho \dot{h}_t}{T} dV + \int_V \frac{\varrho \dot{h}_a}{T} dV$$

si possono svolgere considerazioni analoghe: amnesso che ϱ , e e \mathbf{v} siano di classe C^1 , il teorema di trasporto, modificato nel paragrafo 4.4 utiliz-

zando l'equazione di continuità, porge

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho e dV = \int_V \rho \frac{De}{Dt} dV,$$

ed è perciò sufficiente ammettere inoltre che l'assorbimento specifico di potenza termica ρ_t , la dissipazione specifica di potenza meccanica ρ_d e la temperatura assoluta τ siano di classe C^0 , e ricordare l'arbitrarietà del volume di integrazione per concludere che deve essere

$$\frac{De}{Dt} = \rho_t + \frac{\rho_d}{\tau}.$$

Sempre nell'ipotesi che ρ , e , \mathbf{v} e \mathbf{q} siano di classe C^1 , ma richiedendo in più che τ sia di classe C^1 , anziché semplicemente continuo, il secondo principio della termodinamica

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho e dV \geq \int_A \frac{\rho}{\tau} dA,$$

porge, attraverso l'applicazione del teorema di trasporto, dell'equazione di continuità e del teorema della divergenza

$$\int_V \rho \frac{De}{Dt} dV \geq \int_A \frac{\rho}{\tau} dA = \int_A \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}}{\tau} dA = - \int_V \operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{\tau} dV$$

ossia

$$\rho \frac{De}{Dt} \geq - \frac{\operatorname{div} \mathbf{q}}{\tau} + \frac{\mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \tau}{\tau^2}$$

dato che le funzioni integrande sono continue ed il volume di integrazione è arbitrario. L'equazione così ottenuta costituisce la *forma indefinita del secondo principio della termodinamica*.

Si nota ancora che quando \mathbf{q} è di classe C^1 e ρ_t è di classe C^0 esiste un interessante legame locale tra le due variabili. La potenza termica che penetra attraverso la superficie A di contorno del volume V , e che viene quindi assorbita nello stesso volume V , può essere espressa nei due modi equivalenti

$$- \int_V \operatorname{div} \mathbf{q} dV, \quad \int_V \rho_t dV.$$

Ne segue che

$$- \operatorname{div} \mathbf{q} = \rho_t,$$

perché il volume V è arbitrario e le funzioni integrande sono continue.

Infine, si osserva che il differenziale totale dell'energia interna, visto nella sua forma globale

$$d\mathcal{U} = \tau d\mathcal{E} - p dV$$

nel paragrafo 1.7, si traduce, per un corpo continuo sottoposto a pressione e temperatura uniformi, nella scrittura

$$\frac{D}{Dt} \int_V \varrho u dV = \tau \frac{D}{Dt} \int_V \varrho e dV - p \frac{D}{Dt} \int_V dV,$$

equivalente alla

$$\frac{Du}{Dt} = \tau \frac{De}{Dt} - \frac{p}{\varrho} \operatorname{div} \mathbf{v}$$

se ϱ , u , e , e \mathbf{v} sono di classe C^1 , e se si ammette che le masse si conservino. Anche questo risultato verrà impiegato in seguito.

Riferimenti citati.

CAUCHY, AUGUSTIN LOUIS, *Recherches sur l'équilibre et mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastique ou non élastiques*, Bull. Soc. Philomath., 1823, pp. 9-13.

STOKES, GEORGE GABRIEL, *On the conduction of heat in crystals*, Camb. and Dub. Math. J., 1851, pp. 215-238.

CAPITOLO QUINTO

CINEMATICA DEI FLUIDI

5.1. Le velocità di deformazione.

Un primo esame degli aspetti del moto che si svolge con le velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ può essere condotto considerando l'assetto locale di queste velocità. Concentrata l'attenzione, per il momento, sulle sole variazioni spaziali, si mettono così in evidenza le deformazioni subite dalla massa fluida nel suo moto, o meglio, ed in modo più diretto, le velocità con le quali queste deformazioni hanno luogo.

Se, all'istante t_0 , la velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_0)$ è di classe C^1 nell'intorno del punto \mathbf{x}_0 , le sue componenti v_k ammettono, nello stesso intorno di \mathbf{x}_0 , i differenziali

$$dv_k = dx \frac{\partial v_k}{\partial x} + dy \frac{\partial v_k}{\partial y} + dz \frac{\partial v_k}{\partial z}.$$

Ne segue che il tasso di variazione della \mathbf{v} nella direzione individuata dal versore \mathbf{n} , lungo la quale le distanze da \mathbf{x}_0 vengano indicate con n , è espressa dalla

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n} = n_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + n_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + n_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}$$

perché le componenti n_x , n_y , ed n_z dello stesso versore \mathbf{n} valgono nell'ordine

$$n_x = \frac{\partial x}{\partial n}, \quad n_y = \frac{\partial y}{\partial n}, \quad n_z = \frac{\partial z}{\partial n}.$$

Si vede così, in accordo con la definizione introdotta nel paragrafo 1.2,

che i tre vettori

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}$$

costituiscono le componenti vettoriali di un tensore del secondo ordine. Esso è detto *tensore dei gradienti di velocità*, ed è indicato di norma come $\text{grad } \mathbf{v}$. Le sue componenti scalari $(\text{grad } \mathbf{v})_{ik}$, che vengono messe in evidenza scrivendo esplicitamente le tre componenti scalari di ciascuna componente vettoriale, vanno riunite nel quadro

$$\text{grad } \mathbf{v} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

È chiaro che la singola componente scalare

$$(\text{grad } \mathbf{v})_{ik} \equiv \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$$

collocata all'incrocio della riga i con la colonna k , indica il tasso di incremento con x_i della componente v_k della velocità.

Con l'introduzione del tensore dei gradienti di velocità, le precedenti espressioni

$$dv_x = dx \frac{\partial v_x}{\partial x} + dy \frac{\partial v_x}{\partial y} + dz \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

$$dv_y = dx \frac{\partial v_y}{\partial x} + dy \frac{\partial v_y}{\partial y} + dz \frac{\partial v_y}{\partial z}$$

$$dv_z = dx \frac{\partial v_z}{\partial x} + dy \frac{\partial v_z}{\partial y} + dz \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

per i differenziali spaziali della velocità possono essere compattate nella scrittura

$$d\mathbf{v} = dx \cdot \text{grad } \mathbf{v},$$

giusta la definizione di prodotto misto del paragrafo 1.2. Nell'intorno di \mathbf{x}_0 ed all'istante t_0 , la velocità del fluido è data quindi sostanzialmente dall'espressione

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_0) + dx \cdot [\text{grad } \mathbf{v}]_{\mathbf{x}_0}.$$

Si può scindere $\text{grad } \mathbf{v}$ nella sua parte emisimmetrica $\mathbf{\Omega}$ e nella sua parte simmetrica \mathbf{D} , rappresentate dai quadri

$$\mathbf{\Omega} \equiv \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

In seguito le loro componenti verranno indicate con le scritte

$$\Omega_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right), \quad D_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right).$$

In accordo con questa decomposizione, si può scrivere pure

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_0) + d\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Omega}(\mathbf{x}_0) + d\mathbf{x} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}_0).$$

La velocità del fluido nell'intorno di \mathbf{x}_0 appare così suddivisa in tre componenti. La prima, $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)$, è indipendente dal punto \mathbf{x} , ed è quindi dovuta ad una traslazione rigida di insieme: $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)$ svolge perciò il ruolo di *vettore delle velocità di traslazione rigida*.

La seconda componente, $d\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Omega}$, ha la struttura

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Omega} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) dy + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) dz \right] \mathbf{i}_x \\ &+ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dx + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) dz \right] \mathbf{i}_y \\ &+ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) dx + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) dy \right] \mathbf{i}_z \\ &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ dx & dy & dz \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

I termini che figurano nella seconda riga di questo determinante sono le componenti del vettore

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}_x \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \mathbf{i}_y \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \mathbf{i}_z \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right),$$

e si può quindi scrivere pure

$$d\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} (\text{rot } \mathbf{v}) \wedge d\mathbf{x}.$$

Ne segue che la quantità $d\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\Omega}$ è connessa ad una rotazione rigida con velocità angolare

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}:$$

il tensore relativo, $\boldsymbol{\Omega}$, viene detto *tensore delle velocità di rotazione rigida*.

La parte residua, $d\mathbf{x} \cdot \mathbf{D}$, può essere studiata osservando che vale l'identità

$$d\mathbf{x} \cdot \mathbf{D} = \text{grad} \frac{1}{2} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{D} \cdot d\mathbf{x},$$

perché \mathbf{D} è un tensore simmetrico: con riferimento alle proiezioni sugli assi si ha infatti

$$(d\mathbf{x} \cdot \mathbf{D})_j = \sum_1^3 dx_i D_{ij}$$

$$\begin{aligned} \left(\text{grad} \frac{1}{2} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{D} \cdot d\mathbf{x} \right)_j &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \sum_{i,k} dx_i D_{ik} dx_k \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_1^3 dx_i D_{ij} + \frac{1}{2} \sum_1^3 dx_k D_{jk} = \sum_1^3 dx_i D_{ij}. \end{aligned}$$

Le superfici sulle quali

$$\frac{1}{2} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{D} \cdot d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} dx_i dx_k D_{ik}$$

mantiene valore uniforme sono quadriche con centro in \mathbf{x}_0 , e sono tutte simili fra loro, perché le D_{ik} sono calcolate in \mathbf{x}_0 . A seconda dei valori assunti dalle D_{ik} , queste quadriche possono essere ellissoidi, iperboloidi, o loro forme degeneri. In ciascun punto \mathbf{x} si osserva una velocità $d\mathbf{x} \cdot \mathbf{D}$ normale alla particolare quadrica che passa per \mathbf{x} : nel caso che le quadriche siano ellissoidi possono aversi moti associati a dilatazioni, oppure,

disgiuntamente, a contrazioni; ove le stesse quadriche siano invece iperboloidi, i relativi coni asintotici dividono l'intorno di \mathbf{x}_0 in zone nelle quali si ha dilatazione ed in zone nelle quali si ha contrazione.

Lungo ciascuna semiretta uscente da \mathbf{x}_0 le velocità $d\mathbf{x} \cdot \mathbf{D}$ si mantengono fra loro parallele e presentano intensità crescente con la distanza da \mathbf{x}_0 . Esistono almeno tre rette mutuamente ortogonali, passanti per \mathbf{x}_0 , che intersecano normalmente le quadriche della famiglia. Lungo ciascuna di queste rette, pertanto, la distribuzione delle velocità $d\mathbf{x} \cdot \mathbf{D}$ è quella che risulterebbe da una pura dilatazione uniforme, o da una analoga contrazione. Lungo tutte le altre rette passanti per \mathbf{x}_0 , in generale, la distribuzione delle velocità $d\mathbf{x} \cdot \mathbf{D}$ è quella dovuta ad una dilatazione uniforme, o ad una contrazione della stessa natura, unita ad una rotazione rigida: velocità di allungamento e di rotazione che sono però caratteristiche della particolare retta considerata.

In ogni caso, le velocità $d\mathbf{x} \cdot \mathbf{D}$ risultano connesse a deformazioni locali del corpo fluido. Per questo motivo \mathbf{D} è detto *tensore delle velocità di deformazione*.

A volte è comodo scindere \mathbf{D} in un tensore isotropo

$$\mathbf{L} = \left(\frac{1}{3} \sum_1^3 D_{kk} \right) \mathbf{I} = \left(\frac{1}{3} \sum_1^3 \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \mathbf{I} = \frac{\text{div } \mathbf{v}}{3} \mathbf{I},$$

e nel deviatore \mathbf{S} residuo. Ricorrendo al simbolo di Kronecker

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{per } i = k \\ 0 & \text{per } i \neq k \end{cases}$$

si ha quindi

$$L_{ik} = \frac{\text{div } \mathbf{v}}{3} \delta_{ik},$$

$$S_{ik} = D_{ik} - \frac{\text{div } \mathbf{v}}{3} \delta_{ik}.$$

Per costruzione, \mathbf{L} è un tensore simmetrico, e si possono esprimere le velocità $d\mathbf{x} \cdot \mathbf{L}$ ad esso associate nella forma

$$d\mathbf{x} \cdot \mathbf{L} = \text{grad} \frac{1}{2} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{L} \cdot d\mathbf{x},$$

in modo del tutto analogo a quello già seguito per le velocità connesse al tensore \mathbf{D} . Le quadriche sulle quali

$$\frac{1}{2} \sum_1^3 dx_i dx_k L_{ik} = \frac{\text{div } \mathbf{v}}{6} \sum_1^3 (dx_k)^2$$

assume valore uniforme sono sempre delle sfere. Così, le velocità $dx \cdot \mathbf{L}$ riescono puramente radiali, ed indipendenti, in modulo, dalla direzione scaturente da \mathbf{x}_0 . Esse rappresentano dunque l'effetto di una dilatazione, o contrazione, locale. Per questo motivo \mathbf{L} è detto *tensore delle velocità di dilatazione*.

Anche \mathbf{S} , quale differenza di tensori simmetrici, è un tensore simmetrico, e le velocità $dx \cdot \mathbf{S}$ possono venir espresse come

$$dx \cdot \mathbf{S} = \text{grad} \frac{1}{2} dx \cdot \mathbf{S} \cdot dx .$$

Le quadriche sulle quali

$$\frac{1}{2} \sum_{i,k}^3 dx_i dx_k S_{ik}$$

risulta uniforme devono essere iperboloidi, o forme degeneri associate. Ciò perché, allontanandosi da \mathbf{x}_0 lungo gli assi coordinati si incontrano zone nelle quali l'espressione in esame assume, nell'ordine, i valori

$$\frac{1}{2} S_{xx} |dx|^2, \quad \frac{1}{2} S_{yy} |dy|^2, \quad \frac{1}{2} S_{zz} |dz|^2$$

che non possono essere tutti dello stesso segno, dato che, per costruzione,

$$S_{xx} + S_{yy} + S_{zz} = \sum_k^3 \left(D_{kk} - \frac{\text{div} \mathbf{v}}{3} \delta_{kk} \right) = \sum_k^3 \frac{\partial v_k}{\partial x_k} - \text{div} \mathbf{v} = 0 .$$

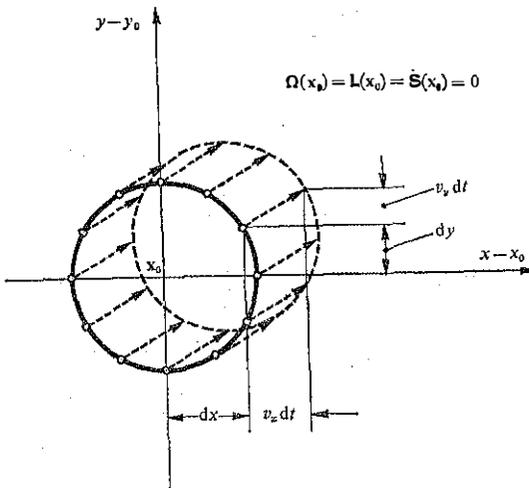


Fig. 5.1. - Esempio di traslazione rigida.

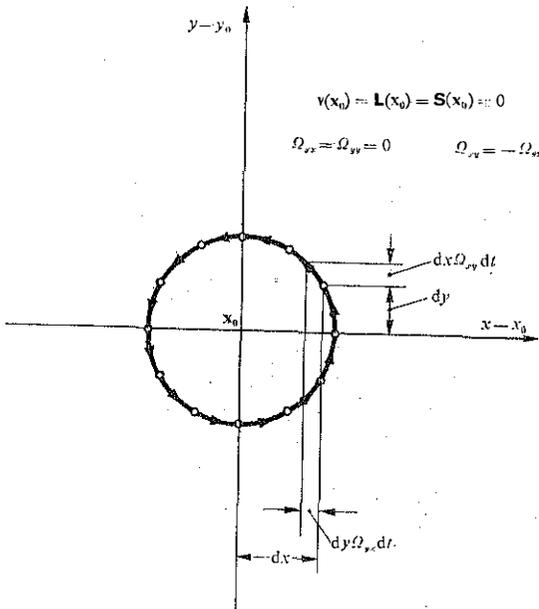


Fig. 5.2. - Esempio di rotazione rigida.

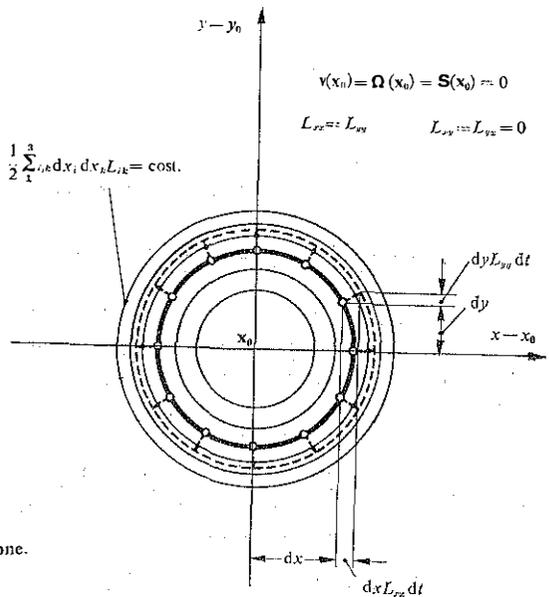


Fig. 5.3. - Esempio di dilatazione.

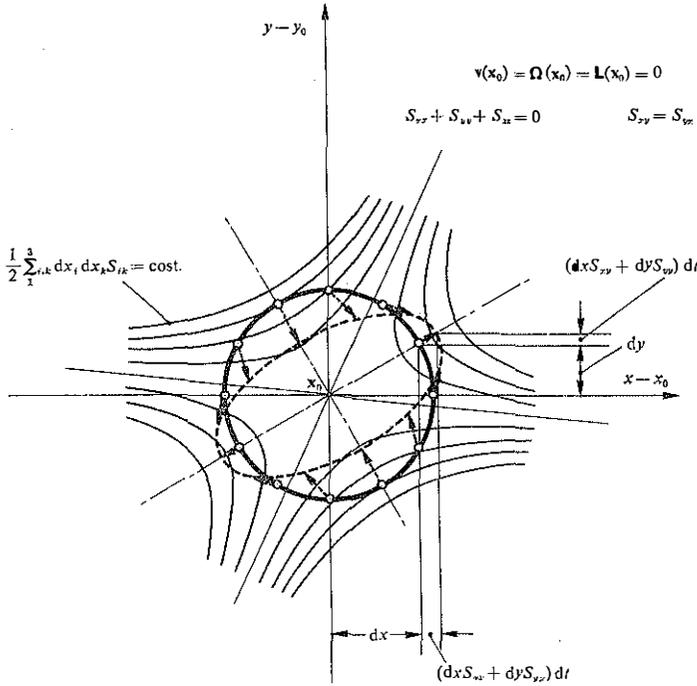


Fig. 5.4. - Esempio di distorsione.

Il risultato di quest'ultimo calcolo mostra inoltre che la divergenza del campo delle velocità $dx \cdot \mathbf{S}$ è nulla: infatti

$$\text{div}(dx \cdot \mathbf{S}) = \sum_{i,k} \frac{\partial (dx \cdot \mathbf{S})_k}{\partial x_k} = \sum_{i,k} \frac{\partial (dx_i S_{ik})}{\partial x_k} = \sum_{i,k} S_{ik} = 0.$$

Complessivamente, la velocità $dx \cdot \mathbf{S}$ riescono ortogonali alle quadriche di una stessa famiglia di iperboloidi, e presentano divergenza nulla: esse sono quindi connesse ad un moto che avviene con distorsioni del corpo fluido, ma senza cambiamenti del suo volume. Il fatto viene espresso dicendo che si tratta di un moto di pura distorsione, ed il tensore \mathbf{S} viene detto perciò *tensore delle velocità di distorsione*.

Quando si opera la scissione di \mathbf{D} in \mathbf{L} ed \mathbf{S} , le velocità presenti istante per istante nell'intorno di \mathbf{x}_0 sono fornite dalla

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_0) + dx \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}_0) + dx \cdot \mathbf{L}(\mathbf{x}_0) + dx \cdot \mathbf{S}(\mathbf{x}_0):$$

il contributo dei singoli termini ora elencati è messo in evidenza dalle figure 5.1, 5.2, 5.3, 5.4.

5.2. L'accelerazione.

La derivata temporale delle velocità di un particolare elemento fluido costituisce l'accelerazione dello stesso elemento fluido. L'*accelerazione* $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ è pertanto il tasso di variazione intrinseca nel tempo della velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$: si ha cioè, se \mathbf{v} è di classe C^1 ,

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{D}{Dt} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t).$$

Eseguendo la derivata sostanziale su ciascuna componente di \mathbf{v} come indicato al paragrafo 4.2 risulta

$$\frac{D}{Dt} v_k = \frac{\partial v_k}{\partial t} + \sum_i v_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i}.$$

Perciò, se si intende con $\text{grad} \mathbf{v}$ il tensore di componenti

$$(\text{grad} \mathbf{v})_{ik} = \frac{\partial v_k}{\partial x_i},$$

già impiegato nel paragrafo precedente, si può scrivere

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{v} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \right) \mathbf{v}$$

in piena analogia con l'espressione per la derivata sostanziale degli scalari.

Nello spazio ordinario, tuttavia, l'impiego della notazione tensoriale può essere evitato con una semplice modifica nelle scritture. Aggiungendo allo sviluppo per la derivata sostanziale della componente v_k il termine, ovviamente nullo,

$$\sum_i v_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right)$$

e riordinando si ottiene infatti

$$\frac{D}{Dt} v_k = \frac{\partial v_k}{\partial t} - \sum_i v_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + \sum_i v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial v_k}{\partial t} - (\mathbf{v} \wedge \text{rot} \mathbf{v})_k + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{v^2}{2}$$

ossia

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \wedge \text{rot} \mathbf{v} + \text{grad} \frac{v^2}{2}$$

in modo, questa volta, strettamente vettoriale.

5.3. Traiettorie, linee di corrente e linee di emissione.

Per passare ora a descrizioni globali del moto associato alle velocità \mathbf{v} , si possono seguire vie diverse, anche se tutte basate su particolari tipi di integrazione della funzione $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Se lo scopo principale è quello di visualizzare il moto nel suo insieme, si possono associare al campo delle velocità alcuni sistemi di linee geometriche: di questi fanno parte le traiettorie, le linee di corrente e le linee di emissione.

Le *traiettorie* sono le linee percorse da ciascun elemento fluido al trascorrere del tempo. Il riferimento a queste linee può essere efficace durante intervalli temporali contenuti, tali comunque da non consentire la diffusione dell'elemento fluido in tutta la massa in moto. Inoltre, l'immagine del moto fornita dalle traiettorie non è, in generale, molto comoda: queste linee possono intersecarsi reciprocamente, o ripassare per gli stessi punti geometrici, perché elementi fluidi che transitano in momenti differenti per un punto assegnato possono seguire percorsi diversi.

Indicata con \mathbf{X} la posizione \mathbf{x} raggiunta all'istante t dall'elemento fluido che passa per il punto \mathbf{x}_0 al momento t_0 , l'equazione della traiettoria corrispondente è data in forma parametrica dalla funzione del tempo

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t_0; t)$$

che risulta dall'integrazione della forma differenziale

$$d\mathbf{X} = d\mathbf{x} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dt$$

con le condizioni iniziali

$$[\mathbf{X}]_{t=t_0} = \mathbf{x}_0.$$

Sempre in generale, la rappresentazione del moto attraverso le *linee di corrente* risulta più completa e più maneggevole. Le linee di corrente sono le linee che, in un dato istante, hanno tangente diretta come la velocità locale \mathbf{v} . Benché l'insieme di queste linee si modifichi al passare del tempo, le varie linee di corrente tracciate con riferimento ad un dato momento si presentano distinte fra di loro, giungendo ad intersecarsi reciprocamente solo in corrispondenza dei punti di ristagno istantanei, e cioè nei punti ove \mathbf{v} è momentaneamente nulla. Gli elementi fluidi che si trovano su una linea di corrente all'istante considerato sono animati da velocità dirette lungo la linea stessa, e le loro traiettorie sono quindi tangenti ad essa; inversamente, la linea di corrente è inviluppo delle traiettorie degli elementi fluidi che le appartengono.

Se le direzioni delle velocità \mathbf{v} non mutano nel tempo, anche le linee di corrente si mantengono fisse. Di più, tutti gli elementi fluidi che transitano successivamente per un punto dato hanno traiettoria con tangente locale sempre identica, e coincidente con la tangente locale alla linea di corrente. Siccome ciò avviene ovunque, le traiettorie e le linee di corrente si identificano a vicenda. Il fatto si presenta a maggior ragione quando il moto è permanente, e le velocità locali non mutano nel tempo neppure in modulo.

I singoli punti di una linea di corrente relativa all'istante t_0 possono essere contraddistinti dai valori di un parametro s , costruito ponendo arbitrariamente $s = s_0$ sul punto \mathbf{x}_0 , ed aggiungendo poi ad s_0 , in corrispondenza di ciascun altro punto \mathbf{x} , la lunghezza dello sviluppo dell'arco orientato compreso tra \mathbf{x}_0 ed \mathbf{x} . Ciò fatto, gli elementi d'arco dx devono risultare in accordo con la forma differenziale

$$d\mathbf{x} = \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_0)}{v(\mathbf{x}, t_0)} ds.$$

Integrandola, e ricordando che si è posto

$$[\mathbf{x}]_{s=s_0} = \mathbf{x}_0,$$

si ottiene la rappresentazione parametrica

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t_0; s)$$

della linea di corrente in esame.

Un'altra descrizione utile è basata sulle *linee di emissione*. Ciascuna di queste, ad un dato istante, collega fra loro gli elementi fluidi che sono passati in precedenza da un punto fisso. Al passare del tempo, le linee di emissione si modificano progressivamente, e finiscono sempre con il perdere significato per il graduale dissolversi degli elementi fluidi ai quali fanno riferimento. Inoltre, gli elementi fluidi che ad un dato momento si trovano su una linea di corrente sono animati da velocità dirette come la tangente alla medesima linea di corrente, e le linee di emissione cui essi appartengono riescono tangenti alla linea di corrente di partenza; inversamente, le linee di corrente sono involuppo delle linee di emissione relative ai punti che le compongono.

Naturalmente, se le direzioni delle velocità rimangono immutate nel tempo, e quindi, in particolare, se il moto è permanente, le linee di emissione si sviluppano lungo le traiettorie, che, come si è visto, sono a loro volta sovrapposte alle linee di corrente.

Indicate con \mathbf{e} le coordinate della linea di emissione, quale si presenta all'istante t , dopo esser scaturita dal punto \mathbf{x}_0 a partire dal momento t_0 , deve essere

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}(\mathbf{x}_0, t_0; t),$$

e queste coincidono, per definizione, con le coordinate al tempo t

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t_0; t)$$

delle traiettorie degli elementi fluidi che sono passati per \mathbf{x}_0 nell'intervallo di tempo $t_0 \leq t_1 \leq t$.

5.4. I potenziali di Stokes.

Un'altra descrizione globale del moto si fonda sull'impiego dei potenziali di Stokes per le velocità \mathbf{v} . Come indicato da Stokes nel 1851, un qualunque campo vettoriale \mathbf{v} ammette sempre decomposizioni della forma

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \text{grad}\varphi(\mathbf{x}, t) + \text{rot}\psi(\mathbf{x}, t),$$

nella quale figurano un *potenziale scalare* φ di \mathbf{v} , ed un *potenziale vettore* ψ della \mathbf{v} stessa. Si nota subito che i due potenziali non sono fissati in modo univoco: φ è definito a meno di una funzione del tempo arbitraria, ψ a meno del gradiente di uno scalare, anch'esso arbitrario, ed eventualmente variabile nel tempo.

In particolare, ammesso che φ e ψ siano di classe C^2 , si ha

$$\text{rot grad}\varphi = 0 \quad \text{e} \quad \text{div rot}\psi = 0,$$

così $\text{grad}\varphi$ rappresenta la componente di \mathbf{v} con rotore nullo, mentre $\text{rot}\psi$ quella a divergenza nulla. Inversamente, un campo di velocità, di classe C^1 , con rotore nullo, ossia, come si dice abitualmente, un *campo irrotazionale*, è rappresentato dal solo potenziale scalare, ed un campo di velocità, sempre di classe C^1 , ma con divergenza nulla, che viene detto *campo solenoidale*, è rappresentato dal solo potenziale vettore. Se poi il campo delle velocità è contemporaneamente irrotazionale e solenoidale si può far uso sia di un potenziale, sia dell'altro, isolatamente.

Il moto connesso ad un campo irrotazionale di velocità è detto *moto irrotazionale*. Per contro, in accordo con quanto ricordato al paragrafo 4.3, un moto associato ad un campo solenoidale di velocità è detto *moto isocoro*.

5.5. Potenziale scalare delle velocità.

Se il campo delle velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, di classe C^1 , è irrotazionale in un dominio V , ossia se risulta

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$$

identicamente in V , esiste un potenziale scalare $\varphi(\mathbf{x}, t)$ che porge

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi.$$

Infatti, quando è $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$, la formula di Kelvin

$$\int_L \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{x} = \int_A (\operatorname{rot} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dA$$

assicura che la circolazione di \mathbf{v} lungo una qualunque linea regolare chiusa riducibile ad un punto per deformazione continua in V riesce nulla. Ciò consente di costruire una funzione scalare $\varphi(\mathbf{x}, t)$ assegnandole un valore $\varphi(\mathbf{x}_0, t)$ in un punto di V , ed il valore

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{x} + \varphi(\mathbf{x}_0, t)$$

in ogni altro punto di V stesso, proprio perché il valore dell'integrale non dipende dalla curva congiungente \mathbf{x}_0 con \mathbf{x} . Per la funzione così costruita si ha

$$\operatorname{grad} \varphi(\mathbf{x}, t) = \operatorname{grad} \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$$

come richiesto.

Va osservato che φ risulta funzione ad un valore se il dominio è semplicemente connesso, ma non è tale, di solito, nei domini a connessione multipla. Esistono in questi ultimi domini curve regolari chiuse che non possono essere ridotte ad un punto per deformazione continua senza uscire dal dominio stesso. A ciascuna di queste curve L_k , e ad ogni altra ad essa riconducibile per deformazione continua in V , compete tuttavia un ben preciso valore, eventualmente nullo, della circolazione

$$\Gamma_k(t) = \int_{L_k} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{x},$$

che è detto *costante ciclica* della curva. Perciò, se nel costruire φ si segue una linea di integrazione che conduca da \mathbf{x}_0 ad \mathbf{x} non più direttamente,

ma dopo aver percorso anche m_k curve del tipo in questione, si ottiene un nuovo valore del potenziale, che differisce di $m_k \Gamma_k(t)$ da quello primitivo. Analogamente, nei domini n volte connessi, i valori locali del potenziale riusciranno diversi fra loro per le quantità

$$\sum_1^{n-1} m_k \Gamma_k(t).$$

In accordo con l'ipotesi che $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$ sia di classe C^1 , φ presenta superfici di livello dotate di normale variabile con continuità. Le superfici equipotenziali costituiscono quindi una famiglia di superfici ortogonali alle linee di corrente, eccetto che nei punti di ristagno.

5.6. Funzioni di corrente.

Quando il campo delle velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, di classe C^1 , è solenoidale in un dominio V , e riesce perciò identicamente in V

$$\text{div } \mathbf{v} = 0,$$

si può costruire nel dominio V un campo vettoriale $\psi(\mathbf{x}, t)$ che dia

$$\mathbf{v} = \text{rot } \psi.$$

Come è naturale, l'impiego del potenziale vettore riesce particolarmente comodo se tale campo vettoriale si presenta più semplice del campo vettoriale costituito dalle \mathbf{v} . Ciò avviene effettivamente in concomitanza a specifiche simmetrie del campo delle velocità.

Si consideri, come primo esempio, quello del *moto piano*. Con questo termine si indica un moto dotato della seguente proprietà: esiste un riferimento cartesiano ortogonale rispetto al quale il vettore velocità \mathbf{v} ha componente lungo l'asse z identicamente nulla, e componenti secondo gli altri due assi indipendenti dalla stessa coordinata z . Adottato tale riferimento, si tracci su uno dei piani a z costante una curva L regolare e chiusa, come quella riportata in figura 5.5, e si fissi l'attenzione sul volume V delimitato dal cilindro retto, di altezza unitaria, che si appoggia alla curva L e che ha generatrici parallele all'asse z . Secondo il teorema della divergenza, indicato con \mathbf{n} il versore normale interno per il contorno A di V , ed ammesso che V sia semplicemente connesso, deve essere

$$\int_V \text{div } \mathbf{v} dV = - \int_A \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA.$$

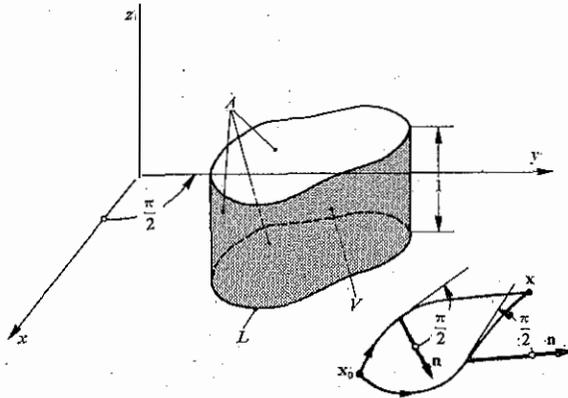


Fig. 5.5. - Linea L sul piano campione ed altri elementi connessi alla determinazione della funzione di corrente di Lagrange.

Ma l'integrale di volume è nullo, perché il campo delle velocità è solenoidale, e quello di superficie, per la particolare geometria scelta e per l'ipotesi di moto piano, risulta numericamente uguale all'integrale di linea

$$\int_L \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dL,$$

purché si intenda ora con \mathbf{n} il versore normale per la curva L , disposto sullo stesso piano di L . Questo integrale di linea riesce dunque identicamente nullo, e di conseguenza risulta indipendente dalla forma della linea di integrazione anche

$$\int_{x_0}^x \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dL,$$

quando il verso di \mathbf{n} è fissato in maniera concorde su tutte le linee da \mathbf{x}_0 ad \mathbf{x} , deformabili in modo continuo fino a sovrapporsi reciprocamente. Si può, ad esempio, adottare la convenzione che \mathbf{n} e la tangente alla linea orientata da \mathbf{x}_0 ad \mathbf{x} formino tra loro un angolo equiverso con quello compreso fra i semiasse positivi x ed y . Scelto ora un valore $\psi(x_0, y_0, t) = \psi_z(x_0, y_0, t) \mathbf{i}_z$ per il punto \mathbf{x}_0 , si può costruire la funzione

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{i}_z \int_{x_0}^x \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dL + \psi(x_0, t).$$

Per essa si ha

$$\operatorname{rot} \psi = \mathbf{i}_x \frac{\partial}{\partial y} \psi_z - \mathbf{i}_y \frac{\partial}{\partial x} \psi_z = \left(\mathbf{i}_x \frac{\partial}{\partial y} - \mathbf{i}_y \frac{\partial}{\partial x} \right) \int_{x_0}^x (v_x dy - v_y dx) = \mathbf{i}_x v_x + \mathbf{i}_y v_y = \mathbf{v}$$

e perciò ψ costituisce un potenziale vettore della \mathbf{v} .

La ψ_z , che è l'unica componente di questa ψ , e che può quindi essere indicata semplicemente con ψ , ha due importanti proprietà: rimane costante lungo le linee di corrente, perché lungo esse $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ è identicamente nullo, e presenta differenze $\psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}_0)$ uguali al flusso della velocità attraverso ciascuna linea congiungente \mathbf{x}_0 con \mathbf{x} . Per questi motivi $\psi(\mathbf{x}, t)$ è detta funzione di corrente, o, in modo più preciso, *funzione di corrente di Lagrange*, dato che Lagrange ne introdusse l'uso, nel 1783, proprio considerando queste sue proprietà. In termini della $\psi(\mathbf{x}, t)$, le componenti della velocità sono espresse dalle

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

come risulta subito dallo stesso sviluppo che porge $\operatorname{rot} \psi = \mathbf{v}$.

Se il dominio V interessato dal moto piano è molteplicemente connesso, il potenziale vettore e la funzione di corrente possono risultare a più valori. Le differenze fra i valori che competono allo stesso punto nello stesso istante sono combinazioni lineari dei valori

$$\int_{L_k} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dL_k$$

relativi a curve L_k non riconducibili, per deformazione continua in V , né ad un punto, né le une alle altre.

È possibile svolgere considerazioni sostanzialmente analoghe nel caso dei *moti a simmetria assiale*. Per questo genere di moti esiste un riferimento sferico di coordinate r, ϑ , e ϕ rispetto al quale la componente della velocità lungo le ϕ è identicamente nulla, mentre le altre due componenti sono indipendenti dalla stessa coordinata angolare ϕ . Considerato un volume V come quello preso ad esempio in figura 5.6, e cioè un volume semplicemente connesso, delimitato da due semipiani meridiani aventi distanza angolare ϕ reciproca unitaria, e da una superficie ottenuta per rivoluzione attorno all'asse polare di una linea L regolare e chiusa tracciata su uno di tali semipiani, si ha di nuovo, per il teorema della divergenza, che

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{v} dV = - \int_A \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA,$$

essendo \mathbf{n} il versore normale interno per la superficie chiusa A che delimita V . Anche ora, dato che il campo delle velocità è solenoidale, l'integrale di volume risulta nullo, e nullo è pertanto pure quello di superficie.

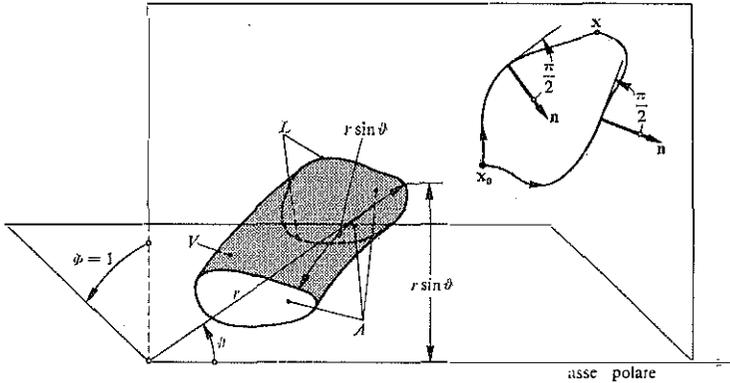


Fig. 5.6. - Linea L sul semipiano di riferimento ed ulteriori elementi necessari per determinare la funzione di corrente di Stokes.

Quest'ultimo poi, per l'ipotesi di moto a simmetria assiale, e per la particolare geometria di A , è uguale all'integrale

$$\int_L r \sin \vartheta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dL,$$

intendendo però che \mathbf{n} rappresenti qui il versore normale ad L appartenente allo stesso piano di L . Ne segue che l'integrale di linea

$$\int_{x_0}^x r \sin \vartheta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dL$$

dipende solo dai punti estremi, purché i versi di \mathbf{n} siano fissati in modo coerente su tutti i percorsi di integrazione, ponendo, ad esempio, che la rotazione retta necessaria per rendere \mathbf{n} parallelo alla linea orientata da \mathbf{x}_0 ad \mathbf{x} abbia lo stesso verso delle ϑ crescenti. Attribuito il valore $\psi(r_0, \vartheta_0, t) = \psi_\phi(r_0, \vartheta_0, t) \mathbf{i}_\phi$ al punto \mathbf{x}_0 , si può assegnare il valore

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{i}_\phi \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\int_{x_0}^x r \sin \vartheta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dL + r_0 \sin \vartheta_0 \psi_\phi(\mathbf{x}_0, t) \right]$$

ad ogni altro punto \mathbf{x} . È facile controllare che

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \psi &= \mathbf{i}_r \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (r \sin \vartheta \psi_\vartheta) - \mathbf{i}_\vartheta \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \vartheta \psi_\vartheta) = \\ &= \left(\mathbf{i}_r \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \mathbf{i}_\vartheta \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial r} \right) \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} r \sin \vartheta (-v_\vartheta dr + v_r r d\vartheta) = \mathbf{i}_r v_r + \mathbf{i}_\vartheta v_\vartheta = \mathbf{v}, \end{aligned}$$

ed accertare così che questa ψ è un potenziale vettore del campo delle velocità.

A causa del fattore legato alle coordinate r e ϑ del punto \mathbf{x} , il potenziale vettore ψ ora introdotto non si mantiene costante lungo le linee di corrente. È costante invece il prodotto

$$\psi(\mathbf{x}, t) = r \sin \vartheta \psi_\vartheta(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} r \sin \vartheta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dL + r_0 \sin \vartheta_0 \psi_\vartheta(\mathbf{x}_0, t).$$

Inoltre $2\pi[\psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}_0)]$ fornisce il flusso della velocità attraverso la superficie generata dalla rivoluzione intorno all'asse polare della linea che congiunge \mathbf{x}_0 ad \mathbf{x} . In base a queste sue proprietà, la ψ è stata proposta da Stokes quale funzione di corrente, nel 1842, ed è nota oggi come *funzione di corrente di Stokes*. Il confronto della definizione di ψ con lo sviluppo di $\operatorname{rot} \psi = \mathbf{v}$ mostra che le componenti della velocità possono venir espresse come

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}, \quad v_\vartheta = -\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

in termini della funzione di corrente di Stokes.

Naturalmente, per i motivi già più volte indicati in contesti analoghi, anche nei moti a simmetria assiale il potenziale vettore e la funzione di corrente possono essere funzioni a più valori quando il dominio sede del moto ha connessione multipla.

Le considerazioni qui svolte dipendono dal fatto che il campo delle velocità sia solenoidale. Come esposto nel paragrafo 4.3, la condizione $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ è verificata se il moto è isocoro, ossia se

$$\frac{D}{Dt} \rho = 0,$$

ed a maggior ragione nei moti che presentano densità uniforme e permanente.

Nei moti a densità permanente, aventi

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho = 0,$$

riesce invece solenoidale il campo vettoriale $\varrho \mathbf{v}$, dato dal prodotto della densità ϱ per la velocità \mathbf{v} , come avverte l'equazione di continuità. Nel caso dei moti a densità permanente si possono così introdurre potenziali vettori e funzioni di corrente per il campo vettoriale $\varrho \mathbf{v}$.

5.7. Moti irrotazionali ed isocori.

Si ammetta ora che il moto sia rappresentato da un campo di velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, di classe C^1 , contemporaneamente irrotazionale e solenoidale. Per essere

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0,$$

esiste un potenziale φ , in termini del quale riesce

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi,$$

e per essere inoltre

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

si ha pure

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi = 0.$$

Sotto le condizioni esposte, il potenziale φ per le velocità è dunque *funzione armonica* nel dominio V di definizione del moto.

È valida anche la proposizione inversa: tutte le volte che un campo di velocità, di classe C^1 , ammette potenziale armonico, esso rappresenta un moto che non è solo irrotazionale, ma anche isocoro.

Il fatto che un moto irrotazionale riesca isocoro se e solo se il potenziale delle velocità è armonico è stato messo in evidenza da Euler già nel 1761.

L'armonicità del potenziale φ implica che φ stesso è analitico e risulta come tale derivabile quante volte si voglia, producendo altre funzioni armoniche attraverso le successive derivazioni: in particolare anche le *componenti della velocità sono armoniche*. Data l'armonicità del potenziale e delle componenti della velocità, queste funzioni non possono presentare punti di massimo o di minimo relativi nell'interno del dominio V . Così, φ e le sue derivate spaziali assumono i loro valori massimi e minimi

sulla frontiera A di V . È interessante osservare che nemmeno il modulo di \mathbf{v} può avere punti di massimo nell'interno del dominio V . Ciò perché, assunto l'asse x diretto come \mathbf{v} in un ipotetico punto \mathbf{x}_0 di massimo per v^2 , deve esistere nell'intorno di \mathbf{x}_0 un altro punto \mathbf{x} in cui la v_x , che non può avere in \mathbf{x}_0 un massimo relativo, assume valore maggiore di quello presentato in \mathbf{x}_0 . Ne segue

$$[v_x^2]_{\mathbf{x}} > [v_x^2]_{\mathbf{x}_0}$$

ed a maggior ragione

$$[v^2]_{\mathbf{x}} = [v_x^2 + v_y^2 + v_z^2]_{\mathbf{x}} > [v_x^2]_{\mathbf{x}_0} = [v^2]_{\mathbf{x}_0}$$

in contrasto con la supposta esistenza in \mathbf{x}_0 di un massimo relativo per il modulo della velocità. Per contro, il modulo della velocità può presentare punti interni di minimo relativo, ed in particolare \mathbf{v} può annullarsi anche internamente a V .

Altra importante conseguenza dell'armonicità del potenziale riguarda la dipendenza della distribuzione di φ nei punti interni di V dalle condizioni per φ e per le sue derivate spaziali vigenti sulla frontiera A . Dall'identità

$$\operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad} \varphi) = \varphi \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \varphi = |\operatorname{grad} \varphi|^2$$

e dal teorema della divergenza

$$\int_V \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad} \varphi) dV = - \int_A \varphi \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{n} dA,$$

cui si può fare direttamente ricorso se V è dotato di frontiera regolare, con vettore normale interno \mathbf{n} , ed è semplicemente connesso e limitato, segue

$$\int_V |\operatorname{grad} \varphi|^2 dV = - \int_A \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dA.$$

E perciò, quando le condizioni imposte lungo il contorno A sono tali da annullare l'integrale di superficie ora scritto, $|\operatorname{grad} \varphi|^2$, che è intrinsecamente non negativo, deve riuscire nullo in tutto V , e φ deve ridursi ad una costante. Di qui si trae subito un *criterio di unicità* per il potenziale: una volta fissati sul contorno A i valori di φ o, disgiuntamente, della sua derivata normale, sussiste nei punti interni del dominio una sola funzione potenziale, a meno di una eventuale ed inessenziale costante additiva. Basta osservare che la differenza fra due ipotetiche distribuzioni di φ riesce

ancora armonica, ma risulta assoggettata a condizioni di frontiera che, per essere pari alla differenza di quelle imposte alle singole φ , sono tali da ridurla ad una costante.

Alcune semplici osservazioni permettono di estendere questo risultato al caso di domini, sempre regolari e limitati, ma dotati di connessione multipla. Domini siffatti possono sempre essere ricondotti a domini semplicemente connessi con l'introduzione di barriere opportune. Attraverso queste, e solo queste, il potenziale risulta discontinuo, con un salto pari alla costante ciclica Γ delle curve chiuse, non riconducibili ad un punto per deformazione continua in V , che le barriere hanno rese aperte. Attraverso le stesse barriere, per contro, v resta continuo. Applicando al nuovo dominio, semplicemente connesso, la relazione

$$\int_V |\text{grad } \varphi|^2 dV = - \int_A \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dA$$

si mettono così in evidenza componenti del tipo

$$\int_{A_k} \Gamma_k \frac{\partial \varphi}{\partial n} dA_k = \Gamma_k \int_{A_k} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dA_k$$

che provengono dall'integrazione lungo le due facce opposte delle singole barriere. Il gradiente del potenziale sarà certamente nullo in tutto V se, accanto all'ipotesi che il termine dell'integrale di superficie connesso alla frontiera del dominio primitivo si mantenga nullo, si introducono nuove condizioni atte ad annullare anche le componenti relative alle barriere. Si può richiedere, ad esempio, che le varie Γ_k siano tutte nulle. Ciò fatto, due potenziali φ che, in un dominio pluriconnesso, soddisfano le stesse condizioni di frontiera e presentano le medesime costanti cicliche non possono differire fra loro che per la solita inessenziale costante additiva.

Un'ulteriore estensione è conseguibile rimuovendo la condizione di dominio limitato, anche se questo comporta naturalmente l'introduzione di ipotesi limitative sul comportamento di φ a grandi distanze. Troncato il dominio illimitato con una superficie sferica, si può scrivere la solita relazione

$$\int_V |\text{grad } \varphi|^2 dV = - \int_A \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dA$$

con riferimento alla porzione del dominio di partenza compresa entro la sfera stessa. Ancora una volta $\text{grad } \varphi$ riesce nullo in tutto V quando

le condizioni imposte lungo A sono tali da annullare l'integrale di superficie. Il risultato può essere trasferito al dominio illimitato facendo crescere oltre ogni limite il raggio della sfera, e richiedendo, ad esempio, che risultino separatamente nulle sia la componente dell'integrale di superficie legata alla frontiera, eventualmente illimitata, del dominio originario, sia il limite delle componenti

$$\int_{A_e} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dA_e$$

relative alle intersezioni A_e delle varie superfici sferiche con lo stesso dominio. La prima condizione è sicuramente verificata se i valori imposti a φ od alla sua derivata normale lungo la frontiera del dominio illimitato sono identicamente nulli. Circa la seconda condizione va osservato che l'integrale

$$\int_{A_e} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dA_e = \int_{A_u} (\text{grad } \varphi) \cdot \mathbf{n} dA_e = \int_{A_o} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA_e,$$

in accordo con la definizione introdotta nel paragrafo 4.1, rappresenta la portata volumetrica che penetra nei domini parziali attraverso le A_e , e che questa è uguale alla portata volumetrica uscente dagli stessi domini attraverso le rispettive porzioni A_u di A . Infatti, per il teorema della divergenza e per l'ipotesi $\text{div } \mathbf{v} = 0$, si ha

$$\int_{A_e} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA_e = - \int_V \text{div } \mathbf{v} dV - \int_{A_p} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA_p = - \int_{A_p} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA_p.$$

Al crescere del raggio delle sfere, la portata uscente attraverso A_p tende alla portata uscente lungo tutto A . Se questa portata è limitata, il valore limite di

$$\int_{A_e} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dA_e$$

riesce certamente nullo quando φ tende ad annullarsi uniformemente a grandi distanze. Così, in un dominio illimitato, due potenziali φ che soddisfano le stesse condizioni di frontiera, che comportano il transito di portate limitate, e che a grandi distanze assumono la medesima distribuzione, riescono necessariamente coincidenti.

I criteri di unicità ora esposti richiedono che lungo la superficie di contorno del campo interessato dal moto la derivata normale del poten-

ziale venga fissata solo disgiuntamente dalla distribuzione del potenziale stesso, ossia solo disgiuntamente dai valori della sua derivata tangenziale. In generale, quindi, non si può richiedere che il fluido a contatto con una parete si muova solidalmente con essa.

In modo più preciso, già nel 1876, Kirchhoff osservava che se il fluido aderisce ad una porzione di superficie di contorno finita e ferma, l'unico moto irrotazionale ed isocoro è lo stato di quiete. Ciò perché il potenziale φ , armonico, presenterebbe allora derivate prime identicamente nulle sulla superficie considerata e sarebbe quindi uniforme in tutto il dominio occupato dal fluido. Analogo risultato sussiste ovviamente se l'elemento di superficie è animato da traslazione rigida: il moto relativo ad essa è ancora rappresentato da un potenziale armonico uniforme.

Come indicato da Supino nel 1949, la condizione di aderenza risulta di nuovo incompatibile con lo stato di moto irrotazionale ed isocoro se tutta la frontiera del dominio occupato dal fluido è in moto di rotazione rigida, con velocità angolare istantanea $\omega(t)$.

Per un osservatore che vede in rotazione la frontiera intorno all'asse z , le velocità \mathbf{v} del fluido ammettono il potenziale istantaneo $\varphi(\mathbf{x}, t)$. Ad un osservatore rotante intorno all'asse z che veda ferma la frontiera, il fluido appare invece animato dalle velocità

$$\tilde{\mathbf{v}} = \text{grad } \varphi - \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}$$

ovvero

$$\tilde{v}_x = 2\omega_z y + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \quad \tilde{v}_y = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \quad \tilde{v}_z = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$$

con

$$\varphi_1 = \varphi - \omega_z xy$$

ancora armonica. Così \tilde{v}_y e \tilde{v}_z sono armoniche, ed identicamente nulle per la condizione di aderenza, nel caso dei domini chiusi. Altrettanto avviene nei domini illimitati, purché le stesse velocità tendano ad annullarsi in modo uniforme a grandi distanze e gli integrali di superficie dei loro gradienti normali rimangano limitati. Ne segue che φ_1 può essere solo lineare in x , ma questa sua espressione è di norma incompatibile con la prima condizione di aderenza, $\tilde{v}_x = 0$, che implica

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = -2\omega_z y.$$

L'impossibilità che un moto irrotazionale ed isocoro soddisfi le condizioni di aderenza alle pareti solide che delimitano l'ambiente indica che il moto di un fluido reale non può essere effettivamente irrotazionale ed

isocoro, perché le osservazioni sperimentali hanno assodato che i fluidi si attaccano alle pareti solide. Ciò non ostante, come verrà chiarito in seguito, lo schema in questione può fornire delle informazioni utili sull'assetto dei moti reali, ove lo si impieghi rinunciando al rispetto della condizione di aderenza, e quindi a precisazioni di dettaglio sull'andamento delle velocità in vicinanza delle pareti.

Per la sua stretta connessione con i criteri di unicità, conviene ricordare qui anche un risultato conseguito da Kelvin nel 1849, che è atto a caratterizzare i moti irrotazionali ed isocori: in un dominio V semplicemente connesso e limitato, il valore

$$\int_V v^2 dV$$

che compete al moto irrotazionale ed isocoro è minore di quello relativo ad ogni altro moto isocoro avente la medesima distribuzione di velocità normali alla frontiera.

Per accertarsi di questo fatto basta osservare che se $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}$ sono le velocità ottenute per differenza tra le velocità \mathbf{v}_1 di un moto isocoro non irrotazionale e quelle $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$ di un moto isocoro con potenziale φ , si ha che

$$\int_V v_1^2 dV = \int_V v^2 dV + \int_V v_0^2 dV - 2 \int_V (\text{grad } \varphi) \cdot \mathbf{v}_0 dV$$

e che le condizioni indicate rendono nullo l'ultimo di questi integrali. Dato che la differenza fra due campi solenoidali è ancora un campo solenoidale, riesce intanto

$$(\text{grad } \varphi) \cdot \mathbf{v}_0 = \text{div}(\varphi \mathbf{v}_0) - \varphi \text{div} \mathbf{v}_0 = \text{div}(\varphi \mathbf{v}_0).$$

Così, giusto il teorema della divergenza, l'integrale in discussione assume la forma

$$\int_V \text{div}(\varphi \mathbf{v}_0) dV = - \int_A \varphi \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} dA$$

nella quale \mathbf{n} indica il versore normale interno per la frontiera A del dominio V , ed appare quindi nullo, come richiesto, perché \mathbf{v}_0 , quale differenza fra campi di velocità con identiche componenti normali ad A , porge valori di $\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}$ costantemente nulli.

Le limitazioni sulla connessione o sulla estensione di V possono essere facilmente rimosse, e sostituite da altre, come già fatto a proposito dei

critéri di unicità. Se il dominio presenta connessione multipla, si possono introdurre in esso delle barriere che lo rendano semplicemente connesso: è allora

$$\int_V \operatorname{div}(\varphi \mathbf{v}_0) dV = - \int_A \varphi \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} dA - \sum_k \int_{A_k} \Gamma_k \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} dA_k$$

con valore sempre nullo, se sono tali tutte le costanti cicliche Γ_k del moto irrotazionale. Nel caso dei domini illimitati, compaiono anche termini del tipo

$$- \int_{A_e} \varphi \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} dA_e$$

che riescono però nulli anch'essi, se φ si mantiene sempre limitato al crescere delle dimensioni delle A_e , perché la portata in transito associata al moto di velocità \mathbf{v}_0 è nulla.

Il risultato ora esposto si presta ad una lettura dinamica immediata quando il moto avviene con densità uniforme e permanente: essendo

$$\frac{1}{2} \int_V \rho v^2 dV = \frac{1}{2} \rho \int_V v^2 dV,$$

il moto irrotazionale con densità uniforme e permanente appare dotato di energia cinetica minore di quella di ogni altro moto di pari densità, ferme restando le altre condizioni enunciate.

5.8. Moti con divergenza e rotore non nulli.

I campi di velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, di classe C^1 , che presentano contemporaneamente divergenza e rotore diversi da zero non rientrano fra i casi considerati negli ultimi tre paragrafi. Se si verificano queste circostanze non è più possibile rappresentare il campo delle velocità con uno solo dei potenziali di Stokes, ma si deve porre

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \psi.$$

Si osserva subito che

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{div} \operatorname{rot} \psi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi,$$

e quindi che la componente di φ atta a rappresentare quella parte del campo delle velocità che ha divergenza non nulla si ottiene risolvendo

l'equazione di Poisson

$$\nabla^2 \varphi = \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Si ha pertanto

$$\varphi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\operatorname{div} \mathbf{v}}{d} dV,$$

ove d sta per la distanza del punto \mathbf{x}' , variabile nel dominio V interessato dal moto, dal punto \mathbf{x} , nel quale si vuole calcolare il potenziale.

Relativamente al potenziale vettore ψ si verifica che

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \psi = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \psi = -\nabla^2 \psi + \operatorname{grad} \operatorname{div} \psi.$$

Inoltre, ci si può servire del margine di arbitrarietà connesso alla definizione di ψ per rendere ψ stesso solenoidale. Allo scopo basta costruire un potenziale scalare ψ_1 che rappresenti un campo vettoriale con divergenza uguale a quella di ψ , integrando l'equazione di Poisson

$$\nabla^2 \psi_1 = \operatorname{div} \psi.$$

Sottratto ora $\operatorname{grad} \psi_1$ alla ψ originaria si ottiene un nuovo potenziale vettore, che è solenoidale e che rappresenta il medesimo campo di velocità. Si può dunque assumere che ψ sia solenoidale, ed in tal caso l'espressione precedente per il rotore della velocità porge

$$\nabla^2 \psi = -\operatorname{rot} \mathbf{v}$$

che è di nuovo un'equazione di Poisson. Risolvendola si ottiene

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\operatorname{rot} \mathbf{v}}{d} dV$$

quale componente di ψ capace di rappresentare la parte del campo delle velocità avente rotore non nullo. Al solito, d indica la distanza del punto \mathbf{x}' , che varia in tutto il dominio V interessato dal moto, dal punto \mathbf{x} , in cui si vuole calcolare ψ .

I potenziali φ e ψ così prodotti non descrivono la parte del campo delle \mathbf{v} che è irrotazionale ed isocora. Per quest'ultima si può ricorrere ad una componente armonica del potenziale scalare, come già fatto al paragrafo 5.7, oppure ad una componente armonica del potenziale vettore, anche se ciò risulta meno comodo. Naturalmente si può anche fra-

zionare la parte irrotazionale ed isocora del campo delle velocità ed impiegare per ciascuna frazione solo una componente armonica del potenziale scalare, o solo una componente armonica del potenziale vettore.

5.9. Il potenziale delle accelerazioni.

L'irrotazionalità del campo delle velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, di classe C^1 , implica l'esistenza di un *potenziale scalare per le accelerazioni*. Basta ricordare l'espressione

$$\mathbf{a} = \frac{D}{Dt} \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \wedge \text{rot} \mathbf{v} + \text{grad} \frac{v^2}{2},$$

già vista nel paragrafo 5.2, e porre in essa $\text{rot} \mathbf{v} = 0$ e $\mathbf{v} = \text{grad} \varphi$, per ottenere

$$\mathbf{a} = \text{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} \right).$$

Anche il potenziale per le accelerazioni risulta definito a meno di una inessenziale funzione del tempo, e può essere a più valori nei domini a connessione multipla. Si nota inoltre che, in base alle ipotesi fatte sul campo delle velocità, il potenziale di \mathbf{a} è di classe C^1 ed \mathbf{a} è di classe C^0 ; così non è detto che il campo delle accelerazioni sia irrotazionale.

Inversamente, l'esistenza del potenziale delle accelerazioni non assicura che il moto sia irrotazionale. Ad esempio, il moto di rotazione rigida con velocità angolare ω costante nel tempo ammette il potenziale per le accelerazioni

$$-\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2),$$

ove x ed y sono le coordinate cartesiane lungo due assi fissi, mutuamente ortogonali, uscenti dall'asse di rotazione e perpendicolari ad esso. Ma il campo delle velocità presenta un rotore di modulo 2ω , e non è quindi irrotazionale.

Di norma, invece, il campo delle accelerazioni non può essere rappresentato tramite il solo potenziale vettore. Ammesso che \mathbf{v} sia di classe C^2 e che esista perciò la divergenza delle accelerazioni, quest'ultima grandezza è in genere diversa da zero. In particolare, per il moto irrotazionale ed isocoro,

$$\text{div} \mathbf{a} = \text{div} \text{grad} \frac{v^2}{2} = |\text{grad} v_x|^2 + |\text{grad} v_y|^2 + |\text{grad} v_z|^2$$

è necessariamente positivo, salvo il caso della traslazione rigida.

5.10. La vorticità.

Il rotore di un campo di velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, di classe C^1 , ne costituisce la *vorticità*. Il collegamento di

$$\mathbf{w} = \text{rot } \mathbf{v}$$

con la distribuzione della \mathbf{v} può essere illustrato molto bene considerando il tasso di variazione intrinseca nel tempo della circolazione della velocità lungo una linea chiusa e regolare L , ossia la grandezza

$$\frac{D}{Dt} \int_L \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{x}.$$

Per eseguire la derivazione va osservato che ciascuna frazione $v_k dx_k$ dell'integrando ammette il differenziale totale intrinseco

$$\begin{aligned} d(v_k dx_k) &= \frac{\partial(v_k dx_k)}{\partial t} dt + \sum_i \frac{\partial(v_k dx_k)}{\partial x_i} v_i dt = \\ &= \frac{Dv_k}{Dt} dx_k dt + v_k \frac{D(dx_k)}{Dt} dt = a_k dx_k dt + v_k dv_k dt \end{aligned}$$

e che

$$\int_L v_k dv_k = \int_L \frac{1}{2} dv_k^2 = 0.$$

Completivamente è perciò

$$\frac{D}{Dt} \int_L \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{x} = \int_L \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{x}.$$

Si osserva ora che, se l'accelerazione \mathbf{a} ammette potenziale, la circolazione di \mathbf{v} lungo tutte le linee chiuse, reciprocamente sovrapponibili per deformazione continua senza uscire dal dominio nel quale è definito il moto, muta nel tempo allo stesso modo. Così, l'esistenza del potenziale delle accelerazioni durante un intervallo di tempo finito che comprenda un particolare istante t_0 assicura che anche il campo delle velocità ammetta potenziale nello stesso periodo di tempo sempre che lo ammetta all'istante t_0 . Poiché si è supposto che \mathbf{v} sia di classe C^1 , si può esprimere lo stesso fatto dicendo che il moto si mantiene irrotazionale per tutto un periodo limitato di tempo, se è tale in un istante e se presenta accelerazione costantemente dotata di potenziale. Il risultato ora esposto è stato conseguito da Lagrange, con procedimento diverso, già nel 1783, ed è noto appunto come *teorema di Lagrange*.

Si può anche osservare che, indipendentemente dall'irrotazionalità del moto, la circolazione della velocità lungo ciascuna linea chiusa in moto con il fluido si mantiene inalterata nel tempo, purché il potenziale delle accelerazioni risulti univoco durante lo stesso intervallo finito di tempo. Questo secondo enunciato costituisce il *teorema di Kelvin*, e risale al 1869.

Altri risultati seguono dalla formula di Kelvin

$$\int_L \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{x} = \int_A \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dA,$$

eventualmente abbinata all'espressione della derivata sostanziale della circolazione di \mathbf{v} .

Per ciascuna curva regolare e chiusa L che appartenga ad una parete fissa alla quale il fluido aderisce, la circolazione di \mathbf{v} riesce necessariamente nulla, ed il flusso di \mathbf{w} attraverso la stessa parete deve perciò essere nullo anch'esso. Ciò significa che, se il fluido aderisce ad una parete fissa, \mathbf{w} è nullo su tale parete o parallelo ad essa.

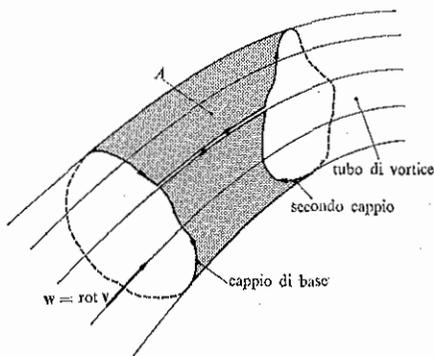


Fig. 5.7. - Porzione di tubo di vortice per la dimostrazione del primo teorema di Helmholtz.

Si consideri poi la superficie A costituita dalle linee del vettore \mathbf{w} che si appoggiano ad una curva regolare e chiusa L . Per una qualunque porzione di una superficie di questo genere il flusso di \mathbf{w} è nullo, ed è quindi nulla la circolazione di \mathbf{v} sulla relativa linea di contorno. Si può, in particolare, scegliere quest'ultima in modo che sia formata dalla linea L di base, troncata, prolungata con due segmenti sovrapposti di linea del vettore \mathbf{w} , e completata da un altro cappio aperto, tracciato su A e riconducibile per deformazione continua su A a quello iniziale L . La curva complessiva che ne risulta è quella indicata in figura 5.7. Dall'annullarsi della circolazione di \mathbf{v} lungo tale linea segue subito che la circolazione di \mathbf{v} rela-

tiva ai vari cappi riconducibili gli uni agli altri attraverso deformazioni consentite su A assume sempre lo stesso valore, valore che può quindi essere adottato quale indice della vorticità presente entro A . Ci si riferisce a questo risultato come al *primo teorema di Helmholtz*: Helmholtz lo conseguì nel 1858, sotto ipotesi poco più restrittive.

Le superfici A del tipo ora impiegato, e cioè i tubi del vettore w , sono dette *tubi di vortice*. Poiché la circolazione di v è la stessa per tutti i circuiti che abbracciano lo stesso tubo di vortice, il flusso di w attraverso le superfici aventi per contorno tali circuiti riesce anch'esso costante. Ciò implica che il tubo di vortice non può terminare all'interno del dominio V in cui è definito il moto: in un ipotetico punto del genere la vorticità dovrebbe superare ogni limite, per garantire la costanza del flusso di w , mentre dovrebbe contemporaneamente annullarsi, per consentire la convergenza delle linee del vettore w che formano le pareti del tubo di vortice. I tubi di vortice, pertanto, si richiudono su se stessi, oppure attraversano tutto il dominio V . Naturalmente, questo non esclude che singole linee del vettore w terminino internamente a V , nei punti in cui w si annulla.

Per una generica superficie A formata da linee del vettore w , il flusso di w è nullo. La circolazione di v sul contorno L riesce nulla anch'essa, e si mantiene tale durante intervalli di tempo limitati, mentre A ed L si muovono con il fluido, purché le accelerazioni ammettano potenziale univoco. Ne segue che in ciascuno degli istanti considerati la superficie A è formata sempre da linee del vettore w . E se l'intersezione di due di queste superfici è, ad un dato istante, linea del vettore w , essa rimane tale durante il moto. Si vede così, come già osservato per altra via da Cauchy nel 1816, che le linee del vettore w sono legate indissolubilmente agli elementi fluidi, quando l'accelerazione ammette potenziale univoco.

In particolare, una linea che abbracci un tubo di vortice e che si muova con il fluido continua ad abbracciare costantemente lo stesso tubo di vortice. Inoltre, sempre per l'esistenza del potenziale univoco delle accelerazioni, la circolazione di v lungo tale linea rimane inalterata per intervalli di tempo finiti. Se ne deduce che la vorticità racchiusa nel tubo di vortice si conserva. Questo è il *secondo teorema di Helmholtz*, ed è stato esposto, insieme al primo, nel 1858.

Restringendo l'analisi ai campi di velocità di classe C^2 , è possibile ottenere ulteriori informazioni sulla vorticità.

Si nota subito che

$$\operatorname{div} w = \operatorname{div} \operatorname{rot} v = 0,$$

e perciò che il campo della vorticità è solenoidale.

Si può poi costruire la derivata sostanziale di \mathbf{w} : operando sulle sue componenti secondo la regola indicata nel paragrafo 4.2, risulta

$$\frac{D}{Dt} w_k = \frac{\partial}{\partial t} w_k + \sum_1^3 v_i \frac{\partial}{\partial x_i} w_k.$$

I termini che costituiscono il secondo membro compaiono anche nell'espressione del rotore dell'accelerazione: da

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\omega} + \text{grad} \frac{v^2}{2}$$

si trae intanto

$$(\text{rot } \mathbf{a})_k = \frac{\partial}{\partial t} w_k - [\text{rot}(\mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\omega})]_k,$$

e se si aggiunge qui la quantità identicamente nulla

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (v_k w_k - v_k w_k)$$

diviene immediato controllare che è appunto

$$(\text{rot } \mathbf{a})_k = \frac{\partial}{\partial t} w_k + \sum_1^3 v_i \frac{\partial}{\partial x_i} w_k + (\text{div } \mathbf{v}) w_k - \sum_1^3 w_i \frac{\partial}{\partial x_i} v_k.$$

Così

$$\frac{D}{Dt} w_k = (\text{rot } \mathbf{a})_k + \sum_1^3 w_i \frac{\partial}{\partial x_i} v_k - (\text{div } \mathbf{v}) w_k.$$

L'espressione ottenuta assume una forma di più facile lettura decomponendo il tensore $\text{grad } \mathbf{v}$ nei suoi diversi addendi

$$\text{grad } \mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{L} + \mathbf{S}$$

già esaminati nel paragrafo 5.1. Si ha allora

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) + \frac{\text{div } \mathbf{v}}{3} \delta_{ik} + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) - \frac{\text{div } \mathbf{v}}{3} \delta_{ik} \right],$$

e si vede facilmente che

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_1^3 w_i \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) &= 0, \\ \sum_1^3 w_i \frac{\text{div } \mathbf{v}}{3} \delta_{ik} &= \frac{\text{div } \mathbf{v}}{3} w_k. \end{aligned}$$

Se ne conclude che il tasso di variazione intrinseca nel tempo della vorticità \mathbf{w} vale

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{w} = \text{rot } \mathbf{a} - \frac{2}{3} (\text{div } \mathbf{v}) \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{S}$$

ed appare quindi dovuto separatamente alla presenza di accelerazioni non irrotazionali, alla variazione di volume dell'elemento fluido, ed alla sua distorsione. Gli ultimi due effetti, inoltre, si manifestano solo quando esiste già una vorticità iniziale. Ricordando dal paragrafo 5.1 che la vorticità è connessa alla velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ della rotazione rigida locale dalla

$$\mathbf{w} = \text{rot } \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega},$$

si può individuare subito l'implicazione dinamica di questo risultato, che peraltro verrà illustrata in seguito. Il risultato stesso è stato conseguito da Beltrami nel 1871, ed è noto oggi come *equazione di Beltrami*.

5.11. Moti piani.

In accordo con la definizione fornita al paragrafo 5.6, nel moto piano le velocità \mathbf{v} possono essere riferite a coordinate cartesiane scelte in modo che risulti $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, t)$ e $v_z = 0$. Al solito, si ammette che il campo delle velocità sia di classe C^1 .

Adattando al particolare contesto i risultati generali fin'ora esposti, è immediato evidenziare le più importanti caratteristiche dei moti piani. Così, se il moto è irrotazionale, esiste un potenziale scalare delle velocità $\varphi(x, y, t)$ che porge

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

mentre la divergenza di \mathbf{v} è data da

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \nabla^2 \varphi.$$

Le linee equipotenziali, che riescono di norma distinte, possono intersecarsi fra loro in corrispondenza dei punti di ristagno, ossia dei punti nei quali si annulla la velocità. Assunta l'origine degli assi in uno di questi punti, e posto uguale a zero il valore locale del potenziale, lo sviluppo di Taylor della φ nell'intorno del punto di ristagno si presenta come

$$\varphi = \frac{1}{2} x^2 \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right]_0 + xy \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right]_0 + \frac{1}{2} y^2 \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right]_0 + \dots$$

Le equazioni compressive delle tangenti locali alle linee equipotenziali si ottengono uguagliando a zero il gruppo di termini di grado più basso: se n è questo grado, sono n anche le tangenti. In particolare, supposto che le tre derivate seconde non siano tutte nulle nel punto di ristagno, si ha l'equazione

$$x^2 \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right]_0 + 2xy \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right]_0 + y^2 \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right]_0 = 0,$$

che si spezza nelle due

$$x \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right]_0 + y \left(\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right]_0 + \sqrt{\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right]_0^2 - \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right]_0 \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right]_0} \right) = 0,$$

$$y \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right]_0 + x \left(\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right]_0 + \sqrt{\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right]_0^2 - \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right]_0 \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right]_0} \right) = 0.$$

Esistono pertanto due tangenti, che possono essere reali, distinte o coincidenti, oppure immaginarie ed intersecantesi nel punto reale $x = y = 0$. Se poi il moto, oltre che irrotazionale, è anche isocoro, il potenziale φ risulta armonico: si ha allora

$$\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right]_0 = - \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right]_0$$

e le due rette in questione sono reali ed ortogonali fra loro.

Amnesso invece che il moto piano sia isocoro, esiste la funzione di corrente $\psi(x, y, t)$, in termini della quale si ha

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

per le componenti della velocità, e

$$\text{rot } \mathbf{v} = - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \mathbf{i}_z = - \mathbf{i}_z \nabla^2 \psi$$

per il rotore della velocità stessa.

La funzione di corrente assume valori costanti sulle linee di corrente, e queste sono normalmente distinte, pur potendo intersecarsi in corrispondenza dei punti di ristagno. Un calcolo locale condotto sulla ψ , che ricalchi quello appena effettuato sulla φ , mostra che se le tangenti nel punto di ristagno alle linee di corrente sono solo due e se il moto non è solamente isocoro, ma anche irrotazionale, le tangenti stesse sono reali e reciprocamente ortogonali.

Nel caso di moto irrotazionale ed isocoro, esistono contemporaneamente sia il potenziale scalare delle velocità, sia la funzione di corrente, e queste funzioni risultano entrambe armoniche. Uguagliando fra loro le espressioni per le componenti della velocità si nota che

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

e quindi che φ e ψ costituiscono *coppie di funzioni armoniche coniugate*. In base a questa osservazione si può vedere che se, in un punto di ristagno, le tangenti alle linee equipotenziali sono due soltanto, e perciò reciprocamente ortogonali, anche le tangenti alle linee di corrente sono due sole, mutuamente ortogonali, e formano con le prime angoli uguali alla metà dell'angolo retto. Scelto infatti l'asse delle x in modo che il punto di ristagno cada nell'origine e che nell'origine si abbia

$$\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right]_0 = 0,$$

le equazioni delle tangenti alle linee equipotenziali nel punto di ristagno assumono la forma

$$y = 0 \quad \text{ed} \quad x = 0,$$

mentre quelle delle tangenti locali alle linee di corrente, essendo

$$\left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right]_0 = \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right]_0 = \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_0 = \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right]_0 = 0,$$

divengono

$$x + y = 0 \quad \text{ed} \quad x - y = 0.$$

Al di fuori dei punti di ristagno, le linee sulle quali è costante il potenziale e quelle sulle quali è costante la funzione di corrente si mantengono mutuamente ortogonali.

Lo stesso legame fra le derivate spaziali di φ e di ψ consente inoltre una rappresentazione del moto particolarmente efficace: contraddistinti i punti x, y del piano campione con il numero complesso $\mathcal{Z} = x + iy$, la funzione di \mathcal{Z} definita come

$$f(\mathcal{Z}) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

risulta analitica. Essa ammette quindi un'unica derivata rispetto a \mathcal{Z}

$$\frac{df(\mathcal{Z})}{d\mathcal{Z}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = v_x - iv_y.$$

Basta perciò definire come *velocità complessa* il valore $v_x - iv_y$, per concludere che una funzione analitica di Σ può essere assunta quale *potenziale complesso* di un campo di velocità complesse relative ad un moto irrotazionale, isocoro e piano.

Merita sottolineare, infine, due proposizioni riguardanti la vorticità, e relative al caso di moti isocori, con velocità di classe C^2 , e con accelerazioni irrotazionali. In queste condizioni, secondo le conclusioni riportate alla fine del paragrafo che precede, il tasso di variazione intrinseca nel tempo della vorticità vale

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{S},$$

ma \mathbf{w} è parallelo all'asse z , ed \mathbf{S} , per la posizione $\text{div} \mathbf{v} = 0$, ha componenti ormai ridotte a

$$S_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right)$$

che riescono nulle se uno degli indici i o k coincide con z . Ne segue che è, identicamente,

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{S} = 0,$$

e perciò che la vorticità intrinseca resta inalterata. Infine, visto che la vorticità

$$\mathbf{w} = \text{rot} \mathbf{v} = -\mathbf{i}_z \nabla^2 \psi$$

resta costante lungo le traiettorie, e che queste, in moto permanente, si sovrappongono alle linee di corrente, sulle quali è già costante ψ , deve essere

$$\nabla^2 \psi = f(\psi),$$

per i moti isocori piani e permanenti con accelerazioni irrotazionali.

5.12. Moti a simmetria assiale.

Per i moti a simmetria assiale, secondo la definizione data nel paragrafo 5.6, esiste un riferimento sferico, di coordinate r , ϑ , e ϕ , rispetto al quale si ha $\mathbf{v} = \mathbf{v}(r, \vartheta, t)$ e $v_\phi = 0$. Naturalmente, sul semipiano meridiano, le coordinate sferiche r e ϑ possono essere sostituite dalle corrispondenti coordinate cartesiane

$$x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta,$$

ottenendo così, complessivamente, un riferimento cilindrico x, y, φ . Anche qui si ammetterà che il campo delle velocità \mathbf{v} sia di classe C^1 .

Quando il moto è irrotazionale, esiste un potenziale φ per le velocità, che fornisce

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta},$$

ovvero, alternativamente,

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

La divergenza della velocità è data da

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) = \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \nabla_{r, \theta}^2 \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \end{aligned}$$

ossia

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} (y v_y) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \nabla_{x, y}^2 \varphi + \frac{1}{y} \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

e queste espressioni mostrano che φ , sul semipiano meridiano, non è funzione armonica delle due variabili r e θ , od x ed y , nemmeno quando il moto è anche isocoro.

Nel semipiano meridiano, le linee equipotenziali sono normalmente distinte, ed ortogonali alle linee di corrente. Esse possono tuttavia incontrarsi in un punto di ristagno. L'esame locale della distribuzione di φ , ove si usino le coordinate x ed y , ripete quello già effettuato nel paragrafo precedente a proposito dei moti piani. Ora però le tangenti alle linee di corrente condotte dai punti di ristagno non sono più necessariamente reali ed ortogonali fra loro quando sono due sole in numero ed il moto è pure isocoro. Sempre in quest'ultimo caso, tuttavia, le due tangenti sono reali se il punto di ristagno cade sull'asse di simmetria, perché allora

$$\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right]_0 = -2 \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right]_0.$$

Se il moto è isocoro, esiste la funzione di corrente ψ , di Stokes, con riferimento alla quale riesce

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

oppure

$$v_x = \frac{1}{y} \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{1}{y} \frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Il rotore ha una sola componente non nulla: quella lungo le φ . In termini della Ψ essa vale

$$\begin{aligned} (\text{rot } \mathbf{v})_\varphi &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r v_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} v_r \right) = \\ &= -\frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \vartheta^2} \right] + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\cos \vartheta}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} \right) = \\ &= -\frac{1}{r \sin \vartheta} \nabla_{r,\vartheta}^2 \Psi + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\cos \vartheta}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} \right) \end{aligned}$$

od anche

$$(\text{rot } \mathbf{v})_\varphi = \frac{\partial}{\partial x} v_y - \frac{\partial}{\partial y} v_x = -\frac{1}{y} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{1}{y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) = -\frac{1}{y} \left(\nabla_{x,y}^2 \Psi - \frac{1}{y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right).$$

Così neppure Ψ riesce armonica sul semipiano meridiano, quando il moto è irrotazionale ed isocoro, con conseguenze relative al comportamento delle linee di corrente presso i punti di ristagno analoghe a quelle viste per le linee equipotenziali.

Sempre in contrasto con quanto avviene nei moti piani, il tasso di variazione intrinseca nel tempo della vorticità non è nullo, di norma, per i moti isocori a simmetria assiale aventi velocità di classe C^2 ed accelerazioni irrotazionali. È infatti, in tal caso

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{S}.$$

Per valutare $\mathbf{w} \cdot \mathbf{S}$ conviene ricorrere ad un riferimento locale cartesiano ed ortogonale con gli assi x ed y paralleli a quelli omonimi del riferimento cilindrico: l'asse z riesce di conseguenza orientato verso le φ crescenti. Nell'origine di questi nuovi assi si ha $w_z = w_\varphi$, quale unica componente non nulla di \mathbf{w} . E fra le componenti di \mathbf{S}

$$S_{iz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right),$$

che vanno perciò considerate, la sola diversa da zero è quella

$$S_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = \frac{1}{y} v_y.$$

Risulta così

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{i}_z \frac{1}{y} w_z v_y.$$

Ne segue che

$$\frac{D}{Dt} w_{\phi} = \frac{1}{y} w_{\phi} v_y$$

ossia che

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{w_{\phi}}{y} \right) = \frac{1}{y} \frac{D}{Dt} w_{\phi} + w_{\phi} \frac{D}{Dt} \frac{1}{y} = \frac{1}{y} \left(\frac{D}{Dt} w_{\phi} - \frac{1}{y} w_{\phi} v_y \right) = 0.$$

Se poi il moto è anche permanente, le traiettorie, sulle quali, come si è appena visto, si mantiene costante il rapporto fra l'intensità del rotore e la distanza dall'asse di simmetria, si sovrappongono alle linee di corrente, sulle quali assume valori costanti la ψ . Deve essere allora

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{1}{y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = y^2 f(\psi)$$

su ciascun piano meridiano.

Riferimenti citati.

BELTRAMI, EUGENIO, *Sui principi fondamentali dell'idrodinamica razionale*, Acc. Sc. Bologna, I parte: 1871, pp. 431-476; II parte: 1872, pp. 381-437; III parte: 1873, pp. 349-407; IV parte: 1874, pp. 443-484.

CAUCHY, AUGUSTIN LOUIS, *Théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant d'une profondeur indéfinie*, Mém. Acad. Roy. Sciences, 1816, pp. 3-312.

HELMHOLTZ, HERMANN LUDWIG FERDINAND VON, *Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche der Wirbelbewegungen entsprechen*, J. reine angew. Math., 1858, pp. 22-55.

EULER, LEONHARD, *Principia motus fluidorum*, Novi Comm. Acad. Sci. Petrop., 1761, pp. 271-311.

KELVIN, WILLIAM THOMSON LORD, *On the vis viva of a liquid in motion*, Camb. and Dub. Math. J., 1849, pp. 90-94.

— *On vortex motion*, Trans. Roy. Soc. Edimb., 1869, pp. 217-260.

KIRCHHOFF, GUSTAV ROBERT, *Mechanik*, Leipzig, 1876.

LAGRANGE, JOSEPH LOUIS, *Mémoire sur la théorie du mouvement des fluides*, Nouv. Mém. Acad. Berlin, 1783, pp. 151-198.

STOKES, GEORGE GABRIEL, *On the steady motion of incompressible fluids*, Trans. Camb. Phil. Soc., 1842, pp. 439-453.

— *On the dynamical theory of diffraction*, Trans. Camb. Phil. Soc., 1851, pp. 1-62.

SUPINO, GIULIO, *Sul moto irrotazionale dei liquidi viscosi*, Acc. Lincei, 1949, pp. 615-620.

CAPITOLO SESTO
STATICA DEI FLUIDI

6.1. Le equazioni meccaniche della statica.

Si dice che una massa fluida si trova in *condizioni statiche* quando il vettore velocità \mathbf{v} risulta identicamente nullo.

L'equazione di continuità del paragrafo 4.3

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \, dV = 0$$

assume allora la forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV = 0,$$

e la densità locale ρ , anche se solo di classe C^1 , riesce perciò invariabile nel tempo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

L'assenza di velocità ha conseguenze ancora più incisive sull'assetto degli sforzi interni. L'indagine sperimentale ha permesso infatti di accertare che in seno ad un fluido in condizioni statiche non si presentano sforzi tangenziali. Il teorema di Cauchy del paragrafo 4.6 porge allora la relazione

$$T_{nn}(n_x \mathbf{i}_x + n_y \mathbf{i}_y + n_z \mathbf{i}_z) = T_{xx} n_x \mathbf{i}_x + T_{yy} n_y \mathbf{i}_y + T_{zz} n_z \mathbf{i}_z$$

che può essere soddisfatta solo se gli sforzi normali assumono tutti lo

stesso valore, indipendentemente dalla direzione \mathbf{n} lungo la quale agiscono. Il fatto è stato osservato per la prima volta da Stevin nel 1586.

Dato che il fluido è in quiete, il modulo degli sforzi normali deve essere direttamente correlato alla grandezza p che figura nell'equazione di stato

$$V = V(p, \tau),$$

introdotta nel paragrafo 1.6 per esprimere il volume V di un corpo in riposo sottoposto a pressione p e temperatura τ uniformi. Se si indica con M la massa racchiusa in V , l'equazione di stato può essere posta nella forma

$$\frac{M}{V} = \frac{M}{V}(p, \tau),$$

dalla quale, riducendo progressivamente il volume V , si trae

$$\varrho = \varrho(p, \tau).$$

Nel seguito ci si riferirà a quest'ultima scrittura come all'*equazione di stato* del fluido in esame. Si tratta di una relazione che assume forme diverse a seconda del particolare materiale oggetto dello studio, anziché di un'equazione legata ai principi generali della fisica e valida come tale per tutti i mezzi continui. Si dice perciò che l'equazione di stato è un'*equazione costitutiva* per il fluido considerato.

L'equazione di stato, oltre alla densità ϱ ed alla temperatura τ locali, che sono già state definite nei paragrafi 4.1 e 4.8, coinvolge solo la pressione locale ed istantanea

$$p = p(\mathbf{x}, t),$$

che ne risulta definita di conseguenza. Visto il procedimento seguito nell'introdurre l'equazione di stato, la pressione p locale ed istantanea deve coincidere con il modulo degli sforzi normali presenti nel fluido in equilibrio.

Il tensore degli sforzi in seno ad un fluido in quiete assume dunque la forma isotropa

$$\mathbf{T} = p\mathbf{I},$$

con p precisato in base all'equazione di stato. L'origine sperimentale di questo risultato ne fa un'equazione costitutiva, di carattere meccanico, atta a descrivere il comportamento dei fluidi in condizioni di riposo.

Lo sforzo $\boldsymbol{\tau}$ ammette dunque l'espressione

$$\boldsymbol{\tau} = p\mathbf{n},$$

e le equazioni cardinali del moto

$$\int_V \rho \mathbf{f} dV + \int_A \boldsymbol{\tau} dA = \frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV$$

$$\int_V (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \rho \mathbf{f} dV + \int_A (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \boldsymbol{\tau} dA = \frac{D}{Dt} \int_V (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \rho \mathbf{v} dV,$$

introdotte nel paragrafo 4.5, si riducono rispettivamente alla

$$\int_V \rho \mathbf{f} dV + \int_A p \mathbf{n} dA = 0,$$

che viene detta *prima equazione cardinale della statica*, ed alla

$$\int_V (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \rho \mathbf{f} dV + \int_A (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge p \mathbf{n} dA = 0,$$

nota come *seconda equazione cardinale della statica*. Esse affermano che per un corpo fluido in condizioni statiche il risultante ed il momento risultante delle sollecitazioni esterne di massa sono equilibrati, nell'ordine, dal risultante e dal momento risultante degli sforzi di pressione applicati sulla sua superficie di contorno.

I procedimenti esposti nel paragrafo 4.7 consentono di dedurre dalle equazioni cardinali altrettante equazioni puntuali, purché ρ ed \mathbf{f} siano di classe C^0 , ed il tensore degli sforzi \mathbf{T} sia di classe C^1 . Si ottengono così la *prima equazione indefinita della statica*

$$\rho \mathbf{f} - \operatorname{div} \mathbf{T} = 0$$

e la *seconda equazione indefinita della statica*

$$T_{ik} = T_{ki}.$$

Poiché si ha

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = \operatorname{grad} p,$$

come si controlla subito operando sulle componenti, la prima equazione indefinita della statica può essere scritta anche nella forma

$$\rho \mathbf{f} = \operatorname{grad} p,$$

che ha carattere strettamente vettoriale.

Poiché il tensore degli sforzi \mathbf{T} è isotropo e non solo simmetrico, la seconda equazione indefinita della statica è sempre soddisfatta.

6.2. Le equazioni termiche della statica.

In condizioni statiche, per definizione, le velocità \mathbf{v} sono identicamente nulle, e l'assenza delle velocità rende nulli sviluppi e dissipazioni di potenza meccanica. Ciò comporta alcune semplificazioni sulla forma cardinale del primo principio della termodinamica

$$\frac{D}{Dt} \int_V \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) dV = \int_V \rho \mathbf{e} \mathbf{f} dV + \int_A \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA + \int_A \omega dA,$$

sulla definizione dell'entropia specifica

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho e dV = \int_V \frac{\rho \dot{h}_t}{T} dV + \int_V \frac{\rho \dot{h}_a}{T} dV,$$

e sulla forma cardinale del secondo principio della termodinamica

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho e dV > \int_A \frac{\omega}{T} dA,$$

quali sono state considerate nel paragrafo 4.8. Precisamente, valgono ora, nell'ordine, le formule

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho u dV = \int_A \omega dA,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho e dV = \int_V \frac{\rho \dot{h}_t}{T} dV,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho e dV > \int_A \frac{\omega}{T} dA.$$

Parallelemente a queste *forme cardinali delle equazioni termiche della statica* sussistono pure le corrispondenti equazioni indefinite, alle quali si giunge nel modo già visto al paragrafo 4.10, introducendo adeguate condizioni di continuità per le funzioni coinvolte. Nel caso presente è sufficiente che siano di classe C^1 la densità ρ , l'energia specifica interna u , l'entropia specifica e , la temperatura assoluta τ , e la densità del flusso di potenza termica ω , e che sia di classe C^0 l'assorbimento specifico di potenza termica \dot{h}_t . In queste condizioni, esiste il vettore densità di flusso

della potenza termica \mathbf{q} , che riesce anch'esso di classe C^1 , e sussistono le relazioni

$$\int_A \omega \, dA = \int_A \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} \, dA = - \int_V \operatorname{div} \mathbf{q} \, dV = \int_V \rho \dot{u} \, dV,$$

viste nel paragrafo 4.10. Inoltre, sempre sotto le stesse condizioni, si hanno le

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = - \operatorname{div} \mathbf{q}$$

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} = - \frac{\operatorname{div} \mathbf{q}}{\tau}$$

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} > - \frac{\operatorname{div} \mathbf{q}}{\tau} + \frac{\mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \tau}{\tau^2}$$

quali *forme indefinite delle equazioni termiche della statica*.

Esaurito l'esame dei principi generali, validi per tutti i mezzi continui, restano da specificare le caratteristiche del particolare materiale oggetto delle indagini, introducendo le relative equazioni costitutive.

Interessa qui il legame fra il valore locale del vettore \mathbf{q} esprime la densità del flusso della potenza termica ed il valore locale del gradiente della temperatura. Nella maggior parte dei casi di interesse tecnico i fluidi si comportano come mezzi isotropi rispetto alla propagazione della potenza termica, e si può perciò assumere che sia

$$\mathbf{q} = -k \operatorname{grad} \tau,$$

come proposto da Fourier nel 1822. Tale posizione è nota appunto come *equazione costitutiva di Fourier*. La grandezza k , che è l'equivalente nel campo dello schema continuo del coefficiente di conduttività termica introdotto nel paragrafo 2.8, può dipendere, per ciascun fluido, solo dalla pressione e dalla temperatura locali. Inserendo questa espressione di \mathbf{q} nella limitazione

$$-\mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \tau > 0,$$

che discende subito dal confronto fra le due ultime forme indefinite delle equazioni termiche della statica, si vede che k deve essere intrinsecamente non negativo: il flusso della potenza termica può dunque aver luogo solo nella direzione delle temperature decrescenti.

Unendo invece l'espressione di Fourier alla forma indefinita dell'equazione termica della statica relativa all'entropia, e supponendo che τ sia

di classe C^2 , anziché semplicemente di classe C^1 , si ottiene

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\operatorname{div}(k \operatorname{grad} \tau)}{\tau}$$

che si riduce alla

$$\rho \tau \frac{\partial e}{\partial t} = k \nabla^2 \tau$$

quando k è uniforme. L'entropia specifica, a sua volta, dipende dalla pressione e dalla temperatura: il suo differenziale totale, ricavato nel paragrafo 2.6, è

$$de = -\frac{\alpha}{\rho} dp + \frac{c_p}{T} d\tau$$

nel quale α e c_p indicano rispettivamente il coefficiente di dilatazione cubica, introdotto nel paragrafo 2.2, ed il calore specifico a pressione costante, introdotto in quello 2.6. Complessivamente si ha perciò l'equazione

$$-\alpha \tau \frac{\partial p}{\partial t} + \rho c_p \frac{\partial \tau}{\partial t} = k \nabla^2 \tau$$

per descrivere i fatti connessi con la conduzione del calore in un mezzo in quiete, che riesca isotropo ed uniforme nella dipendenza di \mathbf{q} da $\operatorname{grad} \tau$.

Come si è dedotto nel paragrafo 6.1, la densità deve risultare indipendente dal tempo, e si deve avere quindi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_\tau \frac{\partial p}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \tau} \right)_p \frac{\partial \tau}{\partial t} = \rho \beta \frac{\partial p}{\partial t} - \rho \alpha \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0,$$

intendendo con β il coefficiente di comprimibilità cubica del paragrafo 2.2. Tenuto conto anche della relazione fondamentale per il calore specifico a volume costante, c_v , ricavata nel paragrafo 2.6,

$$c_p - c_v = \frac{\tau \alpha^2}{\rho \beta},$$

l'equazione in esame assume la forma

$$\rho c_v \frac{\partial \tau}{\partial t} = k \nabla^2 \tau.$$

Quest'ultima forma è stata scritta da Fourier nel 1822, insieme a quella di partenza, e divide con la prima il nome di *equazione di Fourier*.

6.3. Equilibrio in presenza di forze di massa preassegnate.

Non tutti i campi di forze specifiche di massa \mathbf{f} possono dar luogo a stati di quiete. Come si è visto nel paragrafo 6.1, in condizioni statiche è valida l'equazione

$$\rho \mathbf{f} = \text{grad } p,$$

purché la densità ρ ed il campo \mathbf{f} siano continui, e la pressione p sia di classe C^1 . Così, per ciascuna linea chiusa e regolare L , che si sviluppi interamente in seno al fluido, si ha

$$\int_L \rho \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = \int_L \text{grad } p \cdot d\mathbf{x}.$$

Il secondo di questi integrali è evidentemente nullo: ne segue che deve essere pure

$$\int_L \rho \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = 0.$$

Ciò significa, data l'arbitrarietà di L , che moltiplicando il campo \mathbf{f} per la densità ρ si deve ottenere un campo conservativo. L'osservazione, nella sostanza, risale al 1743, ed è dovuta a Clairaut.

Valendosi del fatto che il campo $\rho \mathbf{f}$ è conservativo, si può costruire nella zona occupata dal fluido una grandezza W , associando ad ogni punto \mathbf{x} il valore dell'integrale di linea

$$\int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \rho \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$$

aumentato del valore $W(\mathbf{x}_0)$ imposto al punto fisso di partenza \mathbf{x}_0 . La funzione W così costruita, che è detta *pseudopotenziale* del campo \mathbf{f} , risulta di classe C^1 , ed univoca, in quanto non muta cambiando il percorso da \mathbf{x}_0 ad \mathbf{x} impiegato nel calcolo. Inversamente, si ha

$$\text{grad } W = \text{grad} \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \rho \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = \rho \mathbf{f}.$$

Quest'ultima relazione mostra che le *superfici di livello del pseudopotenziale* W sono ortogonali al vettore \mathbf{f} , oppure sono formate da punti nei quali \mathbf{f} è nullo. Confrontando la stessa relazione con quella

$$\text{grad } p = \rho \mathbf{f},$$

valida sotto le stesse ipotesi, si conclude che W e p possono differire, istante per istante, solo per un termine indipendente da x . Così, le superfici di livello del pseudopotenziale W sono anche superfici *isobare*, ossia luoghi di pressione uniforme, e viceversa.

Fermo restando l'assetto delle forze specifiche di massa, possono sussistere stati di equilibrio, oltre che con il campo ϱ delle densità, anche con differenti distribuzioni $\bar{\varrho}$ della densità stessa. Tuttavia, il nuovo pseudopotenziale \bar{W} deve presentare superfici di livello coincidenti con quelle del pseudopotenziale primitivo W , anche se contraddistinte ora da nuovi valori \bar{W} . La funzione $\bar{\varrho}f$ per la quale si vuole costruire il pseudopotenziale \bar{W} deve perciò essere proporzionale alla funzione di partenza ϱf su ciascuna superficie di livello del pseudopotenziale W di quest'ultima. Se ne deduce che le distribuzioni di densità compatibili con lo stato di quiete nel campo f assegnato sono soltanto quelle del tipo $\bar{\varrho} = \varrho f(W)$, con $f(W)$ di classe C^0 .

Nelle applicazioni correnti, i campi f sono continui ed ammettono *potenziale univoco*

$$\phi = \int_{x_0}^x f \cdot dx + \phi(x_0)$$

che risulta quindi di classe C^1 . Si ha dunque, identicamente,

$$\text{grad } \phi = f.$$

Sotto l'azione di campi di forze specifiche di massa così caratterizzati è possibile anche uno stato di equilibrio per un fluido avente densità ϱ uniforme. Il pseudopotenziale vale allora

$$W = \int_{x_0}^x \varrho f \cdot dx + W(x_0) = \varrho \int_{x_0}^x f \cdot dx + W(x_0)$$

e le sue superfici di livello coincidono con le superfici di livello del potenziale ϕ . Se ne conclude che le *superfici equipotenziali* sono anche *isobare*.

Inoltre, tutte le distribuzioni di densità che possono dar luogo a stati di quiete sono necessariamente del tipo $\bar{\varrho} = f(\phi)$, con $f(\phi)$ di classe C^0 . Le superfici di livello del pseudopotenziale, oltre che isobare, sono ora anche *isopicnotiche*, e cioè luoghi di densità uniforme. In particolare, le superfici di separazione tra fluidi differenti sono superfici equipotenziali. Infine, giusta l'equazione di stato

$$\varrho = \varrho(p, \tau),$$

le superfici in questione sono anche *isoterme*, nel senso che su di esse la temperatura assume valori uniformi.

Sempre in presenza di campi di forze specifiche di massa dotati di potenziale, l'equazione

$$\rho \mathbf{f} = \text{grad } p$$

avverte che anche l'espressione $\rho^{-1} \text{grad } p$ deve ammettere potenziale.

Quest'ultimo fatto si manifesta certamente quando la pressione è uniforme, quale che sia l'assetto delle densità.

Se la pressione non è uniforme, $\text{grad } p$ è un campo vettoriale continuo, non identicamente nullo, e dotato di potenziale p . Perciò, quando la densità è uniforme, $\rho^{-1} \text{grad } p$ ammette potenziale $\rho^{-1} p$, con superfici di livello isobare. La stessa espressione $\rho^{-1} \text{grad } p$ può ammettere potenziale anche con altre distribuzioni della densità, ma le superfici di livello del nuovo potenziale devono ancora risultare ortogonali a $\text{grad } p$, e devono quindi sovrapporsi alle superfici di livello del potenziale relativo al caso di densità uniforme. Ne segue che queste nuove distribuzioni di densità sono soltanto quelle del tipo $\tilde{\rho} = f(p)$, con $f(p)$ di classe C^0 .

Complessivamente, le tre situazioni che portano all'esistenza del potenziale per l'espressione $\rho^{-1} \text{grad } p$ sono quella di pressione uniforme, quella di densità uniforme, e quella di legame diretto fra densità e pressione. Esse vengono riassunte dicendo che deve esistere una relazione funzionale

$$f(\rho, p, t) = 0$$

e che l'assetto del fluido deve essere *barotropico*.

Il potenziale di $\rho^{-1} \text{grad } p$, a parte il solito inessenziale addendo indipendente da \mathbf{x} , può essere scritto come

$$\int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \frac{1}{\rho} \text{grad } p \cdot d\mathbf{x} = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho}$$

ove p_0 e p sono le pressioni vigenti nel punto fisso \mathbf{x}_0 e nel punto generico \mathbf{x} . Tale forma porge appunto

$$\text{grad} \int \frac{dp}{\rho} = \left(\frac{\partial}{\partial p} \int \frac{dp}{\rho} \right) \text{grad } p = \frac{1}{\rho} \text{grad } p$$

come richiesto.

Di conseguenza, l'equazione

$$\rho \mathbf{f} = \text{grad } p$$

equivale a quella

$$\text{grad} \left(\phi - \int \frac{dp}{\rho} \right) = 0$$

tutte le volte che le forze specifiche di massa ammettono il potenziale ϕ .

Concluso l'esame delle condizioni statiche, resta da verificare la *stabilità* degli assetti di equilibrio individuati. Si tratta di accertare che, una volta modificata la distribuzione delle densità rispetto a quella indicata dalle condizioni di equilibrio, si determini nel fluido un moto tale da riportarlo nella situazione di partenza. Data la difficoltà che presenta la risoluzione del problema così formulato, ci si accontenta usualmente di un esame meno approfondito, tendente a stabilire soltanto se le forze agenti sul fluido, abbandonato con una distribuzione delle densità perturbata, ma con velocità identicamente nulle, provochino in esso un primo atto di moto verso l'assetto di equilibrio iniziale.

Se, in seguito agli spostamenti operati nella massa fluida, l'integrale di linea

$$\int_L \rho \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x},$$

esteso a circuiti chiusi L opportunamente scelti, riesce diverso da zero, la configurazione perturbata non potrà più costituire uno stato di equilibrio. Ammesso che, almeno in assenza di velocità, il tensore degli sforzi si mantenga isotropo, il fluido, una volta abbandonato all'azione delle forze di massa, manifesterà un moto iniziale comprendente almeno una componente circolatoria lungo L , con verso concorde a quello che rende positivo l'integrale in questione.

Se si fissa ora l'attenzione su un circuito L che intersechi più superfici di livello del pseudopotenziale W , e se si pensa di effettuare una ridistribuzione delle densità per scorrimento del fluido lungo le superfici di livello di W , si vede che il valore dell'integrale di linea risulta, di solito, alterato, evidenziando la presenza lungo L di forze capaci di indurre nel fluido un atto di moto iniziale differente da quello richiesto per compensare la perturbazione imposta. In questo senso, gli assetti statici di fluidi in campi di forze specifiche di massa dotati di pseudopotenziale devono essere considerati, come norma, in equilibrio instabile.

Invece, se il campo \mathbf{f} ammette non solo il pseudopotenziale W , ma anche il potenziale ϕ , lo spostamento di fluido lungo le superfici equipotenziiali, che sono anche isobare, isopicnotiche ed isoterme, porta a nuove configurazioni statiche, e perciò gli assetti di partenza sono da giudicarsi di equilibrio indifferente rispetto a queste perturbazioni. Il risultato muta,

in generale, quando si fa riferimento ad altri tipi di perturbazioni. Così, se si impone una circolazione di fluido lungo un anello L non appartenente tutto ad una stessa superficie di livello per la ϕ , l'integrale di linea

$$\int_L \rho \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$$

condotto nello stesso verso della circolazione impressa risulta negativo o positivo a seconda che la distribuzione iniziale $\rho(\phi)$ delle densità sia, nell'ordine, crescente o decrescente con ϕ , mostrando che l'assetto di equilibrio di partenza è stabile, oppure instabile, rispettivamente. Per contro, il caso limite di ρ inizialmente uniforme, come potrebbe essere in concomitanza a particolari influenze della temperatura e della pressione, si rileva uno stato di equilibrio indifferente rispetto a circolazioni di questo genere, sempre che tutto il fluido considerato risulti soggetto alla medesima equazione di stato.

6.4. Equilibrio nel campo del geopotenziale.

Nei fluidi, gli stati di equilibrio che avvengono presso la superficie terrestre si presentano spesso su estensioni molto limitate rispetto al raggio della terra, e come fenomeni di quiete rispetto alla terra stessa. Il campo delle forze specifiche di massa, \mathbf{f} , può perciò assumersi uniforme e permanente in tutto lo spazio in esame, e pari all'accelerazione locale \mathbf{g} , già considerata nel paragrafo 1.4.

Al solito, la direzione di \mathbf{g} fissa per definizione la direzione verticale, il verso opposto a quello di \mathbf{g} l'orientamento verso l'alto, mentre i piani normali a \mathbf{g} vengono detti orizzontali. Adottato ora un riferimento cartesiano ortogonale con l'asse z verticale e diretto verso l'alto, si può descrivere il campo \mathbf{f} con la scrittura

$$\mathbf{f} = -g \text{ grad } z$$

ed esprimerne il potenziale nella forma

$$\phi = -gz,$$

trascurando l'inessenziale addendo indipendente da z .

I risultati generali esposti nei paragrafi che precedono sono adattabili immediatamente a questo particolare assetto del campo \mathbf{f} : si vede così che i piani orizzontali, per essere superfici di livello del potenziale ϕ , sono anche superfici isobare, isopicnotiche ed isoterme. Le superfici di separa-

zione tra fluidi differenti sono superfici orizzontali, ed orizzontali sono, in particolare, i *peli liberi*, ossia quelle superfici che dividono liquidi da aeriformi. Pressione p , densità ρ e temperatura τ possono mutare nello spazio solo con il variare della *quota geodetica* z . La distribuzione verticale di queste grandezze è descritta dall'equazione puntuale della statica, $\text{grad } p = \rho \mathbf{f}$, ormai ridotta a

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g,$$

dall'equazione di stato

$$\rho = \rho(p, \tau)$$

e dall'equazione di Fourier, che va scritta qui nella forma

$$\rho c_v \frac{\partial \tau}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2}.$$

Pressioni e temperature locali possono mutare nel tempo, anche se i loro cambiamenti sono reciprocamente vincolati dal fatto che non debbono condurre a variazioni temporali della densità.

Al solo fine del calcolo delle pressioni, risulta spesso sufficiente assumere che la densità si mantenga costante al variare della pressione e della temperatura. Tale schema è senz'altro applicabile a piccole masse d'acqua in equilibrio presso la superficie terrestre, e ciò giustifica il nome di *distribuzione idrostatica delle pressioni* all'andamento delle pressioni fornito dall'ipotesi che ρ sia uniforme.

Integrando ora l'equazione

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g = -\gamma$$

dalla quota z_0 , alla quale regna una pressione p_0 assegnata, ad altra quota z , ove esiste la pressione incognita p , nell'ipotesi che il percorso di integrazione si sviluppi in una zona occupata con continuità da fluido di peso specifico γ uniforme, si ha subito che

$$p - p_0 = -\gamma(z - z_0).$$

Il risultato ottenuto viene espresso usualmente dicendo che la quantità

$$z + \frac{p}{\gamma}$$

mantiene lo stesso valore in tutti i punti di una massa fluida che abbia peso specifico uniforme e che si trovi in equilibrio sotto l'azione del campo

del geopotenziale. L'utilità pratica di questa grandezza è tale da giustificare l'introduzione di una terminologia dettagliata. Si dice così che il rapporto

$$\frac{p}{\gamma}$$

fra pressione e peso specifico costituisce l'*altezza rappresentatrice della pressione* p in colonna di fluido di peso specifico γ , e si chiama *carico piezometrico* h la sua somma con la quota geodetica z :

$$h = z + \frac{p}{\gamma}.$$

Il carico piezometrico riesce unico per tutta la massa fluida di peso specifico uniforme, e risulta fissato una volta stabilita la pressione p_0 in un punto di quota z_0 , scelto nella massa stessa. L'aver escluso ogni influenza della pressione sulla densità consente di variare arbitrariamente nel tempo la pressione p_0 nel punto z_0 : pressione e carico piezometrico variano di conseguenza in modo uniforme e contemporaneo in tutta la massa fluida. Il risultato ora esposto costituisce la *legge di Pascal*, ed è stato enunciato nel 1662.

Esiste sempre un piano orizzontale, eventualmente esterno alla zona occupata dal fluido, di quota pari al carico piezometrico, che viene detto *piano delle pressioni nulle*, perché si riscontra pressione uguale a zero sulla sua intersezione con la massa fluida. Se ad un generico punto del fluido si associa il suo *affondamento* ζ , ossia la differenza tra la quota del piano delle pressioni nulle e la quota del punto stesso, si può anche dire che la pressione in un punto vale il prodotto del suo affondamento per il peso specifico del fluido:

$$p = \gamma \zeta.$$

In molte applicazioni tecniche correnti, il fluido è allo stato liquido e presenta un pelo libero a contatto con l'atmosfera. Quando si mette in evidenza la pressione relativa, e cioè l'eccesso di pressione su quella atmosferica, anziché il valore della pressione assoluta realmente presente, al piano del pelo libero compete pressione nulla. Come illustrato in figura 6.1, il carico piezometrico coincide allora con la quota del pelo libero, e l'affondamento di un punto con la sua profondità.

Definizioni e concetti ora esposti non sono applicabili all'insieme di più fluidi non miscibili sovrapposti. Sussiste ancora l'uniformità del carico piezometrico in seno a ciascun fluido, ma, per la continuità della pressione attraverso le varie superfici orizzontali di contatto tra fluidi di diverso

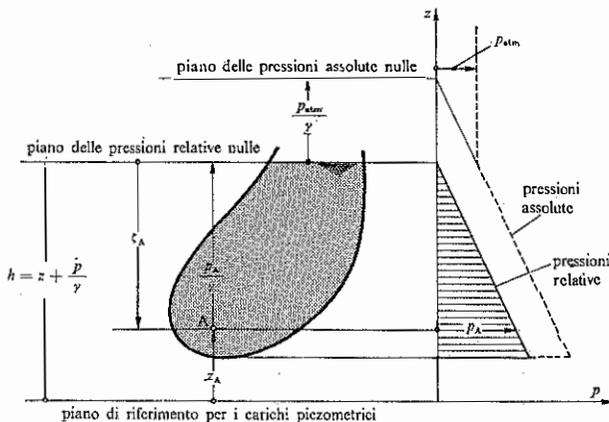


Fig. 6.1. - In seno ad una massa fluida di peso specifico γ uniforme, in equilibrio nel campo del geopotenziale, il carico piezometrico h , somma della quota z e dell'altezza p/γ rappresentatrice della pressione p , è uniforme. La pressione p cresce linearmente con l'affondamento ζ .

peso specifico, non può aversi uniformità del carico piezometrico in tutta la massa. Contemporaneamente, risultano distinti i piani delle pressioni nulle relativi ai singoli fluidi, come indicato nella figura 6.2. L'unicità del valore del carico piezometrico e del piano delle pressioni nulle si ripresenta solo nel caso di due fluidi sovrapposti, quando si assegni valore nullo alla pressione presente sull'interfaccia.

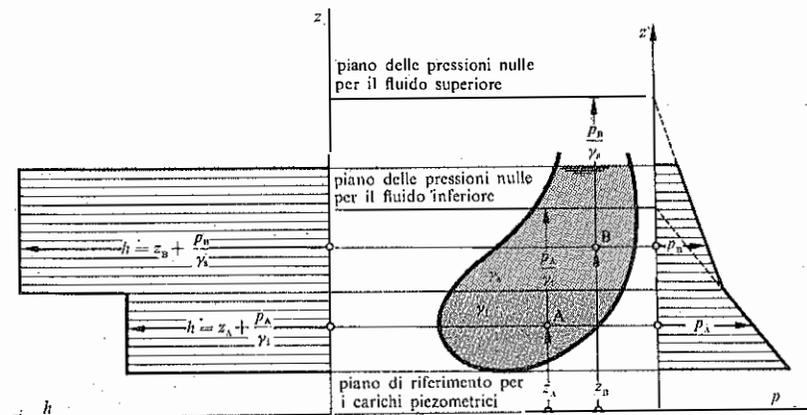


Fig. 6.2. - Il carico piezometrico h è discontinuo attraverso un piano di separazione di fluidi in equilibrio sovrapposti. La pressione, per contro, è continua.

Una stima dell'accuratezza dei risultati conseguiti con l'ipotesi di densità uniforme può essere fornita dal confronto con la distribuzione di pressione compatibile con particolari dipendenze della densità dalla pressione o dalla temperatura.

Così, se il fluido è isoterma e presenta modulo di comprimibilità

$$\varepsilon_T = \varrho \left(\frac{\partial \varrho}{\partial p} \right)_T$$

costante, la densità varia con la pressione secondo la legge

$$\varrho = \varrho_0 \exp \left(\frac{p - p_0}{\varepsilon_T} \right)$$

nella quale ϱ_0 indica la densità alla pressione p_0 . Integrando l'equazione

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\varrho g = -\varrho_0 g \exp \left(\frac{p - p_0}{\varepsilon_T} \right)$$

si ha immediatamente che

$$p = p_0 - \varepsilon_T \ln \left[1 - \frac{\varrho_0 g (z_0 - z)}{\varepsilon_T} \right]$$

ove z_0 sta per la quota alla quale la pressione vale p_0 . In particolare, assunto $z_0 - z = 1000$ m, $g = 9,81$ m s⁻², e posto $\varrho_0 = 1000$ kg m⁻³, $\varepsilon_T = 2,1 \cdot 10^9$ N m⁻², come può essere per l'acqua, risulta $p - p_0 = 9,833 \cdot 10^6$ N m⁻², con un eccesso del 2,3% rispetto al valore $p - p_0 = 9,810 \cdot 10^6$ N m⁻² che si sarebbe ottenuto ritenendo ϱ costantemente uguale a ϱ_0 .

Ammettendo invece che la densità del fluido sia influenzata solo dalla temperatura, e che il coefficiente di dilatazione cubica

$$\alpha = -\frac{1}{\varrho} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial T} \right)_p$$

risulti costante, in corrispondenza ad una caduta di ΔT K per ogni metro di quota perduta si ha

$$\varrho = \varrho_0 [1 + \alpha \Delta T (z_0 - z)].$$

Ne segue

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\varrho g = -\varrho_0 g [1 + \alpha \Delta T (z_0 - z)],$$

che porge subito

$$p = p_0 + \varrho_0 g (z_0 - z) \left[1 + \frac{\alpha \Delta T}{2} (z_0 - z) \right],$$

se alla quota z_0 , ove la densità vale ρ_0 , regna pressione p_0 . Per $\alpha = 0,0003 \text{ K}^{-1}$, come può essere in un liquido, e con un calo complessivo della temperatura τ , connesso alla perdita di quota $z_0 - z$, pari a 50 K, la pressione risulta maggiore del 7,5% rispetto a quella stimata con lo schema idrostatico assumendo la densità uniformemente uguale a ρ_0 .

Valutazioni analoghe possono essere istituite anche per fluidi allo stato aeriforme, ricorrendo all'equazione di stato

$$pV = \frac{Mg}{N} \tau.$$

Se si pongono qui in evidenza la densità ρ_0 , la pressione assoluta p_0 , e la temperatura Kelvin τ_0 vigenti al livello z_0 , anziché la massa M del volume V e la massa per kilomole N , si ha

$$\rho = \rho_0 \frac{\tau_0}{\tau} \frac{p}{p_0}.$$

Assunto ora che la temperatura si mantenga costante, l'integrazione della

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g = -\frac{\rho_0 g}{p_0} p$$

porta a

$$p = p_0 \exp \left[\frac{\rho_0 g}{p_0} (z_0 - z) \right].$$

Invece, quando la temperatura subisce un calo di $\Delta \tau$ K per ogni metro di riduzione della quota, la legge meccanica di base assume la forma

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g = -\frac{\rho_0 g}{p_0} \frac{p}{1 - \frac{\Delta \tau}{\tau_0} (z_0 - z)},$$

il cui integrale è

$$p = p_0 \left[1 - \frac{\Delta \tau}{\tau_0} (z_0 - z) \right]^{-\left(\frac{\rho_0 g \tau_0}{p_0 \Delta \tau} \right)}.$$

In particolare, posto $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$, $\rho_0 = 1,225 \text{ kg m}^{-3}$ e $p_0 = 101\,325 \text{ N m}^{-2}$, dopo un aumento di quota geodetica $z - z_0 = 1\,000 \text{ m}$ si arriverebbe alla pressione $p = 89\,308 \text{ N m}^{-2}$, se la densità rimanesse costante. Invece, in condizioni isotermeche, il calcolo condotto tenendo conto dell'effetto della pressione sulla densità dà $p = 89\,993 \text{ N m}^{-2}$, evidenziando una stima maggiore del 7,7% rispetto al valore dedotto nell'ipotesi di ρ uniforme. Inoltre, assunto $\tau_0 = 288,15 \text{ K}$, ed ammesso un aumento complessivo di tem-

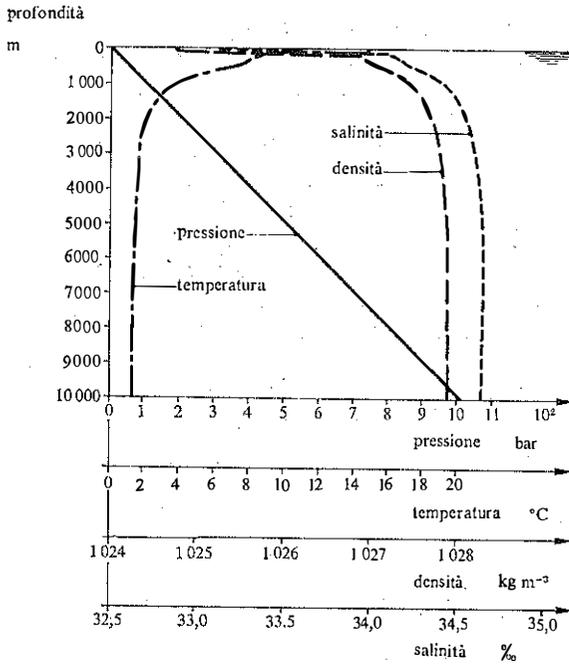


Fig. 6.3. - Caratteristiche tipiche di acque oceaniche tropicali.

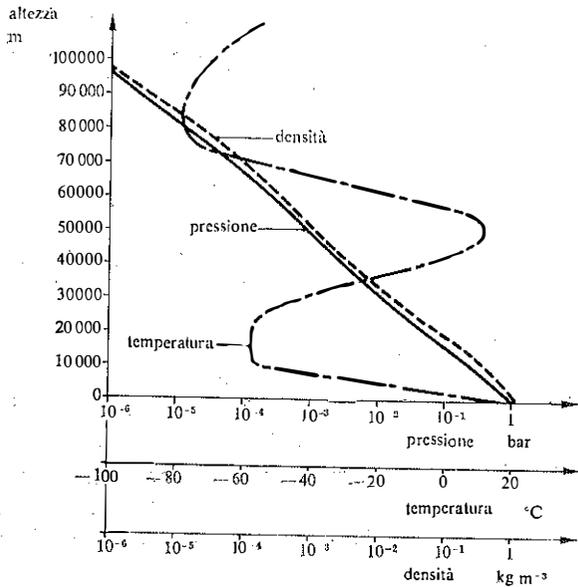


Fig. 6.4. - Caratteristiche tipiche dell'atmosfera.

peratura $\Delta T(z-z_0)$ pari a 50 K, si ha $p = 90828 \text{ N m}^{-2}$. in queste condizioni il risultato ottenuto supera il valore idrostatico del 17,0%.

Lo schema idrostatico è dunque di norma ampiamente sufficiente al calcolo della distribuzione delle pressioni, e per questo motivo, in seguito, le considerazioni verranno limitate al caso di un solo fluido, od al più di due fluidi sovrapposti, ciascuno dei quali avente densità uniforme, anche se i risultati potrebbero essere immediatamente generalizzati per tener conto di distribuzioni più complesse della densità. Resta comunque inteso che le influenze della temperatura e della pressione possono riuscire a volte molto importanti, come nel caso in cui determinano densità crescenti con la quota, e conseguenti fenomeni di instabilità del tipo esaminato nel paragrafo 6.3.

A conclusione di questa serie di esami particolari, si riportano, nelle figure 6.3 e 6.4, alcuni dati caratteristici sulle due masse fluide più vistose presenti presso la superficie della terra: l'idrosfera e l'atmosfera.

6.5. Forze idrostatiche contro superfici piane.

Si considera una superficie che giace su un piano inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale, come indicato in figura 6.5, e che ha una delle sue facce Ω a contatto con un fluido di peso specifico γ uniforme.

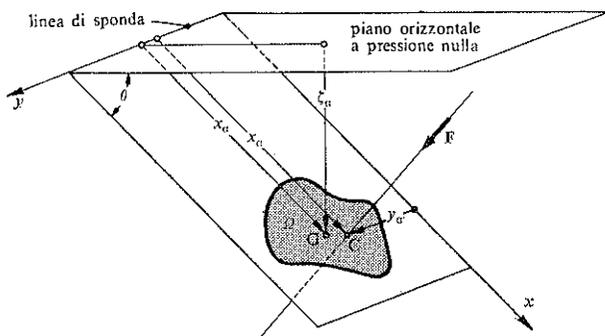


Fig. 6.5. - Calcolo del risultante degli sforzi di pressione idrostatica contro una superficie piana.

La pressione idrostatica nel fluido applica localmente alla faccia Ω sforzi normali, orientati verso di essa dall'interno del fluido, che hanno modulo $p = \gamma \zeta$, ove ζ indica l'affondamento del punto in esame. La spinta complessiva F dovuta a tali sforzi di pressione è perciò ortogonale

ad Ω , diretta contro la Ω stessa, ed ha modulo

$$F = \int_{\Omega} p \, d\Omega = \int_{\Omega} \gamma \zeta \, d\Omega = \gamma \int_{\Omega} \zeta \, d\Omega .$$

Chiamando

$$\zeta_G = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \zeta \, d\Omega$$

l'affondamento del *baricentro* G dell'area Ω , si ha pure

$$F = \gamma \zeta_G \Omega .$$

Questa scrittura mostra chiaramente che il modulo della spinta vale il prodotto dell'area Ω per la pressione $p_G = \gamma \zeta_G$ esistente nel baricentro G, qualunque sia la giacitura di Ω .

Resta da determinare la retta d'azione della spinta. Essa viene abitualmente individuata dalla sua intersezione con il piano della superficie in esame, punto al quale si dà il nome di *centro di spinta*. È comodo riferire tale punto a coordinate cartesiane x ed y , la prima fissata lungo una retta di massima pendenza del piano che contiene Ω , con origine sul piano a pressione nulla e con verso positivo individuato da affondamenti crescenti, la seconda predisposta lungo la *linea di sponda*, e cioè lungo l'intersezione del piano passante per Ω con il piano orizzontale delle pressioni nulle. Rispetto a questi assi, le coordinate x_o ed y_o del centro di spinta C risultano dalle uguaglianze

$$x_o \int_{\Omega} p \, d\Omega = \int_{\Omega} p x \, d\Omega$$

$$y_o \int_{\Omega} p \, d\Omega = \int_{\Omega} p y \, d\Omega$$

esprimenti il fatto che F deve essere equivalente al risultante dell'insieme di spinte parziali relativo a qualsiasi decomposizione di Ω , e deve quindi presentare momenti intorno agli assi coordinati uguali alla somma di quelli delle spinte parziali. Poiché è $p = \gamma \zeta = \gamma x \sin \theta$, si ha subito

$$x_o = \frac{\int_{\Omega} x^2 \, d\Omega}{\int_{\Omega} x \, d\Omega}$$

$$y_o = \frac{\int_{\Omega} x y \, d\Omega}{\int_{\Omega} x \, d\Omega}$$

e quindi x_c vale il rapporto fra il momento di inerzia ed il momento statico dell'area Ω , calcolati entrambi rispetto alla linea di sponda, mentre y_c è dato dal rapporto del momento centrifugo di Ω rispetto agli assi x ed y al momento statico di Ω rispetto alla linea di sponda. È evidente che la posizione del centro di spinta non muta al ruotare del piano per la Ω intorno alla linea di sponda, ed è facile osservare che C presenta un affondamento maggiore di ζ_a : indicata con x_a la coordinata x correlata al baricentro, si ha

$$\int_{\Omega} x \, d\Omega = x_a \int_{\Omega} d\Omega$$

e

$$\int_{\Omega} x^2 \, d\Omega = \int_{\Omega} [x_a + (x - x_a)]^2 \, d\Omega = x_a^2 \int_{\Omega} d\Omega + \int_{\Omega} (x - x_a)^2 \, d\Omega,$$

per cui

$$x_c = x_a + \frac{\int_{\Omega} (x - x_a)^2 \, d\Omega}{x_a \int_{\Omega} d\Omega} > x_a.$$

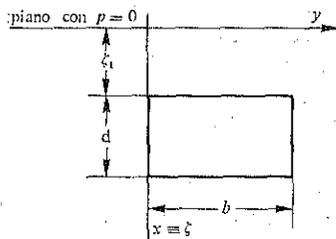
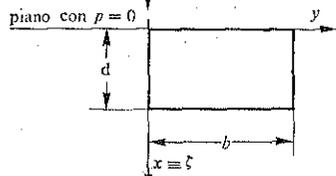
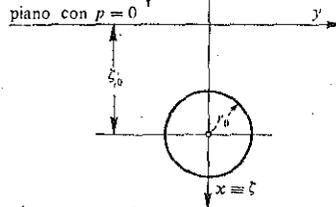
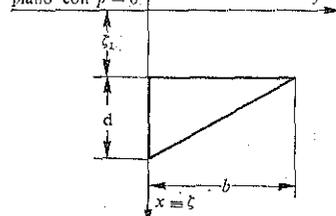
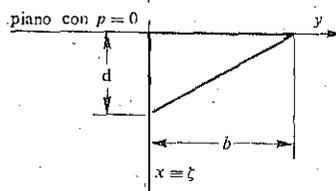
I calcoli ora svolti per determinare la posizione del centro di spinta cadono in difetto quando la linea di sponda è impropria, ossia quando il piano di Ω è parallelo a quello delle pressioni nulle. Ma in questo caso la pressione su Ω è uniforme, ed il centro di spinta coincide con il baricentro di Ω .

Ed ancora, il procedimento non è utilizzabile quando, a seguito della scelta del valore di riferimento per le pressioni, il piano di pressione nulla passa per il baricentro dell'area Ω , fermo restando il fatto che tutta Ω è a contatto con il fluido di peso specifico γ . In questa circostanza la spinta globale è nulla: la porzione di Ω sottostante al piano delle pressioni nulle è sollecitata da una forza di compressione, mentre la parte sovrastante subisce una trazione di pari intensità. Le due forze, che costituiscono insieme una coppia, possono sempre essere determinate singolarmente con il metodo esposto.

Merita infine ricordare che ad un incremento uniforme p_0 delle pressioni corrisponde una nuova spinta di modulo $p_0 \Omega$, diretta dal fluido verso Ω , con retta d'azione normale alla Ω stessa e passante per il suo baricentro.

La tabella 6.1 raccoglie i risultati relativi alle superfici piane e verticali considerate con maggior frequenza.

TABELLA 6.1. — Risultante degli sforzi di pressione idrostatica contro superfici piane verticali.

Superficie in esame	Profondità del baricentro ζ_0	Coordinate del centro di pressione		Modulo della spinta risultante F
		x_0	y_0	
<p>piano con $p = 0$</p> 	$\zeta_1 + \frac{d}{2}$	$\zeta_1 + \frac{d}{2} + \frac{1}{12} \frac{d^2}{\zeta_1 + \frac{d}{2}}$	$\frac{b}{2}$	$\gamma b d \left(\zeta_1 + \frac{d}{2} \right)$
<p>piano con $p = 0$</p> 	$\frac{d}{2}$	$\frac{2}{3} d$	$\frac{b}{2}$	$\frac{1}{2} \gamma b d^2$
<p>piano con $p = 0$</p> 	ζ_0	$\zeta_0 + \frac{r_0^2}{4\zeta_0}$	0	$\gamma \pi r_0^2 \zeta_0$
<p>piano con $p = 0$</p> 	$\zeta_1 + \frac{d}{3}$	$\zeta_1 + \frac{d}{3} + \frac{1}{18} \frac{d^2}{\zeta_1 + \frac{d}{3}}$	$\frac{1}{3} b \frac{\zeta_1 + \frac{d}{4}}{\zeta_1 + \frac{d}{3}}$	$\frac{1}{2} \gamma b d \left(\zeta_1 + \frac{d}{3} \right)$
<p>piano con $p = 0$</p> 	$\frac{d}{3}$	$\frac{d}{2}$	$\frac{b}{4}$	$\frac{1}{6} \gamma b d^2$

6.6. Forze idrostatiche contro superfici gobbe.

Il caso più semplice di superficie gobba è quello della superficie chiusa: se la parete è completamente circondata da fluido di peso specifico γ uniforme, il calcolo della sollecitazione complessiva è immediato. Si può pensare infatti di rimuovere la parete solida e di riempire il volume V compreso entro la sua superficie esterna A con fluido dello stesso peso specifico γ senza che queste operazioni alterino lo stato di quiete del fluido esterno, o modifichino le pressioni in esso vigenti, ed originariamente applicate alla superficie A della parete solida. Ma il risultante di queste sollecitazioni può essere ora calcolato in base alle equazioni cardinali della statica: la spinta complessiva esercitata dal fluido esterno è diretta verso l'alto, ha retta d'azione passante per il baricentro di V , ed è pari, in modulo, a γV , ossia, come si dice comunemente, è pari al peso di un volume V di fluido. Il risultato costituisce la *legge di Archimede*, enunciata nel terzo secolo a. C.

Per valutare la spinta complessiva che un fluido trasmette a ciascuna faccia A di una superficie aperta e non piana conviene determinare separatamente il modulo e la retta d'azione delle spinte esercitate lungo la verticale e lungo due direzioni orizzontali.

Allo scopo di calcolare la spinta in direzione verticale, si costruisce, come indicato nella figura 6.6, un cilindro con generatrici verticali poggiate sulla curva L che forma il contorno di A . Il volume V racchiuso fra tale cilindro, la superficie A ed il piano delle pressioni nulle può consi-

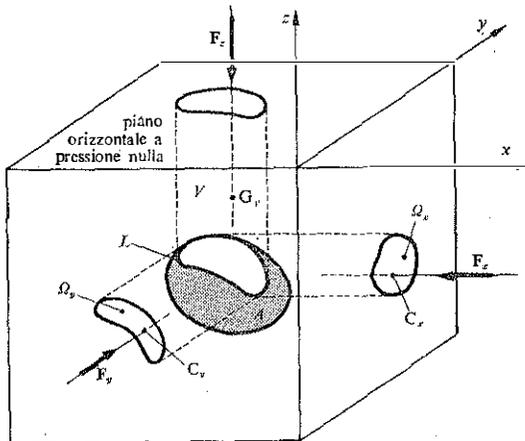


Fig. 6.6. - Decomposizione e calcolo delle spinte idrostatiche contro una superficie gobba.

derarsi totalmente occupato da fluido di peso specifico γ , senza che questa convenzione alteri la distribuzione locale delle pressioni agenti su A . La massa di fluido contenuta in V resta in equilibrio, ed è quindi assoggettata a forze con risultante verticale nullo. A comporre tale risultante concorrono solo la forza peso γV , e la spinta verticale esercitata attraverso la superficie gobba A , perché il contributo delle pressioni lungo le pareti del cilindro è nullo, e perché è intrinsecamente nulla la sollecitazione applicata sul piano delle pressioni nulle. Ne segue che la spinta verticale F_z esercitata dal fluido interno a V sulla faccia contigua della superficie data è uguale al peso del fluido interno: vale quindi γV , ha retta d'azione passante per il baricentro G_V di V , ed è diretta verso il basso.

Un ragionamento analogo consente di calcolare la spinta lungo ciascuna delle due direzioni orizzontali prescelte. Occorre qui costruire un cilindro, con generatrici parallele alla direzione x in esame e con direttrice il bordo di A , ed intersecarlo perpendicolarmente con un piano. Ancora una volta il volume delimitato da A , dal cilindro e dal piano usato per l'intersezione può essere pensato completamente invaso da fluido di peso specifico γ , perché questo non influisce sulla distribuzione delle pressioni contro A . Dato che la massa interna di fluido è in equilibrio, essa deve trovarsi sollecitata da forze complessivamente nulle. In particolare, nella direzione x , il contributo delle pressioni agenti lungo le pareti del cilindro è nullo, e quindi la spinta applicata attraverso la superficie piana di intersezione Ω_x deve risultare uguale alla componente in direzione x della sollecitazione esercitata dal fluido interno sulla superficie gobba. La spinta F_x richiesta presenta dunque modulo $\gamma \zeta_{G_x} \Omega_x$, se ζ_{G_x} ed Ω_x indicano rispettivamente l'affondamento del baricentro e l'area della superficie piana di intersezione, ed ha retta d'azione passante per il centro di spinta C_x della Ω_x .

Nell'espone il procedimento da seguire per valutare le spinte in direzione verticale si è ammesso implicitamente che i volumi presi in considerazione costituissero domini semplicemente connessi. In realtà può però presentarsi il caso in cui la superficie cilindrica costruita per il calcolo e la superficie gobba data si intersechino a vicenda anche lungo una curva distinta dal bordo di A . In situazioni di questo genere le considerazioni svolte rimangono valide purché si convenga di attribuire segno negativo alla porzione di volume V che risulta racchiusa da superfici intrecciate e contigua alla faccia della superficie in esame opposta a quella A sulla quale si vuole valutare l'azione esercitata dal fluido.

Può anche accadere, a seguito della scelta della pressione di riferimento, che il piano delle pressioni nulle intersechi A o ne sia tutto più basso. Riguardo alla stima delle spinte orizzontali, già ridotte al calcolo

di spinte contro superfici piane, non vi è nulla da aggiungere a quanto già detto in proposito nel paragrafo precedente. Invece, nel determinare la spinta verticale, occorre operare un ulteriore cambiamento di segno per quelle porzioni di V che sovrastano il piano delle pressioni nulle.

In generale le tre spinte F_x , F_y , ed F_z presentano rette d'azione reciprocamente sghembe, oppure due di esse risultano complanari ma danno luogo ad una spinta risultante sghemba con la terza. Non è perciò possibile, di norma, rappresentare le tre spinte con un solo vettore: al loro risultante deve essere associato anche un momento risultante.

Di solito si preferisce evitare l'introduzione del momento, e rappresentare l'insieme delle tre spinte con due soli vettori, uno verticale ed uno orizzontale. Ove le due spinte F_x ed F_y non siano complanari, per essere diversi gli affondamenti ζ_{Cx} e ζ_{Cy} dei centri di spinta delle due sezioni rette Ω_x ed Ω_y , occorre renderle tali trasladando una di esse parallelamente a se stessa in direzione verticale. Ciò fatto, le due spinte possono venir composte fra loro per fornire l'unica spinta orizzontale richiesta. Naturalmente la traslazione verticale effettuata richiede l'introduzione di una coppia con asse momento orizzontale: questa a sua volta deve essere composta con la F_z , e ciò dà luogo ad uno spostamento parallelo in direzione orizzontale della stessa F_z , con conseguente allontanamento della sua retta d'azione dal baricentro di V .

6.7. Equilibrio di corpi immersi o galleggianti.

Un corpo immerso è soggetto sempre sia al peso proprio, di modulo P , diretto verticalmente verso il basso e passante per il baricentro G del corpo stesso, sia alla spinta di sostentamento, dovuta al fluido circostante e calcolabile in base ai risultati del paragrafo precedente, ma può trovarsi sottoposto anche ad altre azioni esterne. Il corpo risulta in equilibrio quando tutte queste sollecitazioni ammettono risultante e momento risultante nulli.

Così, se il corpo è totalmente immerso, ossia completamente circondato dal fluido, la spinta di sostentamento, verticale e diretta verso l'alto, vale il prodotto del peso specifico γ del fluido per il volume d'ingombro V del corpo, che si indica con il nome di *volume di carena*. Tale spinta passa per il baricentro C di V , detto anche *centro di carena*. In condizioni di equilibrio deve essere $P = \gamma V$, mentre C e G devono trovarsi sulla stessa verticale.

Il corpo immerso può però trovarsi a contatto con il fondo o con

altra parete solida diversamente disposta. In tal caso parte della superficie A del corpo è sottratta al contatto con il fluido e l'azione di questo va calcolata considerando solo la parte rimanente di A , che costituisce pertanto una superficie gobba aperta. Può così accadere che un corpo di peso specifico medio inferiore a quello del fluido circostante resti in equilibrio a contatto con il fondo, purché l'affondamento medio della superficie di contatto sia sufficientemente elevato: l'eccesso del peso proprio sulla spinta ascensionale, od il fatto che la spinta verticale dovuta al fluido risulti addirittura diretta anch'essa verso il basso, trovano compenso nella reazione del fondo. Analogamente, un corpo di peso specifico medio superiore a quello del fluido ambiente può trovarsi in equilibrio contro una superficie sovrastante, sempre che l'affondamento medio della zona di contatto sia abbastanza grande.

Una situazione ancora diversa si presenta quando il corpo è attraversato dalla superficie di separazione fra due fluidi di pesi specifici γ_1 e γ_2 diversi, essendo naturalmente maggiore tra i due quello γ_1 che compete al fluido sottostante. Si dice allora che il corpo, se si trova in condizioni di equilibrio, è *galleggiante* sul fluido inferiore, e si chiama *piano di galleggiamento* la superficie di intersezione del corpo con il piano orizzontale di separazione fra i due fluidi. La superficie A del corpo risulta divisa in due parti dal bordo del piano di galleggiamento, nessuna delle quali risulta assoggettata a spinte orizzontali da parte dei fluidi circostanti, proprio per l'orizzontalità del piano di galleggiamento. Restano le sole spinte verticali, che si valutano nel modo più semplice assumendo che il piano di galleggiamento sia piano delle pressioni nulle per entrambi i fluidi. Ciò fatto, risultano definiti, nel modo descritto al paragrafo precedente, i volumi V_1 e V_2 da prendere in esame per calcolare le spinte di sostentamento generate, nell'ordine, dal fluido inferiore e da quello superiore. Esse valgono rispettivamente $\gamma_1 V_1$ e $\gamma_2 V_2$, ed hanno rette d'azione passanti per i centri di carena dei volumi V_1 e V_2 . Componendo queste due spinte si ottiene un'unica forza che, all'equilibrio ed in assenza di altre sollecitazioni esterne, deve essere uguale e contraria al peso proprio del galleggiante e presentare identica retta d'azione.

Nella più gran parte dei casi di interesse tecnico il fluido inferiore è un liquido, quello superiore un aeriforme. Dato che il rapporto fra i due pesi specifici è allora molto maggiore di 1, si può prescindere dalla spinta prodotta dal fluido superiore. E le condizioni di equilibrio risultano di conseguenza più semplici: il peso proprio P e la spinta di sostentamento γV_1 devono avere lo stesso valore, il baricentro G del corpo ed il centro di carena C della sua parte immersa nel liquido devono trovarsi sulla stessa verticale.

6.8. Stabilità dell'equilibrio di corpi immersi o galleggianti.

Anche per i corpi immersi o galleggianti è importante l'esame della stabilità della situazione di equilibrio. Al solito, ci si accontenta di stabilire se le forze agenti sul corpo abbandonato in posizioni deviate rispetto a quella di equilibrio sono in grado o meno di determinare un primo atto di moto del corpo verso la sua posizione iniziale. Si considerano per questo scostamenti del corpo dall'assetto di equilibrio ottenuti per traslazione lungo tre direzioni distinte e non complanari, o per rotazione rigida intorno a tre assi ugualmente disposti. A seconda che ciascuna di queste deviazioni porti a situazioni in cui le forze applicate al corpo tendano a ridurre lo spostamento imposto, o tendano invece ad aumentarlo, si parlerà di *equilibrio stabile* o di *equilibrio instabile* rispetto alla deviazione presa in esame. Può anche accadere che le sollecitazioni sul corpo in posizione deviata risultino ancora in equilibrio, ed in questo caso si dirà che lo stato iniziale è stato di *equilibrio indifferente*, sempre rispetto alla particolare deviazione considerata.

Questo criterio si applica in modo molto semplice al caso del corpo immerso per intero, sempre che gli spostamenti considerati non lo portino a toccare superfici solide o ad intersecare piani di separazione di fluidi a densità diversa. È chiaro che l'equilibrio di un corpo totalmente immerso è indifferente sia rispetto alle traslazioni sia limitatamente alle rotazioni intorno ad assi verticali: tutti questi spostamenti non alterano il valore della spinta di sostentamento e non mutano l'allineamento verticale del baricentro del corpo con il suo centro di carena. Nei riguardi di una rotazione intorno ad un asse orizzontale, l'equilibrio può risultare invece stabile, indifferente od instabile a seconda che il centro di carena abbia, nella posizione indisturbata, quota maggiore, uguale o minore di quella del centro di gravità: ciò riesce evidente osservando l'eventuale coppia formata dal peso proprio e dalla spinta nella posizione deviata, ed assumendo che, come C , anche G non muti la sua posizione rispetto al corpo. Quest'ultimo fatto si verifica necessariamente nei corpi rigidi, ma non in quelli contenenti parti mobili, come si vedrà meglio più oltre.

Qualora il corpo in esame si trovi già, nella sua posizione di equilibrio indisturbato, a contatto con pareti solide, il criterio di stabilità in questione perde il suo valore pratico, e risulta invece molto più interessante stabilire l'entità degli sforzi necessari per ottenere lo scollamento del corpo dalla parete.

Nel caso di un corpo galleggiante si osserva subito che l'equilibrio è indifferente solo per le traslazioni orizzontali e per le rotazioni intorno ad assi verticali. La traslazione verticale, ad esempio verso il basso, deter-

mina invece una riduzione del volume di carena V_s ed un uguale aumento del volume V_i , e quindi, per essere γ_i maggiore di γ_s , un incremento della spinta globale verso l'alto. Se ne deduce che l'equilibrio è stabile rispetto alle traslazioni verticali.

Resta da esaminare l'effetto della rotazione intorno ad un asse orizzontale. Portato il galleggiante in posizione deviata, come schematizzato nella figura 6.7, il volume di carena inferiore risulta ridotto di una sua

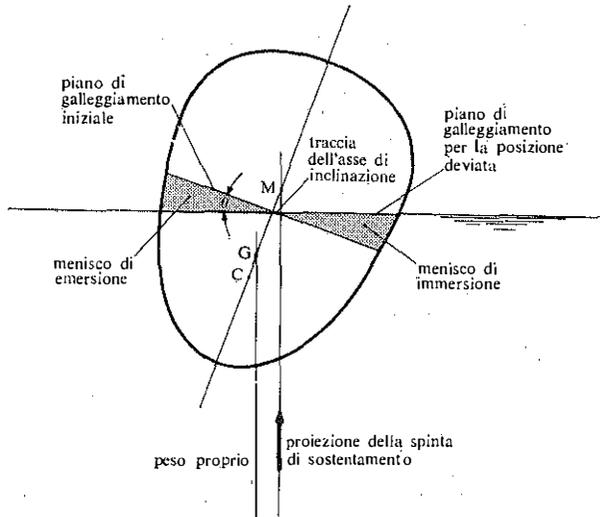


Fig. 6.7. - Elementi di rilievo per valutare la stabilità di un galleggiante nei confronti delle rotazioni intorno ad assi orizzontali.

parte, che prende il nome di *menisco di emersione*, ed accresciuto di altra parte, che si chiama *menisco di immersione*. Se i volumi dei due menischi risultano uguali, i moduli delle spinte di sostentamento rimangono inalterati. Ciò può sempre ottenersi scegliendo in modo adatto la posizione dell'asse di rotazione, che viene detto allora *asse di inclinazione*. Si supponga ancora, per il momento, che il corpo non comprenda parti mobili e che perciò la posizione nel corpo stesso del suo baricentro G non venga influenzata dalla rotazione. Per contro, la rotazione impressa modifica la posizione relativa dei centri di carena, dato che, attraverso l'aggiunta o la sottrazione dei menischi di emersione e di immersione, vengono alterate le configurazioni dei volumi di carena. La spinta di sostentamento, invariata in modulo, cambia la sua retta d'azione e può for-

mare una coppia insieme al peso proprio del galleggiante. Poiché interessa qui solo la componente della coppia in grado di modificare il valore dell'inclinazione, si può proiettare la nuova retta d'azione della spinta parallelamente all'asse di inclinazione sul piano ad esso normale e contenente il baricentro. Si usa chiamare *metacentro* il punto d'incontro di tale proiezione con la retta d'azione della spinta originaria ruotata rigidamente insieme al corpo. È chiaro che se il metacentro M risulta più alto del baricentro G , la coppia generata dalla rotazione θ tende a ridurre l'entità della rotazione stessa, e perciò l'equilibrio è da giudicare stabile. Sarà invece indifferente ove M coincida con G , ed instabile quando M riesca più basso di G .

Il risultato ottenuto può essere precisato meglio valutando la distanza del metacentro dal *centro di carena globale* C , inteso questo come baricentro dell'insieme dei due pesi $\gamma_1 V_1$ e $\gamma_s V_s$ concentrati nei baricentri dei rispettivi volumi di carena V_1 e V_s . Si ricordi che la spinta di sostentamento complessiva resta invariata in modulo, e si osservi che la sua retta d'azione continuerebbe a passare per C se non intervenissero mutamenti nella configurazione dei volumi di carena. L'allontanamento da C della retta d'azione della spinta può quindi essere ottenuto componendo la spinta complessiva $\gamma_1 V_1 + \gamma_s V_s$, assunta passante per C , con la coppia di spinte dovute alla mutata attribuzione dei menischi alle due carene. Più esattamente, detto V_m il volume di ciascun menisco, il fatto che il menisco di immersione, compreso inizialmente in V_s , passi dopo la rotazione θ a far parte di V_1 determina l'insorgere di una nuova spinta di sostentamento pari a $(\gamma_1 - \gamma_s)V_m$, mentre il passaggio inverso da V_1 a V_s del menisco di emersione genera una spinta di uguale intensità diretta verso il basso. Questa coppia di spinte presenta un momento la cui componente lungo l'asse di inclinazione vale $(\gamma_1 - \gamma_s)V_m d$, indicando con d la proiezione, su una retta orizzontale e normale all'asse di inclinazione, della distanza fra i baricentri dei due menischi. Ne segue che l'allontanamento da C della retta d'azione della spinta globale, valutato sempre in direzione orizzontale e normale a quella dell'asse di inclinazione, ammonta a

$$\frac{(\gamma_1 - \gamma_s)V_m d}{(\gamma_1 V_1 + \gamma_s V_s)},$$

e che la distanza del metacentro dal centro di carena globale vale

$$\overline{CM} = \frac{(\gamma_1 - \gamma_s)V_m d}{(\gamma_1 V_1 + \gamma_s V_s) \sin \theta}.$$

Per angoli θ sufficientemente piccoli, il volume di ciascun menisco

può essere calcolato con la formula

$$V_m = \int_{\Omega'} x \theta \, d\Omega' = \int_{\Omega''} x \theta \, d\Omega'' = \theta \int_{\Omega'} x \, d\Omega' = \theta \int_{\Omega''} x \, d\Omega''$$

intendendo che le integrazioni siano quelle estese a parti Ω' od Ω'' del piano di galleggiamento che sono confine dell'uno o, nell'ordine, dell'altro menisco, ed indicando con x la distanza del punto in esame dall'asse di inclinazione. La struttura della formula suggerisce subito che, per valori di θ così piccoli, l'asse di inclinazione passa per il baricentro della superficie di galleggiamento. Inoltre si ha

$$d = \frac{1}{V_m} \int_{\Omega'} x^2 \theta \, d\Omega' + \frac{1}{V_m} \int_{\Omega''} x^2 \theta \, d\Omega'' = \frac{\theta}{V_m} \left(\int_{\Omega'} x^2 \, d\Omega' + \int_{\Omega''} x^2 \, d\Omega'' \right)$$

e perciò il prodotto $V_m d$ vale il momento d'inerzia J dell'intera area di galleggiamento rispetto all'asse di inclinazione, moltiplicato per θ . Sempre che θ sia tanto piccolo da consentire di assimilarne il valore a quello di $\sin\theta$, si può quindi esprimere l'altezza del metacentro sul centro di carena come

$$\overline{CM} = \frac{(\gamma_i - \gamma_s) J}{\gamma_i V_i + \gamma_s V_s}$$

Si sottolinea che la verifica della stabilità si basa sull'osservazione dell'altezza metacentrica minima; per questo l'asse di inclinazione da considerare è quello per il quale riesce minimo il momento d'inerzia J .

Infine, si osserva che se il fluido superiore è un aeriforme, mentre quello sottostante è un liquido, risulta sufficiente assumere $\gamma_s = 0$ e stimare così l'altezza metacentrica sul centro di carena pari a

$$\overline{CM} = \frac{J}{V_i}$$

L'eventuale presenza, fin'ora esclusa, di parti mobili nel corpo immerso o galleggiante può essere trattata in modo analogo, con l'introduzione di un *secondo metacentro*, M^* , che assume il ruolo del baricentro G nei giudizi di stabilità dell'equilibrio, sia dei corpi totalmente immersi, sia di quelli galleggianti.

L'altezza \overline{GM}^* del secondo metacentro rispetto al baricentro si calcola con formule del tutto analoghe a quelle che esprimono \overline{CM} . Resta inalterato il denominatore, poiché il modulo della spinta di sostentamento è uguale al peso proprio, mentre il numeratore diviene $(\gamma_i^* - \gamma_s^*) V_m^* d^*$, ove V_m^* indica il volume della parte mobile solida, di peso specifico medio γ_i^* , che trasla in ambiente fluido di peso specifico γ_s^* .

dando luogo a seguito della rotazione θ ad uno spostamento d^* del proprio baricentro in direzione orizzontale e normale all'asse di rotazione. La stessa espressione resta valida anche quando la cavità interna del corpo contiene due fluidi, uno inferiore di peso specifico γ_i^* ed uno superiore di peso γ_s^* più piccolo. Qui V_m^* sta per il volume di ciascun menisco delimitato dalla posizione iniziale della superficie di separazione dei due fluidi, ruotata solidalmente con il corpo, e dalla posizione finale della stessa interfaccia. L'uguaglianza dei volumi dei due menischi è ovviamente assicurata in questo caso dalla costanza dei volumi contenuti. Ed infine d^* indica la solita distanza, orizzontale e normale all'asse della rotazione, fra i baricentri dei menischi. Se poi la rotazione θ impressa è sufficientemente piccola, il prodotto $V_m^* d^*$ può essere sostituito da $J^* \theta$, intendendo con J^* il momento d'inerzia dell'interfaccia dei due fluidi interni, valutato rispetto all'asse baricentrico dell'interfaccia parallelo all'asse di rotazione.

Con specifico riferimento ai galleggianti, si osserva ancora che l'asse di inclinazione cui corrisponde la minima altezza del metacentro usuale non è necessariamente l'asse di rotazione che determina la massima altezza del secondo metacentro.

6.9. Fenomeni di capillarità.

Come esposto nel paragrafo 6.3, le superfici di livello per il potenziale delle forze di massa sono luoghi di densità uniforme. Le superfici di separazione fra liquidi non miscibili, o fra liquidi ed aeriformi, sono di conseguenza superfici di livello per il potenziale stesso: se quest'ultimo è il geopotenziale, le superfici in questione sono orizzontali.

Il risultato non è più vero quando interviene, come elemento determinante lo stato di equilibrio, anche la tensione superficiale. Gli scostamenti della superficie di separazione tra fasi fluide diverse dalla superficie equipotenziale vengono indicati come *fenomeni di capillarità*.

Un esempio per questi fenomeni può essere fornito dall'andamento della superficie libera di un liquido, nel campo del geopotenziale, e presso una parete solida piana e verticale. Lungo la linea orizzontale di contatto delle tre fasi deve essere verificata la condizione di equilibrio, già considerata nel paragrafo 2.3,

$$\sigma_{SA} - \sigma_{SL} = \sigma_{LA} \cos \delta,$$

nella quale δ sta per il valore dell'angolo diedro fra il semipiano che separa il solido dal liquido ed il semipiano tangente al pelo libero, condotto

lungo la linea di contatto, mentre σ_{sA} , σ_{sL} e σ_{LA} indicano nell'ordine le tensioni superficiali connesse alle interfacce fra solido ed aeriforme, solido e liquido, liquido ed aeriforme.

Sempre in collegamento con le considerazioni riportate nel paragrafo 2.3, attraverso il pelo libero deve sussistere un salto di pressione, formato da pressioni nell'aeriforme p_A localmente diverse da quelle p_L del liquido, ed espresso dalla formula di Laplace

$$p_A - p_L = \sigma_{LA} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

nella quale r_1 ed r_2 indicano i raggi di curvatura locali dell'interfaccia per due direzioni mutuamente perpendicolari, da assumere come positivi se i centri di curvatura si trovano nella regione superiore, occupata dall'aeriforme.

Le simmetrie insite nel problema consigliano l'adozione di un riferimento costituito da un asse verticale z , diretto verso l'alto e disposto lungo la parete solida, e di un asse x ad essa normale, passante per l'asse z ed orientato verso la zona invasa dalle fasi fluide, come in figura 6.8.

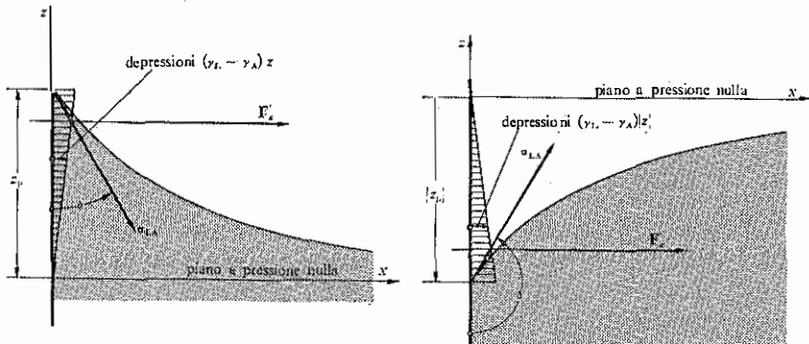


Fig. 6.8. — Deformazione indotta sul pelo libero dalle tensioni superficiali per la presenza di una parete piana e verticale. Se il liquido bagna la parete, ossia se l'angolo di contatto δ è minore di $\pi/2$, si ha un innalzamento locale del pelo libero. Si ha invece un abbassamento se δ è maggiore di $\pi/2$, ossia se il liquido non bagna la parete.

La somma delle curvature, che si riduce alla sola curvatura valutata sul piano che contiene questi due assi, vale allora, in termini della quota z_0 dell'interfaccia,

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \left[1 + \left(\frac{\partial z_0}{\partial x} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2}$$

Così, il salto di pressione attraverso il pelo libero andrà espresso come

$$p_A - p_L = \sigma_{LA} \left[1 + \left(\frac{\partial z_0}{\partial x} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2}$$

e risulterà evanescente a grandi distanze dalla parete solida. In questa zona asintotica, l'interfaccia riacquista il normale assetto orizzontale. È comodo assumere la quota finale del pelo libero come riferimento per le quote stesse ed adottare quale pressione nulla la pressione ivi esistente, che è ormai comune alle due fasi. Con queste posizioni, la costanza del carico piezometrico porge

$$z_0 + \frac{p_L}{\gamma_L} = z_0 + \frac{p_A}{\gamma_A} = 0,$$

intendendo, al solito, con γ_L e γ_A le densità del liquido e dell'aeriforme. L'andamento del pelo libero è dunque descritto dall'equazione differenziale

$$\sigma_{LA} \left[1 + \left(\frac{\partial z_0}{\partial x} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} = (\gamma_L - \gamma_A) z_0.$$

Una prima integrazione porta a

$$\sigma_{LA} \left[1 + \left(\frac{\partial z_0}{\partial x} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = -\frac{\gamma_L - \gamma_A}{2} z_0^2 + c_1.$$

La condizione al contorno, già esposta, secondo la quale la quota z_0 , e la relativa derivata rispetto ad x , devono tendere ad annullarsi al crescere della distanza x dalla parete solida, porta ad assegnare alla costante di integrazione c_1 il valore

$$c_1 = \sigma_{LA}.$$

Sulla parete solida invece, ossia per $x = 0$, deve essere

$$\left[\frac{\partial z_0}{\partial x} \right]_{x=0} = -\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \delta \right)$$

e ciò consente il calcolo del massimo scostamento del pelo libero dalla superficie equipotenziale asintotica, in funzione dell'angolo di raccordo δ : si ha

$$[z_0]_{x=0} = z_0 = \pm \sqrt{\frac{2\sigma_{LA}}{\gamma_L - \gamma_A} (1 - \sin \delta)}.$$

con segno positivo o negativo a seconda che il liquido bagni o meno la parete solida.

Un'ulteriore integrazione fornisce infine l'andamento completo del pelo libero, sia pure in forma implicita,

$$x = -\sqrt{\frac{4\sigma_{LA}}{\gamma_L - \gamma_A} - z_0^2} + \sqrt{\frac{\sigma_{LA}}{\gamma_L - \gamma_A}} \operatorname{Ar Ch} \sqrt{\frac{4\sigma_{LA}}{(\gamma_L - \gamma_A)z_0^2}} + c_2,$$

nella quale la costante di integrazione c_2 va determinata valendosi della condizione che sia $x = 0$ per $z_0 = z_D$: ne segue

$$c_2 = \sqrt{\frac{\sigma_{LA}}{\gamma_L - \gamma_A}} \left[\sqrt{2(1 + \sin \delta)} - \operatorname{Ar Ch} \sqrt{\frac{2}{1 - \sin \delta}} \right].$$

La quota z_0 risulta costantemente positiva o negativa a seconda che il liquido bagni la parete, e l'angolo di contatto δ riesca perciò acuto, oppure che non la bagni, portando così ad un angolo di contatto ottuso. Ed è nulla se δ è retto.

Le tensioni superficiali e lo scostamento del pelo libero dall'orizzontale determinano sollecitazioni particolari sulle pareti solide. Già nel caso elementare ora esaminato, la parete è assoggettata a sforzi diversi da quelli che si avrebbero in assenza di tensioni superficiali e con pelo libero a quota uniforme $z_0 = 0$. Con riferimento all'unità di sviluppo normale al piano degli assi coordinati, questi nuovi sforzi presentano un risultante che ha componente verticale, diretta verso l'alto se positiva, pari a

$$F'_z = -\sigma_{LA} \cos \delta,$$

e componente orizzontale, diretta verso le fasi fluide, data da

$$F'_x = \frac{\gamma_L - \gamma_A}{2} z_D^2 + \sigma_{LA} \sin \delta.$$

È interessante osservare che F'_x non dipende dal valore dell'angolo di contatto, e che ammonta sempre a σ_{LA} . La formula

$$\sigma_{LA} \left[1 + \left(\frac{\partial z_0}{\partial x} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = -\frac{\gamma_L - \gamma_A}{2} z_0^2 + \sigma_{LA},$$

ottenuta con la prima integrazione, porge appunto, su $x = 0$,

$$\sigma_{LA} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \delta \right) + \frac{\gamma_L - \gamma_A}{2} z_D^2 = \sigma_{LA} \sin \delta + \frac{\gamma_L - \gamma_A}{2} z_D^2 = \sigma_{LA}.$$

Così, una lamina a facce piane e parallele, anche se delimitata da superfici aventi angoli di contatto differenti con i fluidi nei quali è immersa, non risulta soggetta a sforzi orizzontali, benché possa essere sollecitata da una coppia con asse orizzontale e parallelo alle sue facce.

Parte dei risultati ora esposti dipendono essenzialmente dall'ipotesi che il pelo libero non sia influenzato da altre cause fino a grandi distanze dalla parete solida. Per mettere in evidenza i fatti nuovi che si manifesterebbero altrimenti, basta supporre, come indicato in figura 6.9, che esista una seconda parete verticale, parallela a quella fin'ora considerata, posta a distanza $2d_1$ da essa, e dotata del medesimo angolo di contatto con i fluidi circostanti.

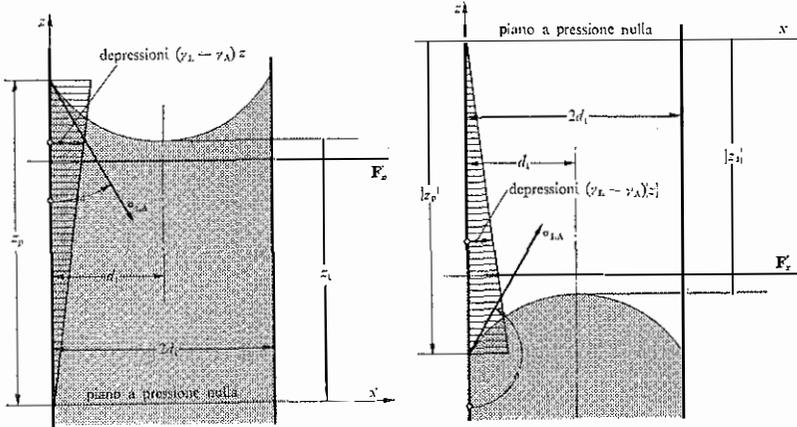


Fig. 6.9. - Forma e posizione del pelo libero soggetto alle tensioni superficiali, e delimitato da pareti piane parallele e verticali, nel caso che il liquido bagni le pareti dando luogo ad un angolo di contatto $\delta < \pi/2$, e nel caso che non le bagni, formando perciò un angolo $\delta > \pi/2$.

Ferma la convenzione per la misura delle quote e quella sul valore della pressione di riferimento, e cioè ammettendo nulle quote e pressioni del pelo libero in assenza di tensioni superficiali, restano valide sia l'equazione differenziale per l'interfaccia, sia il rispettivo integrale primo

$$\sigma_{LA} \left[1 + \left(\frac{\partial z_0}{\partial x} \right)^2 \right]^{-1/2} = - \frac{\gamma_L - \gamma_A}{2} z_0^2 + c_1.$$

La seconda integrazione, da operarsi dopo la separazione delle variabili, comporta la stima di integrali ellittici. Essi, con le posizioni

$$v = \arcsin \sqrt{\frac{c_1 + \sigma_{LA} - z_0^2 \gamma_L - \gamma_A}{2\sigma_{LA}}}, \quad k = \sqrt{\frac{2\sigma_{LA}}{c_1 + \sigma_{LA}}},$$

assunono la loro forma normale di Legendre, e l'andamento del ramo di pelo libero compreso fra $x = 0$ ed $x = d_1$ risulta così espresso, in modo

parametrico, dalle

$$x = \sqrt{\frac{2c_1^2}{(\gamma_L - \gamma_A)(c_1 + \sigma_{LA})}} \int_0^v \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 v}} dv - \\ - \sqrt{\frac{2(c_1 + \sigma_{LA})}{\gamma_L - \gamma_A}} \int_0^v \sqrt{1 - k^2 \sin^2 v} dv + c_2 \\ z_0^2 = \frac{4\sigma_{LA}}{\gamma_L - \gamma_A} \left[\frac{c_1 + \sigma_{LA}}{2\sigma_{LA}} - \sin^2 v \right],$$

con l'intesa di adottare la determinazione positiva o quella negativa per la z_0 a seconda che il liquido bagni o non bagni le pareti solide.

Le costanti di integrazione, c_1 e c_2 , vanno calcolate valendosi della condizione alla parete

$$\left[\frac{\partial z_0}{\partial x} \right]_{x=0} = -\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \delta \right),$$

e della condizione, dettata da evidenti ragioni di simmetria,

$$\left[\frac{\partial z_0}{\partial x} \right]_{x=\delta_1} = 0.$$

Ne segue che, in accordo con la formula ottenuta dalla prima integrazione e con la definizione del parametro v ,

$$[z_0^2]_{x=0} = z_0^2 = \frac{2 \left[c_1 - \sigma_{LA} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \delta \right) \right]}{\gamma_L - \gamma_A} \quad [v]_{x=0} = v_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \left| \frac{\pi}{2} - \delta \right| \\ [z_0^2]_{x=\delta_1} = z_1^2 = \frac{2[c_1 - \sigma_{LA}]}{\gamma_L - \gamma_A} \quad [v]_{x=\delta_1} = v_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Di conseguenza, c_1 deve essere dedotto dall'equazione implicita

$$d_1 = \sqrt{\frac{2c_1^2}{(\gamma_L - \gamma_A)(c_1 + \sigma_{LA})}} \int_{v_0}^{v_1} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 v}} dv - \\ - \sqrt{\frac{2(c_1 + \sigma_{LA})}{\gamma_L - \gamma_A}} \int_{v_0}^{v_1} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 v} dv,$$

mentre c_2 risulta successivamente fissato in

$$c_2 = - \sqrt{\frac{2c_1^2}{(\gamma_L - \gamma_A)(c_1 + \sigma_{LA})}} \int_0^{v_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 v}} dv + \\ + \sqrt{\frac{2(c_1 + \sigma_{LA})}{\gamma_L - \gamma_A}} \int_0^{v_0} \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 v} dv.$$

Con queste precisazioni sulle costanti, la rappresentazione parametrica dell'andamento del pelo libero cade in difetto solo quando l'angolo di contatto δ è retto. In tale circostanza, tuttavia, il pelo libero assume quote uniformemente nulle.

Anche nel nuovo caso ora esaminato gli sforzi esercitati su ciascuna parete solida differiscono da quelli che si presenterebbero in assenza di tensioni superficiali: a questi ultimi vanno aggiunti degli sforzi il cui risultante, rapportato all'unità di sviluppo in direzione normale al piano degli assi di riferimento, ammette una rappresentazione formalmente identica a quella già vista nel caso della parete singola. Esiste cioè una componente verticale

$$F'_z = -\sigma_{LA} \cos \delta,$$

diretta verso l'alto se positiva, ed esiste una componente orizzontale

$$F'_x = \frac{\gamma_L - \gamma_A}{2} z_0^2 + \sigma_{LA} \sin \delta = c_1,$$

diretta verso le fasi fluide, che però riesce qui costantemente maggiore di σ_{LA} , sempre che le quote z_0 del pelo libero siano diverse da zero.

È utile osservare ancora che il livello z_1 del pelo libero in mezzaria può essere espresso in modo particolarmente semplice quando la prima costante d'integrazione, c_1 , riesce molto maggiore della tensione superficiale σ_{LA} . L'equazione implicita per c_1 può allora essere riscritta ricorrendo agli sviluppi in serie secondo il modulo κ , troncata al secondo termine,

$$\int_0^v \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 v}} dv \simeq v + \frac{\kappa^2}{4} \left(v - \frac{1}{2} \sin 2v \right),$$

$$\int_0^v \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 v} dv \simeq v - \frac{\kappa^2}{4} \left(v - \frac{1}{2} \sin 2v \right),$$

per gli integrali ellittici che vi figurano. Si ha così

$$d_1 \simeq \sqrt{\frac{2}{\gamma_L - \gamma_A}} \frac{\sigma_{LA}}{\sqrt{c_1 + \sigma_{LA}}} \left[\left(\frac{2c_1 + \sigma_{LA}}{2(c_1 + \sigma_{LA})} - 1 \right) (v_1 - v_0) + \frac{2c_1 + \sigma_{LA}}{4(c_1 + \sigma_{LA})} \sin 2v_0 \right],$$

ossia, trascurando sistematicamente σ_{LA} di fronte a c_1 ,

$$d_1 \simeq \sqrt{\frac{2}{\gamma_L - \gamma_A}} \frac{\sigma_{LA}}{2\sqrt{c_1}} \sin 2v_0 = \sqrt{\frac{2}{\gamma_L - \gamma_A}} \frac{\sigma_{LA}}{2\sqrt{c_1}} |\cos \delta|.$$

Assumendo inoltre, con lo stesso grado di approssimazione,

$$z_1^2 \simeq \frac{2c_1}{\gamma_L - \gamma_A}$$

se ne deduce che deve essere pure

$$d_1 z_1 \simeq \frac{\sigma_{LA}}{\gamma_L - \gamma_A} \cos \delta.$$

La lettura del risultato è immediata: per scostamenti z_1 del pelo libero molto maggiori di d_1 il peso apparente della colonna liquida di spessore unitario ammonta a $(\gamma_L - \gamma_A)2d_1 z_1$, ove si trascuri il lieve apporto legato alla curvatura dell'interfaccia fluida, ed esso è equilibrato dalla compo-

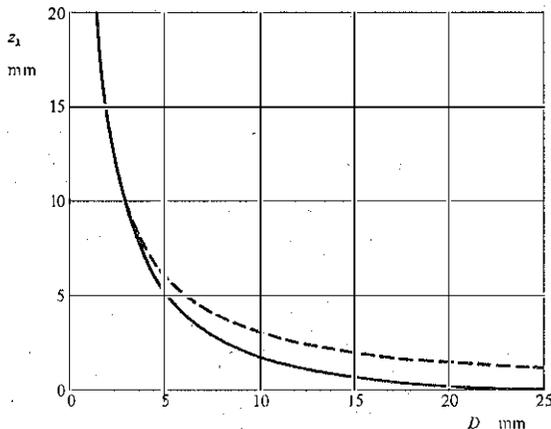


Fig. 6.10. - Ascensione capillare z_1 del bordo inferiore del pelo libero d'acqua a contatto con l'atmosfera entro tubi cilindrici circolari e verticali in vetro, di diametro interno D , alla temperatura di 20 °C. La linea a tratti è in accordo con la legge di Jurin.

nente verticale $2\sigma_{LA} \cos \delta$ degli sforzi unitari trasmessi al liquido dalle due pareti.

Lo stesso risultato evidenzia una relazione inversa fra spessore dell'intercapedine ed entità dell'effetto capillare, e costituisce pertanto un esempio del legame generale detto *legge di Jurin*, perché precisato da Jurin nel 1718 osservando che influiscono solo le dimensioni ambientali presenti al livello del menisco.

Altro esempio è dato dall'equazione

$$Dz_1 = 30 \text{ mm}^2,$$

che fornisce, per le normali temperature ambientali, l'ascensione capillare z_1 del pelo libero dell'acqua nei tubi di vetro a sezione circolare, aventi diametro interno D minore di circa 3 mm. Per diametri maggiori non è più possibile prescindere dall'effettiva forma del pelo libero, e la risalita z_1 del suo cavo risulta progressivamente inferiore, come riportato in figura 6.10.

6.10. Equilibrio in riferimenti mobili rispetto al geode.

A volte occorre considerare masse fluide sottoposte sia al campo del geopotenziale, sia a campi di forze di inerzia derivanti dal moto rispetto alla terra del sistema di riferimento adottato. Se la massa fluida risulta in quiete rispetto al riferimento mobile, si possono adattare al nuovo contesto i risultati generali esposti nel paragrafo 6.3.

Così, in particolare, se il nuovo riferimento è in moto con accelerazione uniforme \mathbf{a} rispetto alla terra, nel nuovo riferimento è presente un campo di forze specifiche di massa $\mathbf{f} = \mathbf{g} - \mathbf{a}$, anch'esso uniforme: le superfici equipotenziali, isobare, isopicnotiche ed isoterme sono i piani ortogonali ad \mathbf{f} , e la pressione cresce nella direzione e nel verso di \mathbf{f} , con tasso dipendente solo dalla densità locale. L'unica situazione eccezionale è quella $\mathbf{a} = \mathbf{g}$: nell'ambito dello schema fin qui seguito, le forze specifiche di massa sono nulle e la pressione è uniforme.

Altro caso tecnicamente interessante è costituito dal riferimento in moto di rotazione rigida intorno ad un asse verticale. Assunto l'asse delle z coincidente con l'asse di rotazione e diretto verso l'alto, ed adottati per le x e le y due assi mutuamente ortogonali, disposti su un piano orizzontale e ruotanti con velocità angolare ω rispetto alla terra, il campo delle forze di massa ammette la rappresentazione

$$\mathbf{f} = -g \text{ grad}z + \omega^2 \sqrt{x^2 + y^2} \text{ grad} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Le superfici di livello del potenziale relativo

$$\phi = -gz + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2)$$

costituiscono una famiglia di paraboloidi di rivoluzione intorno all'asse delle z presentanti la concavità verso l'alto. Ammesso che, ai soli fini del calcolo delle pressioni, si possa considerare uniforme la densità ρ del fluido, le pressioni stesse valgono

$$p = p_0 - \rho g(z - z_0) + \frac{1}{2}\rho\omega^2(x^2 + y^2)$$

ove si intenda con p_0 la pressione presente sull'asse di rotazione, a quota z_0 . Se la rotazione avviene invece intorno ad un asse non verticale, nel riferimento in moto la componente della forza di massa dovuta al campo del geopotenziale appare con direzione locale variabile nel tempo, e questo esclude che possa sussistere lo stato di quiete per un corpo fluido.

6.11. Forze specifiche dovute alle stesse masse in equilibrio.

Gli assetti di equilibrio considerati fino ad ora sono connessi alla presenza di forze di massa legate solo alla natura dinamica del sistema di riferimento. Fra le forze specifiche vanno però elencate pure quelle dovute all'attrazione gravitazionale reciproca fra i vari elementi fluidi componenti il corpo in esame, come accennato nel paragrafo 4.5. Benché queste forze, nella maggior parte delle applicazioni tecniche correnti, siano decisamente trascurabili, esse possono tuttavia assumere funzione dominante rispetto alle prime, come avviene nel caso limite di accelerazioni assolute nulle, considerato nel paragrafo 6.10.

Se le forze di massa si riducono alle sole forze di mutua attrazione gravitazionale, a grande distanza da una massa M si manifesta una forza specifica attrattiva

$$\mathbf{f} = -\kappa \frac{M}{d^2} \text{grad } d,$$

ove si deve intendere con d la distanza del punto \mathbf{x}' , nell'intorno del quale è presente la massa M , dal punto \mathbf{x} , nel quale la forza \mathbf{f} agisce, e si deve porre

$$\kappa = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}.$$

Il potenziale ϕ di questa forza specifica vale

$$\phi = \kappa \frac{M}{d}$$

che porge appunto

$$\mathbf{f} = \text{grad} \phi.$$

Nel campo dello schema continuo le stesse forze valgono

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\kappa \int_V \frac{\rho}{d^2} \text{grad} d dV,$$

con l'intesa che il gradiente sia calcolato derivando rispetto ad \mathbf{x} .

Si può mostrare che tali forze ammettono ancora un potenziale. Allo scopo, si suddivide il volume V di integrazione, isolandone un elemento V_s centrato sul punto \mathbf{x} nel quale si vuole calcolare il campo, e si scrive

$$\mathbf{f} = -\kappa \int_{V-V_s} \frac{\rho}{d^2} \text{grad} d dV - \kappa \int_{V_s} \frac{\rho}{d^2} \text{grad} d dV.$$

Poiché le integrazioni vanno eseguite rispetto alla variabile \mathbf{x}' , mentre il gradiente va stimato variando \mathbf{x} , le due operazioni sono fra loro invertibili, solo che le funzioni coinvolte siano di classe C^0 rispetto ad \mathbf{x}' e di classe C^1 rispetto ad \mathbf{x} . Ciò avviene senz'altro nel caso del primo integrale, se ρ è di classe C^0 , perché d non si annulla mai. Nel caso del secondo integrale, d si annulla in \mathbf{x} , e la funzione $d^{-2} \text{grad} d$ non è più continua, ma l'integrale stesso tende ad annullarsi man mano che il volume V_s si restringe intorno ad \mathbf{x} . Al limite si ha dunque, complessivamente

$$\mathbf{f} = \text{grad} \left[\kappa \int_V \frac{\rho}{d} dV \right]$$

ossia

$$\mathbf{f} = \text{grad} \phi$$

con

$$\phi = \kappa \int_V \frac{\rho}{d} dV.$$

Si nota ancora, per inciso, che se ρ è di classe C^1 , e non semplicemente di classe C^0 , questa espressione del potenziale soddisfa l'equazione di Poisson

$$\nabla^2 \phi = -4\pi\kappa\rho.$$

Visto che pure le forze specifiche ora considerate ammettono potenziale, si possono utilizzare anche qui le conclusioni generali del paragrafo 6.3. Così, in particolare, le superfici di livello del potenziale sono sempre superfici isobare, isopicnotiche ed isoterme. Alla condizione usuale che le superfici equipotenziali siano isopicnotiche, si sovrappone qui l'interconnessione esistente fra il potenziale e la distribuzione delle densità, e ciò vincola in modo caratteristico gli assetti delle densità che possono dar luogo a stati di equilibrio.

Riferimenti citati.

JURIN, JAMES, *An account of some experiments shown before the Royal Society; with an inquiry into the cause of the ascent and suspension of water in capillary tubes*, Phil. Trans., 1718, pp. 330-336.

CLAIRAUT, ALEXIS-CLAUDE, *Théorie de la figure de la terre*, Paris, 1743.

FOURIER, JEAN BAPTISTE JOSEPH, *Théorie analytique de la chaleur*, Paris, 1822.

PASCAL, BLAISE, *Traites de l'équilibre des liqueurs et de la pesanteur de l'air*, Paris, 1662.

STEVIN, SIMON, *De Beghinselen der Weeghkonst*, Leiden, 1586.

CAPITOLO SETTIMO

DINAMICA DEI FLUIDI IDEALI

7.1. Le equazioni meccaniche dei fluidi ideali.

In seno ad un fluido in moto, la semplice struttura isotropa del tensore degli sforzi, sperimentalmente verificata nel caso della quiete, non risulta più soddisfatta, come avvertono già le considerazioni globali svolte nel paragrafo 2.9. Può tuttavia accadere che le componenti normali del tensore degli sforzi siano notevolmente maggiori delle relative componenti tangenziali, e che le variazioni delle prime nello spazio e nel tempo giochino sul moto che si intende studiare un ruolo comparativamente molto più importante di quello esercitato dai mutamenti delle seconde. In casi di questo genere, uno schema di calcolo che prescindendo dagli sforzi tangenziali, e che tenga conto solo delle pressioni normali può riuscire particolarmente utile, mostrandosi atto ad inquadrare gli aspetti più salienti del moto in esame, pur impiegando un apparato analitico molto ridotto. Lo schema stesso è completato richiedendo che le pressioni normali restino quelle p collegate dall'*equazione di stato*

$$\rho = \rho(p, \tau)$$

alle densità ρ ed alle temperature τ .

Il modello basato sull'assunto che anche in condizioni di moto il tensore degli sforzi si mantenga isotropo e conservi pressioni normali identiche a quelle indicate dall'equazione di stato è noto come schema di *fluido ideale*. La posizione

$$\mathbf{T} = p\mathbf{1},$$

sulla quale si basa tale schema, può essere considerata un'*equazione costi-*

tutiva, di carattere meccanico, che individua un particolare tipo di comportamento del mezzo fluido.

La struttura degli sforzi interni non ha effetto diretto sull'*equazione di continuità*, esaminata nel paragrafo 4.3, che conserva pertanto la forma cardinale

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \, dV = 0$$

e, quando la densità ρ e la velocità \mathbf{v} sono di classe C^1 , le forme indefinite

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

L'ipotesi che il tensore degli sforzi abbia solo le componenti normali, tutte uguali a p , che equivale alla posizione

$$\boldsymbol{\tau} = p\mathbf{n}$$

per gli sforzi di superficie $\boldsymbol{\tau}$, semplifica invece notevolmente le *equazioni cardinali del moto*

$$\int_V \rho \mathbf{f} \, dV + \int_A \boldsymbol{\tau} \, dA = \frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{v} \, dV,$$

$$\int_V (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \rho \mathbf{f} \, dV + \int_A (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \boldsymbol{\tau} \, dA = \frac{D}{Dt} \int_V (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \rho \mathbf{v} \, dV,$$

presentate nel paragrafo 4.5: queste assumono ora l'aspetto

$$\int_V \rho \mathbf{f} \, dV + \int_A p \mathbf{n} \, dA = \frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{v} \, dV,$$

$$\int_V (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \rho \mathbf{f} \, dV + \int_A (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge p \mathbf{n} \, dA = \frac{D}{Dt} \int_V (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \rho \mathbf{v} \, dV.$$

Inoltre, se le forze specifiche di massa \mathbf{f} sono di classe C^0 , e la densità ρ , la velocità \mathbf{v} ed il tensore degli sforzi \mathbf{T} sono di classe C^1 , la *prima equazione indefinita del moto*

$$\rho \mathbf{f} - \operatorname{div} \mathbf{T} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt},$$

ricavata nel paragrafo 4.7, si semplifica nella forma

$$\rho \mathbf{f} - \text{grad } p = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt},$$

nota come *equazione di Euler*; essa risale al 1757. La *seconda equazione indefinita del moto* richiede che il tensore degli sforzi sia simmetrico, come dedotto nello stesso paragrafo 4.7, ed è quindi automaticamente soddisfatta dall'assunto che lo stesso tensore sia addirittura isotropo.

7.2. Le equazioni termodinamiche dei fluidi ideali.

Nello schema di fluido ideale, come si è visto nel paragrafo precedente, si suppongono nulli gli sforzi tangenziali, e si ammette che gli sforzi normali coincidano con le pressioni p legate dall'equazione di stato alle densità ed alle temperature locali. Ciò implica che le dissipazioni di potenza meccanica, ed il relativo valore specifico μ_a , siano identicamente nulli. Come si è già ricordato nel paragrafo 1.7, l'entropia è una funzione di stato, che riassume valori identici a quelli di partenza se il corpo viene riportato alle condizioni iniziali di pressione p e temperatura τ . Quando sono assenti gli scambi termici, il fatto può verificarsi solo se le dissipazioni di potenza meccanica, intrinsecamente non negative, sono identicamente nulle. Il fatto stesso è perciò generale.

La posizione $\tau = pn$, e la conseguente $\mu_a = 0$, riducono l'espressione del primo principio della termodinamica e la definizione dell'entropia specifica

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) dV &= \int_V \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f} dV + \int_A \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA + \int_A \omega dA \\ \frac{D}{Dt} \int_V \rho e dV &= \int_V \frac{\rho \dot{\mu}_a}{\tau} dV + \int_V \frac{\rho \dot{\mu}_a}{\tau} dV, \end{aligned}$$

introdotte nel paragrafo 4.8, alle forme

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) dV &= \int_V \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f} dV + \int_A \mathbf{v} \cdot pn dA + \int_A \omega dA, \\ \frac{D}{Dt} \int_V \rho e dV &= \int_V \frac{\rho \dot{\mu}_a}{\tau} dV. \end{aligned}$$

La forma cardinale del secondo principio della termodinamica,

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho e \, dV \geq \int_A \frac{\omega}{\tau} \, dA,$$

esposta anch'essa nel paragrafo 4.8, resta invece inalterata. A queste tre *forme cardinali della termodinamica per i fluidi ideali* fanno seguito altrettante forme indefinite, purché si ammettano adeguate condizioni di continuità per le diverse variabili in gioco: la densità ρ , l'energia interna specifica u , la pressione p , l'entropia specifica e , la densità del flusso di potenza termica ω , l'assorbimento specifico di potenza termica ϕ_t , la temperatura assoluta τ , la velocità \mathbf{v} e la forza specifica di massa \mathbf{f} . Le condizioni di continuità richieste sono già state precisate nel paragrafo 4.10: basta che \mathbf{f} e ϕ_t siano di classe C^0 , e che tutte le altre variabili elencate siano di classe C^1 . Valgono allora le relazioni

$$\int_A \omega \, dA = \int_A \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} \, dA = - \int_V \operatorname{div} \mathbf{q} \, dV = \int_V \rho \phi_t \, dV,$$

nelle quali \mathbf{q} sta per il vettore densità di flusso della potenza termica, introdotto nel paragrafo 4.9, e si hanno le *forme indefinite delle equazioni della termodinamica per i fluidi ideali* che seguono:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -p \operatorname{div} \mathbf{v} - \operatorname{div} \mathbf{q},$$

$$\rho \frac{De}{Dt} = - \frac{\operatorname{div} \mathbf{q}}{\tau},$$

$$\rho \frac{De}{Dt} > - \frac{\operatorname{div} \mathbf{q}}{\tau} + \frac{\mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \tau}{\tau^2}.$$

Nei fluidi ideali, l'isotropia rispetto alla propagazione della potenza termica sussiste nonostante il moto. Si continua perciò ad adottare l'*equazione costitutiva di Fourier*

$$\mathbf{q}^1 = -k \operatorname{grad} \tau,$$

già vista nel paragrafo 6.2 a proposito delle condizioni statiche, ammettendo ora che il coefficiente di conduttività termica k non dipenda dallo stato locale di moto.

Come nel caso statico, dal confronto delle ultime due forme indefinite delle equazioni fondamentali della termodinamica si ottiene

$$-\mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \tau > 0,$$

e questa limitazione, insieme all'equazione costitutiva di Fourier, mostra che il flusso della potenza termica può ancora aver luogo solo nella direzione delle temperature decrescenti.

Infine, unendo l'equazione costitutiva di Fourier alla forma indefinita della definizione dell'entropia specifica nel modo già seguito nel paragrafo 6.2, ammettendo perciò che il fluido sia non solo isotropo, ma anche omogeneo nella dipendenza di \mathbf{q} da $\text{grad } \tau$, ed assumendo che le temperature assolute siano di classe C^2 , anziché semplicemente di classe C^1 , si ottiene l'equazione di Fourier

$$-\tau\alpha \frac{Dp}{Dt} + \varrho c_p \frac{D\tau}{Dt} = k\nabla^2 \tau,$$

che differisce da quella dedotta nel caso statico solo per la presenza di derivate sostanziali al posto di quelle temporali, e che risale al 1833.

Il coefficiente di conduttività termica k , il coefficiente di dilatazione termica α , ed il calore specifico a pressione costante c_p sono stati introdotti, rispettivamente, nei paragrafi 2.8, 2.2, e 2.6.

7.3. Aspetti del moto dei fluidi ideali.

Nello schema di fluido ideale, come si è visto nel paragrafo 7.1, vale localmente l'equazione di Euler

$$\varrho \mathbf{f} - \text{grad } p = \varrho \frac{D\mathbf{v}}{Dt},$$

sempre che la densità ϱ , la pressione p e la velocità \mathbf{v} siano di classe C^1 , e sempre che le forze specifiche di massa \mathbf{f} siano di classe C^0 . In accordo con la definizione dell'accelerazione \mathbf{a} , fornita nel paragrafo 5.2, si può anche scrivere, sotto le stesse ipotesi

$$\mathbf{f} - \frac{1}{\varrho} \text{grad } p = \mathbf{a}.$$

In molti casi di interesse tecnico, le forze specifiche di massa ammettono un potenziale ϕ , che porge

$$\mathbf{f} = \text{grad } \phi.$$

Se ciò avviene, le accelerazioni \mathbf{a} ammettono anch'esse un potenziale se e solo se ammette potenziale l'espressione $\varrho^{-1} \text{grad } p$.

Secondo l'analisi condotta nel paragrafo 6.3, $\varrho^{-1} \text{grad} p$ ammette potenziale quando la pressione è uniforme, quando la densità è uniforme, oppure quando esiste un legame diretto fra densità e pressione. Queste condizioni sono conglobate nella richiesta che sussista una relazione

$$f(\varrho, p, t) = 0,$$

e vengono richiamate ammettendo che il moto sia *barotropico*.

Situazioni del genere sono sempre conseguenza di circostanze particolari in atto nel moto che si vuole studiare. Ad esempio, posto che tutto il fluido risulti soggetto alla medesima equazione di stato

$$\varrho = \varrho(p, \tau),$$

il moto è certamente barotropico se si svolge a temperatura τ uniforme, o se vige per esso un legame ausiliario

$$p = p(\tau),$$

come avviene quando l'entropia è uniforme, ed in altri casi analoghi.

Sempre in accordo con quanto detto nel paragrafo 6.3, un potenziale dell'espressione $\varrho^{-1} \text{grad} p$ è quello

$$\int \frac{dp}{\varrho}$$

che porge appunto

$$\text{grad} \int \frac{dp}{\varrho} = \left(\frac{\partial}{\partial p} \int \frac{dp}{\varrho} \right) \text{grad} p = \frac{1}{\varrho} \text{grad} p.$$

In conclusione, i moti barotropici di fluido ideale, soggetti a forze di massa conservative, ammettono un potenziale univoco per le accelerazioni. Riesce precisamente

$$\mathbf{a} = \text{grad} \left(\phi - \int \frac{dp}{\varrho} \right).$$

Per questi moti sono quindi disponibili i risultati cinematici del paragrafo 5.10, risultati che, per comodità di lettura, vengono qui riportati.

La variazione intrinseca nel tempo della circolazione della velocità è identica per tutti i circuiti chiusi riconducibili, ad un dato istante, gli uni agli altri senza uscire dal dominio contemporaneamente interessato dal moto.

Il moto può essere irrotazionale o rotazionale.

Se il moto è irrotazionale in un istante esso resta tale per tutto l'intervallo finito di tempo durante il quale si svolge. La circolazione della

velocità è nulla su tutti i circuiti riconducibili ad un punto; identica, senza essere necessariamente nulla, su quelli che possono essere deformati fino a sovrapporsi, ma che non possono essere ridotti ad un punto.

Se il moto è rotazionale, esistono, in ciascun istante, i tubi di flusso del vettore vorticità $\mathbf{w} = \text{rot } \mathbf{v}$. Il flusso di \mathbf{w} attraverso ogni sezione trasversale di uno stesso tubo di vortice assume valore identico, che può essere adottato come indice dell'intensità dello stesso tubo di vortice. I tubi di vortice non possono convergere in un punto: devono necessariamente richiudersi su se stessi o terminare sulla frontiera del dominio occupato dal fluido. Essi, inoltre, si muovono solidalmente con il fluido, mantenendo inalterata nel tempo la propria intensità.

Se poi il campo delle velocità è di classe C^2 , anzichè semplicemente di classe C^1 , come ammesso fino ad ora, si ha che, a parità di altre condizioni, il campo delle accelerazioni è irrotazionale. Infatti, dalla

$$\mathbf{a} = \text{grad} \left(\phi - \int \frac{dp}{\rho} \right)$$

segue direttamente

$$\text{rota} = 0.$$

Perciò, ancora una volta in accordo con i risultati esposti nel paragrafo 5.10, la variazione intrinseca della vorticità \mathbf{w} può essere dovuta solo a cambiamenti della densità od a distorsioni isocore del mezzo fluido. Ciò sottolinea che, mancando coppie esterne agenti sui singoli elementi fluidi, la velocità di rotazione angolare di questi, se diversa da zero, muta solo a seguito di alterazioni del loro momento d'inerzia, connesse a variazioni del loro volume o della loro forma.

La condizione che le forze specifiche di massa ammettano potenziale, e quella che il moto sia barotropico, sono verificate in molti fenomeni tecnicamente importanti, ma non coprono la totalità di questi. Forze prive di potenziale, quali quelle di Coriolis, oppure stati di moto baroclinico, con superfici isobare distinte da quelle isopicnotiche, si presentano anche loro in casi importanti. Alcuni di questi verranno esaminati nei paragrafi 7.8 e 7.9.

7.4. Teorema di Bernoulli.

Unendo all'equazione di Euler del paragrafo 7.1

$$\rho \mathbf{f} - \text{grad } p = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}$$

l'espressione vettoriale dell'accelerazione

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \wedge \text{rot } \mathbf{v} + \text{grad } \frac{v^2}{2},$$

vista nel paragrafo 5.2, si ha

$$-\mathbf{f} + \frac{1}{\varrho} \text{grad } p + \text{grad } \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{v} \wedge \text{rot } \mathbf{v}.$$

Le condizioni di continuità richieste sono già state elencate nei paragrafi citati: la densità ϱ , la pressione p e la velocità \mathbf{v} devono essere di classe C^1 , le forze specifiche di massa \mathbf{f} di classe C^0 .

Se il moto è irrotazionale, ossia se riesce costantemente

$$\text{rot } \mathbf{v} = 0,$$

si ha

$$\mathbf{v} = \text{grad } \varphi,$$

ed il campo delle accelerazioni, come ricordato nel paragrafo 5.9, deve ammettere potenziale. In accordo con l'esame svolto nel paragrafo 7.3, ciò avviene solo se le forze specifiche di massa ammettono un potenziale ϕ , in termini del quale riesca

$$\mathbf{f} = \text{grad } \phi,$$

e se il moto risulta barotropico, accordandosi con un legame del tipo

$$f(\varrho, p, t) = 0,$$

in modo da avere

$$\frac{1}{\varrho} \text{grad } p = \text{grad } \int \frac{dp}{\varrho}.$$

In queste circostanze, l'espressione ora in esame assume la forma

$$\text{grad} \left(-\phi + \int \frac{dp}{\varrho} + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = 0:$$

ne segue che la somma

$$-\phi + \int \frac{dp}{\varrho} + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

riesce uniforme in tutto il dominio occupato dal fluido. Se poi il moto, oltre che irrotazionale, è anche permanente, ossia se

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0,$$

risulta indipendente da x già la somma

$$-\phi + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2}.$$

Per contro, si può ammettere che il moto sia permanente, ma non irrotazionale. Se le forze specifiche di massa derivano ancora da un potenziale, la stessa espressione di partenza porge ora

$$-\text{grad}\phi + \frac{1}{\rho}\text{grad}p + \text{grad}\frac{v^2}{2} = \mathbf{v} \wedge \text{rot}\mathbf{v}.$$

Si vede subito, moltiplicando scalarmente per \mathbf{v} o per $\text{rot}\mathbf{v}$, che la somma

$$-\phi + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2}$$

risulta costante sia lungo le traiettorie, sia lungo le linee del vettore $\text{rot}\mathbf{v}$, purché lungo tali linee riesca

$$\frac{1}{\rho}\text{grad}p = \text{grad}\int \frac{dp}{\rho},$$

il che avviene certamente sotto le ipotesi già fatte in proposito. L'uniformità della somma

$$-\phi + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2}$$

sull'intero dominio si ripristina ovviamente, anche se il moto non è irrotazionale, quando esiste una superficie, attraversata da tutte le traiettorie, sulla quale la somma assume valore uniforme.

Un altro risultato interessante, sempre relativo al moto permanente, viene conseguito concentrando l'attenzione unicamente sulle traiettorie. In questo caso si può ammettere la presenza di forze specifiche di massa del genere di quelle di Coriolis,

$$-2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v},$$

legate ad una velocità angolare di rotazione costante $\boldsymbol{\omega}$ del riferimento, e scrivere di conseguenza

$$-\text{grad}\phi + \frac{1}{\rho}\text{grad}p + \text{grad}\frac{v^2}{2} = \mathbf{v} \wedge \text{rot}\mathbf{v} - 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}.$$

La moltiplicazione scalare per \mathbf{v} indica ora che la solita somma

$$-\phi + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2}$$

assume valore costante su ciascuna traiettoria, purché sulle stesse linee si abbia sempre

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \text{grad} \int \frac{dp}{\rho}.$$

Ancora una volta, la medesima somma risulta uniforme sull'intero dominio se lo è già su una superficie intersecata da tutte le traiettorie.

Il risultato relativo alle traiettorie, nella sostanza, è stato ottenuto da Bernoulli nel 1738, e costituisce il capostipite delle conclusioni riportate in questo paragrafo. A ciascuna di esse si attribuisce oggi il nome di *teorema di Bernoulli*.

Di norma, le somme fin qui considerate variano nel tempo. Fa eccezione la quantità

$$-\phi + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

che può sempre essere resa indipendente dal tempo conglobando in ϕ un inessenziale addendo, funzione di t , ma non di \mathbf{x} . Un'operazione analoga sul potenziale ϕ risulterebbe altrettanto efficace, pure nei confronti della somma

$$-\phi + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2};$$

essa però non viene abitualmente effettuata, per non compromettere l'interpretazione energetica di ϕ , che verrà esposta nel paragrafo seguente.

Così, anche nell'ipotesi di moto permanente, il valore di

$$-\phi + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2}$$

riesce immutabile nel tempo se sono tali anche ϕ , p e ρ . In questo caso si ha dunque

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-\phi + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) = 0$$

e quindi anche

$$\frac{D}{Dt} \left(-\phi + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) = 0.$$

In campo tecnico, è particolarmente frequente lo studio del moto di masse fluide che presentano densità praticamente uniforme e permanente.

Per questi moti si ha

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{1}{\rho} \int dp = \frac{p}{\rho}.$$

Se poi la massa fluida in esame è piccola rispetto alla terra ed è soggetta, oltre che alle forze specifiche di Coriolis connesse alla rotazione siderale del geoide, solo alle forze specifiche del geopotenziale, riesce

$$\phi = -gz,$$

con l'intesa che l'asse delle z sia assunto verticale e diretto verso l'alto.

Nel moto permanente risulta allora uniforme sulle singole traiettorie e costante nel tempo la quantità

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}$$

e quindi anche quella

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g},$$

ove γ , come sempre, sta per il peso specifico ρg .

La grandezza H così definita è nota come *carico totale* o *carico effettivo*. Ricordando che si chiama carico piezometrico la somma

$$h = z + \frac{p}{\gamma},$$

considerata nel paragrafo 6.4, si ha pure

$$H = h + \frac{v^2}{2g}.$$

Il termine ora aggiunto,

$$\frac{v^2}{2g},$$

è detto comunemente *altezza generatrice della velocità*.

Sempre con riferimento ad una traiettoria, il gioco reciproco dei singoli termini componenti il carico effettivo è illustrato nella figura 7.1.

Naturalmente, se esiste una superficie, attraversata da tutte le traiettorie, sulla quale H assume valore uniforme, H stesso riesce, oltre che costante nel tempo, anche uniforme sull'intero spazio interessato dal moto. Il medesimo risultato è valido se il moto è irrotazionale.

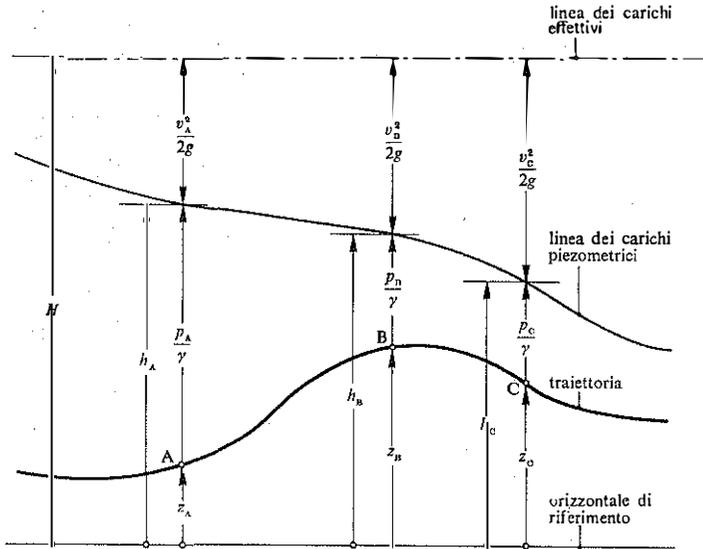


Fig. 7.1. - Aggiungendo l'altezza generatrice della velocità $v^2/2g$ al carico piezometrico h , costruito con la somma della quota z con l'altezza rappresentativa della pressione p/γ , si ottiene il carico effettivo H , che si mantiene uniforme sulle singole traiettorie finché il peso specifico γ resta immutato, le forze specifiche di massa si riducono a quelle peso ed a quelle di Coriolis, il moto è permanente, ed il fluido si comporta come fluido ideale.

7.5. Sfime sull'energia.

In accordo con le conclusioni del paragrafo precedente, nel moto di un fluido ideale si ha

$$\frac{D}{Dt} \left(-\phi + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) = 0.$$

Occorre per questo che il potenziale ϕ delle forze specifiche di massa, la pressione p , la densità ρ e la velocità v siano tutti di classe C^1 ed invariabili nel tempo. Occorre inoltre che il moto sia barotropico, con ρ e p direttamente collegate tra loro da un legame del tipo

$$f(\rho, p) = 0,$$

in modo che riesca

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \text{grad} \int \frac{dp}{\rho}.$$

È ammessa invece la presenza di forze specifiche di massa non comprese fra quelle descritte dal potenziale ϕ , purché esse siano prive di componenti lungo le traiettorie, come sono, ad esempio, le forze specifiche di Coriolis $-2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}$ connesse ad una velocità permanente di rotazione $\boldsymbol{\omega}$ del riferimento.

Il risultato si presta ad una lettura in termini energetici particolarmente interessante.

La potenza meccanica esplicitata dalle forze specifiche di massa

$$\mathbf{f} = \text{grad } \phi - 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}$$

sul fluido racchiuso nel volume V all'istante t ammette l'espressione

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{v}} \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f} dV &= \int_{\mathbf{v}} \mathbf{v} \cdot \rho (\text{grad } \phi - 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}) dV = \int_{\mathbf{v}} \mathbf{v} \cdot \rho \text{ grad } \phi dV = \\ &= \int_{\mathbf{v}} \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } \phi \right) dV = \int_{\mathbf{v}} \rho \frac{D\phi}{Dt} dV, \end{aligned}$$

e si vede così che le variazioni intrinseche di ϕ uguagliano il lavoro contemporaneamente eseguito dalle forze specifiche di massa, purché ϕ sia stazionario.

L'altra potenza meccanica connessa alle forze esterne è quella sviluppata dagli sforzi di superficie agenti sul contorno A di V . Nel moto barotropico di fluido ideale, con ρ e p indipendenti dal tempo, essa vale

$$\begin{aligned} \int_A \mathbf{v} \cdot p \mathbf{n} dA &= - \int_{\mathbf{v}} \text{div}(p\mathbf{v}) dV = - \int_{\mathbf{v}} [p \text{div } \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } p] dV = \\ &= - \int_{\mathbf{v}} \left[p \text{div } \mathbf{v} + \rho \mathbf{v} \cdot \text{grad} \int \frac{dp}{\rho} \right] dV = \\ &= - \int_{\mathbf{v}} \left[p \text{div } \mathbf{v} + \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{dp}{\rho} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \int \frac{dp}{\rho} \right) \right] dV = \\ &= - \int_{\mathbf{v}} p \text{div } \mathbf{v} dV + \int_{\mathbf{v}} \rho \frac{D}{Dt} \left(- \int \frac{dp}{\rho} \right) dV. \end{aligned}$$

La frazione

$$- \int_{\mathbf{v}} p \text{div } \mathbf{v} dV$$

di questa potenza si traduce in un incremento dell'energia interna, insieme all'eventuale apporto di potenza termica. Come si è osservato nel para-

grafo 4.10, la potenza termica fornita vale

$$-\int_V \operatorname{div} \mathbf{q} \, dV,$$

quando il vettore densità del flusso di potenza termica, \mathbf{q} , è di classe C^1 . Inoltre, si è già notato nel paragrafo 4.9 che, se l'energia interna u è di classe C^1 insieme alla densità ed alla velocità, il teorema del trasporto e l'equazione di continuità consentono di esprimere il tasso d'incremento intrinseco nel tempo dell'energia interna,

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho u \, dV,$$

anche come

$$\int_V \rho \frac{Du}{Dt} \, dV.$$

Che risulti appunto

$$\int_V \rho \frac{Du}{Dt} \, dV = -\int_V p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV - \int_V \operatorname{div} \mathbf{q} \, dV$$

è confermato dalla forma indefinita del primo principio della termodinamica,

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -p \operatorname{div} \mathbf{v} - \operatorname{div} \mathbf{q},$$

vista nel paragrafo 7.2.

La parte residua,

$$\int_V \rho \frac{D}{Dt} \left(-\int \frac{dp}{\rho} \right) dV,$$

della potenza sviluppata dalle pressioni, e tutta quella connessa alle forze di massa,

$$\int_V \rho \frac{D\phi}{Dt} \, dV,$$

determinano insieme un aumento dell'energia cinetica. Infatti, se si pone il tasso d'incremento temporale di quest'ultima,

$$\frac{D}{Dt} \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 \, dV,$$

nella forma equivalente

$$\int_V \rho \frac{D}{Dt} \frac{v^2}{2} dV,$$

si vede che l'uguaglianza

$$\int_V \rho \frac{D\phi}{Dt} dV + \int_V \rho \frac{D}{Dt} \left(-\int \frac{dp}{\rho} \right) dV = \int_V \rho \frac{D}{Dt} \frac{v^2}{2} dV$$

è in accordo con il teorema di Bernoulli

$$\frac{D}{Dt} \left(-\phi + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) = 0.$$

Le relazioni energetiche ora esaminate mostrano che all'espressione

$$-\left(\phi - \int \frac{dp}{\rho} \right)$$

può essere attribuito il significato di energia potenziale specifica. Più precisamente,

$$-\phi \quad \text{e} \quad \int \frac{dp}{\rho}$$

hanno funzione di *energia potenziale specifica di posizione* e, nell'ordine, di *energia potenziale specifica legata alle pressioni* fino a che tali energie vengono utilizzate per calcolare le variazioni intrinseche di energia cinetica specifica in un moto barotropico di fluido ideale, con ϕ , ρ , p e \mathbf{v} tutte stazionarie: lungo una traiettoria, ad una riduzione di queste energie potenziali specifiche corrisponde un eguale incremento di energia cinetica specifica.

L'interpretazione in termini di energie potenziali specifiche della grandezza

$$-\left(\phi - \int \frac{dp}{\rho} \right)$$

riguarda soltanto i cambiamenti subiti lungo ogni singola traiettoria. Alle variazioni che si riscontrano passando ad altra traiettoria, di norma, non può essere attribuito lo stesso significato.

Nel caso particolare, ma molto importante in campo tecnico, di fluido avente densità praticamente uniforme e permanente, soggetto inoltre solo

alle forze specifiche di massa sperimentate da un osservatore solidale con il geoide, l'espressione

$$-\left(\phi - \int \frac{dp}{\rho}\right)$$

assume la forma

$$gz + \frac{p}{\rho},$$

come già notato alla fine del paragrafo precedente. Di conseguenza, posto sempre $\gamma = \rho g$, il carico piezometrico

$$h = z + \frac{p}{\gamma}$$

assume il ruolo di energia potenziale per unità di peso, con le limitazioni esposte in precedenza: il moto deve essere permanente e l'attenzione deve essere concentrata su una sola traiettoria. Allo stesso tempo, e sotto le medesime condizioni, il carico effettivo

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}$$

assume il significato di energia meccanica totale, per unità di peso.

Il fatto che la grandezza

$$-\left(\phi - \int \frac{dp}{\rho}\right)$$

non costituisca sempre un'energia meccanica specifica nel senso usuale può essere messo in evidenza già da un semplice controesempio, appartenente al campo della statica. Una massa fluida in riposo ha energia potenziale specifica pari al prodotto di g per la quota del proprio baricentro. Il valore

$$-\left(\phi - \int \frac{dp}{\rho}\right) = gz + \frac{p}{\rho} = gh$$

è invece uguale al prodotto di g per la quota del piano delle pressioni nulle.

7.6. Condizioni al contorno.

La frontiera del dominio interessato dal moto di un fluido è una superficie che non viene attraversata dal fluido stesso. Sulla frontiera, perciò, la componente della velocità \mathbf{v} del fluido in direzione normale a tale superficie deve coincidere con la velocità di spostamento di questa nella medesima direzione. In particolare, se la frontiera è ferma nel riferimento adottato, la velocità del fluido deve presentare, su di essa, componente normale nulla.

Se $f(\mathbf{x}, t) = 0$ è l'equazione della frontiera, e se questa ammette versore normale

$$\mathbf{n} = \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|},$$

la velocità v_n , con la quale la frontiera stessa si muove lungo \mathbf{n} vale

$$v_n = - \frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{\frac{\partial f}{\partial n}} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{\mathbf{n} \cdot \text{grad } f} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{|\text{grad } f|}.$$

Come si è detto, la velocità \mathbf{v} del fluido deve assumere, sulla superficie $f(\mathbf{x}, t) = 0$, componente lungo \mathbf{n} identica a v_n : deve essere cioè

$$v_n - v_n = v_n - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Ne segue subito

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} |\text{grad } f| = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } f = 0,$$

e quindi la coincidenza delle due velocità può anche essere espressa, in forma spesso più comoda nelle applicazioni, imponendo che l'equazione $f(\mathbf{x}, t) = 0$ della frontiera soddisfi la condizione

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \right) f = \frac{D}{Dt} f = 0.$$

Il fatto che la componente normale della velocità del fluido relativa alla frontiera

$$v_n - v_n$$

sia nulla su ogni punto di questa superficie non è sufficiente per concludere che gli elementi fluidi situati su di essa in un dato istante non possano successivamente allontanarsene. Così, elementi di frontiera possono

divenire elementi fluidi interni, e viceversa, come avviene, ad esempio, in corrispondenza alla comparsa ed alla scomparsa di bolle in seno ad un liquido o di gocce in un aeriforme.

Per la componente della velocità del fluido tangente alla frontiera non esistono vincoli cinematici. Come si è già accennato nel paragrafo 5.7, l'osservazione sperimentale ha mostrato che la componente tangenziale della velocità coincide con l'analoga componente della velocità della frontiera, se questa è costituita da una parete solida. Si dice usualmente che il fluido *aderisce* alle pareti. Tuttavia, nello schema di fluido ideale, quest'ultima condizione non può essere sempre rispettata, come si vedrà meglio nel paragrafo 7.7.

A volte la superficie di frontiera non è assegnata in partenza. La sua forma va allora dedotta insieme alla struttura del campo delle velocità. Casi di questo genere si presentano quando la frontiera è superficie di separazione fra porzioni diverse della stessa massa fluida, animate ciascuna da moti con velocità di classe C^1 , e, contemporaneamente, superficie luogo di discontinuità per le componenti tangenziali della velocità. Lo stesso fatto si presenta pure quando la frontiera è superficie di separazione del fluido in esame da altro non miscibile con il primo.

Nella prima circostanza, la pressione p resta continua attraversando la frontiera. Basta scrivere la prima equazione cardinale del moto

$$\int_V \rho \mathbf{f} dV + \int_A \boldsymbol{\tau} dA = \frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV$$

per il volume V di figura 7.2, racchiuso dalla superficie A e comprendente nel suo interno la parte A_f di frontiera. Il volume V risulta diviso da A_f in due porzioni, V_1 e V_2 , in ciascuna delle quali la densità ρ e la velocità \mathbf{v} vengono supposte di classe C^1 . Si ha pertanto, ricorrendo al teorema del trasporto modificato con l'uso dell'equazione di continuità come si è fatto nel paragrafo 4.4,

$$\int_V \rho \mathbf{f} dV + \int_A \boldsymbol{\tau} dA = \int_{V_1} \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} dV_1 + \int_{V_2} \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} dV_2.$$

AmMESSO ora che le forze specifiche di massa \mathbf{f} siano di classe C^0 , e che gli sforzi $\boldsymbol{\tau}$ lo siano nei singoli volumi V_1 e V_2 , in modo che tutte le funzioni integrande riescano continue, si può ridurre a zero il volume complessivo V senza variare A_f per ottenere

$$\int_{A_f} (\boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_2) dA_f = 0,$$

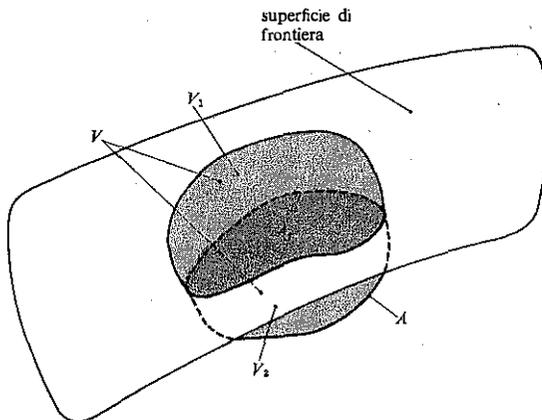


Fig. 7.2. - Volume da considerare per l'esame dell'assetto degli sforzi di superficie in corrispondenza di una superficie di frontiera sulla quale la velocità è discontinua.

nella quale τ_1 e τ_2 stanno per gli sforzi vigenti da bande opposte della frontiera. Infine, l'arbitrarietà della A_f considerata permette di concludere che gli sforzi τ_1 e τ_2 devono coincidere, e quindi che lo sforzo τ deve essere continuo anche in corrispondenza della frontiera. Ma nel fluido ideale si ha

$$\tau = p\mathbf{n},$$

e la continuità dello sforzo τ implica la continuità della pressione p .

Nella seconda circostanza, invece, e cioè quando la frontiera divide fluidi diversi, sussiste attraverso essa un salto di pressione, dovuto alla tensione superficiale. Si ammette che tale salto di pressione sia ancora espresso dalla formula di Laplace, vista nel paragrafo 2.3 con riferimento a condizioni statiche.

7.7. Limitazioni dello schema.

Si è già osservato che lo schema di fluido ideale riesce utile quando la dissipazione di energia è fatto di entità marginale nel fenomeno da studiare.

Il trascurare completamente le dissipazioni impedisce tuttavia l'individuazione univoca del moto. Più precisamente, sia

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad p = p(\mathbf{x}, t)$$

la soluzione di un particolare problema di moto di fluido ideale barotropico, in un intervallo di tempo compreso fra $t_1=0$ e $t_2>0$, compatibile, in quanto tale, con l'equazione di Euler

$$\rho \mathbf{f} - \text{grad } p = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt},$$

con la condizione di legame barotropico

$$f(\rho, p, t) = 0,$$

e con le condizioni al contorno.

Si consideri poi il moto inverso che, in ciascun istante \tilde{t} compreso nell'intervallo da $\tilde{t}_1=0$ a $\tilde{t}_2=t_2$, assume velocità opposte e pressioni identiche a quelle presenti nel moto primitivo all'istante t_2-t . Questo moto inverso, caratterizzato da

$$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, \tilde{t}) = -\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_2-t), \quad \tilde{p}(\mathbf{x}, \tilde{t}) = p(\mathbf{x}, t_2-t)$$

è ancora un moto di fluido ideale barotropico. Si verifica subito, infatti, che le nuove velocità e pressioni soddisfano l'equazione di Euler

$$\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{f}} - \text{grad } \tilde{p} = \tilde{\rho} \frac{D\tilde{\mathbf{v}}}{D\tilde{t}}$$

purché sia

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \tilde{t}) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, t_2-t), \\ f(\tilde{\rho}, \tilde{p}, \tilde{t}) &= f(\rho, p, t_2-t). \end{aligned}$$

Lo stesso moto inverso rispetta anche le condizioni di frontiera, ove queste implicino solo i valori delle pressioni, oppure ove la frontiera stessa venga assoggettata a moto inverso, imponendole velocità

$$\tilde{\mathbf{v}}_t(\mathbf{x}, \tilde{t}) = -\mathbf{v}_t(\mathbf{x}, t_2-t).$$

Così, lo schema di moto di fluido ideale non è in grado di stabilire quale dei due moti, quello diretto o quello inverso, possa realmente aver luogo.

Il fatto che il moto diretto ed il moto inverso siano entrambi compatibili con lo schema di fluido ideale ha notevoli implicazioni direttamente utilizzabili. La più importante fra queste è forse costituita dal *teorema di d'Alembert*, che estende un'osservazione fatta da d'Alembert nel 1752 a proposito del moto di una corrente ideale che investa normalmente un cilindro circolare. Se una corrente di fluido ideale, a grande distanza da un corpo solido, tende ad una corrente uniforme, la corrente stessa non

può esercitare sul corpo nessuna forza complessiva con direzione uguale a quella della velocità asintotica. Infatti il moto inverso, che dovrebbe dar luogo ad un effetto contrario, presenta invece la stessa distribuzione di pressioni sulla superficie del corpo investito.

Altra limitazione importante dello schema di moto di fluido ideale è connessa con l'impossibilità di rispettare la condizione di aderenza del fluido alle pareti solide. Quando la velocità del fluido non coincide con quella della parete, la descrizione del campo delle velocità può risultare in buon accordo generale con le osservazioni sperimentali, ma cade in difetto nell'indicare le velocità presenti presso le pareti solide.

Fra le conseguenze di questo fatto è particolarmente importante quella che si manifesta in corrispondenza di una convessità della parete. Esiste qui un valore non nullo della velocità tangenziale, e quindi un'accelerazione diretta dal fluido verso la parete stessa. L'equazione di Euler avverte allora che presso la superficie solida deve esistere un gradiente di pressione, con componente diretta verso l'interno della massa fluida. Al crescere della curvatura della parete, fino a giungere allo spigolo vivo, crescono oltre ogni limite l'accelerazione ed il gradiente della pressione, con conseguente aumento senza limite della pressione nel fluido presso la parete.

Tale palese contraddizione con i dati sperimentali può essere eliminata introducendo delle superfici di discontinuità della componente tangenziale della velocità, scaturenti dagli spigoli vivi ed atte a rappresentare il contorno delle scie. Qualche esempio in proposito verrà esposto nel paragrafo 8.9.

7.8. Moti geostrofici.

Le conclusioni del paragrafo 7.3 relative alle caratteristiche generali del moto dei fluidi perfetti poggiano sulla presenza di un potenziale per le accelerazioni, presenza garantita quando le forze specifiche di massa ammettono anch'esse potenziale, e quando, contemporaneamente, il moto è barotropico.

Se una di queste ultime condizioni non è verificata, manca di conseguenza anche il potenziale delle accelerazioni. Allora, in accordo con quanto detto nel paragrafo 5.10, la variazione temporale intrinseca della circolazione della velocità è, in ciascun istante, diversa per i vari circuiti chiusi, riuscendo quindi non nulla anche per i circuiti riconducibili ad un punto senza uscire dal dominio interessato dal moto. Inoltre, i tubi di vortice non sono più ancorati agli elementi fluidi.

Forze specifiche di massa prive di potenziale entrano in gioco quando divengono apprezzabili le forze specifiche di Coriolis

$$\mathbf{f}_{\text{co}} = -2\boldsymbol{\omega}_s \wedge \mathbf{v}$$

e le forze specifiche di Euler

$$\mathbf{f}_{\text{eu}} = -\frac{d\boldsymbol{\omega}_s}{dt} \wedge \mathbf{x}$$

connesse ad una velocità di rotazione siderale $\boldsymbol{\omega}_s$ del riferimento.

In casi di questo genere il moto presenta all'osservatore rotante accelerazioni prive di potenziale. Il moto stesso, tuttavia, conserva sempre il potenziale per le accelerazioni, se queste sono stimate nel riferimento siderale. Contemporaneamente, ai due osservatori appaiono diverse anche le altre due grandezze cinematiche di più immediato collegamento con la dinamica: il rotore e la circolazione della velocità.

Se il riferimento rotante trasla con velocità \mathbf{v}_0 rispetto a quello siderale, le velocità \mathbf{v} che appaiono nel riferimento rotante sono legate dalla relazione

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}_s \wedge \mathbf{x}$$

alle velocità \mathbf{v}_s viste nel riferimento siderale. Posto che queste due velocità siano di classe C^1 , si ha

$$\text{rot} \mathbf{v}_s = \text{rot} \mathbf{v} + \text{rot}(\boldsymbol{\omega}_s \wedge \mathbf{x}),$$

ma si controlla subito, operando sulle componenti, che

$$\text{rot}(\boldsymbol{\omega}_s \wedge \mathbf{x}) = 2\boldsymbol{\omega}_s$$

e perciò si conclude che deve essere

$$\text{rot} \mathbf{v}_s = \text{rot} \mathbf{v} + 2\boldsymbol{\omega}_s.$$

La stessa relazione

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}_s \wedge \mathbf{x}$$

mostra pure che le circolazioni delle due velocità lungo un medesimo circuito chiuso L sono connesse fra loro dal legame

$$\int_L \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{x} = \int_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} + \int_L (\boldsymbol{\omega}_s \wedge \mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}.$$

Però

$$\int_L (\boldsymbol{\omega}_s \wedge \mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_A \text{rot}(\boldsymbol{\omega}_s \wedge \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \, dA = \int_A 2\boldsymbol{\omega}_s \cdot \mathbf{n} \, dA = 2\omega_s \int_{A_0} dA_0,$$

intendendo che A sia una superficie con bordo L , e che A_0 ne sia la proiezione su un piano ortogonale ad $\boldsymbol{\omega}_s$: Così risulta, in ciascun istante,

$$\int_L \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{x} = \int_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} + 2\omega_s \int_{A_0} dA_0,$$

e di conseguenza anche

$$\frac{D}{Dt} \int_L \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{x} = \frac{D}{Dt} \int_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} + 2 \frac{D}{Dt} \left[\omega_s \int_{A_0} dA_0 \right].$$

Il sistema di riferimento rotante è quello comunemente adottato per descrivere i fenomeni che avvengono presso il geode: $\boldsymbol{\omega}_g$ è allora la velocità di rotazione siderale della terra, $\boldsymbol{\omega}_g$, praticamente costante nel tempo. Le forze specifiche di Euler sono perciò irrilevanti, e l'equazione del moto del fluido ideale assume la forma

$$\mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega}_g \wedge \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{a},$$

nella quale \mathbf{g} sta per la forza specifica dovuta al geopotenziale.

Gli effetti della rotazione terrestre riescono tanto più vistosi quanto meno importante risulta l'accelerazione \mathbf{a} rispetto alla forza specifica di Coriolis. Se il moto varia lentamente nel tempo, l'accelerazione

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \mathbf{v}$$

si riduce in sostanza a $\mathbf{v} \cdot \text{grad} \mathbf{v}$ ed assume valori la cui entità può essere rappresentata da $v(vL^{-1})$, essendo v il modulo di una velocità tipica del moto in esame ed L una distanza dopo la quale il modulo della velocità risulti variato di v . L'intensità della forza specifica di Coriolis, a sua volta, può essere indicata da $\omega_g v$. Il rapporto di queste due espressioni è il numero di Rossby

$$Ro = \frac{v}{\omega_g L},$$

introdotto nel paragrafo 3.4.

Quando Ro è molto maggiore dell'unità, le forze di Coriolis hanno importanza marginale.

Per contro, se Ro è molto minore dell'unità, il moto risulta dominato dalle forze di Coriolis, e viene detto *geostrofico*. In quest'ultimo caso l'equazione del moto si riduce alla forma

$$\mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega}_g \wedge \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p = 0.$$

Attraverso una moltiplicazione scalare per \mathbf{v} , si vede subito che per una corrente geostrofica orizzontale deve essere

$$\mathbf{v} \cdot \text{grad } p = 0.$$

Perciò, il gradiente delle pressioni deve avere componente nulla lungo le traiettorie orizzontali, il che equivale a dire che queste traiettorie devono svolgersi lungo linee isobare.

Dalla stessa equazione del moto geostrofico si trae inoltre che le componenti orizzontali delle forze specifiche di Coriolis, $-2\boldsymbol{\omega}_g \wedge \mathbf{v}$, e le componenti orizzontali di quelle legate alla disuniformità delle pressioni, $-\rho^{-1} \text{grad } p$, si bilanciano tra loro. Ne segue che, per un osservatore che guardi il moto dall'alto, una traiettoria orizzontale sull'emisfero settentrionale lascia alla sua destra pressioni maggiori di quelle che lascia alla sua sinistra. Così, un moto circolatorio su piano orizzontale dell'emisfero nord che, visto da quota elevata, risulti in verso orario, è connesso a zone di relativamente alta pressione centrale, mentre racchiude zone di pressioni comparativamente basse se appare di verso antiorario. Si tratta, nell'ordine, dei moti anticiclonici e di quelli ciclonici. Fenomeni inversi si presentano nell'emisfero meridionale.

Alla categoria dei moti decisamente geostrofici appartengono pure i venti generali da ovest presenti nell'alta troposfera. Le masse d'aria equatoriali in quota vengono dislocate verso i poli da aria calda ascendente, ed acquistano velocità orizzontali, dirette verso est, via via crescenti. Nel riferimento siderale, e limitatamente alla fase di moto barotropico, esiste un potenziale univoco per le accelerazioni; così la circolazione intorno all'asse del geoide delle velocità successivamente assunte dai medesimi elementi fluidi si mantiene inalterata nel tempo. Per un osservatore solidale con la terra, la circolazione corrispondente, inizialmente nulla presso l'equatore, cresce verso i poli con tasso temporale

$$\frac{D}{Dt} \int_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = -2\omega_k \frac{D}{Dt} \int_{A_0} dA_0$$

perché si riduce la proiezione equatoriale dell'area racchiusa

$$\int_{A_0} dA_0 = \pi r^2 \cos^2 \vartheta'$$

man mano che aumenta la latitudine ϑ' , mentre resta sostanzialmente costante la distanza r della corrente dal centro terrestre. I venti da ovest raggiungono la loro massima intensità, dell'ordine dei 130 m s^{-1} , a quota di circa 14 km, ed intorno ai 30° di latitudine: più oltre il flusso di aria verso i poli è bloccato da aria stratosferica fredda discendente.

Questa corrente di massima intensità è nota come *corrente a getto subtropicale*, ed è associata, giusta l'equazione geostrofica, ad un primo massimo orizzontale del gradiente meridiano di pressione.

Più lontano dall'equatore, l'aria calda tropicale sale in quota e si muove verso i poli scorrendo sui lembi delle lenti di aria fredda artica od antartica: il risultato è un nuovo aumento dell'intensità dei venti in quota da ovest, con un nuovo massimo, anche se meno accentuato del precedente, situato intorno ai 45° di latitudine ed a quote dell'ordine dei 10 km. La nuova corrente da ovest di massima intensità relativa è detta *corrente a getto del fronte polare*. L'ulteriore spostamento d'aria verso i poli è ancora una volta impedito da aria stratosferica fredda discendente, ed in corrispondenza di questa corrente a getto si riscontra un secondo massimo orizzontale del gradiente meridiano di pressione.

A quote molto minori, ed inferiori ad un kilometro in media, la circolazione atmosferica è sostanzialmente influenzata dalla presenza della superficie del geoide, e non può essere inquadrata nello schema di fluido ideale.

Fenomeni analoghi a quelli dei moti geostrofici avvengono anche quando la massa fluida è trascinata in un intenso moto di rotazione rispetto al geoide. Per un osservatore che partecipi a tale moto medio, e che sia perciò animato da velocità angolare ω rispetto alla terra, le forze specifiche dovute al geopotenziale e le forze specifiche di Coriolis connesse alla rotazione siderale della terra possono risultare trascurabili. Al loro posto intervengono invece, solo che ω sia abbastanza elevata, le forze centrifughe per unità di massa

$$\mathbf{f}_\omega = -\omega \wedge (\omega \wedge \mathbf{x})$$

e le forze specifiche di Coriolis

$$\mathbf{f}_{co} = -2\omega \wedge \mathbf{v}.$$

Le forze specifiche di Euler sono ancora nulle, se ω è costante nel tempo.

Nel riferimento rotante è allora

$$-\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}) - 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{a}$$

che si riduce alla

$$-\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}) - 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p = 0$$

quando le accelerazioni stimate dall'osservatore rotante sono trascurabili.

In coordinate cartesiane ortogonali, con l'asse delle z diretto come $\boldsymbol{\omega}$ e coincidente con l'asse di rotazione, si ha allora

$$\omega_z x + 2\omega_z v_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$\omega_z y - 2\omega_z v_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Dalle prime due, dopo derivazione incrociata, si deduce che

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

e quindi che il moto sui singoli piani normali ad $\boldsymbol{\omega}$ si svolge come moto isocoro. Se poi il moto è isocoro nel suo insieme, dal confronto di questo risultato con la $\text{div } \mathbf{v} = 0$ si trae anche

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Per esemplificare questo risultato, ottenuto da Proudman nel 1916 e noto come *teorema di Proudman*, serve bene il fatto seguente: un corpo che si allontana dall'asse di rotazione di una centrifuga trascina nel suo moto tutto il fluido racchiuso nel cilindro tangente al corpo stesso e parallelo all'asse di rotazione.

7.9. Moti baroclinici.

Oltre che nel caso dei moti soggetti a forze specifiche di massa non derivanti da un potenziale, le accelerazioni \mathbf{a} sono prive di potenziale anche quando non è verificata la condizione di moto barotropico, ossia

quando manca il legame diretto

$$f(\varrho, p, t) = 0$$

fra densità ϱ e pressione p . Giusta l'equazione di stato

$$\varrho = \varrho(p, \tau),$$

tale legame cessa di esistere, ad esempio, se la conduzione termica porta a superfici isoterme, di uguale temperatura assoluta τ , distinte dalle superfici isobare, a pressione uniforme, che perciò non possono più essere superfici isopicnotiche, di densità anch'essa uniforme.

Tutte le volte che le superfici isobare riescono distinte dalle superfici isopicnotiche, il moto è detto *baroclinico*.

Anche nei moti baroclinici, dato che le accelerazioni non ammettono potenziale, le variazioni intrinseche nel tempo della circolazione della velocità \mathbf{v} assumono valori diversi sui differenti circuiti chiusi L . Più precisamente, sostituendo nella relazione

$$\frac{D}{Dt} \int_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{x}$$

del paragrafo 5.10 l'espressione di \mathbf{a} fornita dall'equazione del moto di fluido ideale

$$\mathbf{f} - \frac{1}{\varrho} \text{grad} p = \mathbf{a},$$

si vede che

$$\frac{D}{Dt} \int_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_L \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} - \int_L \frac{1}{\varrho} \text{grad} p \cdot d\mathbf{x}.$$

Anche ammesso che le forze specifiche di massa \mathbf{f} presentino potenziale univoco, resta comunque

$$\frac{D}{Dt} \int_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = - \int_L \frac{1}{\varrho} \text{grad} p \cdot d\mathbf{x},$$

con valore non nullo. Di conseguenza, ed in accordo con la formula di Kelvin

$$\int_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_A \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{v} dA,$$

nella quale A è una superficie regolare delimitata da L , il moto baroclinico risulta rotazionale. Inoltre, sempre in accordo con quanto detto nel paragrafo 5.10, i tubi di vortice non sono più trasportati dal fluido nel suo moto, e non conservano inalterata la propria intensità.

Un esempio tipico di moto baroclinico è quello della *brezza di mare*. Le superfici isobare sovrastanti la costa sono pressoché orizzontali. Spostandosi dal mare verso terra lungo le isobare si incontrano però, durante le ore diurne, temperature via via crescenti, perché la terra è riscaldata meglio dall'irraggiamento solare, e le densità incontrate riescono perciò progressivamente minori.

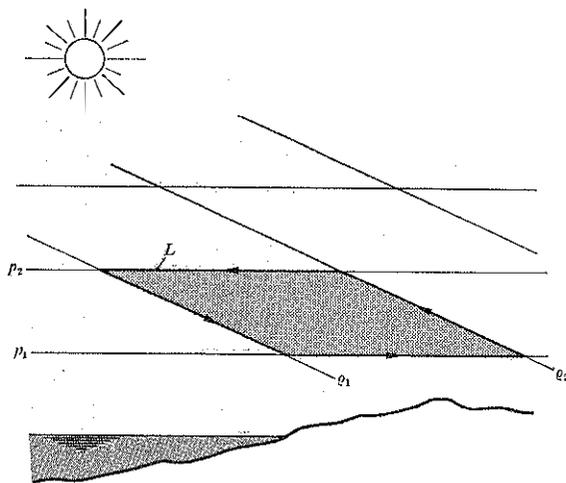


Fig. 7.3. — Circolazione indotta nelle ore diurne dal più intenso riscaldamento dell'atmosfera soprastante la terra. Presso la costa esiste brezza di mare.

Scelto ora su un piano verticale un circuito chiuso L , come quello riportato in figura 7.3, comprendente una linea isobara, di pressione p_1 , un tratto di linea isopicnotica, a densità uniforme ρ_2 , una nuova linea isobara, contraddistinta da pressione p_2 minore della p_1 , svolgentesi perciò a quota più elevata, ed un'ultima linea isopicnotica, a densità ρ_1 maggiore di ρ_2 , spostata quindi verso mare rispetto alla prima, si ha

$$\int_L \frac{1}{\rho} \text{grad } p \cdot dx = \frac{1}{\rho_2} (p_2 - p_1) + \frac{1}{\rho_1} (p_1 - p_2) = \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) (p_2 - p_1) < 0$$

Così risulta, con lo stesso verso di percorrenza su L ,

$$\frac{D}{Dt} \int_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} > 0,$$

e ciò significa che si va formando una circolazione d'aria caratterizzata da brezza di mare presso il suolo e ricircolo contrario in quota.

Durante le ore notturne, il raffreddamento del terreno è più pronunciato di quello del mare, ed il fenomeno ora esaminato avviene con circolazione inversa.

Riferimenti citati.

ALEMBERT, JEAN BAPTISTE LE ROND D', *Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides*, Paris, 1752.

BERNOULLI, DANIEL, *Hydrodynamica sive de viribus et motibus fluidorum commentarii*, Strasbourg, 1738.

EULER, LEONHARD, *Principes généraux de l'état d'équilibre des fluides*, Mém. Acad. Sci. Berlin, 1757, pp. 217-273.

FOURIER, JEAN BAPTISTE JOSEPH, *Sur le mouvement de la chaleur dans les fluides*, Mem. Acad. Sci. Inst. France, 1833, pp. 507-530.

PROUDMAN, J., *On the motion of solids in a liquid possessing vorticity*, Proc. Roy. Soc., 1916, pp. 408-424.

CAPITOLO OTTAVO

MOTI IRROTAZIONALI

8.1. Origine del moto irrotazionale.

Le considerazioni svolte nel paragrafo 7.3 hanno portato alla conclusione che i moti barotropici di fluido ideale soggetti a forze specifiche di massa dotate di potenziale univoco presentano sempre potenziale univoco per le accelerazioni.

Più precisamente, si è visto che quando la densità ϱ , la pressione p e la velocità \mathbf{v} sono di classe C^1 , e le forze specifiche di massa \mathbf{f} sono di classe C^0 , il moto del fluido ideale si svolge in accordo con l'equazione di Euler

$$\varrho \mathbf{f} - \text{grad } p = \varrho \frac{D\mathbf{v}}{Dt},$$

e si è visto pure che, in presenza di potenziale univoco ϕ per le forze specifiche di massa, tale da rendere

$$\mathbf{f} = \text{grad } \phi,$$

ed in corrispondenza al verificarsi della condizione di barotropicità

$$f(\varrho, p, t) = 0,$$

necessaria per scrivere

$$\frac{1}{\varrho} \text{grad } p = \text{grad} \int \frac{dp}{\varrho},$$

la stessa equazione di Euler assicura che le accelerazioni a ammettono

potenziale univoco. È infatti

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \text{grad} \left(\phi - \int \frac{dp}{\rho} \right).$$

Sempre nel paragrafo 7.3, ricordando il teorema di Lagrange del paragrafo 5.10, si è notato inoltre che l'esistenza del potenziale univoco per le accelerazioni assicura che un moto irrotazionale in un dato istante resta tale per tutta la sua durata.

L'assetto irrotazionale è ovviamente presente in origine, quando il moto da studiare si sviluppa a partire da uno stato di quiete generale. La velocità è allora inizialmente nulla, e perciò il rotore della velocità è nullo anch'esso.

La presenza del potenziale univoco per le forze specifiche di massa e l'assetto barotropico del fluido garantiscono la stabilità di questo stato di quiete, come si è visto nel paragrafo 6.3. Tuttavia, la condizione di equilibrio generale può essere distrutta, per esempio, dal movimento imposto a parte almeno delle superfici solide che delimitano la massa fluida. La costante presenza del potenziale univoco per le forze specifiche di massa e la permanenza dell'assetto barotropico assicurano che il moto così generato conserva carattere irrotazionale.

A volte interessa esaminare moti permanenti, con velocità indipendenti dal tempo. Le osservazioni che precedono non assicurano più che il moto sia irrotazionale.

Il moto permanente può essere il risultato finale, di regime, di un moto di fluido ideale sviluppatosi a partire da uno stato di quiete in concomitanza a forze specifiche di massa dotate sempre di potenziale univoco, ed a comportamento costantemente barotropico del fluido. In tal caso il moto permanente finale è moto irrotazionale.

Può essere invece che durante la genesi del moto di regime abbiano avuto luogo fenomeni capaci di produrre vorticità. Concentrando l'attenzione solo sullo stato finale, questi fenomeni non vengono presi in esame, ma le loro conseguenze si ripercuotono sullo stato di regime. In questo secondo caso il moto permanente, anche se inquadrabile nello schema di fluido ideale barotropico in campo di forze specifiche di massa con potenziale univoco, è moto rotazionale.

Osservazioni analoghe a quelle ora svolte sul contenuto di vorticità del moto permanente valgono anche per i moti di regime caratterizzati da velocità ancora variabili nel tempo, purché queste si ripresentino localmente immutate con cadenza temporale fissa.

Invece, con riferimento al solo moto permanente, si può notare che, se le velocità sono di classe C^2 e non più solo di classe C^1 come ammesso

fin qui, se le traiettorie attraversano tutte una zona nella quale è nulla la vorticità ma non la velocità, e se le densità non mutano nel tempo, allora il moto deve essere tutto irrotazionale.

Ciò perché, come ricordato nel paragrafo 7.4, nel caso di fluido ideale in moto barotropico permanente sotto l'azione di forze specifiche di massa derivanti dal potenziale ϕ è uniforme su ciascuna traiettoria la somma di Bernoulli

$$-\phi + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2},$$

somma che assume inoltre valore uniforme nella zona in cui il moto è irrotazionale. Ne segue che è

$$\text{grad} \left(-\phi + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) = 0$$

in tutto il dominio interessato dal moto. Per confronto con l'equazione di Euler nella forma

$$\text{grad} \left(\phi - \int \frac{dp}{\rho} \right) = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\mathbf{v} \wedge \text{rot} \mathbf{v} + \text{grad} \frac{v^2}{2},$$

si ottiene direttamente

$$\mathbf{v} \wedge \text{rot} \mathbf{v} = 0.$$

Così, la vorticità $\mathbf{w} = \text{rot} \mathbf{v}$ è nulla o parallela a \mathbf{v} , ed è quindi

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} f(\mathbf{x}),$$

con $f(\mathbf{x})$ funzione scalare del punto \mathbf{x} .

L'ipotesi che \mathbf{v} sia di classe C^2 implica che esiste ed è nullo $\text{div} \mathbf{w} = \text{div} \text{rot} \mathbf{v}$. Deve essere perciò

$$\text{div} \mathbf{w} = \text{div} \left[\rho \mathbf{v} \frac{f(\mathbf{x})}{\rho} \right] = \frac{f(\mathbf{x})}{\rho} \text{div}(\rho \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \cdot \text{grad} \frac{f(\mathbf{x})}{\rho} = 0.$$

Quest'ultimo legame si riduce a quello

$$\rho \mathbf{v} \cdot \text{grad} \frac{f(\mathbf{x})}{\rho} = 0$$

quando la densità ρ è permanente, come si verifica subito servendosi dell'equazione di continuità. Ne segue che lo scalare

$$\frac{f(\mathbf{x})}{\rho}$$

deve essere uniforme su ciascuna traiettoria. La $\mathbf{w} = \mathbf{v}f(\mathbf{x})$ mostra perciò che anche

$$\frac{\mathbf{w}}{\rho \mathbf{v}}$$

è uniforme sulle singole traiettorie. Ma queste attraversano tutte una zona nella quale \mathbf{w} è nullo senza che lo sia \mathbf{v} : il rapporto in questione, nullo in tale zona, è nullo ovunque ed il moto è uniformemente irrotazionale.

8.2. Distribuzione della pressione.

Per il moto irrotazionale di un fluido ideale che presenti densità ρ uniforme e permanente, il teorema di Bernoulli si scrive nella forma

$$\text{grad} \left(-\phi + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = 0,$$

vista nel paragrafo 7.4, nella quale ϕ è il potenziale scalare della velocità \mathbf{v} , che porge

$$\mathbf{v} = \text{grad } \phi,$$

e ϕ è il potenziale delle forze specifiche di massa \mathbf{f} , che dà

$$\mathbf{f} = \text{grad } \phi.$$

La condizione che il fluido presenti densità uniforme e permanente implica che sia

$$\text{div } \mathbf{v} = \text{div } \text{grad } \phi = \nabla^2 \phi = 0,$$

e perciò che il potenziale ϕ sia armonico. Armoniche sono di conseguenza le componenti v_x , v_y e v_z della velocità.

Amesso che anche ϕ sia armonico, come è, ad esempio, quando ϕ è il geopotenziale, il teorema di Bernoulli fornisce subito importanti informazioni sulla distribuzione della pressione p . Infatti, sotto le ipotesi elencate, si ha

$$\text{div } \text{grad} \left(-\phi + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{1}{\rho} \text{div } \text{grad } p + \text{div } \text{grad} \frac{v^2}{2} = 0,$$

ossia

$$\nabla^2 p = -\rho \nabla^2 \left(\frac{v^2}{2} \right),$$

nella quale è

$$\begin{aligned}\nabla^2\left(\frac{v^2}{2}\right) &= \sum_k^3 \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \sum_k^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left[v_x \frac{\partial v_x}{\partial x_k} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial x_k} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial x_k} \right] = \\ &= \sum_k^3 \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x_k} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x_k} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x_k} \right)^2 \right] + v_x \nabla^2 v_x + v_y \nabla^2 v_y + v_z \nabla^2 v_z.\end{aligned}$$

Tenuto conto dell'armonicità delle componenti v_x , v_y e v_z , si ha dunque

$$\nabla^2 p = -\rho \sum_k^3 \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x_k} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x_k} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x_k} \right)^2 \right],$$

e riesce perciò

$$\nabla^2 p < 0.$$

Così p è *subarmonica*: la somma delle sue tre derivate spaziali seconde è sempre negativa. Esse non possono essere tutte nulle o positive in un punto interno del dominio sede del moto, e la pressione p non può quindi avere punti interni di minimo relativo. I punti nei quali p assume i valori minimi devono perciò essere punti di frontiera. Esistono invece punti di massimo relativo per la pressione.

I punti nei quali la pressione raggiunge un massimo relativo non coincidono, di norma, con i punti di minimo relativo del modulo della velocità. Per avere la sovrapposizione di questi due estremanti dovrebbe essere contemporaneamente

$$\text{grad } p = 0 \quad \text{e} \quad \text{grad } v^2 = 0,$$

e quindi, secondo il teorema di Bernoulli, anche

$$\text{grad} \left(-\phi + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = 0.$$

I massimi relativi di pressione ed i minimi relativi del modulo della velocità appaiono però sovrapposti quando il moto è permanente e le forze specifiche di massa sono nulle.

8.3. Esempi di moti piani permanenti.

I moti piani irrotazionali ed isocori, come ricordato nel paragrafo 5.11, ammettono sia il potenziale ϕ per le velocità, sia la funzione di corrente di Lagrange ψ . Queste due grandezze possono dipendere dal tempo, oltre che dalle coordinate spaziali cartesiane x ed y . In ogni caso, sono entrambe

armoniche, e reciprocamente coniugate attraverso le relazioni

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

che forniscono le componenti della velocità. Eccezion fatta per i punti di ristagno, nei quali la velocità si annulla, le linee contraddistinte nel medesimo istante da valori uniformi di φ e di ψ si intersecano ortogonalmente fra loro.

In particolare, il potenziale per la velocità e la funzione di corrente di Lagrange

$$\varphi = v_a x, \quad \psi = v_a y,$$

con v_a indipendente da x e da y , rappresentano il *campo uniforme* delle velocità

$$v_x = v_a, \quad v_y = 0.$$

Le linee equipotenziali sono rette parallele all'asse y e le linee di corrente sono rette parallele a quello x , come indicato nella figura 8.1, che è relativa al caso in cui v_a è positivo.

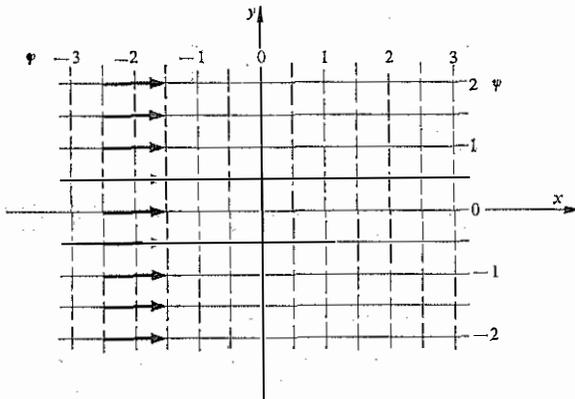


Fig. 8.1. - Linee equipotenziali e linee di corrente di Lagrange per il moto uniforme.

Con riferimento al semipiano contraddistinto da ascisse non positive, il potenziale e la funzione di corrente

$$\varphi = -\frac{C}{2}(x^2 - y^2), \quad \psi = -Cxy,$$

in cui C è una costante positiva, descrivono bene una *corrente che investe normalmente una parete impermeabile* disposta lungo l'asse y . Le componenti della velocità sono in questo caso

$$v_x = -Cx, \quad v_y = Cy.$$

Nell'origine degli assi la velocità si annulla, e questo punto costituisce di conseguenza un punto di ristagno. L'andamento delle linee equipotenziiali e delle linee di corrente è riportato nella figura 8.2.

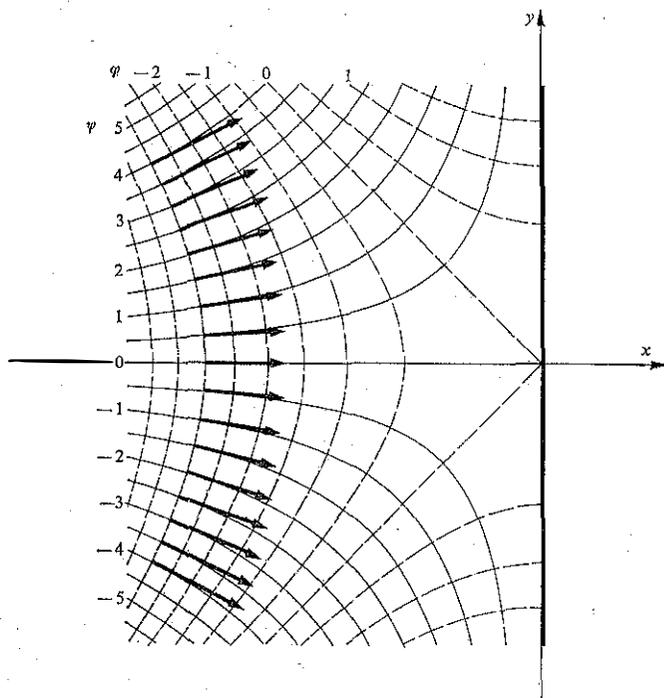


Fig. 8.2. - Corrente piana che investe ortogonalmente una parete anch'essa piana.

Nel dominio esterno al cerchio di raggio r_0 centrato sull'origine degli assi possono essere assegnati il potenziale polidromo e la funzione di corrente

$$\varphi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad \psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r_0}.$$

Come illustrato dalla figura 8.3, le linee equipotenziali sono ora semirette radiali uscenti dalla circonferenza di raggio r_0 , e le linee di corrente sono circonferenze ad essa concentriche. Il moto rappresentato è dunque

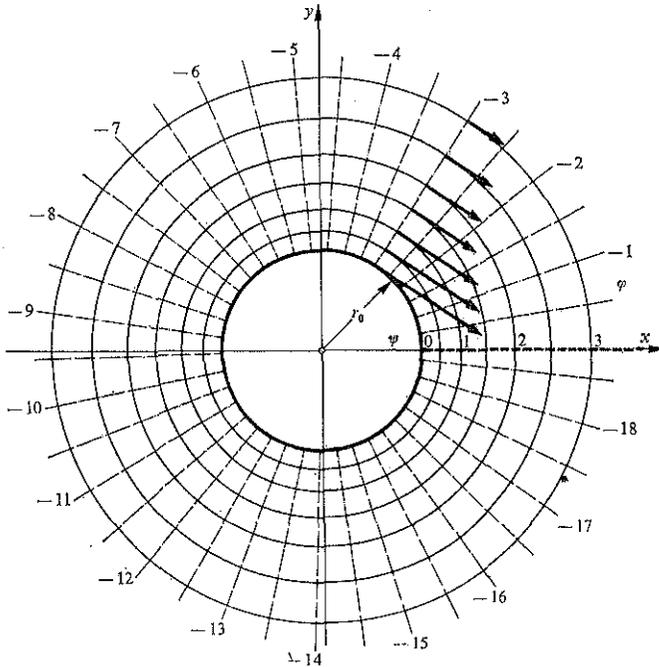


Fig. 8.3. - Vortice piano intorno al cerchio di raggio r_0 . Si è ammesso che la circolazione della velocità valga $\Gamma = 6\pi \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

un moto di circolazione, detto *vortice*, centrato nell'origine degli assi e svolgentesi intorno al cerchio di base di raggio r_0 . Per le componenti della velocità si ottengono i valori

$$v_x = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad v_y = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

e la circolazione della velocità lungo una linea che racchiuda una volta il cerchio base, e che sia condotta in senso orario, risulta essere Γ . A questo parametro si dà il nome di *intensità del vortice*. Se Γ è negativo il moto si svolge in senso antiorario. È interessante notare che se la circonferenza di raggio r_0 fosse realizzata da una parete solida animata da

moto di rotazione intorno al proprio centro, con verso orario e con velocità periferica pari a $I/2\pi r_0$, la condizione di aderenza del fluido alla parete sarebbe soddisfatta.

Assumendo invece che, esternamente al cerchio di raggio r_0 , il potenziale e la funzione di corrente siano

$$\varphi = \frac{Q'}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r_0}, \quad \psi = \frac{Q'}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

si ottiene la rappresentazione di un moto radiale: le componenti della velocità hanno i valori

$$v_x = \frac{Q'}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v_y = \frac{Q'}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

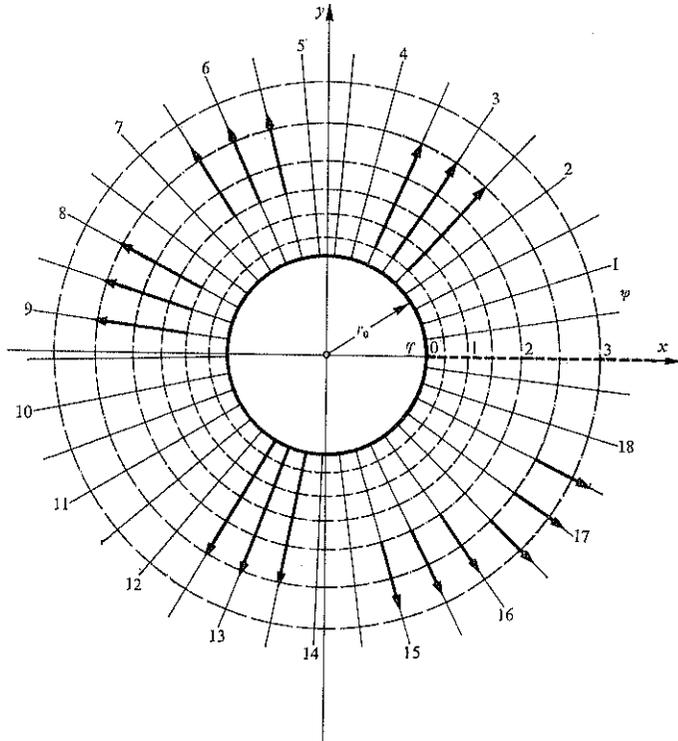


Fig. 8.4. - Linee equipotenziali e linee di corrente esterne al cerchio di raggio r_0 per il moto piano dovuto ad una sorgente di portata $Q' = 6\pi \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ per unità di sviluppo normale al piano campione.

Il flusso di \mathbf{v} uscente attraverso una linea L , che racchiuda una volta il cerchio di base e che abbia versore normale interno \mathbf{n} , ossia

$$-\int_L \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dL,$$

è Q' . Se Q' è positivo, come supposto nel tracciare la figura 8.4, si dice che il campo delle velocità è dovuto ad una *sorgente* di raggio r_0 e di *intensità* Q' , mentre se Q' è negativo si parla di un *pozzo* di raggio r_0 e di intensità pari al modulo di Q' . Poiché le velocità, sulla circonferenza di raggio r_0 , sono uniformemente uguali a $Q'/2\pi r_0$, la circonferenza stessa deve essere costituita, in generale, da una parete permeabile. Può però essere formata da una parete impermeabile, se questa si dilata con velocità istantanea $Q'/2\pi r_0$: in tal caso sarebbe soddisfatta anche la condizione di aderenza del fluido alla parete.

Sempre esternamente al cerchio di raggio r_0 siano dati ora il potenziale per la velocità e la funzione di corrente

$$\varphi = \frac{\mathcal{M}'}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \psi = -\frac{\mathcal{M}'}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Le linee equipotenziali sono archi di circonferenza con centro sull'asse x , i cui prolungamenti all'interno del cerchio passano per l'origine delle coordinate. Le linee di corrente costituiscono un'analoga famiglia di circonferenze, i cui centri si trovano però sull'asse y . Entrambe le famiglie di curve sono tracciate in figura 8.5. Alle componenti della velocità competono i valori

$$v_x = -\frac{\mathcal{M}'}{2\pi} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad v_y = -\frac{\mathcal{M}'}{\pi} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Sul cerchio di base la velocità normale non si annulla, ma vale, assumendola positiva se uscente,

$$v_x \frac{x}{r_0} + v_y \frac{y}{r_0} = -\frac{\mathcal{M}'}{2\pi} \frac{x}{r_0^3},$$

così che la parete del cerchio di base deve essere permeabile. Si osserva però che, imponendo al cerchio la velocità $-(\mathcal{M}'/2\pi r_0^2)\mathbf{i}_x$, la velocità normale alla parete si annulla nell'istante in cui il centro del cerchio transita per l'origine delle coordinate: il potenziale e la funzione di corrente in esame possono quindi descrivere il moto istantaneo all'esterno di un cerchio base impermeabile e mobile. In entrambi i casi sia il flusso uscente dal cerchio di base, sia la circolazione di \mathbf{v} lungo una linea chiusa avvolgente il cerchio stesso sono entrambe nulle.

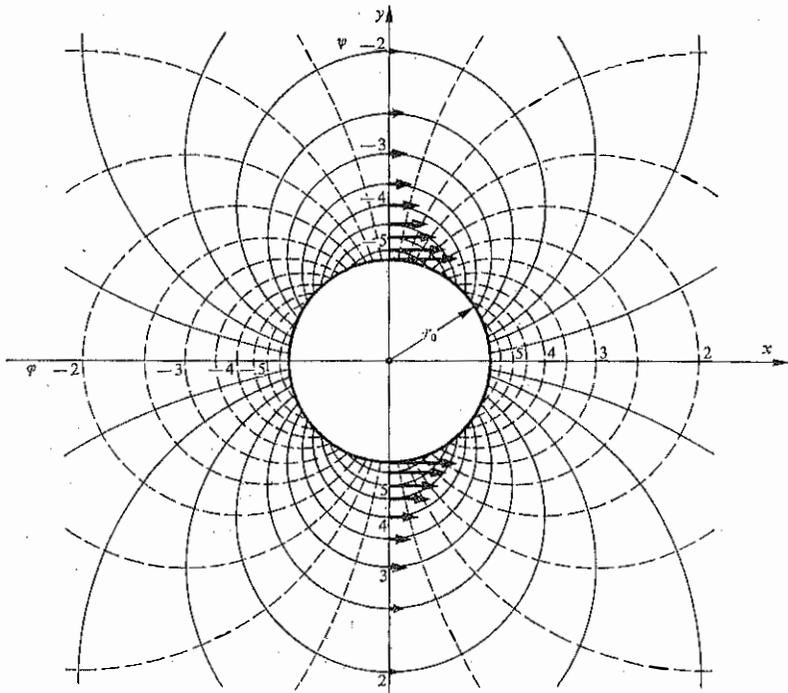


Fig. 8.5. - Assetto delle linee di livello del potenziale per le velocità e delle linee di corrente legate ad un dipolo di intensità lineare $\mathcal{M}' = 12\pi r_0 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ centrato nell'origine del riferimento ed orientato come l'asse x .

La linearità rispetto alla velocità \mathbf{v} della condizione di moto irrotazionale, $\text{rot } \mathbf{v} = 0$, e di moto isocoro, $\text{div } \mathbf{v} = 0$, consente di sovrapporre due o più moti irrotazionali ed isocori, per ottenere nuovi moti irrotazionali ed isocori.

In particolare, deponendo su $x = -x_1, y = 0$ una sorgente di intensità $Q' = \mathcal{M}'/2x_1$, ed un pozzo di pari intensità su $x = +x_1, y = 0$, si ottiene per sovrapposizione un campo di velocità che, a distanza dall'origine degli assi grande rispetto ad x_1 , non differisce apprezzabilmente dall'ultimo campo di velocità esaminato. Per questo motivo si dice che tale campo di velocità è dovuto ad un *dipolo* di intensità \mathcal{M}' disposto lungo l'asse x , centrato nell'origine degli assi, ed orientato nel verso delle x crescenti, quando \mathcal{M}' è positivo.

Sommando ad un potenziale di dipolo, di intensità $\mathcal{M}' = 2\pi v_0 r_0^2$, quello di una corrente uniforme di pari direzione e verso, con modulo della velo-

cià uguale a v_a , si ottiene la rappresentazione di un moto conosciuto come *corrente euleriana intorno al cerchio* di raggio r_0 . Il potenziale risultante e la relativa funzione di corrente hanno la forma

$$\varphi = v_a x + v_a r_0^2 \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$\psi = v_a y - v_a r_0^2 \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Si vede subito che la circonferenza di raggio r_0 è una linea di corrente, e che i punti $x = \pm r_0, y = 0$ sono punti di ristagno, perché in essi \mathbf{v} è

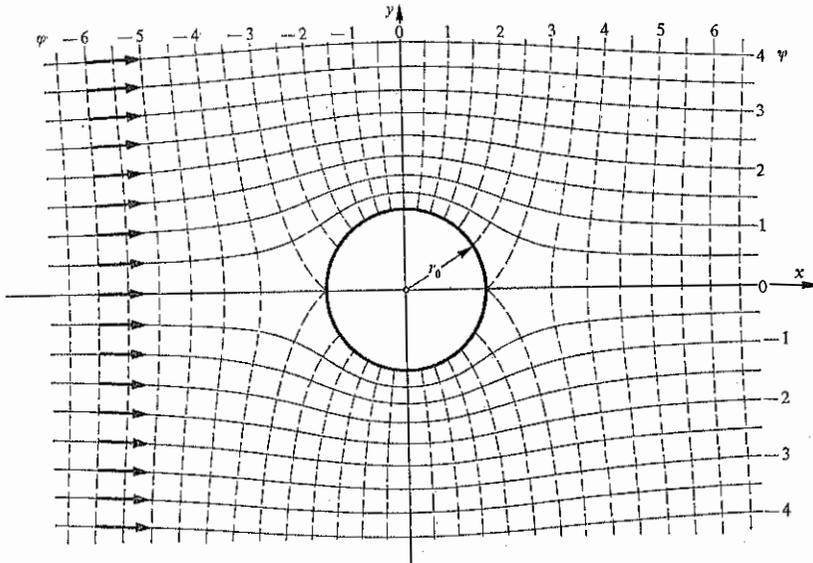


Fig. 8.6. - Corrente euleriana intorno al cerchio di raggio r_0 . I valori assegnati al potenziale φ ed alla funzione di corrente ψ sono compatibili con una velocità asintotica $v_a = 3/2 r_0$ m s⁻¹.

nulla. L'andamento generale delle linee equipotenziali e delle linee di corrente è riportato nella figura 8.6. Le componenti della velocità hanno le espressioni

$$v_x = v_a - v_a r_0^2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$v_y = -v_a r_0^2 \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

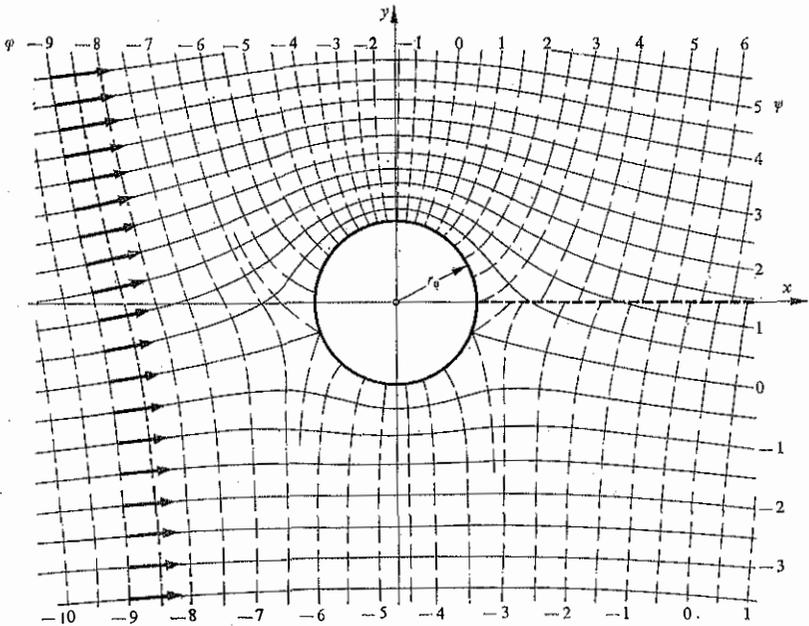


Fig. 8.7. - Esempio di corrente traslocircolatoria intorno al cerchio. Si è ammesso ancora $v_a = 3/2r_0$ m s⁻¹, e si è sovrapposta la circolazione $\Gamma = 4\pi v_a r_0/3$ m² s⁻¹.

Sovrapponendo inoltre anche il potenziale di un vortice orario che abbia il cerchio di base coincidente con quello del dipolo si ottiene la rappresentazione di una *corrente traslocircolatoria intorno al cerchio* base stesso. Il potenziale complessivo per la velocità e la funzione di corrente coniugata sono

$$\varphi = v_a x + v_a r_0^2 \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

$$\psi = v_a y - v_a r_0^2 \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r_0}.$$

Le linee sulle quali il potenziale φ o la funzione di corrente ψ assumono valore costante sono riprodotte nelle figure 8.7, 8.8, 8.9 per valori crescenti del rapporto $\Gamma/4\pi v_a r_0$. La velocità ha componenti

$$v_x = v_a - v_a r_0^2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$v_y = -v_a r_0^2 \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

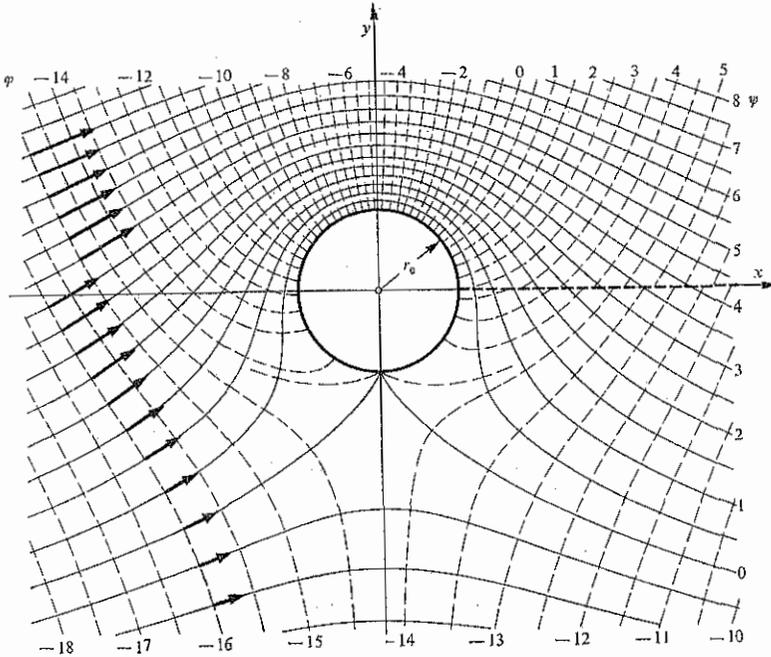


Fig. 8.8. - Esempio di corrente traslucircularoria intorno al cerchio. È anche qui $v_a = 3/2r_0$ m s⁻¹, ma si è posto $\Gamma = 4\pi v_a r_0$ m² s⁻¹.

Nei punti della circonferenza di raggio r_0 aventi coordinate

$$x = \pm \sqrt{r_0^2 - \left(\frac{\Gamma}{4\pi v_a}\right)^2}, \quad y = -\frac{\Gamma}{4\pi v_a}$$

la velocità si annulla, purché sia $\Gamma < 4\pi v_a r_0$. I punti di ristagno si presentano invece sull'asse y negli altri casi: coalescono sulla circonferenza di base se è $\Gamma = 4\pi v_a r_0$, assumono ordinate

$$y = -\frac{\Gamma}{4\pi v_a} \pm \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{4\pi v_a}\right)^2 - r_0^2}$$

quando si ha $\Gamma > 4\pi v_a r_0$, così che uno solo di essi risulta esterno alla circonferenza di base.

La distribuzione della pressione connessa ai vari tipi di moto esaminati in questo paragrafo può essere dedotta dall'uniformità della somma di Bernoulli, garantita dalla condizione di irrotazionalità del moto. Nel caso

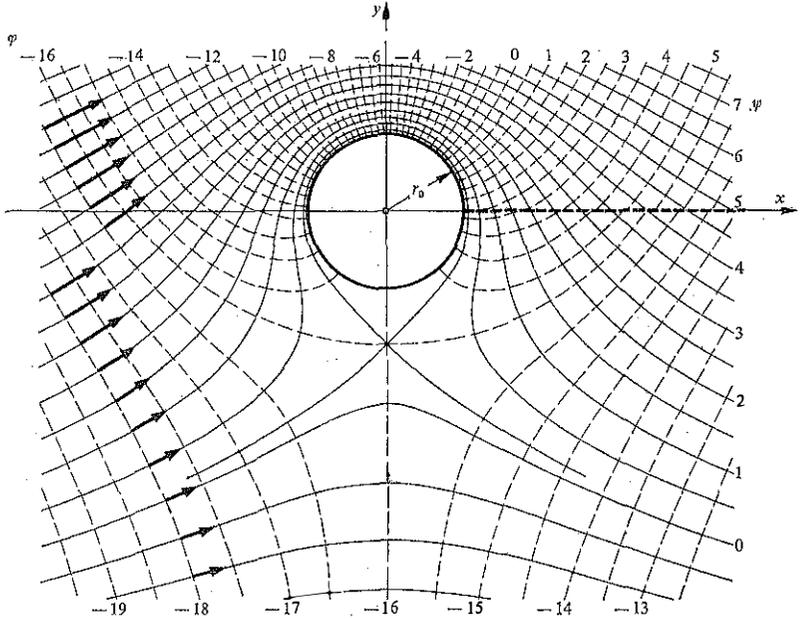


Fig. 8.9. - Esempio di corrente traslocircolatoria intorno al cerchio. Mantenendo il valore $v_a = 3/2r_0$ m s⁻¹, si è supposta esistente la circolazione $\Gamma = 4\pi v_a r_0 (3,4/3)$ m² s⁻¹.

particolare in cui il fluido è in moto permanente, con densità ρ sempre ed ovunque costante, la somma stessa si riduce alla forma

$$-\phi + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}.$$

Inoltre, l'effetto delle forze specifiche di massa descritte dal potenziale ϕ si traduce in una componente idrostatica per la pressione. Prescindendo, si ottengono i risultati che seguono.

Nel moto uniforme, detta p_0 la pressione presente nell'origine degli assi, si ha

$$p - p_0 = 0.$$

Per la corrente che investe ortogonalmente la parete piana è

$$p - p_0 = -\frac{\rho}{2} C^2 (x^2 + y^2),$$

con identico significato di p_0 .

Nel caso del vortice centrato sull'origine degli assi, indicando con p_0 la pressione contro la circonferenza di base, risulta

$$p - p_0 = \frac{\varrho}{2} \left(\frac{\Gamma}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{x^2 + y^2} \right),$$

mentre nel caso della sorgente di intensità Q' , collocata sempre nell'origine degli assi, si ha

$$p - p_0 = \frac{\varrho}{2} \left(\frac{Q'}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{x^2 + y^2} \right),$$

con pari significato di p_0 .

Al campo del dipolo di intensità \mathcal{M}' centrato nell'origine del riferimento cartesiano ed orientato nel verso delle x crescenti compete la pressione

$$p - p_0 = \frac{\varrho}{2} \left(\frac{\mathcal{M}'}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{1}{r_0^4} - \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \right),$$

ove p_0 sta per la pressione esistente in $x = -r_0$, $y = 0$.

La corrente euleriana attorno al cerchio base di raggio r_0 è associata alla pressione

$$p - p_0 = -\frac{\varrho}{2} v_a^2 \left[\left\{ 1 - r_0^2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right\}^2 + \left\{ r_0^2 \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right\}^2 \right]$$

intendendo ancora con p_0 la pressione nel punto $x = -r_0$, $y = 0$.

Infine, la corrente traslocircolatoria intorno al cerchio base centrato nell'origine del riferimento presenta pressioni

$$p - p_0 = -\frac{\varrho}{2} \left[\left\{ v_a - v_a r_0^2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \right\}^2 + \left\{ v_a r_0^2 \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \right\}^2 - \left\{ \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{r_0} \right\}^2 \right],$$

con p_0 che indica di nuovo la pressione in $x = -r_0$, $y = 0$.

È immediato verificare che in tutti i casi esaminati la componente lungo x della spinta complessiva esercitata dalla corrente contro il cerchio base è nulla, in accordo con il teorema di d'Alembert, ricordato nel paragrafo 7.7.

Anche l'analoga componente lungo y è nulla, salvo che nel caso della corrente traslocircolatoria. Per questa, con riferimento all'unità di sviluppo normalmente al piano di riferimento, si ottiene il risultato

$$F_y' = \varrho v_a \Gamma,$$

in accordo con il teorema di Kutta e Joukowski, che verrà esposto nel paragrafo 11.12.

8.4. Esempi di moti permanenti a simmetria assiale.

Per la rappresentazione dei moti a simmetria assiale conviene adottare un riferimento sferico, il cui asse coincida con quello di simmetria del moto. I potenziali φ per le velocità, e le funzioni di corrente di Stokes Ψ risultano così legati alla distanza r dall'origine dell'asse polare ed alla colatitudine ϑ rispetto allo stesso asse. La componente radiale della velocità, diretta nel verso secondo il quale aumentano le distanze r , è fornita dalle relazioni

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta},$$

mentre la componente ad essa normale, diretta secondo le colatitudini ϑ crescenti, va ricavata con le formule

$$v_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = -\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Psi}{\partial r}.$$

Con questo riferimento, il potenziale per le velocità e la funzione di corrente di Stokes

$$\varphi = v_a r \cos \vartheta, \quad \Psi = v_a \frac{r^2}{2} \sin^2 \vartheta$$

competono alla *corrente uniforme* di velocità v_a parallela all'asse polare.

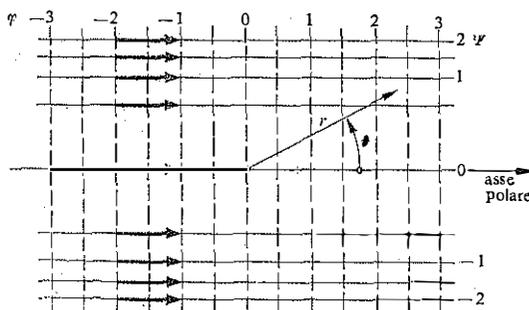


Fig. 8.10. - Linee di uguale potenziale φ e linee di uguale funzione di corrente Ψ di Stokes per il moto uniforme.

La figura 8.10 riporta l'andamento delle linee equipotenziali e delle linee di corrente nel caso di v_a positiva.

Limitatamente al semispazio contraddistinto da colatitudini comprese nell'intervallo chiuso $\pi/2, 3\pi/2$, il potenziale e la funzione di corrente

$$\varphi = \frac{C}{2} r^2 (1 - 3 \cos^2 \vartheta), \quad \psi = -Cr^3 \cos \vartheta \sin^2 \vartheta$$

rappresentano una corrente che investe ortogonalmente una parte piana, impermeabile, normale all'asse polare e passante per l'origine di questo. L'assetto delle linee equipotenziali e delle linee di corrente è quello tracciato in figura 8.11. Le componenti della velocità valgono

$$v_r = Cr(1 - 3 \cos^2 \vartheta), \quad v_\vartheta = 3Cr \cos \vartheta \sin \vartheta.$$

Esternamente alla sfera di raggio r_0 , centrata nell'origine, il potenziale e la funzione di corrente

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi r}, \quad \psi = -\frac{Q}{4\pi} \cos \vartheta$$

sono quelli di un moto puramente radiale, di velocità

$$v_r = \frac{Q}{4\pi r^2}.$$

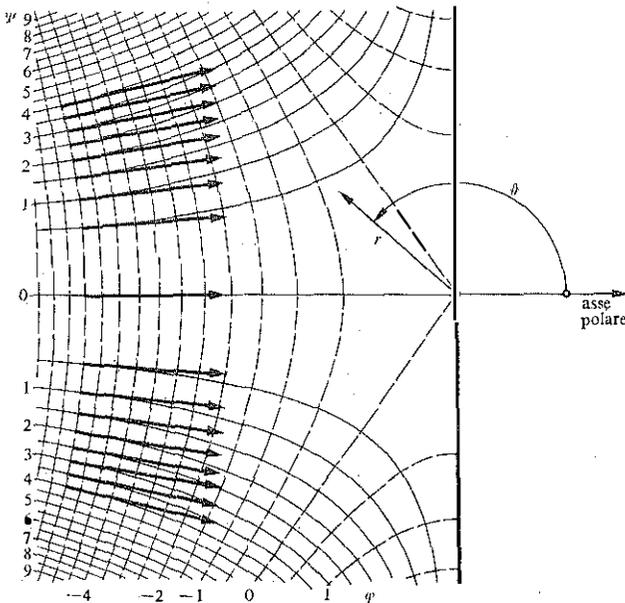


Fig. 8.11. - Corrente a simmetria assiale che investe una parete piana.

Il flusso della velocità uscente da una superficie chiusa che racchiuda una volta la sfera di raggio r_0 vale Q . Analogamente a quanto si fa nel caso piano corrispondente, si dice che il campo delle velocità è dovuto ad una *sorgente* di raggio r_0 e di *intensità* Q , purché Q sia positivo. Si dice invece che il campo delle velocità è originato da un *pozzo* di raggio r_0 e di intensità pari al modulo di Q , quando questa è negativa. La figura 8.12 si riferisce al caso di Q positiva.

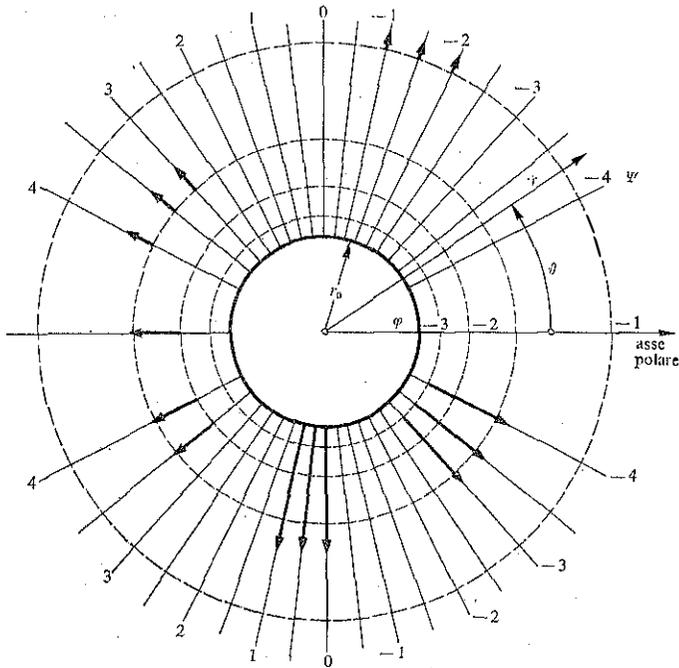


Fig. 8.12. - Linee equipotenziali e linee di corrente di Stokes esterne alla sfera di raggio $r_0 = 1,5$ m connesse ad una sorgente centrale di intensità $Q = 12\pi r_0^3 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$.

Sempre all'esterno della sfera di raggio r_0 , con centro nell'origine, il potenziale e la funzione di corrente

$$\varphi = \frac{\mathcal{M}}{4\pi} \frac{1}{r^2} \cos \vartheta, \quad \psi = -\frac{\mathcal{M}}{4\pi} \frac{1}{r} \sin^2 \vartheta$$

rappresentano il moto dovuto ad un *dipolo* di intensità \mathcal{M} orientato come l'asse polare e collocato nell'origine. Infatti, deponendo su $r = r_1$, $\vartheta = \pi$ e

su $r = r_1$, $\vartheta = 0$ rispettivamente una sorgente ed un pozzo di intensità $Q = \mathcal{M}/2r_1$ si ottiene un campo di velocità che, a distanze dall'origine grandi rispetto ad r_1 , è approssimato bene dal campo in esame. Al campo di dipolo competono le componenti della velocità

$$v_r = -\frac{\mathcal{M}}{2\pi} \frac{1}{r^3} \cos \vartheta, \quad v_\vartheta = -\frac{\mathcal{M}}{4\pi} \frac{1}{r^3} \sin \vartheta.$$

La figura 8.13 riassume le informazioni sul campo connesso al dipolo orientato come l'asse polare.

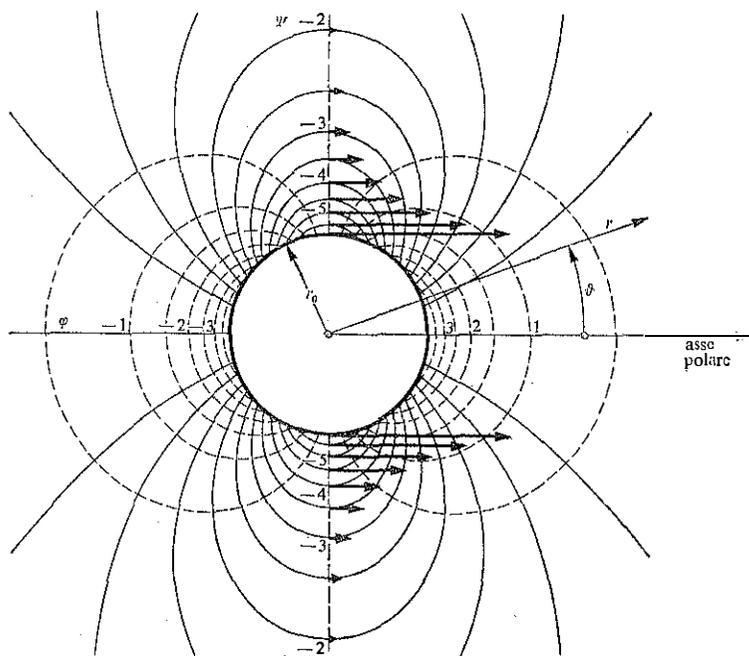


Fig. 8.13. - Dipolo di intensità $\mathcal{M} = 24\pi r_0 m^4 s^{-1}$ orientato come l'asse polare e centrato nell'origine. Si è assunto $r_0 = 1,5$ m.

Al solito, la sovrapposizione di più campi irrotazionali ed isocori a simmetria assiale genera nuovi campi irrotazionali ed isocori di uguale simmetria. Così, sovrapponendo un campo di dipolo, di intensità $\mathcal{M} = 2\pi v_a r_0^3$, al campo uniforme di velocità v_a , avente la stessa direzione e lo stesso verso del dipolo, si ottiene la *corrente euleriana intorno alla sfera*

Nel moto uniforme si ha

$$p - p_0 = 0,$$

essendo p_0 la pressione nell'origine del riferimento.

Nel caso della corrente che investe ortogonalmente la parete piana risulta

$$p - p_0 = -\frac{\rho}{2} C^2 r^2 (1 + 3 \cos^2 \vartheta),$$

dando a p_0 il medesimo significato.

Il moto associato ad una sorgente dà luogo a pressioni

$$p - p_0 = \frac{\rho}{2} \left(\frac{Q}{4\pi} \right)^2 \left(\frac{1}{r_0^4} - \frac{1}{r^4} \right),$$

indicando con p_0 la pressione esistente contro la sfera di raggio r_0 .

Nel moto indotto dal dipolo si ha

$$p - p_0 = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\mathcal{M}}{4\pi} \right)^2 \left(\frac{3}{r_0^6} - \frac{3 \cos^2 \vartheta}{r^6} \right),$$

ove p_0 sta per la pressione che esiste nel punto $r = r_0$, $\vartheta = \pi$.

Infine, per la corrente euleriana intorno alla sfera, risulta

$$p - p_0 = -\frac{\rho}{2} v_a^2 \left[\left(1 - \frac{r_0^3}{r^3} \right)^2 \cos^2 \vartheta + \left(1 + \frac{r_0^3}{2r^3} \right)^2 \sin^2 \vartheta \right],$$

con lo stesso significato di p_0 .

8.5. Moto lungo pareti ondulate.

Il moto con velocità uniformi, visto all'inizio del paragrafo 8.3, è un moto irrotazionale ed isocoro, che può, come tale, rappresentare il moto di un fluido ideale avente densità uniforme e permanente e svolgentesi nello spazio delimitato da due superfici piane, parallele fra loro ed alla direzione della velocità.

Irregolarità o corrugamenti di una almeno delle superfici limite comportano necessariamente alterazioni del campo delle velocità. Una prima idea delle modifiche apportate può essere ottenuta facilmente supponendo che una delle superfici abbia modeste ondulazioni cilindriche, con forma sinusoidale.

Più precisamente, scelto l'asse y perpendicolare alle primitive pareti piane, ed in modo che queste abbiano equazione $y = 0$ ed $y = -Y_0$, ed assegnato all'asse x direzione e verso coincidenti con quelli della velocità, originariamente uniforme, del fluido, si suppone ora che la parete $y = 0$ venga ondulata fino ad assumere ordinate y pari a

$$y_0 = \mathcal{A} \sin \frac{2\pi}{L} x,$$

come indicato in figura 8.15.

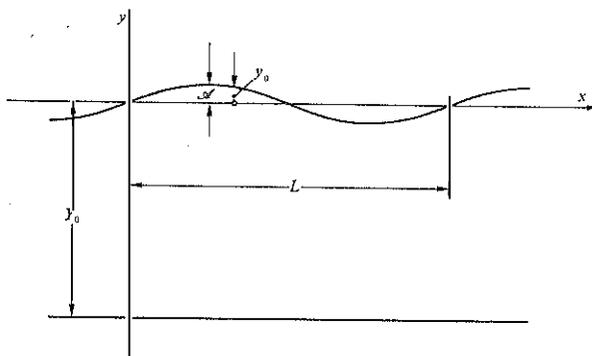


Fig. 8.15. - Notazioni adottate per lo studio del moto lungo pareti ondulate.

Nell'ipotesi che queste ondulazioni abbiano ampiezza \mathcal{A} molto piccola rispetto alla loro lunghezza d'onda L ed alla distanza media Y_0 dall'altra superficie, ossia nelle ipotesi

$$\mathcal{A} \ll L, \quad \mathcal{A} \ll Y_0,$$

il campo delle velocità dovrà risultare poco diverso da quello uniforme.

Comunque, il nuovo campo di velocità deve rispettare le condizioni cinematiche di frontiera, e deve perciò avere componenti nulle in direzione normale alla frontiera stessa. Come si è visto nel paragrafo 7.6, ciò implica che sulla frontiera risulti

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } f = 0,$$

essendo $f = 0$ l'equazione di tale frontiera. Sulla parete ondulata è

$$f(x, y) = y - y_0 = y - \mathcal{A} \sin \frac{2\pi}{L} x = 0$$

e si deve avere perciò

$$\left[\mathbf{v} \cdot \left(-\mathbf{i}_x \mathcal{A} \frac{2\pi}{L} \cos \frac{2\pi}{L} x + \mathbf{i}_y \right) \right]_{y=y_0} = 0$$

ossia

$$\left[-v_x \mathcal{A} \frac{2\pi}{L} \cos \frac{2\pi}{L} x + v_y \right]_{y=y_0} = 0.$$

Però, dato che v_x non deve differire molto dalla velocità U del moto uniforme, questa condizione può essere sostituita, in via di approssimazione, da quella

$$\left[-U \mathcal{A} \frac{2\pi}{L} \cos \frac{2\pi}{L} x + v_y \right]_{y=y_0} = 0.$$

Inoltre, poiché \mathcal{A} è molto minore di L e di Y_0 , si può richiedere che la condizione ora scritta venga soddisfatta su $y = 0$, anziché su $y = y_0$: Complessivamente si porrà perciò

$$[v_y]_{y=0} = U \mathcal{A} \frac{2\pi}{L} \cos \frac{2\pi}{L} x.$$

La condizione cinematica relativa alla parete piana $y = -Y_0$, per la quale è

$$f(x, y) = y + Y_0 = 0,$$

porta subito a

$$[\mathbf{v} \cdot \mathbf{i}_y]_{y=-Y_0} = 0,$$

ossia a

$$[v_y]_{y=-Y_0} = 0.$$

È facile verificare che un potenziale φ adatto al nuovo contesto è quello

$$\varphi = Ux + U \mathcal{A} \frac{\operatorname{Ch} \frac{2\pi}{L} (y + Y_0)}{\operatorname{Sh} \frac{2\pi}{L} Y_0} \cos \frac{2\pi}{L} x,$$

che è armonico, e quindi tale da rappresentare un moto irrotazionale ed

isocoro, e che fornisce le espressioni per le componenti della velocità

$$v_x = U - U \mathcal{A} \frac{2\pi}{L} \frac{\text{Ch} \frac{2\pi}{L} (y + Y_0)}{\text{Sh} \frac{2\pi}{L} Y_0} \sin \frac{2\pi}{L} x,$$

$$v_y = U \mathcal{A} \frac{2\pi}{L} \frac{\text{Sh} \frac{2\pi}{L} (y + Y_0)}{\text{Sh} \frac{2\pi}{L} Y_0} \cos \frac{2\pi}{L} x$$

in accordo con le condizioni cinematiche di frontiera. Esso, inoltre, si riduce a quello del moto uniforme, $v_x = Ux$, quando l'ampiezza \mathcal{A} delle ondulazioni si annulla.

La funzione di corrente di Lagrange associata ha la forma

$$\psi = Uy - U \mathcal{A} \frac{\text{Sh} \frac{2\pi}{L} (y + Y_0)}{\text{Sh} \frac{2\pi}{L} Y_0} \sin \frac{2\pi}{L} x.$$

L'andamento delle traiettorie, che risulta indipendente dal valore di U , è schematizzato in figura 8.16.

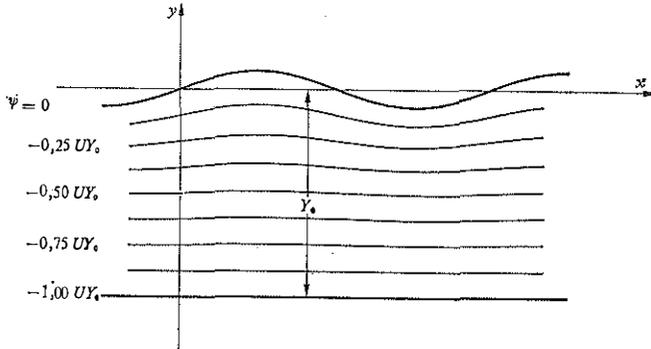


Fig. 8.16. - Linee di corrente nel moto stazionario in prossimità di una parete ondulata.

Nel calcolare le coordinate X ed Y delle posizioni successivamente raggiunte dall'elemento fluido che si presenterebbe in x ed y se il moto fosse ancora uniforme, ossia nell'integrare le equazioni

$$d(X - x) = (v_x - U) dt$$

$$d(Y - y) = v_y dt,$$

occorre valutare v_x e v_y nel punto x, y , anziché in quello X, Y , per non introdurre termini contenenti \mathcal{A}^2 a fattore, estranei al grado di approssimazione adottato. Si ha così

$$X - x = \mathcal{A} \frac{\operatorname{Ch} \frac{2\pi}{L}(y + Y_0)}{\operatorname{Sh} \frac{2\pi}{L} Y_0} \cos \frac{2\pi}{L} U t,$$

$$Y - y = \mathcal{A} \frac{\operatorname{Sh} \frac{2\pi}{L}(y + Y_0)}{\operatorname{Sh} \frac{2\pi}{L} Y_0} \sin \frac{2\pi}{L} U t.$$

Al nuovo assetto delle velocità corrisponde una nuova distribuzione della pressione p , diversa da quella p_1 presente nel caso di pareti lisce e di moto uniforme con velocità U . Il teorema di Bernoulli, ferme restando le condizioni di moto irrotazionale permanente di fluido avente sempre ed ovunque la medesima densità ρ , e soggetto alle forze specifiche di massa descritte dal potenziale ϕ , assicura che il trinomio

$$-\phi + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}$$

si mantiene uniforme. Si ha perciò

$$p - p_1 = -\rho \frac{v^2}{2} + \rho \frac{U^2}{2} = -\rho \frac{v_x^2 + v_y^2}{2} + \rho \frac{U^2}{2} \simeq$$

$$\simeq \rho U^2 \mathcal{A} \frac{2\pi}{L} \frac{\operatorname{Ch} \frac{2\pi}{L}(y + Y_0)}{\operatorname{Sh} \frac{2\pi}{L} Y_0} \sin \frac{2\pi}{L} x,$$

a meno di termini trascurabili, che contengono \mathcal{A}^2 a fattore.

Queste oscillazioni della pressione p rispetto al valore p_1 non modificano le spinte complessive esercitate dal fluido sulle pareti. Non così se si concentra l'attenzione su porzioni limitate di parete. Ad esempio, sulla zona di parete ondulata compresa fra $x = 0$ ed $x = L/2$, ed avente sviluppo unitario in direzione normale agli assi x ed y , l'eccesso di spinta esercitata nella direzione e nel verso delle y ammonta a

$$F'_y = \int_0^{L/2} [p(x, 0) - p_1] dx = \int_0^{L/2} \rho U^2 \mathcal{A} \frac{2\pi}{L} \frac{1}{\operatorname{Th} \frac{2\pi}{L} Y_0} \sin \frac{2\pi}{L} x dx = \frac{2\rho U^2 \mathcal{A}}{\operatorname{Th} \frac{2\pi}{L} Y_0}$$

mentre si presenta con segno opposto sull'analogha zona compresa fra $x = L/2$ ed $x = L$. Lo stesso calcolo condotto per le porzioni affacciate della parete piana porta a

$$F_y' = \int_0^{L/2} [p(x, -Y_0) - p_L] dx = \frac{2\rho U^2 \mathcal{A}}{\text{Sh} \frac{2\pi}{L} Y_0}$$

e, rispettivamente, al valore opposto. I risultati possono essere riassunti dicendo che le differenze di pressione tenderebbero ad accentuare le ondulazioni della parete ondulata ed a deformare quella piana per riprodurre su di essa le medesime ondulazioni.

Quando la distanza media Y_0 fra le due pareti è molto maggiore della lunghezza d'onda L , le formule precedenti si semplificano notevolmente. Ad esempio, l'espressione

$$\frac{\text{Ch} \frac{2\pi}{L} (y + Y_0)}{\text{Sh} \frac{2\pi}{L} Y_0} = \frac{\exp\left(\frac{2\pi}{L} y\right) \exp\left(\frac{2\pi}{L} Y_0\right) + \exp\left(-\frac{2\pi}{L} y\right) \exp\left(-\frac{2\pi}{L} Y_0\right)}{\exp\left(\frac{2\pi}{L} Y_0\right) - \exp\left(-\frac{2\pi}{L} Y_0\right)}$$

differisce da quella

$$\exp \frac{2\pi}{L} y$$

solo quando è irrilevante. Così il potenziale della velocità può essere utilmente approssimato da quello

$$\varphi = Ux + U\mathcal{A} \exp \frac{2\pi}{L} y \cos \frac{2\pi}{L} x,$$

cui va associata la

$$\psi = Uy - U\mathcal{A} \exp \frac{2\pi}{L} y \sin \frac{2\pi}{L} x,$$

quale funzione di corrente di Lagrange.

8.6. Onde progressive di superficie.

Lo schema di moto irrotazionale di fluido a densità uniforme e permanente permette di inquadrare molti aspetti del moto ondoso di un pelo libero.

Si suppone che una massa liquida, soggetta alle forze di massa descritte dal geopotenziale

$$\phi = -gz,$$

poggi su un fondo orizzontale. Si fissa l'origine delle z in modo che il pelo libero abbia in media quota $z = 0$ e si indica con Y_0 lo spessore medio del corpo liquido: il fondo ha perciò quota $z = -Y_0$.

Scelto ora un asse x orizzontale, si cerca un moto che porti il pelo libero alle quote

$$z_0 = \mathcal{A} \sin\left(\frac{2\pi}{L}x - \frac{2\pi}{T}t\right)$$

e che faccia quindi assumere al pelo libero stesso forma cilindrica, avente in ciascun istante andamento sinusoidale lungo x , con lunghezza d'onda L , come indicato in figura 8.17, avente inoltre oscillazioni locali sinusoidali nel tempo, con periodo T , e che appaia animata di moto rigido nel verso delle x crescenti con velocità L/T .

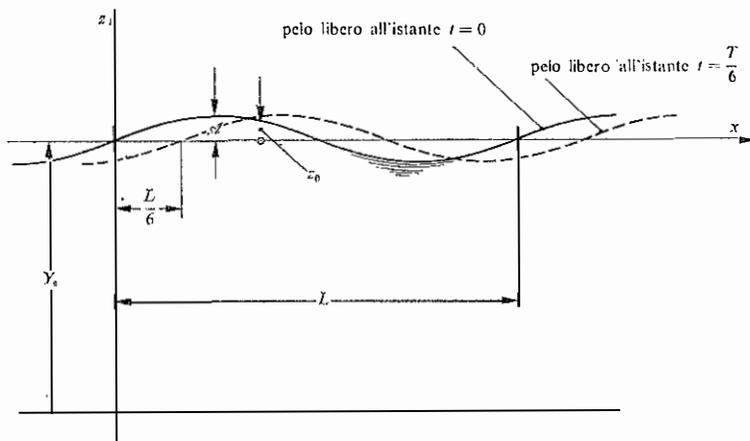


Fig. 8.17. - Onda progressiva di superficie nella sua configurazione all'istante adottato per l'origine dei tempi, e nella configurazione assunta dopo un intervallo di tempo pari ad $1/6$ del periodo.

Si ammette ancora che le escursioni del pelo libero siano molto piccole rispetto alla lunghezza d'onda ed allo spessore medio della lama liquida, ponendo di conseguenza

$$\mathcal{A} \ll L, \quad \mathcal{A} \ll Y_0.$$

Ad un osservatore in moto con velocità L/T nel verso delle x crescenti, la frontiera ondulata appare ferma, di ordinata

$$\tilde{z}_0 = \mathcal{A} \sin \frac{2\pi}{L} \tilde{x},$$

in cui

$$\tilde{x} = x - \frac{L}{T} t.$$

Le velocità del fluido, misurate da tale osservatore, devono perciò essere quelle già studiate nel paragrafo precedente. Il loro potenziale è

$$\tilde{\varphi} = U\tilde{x} + U\mathcal{A} \frac{\text{Ch} \frac{2\pi}{L} (\tilde{z} + Y_0)}{\text{Sh} \frac{2\pi}{L} Y_0} \cos \frac{2\pi}{L} \tilde{x}.$$

Per l'osservatore fermo, invece, il campo delle velocità è dato dalla sovrapposizione delle velocità riscontrate dall'osservatore mobile con un campo di velocità uniformi, di modulo L/T , dirette nel verso delle x crescenti. Per l'osservatore fermo, il potenziale delle velocità ha dunque la struttura

$$\varphi = \frac{L}{T} x + Ux - \frac{L}{T} Ut + U\mathcal{A} \frac{\text{Ch} \frac{2\pi}{L} (z + Y_0)}{\text{Sh} \frac{2\pi}{L} Y_0} \cos \left(\frac{2\pi}{L} x - \frac{2\pi}{T} t \right),$$

ovvero, trascurando l'inessenziale addendo dipendente solo dal tempo, quella

$$\varphi = \left(\frac{L}{T} + U \right) x + U\mathcal{A} \frac{\text{Ch} \frac{2\pi}{L} (z + Y_0)}{\text{Sh} \frac{2\pi}{L} Y_0} \cos \left(\frac{2\pi}{L} x - \frac{2\pi}{T} t \right).$$

La descrizione del moto così ottenuta è accettabile solo se porta a pressioni p sulla superficie $z = z_0$ compatibili con il fatto che questa deve essere un pelo libero. Anche ammessa uniforme la pressione nel fluido soprastante, la pressione nel liquido, in corrispondenza del pelo libero, non può essere livellata, perché il pelo libero stesso è ondulato, e sussiste attraverso esso un salto di pressione

$$\Delta p = \sigma \frac{1}{r},$$

dovuto alla tensione superficiale σ , e legato alla curvatura locale ed istantanea $1/r$.

Il raggio r può essere calcolato subito, partendo dall'espressione del pelo libero $z = z_0$, in base alla formula

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial z_0}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Indicata con p_A la pressione nell'aeriforme, si richiede pertanto che la pressione p nel liquido, contro il pelo libero, ammonti a

$$p = p_A - \sigma \frac{\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial z_0}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Poiché il moto è irrotazionale, il fluido presenta densità ρ uniforme e permanente, e le forze specifiche di massa sono quelle del geopotenziale, la somma di Bernoulli

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

mantiene lo stesso valore in tutta la massa liquida. All'ascissa $x = 0$ ed all'istante $t = 0$, in particolare, la curvatura del pelo libero è nulla, e la pressione vale di conseguenza p_A . Inoltre, sulla medesima ascissa e nello stesso istante, la quota del pelo libero è nulla. Così, la somma di Bernoulli vale uniformemente

$$\frac{p_A}{\rho g} + \left[\frac{v^2}{2g} + \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]_{\substack{x=0 \\ t=0}}.$$

La pressione nel liquido, presso il pelo libero, assume il valore richiesto se risulta

$$\left[z + \frac{p_A}{\rho g} - \frac{\sigma}{\rho g} \frac{\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial z_0}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{v^2}{2g} + \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{p_A}{\rho g} - \left[\frac{v^2}{2g} + \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]_{\substack{x=0 \\ t=0}} \right]_{z=z_0} = 0.$$

Date le limitazioni imposte ad \mathcal{A} , è sufficiente esplicitare questo legame a

meno dei termini contenenti \mathcal{A}^2 a fattore: si ha allora

$$\begin{aligned} & \mathcal{A} \sin\left(\frac{2\pi}{L}x - \frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{\sigma}{\rho g} \mathcal{A} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{2\pi}{L}x - \frac{2\pi}{T}t\right) + \\ & + \frac{1}{2g} \left(\frac{L}{T} + U\right)^2 - \frac{1}{g} \left(\frac{L}{T} + U\right) U \mathcal{A} \frac{2\pi}{L} \frac{1}{\text{Th} \frac{2\pi}{L} Y_0} \sin\left(\frac{2\pi}{L}x - \frac{2\pi}{T}t\right) + \\ & + \frac{1}{g} U \mathcal{A} \frac{2\pi}{L} \frac{1}{\text{Th} \frac{2\pi}{L} Y_0} \sin\left(\frac{2\pi}{L}x - \frac{2\pi}{T}t\right) - \frac{1}{2g} \left(\frac{L}{T} + U\right)^2 = 0. \end{aligned}$$

Se ne conclude che la superficie $z = z_0$ può costituire un pelo libero purché U sia fissato in accordo con la condizione

$$1 + \frac{\sigma}{\rho g} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 - \frac{1}{g} U^2 \frac{2\pi}{L} \frac{1}{\text{Th} \frac{2\pi}{L} Y_0} = 0$$

e gli si assegna perciò valore tale da rendere

$$U^2 = \left(g \frac{L}{2\pi} + \frac{\sigma}{\rho} \frac{2\pi}{L}\right) \text{Th} \frac{2\pi}{L} Y_0.$$

Il potenziale per le velocità, precisato con questo valore della costante U , contiene sempre il termine

$$\left(\frac{L}{T} + U\right)x,$$

che rappresenta una componente uniforme e permanente della velocità lungo x . Le componenti della velocità permanenti, come questa, sono dette *velocità di trasporto*.

Spesso interessano i moti ondosi privi di velocità permanenti. Esse si annullano quando

$$T = -\frac{L}{U}$$

ossia quando il periodo T è

$$T = \frac{L}{\sqrt{\left(g \frac{L}{2\pi} + \frac{\sigma}{\rho} \frac{2\pi}{L}\right) \text{Th} \frac{2\pi}{L} Y_0}}$$

ed assume, per l'acqua, i valori riportati in figura 8.18. In tal caso, il

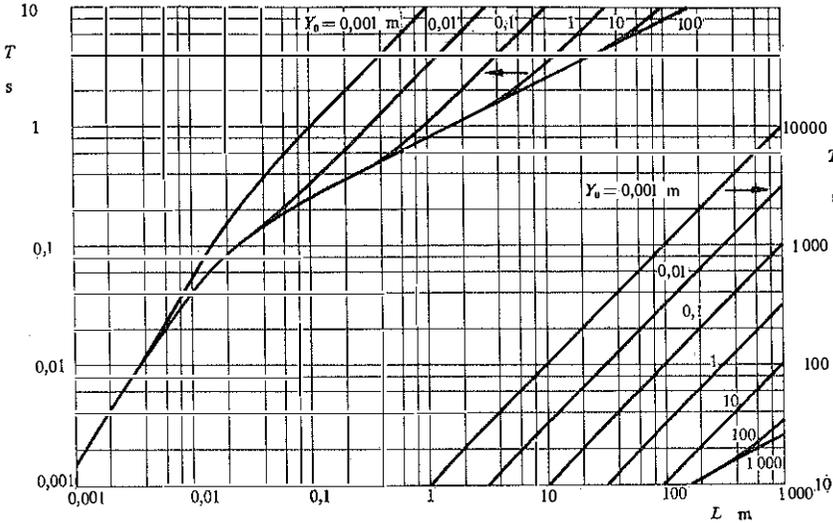


Fig. 8.18. - Periodo T delle oscillazioni ondose sinusoidali ed irrotazionali di una massa d'acqua altrimenti a riposo. Si è assunto $\sigma = 7,35 \cdot 10^{-2} \text{ N m}^{-1}$, $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ e $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$.

potenziale per la velocità ha la forma

$$\varphi = - \mathcal{A} \frac{L}{T} \frac{\text{Ch} \frac{2\pi}{L} (z + Y_0)}{\text{Sh} \frac{2\pi}{L} Y_0} \cos \left(\frac{2\pi}{L} x - \frac{2\pi}{T} t \right)$$

cui è associata la funzione di corrente di Lagrange

$$\psi = + \mathcal{A} \frac{L}{T} \frac{\text{Sh} \frac{2\pi}{L} (z + Y_0)}{\text{Sh} \frac{2\pi}{L} Y_0} \sin \left(\frac{2\pi}{L} x - \frac{2\pi}{T} t \right).$$

Le componenti della velocità sono pertanto

$$v_x = + \mathcal{A} \frac{2\pi}{T} \frac{\text{Ch} \frac{2\pi}{L} (z + Y_0)}{\text{Sh} \frac{2\pi}{L} Y_0} \sin \left(\frac{2\pi}{L} x - \frac{2\pi}{T} t \right),$$

$$v_z = - \mathcal{A} \frac{2\pi}{T} \frac{\text{Sh} \frac{2\pi}{L} (z + Y_0)}{\text{Sh} \frac{2\pi}{L} Y_0} \cos \left(\frac{2\pi}{L} x - \frac{2\pi}{T} t \right),$$

tutte pulsanti nel tempo.

Alle coordinate istantanee X e Z di un particolare elemento fluido competono i valori forniti dalle equazioni

$$d(X-x) = v_x dt,$$

$$d(Z-z) = v_z dt.$$

Nell'ambito delle approssimazioni adottate, e cioè sempre a meno di termini contenenti \mathcal{A}^2 a fattore, le velocità v_x e v_z vanno stimate nel punto fisso x, z , anziché in quello X, Z . Si ha così

$$X-x = \mathcal{A} \frac{\text{Ch} \frac{2\pi}{L}(z+Y_0)}{\text{Sh} \frac{2\pi}{L} Y_0} \cos\left(\frac{2\pi}{L}x - \frac{2\pi}{T}t\right),$$

$$Z-z = \mathcal{A} \frac{\text{Sh} \frac{2\pi}{L}(z+Y_0)}{\text{Sh} \frac{2\pi}{L} Y_0} \sin\left(\frac{2\pi}{L}x - \frac{2\pi}{T}t\right).$$

Le traiettorie sono perciò orbite chiuse, a forma di ellissi, come schematizzato in figura 8.19. Gli assi sono massimi in superficie, e si riducono progressivamente in profondità. L'asse verticale è nullo al fondo. La distanza reciproca dei due fuochi di ciascuna ellisse,

$$\frac{2\mathcal{A}}{\text{Sh} \frac{2\pi}{L} Y_0},$$

è indipendente dalla profondità.

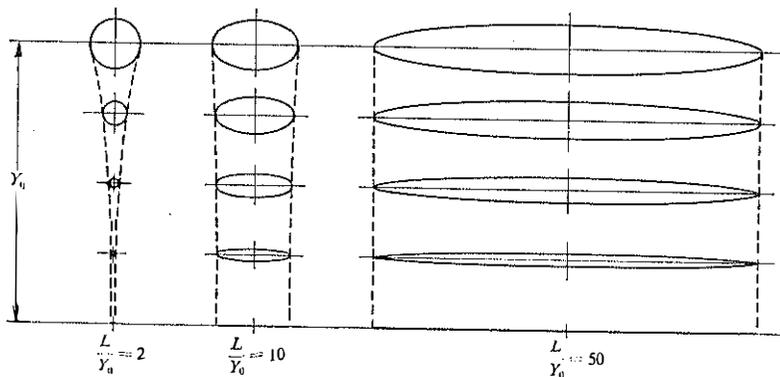


Fig. 8.19. - Traiettorie indotte dal moto ondoso irrotazionale.

Nel loro moto, gli elementi fluidi percorrono secondo le x crescenti la parte più alta dell'ellisse quando il colmo dell'onda sorpassa l'ascissa centrale dell'orbita, e percorrono quella più bassa con moto retrogrado quando si ha il sorpasso del cavo dell'onda. Gli elementi fluidi attraversano perciò, nel loro moto in avanti, zone di velocità maggiori di quelle presenti nelle zone attraversate durante il moto di ritorno. Ciò fa sì che le traiettorie vere non possano richiudersi esattamente su se stesse, come indica invece il calcolo approssimato eseguito: esse devono risultare aperte, e determinare un moto di avanzamento del liquido nel verso della propagazione dell'onda. Le velocità permanenti degli elementi fluidi che si manifestano per questo motivo sono dette *velocità di deriva* associate al moto ondoso. Non vanno confuse con le velocità di trasporto, perché non compaiono fra le velocità locali ed istantanee.

La presenza delle velocità di deriva, come fu mostrato da Rayleigh nel 1876 per onde corte rispetto alla profondità media, e da Levi-Civita nel 1912 in condizioni generali, è una caratteristica essenziale del moto ondoso progressivo irrotazionale.

Nell'ambito delle approssimazioni adottate, le velocità di deriva possono essere calcolate quali medie sul periodo delle differenze fra le velocità assunte dagli elementi fluidi nel percorrere le orbite ellittiche e le velocità contemporaneamente presenti nel centro delle ellissi secondo l'espressione del potenziale della velocità. Scrivendo appunto

$$v_{\bullet x} = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} (X-x) + \frac{\partial v_x}{\partial z} (Z-z) \right] dt,$$

$$v_{\bullet z} = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{\partial v_z}{\partial x} (X-x) + \frac{\partial v_z}{\partial z} (Z-z) \right] dt,$$

si ottiene

$$v_{\bullet x} = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{L} \frac{2\pi}{T} \frac{\text{Ch} 2 \frac{2\pi}{L} (z + Y_0)}{\text{Sh}^2 \frac{2\pi}{L} Y_0},$$

$$v_{\bullet z} = 0.$$

La distribuzione della pressione p nel liquido è data dalla relazione

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{p_A}{\rho g} + \left[\frac{v^2}{2g} + \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]_{z=0, t=0},$$

già utilizzata per l'esame delle condizioni dinamiche sul pelo libero.

Sempre a meno di termini in \mathcal{A}^2 , l'eccesso di pressione rispetto al valore idrostatico $p_1 = p_A - \rho g z$, che si avrebbe in assenza del moto ondoso, vale perciò

$$p - p_1 = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mathcal{A} \rho \frac{L}{T} \frac{2\pi}{T} \frac{\text{Ch} \frac{2\pi}{L} (z + Y_0)}{\text{Sh} \frac{2\pi}{L} Y_0} \sin \left(\frac{2\pi}{L} x - \frac{2\pi}{T} t \right).$$

L'eccesso di spinta sul fondo $z = -Y_0$, calcolato con riferimento ad una larghezza unitaria in direzione ortogonale agli assi x e z , e ad una lunghezza L in direzione x , è nullo. Per una striscia analoga lunga solo la metà di L si ha invece

$$2 \mathcal{A} \left(\frac{L}{T} \right)^2 \frac{1}{\text{Sh} \frac{2\pi}{L} Y_0}$$

nell'istante in cui la striscia è sovrastata da quote positive del pelo libero, ed un valore uguale, ma di segno opposto, nel momento in cui le quote z_0 sono negative.

Le espressioni viste fin qui si semplificano notevolmente quando lo spessore medio Y_0 della lama liquida è grande rispetto alla lunghezza L dell'onda. Già con

$$Y_0 > L$$

i rapporti fra seni e coseni iperbolici possono essere approssimati da rapporti fra esponenziali. Lo schema ridotto che se ne trae trova il suo maggior impiego nella descrizione delle onde di alto mare. In questo campo, anzi, la tensione superficiale, la densità e le lunghezze d'onda sono tali da rendere insignificante, nel legame fra lunghezza d'onda e periodo, il termine contenente la tensione superficiale. Si ha cioè

$$T \simeq \frac{L}{\sqrt{g \frac{L}{2\pi} \text{Th} \frac{2\pi}{L} Y_0}} \simeq \sqrt{\frac{2\pi L}{g}}.$$

Data la frequenza con la quale si impiega questo schema di *onde in acque profonde*, si riportano qui le formule relative:

$$z_0 = \mathcal{A} \sin \left(\frac{2\pi}{L} x - \frac{2\pi}{T} t \right),$$

$$\varphi = -\mathcal{A} \frac{gT}{2\pi} \exp \left(\frac{2\pi}{L} z \right) \cos \left(\frac{2\pi}{L} x - \frac{2\pi}{T} t \right),$$

$$\begin{aligned} \psi &= \mathcal{A} \frac{gT}{2\pi} \exp\left(\frac{2\pi}{L} z\right) \sin\left(\frac{2\pi}{L} x - \frac{2\pi}{T} t\right), \\ v_x &= \mathcal{A} \frac{2\pi}{T} \exp\left(\frac{2\pi}{L} z\right) \sin\left(\frac{2\pi}{L} x - \frac{2\pi}{T} t\right), \\ v_z &= -\mathcal{A} \frac{2\pi}{T} \exp\left(\frac{2\pi}{L} z\right) \cos\left(\frac{2\pi}{L} x - \frac{2\pi}{T} t\right), \\ v_{Dz} &= \mathcal{A}^2 \frac{1}{2g} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^3 \exp\left(2\frac{2\pi}{L} z\right), \\ p - p_1 &= \mathcal{A} \rho g \exp\left(\frac{2\pi}{L} z\right) \sin\left(\frac{2\pi}{L} x - \frac{2\pi}{T} t\right). \end{aligned}$$

Le traiettorie sono orbite circolari di raggio

$$\mathcal{A} \exp\left(\frac{2\pi}{L} z\right).$$

Il fenomeno ondoso appare ora concentrato presso il pelo libero: le singole grandezze oscillatorie si riducono a meno dell'1% del valore assunto in superficie, se

$$\left|\frac{2\pi}{L} z\right| > 5,$$

ossia già quando

$$|z| \gtrsim 0,8 L.$$

Si osserva ancora che alla base delle descrizioni di moto ondoso fin qui raccolte sono state introdotte solo ipotesi e condizioni lineari nella velocità \mathbf{v} del liquido. Intrinsecamente tali sono l'ipotesi che il moto sia irrotazionale ed isocoro, $\text{rot}\mathbf{v} = 0$ e $\text{div}\mathbf{v} = 0$, e la condizione cinematica al fondo, che impone l'annullarsi della velocità normale. La condizione cinematica e quella dinamica sul pelo libero, ossia, nell'ordine, la condizione che la superficie $z = z_0$ sia superficie di frontiera della massa liquida, e quella che la pressione sulla stessa superficie sia compatibile con il contatto con un aeriforme, non sarebbero invece lineari nella velocità, perché implicano prodotti fra le componenti della velocità, o fra queste e le relative derivate. Le due condizioni sono state però linearizzate, assumendo che l'ampiezza massima \mathcal{A} delle escursioni del pelo libero fossero molto minori delle lunghezze d'onda L e dello spessore medio Y_0 della lama d'acqua. Ciò ha permesso infatti di trascurare sistematicamente i termini quadratici nei confronti di quelli lineari nelle condizioni imposte sul pelo libero.

La linearità del problema consente di sovrapporre distribuzioni di velo-

cià, o, il che è lo stesso, potenziali per le velocità relativi ad onde differenti per ampiezza massima \mathcal{A} , lunghezza d'onda L , periodo T o verso di propagazione, ottenendo ancora un potenziale adatto a descrivere le velocità del liquido in un possibile moto ondoso. La forma del pelo libero e l'andamento delle pressioni in seno al liquido saranno date allora dalla somma delle escursioni di pelo libero e dalla somma delle pressioni delle onde componenti. Basta solo che l'onda complessiva mantenga ancora ampiezze molto limitate. Nei due paragrafi seguenti verranno esposti alcuni esempi di impiego di questo procedimento di sovrapposizione.

Benché lo studio in campo lineare ponga già in evidenza gli aspetti più notevoli del moto ondoso, esso non è più sufficiente quando le ampiezze \mathcal{A} divengono abbastanza grandi da non verificare le limitazioni

$$\mathcal{A} \ll L, \quad \mathcal{A} \ll Y_0.$$

In queste circostanze è necessario affinare lo studio fin'ora svolto, tenendo conto anche di parte dei termini trascurati. Si possono così ripetere i calcoli che precedono conservando nelle varie tappe pure i termini che contengono \mathcal{A}^2 a fattore, ovvero anche quelli aventi il fattore \mathcal{A}^3 , e così via. In alternativa, si può affrontare la determinazione diretta del potenziale per le velocità con i metodi del calcolo numerico.

Al crescere dell'ampiezza delle escursioni del pelo libero, questo perde la sua simmetria rispetto all'asse x . Le creste dell'onda si fanno sempre più pronunciate mentre i cavi si appiattiscono e si estendono. Quando le differenze di quota fra le creste ed i cavi raggiungono i massimi valori possibili, il pelo libero finisce con il presentare un punto angoloso, sempre che si trascuri l'effetto della tensione superficiale. L'angolo sottostante le due tangenti al pelo libero nel punto angoloso è $2\pi/3$, come mostrato da Stokes nel 1880. Sempre nel caso dell'onda alla forma limite, l'ampiezza complessiva \mathcal{A}_0 , ossia il dislivello fra le creste ed i cavi, varia fra

$$\mathcal{A}_0 \simeq 0,142L, \quad \mathcal{A}_0 \simeq 0,727 Y_0$$

al crescere del rapporto fra la lunghezza d'onda L e la profondità media Y_0 . Il limite inferiore è stato calcolato da Michell, nel 1893, quello superiore da Laitone, nel 1960.

Nel caso delle onde dominate dalla tensione superficiale, invece, sono le creste ad appiattirsi ed i cavi a restringersi. Alla forma di massima ampiezza relativa si osserverebbe un cavo rientrante, chiuso verso l'alto, ed un'ampiezza complessiva

$$\mathcal{A}_0 \simeq 0,730L,$$

secondo il calcolo condotto da Crapper nel 1957.

8.7. Velocità di propagazione.

L'onda di pelo libero

$$z_0 = \mathcal{A} \sin \left(\frac{2\pi}{L} x - \frac{2\pi}{T} t \right)$$

considerata nel paragrafo precedente, si propaga nel verso delle x crescenti con velocità L/T . Si è visto anche che, in assenza di velocità di trasporto, il periodo T assume il valore

$$T = \frac{L}{\sqrt{\left(g \frac{L}{2\pi} + \frac{\sigma}{\rho} \frac{2\pi}{L} \right) \text{Th} \frac{2\pi}{L} Y_0}}$$

essendo g l'accelerazione iniziale libera dovuta alle forze di massa, σ la tensione superficiale, ρ la densità del fluido, ed Y_0 lo spessore medio della lama liquida.

Sempre in assenza di velocità di trasporto, la forma del pelo libero trasla con velocità

$$c_t = \sqrt{\left(g \frac{L}{2\pi} + \frac{\sigma}{\rho} \frac{2\pi}{L} \right) \text{Th} \frac{2\pi}{L} Y_0},$$

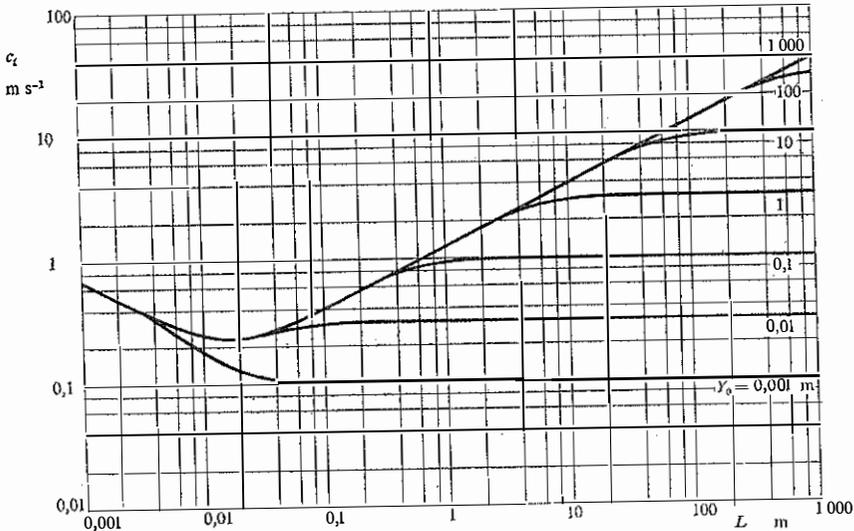


Fig. 8.20. - Celerità di fase per onde irrotazionali. Si è posto anche qui $\sigma = 7,35 \cdot 10^{-2} \text{ N m}^{-1}$, $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$, $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$.

che è detta *celerità di fase*, in quanto consente il calcolo della fase

$$\frac{2\pi}{L}x - \frac{2\pi}{T}t$$

alle varie ascisse e nei diversi istanti. La figura 8.20 riporta i valori numerici di c_f nel caso dell'acqua.

Onde di lunghezza differente si propagano quindi con velocità diverse. Si dice che la lama liquida si comporta come un *mezzo dispersivo* nei confronti della propagazione dei corrugamenti della sua superficie libera.

Nel paragrafo precedente si è osservato pure che è possibile sovrapporre più onde del tipo in esame per ottenere nuove forme d'onda. L'onda risultante si propaga, nel suo insieme, con velocità spesso notevolmente diversa dalle celerità delle singole componenti, velocità d'insieme che è nota come *celerità di gruppo*. Per calcolarne il valore basta considerare il caso particolarmente semplice della sovrapposizione di due sole onde, di pari ampiezza, aventi lunghezze d'onda poco differenti, L ed $L + dL$, e periodi rispettivi T e $T + dT$. Il pelo libero risultante ha l'andamento

$$\begin{aligned} z_0 &= \mathcal{A} \sin\left(\frac{2\pi}{L}x - \frac{2\pi}{T}t\right) + \mathcal{A} \sin\left(\frac{2\pi}{L+dL}x - \frac{2\pi}{T+dT}t\right) \simeq \\ &\simeq \mathcal{A} \sin\left(\frac{2\pi}{L}x - \frac{2\pi}{T}t\right) + \mathcal{A} \sin\left[\left(\frac{2\pi}{L} - \frac{2\pi dL}{L^2}\right)x - \left(\frac{2\pi}{T} - \frac{2\pi dT}{T^2}\right)t\right] = \\ &= 2\mathcal{A} \cos\left(\frac{\pi dL}{L^2}x - \frac{\pi dT}{T^2}t\right) \sin\left[\left(\frac{2\pi}{L} - \frac{\pi dL}{L^2}\right)x - \left(\frac{2\pi}{T} - \frac{\pi dT}{T^2}\right)t\right]. \end{aligned}$$

L'ampiezza delle oscillazioni complessive del pelo libero,

$$2\mathcal{A} \cos\left(\frac{\pi dL}{L^2}x - \frac{\pi dT}{T^2}t\right),$$

si propaga nel verso delle x crescenti con velocità

$$c_g = \frac{\frac{dL}{dT}}{\frac{d}{dL}\left(\frac{1}{L}\right)} = \frac{\partial\left(\frac{1}{T}\right)}{\partial\left(\frac{1}{L}\right)} = \frac{c_f \frac{1}{L}}{\frac{1}{L}} = c_f - L \frac{\partial c_f}{\partial L},$$

che è appunto la celerità di gruppo. Essa vale

$$c_g = \frac{1}{2} c_f \left[1 + \frac{2 \frac{2\pi}{L} Y_0}{\text{Sh} 2 \frac{2\pi}{L} Y_0} + \frac{2 \frac{\sigma}{\rho g} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2}{1 + \frac{\sigma}{\rho g} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2} \right],$$

ed è riportata in figura 8.21, sempre con riferimento all'acqua.

Va sottolineato che il concetto di celerità di gruppo è definito solo con riferimento alla sovrapposizione di onde elementari comprese in uno spettro percentualmente limitato di lunghezze d'onda, o di periodi. Aumen-

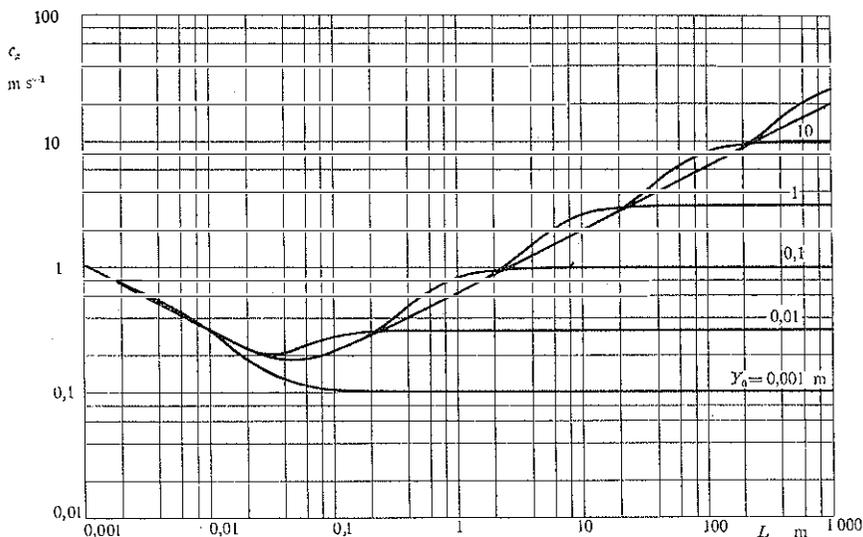


Fig. 8.21. - Celerità di gruppo per onde rotazionali. Si è posto ancora $\sigma = 7,35 \cdot 10^{-2} \text{ N m}^{-1}$, $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$, $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$.

tando continuamente il campo delle lunghezze d'onda elementari utilizzate diviene possibile rappresentare anche oscillazioni di pelo libero apprezzabili solamente su una zona via via più limitata nella direzione x , ed evanescenti sulla rimanente superficie libera. I gruppi di onde risultanti finiscono però con il perdere la loro struttura nel corso della propagazione, rendendo inutile la ricerca di una celerità del gruppo.

Nel caso delle onde più corte, dominate dalla tensione superficiale, la celerità di gruppo è superiore alla celerità di fase. Così il treno d'onde, con pianta a corona circolare, generato dalla caduta di un sasso in acqua stagnante, si muove più rapidamente delle onde sinusoidali che lo compongono: sul suo fronte si vedono sorgere nuove ondulazioni, e sulla sua coda se ne vedono scomparire.

Per onde più lunghe, dominate già dalle forze di massa, la celerità di gruppo è invece inferiore alla celerità di fase, ed i fenomeni presentano aspetti opposti.

Infine, per onde molto lunghe rispetto allo spessore medio della lama liquida, celerità di fase e di gruppo coincidono: onde elementari e gruppi risultanti si propagano con la medesima velocità.

8.8. Moti ondosi stazionari.

Come esposto alla fine del paragrafo 8.6, la sovrapposizione di più moti ondosi porta a nuovi moti ondosi complessivi purché le escursioni del pelo libero risultanti siano ancora tanto contenute da giustificare l'impiego dello schema lineare.

Così, sovrapponendo al potenziale

$$\varphi = - \mathcal{A} \frac{L}{T} \frac{\text{Ch} \frac{2\pi}{L}(z + Y_0)}{\text{Sh} \frac{2\pi}{L} Y_0} \cos \left(\frac{2\pi}{L} x - \frac{2\pi}{T} t \right)$$

quello

$$\varphi = + \mathcal{A} \frac{L}{T} \frac{\text{Ch} \frac{2\pi}{L}(z + Y_0)}{\text{Sh} \frac{2\pi}{L} Y_0} \cos \left(\frac{2\pi}{L} x + \frac{2\pi}{T} t \right)$$

relativo ad un'onda che differisce dalla prima solo per avere velocità di propagazione opposta, si ottiene il potenziale complessivo

$$\varphi = - 2 \mathcal{A} \frac{L}{T} \frac{\text{Ch} \frac{2\pi}{L}(z + Y_0)}{\text{Sh} \frac{2\pi}{L} Y_0} \sin \frac{2\pi}{L} x \sin \frac{2\pi}{T} t,$$

adatto ad un'onda con pelo libero

$$z_0 = \mathcal{A} \sin \left(\frac{2\pi}{L} x - \frac{2\pi}{T} t \right) + \mathcal{A} \sin \left(\frac{2\pi}{L} x + \frac{2\pi}{T} t \right) = 2 \mathcal{A} \sin \frac{2\pi}{L} x \cos \frac{2\pi}{T} t,$$

che ha l'aspetto indicato in figura 8.22.

Questa nuova onda è un'onda *stazionaria*. In corrispondenza delle ascisse $x = mL/2$, con m intero, il pelo libero ha costantemente quota $z_0 = 0$: si tratta dei *nodi* dell'onda stazionaria. Sulle stesse ascisse le oscillazioni delle velocità orizzontali hanno le loro massime ampiezze.

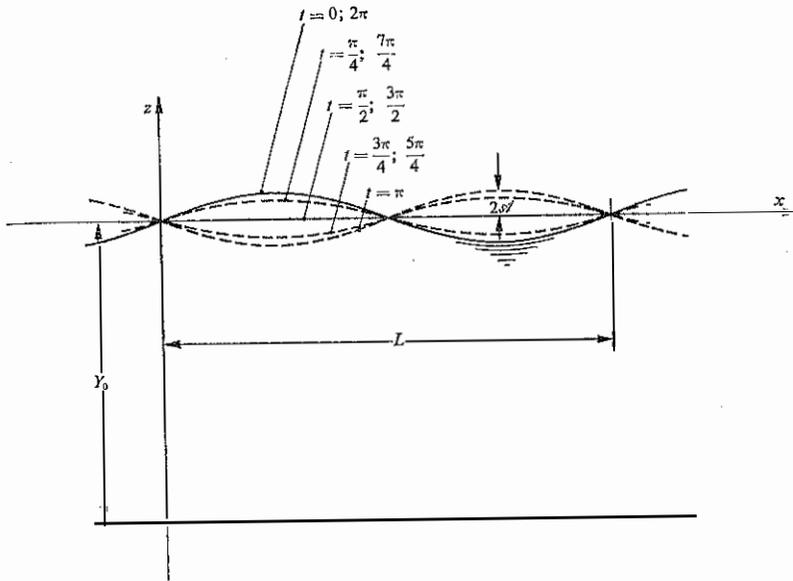


Fig. 8.22. - Oscillazioni stazionarie di pelo libero.

Alle ascisse $x = (2m + 1)L/4$, sempre con m intero, il pelo libero presenta nel tempo le sue escursioni più ampie, con scostamenti dalla quota media pari a 2δ . Qui si hanno i *ventri* dell'onda stazionaria. In corrispondenza di queste ascisse, le velocità orizzontali del liquido sono nulle, e ciascun piano $x = (2m + 1)L/4$ può essere sostituito da una parete solida senza alterare il moto. Onde di questo genere possono perciò realizzarsi in un bacino delimitato da due di tali piani, oppure, nel caso che sia presente una sola parete rigida, possono costituire il risultato della riflessione operata dalla parete stessa su un'onda progressiva incidente normalmente ad essa.

Le coordinate istantanee X e Z dei singoli elementi fluidi si ricavano, al solito, dalle equazioni

$$d(X - x) = v_x dt$$

$$d(Z - z) = v_z dt,$$

stimando le velocità v_x e v_z nel punto fisso x, z , anziché in quello X, Z ,

per non introdurre termini contenenti $e^{\pm 2\pi y/L}$ a fattore. Si ottengono

$$X - x = 2\alpha \frac{\text{Ch} \frac{2\pi}{L}(z + Y_0)}{\text{Sh} \frac{2\pi}{L} Y_0} \cos \frac{2\pi}{L} x \cos \frac{2\pi}{T} t,$$

$$Z - z = 2\alpha \frac{\text{Sh} \frac{2\pi}{L}(z + Y_0)}{\text{Sh} \frac{2\pi}{L} Y_0} \sin \frac{2\pi}{L} x \cos \frac{2\pi}{T} t,$$

e conseguentemente le forme d'orbita indicate in figura 8.23.

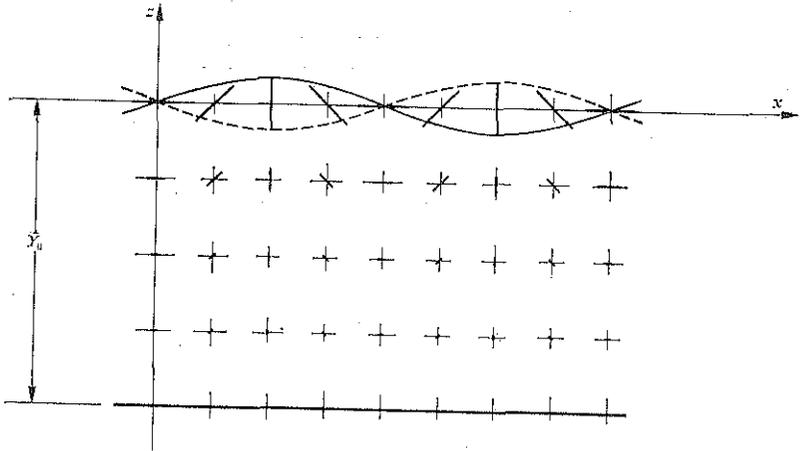


Fig. 8.23. - Traiettorie connesse ad onde stazionarie irrotazionali.

L'eccesso di pressione p rispetto al livello idrostatico p_1 vale ancora

$$p - p_1 = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

così che

$$p - p_1 = 2\alpha \rho \frac{L}{T} \frac{2\pi}{T} \frac{\text{Ch} \frac{2\pi}{L}(z + Y_0)}{\text{Sh} \frac{2\pi}{L} Y_0} \sin \frac{2\pi}{L} x \cos \frac{2\pi}{T} t.$$

In particolare, sul fondo $z = -Y_0$, l'eccesso di spinte rispetto al livello idrostatico e su uno sviluppo lungo x pari ad una lunghezza d'onda

rimane nullo. L'eccesso di spinta complessiva contro il fondo, su una striscia che si sviluppa dal nodo $x=0$ a quello $x=L/2$ e per l'unità di lunghezza in direzione ortogonale, vale invece

$$4\mathcal{A}_Q \left(\frac{L}{T}\right)^2 \frac{1}{\text{Sh} \frac{2\pi}{L} Y_0} \cos \frac{2\pi}{T} t,$$

e risulta perciò pulsante nel tempo.

Contro una parete verticale, fissa ed impermeabile, collocata in posizione ventrale, ad esempio in quella $x=L/4$, la spinta complessiva non idrostatica per unità di larghezza ammonta a

$$\int_{-Y_0}^0 \left[2\mathcal{A}_Q \frac{L}{T} \frac{2\pi}{T} \frac{\text{Ch} \frac{2\pi}{L} (z + Y_0)}{\text{Sh} \frac{2\pi}{L} Y_0} \cos \frac{2\pi}{L} t \right] dz - \sigma = 2\mathcal{A}_Q \left(\frac{L}{T}\right)^2 \cos \frac{2\pi}{L} t - \sigma,$$

essendo σ la tensione superficiale.

Non sempre l'onda riflessa ha la stessa ampiezza dell'onda incidente. Posto che l'onda incidente abbia ampiezza \mathcal{A}_I e che quella riflessa abbia ampiezza \mathcal{A}_R , minore della \mathcal{A}_I a causa di una parziale riflessione da parte della parete investita, il pelo libero assume la forma

$$\begin{aligned} z_0 &= \mathcal{A}_I \sin \left(\frac{2\pi}{L} x - \frac{2\pi}{T} t \right) + \mathcal{A}_R \sin \left(\frac{2\pi}{L} x + \frac{2\pi}{T} t \right) = \\ &= (\mathcal{A}_I - \mathcal{A}_R) \sin \left(\frac{2\pi}{L} x - \frac{2\pi}{T} t \right) + \\ &+ \mathcal{A}_R \sin \left(\frac{2\pi}{L} x - \frac{2\pi}{T} t \right) + \mathcal{A}_R \sin \left(\frac{2\pi}{L} x + \frac{2\pi}{T} t \right) = \\ &= (\mathcal{A}_I - \mathcal{A}_R) \sin \left(\frac{2\pi}{L} x - \frac{2\pi}{T} t \right) + 2\mathcal{A}_R \sin \frac{2\pi}{L} x \cos \frac{2\pi}{T} t. \end{aligned}$$

Le escursioni massime complessive hanno l'andamento schematizzato in figura 8.24. In corrispondenza delle ascisse alle quali compete la minima elongazione della curva involuppo delle ampiezze si ha

$$|z_0|_{\min} = \mathcal{A}_I - \mathcal{A}_R$$

mentre sulle ascisse che danno luogo alle massime escursioni della quota di pelo libero risulta

$$|z_0|_{\max} = \mathcal{A}_I + \mathcal{A}_R.$$

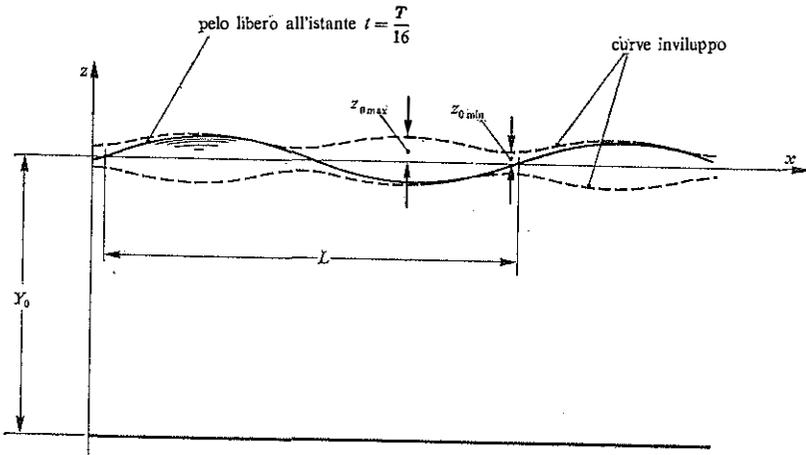


Fig. 8.24. - Inviluppo delle escursioni del pelo libero in un'onda stazionaria generata da riflessione parziale di un'onda incidente.

Dalle misure di $|z_0|_{\min}$ e di $|z_0|_{\max}$ si può ricavare l'ampiezza

$$\mathcal{A}_I = \frac{|z_0|_{\max} + |z_0|_{\min}}{2}$$

dell'onda incidente e quella

$$\mathcal{A}_R = \frac{|z_0|_{\max} - |z_0|_{\min}}{2}$$

dell'onda riflessa.

8.9. Le scie di Helmholtz.

In accordo con le osservazioni riportate nel paragrafo 7.7, molte incongruenze con i dati sperimentali, dovute allo schema di fluido ideale, possono essere rimosse ammettendo la presenza di superfici sulle quali la componente tangenziale della velocità risulti discontinua. Superfici di questo genere, che hanno origine sul corpo investito dalla corrente in arrivo e che si estendono indefinitamente a valle, delimitano la scia di poppa.

Spesso si può ammettere che il fluido presente nella scia sia fermo, e che abbia densità uniforme e permanente. La pressione nella scia è allora distribuita con legge idrostatica oppure è uniforme, a seconda che si met-

tano in conto o meno le forze specifiche di massa dovute al geopotenziale. Attraverso la superficie contorno della scia, la pressione non varia, come si è detto nel paragrafo 7.6. Se poi il moto è stazionario, la superficie della scia è ferma e la velocità del fluido è puramente tangenziale, con modulo che può essere calcolato ricorrendo al teorema di Bernoulli. In particolare, quando si possono trascurare le forze di massa, e quando si può ammettere che la densità del fluido in moto è uniforme e permanente, il modulo della velocità risulta uniforme.

Con l'introduzione di scie racchiudenti fluido fermo, suggerita da Helmholtz nel 1868, la descrizione fornita dallo schema di fluido ideale migliora decisamente. Ma lo studio del moto stesso presenta maggiori difficoltà, perché la forma della scia non è nota in partenza, e va determinata insieme al calcolo delle velocità.

I problemi da risolvere sono comparativamente più semplici quando il moto è piano ed irrotazionale, ferme restando le condizioni che il moto sia stazionario e che il fluido abbia densità uniforme e permanente. Esiste allora sul piano campione il potenziale complesso

$$\Xi(\Sigma) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

già introdotto nel paragrafo 5.11, che è funzione analitica della variabile complessa

$$\Sigma = x + iy.$$

Analitica è di conseguenza anche la velocità complessa

$$v^*(\Sigma) = \frac{d\Sigma}{d\Sigma} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i \frac{\partial\psi}{\partial x} = v_x - iv_y,$$

coniugata rispetto alla velocità complessa vera

$$v(\Sigma) = v_x + iv_y.$$

Le condizioni al contorno esterno della scia ed al bordo del corpo solido investito consentono di individuare il campo di variabilità di v^* sul piano $v_x, -v_y$, ed il campo di variabilità della Ξ sul piano φ, ψ . Mettendo allora in corrispondenza biunivoca i punti $v_x - iv_y$ del primo campo con quelli $\varphi + i\psi$ del secondo attraverso una funzione analitica

$$v_x - iv_y = f(\varphi + i\psi)$$

si ottiene il legame analitico

$$v^* = v^*(\Xi).$$

L'equazione differenziale

$$v^* = \frac{d\varepsilon}{d\Sigma}$$

che definisce la velocità v^* può essere ora integrata per separazione delle variabili, scrivendo

$$\Sigma = \int \frac{1}{v^*(\varepsilon)} d\varepsilon$$

e ricavando così il legame

$$\Sigma = \Sigma(\varepsilon).$$

Spesso è difficile individuare la funzione analitica $v^* = v^*(\varepsilon)$ che realizza la corrispondenza biunivoca fra i punti del campo v^* e quelli del campo ε . La ricerca può essere condotta per passi successivi, ricorrendo ad una o più variabili analitiche ausiliarie $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$, tali da rendere

$$v^* = v^*(\zeta_1), \quad \zeta_2 = \zeta_2(\zeta_1), \quad \dots, \quad \varepsilon = \varepsilon(\zeta_n).$$

Si ha allora

$$\Sigma = \int \frac{1}{v^*(\varepsilon)} d\varepsilon = \int \frac{1}{v^*(\zeta_1)} \frac{d\varepsilon}{d\zeta_n} \frac{d\zeta_n}{d\zeta_{n-1}} \dots \frac{d\zeta_2}{d\zeta_1} d\zeta_1.$$

Il procedimento esposto è utilizzabile nella risoluzione di molti problemi tecnicamente importanti. Tre esempi caratteristici sono esposti nel seguito di questo paragrafo.

Si considera per primo il caso di una *corrente piana che investe ortogonalmente una parete* larga d , in assenza di forze di massa. La figura 8.25 riporta gli schizzi del campo del moto sul piano campione, e di quelli interessati da v^* e ε . La funzione analitica che connette fra loro questi due campi è

$$v^* = v_\infty \frac{\sqrt{\varepsilon - \frac{v_\infty d}{\pi + 4}} - i \sqrt{\frac{v_\infty d}{\pi + 4}}}{\sqrt{\varepsilon}}$$

essendo v_∞ il modulo della velocità asintotica, modulo che si presenta uniformemente anche sul bordo della scia.

Si controlla facilmente che quando ε è reale negativo, v^* è reale e positiva. Se poi ε è reale, e compreso fra 0 e $v_\infty d/(\pi + 4)$, v^* diviene immaginaria pura, con coefficiente negativo per l'unità immaginaria. Quando ε è reale e maggiore di $v_\infty d/(\pi + 4)$, v^* assume modulo costantemente uguale a v_∞ e componente v_x positiva.

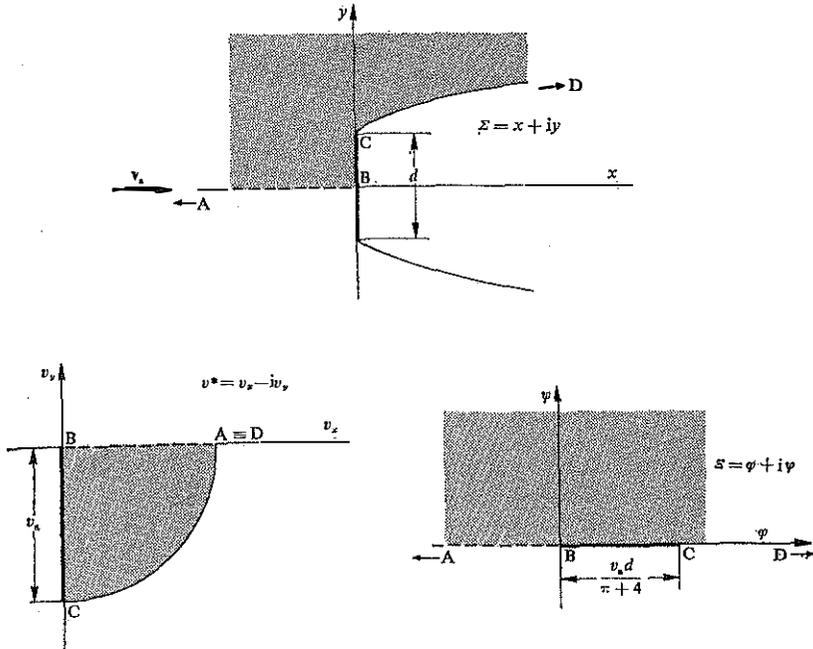


Fig. 8.25. - Coordinate complesse sul piano campione, velocità complessa e potenziale complesso per la corrente piana che investe normalmente una lastra piana di ampiezza d assegnata.

Separando le variabili ed integrando, si ottiene la corrispondenza fra le coordinate complesse Σ del campo del moto ed i valori del potenziale complesso Ξ :

$$\Sigma = \int_0^{\Xi} \frac{1}{v^*(\Xi)} d\Xi = \int_0^{\Xi} \frac{1}{v_a} \frac{\sqrt{\Xi}}{\sqrt{\Xi - \frac{v_a d}{\pi + 4} - i} \sqrt{\frac{v_a d}{\pi + 4}}} d\Xi.$$

In particolare, facendo assumere a Ξ valori reali positivi minori di $v_a d/(\pi + 4)$, si verifica subito che si ottengono, come richiesto, le coordinate dei punti della lastra con y positiva. Per il calcolo, conviene introdurre la variabile ausiliaria ς , ponendo

$$\Xi = \frac{v_a d}{\pi + 4} \sin^2 \varsigma.$$

Si ha così

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{d}{\pi + 4} \int_0^{\pi/2} \frac{i \sin \zeta}{1 - \cos \zeta} 2 \sin \zeta \cos \zeta \, d\zeta = \\ &= i \frac{d}{\pi + 4} [\zeta + \sin \zeta \cos \zeta + 2 \sin \zeta]_0^{\pi/2} = i \frac{d}{2}. \end{aligned}$$

Lo stesso genere di integrazione fornisce le coordinate del bordo della scia. Si devono assegnare ora a Σ valori reali e maggiori di $v_a d / (\pi + 4)$, e conviene servirsi di una nuova variabile ausiliaria ζ , definita dalla

$$\Sigma = \frac{v_a d}{\pi + 4} \operatorname{Ch}^2 \zeta.$$

Ne segue

$$\begin{aligned} x &= i \frac{d}{2} + \int_0^{\zeta} \frac{d}{\pi + 4} \frac{\operatorname{Ch} \zeta}{\operatorname{Sh} \zeta - i} \operatorname{Ch} \zeta \operatorname{Sh} \zeta \, d\zeta = \\ &= i \frac{d}{2} + \frac{d}{\pi + 4} [(-\zeta + \operatorname{Ch} \zeta \operatorname{Sh} \zeta) + i(-2 + 2 \operatorname{Ch} \zeta)]. \end{aligned}$$

Le equazioni parametriche del bordo della scia sono pertanto

$$\begin{aligned} x &= \frac{d}{\pi + 4} (-\zeta + \operatorname{Ch} \zeta \operatorname{Sh} \zeta), \\ y &= \frac{d}{2} + \frac{2d}{\pi + 4} (-1 + \operatorname{Ch} \zeta). \end{aligned}$$

Altro dato interessante è la distribuzione degli sforzi di pressione contro la lamina. Il dorso di quest'ultima è sottoposto alla pressione uniforme p_0 esistente entro la scia. La pressione che esiste sulla faccia investita dalla corrente va calcolata in base al teorema di Bernoulli

$$\frac{p}{\rho} + \frac{|v^*|^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_a^2}{2}.$$

Con riferimento al metro di sviluppo della lamina normalmente al piano campione, il risultante degli sforzi di pressione vale dunque

$$F'_x = 2 \int_0^{d/2} (p - p_0) \, dy = \int_0^{d/2} \rho (v_a^2 - |v^*|^2) \frac{1}{\rho} \, d\Sigma = \int_0^{v_a d / (\pi + 4)} \rho (v_a^2 - |v^*|^2) \frac{1}{\rho v^*} \, d\Sigma.$$

Per snellire l'integrazione, dopo aver espresso v^* in funzione di ε , conviene porre di nuovo

$$\varepsilon = \frac{v_a d}{\pi + 4} \sin^2 \zeta.$$

Si ottiene così

$$F'_x = \rho v_a^2 \int_0^{v_a d / (\pi + 4)} \left(1 - \frac{\left| \sqrt{\frac{v_a d}{\pi + 4} - \varepsilon} - \sqrt{\frac{v_a d}{\pi + 4}} \right|^2}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \frac{-\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\frac{v_a d}{\pi + 4} - \varepsilon} - \sqrt{\frac{v_a d}{\pi + 4}}} \frac{1}{v_a} d\varepsilon = \rho v_a^2 \int_0^{\pi/2} 4 \frac{d}{\pi + 4} \cos^2 \zeta d\zeta = \frac{\pi}{\pi + 4} \rho d v_a^2.$$

Volendo, si può esprimere il medesimo risultato nella forma consueta

$$F'_x = C_R \rho d \frac{v_a^2}{2},$$

basta assegnare il valore

$$C_R = \frac{2\pi}{\pi + 4} \simeq 0,880$$

al coefficiente di resistenza C_R .

Altro caso tecnicamente interessante è costituito dall'*efflusso piano attraverso una fenditura*. Il problema è stato studiato da Kirchhoff nel 1869, insieme a quello appena esposto. Si ammette anche qui che si possano trascurare le forze di massa. Il campo del moto sul piano campione, il campo della velocità complessa v^* e quello del potenziale complesso ε sono riportati tutti nella figura 8.26. Si è indicato con d la larghezza della fenditura, con v_a il modulo della velocità asintotica, e con $2Q'$ la portata per metro di sviluppo trasversale.

La funzione analitica che collega v^* a ε è

$$v^* = -v_a \exp\left(-\frac{\pi}{2Q'} \varepsilon\right) + v_a \sqrt{1 + \exp\left(-\frac{\pi}{Q'} \varepsilon\right)},$$

purché si scelga costantemente la terminazione della radice con parte immaginaria nulla o negativa.

È facile controllare che, quando ψ è nullo, v^* è reale, passando da valore praticamente nullo per φ negativo ed abbastanza grande in mo-

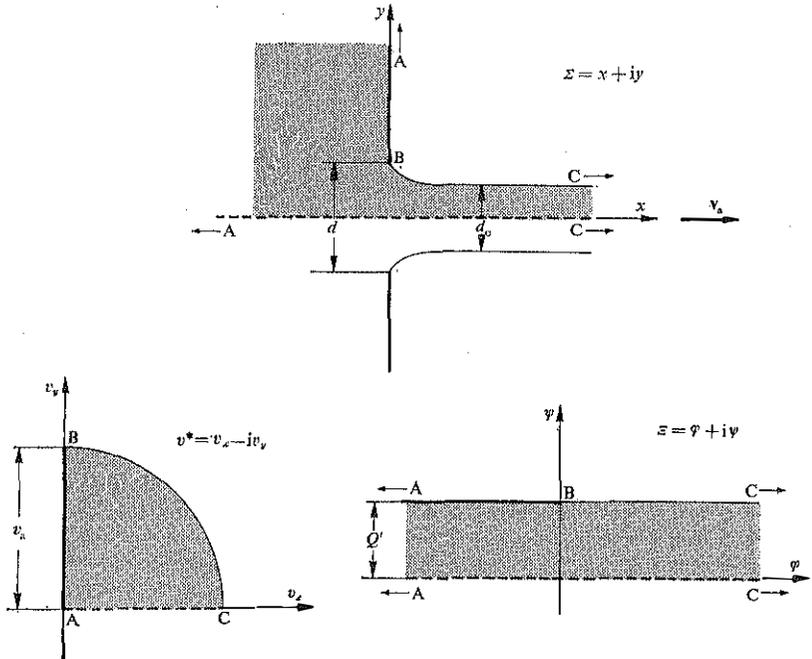


Fig. 8.26. – Fenomeno di efflusso piano da una fenditura larga d . Sono indicate la coordinata complessa ε sul piano campione, la velocità complessa v^* con il suo campo di variazione, ed il potenziale complesso ε con il campo dei valori assunti.

dulo, a valore pressoché uguale a v_a per φ positivo e sufficientemente grande. Inoltre, se la parte immaginaria di ε è iQ' , v^* è immaginaria pura, con coefficiente positivo della i , quando φ è negativa, ed assume invece modulo v_a e componente v_x positiva, quando φ stessa è positiva.

Assegnando a ε componente reale positiva e componente immaginaria pari ad iQ' , l'integrale

$$\begin{aligned} \Sigma - i \frac{d}{2} &= \int_{iQ'}^{\varphi + iQ'} \frac{1}{v^*(\varepsilon)} d\varepsilon = \int_{iQ'}^{\varphi + iQ'} \frac{1}{v_a} \frac{1}{-\exp\left(-\frac{\pi}{2Q'}\varepsilon\right) + \sqrt{1 + \exp\left(-\frac{\pi}{Q'}\varepsilon\right)}} d\varepsilon = \\ &= \int_0^\varphi \frac{1}{v_a} \frac{1}{\sqrt{1 - \exp\left(-\frac{\pi}{Q'}\varphi\right) + i \exp\left(-\frac{\pi}{2Q'}\varphi\right)}} d\varphi \end{aligned}$$

fornisce l'andamento del profilo di scia

$$x = -\frac{2Q'}{\pi v_a} \sqrt{1 - \exp\left(-\frac{\pi}{Q'} \varphi\right)} + \frac{2Q'}{\pi v_a} \operatorname{arc Th} \sqrt{1 - \exp\left(-\frac{\pi}{Q'} \varphi\right)},$$

$$y = \frac{d}{2} - \frac{2Q'}{\pi v_a} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\pi}{2Q'} \varphi\right) \right\}.$$

Così, la vena effluente dalla fessura larga d finisce con l'assumere larghezza

$$d_c = d - 4 \frac{Q'}{\pi v_a}$$

quando la velocità è ormai uniformemente uguale a v_a . Ma in tale campo asintotico deve essere

$$2Q' = d_c v_a;$$

ne segue

$$d_c = d - 2 \frac{d_c}{\pi}.$$

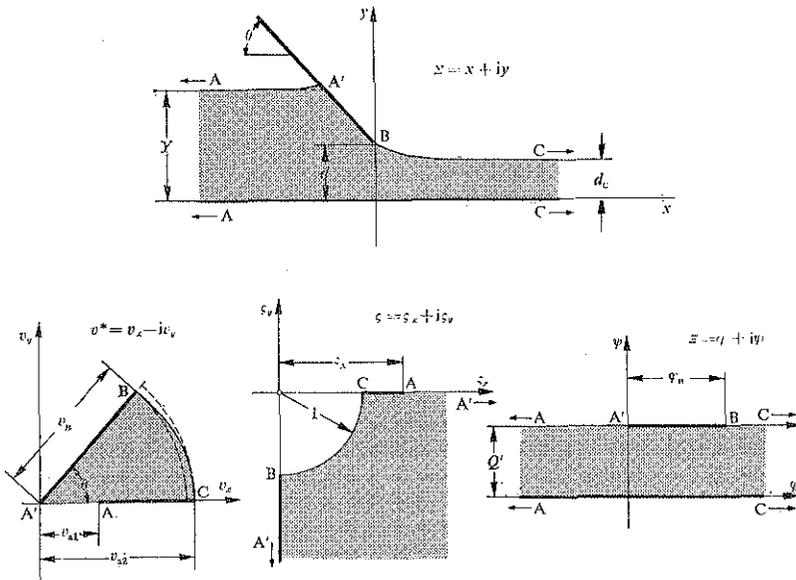


Fig. 8.27. - Efflusso piano al disotto di una paratoia piana. Oltre al campo complesso interessato dal moto, dalla velocità complessa e dal potenziale complesso, è riportato il campo di variabilità della grandezza ausiliaria ζ impiegata nei calcoli. Si è tenuto conto, in via approssimata, della presenza di forze di massa legate al geopotenziale.

Definendo, secondo l'uso, il *coefficiente di contrazione* C_c della vena come

$$C_c \equiv \frac{d_c}{d},$$

si ha pertanto

$$C_c = \frac{\pi}{\pi + 2} \simeq 0,611.$$

Può essere interessante valutare anche la distribuzione della pressione p sulla faccia di monte della parete piana, essendo quella di valle esposta alla scia di Helmholtz e sottoposta quindi alla pressione p_0 uniforme. In base al teorema di Bernoulli, risulta

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \frac{\rho}{2} (v_n^2 - |v^*|^2) = \\ &= p_0 + \rho v_n^2 \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\pi}{Q'} \varphi\right) + \exp\left(-\frac{\pi}{2Q'} \varphi\right) \sqrt{-1 + \exp\left(-\frac{\pi}{Q'} \varphi\right)} \right\}. \end{aligned}$$

Il valore così calcolato compete al punto di ordinata

$$\begin{aligned} y &= \frac{d}{2} + \int_0^\varphi \frac{1}{v_n} \frac{1}{\sqrt{-1 + \exp\left(-\frac{\pi}{Q'} \varphi\right) - \exp\left(-\frac{\pi}{2Q'} \varphi\right)}} d\varphi = \\ &= \frac{d}{2} + \frac{2Q'}{\pi v_n} \left\{ \sqrt{-1 + \exp\left(-\frac{\pi}{Q'} \varphi\right)} - 1 + \exp\left(-\frac{\pi}{2Q'} \varphi\right) - \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{arctg} \sqrt{-1 + \exp\left(-\frac{\pi}{Q'} \varphi\right)} \right\}, \end{aligned}$$

con φ negativo.

Come terzo esempio, si riporta il caso dell'*efflusso piano sotto una paratoia*. Il calcolo è condotto secondo un suggerimento di Marchi del 1953, e cioè in modo da tener conto, almeno parzialmente, delle forze di massa legate al geopotenziale. Il campo di moto sul piano campione, il dominio interessato da v^* ed il campo di variabilità di ε sono riprodotti in figura 8.27.

In questo caso, il valore di v^* sui peli liberi non è noto in partenza. Tuttavia, a monte della paratoia, si può trascurare il modesto sovrizzo dovuto al ristagno, ed assumere che il pelo libero sia orizzontale. La velocità complessa è allora localmente reale; il suo valore asintotico verrà indicato con v_{a1} . A valle della paratoia, il modulo della velocità sul pelo

libero aumenta progressivamente dal valore

$$v_B = \sqrt{v_{a1}^2 + 2g(Y-d)}$$

presente al distacco, fino al valore asintotico

$$v_{a2} = \sqrt{v_{a1}^2 + 2g(Y-d_0)},$$

come si deduce subito dal teorema di Bernoulli, dopo aver indicato con Y e d_0 , nell'ordine lo spessore asintotico di monte e di valle della lama liquida, e con d la quota del bordo inferiore della paratoia. Così il campo di variabilità della v^* deve essere delimitato, per il tratto corrispondente al pelo libero di valle, da una curva i cui punti devono avere distanza dall'origine compresa fra i valori v_B e v_{a2} , percentualmente poco discosti fra loro. Ciò consente di approssimare tale curva con altra avente distanze dall'origine limitate nello stesso modo, ma forma facile da trattare per via analitica.

Le notazioni risultano più semplici se si ricorre ad una variabile ausiliaria ζ , scrivendo

$$v^*(\zeta) = v_{a2}v_B \left(\frac{v_{a2}^{\pi/2\theta} + v_B^{\pi/2\theta}}{2} \zeta - \frac{v_{a2}^{\pi/2\theta} - v_B^{\pi/2\theta}}{2} \frac{1}{\zeta} \right)^{-2\theta/\pi}$$

in cui θ è l'angolo formato dalla paratoia con l'orizzontale. Come schematizzato in figura 8.27, alla ζ vanno assegnati solo valori con parte reale positiva, coefficiente negativo per la parte immaginaria e modulo maggiore od uguale ad 1. In particolare, si ammette che le ζ capaci di fornire le velocità sul pelo libero di valle corrispondano a punti della circonferenza di raggio unitario centrata sull'origine degli assi. Si può controllare poi che le ζ reali, comprese fra 1 e

$$\zeta_A = \frac{v_{a2}^{\pi/2\theta} v_B^{\pi/2\theta} + \sqrt{v_{a2}^{\pi/2\theta} v_B^{\pi/2\theta} + v_{a1}^{\pi/2\theta} (v_{a2}^{\pi/2\theta} - v_B^{\pi/2\theta}) (v_{a2}^{\pi/2\theta} + v_B^{\pi/2\theta})}}{v_{a1}^{\pi/2\theta} (v_{a2}^{\pi/2\theta} + v_B^{\pi/2\theta})}$$

danno le velocità al fondo, mentre quelle reali maggiori di ζ_A consentono il calcolo delle velocità sul pelo libero di monte. Per avere le velocità lungo la paratoia occorre assegnare a ζ valore immaginario puro, con coefficiente minore di -1 .

Resta da collegare ε a ζ : è facile controllare che la funzione analitica richiesta è

$$\varepsilon(\zeta) = \frac{Q'}{\pi} \ln \frac{(\zeta_A^2 - \zeta^2)(\zeta_A^2 \zeta^2 - 1)}{\zeta_A^2 (\zeta^2 - 1)^2}$$

nella quale Q' indica la portata $v_{a2}d_0$ in transito per unità di sviluppo trasversale.

L'espressione

$$\Sigma = id + \int_{-1}^{\xi} \frac{1}{v^*(\zeta)} \frac{d\xi}{d\zeta} d\zeta,$$

fornisce ora le coordinate del pelo libero di valle. Ciò che più interessa è il coefficiente di contrazione

$$C_c = \frac{d_c}{d}:$$

alcuni suoi valori numerici sono riportati nella tabella 8.1.

TABELLA 8.1. - Coefficienti di contrazione per l'efflusso sotto una paratoia piana.

θ	Y/d				
	2	3	5	7	10
90°	0,612	0,605	0,605	0,606	0,607
60°	0,668	0,674	0,682	0,685	0,686
45°	0,715	0,728	0,736	0,740	0,742
30°	0,769	0,795	0,805	0,808	0,809

Riferimenti citati.

- CRAPPER, G. D., *An exact solution for progressive capillary waves of arbitrary amplitude*, J. Fluid Mech., 1957, pp. 532-540.
- HELMHOLTZ, HERMANN LUDWIG FERDINAND VON, *Mitteilung über discontinuierliche Flüssigkeits Bewegungen*, Monatsberichte Akad. Wiss. Berlin, 1868, pp. 215-227.
- KIRCHHOFF, GUSTAV ROBERT, *Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen*, Crelle's J., 1869, pp. 289-298.
- LAITONE, EDMUND V., *Shallow-water waves*, Encyclopedia of physics, vol. IX, Berlin, 1960, pp. 667-714.
- LEVI-CIVITA, TULLIO, *Sulle onde di canale*, Acc. Lincei, 1912, pp. 3-14.
- MARCHI, ENRICO, *Sui fenomeni di efflusso piano da luci a battente*, Ann. Matem. pura ed appl., 1953, pp. 327-341.
- MICHELL, J. H., *The highest waves in water*, Phil. Mag., 1893, pp. 430-437.
- RAYLEIGH, JOHN WILLIAM STRUTT LORD, *On waves*, Phil. Mag., 1876, pp. 257-279.
- STOKES, GEORGE GABRIEL, *Considerations relative to the greatest height of oscillatory irrotational waves which can be propagated without change of form*, Mathematical and Physical Papers, vol. 1, 1880, pp. 225-228.

CAPITOLO NONO

DINAMICA DEI FLUIDI VISCOSI

9.1. Il tensore degli sforzi nei fluidi viscosi.

Quando le dissipazioni di energia meccanica connesse al moto di un fluido divengono fatto importante nel fenomeno da studiare, non è più possibile prescindere dalle componenti tangenziali del tensore degli sforzi.

In accordo con le prime osservazioni globali esposte nel paragrafo 2.9, si deve ammettere, in generale, che il tensore degli sforzi dipenda dallo stato di deformazione locale del fluido, dalla velocità della deformazione locale in atto, e dalle vicissitudini subite dal fluido nella sua storia. Tuttavia, queste dipendenze non hanno sempre la stessa importanza, e conviene perciò concentrare l'attenzione su situazioni più particolari, per procurarsi schemi di comportamento del mezzo fluido abbastanza semplici, ma ancora utilizzabili nello studio di vaste classi di fenomeni.

Così, i fluidi allo stato aeriforme e molti fluidi allo stato liquido, specie se costituiti da molecole molto semplici, conservano un ricordo degli stati di sollecitazione interna che si estingue rapidamente, riuscendo inapprezzabile già dopo tempi confrontabili con i nanosecondi. In tutti i fenomeni che implicano variazioni di assetto percentualmente rilevabili solo in tempi molto maggiori della durata della memoria, il ricordo delle vicende già attraversate dal fluido non gioca più un ruolo sensibile nel determinare lo stato di tensione presente istante per istante. Escludendo i fenomeni che si svolgono in tempi confrontabili con la persistenza dei ricordi, è perciò possibile adottare uno schema di comportamento del fluido che prescinda del tutto dai fenomeni di memoria.

Quando gli effetti delle evoluzioni di assetto subite da fluido sono da trascurare, riesce contemporaneamente irrilevante la dipendenza degli sforzi

dalle deformazioni. Manca infatti, nello schema che si impiega in tal caso, il modo di riconoscere il particolare stato di deformazione in atto, perché non esiste la possibilità di confrontarlo con stati di riferimento precedenti, dei quali il fluido ha già perso il ricordo.

Resta perciò in evidenza solo la dipendenza del tensore degli sforzi \mathbf{T} dalle velocità di deformazione, rappresentate dal tensore \mathbf{D} . È cioè

$$\mathbf{T} = f(\mathbf{D}).$$

Di solito lo schema è completato assumendo che il legame ora indicato non dipenda dal particolare riferimento locale scelto e richiedendo che esso si riduca alla forma

$$\mathbf{T} = p\mathbf{1},$$

valida nel caso statico, quando le velocità di deformazione si annullano ed il fluido raggiunge uno stato di quiete.

Lo schema così completato è noto come schema di *fluido stokesiano*, in quanto suggerito da Stokes nel 1845.

È sempre possibile scegliere gli assi di riferimento in modo che \mathbf{D} appaia localmente nella forma diagonale

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & D_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & D_{zz} \end{bmatrix},$$

ed è facile vedere che allora anche \mathbf{T} deve assumere, nello stesso punto, forma diagonale: basta accertare che una qualunque componente rettangolare di \mathbf{T} , ad esempio quella T_{xy} , deve essere nulla. Allo scopo si effettua una rotazione rigida del riferimento intorno all'asse delle x in modo da ottenere nuove coordinate \tilde{x} , \tilde{y} e \tilde{z} legate a quelle di partenza dalle relazioni

$$\tilde{x} = x, \quad \tilde{y} = -y, \quad \tilde{z} = -z.$$

Nel nuovo riferimento, \mathbf{D} ha ancora forma diagonale e presenta le medesime componenti. È infatti

$$D_{\tilde{z}\tilde{z}} = \frac{\partial v_{\tilde{z}}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial v_z}{\partial x} = D_{zz},$$

$$D_{\tilde{y}\tilde{y}} = \frac{\partial v_{\tilde{y}}}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial(-v_y)}{\partial(-y)} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = D_{yy},$$

$$D_{\tilde{z}\tilde{z}} = \frac{\partial v_{\tilde{z}}}{\partial \tilde{z}} = \frac{\partial(-v_z)}{\partial(-z)} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = D_{zz}.$$

Risulta invece

$$T_{\tilde{y}\tilde{y}} = -T_{xy},$$

perché, passando dalla coordinata y a quella \tilde{y} , si è mutato il verso dell'asse sul quale si proietta lo sforzo trasmesso attraverso la superficie normale ad x ed \tilde{x} . Per confronto con le

$$\begin{aligned} T_{xy} &= f(D_{xx}, D_{yy}, D_{zz}) \\ T_{\tilde{x}\tilde{y}} &= f(D_{\tilde{x}\tilde{x}}, D_{\tilde{y}\tilde{y}}, D_{\tilde{z}\tilde{z}}), \end{aligned}$$

ove si tenga presente che le componenti del tensore \mathbf{D} non sono mutate e che il legame funzionale f non può dipendere dall'orientamento degli assi, si conclude che deve essere

$$T_{\tilde{x}\tilde{y}} = T_{xy} = 0.$$

Il più semplice legame fra le componenti del tensore degli sforzi e le componenti del tensore delle velocità di deformazione è quello lineare. Se si specializza ulteriormente in questo modo lo schema stokesiano, si dice che si costruisce uno schema di *fluido newtoniano*, perché si ricade nelle ipotesi già utilizzate da Newton, nel 1687.

Ricordando che il tensore degli sforzi deve assumere la forma $\mathbf{T} = p\mathbf{I}$ quando \mathbf{D} si annulla, si vede che, per un fluido newtoniano, deve essere

$$\begin{aligned} T_{xx} &= p + \mu_{xx}D_{xx} + \mu_{xy}D_{yy} + \mu_{xz}D_{zz} \\ T_{yy} &= p + \mu_{yx}D_{xx} + \mu_{yy}D_{yy} + \mu_{yz}D_{zz} \\ T_{zz} &= p + \mu_{zx}D_{xx} + \mu_{zy}D_{yy} + \mu_{zz}D_{zz}, \end{aligned}$$

quando gli assi sono scelti in modo da portare \mathbf{T} e \mathbf{D} a forma diagonale.

I vari coefficienti introdotti non possono però essere tutti distinti. Cambiando nome agli assi mutano pure i nomi delle componenti di \mathbf{T} e \mathbf{D} , ma non i loro valori. Così, dal confronto delle equazioni ora scritte con quelle che vanno scritte quando si danno agli assi di riferimento i nuovi nomi

$$\tilde{x} = y, \quad \tilde{y} = z, \quad \tilde{z} = x,$$

si vede che deve essere

$$\begin{aligned} \mu_{xx} &= \mu_{yy} = \mu_{zz}, \\ \mu_{xy} &= \mu_{yz} = \mu_{zx}, \\ \mu_{xz} &= \mu_{yx} = \mu_{zy}. \end{aligned}$$

Lo stesso confronto operato dopo aver scelto i nuovi nomi

$$\tilde{x} = y, \quad \tilde{y} = x, \quad \tilde{z} = z$$

mostra che deve essere anche

$$\mu_{xy} = \mu_{yx}.$$

Dei nove coefficienti, due soli sono indipendenti. È uso porre

$$\begin{aligned} \mu_{xx} = \mu_{yy} = \mu_{zz} &= -2\mu - \mu', \\ \mu_{xy} = \mu_{yx} = \mu_{yz} = \mu_{zy} = \mu_{zx} = \mu_{xz} &= -\mu'. \end{aligned}$$

Raccogliendo i fattori comuni, la dipendenza di \mathbf{T} da \mathbf{D} si presenta di conseguenza nella forma

$$\mathbf{T} = (p - \mu' \operatorname{div} \mathbf{v}) \mathbf{I} - 2\mu \mathbf{D}.$$

Il coefficiente di viscosità dinamica μ ed il secondo coefficiente di viscosità dinamica μ' sono già stati introdotti nel paragrafo 2.9 in base a considerazioni globali. Per evidenziare tale coincidenza basta riesaminare nel nuovo contesto i due moti particolari considerati allora.

Se il fluido occupa il dominio $0 < y < d$ ed è animato da velocità

$$\mathbf{v} = y \frac{v_d}{d} \mathbf{i}_x,$$

risulta

$$D_{xy} = D_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \frac{v_d}{2d},$$

mentre tutte le altre componenti del tensore \mathbf{D} e la divergenza del vettore \mathbf{v} riescono nulle. L'equazione costitutiva meccanica dei fluidi newtoniani porge allora

$$T_{xy} = T_{yx} = -\mu \frac{v_d}{d}$$

e mostra che le componenti restanti sono nulle purché si prescinda dalla pressione statica p . Il confronto con la formula

$$\tau = \mu \frac{v_d}{d}$$

impiegata nel paragrafo 2.9, e l'osservazione che $T_{yx} = -\tau$ permettono di concludere che i coefficienti μ utilizzati nei due casi sono coincidenti.

Con il campo di velocità radiali centrifughe, di modulo crescente con la distanza dall'origine del riferimento, ossia con

$$\mathbf{v} = \mathbf{x} \frac{v_{r0}}{r_0} = \frac{v_{r0}}{r_0} (x\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y + z\mathbf{i}_z),$$

si ha invece

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 3 \frac{v_{r0}}{r_0}, \quad D_{xx} = D_{yy} = D_{zz} = \frac{v_{r0}}{r_0},$$

mentre le componenti rettangolari di \mathbf{D} sono tutte nulle. L'equazione costitutiva porge ora

$$T_{xx} = T_{yy} = T_{zz} = p - 3 \frac{v_{r0}}{r_0} \mu' - 2 \frac{v_{r0}}{r_0} \mu$$

quali uniche componenti non nulle di \mathbf{T} . L'incremento di pressione rispetto al valore statico è pari a

$$\Delta p = -\left(\mu' + \frac{2}{3}\mu\right) 3 \frac{v_{r0}}{r_0},$$

la cui espressione va confrontata con quella

$$\Delta p = -\left(\mu' + \frac{2}{3}\mu\right) \frac{1}{V} \frac{dV}{dt}$$

del paragrafo 2.9. Anche ora si conclude per l'identità dei coefficienti μ' impiegati nelle due formule, osservando che il raggio r_0 di una sfera materiale centrata sull'origine aumenta con velocità v_{r0} e che il volume V della stessa sfera cresce perciò con velocità

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r_0^2 v_{r0},$$

rendendo appunto

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = 3 \frac{v_{r0}}{r_0}.$$

I due coefficienti μ e μ' , come ricordato nel paragrafo 2.9, dipendono dalla pressione e dalla temperatura. Nell'ambito dello schema newtoniano, però, si può tener conto solo della seconda di queste dipendenze: quella dalla pressione porterebbe ad un legame non più lineare fra \mathbf{T} e \mathbf{D} .

9.2. Le equazioni meccaniche dei fluidi newtoniani.

L'equazione costitutiva meccanica

$$\mathbf{T} = (p - \mu' \operatorname{div} \mathbf{v}) \mathbf{I} - 2\mu \mathbf{D},$$

che definisce il fluido newtoniano, non ha ripercussioni sull'equazione di continuità, esaminata nel paragrafo 4.3. Essa conserva anche nel contesto presente la sua forma cardinale

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \, dV = 0$$

e, purché la densità ρ e la velocità \mathbf{v} siano di classe C^1 , le sue forme indefinite

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Lo stesso legame fra tensore degli sforzi \mathbf{T} e tensore delle velocità di deformazione \mathbf{D} specializza invece le due equazioni cardinali del moto, introdotte nel paragrafo 4.5,

$$\int_V \rho \mathbf{f} \, dV + \int_A \boldsymbol{\tau} \, dA = \frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{v} \, dV,$$

$$\int_V (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \rho \mathbf{f} \, dV + \int_A (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \boldsymbol{\tau} \, dA = \frac{D}{Dt} \int_V (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \rho \mathbf{v} \, dV,$$

che si presentano ora nella forma

$$\int_V \rho \mathbf{f} \, dV + \int_A \mathbf{n} \cdot [(p - \mu' \operatorname{div} \mathbf{v}) \mathbf{I} - 2\mu \mathbf{D}] \, dA = \frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{v} \, dV,$$

$$\begin{aligned} \int_V (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \rho \mathbf{f} \, dV + \int_A (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \mathbf{n} \cdot [(p - \mu' \operatorname{div} \mathbf{v}) \mathbf{I} - 2\mu \mathbf{D}] \, dA = \\ = \frac{D}{Dt} \int_V (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \rho \mathbf{v} \, dV. \end{aligned}$$

Nello stesso tempo, la prima equazione indefinita del moto

$$\rho \mathbf{f} - \operatorname{div} \mathbf{T} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt},$$

ricavata nel paragrafo 4.7 sotto le ipotesi che le forze specifiche di massa \mathbf{f} siano di classe C^0 , e che ρ , \mathbf{v} e \mathbf{T} siano di classe C^1 , assume l'assetto

$$\rho \mathbf{f} - \text{grad} p + \text{grad}(\mu' \text{div} \mathbf{v}) + \text{div}(2\mu \mathbf{D}) = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt},$$

purché \mathbf{v} sia di classe C^2 , p , μ e μ' di classe C^1 . È infatti

$$\text{div} \mathbf{T} = \text{div}[(p - \mu' \text{div} \mathbf{v}) \mathbf{I} - 2\mu \mathbf{D}] = \text{grad}(p - \mu' \text{div} \mathbf{v}) - \text{div}(2\mu \mathbf{D}),$$

perché

$$[\text{div}(p - \mu' \text{div} \mathbf{v}) \mathbf{I}]_k = \sum_i \frac{\partial [(p - \mu' \text{div} \mathbf{v}) I_{ik}]}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_k} (p - \mu' \text{div} \mathbf{v}),$$

in quanto le sole componenti non nulle di \mathbf{I} sono quelle con indici uguali.

La seconda equazione indefinita del moto,

$$T_{ik} = T_{ki},$$

dedotta nel paragrafo 4.7 sotto le condizioni di continuità già ricordate per la prima equazione indefinita, è automaticamente soddisfatta dall'equazione costitutiva del fluido newtoniano perché \mathbf{I} è addirittura isotropo, e \mathbf{D} è simmetrico per costruzione.

Se poi i coefficienti di viscosità μ e μ' risultano uniformi in tutta la massa fluida, la prima equazione indefinita del moto si riduce alla forma

$$\rho \mathbf{f} - \text{grad} p + (\mu + \mu') \text{grad} \text{div} \mathbf{v} + \mu \nabla^2 \mathbf{v} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt},$$

detta *equazione di Stokes*, e presentata nel 1845. Si controlla subito che è appunto

$$\begin{aligned} [\text{div}(2\mu \mathbf{D})]_k &= \sum_i \frac{\partial (2\mu D_{ik})}{\partial x_i} = \sum_i 2\mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) \right] = \\ &= \mu \sum_i \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i^2} + \mu \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \mu [\nabla^2 \mathbf{v}]_k + \mu [\text{grad}(\text{div} \mathbf{v})]_k. \end{aligned}$$

Nel caso ancor più particolare di moto isocoro, l'equazione indefinita di continuità si riduce alla

$$\text{div} \mathbf{v} = 0$$

e, contemporaneamente, la prima equazione indefinita del moto a viscosità μ uniforme si presenta come

$$\rho \mathbf{f} - \text{grad} p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}.$$

Quest'ultima forma, che risale al 1827, è detta *equazione di Navier*.

9.3. Le equazioni termodinamiche dei fluidi viscosi.

Nel moto dei fluidi viscosi avvengono dissipazioni di energia meccanica, ed è perciò necessario conservare tutti i termini nelle equazioni cardinali della termodinamica, esposte nel paragrafo 4.8. Il primo principio, la definizione implicita dell'entropia specifica, ed il secondo principio vanno scritti quindi nelle loro forme complete

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) dV &= \int_V \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f} dV + \int_A \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA + \int_A \omega dA, \\ \frac{D}{Dt} \int_V \rho e dV &= \int_V \frac{\rho \dot{q}_t}{T} dV + \int_V \frac{\rho \dot{q}_d}{T} dV, \\ \frac{D}{Dt} \int_V \rho e dV &\geq \int_A \frac{\omega}{T} dA, \end{aligned}$$

per costituire le tre *forme cardinali delle equazioni fondamentali della termodinamica per i fluidi viscosi*. Nel seguito si ammetterà che l'assorbimento specifico di potenza termica \dot{q}_t , la dissipazione specifica di potenza meccanica \dot{q}_d , e le forze specifiche di massa \mathbf{f} siano di classe C^0 . Si ammetterà invece che la densità ρ , l'energia interna specifica u , gli sforzi $\boldsymbol{\tau}$, l'entropia specifica e , la densità di flusso di potenza termica ω , la temperatura assoluta T , e la velocità \mathbf{v} siano di classe C^1 . In queste condizioni, si può introdurre il vettore densità di flusso della potenza termica \mathbf{q} , come fatto nel paragrafo 4.9, ottenendo

$$\int_A \omega dA = \int_A \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} dA = - \int_V \operatorname{div} \mathbf{q} dV = \int_V \rho \dot{q}_t dV,$$

e si possono dedurre dalle forme cardinali altrettante forme indefinite. Dalla prima, in particolare, si trae

$$\rho \frac{Du}{Dt} = - \sum_{i,k} T_{ik} \frac{\partial v_k}{\partial v_i} - \operatorname{div} \mathbf{q},$$

come si è visto nel paragrafo 4.10. A seguito dell'introduzione del tensore delle velocità di deformazione \mathbf{D} e del tensore delle velocità di rotazione rigida $\boldsymbol{\Omega}$, effettuata nel paragrafo 5.1, si può scrivere anche

$$\begin{aligned} \sum_{i,k} T_{ik} \frac{\partial v_k}{\partial v_i} &= \sum_{i,k} T_{ik} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial v_i} + \frac{\partial v_i}{\partial v_k} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial v_i} - \frac{\partial v_i}{\partial v_k} \right) \right] = \\ &= \sum_{i,k} T_{ik} (D_{ik} + \Omega_{ik}) = \sum_{i,k} T_{ik} D_{ik} = \mathbf{T} : \mathbf{D}, \end{aligned}$$

perché \mathbf{T} è simmetrico, ed $\mathbf{\Omega}$ è emisimmetrico. Con questa sola variante rispetto alle scritture del paragrafo 4.10, le *forme indefinite delle equazioni fondamentali della termodinamica per i fluidi viscosi* sono

$$\begin{aligned} \varrho \frac{Du}{Dt} &= -\mathbf{T}:\mathbf{D} - \operatorname{div} \mathbf{q}, \\ \varrho \frac{De}{Dt} &= -\frac{\operatorname{div} \mathbf{q}}{\tau} + \frac{\varphi_a}{\tau}, \\ \varrho \frac{De}{Dt} &\geq -\frac{\operatorname{div} \mathbf{q}}{\tau} + \frac{\mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \tau}{\tau^2}. \end{aligned}$$

Dai principi generali fin qui richiamati si possono dedurre informazioni più dettagliate solo precisando le caratteristiche del particolare fluido in esame, attraverso le sue equazioni costitutive termodinamiche.

Va indicata innanzi tutto la dipendenza della densità dai valori locali ed istantanei delle varie grandezze meccaniche e termiche. Nonostante la presenza di sforzi viscosi in seno al fluido, ossia di sforzi interni legati alle velocità di deformazione locali, è di norma sufficiente ammettere che la densità vari soltanto con la pressione non viscosa p e con la temperatura τ . In seguito si continuerà perciò ad assumere la

$$\varrho = \varrho(p, \tau)$$

come *equazione di stato*.

Sempre con riferimento ai fluidi, si può ritenere che l'energia interna specifica e l'entropia specifica non dipendano dagli sforzi viscosi. Anche tali grandezze rimangono così legate soltanto alla pressione p ed alla temperatura τ .

Ciò posto, si possono confrontare fra loro le prime due forme indefinite delle equazioni fondamentali della termodinamica, ricavandone una prima espressione per la dissipazione specifica della potenza meccanica:

$$\varphi_a = \tau \frac{De}{Dt} - \frac{1}{\varrho} \mathbf{T}:\mathbf{D} - \frac{Du}{Dt}.$$

L'espressione stessa può essere semplificata, se si tien conto dell'equazione indefinita

$$\frac{Du}{Dt} = \tau \frac{De}{Dt} - \frac{p}{\varrho} \operatorname{div} \mathbf{v},$$

ricavata alla fine del paragrafo 4.10, e valida sotto le medesime ipotesi di continuità accettate anche qui. La dissipazione specifica di potenza

meccanica è pertanto

$$\rho_a = \frac{p}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \mathbf{T} : \mathbf{D}$$

in termini di sole grandezze meccaniche. Anzi, nel caso particolare ora in discussione, e cioè nel caso dei fluidi newtoniani, per i quali, come si è visto nel paragrafo 9.1, riesce

$$\mathbf{T} = (p - \mu' \operatorname{div} \mathbf{v}) \mathbf{I} - 2\mu \mathbf{D},$$

con μ e μ' dipendenti solo dalla temperatura locale, si può scrivere pure

$$\rho_a = \frac{\mu'}{\rho} (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + \frac{2\mu}{\rho} \mathbf{D} : \mathbf{D},$$

perché

$$\mathbf{I} : \mathbf{D} = \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Dal confronto fra la seconda e la terza equazione fondamentale della termodinamica, prese nella loro forma indefinita, segue

$$\rho_a \geq \frac{\mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} T}{\rho T},$$

e quindi, almeno nel caso di temperatura uniforme,

$$\rho_a \geq 0$$

con risultato generale per i fluidi newtoniani, in quanto μ e μ' dipendono solo dalla temperatura locale e non dal suo gradiente. La dissipazione specifica di potenza meccanica è dunque grandezza intrinsecamente non negativa nel caso dei fluidi newtoniani.

In particolare, se il moto del fluido newtoniano è isocoro, ossia se $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, si ha

$$\rho_a = \frac{2\mu}{\rho} \mathbf{D} : \mathbf{D},$$

e quindi

$$\mu > 0.$$

Anche questo risultato è generale, perché μ non può dipendere dalle caratteristiche cinematiche del moto. Sempre in particolare, se la deformazione del fluido è una dilatazione pura, si ha, come si è visto nel paragrafo 5.1,

$$\mathbf{D} = \mathbf{L} = \left(\frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \mathbf{I},$$

così

$$\rho_a = \frac{\mu'}{\varrho} (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + \frac{2\mu}{\varrho} \left(\frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{v} \right)^2 (\mathbf{1} : \mathbf{1}) = \frac{3\mu' + 2\mu}{3\varrho} (\operatorname{div} \mathbf{v})^2$$

e quindi

$$3\mu' + 2\mu > 0,$$

con validità indipendente dal tipo di moto considerato nella sua deduzione.

Questi ultimi due risultati avvertono che gli sforzi viscosi sono sempre tali da contrastare le deformazioni. Più precisamente, dalle

$$T_{ik} = -2\mu D_{ik} \quad \text{con } i \neq k \text{ e } \mu > 0$$

si vede che le tensioni tangenziali sono sempre contrarie agli scorrimenti, e dalle

$$T_{kk} = p - \mu' \operatorname{div} \mathbf{v} - 2\mu D_{kk} \quad \text{con } 3\mu' + 2\mu > 0$$

si ricava

$$\frac{1}{3} \sum_k T_{kk} = p - \mu' \operatorname{div} \mathbf{v} - \frac{2}{3} \mu \sum_k D_{kk} = p - \frac{1}{3} (3\mu' + 2\mu) \operatorname{div} \mathbf{v},$$

e perciò che la pressione isotropa, ossia la media delle pressioni relative a tre facce mutuamente perpendicolari, non può essere inferiore a p durante una compressione, per la quale è $\operatorname{div} \mathbf{v} < 0$, né superiore alla stessa p in una fase di espansione, quando è $\operatorname{div} \mathbf{v} > 0$. Nel moto isocoro, la pressione isotropa eguaglia p .

Infine, restano da precisare le condizioni relative alla propagazione della potenza termica. Nei fluidi newtoniani è ancora verificata l'equazione costitutiva di Fourier

$$\mathbf{q} = -k \operatorname{grad} \tau,$$

con k dipendente solo dalla pressione non viscosa p e dalla temperatura τ , che è già stata impiegata in condizioni statiche ed in corrispondenza del moto di fluido ideale. Dato che k risulta indipendente dagli sforzi viscosi, esso mantiene valore intrinsecamente non negativo, come riconosciuto allora. Il flusso della potenza termica può quindi aver luogo anche nei fluidi newtoniani solo nella direzione delle temperature decrescenti.

Unendo l'equazione costitutiva di Fourier alla definizione dell'entropia specifica, e supponendo che \mathbf{T} sia di classe C^2 , anziché soltanto di classe C^1 , si ha

$$\varrho \frac{De}{Dt} = \frac{\operatorname{div}(k \operatorname{grad} \tau)}{T} + \frac{\rho_a}{T},$$

che si riduce alla

$$\varrho \tau \frac{De}{Dt} = k \nabla^2 \tau + \varrho \not\! /_d$$

quando k è uniforme. Poiché, come si è già ricordato in questo stesso paragrafo, l'entropia specifica dipende ancora solo dalla pressione non viscosa p e dalla temperatura τ , si può scriverne il differenziale totale nella forma

$$de = -\frac{\alpha}{\varrho} dp + \frac{c_p}{\tau} d\tau,$$

dedotta nel paragrafo 2.6 evidenziando il coefficiente di dilatazione cubica α ed il calore specifico a pressione costante c_p . L'equazione in esame assume allora la forma

$$-\alpha \tau \frac{Dp}{Dt} + \varrho c_p \frac{D\tau}{Dt} = k \nabla^2 \tau + \varrho \not\! /_d,$$

detta anch'essa *equazione di Fourier*, in analogia a quanto fatto in assenza di dissipazioni di energia meccanica. Se poi il moto è isocoro, dovendo essere

$$\frac{D\varrho}{Dt} = \left(\frac{\partial \varrho}{\partial p} \right)_\tau \frac{Dp}{Dt} + \left(\frac{\partial \varrho}{\partial \tau} \right)_p \frac{D\tau}{Dt} = \varrho \beta \frac{Dp}{Dt} - \varrho \alpha \frac{D\tau}{Dt} = 0,$$

nella quale β è il coefficiente di comprimibilità cubica, e sussistendo la relazione ricordata nel paragrafo 2.6 per il calore specifico c_v a volume costante,

$$c_p - c_v = \frac{\tau \alpha^2}{\varrho \beta},$$

l'equazione di Fourier si presenta nella forma più compatta

$$\varrho c_v \frac{D\tau}{Dt} = k \nabla^2 \tau + \varrho \not\! /_d.$$

9.4. Aspetti generali del moto dei fluidi viscosi.

Come si è visto nel paragrafo 9.2, lo schema di fluido newtoniano si basa sull'equazione

$$\varrho \mathbf{f} - \text{grad} p + \text{grad}(\mu' \text{div} \mathbf{v}) + \text{div}(2\mu \mathbf{D}) = \varrho \frac{D\mathbf{v}}{Dt},$$

che è valida purché la velocità \mathbf{v} sia di classe C^2 , la densità ϱ , la pressione p , ed i coefficienti di viscosità μ e μ' siano di classe C^1 , e le forze specifiche di massa \mathbf{f} siano di classe C^0 .

Riscrivendola come

$$\mathbf{f} - \frac{1}{\varrho} \text{grad} p + \frac{1}{\varrho} \text{grad}(\mu' \text{div} \mathbf{v}) + \frac{1}{\varrho} \text{div}(2\mu \mathbf{D}) = \mathbf{a},$$

si nota subito, per la presenza dei termini contenenti i coefficienti di viscosità, che le due condizioni di moto barotropico e di forze specifiche di massa con potenziale univoco ϕ , atte a garantire l'esistenza di un potenziale univoco dell'accelerazione \mathbf{a} nel caso dei fluidi ideali, non sono più sufficienti per concludere che il moto del fluido newtoniano si svolga con accelerazioni dotate della stessa proprietà. Anzi, \mathbf{a} resta ora priva di potenziale anche nell'ipotesi, ben più restrittiva di quella di moto barotropico, che la densità ϱ resti sempre ed ovunque costante, ed anche se si unisce a questa l'ipotesi che la viscosità μ sia uniforme. Con tali assetti di ϱ e μ l'equazione del moto assume la forma di Navier

$$\varrho \mathbf{f} - \text{grad} p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} = \varrho \frac{D\mathbf{v}}{Dt},$$

che conviene riscrivere qui come

$$\mathbf{f} - \text{grad} \frac{p}{\varrho} + \frac{\mu}{\varrho} \nabla^2 \mathbf{v} = \mathbf{a}.$$

Servendosi inoltre del potenziale ϕ per le forze specifiche di massa e dell'identità

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \text{grad} \text{div} \mathbf{v} - \text{rot} \text{rot} \mathbf{v}$$

unita all'equazione di continuità $\text{div} \mathbf{v} = 0$, si ottiene complessivamente

$$\text{grad} \left(\phi - \frac{p}{\varrho} \right) - \frac{\mu}{\varrho} \text{rot} \text{rot} \mathbf{v} = \mathbf{a}.$$

Ne segue che l'accelerazione ammette potenziale univoco se lo ammette il rotore della vorticità $\mathbf{w} = \text{rot} \mathbf{v}$, ossia se

$$\text{rot} \mathbf{w} = \text{grad} \varphi_w,$$

con φ_w univoco. Si ha allora

$$\mathbf{a} = \text{grad} \left(\phi - \frac{p}{\varrho} - \frac{\mu}{\varrho} \varphi_w \right).$$

Per i moti di fluido a densità uniforme e permanente ed a viscosità uniforme, soggetti a forze specifiche di massa conservative, ed aventi potenziale univoco per il rotore della vorticità, esiste dunque un potenziale univoco delle accelerazioni. Agli stessi moti possono perciò essere applicati tutti i risultati cinematici del paragrafo 5.10. Va osservato tuttavia che questi moti sono di norma rotazionali. Ciò perché se il moto fosse anche irrotazionale, oltre che isocoro, si avrebbe

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \text{grad div } \mathbf{v} - \text{rot rot } \mathbf{v} = 0 :$$

l'equazione di Navier si ridurrebbe a quella di Euler ed il moto stesso sarebbe inquadrabile già nello schema di fluido ideale.

Posto dunque che esista la vorticità, e che le accelerazioni ammettano potenziale univoco, la circolazione della velocità \mathbf{v} lungo curve ancorate al fluido resta invariata nel tempo, le linee del vettore $\mathbf{w} = \text{rot } \mathbf{v}$ si muovono con il fluido, il flusso della vorticità \mathbf{w} risulta identico per le diverse sezioni trasversali del medesimo tubo di vortice conservandosi inoltre intrinsecamente costante al passare del tempo, e la velocità angolare dei singoli elementi fluidi, pari alla metà di \mathbf{w} , cambia solo se si manifestano mutamenti del loro momento d'inerzia a seguito di variazioni della loro forma.

Lo schema di fluido newtoniano comprende anche moti con caratteristiche diverse da quelle ora esaminate: un fluido può comportarsi come newtoniano pur essendo soggetto a forze specifiche di massa prive di potenziale, quali quelle di Coriolis, oppure presentando densità variabili con la pressione e la temperatura, od anche assumendo viscosità non uniformi in concomitanza a differenze nella temperatura.

Quale che sia il motivo dell'assenza del potenziale univoco per le accelerazioni, il moto risulta ancora rotazionale, ma non è più vero che la circolazione della velocità lungo curve in moto con il fluido rimanga costante nel tempo, né che le linee del vettore vorticità si muovano con il fluido. Inoltre, il rotore dell'accelerazione contribuisce al tasso di variazione nel tempo della vorticità intrinseca, disgiuntamente dai cambiamenti di momento d'inerzia dei singoli elementi fluidi determinati dal mutare del volume o della forma.

Altro aspetto importante del moto dei fluidi viscosi è costituito dal fatto che non è più possibile l'esistenza del moto inverso, nel senso indicato nel paragrafo 7.7. Se \mathbf{v} , \mathbf{f} , p , ρ , μ e μ' , tutte variabili con il punto \mathbf{x} e con l'istante t , sono compatibili con l'equazione

$$\rho \mathbf{f} - \text{grad } p + \text{grad } (\mu' \text{ div } \mathbf{v}) + \text{div} (2\mu \mathbf{D}) = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}$$

nell'intervallo di tempo compreso fra $t_1 = 0$ e $t_2 > 0$, le grandezze relative al moto inverso sono da costruire assegnando allo stesso punto x ed all'istante $\tilde{t} = t_2 - t$ velocità opposte e valori identici alle funzioni rimanenti, rispetto a quelli presenti in x e t nel moto diretto. Ma il gruppo di variabili $\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{f}}, \tilde{p}, \tilde{g}, \tilde{\mu}$ e $\tilde{\mu}'$ così ottenuto non può soddisfare la relativa equazione

$$\tilde{g}\tilde{\mathbf{f}} - \text{grad}\tilde{p} + \text{grad}(\tilde{\mu}' \text{div}\tilde{\mathbf{v}}) + \text{div}(2\tilde{\mu}\tilde{\mathbf{D}}) = \tilde{g} \frac{D\tilde{\mathbf{v}}}{D\tilde{t}}$$

perché tutti i termini di questa risultano numericamente uguali a quelli dell'equazione di partenza, salvo i termini contenenti le viscosità, che assumono invece segno opposto.

9.5. Condizioni al contorno.

Sulla frontiera del dominio interessato dal moto la componente della velocità \mathbf{v} del fluido in direzione normale a tale superficie deve coincidere con la velocità di spostamento di questa nella medesima direzione. Se $f(\mathbf{x}, t) = 0$ è l'equazione della frontiera, l'equazione stessa deve perciò soddisfare la condizione

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \right) f = \frac{D}{Dt} f = 0,$$

in tutti i punti nei quali la frontiera ammette versore normale. Questa condizione, che vige inalterata anche per i fluidi ideali, è già stata esaminata nel paragrafo 7.6.

Il fatto nuovo che si presenta nello schema dei fluidi viscosi, rispetto a quanto avviene in quello dei fluidi ideali, è la possibilità di tener conto anche della seconda condizione cinematica di frontiera, ossia della *condizione di aderenza* del fluido alle pareti solide. Si impone così che sulle frontiere realizzate da pareti solide la componente tangenziale della velocità del fluido coincida con la velocità di scorrimento della parete su se stessa. Complessivamente, la velocità del fluido a contatto con pareti solide è uguale alla velocità di tali pareti, e perciò si annulla quando queste sono ferme.

Anche le condizioni dinamiche sulle superfici di separazione tra fluidi diversi subiscono modifiche rispetto a quelle riportate nel paragrafo 7.6 e valide per i fluidi ideali.

Si è già osservato allora che, in assenza di tensioni superficiali, la prima equazione cardinale del moto assicura la continuità degli sforzi interni $\boldsymbol{\tau}$

in corrispondenza a superfici di discontinuità per la velocità, purché la velocità stessa e la densità siano di classe C^1 al di fuori di tale superficie, gli sforzi interni siano di classe C^0 esternamente alla medesima superficie, e le forze specifiche di massa siano localmente continue. Ora però gli sforzi interni non coincidono più con la sola pressione non viscosa p , e questa non è più continua. Per sottolineare meglio le differenze, si può scegliere la terna ortogonale di riferimento in modo che gli assi x ed y riescano tangenti in un punto alla superficie luogo della discontinuità della \mathbf{v} , e che quello z sia ortogonale ad essa: contraddistinte con l'indice 1 o 2 al piede le grandezze esistenti da bande opposte della superficie in questione, la condizione di continuità dello sforzo interno si traduce nelle scritture

$$\begin{aligned}\mu_1 \left(\frac{\partial v_{1x}}{\partial z} + \frac{\partial v_{1z}}{\partial x} \right) &= \mu_2 \left(\frac{\partial v_{2x}}{\partial z} + \frac{\partial v_{2z}}{\partial x} \right) \\ \mu_1 \left(\frac{\partial v_{1y}}{\partial z} + \frac{\partial v_{1z}}{\partial y} \right) &= \mu_2 \left(\frac{\partial v_{2y}}{\partial z} + \frac{\partial v_{2z}}{\partial y} \right) \\ p_1 - \mu_1' \operatorname{div} \mathbf{v}_1 - 2\mu_1 \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} &= p_2 - \mu_2' \operatorname{div} \mathbf{v}_2 - 2\mu_2 \frac{\partial v_{2z}}{\partial z}\end{aligned}$$

che devono essere verificate tutte su $z = 0$.

Invece, quando è presente la tensione superficiale, la componente normale dello sforzo interno non è più continua. Si ammette usualmente che l'ulteriore salto di pressione non viscosa sia ancora espresso dalla formula di Laplace, ricordata nel paragrafo 2.3 con riferimento a condizioni statiche. Tale posizione ricalca quella assunta nel paragrafo 7.6 per lo schema di fluido ideale.

9.6. Moto in tubi cilindrici.

Quale primo esempio di moto di fluido viscoso si considera in questo paragrafo il moto permanente di un fluido a viscosità dinamica μ e densità ρ uniformi e stazionarie, che si svolge con traiettorie rettilinee e parallele nel campo del geopotenziale $\phi = -gz$.

Assunto un riferimento ortogonale x, y, z , ed assegnati all'asse x direzione e verso coincidenti con quelli della velocità \mathbf{v} , si osserva intanto che, in base all'equazione di continuità

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

ormai ridotta alla forma

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0,$$

l'unica componente non nulla della velocità, la v_x , può dipendere solo dalle coordinate trasversali y e z .

La prima equazione indefinita del moto, la cui forma adatta al problema in esame è quella di Navier

$$\rho \mathbf{f} - \text{grad } p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt},$$

presentata alla fine del paragrafo 9.2, ammette dunque le proiezioni

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho g z + p) + \mu \nabla^2 v_x = 0,$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}(\rho g z + p) = 0,$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}(\rho g z + p) = 0.$$

Con $\gamma = \rho g$, le ultime due equazioni possono essere riscritte nella forma

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) = 0$$

ad evidenziare che il carico piezometrico

$$h = z + \frac{p}{\gamma}$$

già introdotto nel paragrafo 6.4, è uniforme su ciascun piano ortogonale all'asse x , e quindi che la pressione p varia con legge idrostatica lungo i singoli piani trasversali.

Il carico piezometrico cambia invece al mutare della x . In accordo con la proiezione lungo x dell'equazione di Navier, deve essere

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) + \frac{\mu}{\gamma} \nabla^2 v_x = 0.$$

Come v_x , anche $\nabla^2 v_x$ è indipendente da x . Così la variazione del carico piezometrico con x è uniforme. È uso mettere in evidenza la caduta di carico piezometrico per unità di percorso nel verso della corrente

$$i = -\frac{\partial}{\partial x} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right),$$

ed indicare questa grandezza con il termine *pendenza motrice*. L'uniformità del carico piezometrico sulle singole sezioni trasversali assicura la stessa uniformità alla i .

In base alla componente lungo x dell'equazione di Navier ed alla definizione di pendenza motrice, la distribuzione della velocità longitudinale v_x su ciascuna sezione trasversale è retta dall'equazione di Poisson

$$\nabla^2 v_x = -\frac{\gamma i}{\mu},$$

e risulta determinata una volta fissata la forma della sezione trasversale della corrente e le condizioni cinematiche esistenti sul suo contorno.

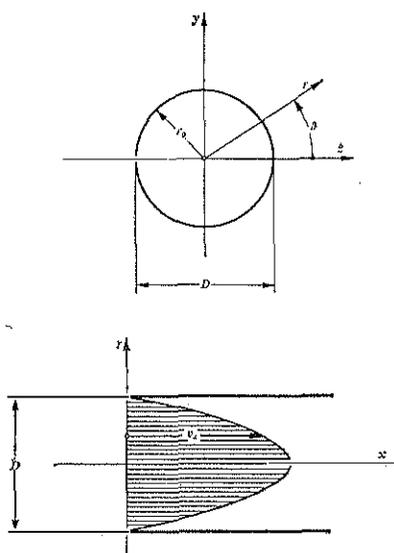


Fig. 9.1. - Moto uniforme in tubo cilindrico circolare.

Nel caso della corrente in un tubo di *sezione circolare* di raggio r_0 , conviene ricorrere alle coordinate cilindriche indicate in figura 9.1, anziché alle coordinate cartesiane ortogonali. Se la parete è ferma rispetto all'osservatore, la condizione di aderenza richiede che la velocità si annulli sulla parete stessa. La soluzione richiesta è

$$v_x = \frac{\gamma i (r_0^2 - r^2)}{4\mu}.$$

Infatti, si controlla immediatamente che è

$$\nabla^2 v_x = \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial \theta^2} = -\frac{\gamma i}{\mu},$$

e che risulta

$$v_x = 0 \quad \text{per} \quad r = r_0.$$

La velocità, massima sull'asse, ove ha il valore

$$v_{x\text{max}} = \frac{\gamma i}{4\mu} r_0^2,$$

decrece poi con legge parabolica allontanandosi da esso.

La portata volumetrica ammonta a

$$Q = \int_0^{r_0} 2\pi r v_x dr = \frac{\gamma i}{8\mu} \pi r_0^4 = \frac{\gamma i}{128\mu} \pi D^4,$$

essendo D il diametro $2r_0$ del tubo. La velocità media è di conseguenza

$$U = \frac{Q}{\pi r_0^2} = \frac{\gamma i}{8\mu} r_0^2 = \frac{\gamma i}{32\mu} D^2,$$

ed è quindi pari alla metà della velocità massima.

Il fluido esercita sulle pareti del tubo, nel verso del moto, le tensioni tangenziali

$$[T_{rx}]_{r=r_0} = -\mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial r} \right]_{r=r_0} = \frac{\gamma i}{2} r_0.$$

Il rotore del campo della velocità è

$$\text{rot}(v_x \mathbf{i}_x) = \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \theta} \mathbf{i}_r - \frac{\partial v_x}{\partial r} \mathbf{i}_\theta = \frac{\gamma i}{2\mu} r \mathbf{i}_\theta$$

ed ha perciò modulo che cresce linearmente con r , passando dal valore nullo in asse al valore massimo

$$\frac{\gamma i}{2\mu} r_0$$

presso la parete.

In modo del tutto analogo si può esaminare anche il moto rettilineo nell'intercapedine fra due tubi a sezione circolare e coassiali, di raggi r_1 ed $r_2 > r_1$, come indicato in figura 9.2. Se le pareti sono ferme, la distribuzione della velocità è ora quella

$$v_x = \frac{\gamma i}{4\mu} \left[(r_2^2 - r^2) - \frac{\ln \frac{r_2}{r}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} (r_2^2 - r_1^2) \right],$$

che ha appunto laplaciano uniformemente uguale a $-\gamma i/\mu$ in tutto il dominio $r_1 < r < r_2$, e che si riduce a zero per $r = r_1$ e per $r = r_2$.

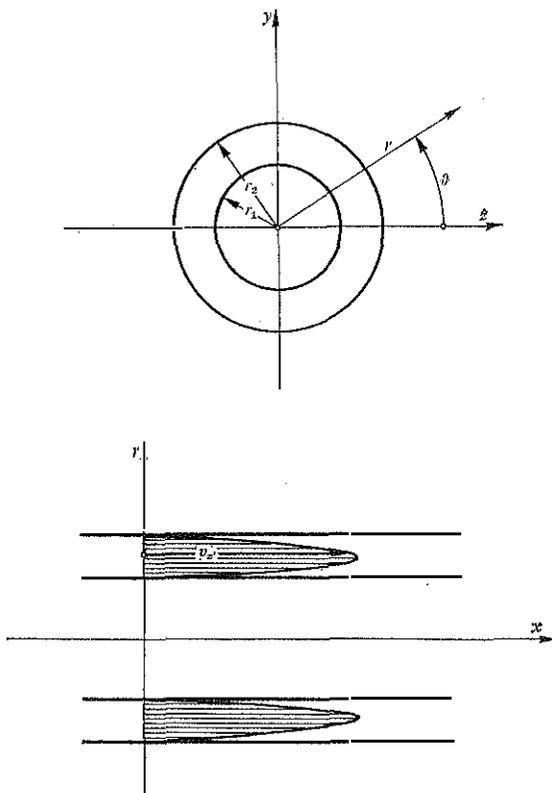


Fig. 9.2. - Moto uniforme nell'intercapedine fra due cilindri circolari coassiali.

La portata e la velocità media sono, nell'ordine

$$Q = \int_{r_1}^{r_2} 2\pi r v_x dr = \frac{\gamma i}{8\mu} \pi (r_2^2 - r_1^2) \left[r_2^2 + r_1^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \right],$$

$$U = \frac{Q}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} = \frac{\gamma i}{8\mu} \left[r_2^2 + r_1^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \right].$$

Le tensioni tangenziali esercitate dal fluido sul tubo esterno e su quello interno valgono

$$[T_{r,x}]_{r=r_2} = -\mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial r} \right]_{r=r_2} = \frac{\gamma i}{4} \left[2r_2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2 \ln \frac{r_2}{r_1}} \right]$$

$$[T_{-r,x}]_{r=r_1} = -\mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial(-r)} \right]_{r=r_1} = \frac{\gamma i}{4} \left[\frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}} - 2r_1 \right]$$

e sono entrambe dirette nel verso del moto.

La vorticità

$$\text{rot}(v_x \mathbf{i}_x) = \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \vartheta} \mathbf{i}_r - \frac{\partial v_x}{\partial r} \mathbf{i}_\vartheta = \frac{\gamma i}{4\mu} \left[2r - \frac{r_2^2 - r_1^2}{r \ln \frac{r_2}{r_1}} \right] \mathbf{i}_\vartheta$$

ha intensità continuamente crescente con r , a partire dal valore negativo

$$\frac{\gamma i}{4\mu} \left[2r_1 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}} \right],$$

che si riscontra presso la parete del tubo interno, fino al valore positivo

$$\frac{\gamma i}{4\mu} \left[2r_2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2 \ln \frac{r_2}{r_1}} \right],$$

che viene raggiunto contro il tubo esterno. Sul raggio

$$r = \sqrt{\frac{r_2^2 - r_1^2}{2 \ln \frac{r_2}{r_1}}}$$

la vorticità è nulla e la velocità è massima.

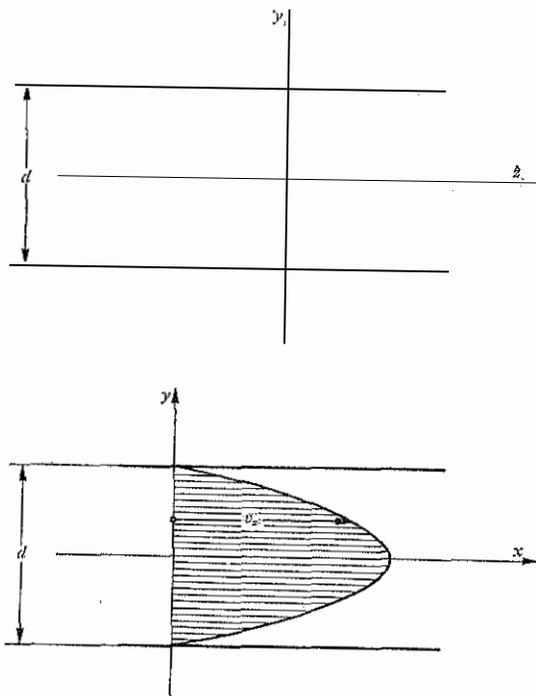


Fig. 9.3. - Moto uniforme fra due lastre piane parallele.

Altro caso che capita frequentemente di considerare è quello del moto rettilineo fra *pareti piane e parallele*. Posto che la distanza reciproca delle due pareti sia d , come indicato in figura 9.3, e che esse siano entrambe ferme, la soluzione dell'equazione di Poisson per le velocità v_x è

$$v_x = \frac{\gamma i}{2\mu} \left(\frac{d^2}{4} - y^2 \right),$$

che porge appunto

$$\nabla^2 v_x = \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = -\frac{\gamma i}{\mu}$$

e che si annulla sia su $y = d/2$, sia su $y = -d/2$.

La velocità massima

$$v_{\text{max}} = \frac{\gamma i}{8\mu} d^2$$

si presenta sulla mezzaria $y=0$. Allontanandosi da quest'ultima si incontrano velocità decrescenti con legge parabolica.

Con riferimento all'unità di larghezza in direzione z , la portata vale

$$Q' = 2 \int_0^{d/2} v_x dy = \frac{\gamma i}{12\mu} d^3.$$

La velocità media è di conseguenza

$$U = \frac{Q'}{d} = \frac{\gamma i}{12\mu} d^2,$$

e risulta uguale ai due terzi della velocità massima.

Il fluido esercita sulle pareti le tensioni tangenziali

$$\begin{aligned} [T_{-y,x}]_{y=-d/2} &= -\mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial(-y)} \right]_{y=-d/2} = \frac{\gamma i}{2} d \\ [T_{y,x}]_{y=d/2} &= -\mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} \right]_{y=d/2} = \frac{\gamma i}{2} d \end{aligned}$$

dirette nel verso del moto ed uguali fra loro.

La vorticità

$$\text{rot}(v_x \mathbf{i}_x) = \frac{\partial v_x}{\partial z} \mathbf{i}_y - \frac{\partial v_x}{\partial y} \mathbf{i}_z = \frac{\gamma i}{\mu} y \mathbf{i}_z$$

aumenta linearmente al crescere di y , assumendo il valore

$$-\frac{\gamma i}{2\mu} d$$

sulla parete $y = -d/2$, annullandosi in mezzaria, e raggiungendo il valore

$$\frac{\gamma i}{2\mu} d$$

sulla parete $y = d/2$.

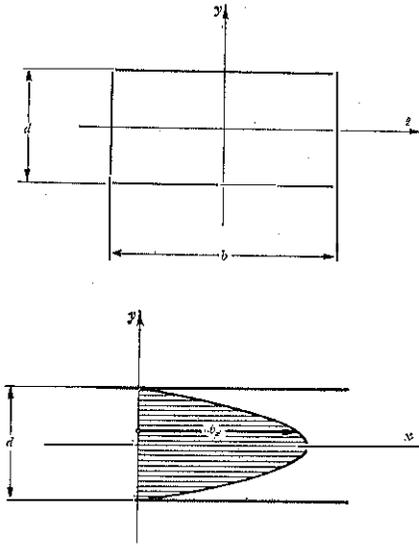


Fig. 9.4. Moto uniforme in condotto a sezione rettangolare.

Da ultimo, si riporta il caso, anch'esso tecnicamente interessante, della *sezione rettangolare*, di larghezza b e di altezza d , schematizzato in figura 9.4. Sempre ammesso che la parete sia ferma rispetto all'osservatore, la distribuzione della velocità è fornita dalla formula

$$v_x = \frac{\gamma i}{2\mu} \left[\frac{d^2}{4} - y^2 - d^2 \sum_0^{\infty} (-1)^k \frac{8}{(2k+1)^3 \pi^3} \cdot \cos \left[(2k+1) \pi \frac{y}{d} \right] \frac{\text{Ch} \left[(2k+1) \pi \frac{z}{d} \right]}{\text{Ch} \left[(2k+1) \pi \frac{b}{2d} \right]} \right],$$

che è in accordo con la solita equazione di Poisson

$$\nabla^2 v_x = -\frac{\gamma i}{\mu},$$

e che porta a velocità longitudinali nulle su $y = \pm d/2$ e su $z = \pm b/2$. Per controllare quest'ultimo fatto basta tener presente l'identità

$$\sum_0^{\infty} (-1)^k \frac{8}{(2k+1)^3 \pi^3} \cos \left[(2k+1) \pi \frac{y}{d} \right] = \frac{1}{4} - \left(\frac{y}{d} \right)^2.$$

La velocità è massima sull'asse del condotto, ove è

$$v_{z\max} = \frac{\gamma i}{8\mu} d^2 \left\{ 1 - \sum_0^{\infty} (-1)^k \frac{32}{(2k+1)^3 \pi^3} \frac{1}{\text{Ch} \left[(2k+1) \pi \frac{b}{2d} \right]} \right\};$$

la portata e la velocità media sono

$$Q = 4 \int_0^{d/2} \left(\int_0^{b/2} v_x d\bar{z} \right) dy = \frac{\gamma i}{\mu} \frac{bd^3}{12} \left\{ 1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{d}{b} \sum_0^{\infty} \frac{\text{Th} \left[(2k+1) \pi \frac{b}{2d} \right]}{(2k+1)^5} \right\},$$

$$U = \frac{Q}{bd} = \frac{\gamma i}{\mu} \frac{d^2}{12} \left\{ 1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{d}{b} \sum_0^{\infty} \frac{\text{Th} \left[(2k+1) \pi \frac{b}{2d} \right]}{(2k+1)^5} \right\}.$$

Ai fini delle applicazioni è sufficiente porre

$$v_{z\max} = \frac{\gamma i}{8\mu} d^2 f_1 \left(\frac{b}{d} \right), \quad Q = \frac{\gamma i}{\mu} \frac{bd^3}{12} f_2 \left(\frac{b}{d} \right), \quad U = \frac{\gamma i}{\mu} \frac{d^2}{12} f_2 \left(\frac{b}{d} \right)$$

ed impiegare i valori di f_1 ed f_2 riportati nella tabella 9.1.

TABELLA 9.1. - Coefficienti per il calcolo della velocità massima e della portata in un condotto rettangolare.

$\frac{b}{d}$	f_1	f_2
1	0,2042	0,4224
2	0,8275	0,6870
3	0,9641	0,7881
4	0,9925	0,8434
5	0,9885	0,8747
6	0,9997	0,8957
7	0,9999	0,9079
8	0,9999	0,9218
10	1,0000	0,9375
12	1,0000	0,9486
100	1,0000	0,9936
∞	1	1

La tensione tangenziale esercitata sulle pareti non è più uniforme: sulle pareti ortogonali all'asse y è

$$\begin{aligned} [T_{-y,z}]_{y=-d/2} &= -\mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial (-y)} \right]_{y=-d/2} = \\ [T_{y,x}]_{y=d/2} &= -\mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} \right]_{y=d/2} = \\ &= \frac{\gamma i}{2} d \left\{ 1 - \sum_0^{\infty} \frac{8}{(2k+1)^2 \pi^2} \frac{\text{Ch} \left[(2k+1) \pi \frac{z}{d} \right]}{\text{Ch} \left[(2k+1) \pi \frac{b}{2d} \right]} \right\}, \end{aligned}$$

mentre su quelle normali all'asse z si ha

$$\begin{aligned} [T_{-z,x}]_{z=-b/2} &= -\mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial (-z)} \right]_{z=-b/2} = \\ [T_{z,x}]_{z=b/2} &= -\mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} \right]_{z=b/2} = \\ &= \frac{\gamma i}{2} d \sum_0^{\infty} (-1)^k \frac{8}{(2k+1)^2 \pi^2} \cos \left[(2k+1) \pi \frac{y}{d} \right] \text{Th} \left[(2k+1) \pi \frac{b}{2d} \right], \end{aligned}$$

sempre con direzione e verso dell'asse x .

La vorticità vale

$$\begin{aligned} \text{rot}(v_x \mathbf{i}_x) &= \frac{\partial v_x}{\partial z} \mathbf{i}_y - \frac{\partial v_x}{\partial y} \mathbf{i}_z = \\ &= -\frac{\gamma i}{2\mu} d \sum_0^{\infty} (-1)^k \frac{8}{(2k+1)^2 \pi^2} \cos \left[(2k+1) \pi \frac{y}{d} \right] \frac{\text{Sh} \left[(2k+1) \pi \frac{z}{d} \right]}{\text{Ch} \left[(2k+1) \pi \frac{b}{2d} \right]} \mathbf{i}_y + \\ &+ \frac{\gamma i}{2\mu} \left\{ 2y - d \sum_0^{\infty} (-1)^k \frac{8}{(2k+1)^2 \pi^2} \sin \left[(2k+1) \pi \frac{y}{d} \right] \frac{\text{Ch} \left[(2k+1) \pi \frac{z}{d} \right]}{\text{Ch} \left[(2k+1) \pi \frac{b}{2d} \right]} \right\} \mathbf{i}_z. \end{aligned}$$

9.7. I coefficienti di resistenza distribuita.

I moti rettilinei entro condotte considerati nel paragrafo 9.6 presentano tutti la caratteristica di avere parametri cinematici e dinamici con la medesima distribuzione sulle differenti sezioni trasversali. Come tali,

essi sono uniformi rispetto alla coordinata longitudinale x , e vengono chiamati *moti uniformi*, senza ulteriore specificazione.

Per ciascun moto uniforme inquadabile nello schema fornito dall'equazione di Navier esiste un legame di proporzionalità diretta fra la caduta di carico piezometrico per unità di percorso

$$i = -\frac{\partial h}{\partial x}$$

e la velocità media U , valutata sul piano della sezione trasversale, in quanto U , in ultima analisi, va calcolato in base alla soluzione dell'equazione di Poisson

$$\nabla^2 v_x = -\frac{\gamma i}{\mu},$$

secondo quanto ricordato nel paragrafo 9.6.

Lo stesso genere di legame può essere espresso anche da una relazione fra la *cadente effettiva* j , ossia la perdita di carico effettivo rapportata sempre all'unità di percorso nel verso della corrente

$$j = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} \right),$$

e l'altezza generatrice della velocità media

$$\frac{U^2}{2g}.$$

Ciò perché, nei moti uniformi, l'indipendenza dell'altezza generatrice della velocità media dalla coordinata corrente x rende i numericamente uguale ad j .

È uso porre

$$j = \frac{\lambda}{4R} \frac{U^2}{2g},$$

intendendo con R il *raggio medio* della sezione trasversale della corrente, definito come rapporto fra l'area Ω della stessa ed il *contorno bagnato* B , sviluppo periferico del contorno di tale sezione che si trova a contatto con pareti solide ferme. È cioè

$$R = \frac{\Omega}{B}.$$

La relazione proposta per esprimere il legame fra la cadente effettiva e l'altezza generatrice della velocità media definisce implicitamente il *coefficiente di perdita distribuita* λ , che è un numero puro.

Il tipo di connessione fra la cadente effettiva e l'altezza generatrice della velocità media dipende dalle dimensioni della sezione trasversale della corrente, dalla velocità media, dalla viscosità cinematica del fluido, dalla forma della sezione trasversale, e dalle condizioni cinematiche imposte sul contorno della sezione trasversale stessa. Tutte queste influenze si ripercuotono sul valore del coefficiente λ .

A parità delle due ultime circostanze, ed in accordo con l'equazione di Poisson

$$\nabla^2 v_x = -\frac{\gamma i}{\mu},$$

deve esistere una proporzionalità diretta fra la cadente piezometrica i e la grandezza

$$\frac{\mu}{\gamma} \frac{U}{R^2}.$$

Esiste perciò anche una proporzionalità diretta fra la cadente effettiva j e la grandezza

$$\frac{\mu}{\gamma} \frac{U}{R^2} = 2 \frac{\mu}{\rho U R^2} \frac{U^2}{2g} = \frac{32}{4R} \frac{\nu}{4UR} \frac{U^2}{2g}.$$

Lo stesso fatto può essere espresso dicendo che λ è inversamente proporzionale al numero di Reynolds della corrente

$$Re = \frac{4UR}{\nu}.$$

Questo è un numero puro, e come tale è stato introdotto, in forma generale, nel paragrafo 3.4.

La dipendenza di j dalle ultime due circostanze sopra elencate, ossia dalla forma della sezione trasversale, e dalle condizioni cinematiche imposte sul suo contorno, è in gran parte assorbita dall'introduzione del raggio medio R nella formula che definisce λ . La scelta di R quale indice delle dimensioni generali della sezione trasversale è stata suggerita appunto dalla constatazione diretta che il suo impiego rende poco diversi fra loro i coefficienti delle leggi di proporzionalità inversa fra λ ed Re . Il coefficiente λ risente dunque in modo molto attenuato del tipo della sezione trasversale, riassumibile comunque dicendo che dipende ancora, inversamente, da un residuo *coefficiente di forma* f . Si pone $f = 1$ per la sezione circolare: per le altre f , inteso come rapporto, valutato a pari numero di Reynolds, fra il λ relativo alla sezione circolare e quello adatto alla sezione effettiva, riesce poco discosto dall'unità.

Le particolari dipendenze di i da U calcolate nel paragrafo precedente possono essere espresse ora nella nuova terminologia.

Per il tubo di sezione circolare si ha

$$R = \frac{\Omega}{B} = \frac{\pi r_0^2}{2\pi r_0} = \frac{r_0}{2},$$

così che il raggio medio in senso idraulico è la metà del raggio geometrico. Il numero di Reynolds vale pertanto

$$Re = \frac{4UR}{\nu} = \frac{UD}{\nu},$$

ed il legame

$$U = \frac{\gamma i}{32\mu} D^2$$

può essere riproposto nella forma

$$j = \frac{\lambda}{4R} \frac{U^2}{2g}$$

a patto di porre

$$\lambda = \frac{64}{Re}.$$

Nel moto uniforme fra pareti piane e parallele poste a distanza reciproca d il contorno bagnato B è costituito dall'intersezione di un piano normale alla corrente con le due pareti, ed è sempre doppio della larghezza b presa in esame. Si ha così

$$R = \frac{bd}{2b} = \frac{d}{2}$$

ed

$$Re = \frac{4UR}{\nu} = \frac{2Ud}{\nu}.$$

La formula

$$U = \frac{\gamma i}{12\mu} d^2$$

è perciò compatibile con il coefficiente di perdita distribuita

$$\lambda = \frac{96}{Re} = \frac{64}{f Re}.$$

Ne segue

$$f = \frac{2}{3}.$$

Con la sezione rettangolare di lati b e d , si ha

$$R = \frac{bd}{2(b+d)}$$

ed

$$Re = \frac{4UR}{\nu} = \frac{2Ubd}{\nu(b+d)}$$

In base alla

$$U = \frac{\gamma i}{\mu} \frac{d^2}{12} f_2 \left(\frac{b}{d} \right)$$

si ottiene così

$$\lambda = \frac{96 \left(\frac{b}{b+d} \right)^2}{f_2 \left(\frac{b}{d} \right)} \frac{1}{Re} = \frac{64}{f Re}$$

con

$$f = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{d}{b} \right)^2 f_2 \left(\frac{b}{d} \right)$$

Nella tabella 9.2 sono riepilogati i valori del coefficiente di forma f per i tipi di sezione fin qui presi in esame.

TABELLA 9.2. - Coefficienti di forma per la sezione rettangolare rispetto alla sezione circolare.

Tipo di sezione	f
Circolare	1,00
Rettangolare con lati nel rapporto	
1	1,13
2	1,03
3	0,93
4	0,88
5	0,84
6	0,81
7	0,79
8	0,78
10	0,76
12	0,74
100	0,68
∞	0,67

9.8. Moti indotti da scorrimento delle pareti.

I metodi impiegati nel paragrafo 9.6 per lo studio del moto fra pareti ferme possono essere utilizzati anche quando parte delle pareti è in moto su se stessa rispetto alla parte rimanente.

Si può esaminare così il caso di pareti piane fra loro parallele, poste a distanza reciproca d : fissati gli assi x e z su una di tali pareti, e l'asse y normale ad esse, si ammette che la parete $y = d$ sia ferma e che quella $y = 0$ trasli con velocità v_0 nella direzione delle x crescenti. L'intercapedine fra le due pareti è occupata da un fluido, di densità ρ e viscosità dinamica μ uniformi e permanenti, che si muove con velocità $v_w \mathbf{i}_x$ indipendente da z e dal tempo.

Analogamente a quanto si è visto nel paragrafo 9.6, dato che l'unica componente non nulla della velocità è quella v_w , l'equazione di continuità

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

mostra che deve essere

$$\frac{\partial v_w}{\partial x} = 0.$$

Così v_x è indipendente anche da x . Resta $v_w = v_w(y)$.

Sempre come allora, poiché v_y e v_z sono nulle, e purché le forze specifiche di massa \mathbf{f} siano quelle del geopotenziale $\phi = -gz$, le proiezioni sugli assi dell'equazione di Navier

$$\rho \mathbf{f} - \operatorname{grad} p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}$$

assumono le forme

$$-\frac{\partial}{\partial x}(egz + p) + \mu \nabla^2 v_w = 0,$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}(egz + p) = 0,$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}(egz + p) = 0.$$

Le ultime due mostrano che il carico piezometrico

$$h = z + \frac{p}{\rho g} = z + \frac{p}{\gamma}$$

assume valore uniforme sui singoli piani normali alla velocità. Nel verso

delle x crescenti può esistere invece una pendenza motrice, necessariamente uniforme,

$$i = -\frac{\partial h}{\partial x},$$

ma al solito, ed in accordo con la prima equazione, deve risultare

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\frac{\gamma i}{\mu}.$$

Tenuto conto delle nuove condizioni ai limiti, ne segue ora

$$v_x = v_0 \left(1 - \frac{y}{d}\right) + \frac{\gamma i}{2\mu} y(d-y).$$

La velocità è ancora distribuita con legge parabolica lungo y , ma, come indicato in figura 9.5, essa può assumere un massimo relativo purché

$$i \geq \frac{2\mu v_0}{\gamma d^2}.$$

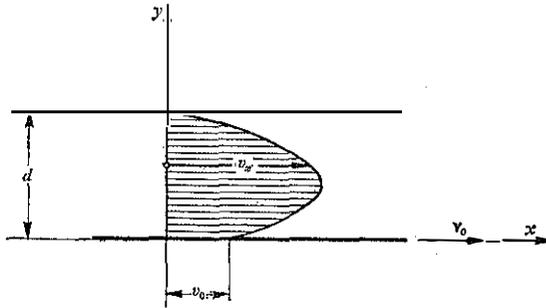


Fig. 9.5. - Moto uniforme fra piani paralleli connesso allo scorrimento di una parete. Il profilo di velocità presenta un massimo relativo nella fascia $0 \leq y < d/2$ quando la pendenza motrice i verifica la limitazione $i \geq 2\mu v_0 / (\gamma d^2)$.

Con questa limitazione, il massimo relativo vale

$$v_{x \max} = \frac{v_0}{2} + \frac{\gamma i d^2}{8\mu} + \frac{\mu v_0^2}{2\gamma i d^2},$$

e si presenta sull'ordinata

$$y = \frac{d}{2} - \frac{\mu v_0}{\gamma i d}.$$

Sulla stessa ordinata, e sotto la medesima condizione, è nulla la vorticità

$$\text{rot}(v_x \mathbf{i}_x) = \frac{\partial v_x}{\partial z} \mathbf{i}_y - \frac{\partial v_z}{\partial y} \mathbf{i}_z = \frac{\gamma i}{\mu} \left[y - \left(\frac{d}{2} - \frac{\mu v_0}{\gamma i d} \right) \right] \mathbf{i}_z.$$

La forza tangenziale esercitata sull'area unitaria della parete ferma è

$$[T_{y,x}]_{y=d} = -\mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} \right]_{y=d} = \mu \frac{v_0}{d} + \frac{\gamma i d}{2}$$

mentre quella che si oppone al moto della parete $y=0$, rapportata anch'essa all'unità di area, è

$$[T_{-y,x}]_{y=0} = -\mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial(-y)} \right]_{y=0} = -\mu \frac{v_0}{d} + \frac{\gamma i d}{2}.$$

I risultati esposti restano validi anche quando la pendenza motrice è negativa, ossia anche quando il carico piezometrico aumenta nella direzione e nel verso di v_0 . In questa seconda circostanza il profilo delle velocità può raggiungere un minimo relativo purché

$$i < -\frac{2\mu v_0}{\gamma d^2}.$$

È presente allora una controcorrente presso la parete ferma, del tipo schematizzato in figura 9.6.

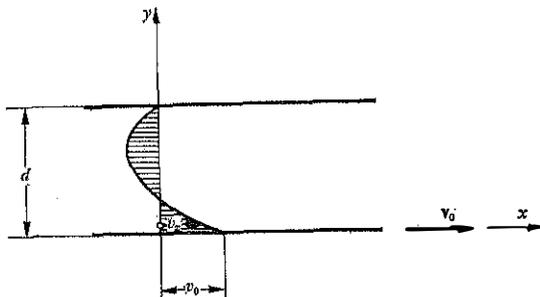


Fig. 9.6. - Moto uniforme fra piani paralleli connesso allo scorrimento di una parete. Il profilo di velocità assume un minimo relativo nella zona $d/2 < y \leq d$ purché la pendenza motrice i soddisfi la condizione $i \leq -2\mu v_0/(\gamma d^2)$.

Può essere interessante notare che la portata per unità di larghezza in direzione z ,

$$Q' = \int_0^d v_x dy = \frac{v_0 d}{2} + \frac{\gamma i}{12\mu} d^3,$$

resta positiva in tutto il campo

$$-\frac{6\mu v_0}{\gamma d^2} < i < 0,$$

crescendo da 0 a $v_0 d/2$ man mano che diminuisce il modulo di i .

Nel caso limite di pendenza motrice nulla, la distribuzione parabolica delle velocità degenera nella variazione lineare

$$v_x = v_0 \left(1 - \frac{y}{d}\right),$$

come in figura 9.7. La vorticità assume il valore uniforme

$$\text{rot}(v_x \mathbf{i}_x) = \frac{v_0}{d} \mathbf{i}_z,$$

e gli sforzi tangenziali sulle due pareti si riducono a

$$[T_{v,x}]_{y=d} = -\mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} \right]_{y=d} = \mu \frac{v_0}{d},$$

$$[T_{-y,x}]_{y=0} = -\mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial (-y)} \right]_{y=0} = -\mu \frac{v_0}{d},$$

risultando $\overline{\tau}$ diversi fra loro solo per il verso.

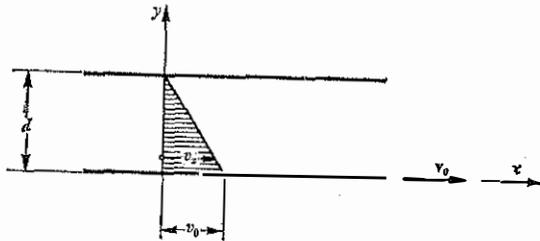


Fig. 9.7. - Aspetto del moto uniforme fra piani paralleli assunto in assenza di pendenza motrice.

Quest'ultimo tipo di moto viene realizzato in alcuni viscosimetri, che riescono utili nella misura di viscosità particolarmente elevate. Operando con lastre di dimensioni tanto ampie rispetto all'intercapedine d da rendere irrilevanti gli effetti di estremità, misurando od imponendo v_0 e la forza necessaria per mantenere il moto, è immediato dedurre il valore di μ .

Altro moto che può essere studiato con i metodi del paragrafo 9.6 è quello esaminato da Couette nel 1890. Si tratta del moto permanente che ha luogo fra due cilindri a sezione retta circolare, coassiali, ed animati da moto di rotazione reciproco. I risultati sono importanti in campo tecnico, perché su di essi si basano molti viscosimetri adatti alla misura di viscosità moderate.

Si ammette che il fluido presente nell'intercapedine fra le due pareti cilindriche abbia densità ρ e viscosità dinamica μ uniformi e permanenti, che le forze specifiche esterne di massa siano quelle del geopotenziale $\phi = -gz$, e che il moto sia permanente. Si indicano, come in figura 9.8,

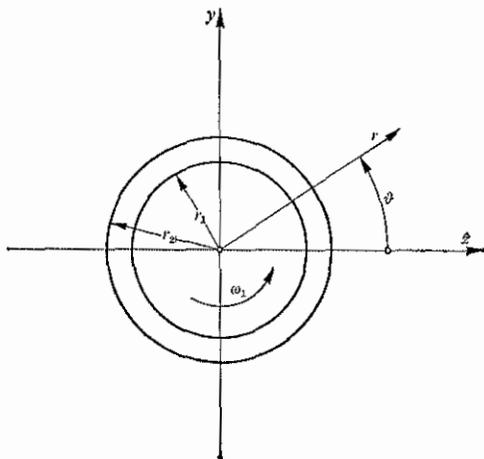


Fig. 9.8. -- Notazioni impiegate per lo studio del moto piano fra cilindri circolari coassiali indotto dalla rotazione uniforme della parete interna.

con r_1 ed $r_2 > r_1$ i raggi dei due cilindri, e con ω_1 la velocità angolare di rotazione su se stesso del cilindro interno rispetto a quello esterno, considerato fermo. Si suppone infine che il moto del fluido si svolga per traiettorie circolari centrate sull'asse x dei due cilindri e con velocità indipendenti dalla x stessa.

Adottato il riferimento cilindrico x, r e ϑ , l'equazione di continuità

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

avverte che l'unica componente non nulla della velocità, la v_ϑ , non può cambiare con la ϑ .

Nello stesso riferimento, le proiezioni dell'equazione di Navier

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x}(\rho g z + p) + \mu \nabla^2 v_x &= \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} v_x \right), \\ -\frac{\partial}{\partial r}(\rho g z + p) + \mu \left(\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \vartheta} \right) &= \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} v_r - \frac{v_\theta^2}{r} \right), \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta}(\rho g z + p) + \mu \left(\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) &= \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} v_\theta + \frac{v_r v_\theta}{r} \right), \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \nabla^2 v_\theta &= \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \vartheta^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right), \\ \text{grad} v_\theta &= \frac{\partial v_\theta}{\partial x} \mathbf{i}_x + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \vartheta} \mathbf{i}_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \mathbf{i}_r, \end{aligned}$$

assumono la forma

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x}(\rho g z + p) &= 0, \\ -\frac{\partial}{\partial r}(\rho g z + p) &= -\rho \frac{v_\theta^2}{r}, \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta}(\rho g z + p) + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) - \frac{v_\theta}{r^2} \right] &= 0. \end{aligned}$$

La prima mostra che il carico piezometrico h non dipende dalla x . In base alla terza si osserva che h è indipendente anche dalla coordinata ϑ , perché v_θ non muta con la ϑ stessa ed h è univoco. Ma h non è uniforme sui piani ortogonali all'asse x : la proiezione dell'equazione di Navier lungo r fa vedere che la pressione assume valori sempre più elevati di quelli idrostatici man mano che aumenta r .

Ciò posto, l'equazione di Navier richiede che v_θ soddisfi l'equazione residua

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) - \frac{v_\theta}{r^2} = 0.$$

La distribuzione della velocità è dunque quella

$$v_\theta = \omega_1 r \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(\frac{r_2^2}{r^2} - 1 \right)$$

che dà $v_\theta = 0$ per $r = r_2$ e $v_\theta = \omega_1 r_1$ per $r = r_1$.

Con questa velocità, l'eccesso di pressione sul livello idrostatico vale

$$p - p_1 = \frac{\rho}{2} \omega_1^2 \left(\frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right)^2 \left[(r^2 - r_1^2) \left(\frac{1}{r_2^4} + \frac{1}{r_1^2 r_1^2} \right) - 4 \frac{1}{r_2^2} \ln \frac{r}{r_1} \right],$$

indicando con p_1 la sovrappressione esistente su $r = r_1$.

Il fluido esercita sulla parete esterna lo sforzo tangenziale

$$[T_{r,\theta}]_{r=r_2} = -\mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \frac{v_\theta}{r} \right]_{r=r_2} = 2\mu\omega_1 \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

diretto nel verso di rotazione della parete interna, e si oppone al moto di quest'ultima con lo sforzo tangenziale

$$[T_{-r,\theta}]_{r=r_1} = -\mu \left[r \frac{\partial}{\partial(-r)} \frac{v_\theta}{r} \right]_{r=r_1} = -2\mu\omega_1 \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Con riferimento all'unità di sviluppo assiale, il momento richiesto per tener ferma la parete esterna e quello necessario per mantenere in moto di rotazione il cilindro interno hanno modulo comune

$$F'_m = 4\pi\mu\omega_1 \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Il rotore del campo della velocità è uniforme:

$$\text{rot}(v_\theta \mathbf{i}_\theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) \mathbf{i}_z = -2\omega_1 \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \mathbf{i}_z.$$

È interessante osservare che, al crescere oltre ogni limite del rapporto r_2/r_1 , il rotore della velocità tende ad annullarsi, e la distribuzione della velocità stessa si avvicina progressivamente a quella

$$v_\theta = \omega_1 \frac{r_1^2}{r}$$

vista nel paragrafo 8.3, assumendo in partenza che il moto fosse irrotazionale. Un moto di questo genere è già inquadrabile nelle più semplici equazioni di Euler, anziché in quelle di Navier. Alla ugualmente corretta descrizione cinematica fa però da contrapposto una notevole differenza dinamica: nel moto del fluido ideale, anche ammessa l'aderenza alla parete di raggio r_1 e la conseguente velocità di scorrimento $\omega_1 r_1$ di questa su se stessa, non sono richiesti momenti esterni; invece, il moto del fluido viscoso può essere mantenuto solo applicando alla parete il momento

$$F'_m = 4\pi\mu\omega_1 r_1^2$$

per unità di sviluppo assiale.

9.9. Moti con basse velocità.

I problemi di moto esaminati nei tre paragrafi che precedono sono stati trattati tutti in base all'equazione di Navier

$$\rho \mathbf{f} - \text{grad } p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}.$$

Le particolari simmetrie del campo delle velocità rendevano però, il più delle volte, identicamente nulli i termini quadratici della derivata sostanziale, riducendo l'equazione alla forma

$$\rho \mathbf{f} - \text{grad } p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t},$$

ulteriormente semplificata in quella

$$\rho \mathbf{f} - \text{grad } p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} = 0$$

dalla condizione di permanenza del moto.

In via di approssimazione, queste stesse forme ridotte devono essere utilizzabili anche quando i termini quadratici che concorrono a formare la derivata sostanziale della velocità, senza essere identicamente nulli, assumono tuttavia valori molto piccoli rispetto a quelli degli altri termini. Poiché fra questi ultimi figurano termini che sono lineari in \mathbf{v} , l'approssimazione in esame può risultare accettabile quando le velocità sono sufficientemente basse.

Nel caso di moto abbastanza lento si possono dunque ottenere risultati soddisfacenti impiegando, in luogo dell'equazione completa di Navier, l'*equazione ridotta*

$$\rho \mathbf{f} - \text{grad } p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t},$$

oppure quella

$$\rho \mathbf{f} - \text{grad } p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} = 0$$

se il moto è anche permanente. È importante tener presente che i termini trascurati non sono quelli contenenti le derivate di ordine più elevato. L'ordine dell'equazione differenziale resta immutato, ed invariate restano perciò le condizioni al contorno atte a determinare univocamente la soluzione: esse rimangono quelle già elencate nel paragrafo 9.5.

La risoluzione delle equazioni ridotte è più semplice di quella dell'equazione completa, in quanto le prime sono lineari, per essere state private proprio dei termini quadratici nell'incognita \mathbf{v} .

La semplificazione ora introdotta porta di riflesso a semplificazioni nella struttura dei campi di funzioni collegate con la velocità.

Ammettendo che la velocità \mathbf{v} sia di classe C^3 , che la pressione p sia di classe C^2 , e che le forze specifiche di massa \mathbf{f} derivino da un potenziale ϕ armonico, l'applicazione dell'operatore divergenza all'equazione ridotta del moto fornisce subito

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} p = 0,$$

ossia

$$\nabla^2 p = 0,$$

perché, quando il potenziale ϕ è armonico, si ha

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{f}) = \rho \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \rho \nabla^2 \phi = 0,$$

e perché, giusta l'equazione di continuità

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

si può scrivere

$$\operatorname{div}(\mu \nabla^2 \mathbf{v}) = \mu \operatorname{div}(\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v}) = -\mu \operatorname{div} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$$

$$\operatorname{div} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \rho \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Così, nei moti estremamente lenti, la pressione è armonica.

Sotto le stesse ipotesi, ma ammettendo in più che il moto sia permanente, l'applicazione dell'operatore rotore all'equazione ridotta porge invece

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\mu \nabla^2 \mathbf{v}) &= \mu \operatorname{rot}(\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v}) = -\mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} = \\ &= \mu [\operatorname{grad} \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{v}) - \operatorname{rot} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{v})] = \mu \nabla^2(\operatorname{rot} \mathbf{v}) = 0, \end{aligned}$$

e cioè

$$\nabla^2 \mathbf{w} = 0,$$

mostrando che il rotore \mathbf{w} della velocità è armonico.

Quest'ultimo risultato implica che, nei moti piani permanenti, la funzione di corrente di Lagrange ψ , che rende

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

e

$$w_z = -\nabla^2 \psi,$$

deve soddisfare l'equazione

$$\nabla^4 \psi = 0,$$

con

$$\nabla^4 \psi \equiv \nabla^2 \nabla^2 \psi,$$

ed essere quindi una funzione biarmonica.

I tre paragrafi che seguono sono dedicati allo studio di moti inquadribili nello schema qui esposto, ed importanti in campo tecnico.

9.10. Il caso della lubrificazione.

I moti di fluido fra pareti solide reciprocamente distanziate in maniera non uniforme ed in moto relativo presentano derivate sostanziali della velocità \mathbf{v} non nulle, ma costituiscono spesso fenomeni descrivibili in termini dell'equazione ridotta di Navier, purché velocità relative delle pareti solide e loro mutue distanze siano sufficientemente contenute.

In condizioni di moto stazionario, e per fluido di densità ρ e viscosità dinamica μ uniformi e permanenti, le equazioni da impiegare sono allora quelle

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\rho \mathbf{f} - \operatorname{grad} p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} = 0,$$

come si è visto nel paragrafo precedente. Di norma, inoltre, vanno messe in conto le sole forze specifiche di massa

$$\mathbf{f} = \operatorname{grad} \phi$$

dovute al geopotenziale $\phi = -gz$.

Come si vedrà meglio nell'esempio che segue, il fatto che l'intercapedine fra le pareti in moto relativo non sia uniforme può determinare in seno al fluido pressioni superiori al livello idrostatico, in grado quindi di equilibrare carichi esterni tendenti ad avvicinare le due superfici in moto relativo. La presenza di queste pressioni antagoniste e la riduzione della resistenza al moto rispetto a quella che si avrebbe con superfici solide a contatto diretto caratterizzano l'azione lubrificante del fluido interposto.

Il primo esame di situazioni di questo genere è stato effettuato da Reynolds nel 1886.

Si suppone che il moto sia piano, che la parete mobile sia piana e che la parete fissa si riduca ad una slitta cilindrica di ingombro L nella direzione del moto della prima.

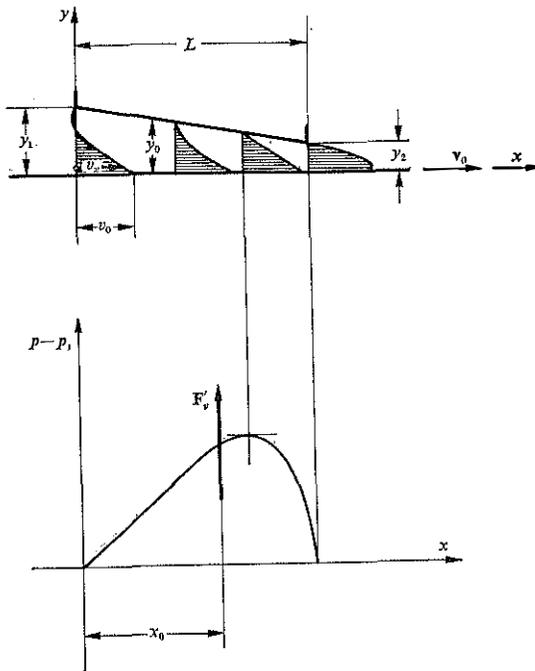


Fig. 9.9. - Un piano che scorre su se stesso in prossimità di una slitta fissa inclinata determina nel fluido interposto un moto caratterizzato da pressioni superiori al livello idrostatico.

Scelti gli assi di riferimento x ed y come in figura 9.9, la componente della velocità in direzione ortogonale al piano degli assi x ed y è nulla, e le componenti v_x e v_y non dipendono dalla coordinata z normale a tale piano. Ciò assegna all'equazione di continuità la forma

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

e consente di scrivere le proiezioni dell'equazione ridotta di Navier come

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x}(egz + p) + \mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right) &= 0, \\ -\frac{\partial}{\partial y}(egz + p) + \mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right) &= 0, \\ -\frac{\partial}{\partial z}(egz + p) &= 0. \end{aligned}$$

Amnesso inoltre che gli spessori $y_0(x)$ della pellicola lubrificante siano molto inferiori allo sviluppo L della slitta, le v_y risultano notevolmente più piccole delle v_x , mentre la derivata seconda della v_x rispetto ad x diventa trascurabile di fronte a quella eseguita rispetto ad y . In base a queste nuove osservazioni, le proiezioni dell'equazione ridotta di Navier vanno ulteriormente semplificate, fino a scrivere

$$\begin{aligned} -\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\mu}{\gamma} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} &= 0, \\ -\frac{\partial h}{\partial y} &= 0, \\ -\frac{\partial h}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Nei limiti delle approssimazioni adottate, il carico piezometrico h si mantiene dunque uniforme su ciascun piano normale all'asse x . L'andamento della v_x lungo x ed il gradiente longitudinale di h sono invece legati fra loro dalla

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\gamma}{\mu} \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Secondo quest'ultima equazione, e secondo le condizioni di aderenza

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 & \text{per } y &= 0 \\ v_x &= 0 & \text{per } y &= y_0(x), \end{aligned}$$

la distribuzione delle velocità longitudinali è del tipo

$$v_x = v_0 \left(1 - \frac{y}{y_0}\right) - \frac{\gamma}{2\mu} \frac{\partial h}{\partial x} y_0 y \left(1 - \frac{y}{y_0}\right).$$

Per determinare l'andamento di h lungo x ci si vale dell'equazione di continuità e delle condizioni imposte ai bordi della slitta.

Integrando l'equazione di continuità si ha intanto

$$\int_0^{y_0} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{y_0} v_x dy + [v_y]_0^{y_0}$$

ossia, dato che v_y è nulla sia per $y=0$, sia per $y=y_0$, anche

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{y_0} v_x dy = 0.$$

Così, la portata per unità di sviluppo in direzione z ,

$$Q' = \int_0^{y_0} v_x dy,$$

deve risultare indipendente da x . Poiché, con l'espressione di v_x già disponibile, si ha

$$Q' = \int_0^{y_0} \left[v_0 \left(1 - \frac{y}{y_0} \right) - \frac{\gamma}{2\mu} \frac{\partial h}{\partial x} y_0 y \left(1 - \frac{y}{y_0} \right) \right] dy = v_0 \frac{y_0}{2} - \frac{\gamma}{12\mu} y_0^3 \frac{\partial h}{\partial x},$$

Q' è realmente indipendente da x solo se risulta

$$v_0 \frac{\partial y_0}{\partial x} - \frac{\gamma}{2\mu} y_0^2 \frac{\partial y_0}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\gamma}{6\mu} y_0^3 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0.$$

Noto il profilo $y_0(x)$ della slitta, e fissate le condizioni di estremità

$$h = h_1 \quad \text{per } x = 0$$

$$h = h_2 \quad \text{per } x = L$$

quest'ultima equazione fornisce l'andamento del carico piezometrico h lungo x .

La situazione più semplice è quella di slitta piana e di carico identico alle due estremità. In tali condizioni, posto

$$y_0 = y_1 - \frac{y_1 - y_2}{L} x,$$

in cui y_1 ed y_2 sono gli spessori dello strato lubrificante per $x = 0$ e per $x = L$, si ottiene

$$h = h_1 + 6 \frac{\mu}{\gamma} v_0 \frac{y_1 - y_2}{L} \frac{1}{y_1 + y_2} \frac{x(L-x)}{y_0^2}$$

come è facile verificare.

Contrariamente a quanto avviene nel caso di pareti parallele, esiste ora fra la slitta e la parete reciprocamente inclinate un carico piezometrico che supera quello imposto alle estremità.

Per l'esiguità dello spessore y_0 nei confronti dello sviluppo L , le pressioni nell'intercapedine possono essere ritenute uguali a quelle esistenti contro la parete piana in moto. Indicata con p_1 la componente idrostatica della pressione, dovuta al carico piezometrico h_1 presente alle due estre-

mità della slitta, la sovrappressione conseguente al moto del fluido è

$$p - p_1 = \gamma(h - h_1) = 6\mu v_0 \frac{y_1 - y_2}{L} \frac{1}{y_1 + y_2} \frac{x(L-x)}{y_0^2},$$

ed ha l'andamento schematizzato in figura 9.9.

Per una larghezza unitaria, la forza in direzione y esercitata dal fluido sulla slitta e sulla parete mobile ha modulo

$$F'_v = \int_0^L (p - p_1) dx,$$

pari a

$$F'_v = 6\mu v_0 \left(\frac{L}{y_1 - y_2} \right)^2 \left(\ln \frac{y_1}{y_2} - 2 \frac{y_1 - y_2}{y_1 + y_2} \right).$$

L'ascissa x_0 della sua retta d'azione, che va determinata scrivendo

$$x_0 F'_v = \int_0^L (p - p_1) x dx,$$

risulta essere

$$x_0 = \frac{L \left[(y_1^2 + 2y_1 y_2) \ln \frac{y_1}{y_2} + \frac{1}{2} (y_2^2 - 5y_1^2 + 4y_1 y_2) \right]}{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) \left(\ln \frac{y_1}{y_2} - 2 \frac{y_1 - y_2}{y_1 + y_2} \right)}.$$

La tensione tangenziale esercitata dal fluido sulla slitta ferma è

$$[T_{v,x}]_{v=v_0} = -\mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} \right]_{v=v_0} = \mu \frac{v_0}{y_0} - \frac{\gamma}{2} \frac{\partial h}{\partial x} y_0,$$

mentre la tensione tangenziale che il fluido oppone al moto della parete mobile vale

$$[T_{-v,x}]_{v=0} = -\mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial (-y)} \right]_{v=0} = -\mu \frac{v_0}{y_0} - \frac{\gamma}{2} \frac{\partial h}{\partial x} y_0.$$

Quest'ultima, che più direttamente interessa nelle applicazioni tecniche, ammette risultante per unità di larghezza

$$\begin{aligned} & \int_0^L [T_{-v,x}]_{v=0} dx = \\ & = - \int_0^L \left(\mu \frac{v_0}{y_0} + 3\mu v_0 \frac{y_1 - y_2}{L} \frac{1}{y_1 + y_2} \frac{(L-2x)y_0 + 2(Lx-x^2) \frac{y_1 - y_2}{L}}{y_0^2} \right) dx \end{aligned}$$

di modulo

$$F'_x = \mu v_0 \gamma \frac{L}{y_1 - y_2} \left(4 \ln \frac{y_1}{y_2} - 6 \frac{y_1 - y_2}{y_1 + y_2} \right).$$

La variazione delle grandezze F'_y , x_0 , ed F'_x è riportata in figura 9.10, in forma adimensionalizzata.

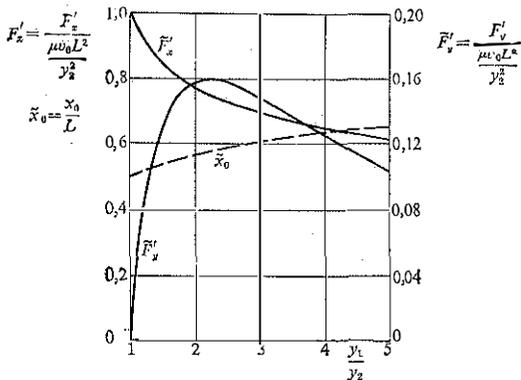


Fig. 9.10. - Intensità adimensionalizzata delle forze per unità di larghezza trasmesse dal fluido al piano in moto presso una slitta piana inclinata. La F'_x è una resistenza, quella F'_y una portanza. È indicata anche la distanza adimensionalizzata dal bordo di ingresso della retta d'azione della portanza.

L'esistenza della forza per unità di larghezza F'_y rende l'accoppiamento del piano con la slitta inclinata capace di contrastare forze esterne tendenti a riavvicinare le due parti in moto relativo. Tale accoppiamento, come si è detto all'inizio, viene perciò utilizzato quale cuscinetto di spinta. La slitta è allora imperniata su un asse parallelo ai suoi bordi di ingresso e di uscita, e disposto su un'ascissa dell'ordine di $0,6L$, secondo lo schema di figura 9.11. Nel moto, la slitta assume automaticamente l'inclinazione necessaria a sviluppare una forza normale uguale e contraria a quella applicata dall'esterno. Ciò perché ad un aumento dell'inclinazione della slitta e quindi ad una riduzione di y_2 , corrisponde un aumento della forza normale sviluppata, ed uno spostamento verso il bordo d'uscita della relativa retta d'azione. La slitta si trova così assoggettata ad una forza netta incrementata e traslata a valle rispetto alla cerniera, che tende a riportare la slitta stessa all'assetto iniziale.

Fenomeni molto simili avvengono nell'accoppiamento lubrificato di un albero rotante e di una boccola. Se l'albero si mantenesse coassiale con la boccola durante la rotazione, il moto del lubrificante sarebbe quello

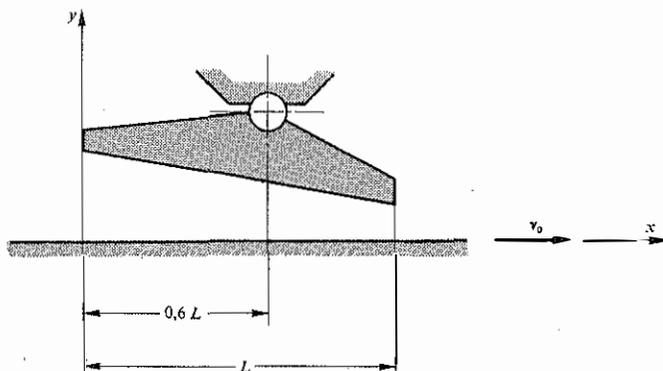


Fig. 9.11. - Schema di cuscinetto di spinta. L'assetto della slitta si adegua spontaneamente alle condizioni di carico esterno.

di Couette, studiato nel paragrafo 9.8, che non dà luogo a forze utili normali all'asse. In presenza di carichi esterni, il perno si disassa automaticamente rispetto alla boccia, come indicato in figura 9.12, costringendo il lubrificante a percorrere un'intercapedine di spessore via via decrescente, lungo la quale si formano le sovrappressioni capaci di contrastare il carico esterno.

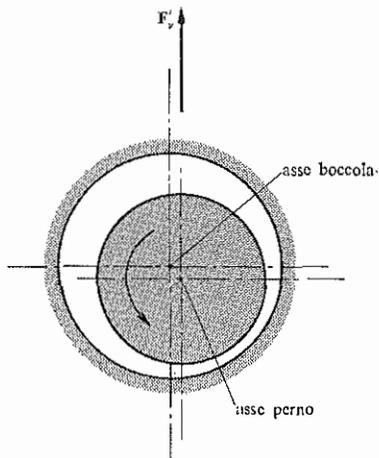


Fig. 9.12. - Schema di accoppiamento albero rotante con boccia fissa. Il disassamento spontaneo dell'albero dà luogo alla portanza richiesta.

9.11. Moto alla Hele-Shaw.

Un altro fenomeno inquadrabile con l'equazione ridotta di Navier è quello del moto stazionario che si realizza fra lastre piane e parallele, poste a distanza reciproca d molto inferiore alle dimensioni delle lastre stesse, purché le forze specifiche di massa \mathbf{f} ammettano potenziale ϕ e purché le velocità in gioco siano sufficientemente contenute.

Fissati gli assi x ed y sulla mezzaria dell'intercapedine, e l'asse z normale ad essi, sia dato su $z = 0$ il campo di velocità

$$\mathbf{v}_0 = \text{grad} \varphi_0$$

dotato di potenziale armonico $\varphi_0(x, y)$. Come notato nel paragrafo 5.7, le componenti di queste velocità sono armoniche, e riesce perciò

$$\nabla^2 v_{0x} = \frac{\partial^2 v_{0x}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{0x}}{\partial y^2} = 0, \quad \nabla^2 v_{0y} = \frac{\partial^2 v_{0y}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{0y}}{\partial y^2} = 0.$$

È facile controllare che il campo di velocità $\mathbf{v}(x, y, z)$ di componenti

$$v_x = v_{0x} \left(1 - 4 \frac{z^2}{d^2}\right), \quad v_y = v_{0y} \left(1 - 4 \frac{z^2}{d^2}\right), \quad v_z = 0,$$

e la pressione

$$p = \rho \phi - \frac{8\mu}{d^2} \varphi_0,$$

soddisfano il sistema

$$\text{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\rho \mathbf{f} - \text{grad} p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} = 0,$$

formato dall'equazione di continuità e dall'equazione ridotta di Navier. Per la verifica, basta tener presente che è

$$\nabla^2 v_x = \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = \left(1 - 4 \frac{z^2}{d^2}\right) \left(\frac{\partial^2 v_{0x}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{0x}}{\partial y^2}\right) - 8 \frac{v_{0x}}{d^2} = -8 \frac{v_{0x}}{d^2},$$

$$\nabla^2 v_y = \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} = \left(1 - 4 \frac{z^2}{d^2}\right) \left(\frac{\partial^2 v_{0y}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{0y}}{\partial y^2}\right) - 8 \frac{v_{0y}}{d^2} = -8 \frac{v_{0y}}{d^2},$$

$$\nabla^2 v_z = 0.$$

Il campo delle velocità $\mathbf{v}(x, y, z)$, inoltre, è in accordo con la condizione di aderenza sulle pareti $z = \pm d/2$ delle due lastre.

Le traiettorie, che giacciono sempre su piani paralleli alle lastre poiché v_z è nulla, si ripresentano identiche su tutti i piani di questo genere perché il rapporto

$$\frac{v_y}{v_x} = \frac{v_{0y} \left(1 - 4 \frac{z^2}{d^2}\right)}{v_{0x} \left(1 - 4 \frac{z^2}{d^2}\right)} = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}$$

è indipendente da z . Anche la vorticità mantiene direzione indipendente da z , pur crescendo linearmente di intensità man mano che ci si allontana dal piano di mezzaria, e pur assumendo verso contrario da bande opposte di questo stesso piano. È infatti

$$\begin{aligned} \mathbf{w} = \text{rot } \mathbf{v} &= 8 \frac{z}{d^2} v_{0y} \mathbf{i}_x - 8 \frac{z}{d^2} v_{0x} \mathbf{i}_y + \left(1 - 4 \frac{z^2}{d^2}\right) \left(\frac{\partial v_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial v_{0x}}{\partial y}\right) \mathbf{i}_z = \\ &= 8 \frac{z}{d^2} (v_{0y} \mathbf{i}_x - v_{0x} \mathbf{i}_y), \end{aligned}$$

perché il campo \mathbf{v}_0 è irrotazionale, in quanto dotato di potenziale.

Il campo delle velocità centrali \mathbf{v}_0 , per essere un campo dotato di potenziale armonico, è determinato univocamente, come si è detto nel paragrafo 5.7, dai valori imposti al suo potenziale sul contorno della porzione di piano $z = 0$ interessata dal moto, valori che possono essere sostituiti da quelli della derivata del potenziale stesso stimata in direzione normale al contorno.

Il moto fra le lastre parallele, con le sue traiettorie tutte uguali a quelle presenti su $z = 0$, costituisce così una chiara immagine del moto irrotazionale piano. Il risultato è compromesso in parte dalla vicinanza di eventuali pareti solide che si estendano, con generatrici parallele all'asse z , dall'una all'altra lastra piana. Ciò perché il campo \mathbf{v}_0 ed il campo \mathbf{v} che ne deriva non possono soddisfare la condizione di aderenza a tali pareti cilindriche.

Al crescere dello spessore d dell'intercapedine rispetto alle dimensioni generali delle lastre, l'equazione ridotta di Navier diviene inadeguata alla descrizione del moto. Anche in questo caso si perde la congruenza delle linee di corrente, che tendono ad assumere configurazioni differenti sui diversi piani a z costante.

Il moto esaminato in questo paragrafo è impiegato abitualmente per lo studio sperimentale delle traiettorie nei moti irrotazionali isocori piani, secondo la tecnica messa a punto da Hele-Shaw nel 1898.

9.12. Moti di filtrazione.

Un terzo caso in cui è applicabile l'equazione ridotta di Navier è quello del moto di fluido a densità e viscosità uniformi e permanenti attraverso i meati di un filtro, sempre che le velocità di transito siano sufficientemente piccole.

L'applicazione diretta di tale equazione ridotta del moto comporterebbe tuttavia complicazioni notevolissime, dato che i singoli elementi fluidi, nel muoversi lungo gli interstizi irregolari lasciati liberi dalla struttura solida del filtro, percorrono traiettorie molto tormentate, e le velocità del fluido risultano di conseguenza estremamente variabili nello spazio. Per contro, dal punto di vista tecnico, una descrizione così minuta del campo delle velocità non è utile, interessando di norma solo le portate volumetriche in transito.

Per questi motivi, negli studi sui moti di filtrazione si fa riferimento, anziché alla velocità \mathbf{v} , ad una *densità apparente di portata volumetrica* ω_a , definita in modo che la portata netta entrante nel volume V di filtro attraverso il suo contorno chiuso A sia espressa dall'integrale

$$\int_A \omega_a dA$$

per piccolo che sia V rispetto alle dimensioni generali del filtro, ma con la condizione che V stesso comprenda ancora un gran numero di interstizi invasi dal fluido in moto. L'introduzione di ω_a ricalca, su scala molto maggiore, i procedimenti seguiti nel definire lo schema continuo di un fluido. In altre parole, la densità apparente di portata volumetrica costituisce la media sullo spazio delle portate volumetriche effettive, condotta prescindendo dalla struttura del filtro e considerando quest'ultimo come un ambiente tutto percorso dal fluido. Naturalmente ω_a , oltre che dal punto e dall'istante considerati, dipende anche dall'orientamento locale di A . È pertanto

$$\omega_a = \omega_a(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}),$$

essendo \mathbf{n} la normale unitaria interna di A .

La portata che penetra in V è espressa anche da

$$\int_{A'_D} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA'_D,$$

nella quale A'_D indica la somma delle intersezioni di A con i meati del filtro. Questa seconda espressione avverte subito che le portate volumetriche

triche complessivamente entranti sono nulle quando il fluido ha densità uniforme e permanente e quando, inoltre, la struttura solida del filtro si mantiene ferma ed indeformata nel tempo. Basta integrare l'equazione di continuità

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

sul volume V_p degli interstizi del filtro racchiusi nel volume V per avere

$$\int_{V_p} \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV_p = 0,$$

e quindi

$$\int_{V_p} \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV_p = - \int_{A_p} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_p \, dA_p = 0,$$

ove A_p è il contorno di V_p , ed \mathbf{n}_p la sua normale interna. Ma la velocità \mathbf{v} è nulla sulle pareti ferme del tessuto del filtro, e l'integrale di superficie si riduce a quello esteso all'area A'_p di intersezione dei meati con la superficie di contorno A

$$\int_{A'_p} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA'_p,$$

integrale che risulta pertanto anch'esso nullo. È accertato così che, nelle condizioni indicate, deve essere

$$\int_A \omega_a \, dA = 0.$$

Si considera ora un tetraedro avente tre facce disposte perpendicolarmente agli assi coordinati x , y e z ed una quarta faccia obliqua di area A_0 . Se \mathbf{n} , di componenti n_x , n_y ed n_z , è il versore normale interno per la faccia obliqua, le aree delle altre facce valgono nell'ordine $-n_x A_0$, $-n_y A_0$ e $-n_z A_0$. Supposto inoltre che ω_a sia continua, riducendo a zero il volume del tetraedro senza cambiare la giacitura delle sue facce si ottiene

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{A_0} \int_A \omega_a \, dA = \omega_a(\mathbf{n}) + (-n_x) \omega_a(\mathbf{i}_x) + (-n_y) \omega_a(\mathbf{i}_y) + (-n_z) \omega_a(\mathbf{i}_z) = 0,$$

ossia

$$\omega_a(\mathbf{n}) = n_x \omega_a(\mathbf{i}_x) + n_y \omega_a(\mathbf{i}_y) + n_z \omega_a(\mathbf{i}_z).$$

Ciò consente di introdurre il vettore *velocità apparente*

$$\mathbf{q}_a = \mathbf{q}_a(\mathbf{x}, t),$$

funzione soltanto del punto e dell'istante considerati, assegnandogli le componenti

$$q_{ax} = \omega_a(\mathbf{i}_x), \quad q_{ay} = \omega_a(\mathbf{i}_y), \quad q_{az} = \omega_a(\mathbf{i}_z).$$

Così, la densità apparente di portata che attraversa nella direzione \mathbf{n} un elemento di superficie normale alla stessa \mathbf{n} risulta legata alla velocità apparente dalla

$$\omega_a(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}_a$$

e la portata volumetrica Q che attraversa una superficie A del filtro, non necessariamente chiusa, nel verso della sua normale \mathbf{n} , può essere espressa come

$$Q = \int_A \omega_a \, dA = \int_A \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}_a \, dA.$$

Se poi \mathbf{q}_a è di classe C^1 , si ha, con riferimento ad un volume arbitrario,

$$\int_A \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}_a \, dA = - \int_V \operatorname{div} \mathbf{q}_a \, dV = 0,$$

e quindi

$$\operatorname{div} \mathbf{q}_a = 0;$$

così anche \mathbf{q}_a , come \mathbf{v} , è solenoidale.

La densità apparente di portata ω_a , il modulo e le componenti della velocità apparente \mathbf{q}_a si misurano tutti in metri al secondo, m s^{-1} .

Una volta deciso di rinunciare alla descrizione del campo delle velocità \mathbf{v} , e di limitarsi all'esame delle velocità apparenti \mathbf{q}_a , conviene operare una scelta analoga anche sulle pressioni p , e quindi, in presenza delle forze specifiche di massa dovute al geopotenziale $\phi = -gz$, anche sui carichi piezometrici

$$h = z + \frac{p}{\rho g}.$$

Allo scopo, si può considerare l'operazione di media

$$\frac{1}{M} \int_V \rho h \, dV,$$

in cui M sta per la massa di fluido presente entro il volume V di filtro. Se V è molto piccolo rispetto all'ingombro generale del filtro, e se è contemporaneamente molto grande nei confronti delle dimensioni trasversali

dei meati percorsi dal fluido, il risultato della media non dipende più dalla particolare scelta di V : il risultato stesso può essere associato all'istante t impiegato nel calcolo e ad un generico punto \mathbf{x} compreso entro V . Ne risulta un *carico piezometrico apparente*

$$h_a = h_a(\mathbf{x}, t)$$

che è definito anche nei punti interni alla struttura solida del filtro e che livella le differenze minute presentate dal carico piezometrico vero in seno al fluido.

Il moto del fluido filtrante è retto dall'equazione ridotta di Navier

$$\rho \mathbf{f} - \text{grad } p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t},$$

che conviene riscrivere qui nella forma

$$-\text{grad } h + \frac{\nu}{g} \nabla^2 \mathbf{v} = \frac{1}{g} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$

per evidenziare il carico piezometrico h e la viscosità cinematica ν . Questa equazione implica un legame di proporzionalità diretta fra le componenti della velocità apparente e le componenti del gradiente del carico piezometrico apparente. Infatti, i procedimenti impiegati per definire le grandezze apparenti \mathbf{q}_a ed h_a , pur smussando le irregolarità più fini manifestate dalle grandezze vere, conservano sostanzialmente inalterati, in media, i valori delle velocità e delle relative derivate temporali, ed i valori dei gradienti dei carichi. Per contro, l'ordine di grandezza del laplaciano della \mathbf{q}_a è decisamente inferiore a quello del laplaciano della \mathbf{v} . La sostituzione diretta dei valori apparenti al posto di quelli veri sbilancerebbe l'equazione ridotta di Navier: per ripristinare il peso relativo dei vari termini occorrerebbe amplificare notevolmente, con un coefficiente correttivo uniforme, l'importanza del termine legato alla viscosità. Ma allora, anche in presenza di moto vario, il termine con la derivata temporale della \mathbf{q}_a non ha più influenza sulla distribuzione della velocità apparente, e la \mathbf{q}_a stessa risulta legata al solo gradiente di h_a , come premesso.

Si ha dunque

$$q_{ax} = -\frac{g}{\nu} [K_{xx}(\text{grad } h_a)_x + K_{xy}(\text{grad } h_a)_y + K_{xz}(\text{grad } h_a)_z]$$

$$q_{ay} = -\frac{g}{\nu} [K_{yx}(\text{grad } h_a)_x + K_{yy}(\text{grad } h_a)_y + K_{yz}(\text{grad } h_a)_z]$$

$$q_{az} = -\frac{g}{\nu} [K_{zx}(\text{grad } h_a)_x + K_{zy}(\text{grad } h_a)_y + K_{zz}(\text{grad } h_a)_z]$$

con coefficienti K_{ik} indipendenti da $\text{grad } h_a$. Queste relazioni possono essere riassunte nella notazione

$$\mathbf{q}_a = -\frac{g}{\nu} \mathbf{K} \cdot \text{grad } h_a$$

introducendo così il *tensore della conduttività idraulica*

$$\mathbf{K} \equiv \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix}.$$

Le sue componenti K_{ik} vanno misurate in metri quadrati, m^2 , ed assumono valori che dipendono dalla geometria minuta del filtro.

Spesso le caratteristiche geometriche del filtro sono omogenee ed isotrope, e risultano cioè indipendenti dalla particolare porzione di filtro presa in esame e dalla direzione sotto la quale lo si osserva. Il fatto non può essere generale, perché la tecnologia adottata nella produzione di un filtro industriale può determinare vie di percolazione con orientamenti privilegiati, e perché le vicissitudini geologiche che hanno portato alla formazione di ammassi filtranti naturali possono aver determinato inomogeneità nelle dimensioni e nelle direzioni medie dei meati. Tuttavia, l'omogeneità e l'isotropia del filtro sono condizioni verificate nei casi che più frequentemente interessano in campo tecnico. Il tensore della conduttività idraulica assume allora la struttura

$$K_{ik} = K \delta_{ik}$$

nella quale δ_{ik} è il simbolo di Kronecker, e K è un fattore indipendente dalla posizione considerata. Il legame fra velocità apparenti e gradienti dei carichi apparenti si riduce quindi alla forma

$$\mathbf{q}_a = -\frac{g}{\nu} K \text{grad } h_a,$$

con K uniforme e permanente. Quest'ultima relazione è stata suggerita da Darcy nel 1856, ed è perciò nota oggi come *equazione di Darcy*. Il fattore K è detto *coefficiente di conduttività idraulica*, il monomio gK/ν *coefficiente di filtrazione*. Come le componenti di \mathbf{K} , anche il coefficiente di conduttività idraulica si misura in metri quadrati, m^2 ; il coefficiente di filtrazione si misura invece in metri al secondo, m s^{-1} .

Può essere interessante notare che l'applicazione dell'operatore rotore all'equazione di Darcy produce

$$\operatorname{rot} \mathbf{q}_a = 0$$

quando ν è uniforme. Così il campo delle velocità apparenti è irrotazionale. Il campo delle velocità effettive \mathbf{v} resta invece rotazionale, dovendo essere, in base all'equazione ridotta di Navier,

$$\frac{\nu}{g} \nabla^2 \mathbf{v} = \frac{\nu}{g} (\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v}) = -\frac{\nu}{g} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} = -\operatorname{grad} h - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}.$$

Si è già notato che \mathbf{q}_a è solenoidale, quando la densità del fluido è uniforme e permanente. Perciò, nei filtri omogenei ed isotropi percorsi da fluido a densità e viscosità costanti, la \mathbf{q}_a è anche armonica:

$$\nabla^2 \mathbf{q}_a = 0.$$

Sotto le medesime ipotesi si ha pure

$$\nabla^2 h_a = 0,$$

come si osserva subito applicando l'operatore divergenza all'equazione di Darcy.

Assegnate le dimensioni generali del filtro ed il coefficiente di filtrazione, la conoscenza delle portate in transito è subordinata all'iscrizione nel dominio occupato dal filtro della funzione armonica h_a compatibile con le condizioni vigenti sul contorno del filtro. Ciò richiede, in via preliminare, la traduzione in termini di h_a di tali condizioni di frontiera. Ad esempio, in corrispondenza di superfici limite solide ed impermeabili, la componente normale della velocità apparente deve essere nulla, e nulla deve essere perciò anche la derivata normale del carico piezometrico apparente. Invece, lungo le superfici limite a contatto con fluido esterno, attraverso le quali il fluido stesso entra od esce dal filtro, il carico piezometrico apparente è uniforme. Infatti, nel fluido esterno contiguo, la velocità vera è confrontabile con la velocità apparente che esiste internamente al filtro, presso le stesse superfici, ed è perciò così bassa da permettere di considerare fermo il fluido esterno, ai fini del calcolo della distribuzione dei carichi piezometrici.

Se sono presenti solo superfici di confine dei due tipi ora esaminati, il calcolo della distribuzione di h_a è ricondotto ad un problema misto di Dirichlet e Neumann; se sono presenti anche superfici di confine di altro tipo, il problema può assumere forme più complesse.

9.13. Corrente uniforme che investe un cilindro od una sfera.

Nel caso di correnti inizialmente uniformi che investono ostacoli non è più possibile, in generale, ricorrere all'equazione ridotta di Navier. Ciò perché, a distanza sufficientemente grande dall'ostacolo, la corrente tende ad assumere assetto uniforme, ed in questa zona asintotica il termine dell'equazione di Navier legato alla viscosità, che contiene le derivate seconde della velocità, tende ad annullarsi più rapidamente del termine quadratico, formato con il prodotto della velocità per il suo gradiente. Anche se tale termine quadratico, in presenza di velocità sufficientemente basse, è piccolo e trascurabile di fronte al termine lineare in prossimità dell'ostacolo, la stessa approssimazione tende a non essere più accettabile man mano che ci si allontana dall'ostacolo stesso.

Anziché ricorrere all'equazione di Navier, Oseen ha proposto nel 1910 di sostituire, in casi di questo genere, i termini quadratici con corrispondenti termini di prima approssimazione costruiti moltiplicando la velocità asintotica uniforme \mathbf{v}_a con il gradiente della velocità vera \mathbf{v} . Così facendo il grado di approssimazione si mantiene più livellato in tutto il campo del moto, e l'equazione di Navier ne risulta comunque semplificata perché resa lineare nella velocità.

In questo paragrafo, all'equazione di continuità

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

verrà associata l'equazione di Oseen

$$\rho \mathbf{f} - \operatorname{grad} p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}_a \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} \right),$$

che, in condizioni di moto permanente, assume la forma

$$\rho \mathbf{f} - \operatorname{grad} p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} = \rho \mathbf{v}_a \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v}.$$

Queste equazioni sono state utilizzate da Lamb nel 1911 per studiare il moto stazionario di una corrente soggetta alle forze specifiche di massa del geopotenziale $\phi = -gz$ che investe normalmente un *cilindro a sezione retta circolare*.

Si assume l'asse x parallelo ed equiverso alla \mathbf{v}_a , quello z coincidente con l'asse del cilindro, e quello y disposto in modo da formare una terna ortogonale destra con i primi due.

Si isolano poi dalla velocità \mathbf{v} la sua componente uniforme \mathbf{v}_a e la sua componente irrotazionale e solenoidale \mathbf{v}_1 . Per queste prime componenti è ovviamente

$$\operatorname{div} (\mathbf{v}_a + \mathbf{v}_1) = 0,$$

ed esiste un potenziale $\varphi(x, y)$ che rende

$$\mathbf{v}_a + \mathbf{v}_1 = \text{grad}\varphi$$

e che risulta armonico. È infatti

$$\nabla^2\varphi = \text{div grad}\varphi = \text{div}(\mathbf{v}_a + \mathbf{v}_1) = 0.$$

Si ha inoltre

$$\nabla^2(\mathbf{v}_a + \mathbf{v}_1) = \text{grad div}(\mathbf{v}_a + \mathbf{v}_1) - \text{rot rot}(\mathbf{v}_a + \mathbf{v}_1) = 0.$$

Posto ancora che, come è sempre possibile, \mathbf{v}_1 sia tale da rendere

$$\text{grad}(-\rho gz - p) = \rho v_a \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{v}_a + \mathbf{v}_1),$$

l'equazione di continuità

$$\text{div}\mathbf{v} = 0$$

e l'equazione di Oseen

$$\text{grad}(-\rho gz - p) + \mu \nabla^2\mathbf{v} = \rho v_a \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}$$

sono soddisfatte purché la componente residua \mathbf{v}_2 della \mathbf{v} sia in accordo con le equazioni

$$\begin{aligned} \text{div}\mathbf{v}_2 &= 0, \\ \left(\nabla^2 - \frac{v_a}{\nu} \frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{v}_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ciò avviene certamente se si esprimono le componenti di \mathbf{v}_2 nella forma

$$v_{2x} = \frac{\nu}{v_a} \frac{\partial f}{\partial x} - f, \quad v_{2y} = \frac{\nu}{v_a} \frac{\partial f}{\partial y}$$

con $f(x, y)$ soluzione della

$$\left(\nabla^2 - \frac{v_a}{\nu} \frac{\partial}{\partial x}\right)f = 0,$$

perché allora

$$\text{div}(v_{2x}\mathbf{i}_x + v_{2y}\mathbf{i}_y) = \frac{\nu}{v_a} \left(\nabla^2 - \frac{v_a}{\nu} \frac{\partial}{\partial x}\right)f = 0,$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{v_a}{\nu} \frac{\partial}{\partial x}\right)(v_{2x}\mathbf{i}_x + v_{2y}\mathbf{i}_y) = \left[\mathbf{i}_x \left(-1 + \frac{\nu}{v_a} \frac{\partial}{\partial x}\right) + \mathbf{i}_y \frac{\nu}{v_a} \frac{\partial}{\partial y}\right] \left(\nabla^2 - \frac{v_a}{\nu} \frac{\partial}{\partial x}\right)f = 0.$$

La soluzione, evanescente a grande distanza dal cilindro, è

$$f = c_0 \exp \left[\frac{v_a}{2\nu} x \right] K_0 \left[\frac{v_a}{2\nu} r \right]$$

ove r indica la distanza $\sqrt{x^2 + y^2}$ dall'asse del cilindro e K_0 la funzione di Bessel modificata di seconda specie e di ordine zero. Per valori di $v_a r / 2\nu$ sufficientemente piccoli si ha

$$f = -c_0 \left(1 + \frac{v_a}{2\nu} x \right) \left(\Gamma + \ln \frac{v_a r}{4\nu} \right) + \dots$$

essendo

$$\Gamma = 0,577\ 215\ 665 \dots$$

la costante di Euler e Mascheroni.

Trascurando sempre i termini contenenti a fattore $v_a r / 2\nu$, si ottengono le velocità

$$v_{2x} = \frac{\nu}{v_a} \frac{\partial f}{\partial x} - f = c_0 \left[\frac{1}{2} \left(\Gamma + \ln \frac{v_a r}{4\nu} \right) - \left(\frac{\nu}{v_a} + \frac{1}{2} x \right) \frac{\partial}{\partial x} \ln r + \dots \right]$$

$$v_{2y} = \frac{\nu}{v_a} \frac{\partial f}{\partial y} = -c_0 \left[\left(\frac{\nu}{v_a} + \frac{1}{2} x \right) \frac{\partial}{\partial y} \ln r + \dots \right]$$

e si controlla immediatamente che esse possono venir espresse anche come

$$v_{2x} = c_0 \left[\frac{1}{2} \left(\Gamma - \frac{1}{2} + \ln \frac{v_a r}{4\nu} \right) - \frac{\nu}{v_a} \frac{\partial}{\partial x} \ln r + \frac{1}{4} r^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln r + \dots \right],$$

$$v_{2y} = c_0 \left[-\frac{\nu}{v_a} \frac{\partial}{\partial y} \ln r + \frac{1}{4} r^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln r + \dots \right].$$

Quest'ultima forma suggerisce di adottare per il potenziale φ della velocità $\mathbf{v}_a + \mathbf{v}_1$ lo sviluppo

$$\varphi = v_a x + c_1 \ln r + c_2 \frac{\partial}{\partial x} \ln r + \dots$$

che dà

$$v_a + v_{1x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = v_a + c_1 \frac{\partial}{\partial x} \ln r + c_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln r + \dots$$

$$v_{1y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = c_1 \frac{\partial}{\partial y} \ln r + c_2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \ln r + \dots$$

e che porta, a grande distanza dal cilindro, alla velocità \mathbf{v}_a .

Infine, le componenti $v_a + v_{1x} + v_{2x}$ e $v_{1y} + v_{2y}$ della velocità complessiva riescono nulle sulla superficie $r = r_0$ del cilindro assegnando alle costanti i valori

$$c_0 = \frac{2v_a}{\frac{1}{2} - \Gamma - \ln \frac{v_a r_0}{4\nu}},$$

$$c_1 = \frac{\nu}{v_a} c_0,$$

$$c_2 = -\frac{r_0^2}{4} c_0.$$

Presso la superficie del cilindro, ammesso sempre che $v_a r / 2\nu$ sia abbastanza piccolo, le velocità compressive sono dunque

$$v_x = v_a + \frac{v_a}{\frac{1}{2} - \Gamma - \ln \frac{v_a r_0}{4\nu}} \left[\left(\Gamma - \frac{1}{2} - \ln \frac{v_a r}{4\nu} \right) + \frac{1}{2} (r^2 - r_0^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln r + \dots \right],$$

$$v_y = \frac{v_a}{\frac{1}{2} - \Gamma - \ln \frac{v_a r_0}{4\nu}} \left[\frac{1}{2} (r^2 - r_0^2) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln r + \dots \right].$$

La vorticità ha una sola componente non nulla: quella lungo z , di intensità

$$\begin{aligned} (\text{rot } \mathbf{v})_z &= \frac{\partial v_{2y}}{\partial x} - \frac{\partial v_{2x}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\nu}{v_a} \frac{\partial f}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu}{v_a} \frac{\partial f}{\partial x} - f \right) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2v_a}{\frac{1}{2} - \Gamma - \ln \frac{v_a r_0}{4\nu}} \exp \left[\frac{v_a}{2\nu} x \right] \frac{\partial}{\partial y} K_0 \left[\frac{v_a}{2\nu} r \right]. \end{aligned}$$

Poiché la funzione K_0 tende, al crescere del suo argomento $v_a r / 2\nu$, alla forma

$$K_0 \left[\frac{v_a}{2\nu} r \right] \simeq \sqrt{\frac{\pi\nu}{v_a r}} \exp \left[-\frac{v_a}{2\nu} r \right],$$

la vorticità stessa tende al valore

$$(\text{rot } \mathbf{v})_z = -\frac{v_a}{\frac{1}{2} - \Gamma - \ln \frac{v_a r_0}{4\nu}} \left(\sqrt{\frac{\pi\nu}{\nu r}} + \sqrt{\frac{\pi\nu}{v_a r^3}} \right) \frac{y}{r} \exp \left[-\frac{v_a}{2\nu} (r - x) \right],$$

finendo perciò con il diventare insignificante a grandi distanze dal cilindro $r = r_0$. Ed anzi, dato che l'esponenziale cade all'1% circa del suo

valore iniziale quando il suo argomento passa da 0 a -5 , la vorticità è inapprezzabile anche al di fuori del paraboloide avente sezione retta

$$\frac{v_a}{2\nu}(r-x) = 5$$

e linea focale sull'asse del cilindro.

La pressione p è distribuita con la legge

$$\text{grad}(-\rho g z - p) = \rho v_a \frac{\partial}{\partial x} \text{grad} \varphi,$$

che si riduce a quella

$$\text{grad}(-\rho g z - p_i) = -\rho g \text{grad} \left(z + \frac{p_i}{\gamma} \right) = 0$$

a grande distanza dal cilindro, ove è ormai $\varphi = v_a x$. Nelle altre zone, la pressione supera quindi il livello idrostatico locale p_i della quantità

$$p - p_i = -\rho v_a \frac{\partial}{\partial x} (\varphi - v_a x),$$

che vale

$$p - p_i = \frac{2\rho v_a^2}{\frac{1}{2} - \Gamma - \ln \frac{v_a r_0}{4\nu}} \left[\frac{r_0^2}{4r^2} - \frac{\nu}{v_a} \frac{x}{r^2} - \frac{r_0^2}{2} \frac{x^2}{r^4} + \dots \right].$$

Contro il cilindro $r = r_0$, sul quale è $x = r_0 \cos \vartheta$, riesce

$$p - p_i = \frac{2\rho v_a^2}{\frac{1}{2} - \Gamma - \ln \frac{v_a r_0}{4\nu}} \left[\frac{1}{4} - \frac{\nu}{v_a} \frac{\cos \vartheta}{r_0} - \frac{1}{2} \cos^2 \vartheta + \dots \right].$$

con risultante per unità di lunghezza assiale

$$F'_{ix} = \int_0^{2\pi} -(p - p_i) r_0 \cos \vartheta d\vartheta = \frac{2\pi \rho \nu v_a}{\frac{1}{2} - \Gamma - \ln \frac{v_a r_0}{4\nu}},$$

diretta nel verso della v_a .

Sul cilindro agiscono anche sforzi viscosi. Essi hanno componente tangenziale

$$[T_{-r,\vartheta}]_{r=r_0} = -\mu \left[r \frac{\partial}{\partial(-r)} \left(\frac{v_\vartheta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial(-v_r)}{\partial \vartheta} \right]_{r=r_0},$$

che si riduce a

$$[T_{-r,\vartheta}]_{r=r_0} = -\mu \left[\frac{\partial v_\vartheta}{\partial(-r)} \right]_{r=r_0} = \mu \left[\frac{\partial(-v_x \sin \vartheta + v_y \cos \vartheta)}{\partial r} \right]_{r=r_0}$$

per la condizione di aderenza, e componente normale

$$[T_{-r,r}]_{r=r_0} = -2\mu \left[\frac{\partial v_r}{\partial(-r)} \right]_{r=r_0} = 2\mu \left[\frac{\partial(v_x \cos \vartheta + v_y \sin \vartheta)}{\partial r} \right]_{r=r_0}$$

Mentre la prima è identicamente nulla al livello di approssimazione adottato, la seconda vale

$$[T_{-r,r}]_{r=r_0} = -\frac{2\mu x}{r_0^2} \frac{v_a}{\frac{1}{2} - \Gamma - \ln \frac{v_a r_0}{4\nu}}$$

ed ammette risultante diretta nel verso della v_a . Con riferimento all'unità di sviluppo assiale del cilindro, si ha

$$F'_{2x} = \int_0^{2\pi} -[T_{-r,r}]_{r=r_0} r_0 \cos \vartheta d\vartheta = \frac{2\mu \rho v_a}{\frac{1}{2} - \Gamma - \ln \frac{v_a r_0}{4\nu}}$$

numericamente uguale al risultante F'_{1x} delle pressioni non viscosi.

Nel complesso, il risultante degli sforzi esercitati dal fluido sul cilindro è, per unità di lunghezza,

$$F'_x = \frac{4\pi \rho v_a}{\frac{1}{2} - \Gamma - \ln \frac{v_a r_0}{4\nu}}$$

È uso esprimere questo risultato con la formula

$$F'_x = C_R \rho \frac{v_a^2}{2} D$$

che definisce il *coefficiente di resistenza* C_R . Essendo $D = 2r_0$, si ha perciò

$$C_R = \frac{8\pi}{\frac{1}{2} - \Gamma - \ln \frac{v_a r_0}{4\nu}} \frac{\nu}{2v_a r_0}$$

da cui, definendo il numero di Reynolds come

$$Re = \frac{v_a D}{\nu} = \frac{2v_a r_0}{\nu}$$

e tenendo presente il valore della costante di Euler e Mascheroni γ , si trae la *formula di Lamb*

$$C_R = \frac{8\pi}{Re \ln \frac{7,4}{Re}}$$

A conclusione di questo esame del moto intorno al cilindro si ricorda un'osservazione di Stokes del 1851: il moto stesso non può essere inquadrato dall'equazione ridotta di Navier, prescindendo completamente dai termini quadratici nella velocità, perché la soluzione con velocità nulle sul cilindro presenterebbe in tal caso velocità crescenti oltre ogni limite all'aumentare della distanza dal cilindro stesso.

Il procedimento usato per la corrente che lambisce il cilindro è stato utilizzato da Lamb anche per lo studio della corrente di velocità iniziale v_a uniforme che investe una *sfera*.

Pure in questo secondo caso conviene scindere la velocità \mathbf{v} nei tre addendi v_a , v_1 e v_2 : Assunto l'asse x con la direzione ed il verso di v_a , e fissati gli altri due assi y e z in modo da formare una terna destra con origine nel centro della sfera, la componente $v_a + v_1$ può essere derivata da un potenziale armonico $\varphi(x, r)$ con $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Le componenti della velocità v_2 possono essere espresse nella forma

$$v_{2x} = \frac{v}{v_a} \frac{\partial f}{\partial x} - f$$

$$v_{2y} = \frac{v}{v_a} \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$v_{2z} = \frac{v}{v_a} \frac{\partial f}{\partial z}$$

purché f soddisfi la

$$\left(\nabla^2 - \frac{v_a}{v} \frac{\partial}{\partial x} \right) f = 0.$$

La soluzione, evanescente a grande distanza dalla sfera, è

$$f = c_0 \frac{1}{r} \exp \left[-\frac{v_a}{2v} (r - x) \right]$$

che, per piccoli valori di $v_a r / 2v$, ammette lo sviluppo

$$f = c_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{v_a}{2v} + \frac{v_a}{2v} \frac{x}{r} + \dots \right)$$

e che porge, a meno di termini in $v_a r/2\nu$, le velocità

$$\begin{aligned} v_{2x} &= c_0 \left(-\frac{21}{3} \frac{1}{r} + \frac{\nu}{v_a} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} - \frac{1}{6} r^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r} + \dots \right), \\ v_{2y} &= c_0 \left(\frac{\nu}{v_a} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} - \frac{1}{6} r^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{1}{r} + \dots \right), \\ v_{2z} &= c_0 \left(\frac{\nu}{v_a} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} - \frac{1}{6} r^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \frac{1}{r} + \dots \right). \end{aligned}$$

Ciò suggerisce di adottare per il potenziale φ la serie

$$\varphi = v_a x + c_1 \frac{1}{r} + c_2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} + \dots,$$

dalla quale si derivano le velocità

$$\begin{aligned} v_x + v_{1x} &= v_a + c_1 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} + c_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r} + \dots \\ v_{1y} &= c_1 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} + c_2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{1}{r} + \dots \\ v_{1z} &= c_1 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} + c_2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \frac{1}{r} + \dots \end{aligned}$$

che si riducono alla sola v_a a grande distanza dalla sfera.

La velocità complessiva diventa nulla sulla superficie $r = r_0$ se si assegnano alle costanti i valori

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{3}{2} v_a r_0, \\ c_1 &= -\frac{3}{2} \nu r_0, \\ c_2 &= \frac{1}{4} v_a r_0^3. \end{aligned}$$

Ciò fatto, le stesse velocità assumono in prossimità della sfera, finché $v_a r/2\nu$ si mantiene abbastanza piccolo, le espressioni

$$\begin{aligned} v_x &= v_a - v_a r_0 \frac{1}{r} - \frac{1}{4} v_a r_0 (r^2 - r_0^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r} + \dots \\ v_y &= -\frac{1}{4} v_a r_0 (r^2 - r_0^2) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{1}{r} + \dots \\ v_z &= -\frac{1}{4} v_a r_0 (r^2 - r_0^2) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \frac{1}{r} + \dots \end{aligned}$$

in accordo con la soluzione presentata da Oseen nel 1910. I termini riportati coincidono inoltre, da soli, con la soluzione chiusa ottenuta da Stokes nel 1851, partendo dall'equazione ridotta di Navier.

La vorticità è sempre normale ai semipiani passanti per l'asse x , ed assume identica distribuzione su ciascuno di essi. Calcolandone l'intensità su quello $y > 0$, si ha

$$(\text{rotv})_z = \frac{\partial v_{2y}}{\partial x} - \frac{\partial v_{2x}}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{3}{2} v_a \frac{r_0 y}{r^3} \left(1 + \frac{v_a r}{2\nu} \right) \exp \left[-\frac{v_a}{2\nu} (r-x) \right].$$

Così, la vorticità tende ad annullarsi al crescere della distanza dalla sfera, ma è già inapprezzabile anche al di fuori del paraboloide di equazione

$$\frac{v_a}{2\nu} (r-x) = 5,$$

che ha il fuoco nel centro della sfera.

La pressione p è data dalla formula

$$\text{grad}(-\rho g z - p) = \rho v_a \frac{\partial}{\partial x} \text{grad } \varphi$$

e supera perciò il valore idrostatico p_1 compatibile con la condizione asintotica $\varphi = v_a x$ della quantità

$$p - p_1 = -\rho v_a \frac{\partial}{\partial x} (\varphi - v_a x),$$

pari a

$$p - p_1 = -\frac{3}{2} \rho v_a r_0 \frac{x}{r^3} + \dots$$

Contro la sfera, sulla quale è $r = r_0$ ed $x = r_0 \cos \vartheta$, si ha

$$p - p_1 = -\frac{3}{2} \rho v_a \frac{\cos \vartheta}{r_0} + \dots,$$

con risultante, diretto nel verso di \mathbf{v}_a , di intensità

$$F_{1x} = \int_0^\pi -(p - p_1) 2\pi r_0^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta = 2\pi \rho v_a r_0.$$

Le tensioni viscosse, come le velocità, non hanno componente normale ai piani passanti per l'asse x , ed assumono su ciascuno di questi la medesima distribuzione. Eseguendo il calcolo sul piano $z = 0$, si trova che la

tensione tangenziale agente sulla sfera è

$$\begin{aligned} [T_{-r,\vartheta}]_{r=r_0} &= -\mu \left[r \frac{\partial}{\partial(-r)} \left(\frac{v_\vartheta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial(-v_r)}{\partial\vartheta} \right]_{r=r_0} = \\ &= \mu \left[\frac{\partial(-v_x \sin\vartheta + v_y \cos\vartheta)}{\partial r} \right]_{r=r_0} = -\mu \frac{v_a}{r_0} \frac{3}{2} \sin\vartheta, \end{aligned}$$

e presenta un risultante di intensità

$$F_{2x} = \int_0^\pi [T_{-r,\vartheta}]_{r=r_0} 2\pi r_0^2 \sin^2\vartheta \, d\vartheta = 4\pi\varrho\nu v_a r_0,$$

diretto ancora nel verso di \mathbf{v}_a . Sempre sulla sfera, la componente normale degli sforzi viscosi è

$$[T_{-r,r}]_{r=r_0} = -2\mu \left[\frac{\partial v_r}{\partial(-r)} \right]_{r=r_0} = 2\mu \left[\frac{\partial(v_x \cos\vartheta + v_y \sin\vartheta)}{\partial r} \right]_{r=r_0}$$

e risulta identicamente nulla.

La forza complessiva è dunque

$$F_x = 6\pi\varrho\nu v_a r_0.$$

Volendo esprimere il risultato nella forma

$$F_x = C_R \varrho \frac{v_a^2}{2} \pi r_0^2,$$

definito il numero di Reynolds come

$$Re = \frac{v_a D}{\nu} = \frac{2v_a r_0}{\nu},$$

occorre assegnare al coefficiente di resistenza C_R il valore

$$C_R = \frac{24}{Re}.$$

Questa è nota come *formula di Stokes*, perché coincide con quella ricavata da Stokes nel 1851 in base al calcolo fondato sulle equazioni di Navier.

Riferimenti citati.

COUETTE, MAURICE, *Études sur le frottement des liquides*, Annales Chim. Phys., 1890, pp. 433-510.

DARCY, HENRY PHILIBERT GASPARD, *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*, Paris, 1856.

HELE-SHAW, HENRY SELBY, *The flow of water*, Nature, 1898, pp. 34-36.

- LAMB, HORACE, *On the uniform motion of a sphere through a viscous fluid*, Phil. Mag., 1911, pp. 112-121.
- NAVIER, LOUIS MARIE HENRY, *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides*, Mem. Acad. Inst. France, 1827, pp. 389-400.
- NEWTON, ISAAC, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, London, 1687.
- OSEEN, CARL WILHELM, *Über die Stokessche Formel, und über eine verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik*, Arkiv för matematik, astronomi och fysik, n:o 29, 1910.
- REYNOLDS, OSBORNE, *On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp Tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil*, Phil. Trans. Roy. Soc., 1886, pp. 157-234.
- STOKES, GEORGE GABRIEL, *On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids*, Trans. Camb. Phil. Soc., 1845, pp. 287-319.
- *On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums*, Trans. Camb. Phil. Soc., 1851, pp. 8-106.

CAPITOLO DECIMO

MOTO TURBOLENTO

10.1. Moto laminare e moto turbolento.

Nel 1883 Reynolds descrisse una serie di osservazioni sperimentali, rimaste classiche nello studio del moto dei fluidi. Un tubo cilindrico e trasparente è attraversato da una portata permanente di acqua limpida. Presso la sezione iniziale del condotto è innesso invece un getto di acqua colorata. Si osserva che il getto si mantiene rettilineo e parallelo all'asse del tubo, e che si conserva integro per lungo tratto prima di essere distrutto dalla diffusione. Questo comportamento del getto evidenzia la presenza di velocità dirette tutte parallelamente all'asse del tubo, come nello studio effettuato nel paragrafo 9.6. Il moto ora descritto, detto *moto laminare*, si manifesta però solo quando la portata in transito è abbastanza bassa.

Al crescere della portata impiegata, il getto colorato finisce con l'assumere un tracciato irregolare e mutevole, pur mantenendosi ancora ben distinto dalla massa di acqua limpida circostante. Nascono qui, evidentemente, delle velocità trasversali, pulsanti nel tempo.

Un ulteriore aumento della portata, percentualmente modesto, conduce ad un nuovo assetto del moto. Dopo breve tratto di condotta, il getto colorato si disintegra, disperdendosi in tutta la massa fluida e conferendo ad essa una colorazione uniforme. In questo stadio, le componenti trasversali della velocità assumono una intensità ed una frequenza particolarmente incisive. Il moto è detto *moto turbolento*.

Le stesse esperienze di Reynolds, ora ricordate, permettono anche di fissare un criterio atto ad individuare le condizioni nelle quali ha luogo l'uno o l'altro dei due possibili tipi di moto. Nel tubo cilindrico a sezione

circolare, detti ν , U , D , nell'ordine, la viscosità cinematica del fluido, la sua velocità media longitudinale ed il diametro del condotto, il moto si mantiene laminare se

$$Re = \frac{UD}{\nu}$$

è minore di circa 2500, risulta invece turbolento se Re supera tale valore.

Un criterio analogo è valido per i moti in ambienti con geometria diversa. Cambia, da caso a caso, la velocità che conviene assumere ad indice dell'intensità del moto, e la dimensione lineare che fissa l'ampiezza del dominio attraversato dal fluido, ma il numero puro Re che ne risulta mantiene la sua efficacia nell'individuare le condizioni di passaggio dal moto laminare al moto turbolento. Il valore numerico di Re in corrispondenza del quale ha luogo la transizione dipende però, oltre che dalla velocità e dalla dimensione lineare adottate per costruirlo, anche dalla particolare geometria dell'ambiente, ivi compresa l'estensione degli eventuali peli liberi.

Il numero puro Re è stato introdotto nel paragrafo 3.4. La sua denominazione di *numero di Reynolds*, data allora, ricorda appunto gli essenziali contributi apportati da Reynolds allo studio dei moti turbolenti.

Il passaggio al moto turbolento avviene per instabilità del moto laminare di partenza. Si è infatti osservato sperimentalmente che è possibile mantenere laminare il moto anche a numeri di Reynolds molto maggiori di quello corrispondente alla transizione usuale, purché si eviti che la corrente venga perturbata da vibrazioni.

Per inquadrare meglio le cause del passaggio sono state condotte anche indagini analitiche, basate prevalentemente sullo schema che segue. Dato un moto laminare, si sovrappone ad esso un insieme di piccole oscillazioni di velocità, sinusoidali nello spazio, e sinusoidali smorzate nel tempo. Si richiede che il moto risultante soddisfi le stesse equazioni valide per il moto base, e le medesime condizioni al contorno. Ne seguono, in funzione della lunghezza d'onda e del periodo della perturbazione impressa, e del numero di Reynolds del moto base, ben determinati valori del tasso di smorzamento nel tempo delle oscillazioni inizialmente impresse. Se risulta positivo, la perturbazione si attenua nel tempo, ed il moto base è stabile, se risulta invece negativo, la perturbazione, una volta innescata, si esalta progressivamente, ed il moto base è instabile.

Studi di questo genere hanno mostrato che l'instabilità può essere dovuta ai valori assunti dalle accelerazioni degli elementi fluidi.

Per contro, studi dello stesso genere hanno messo in evidenza che l'instabilità è dovuta a volte proprio alla viscosità del fluido. Un esempio è

fornito dal moto fra cilindri coassiali, uno dei quali ruota rispetto all'altro: l'instabilità è connessa allora ad un travaso di energia meccanica dal moto base a quello di perturbazione, operato proprio dalle azioni viscoso. L'esempio è istruttivo perché indica che la viscosità non ha solo un effetto di smorzamento del moto attraverso la dissipazione dell'energia meccanica, e quindi che non ha sempre un effetto stabilizzante.

10.2. Il moto medio.

Nel moto turbolento, i valori locali ed istantanei delle varie grandezze fisiche in gioco subiscono fluttuazioni continue e disordinate. Tuttavia, una descrizione dei fenomeni così minuta non è utile in campo tecnico: di norma è sufficiente considerare solo le medie temporali dei valori locali ed istantanei, e prescindere dalle oscillazioni sovrapposte.

L'introduzione del moto medio ripropone, su scala diversa, e con differenti modalità di media, le stesse osservazioni già fatte a proposito dello schema continuo nel paragrafo 4.1. Allora si è rinunciato all'esame di dettaglio delle vicende delle singole molecole o dei singoli aggregati molecolari per concentrare l'attenzione solo su valori capaci di fornire, attraverso medie spaziali, grandezze atte a descrivere, istante per istante, il comportamento di interi gruppi di molecole o di loro aggregati, che vengono poi dissolti nel tempo dai moti di diffusione dei loro componenti. Adesso, con lo studio del moto medio, si vorrebbe evitare l'esame completo dei valori locali ed istantanei, per costruire con essi medie temporali capaci di mettere in evidenza gli eventi subiti da porzioni di fluido di norma molto più ampie, prescindendo dal fatto che esse vengono disintegrate nel tempo dalla turbolenza, attraverso moti disordinati di complesse unità componenti.

Mediando le densità locali ed istantanee $\varrho(\mathbf{x}, t)$ su intervalli di tempo T sufficientemente lunghi si finisce con l'ottenere valori che non dipendono più dalle fluttuazioni turbolente. Se poi, contemporaneamente, la durata T è abbastanza breve rispetto ai tempi di evoluzione del fenomeno nel suo complesso, i valori

$$\bar{\varrho}(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \varrho(\mathbf{x}, t) dt$$

non subiscono più variazioni apprezzabili collocando T intorno all'istante t in maniera diversa da quella indicata. Soddisfatte queste due condizioni sulla durata T , si può assegnare all'istante t la media temporale ottenuta. Si dice allora che il risultato $\bar{\varrho}(\mathbf{x}, t)$ è la *densità media locale ed istantanea*.

La densità vera ρ presenta fluttuazioni turbolente ρ' intorno alla densità media $\bar{\rho}$ tali che

$$\rho = \bar{\rho} + \rho'.$$

Vista la scelta operata sulla durata dell'integrazione, si deve ammettere che risulti

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \rho' dt = 0,$$

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \bar{\rho} dt = \bar{\rho}.$$

La prima relazione sottolinea che l'intervallo T è tanto grande da annullare la media temporale delle fluttuazioni, la seconda che T è tanto breve da consentire di trattare la densità media come costante durante il tempo di integrazione.

Considerazioni analoghe portano a costruire la *velocità media locale ed istantanea* $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)$, ponendo

$$\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} \equiv \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \rho \mathbf{v} dt.$$

Scrivendo ora

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'$$

e tenendo conto delle solite limitazioni sul valore di T si vede che

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \rho \mathbf{v}' dt = 0,$$

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \rho \bar{\mathbf{v}} dt = \bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}.$$

Le operazioni di media eseguite sulla densità e sulla velocità vanno effettuate anche sugli altri parametri locali ed istantanei di natura meccanica o termodinamica. Così, ad esempio, le forze specifiche di massa \mathbf{f} , il tensore degli sforzi \mathbf{T} , la temperatura τ , ed il vettore densità del flusso di potenza termica \mathbf{q} vengono scissi nelle loro componenti medie e nelle

loro componenti turbolente fluttuanti:

$$\mathbf{f} = \bar{\mathbf{f}} + \mathbf{f}' ,$$

$$\mathbf{T} = \bar{\mathbf{T}} + \mathbf{T}' ,$$

$$\tau = \bar{\tau} + \tau' ,$$

$$\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}} + \mathbf{q}' .$$

Le scomposizioni stesse sono precisate dalle relazioni

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \rho \mathbf{f} dt = \bar{\rho} \bar{\mathbf{f}} \quad \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \rho \mathbf{f}' dt = 0 \quad \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \rho \bar{\mathbf{f}} dt = \bar{\rho} \bar{\mathbf{f}}$$

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \mathbf{T} dt = \bar{\mathbf{T}} \quad \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \mathbf{T}' dt = 0 \quad \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \bar{\mathbf{T}} dt = \bar{\mathbf{T}}$$

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \rho \tau dt = \bar{\rho} \bar{\tau} \quad \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \rho \tau' dt = 0 \quad \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \rho \bar{\tau} dt = \bar{\rho} \bar{\tau}$$

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \rho \mathbf{q} dt = \bar{\rho} \bar{\mathbf{q}} \quad \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \rho \mathbf{q}' dt = 0 \quad \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \rho \bar{\mathbf{q}} dt = \bar{\rho} \bar{\mathbf{q}} .$$

Le durate T sulle quali eseguire le medie variano da pochi secondi ad alcuni minuti, in connessione al fatto che le oscillazioni turbolente più vistose hanno di norma cadenze temporali centrate intorno ad uno o due secondi, pur mantenendo ancora livelli apprezzabili per cadenze comprese fra il cinquantesimo di secondo ed i cinque secondi.

L'insieme dei valori medi fornisce la descrizione del *moto medio*. Al moto medio si trasferiscono direttamente tutte le caratterizzazioni definite per il moto individuato dai valori locali ed istantanei. Si dice perciò che il moto si svolge con *densità uniforme e permanente* quando la densità media $\bar{\rho}$ è sempre ed ovunque la stessa. Si parla anche di *moto turbolento permanente*, quando le velocità medie $\bar{\mathbf{v}}$ sono indipendenti dal tempo, di *moto turbolento irrotazionale*, quando il rotore della velocità media è nullo, e di *moto turbolento isocoro*, quando la velocità media presenta divergenza nulla.

10.3. Equazioni meccaniche per il moto medio.

Lo studio di un moto medio richiede equazioni indefinite che coinvolgono i valori medi delle grandezze in gioco. Per ricavarle, occorre mediare nel tempo le equazioni indefinite relative ai valori locali ed istantanei.

Operando in questo modo sull'equazione di continuità

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v}) = 0$$

si ottiene subito la corrispondente equazione indefinita per il moto medio. Nella stima dell'integrale

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{\partial \varrho}{\partial t} dt = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{\partial(\bar{\varrho} + \varrho')}{\partial t} dt$$

va tenuto presente che la durata T deve essere tanto grande da cancellare, nella media, l'effetto delle escursioni turbolente ϱ' della densità ϱ , e perciò anche tanto grande da rendere

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{\partial \varrho'}{\partial t} dt = 0,$$

e che, contemporaneamente, la stessa durata T deve essere tanto breve da permettere di trattare la densità media $\bar{\varrho}$, e quindi anche la sua derivata temporale, come costante ai fini dell'integrazione, in modo da avere

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial t} dt = \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial t}.$$

Inoltre, dato che l'ordine in cui si eseguono le operazioni di media sul tempo e di derivazione rispetto alle variabili spaziali può essere invertito, si ha

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v}) dt = \operatorname{div} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \varrho \mathbf{v} dt = \operatorname{div}(\bar{\varrho} \bar{\mathbf{v}}),$$

in accordo con la definizione di velocità media $\bar{\mathbf{v}}$.

Complessivamente, l'equazione di continuità per il moto medio è

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}) = 0$$

ed ha la stessa forma valida per il moto effettivo. Raggruppando in modo diverso i vari termini si ottiene la forma equivalente

$$\frac{D\bar{\rho}}{Dt} + \bar{\rho} \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = 0.$$

Entrambe, nel caso particolare di moto turbolento isocoro, ed a maggior ragione nel caso di moto turbolento a densità uniforme e permanente, si riducono alla

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = 0.$$

Operazioni analoghe possono essere effettuate sulla prima equazione del moto

$$\rho \mathbf{f} - \operatorname{div} \mathbf{T} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}.$$

È intanto

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} (\rho \mathbf{f} - \operatorname{div} \mathbf{T}) dt = \bar{\rho} \bar{\mathbf{f}} - \operatorname{div} \bar{\mathbf{T}},$$

in base alle definizioni dei valori medi temporali della densità ρ , delle forze specifiche di massa \mathbf{f} e del tensore degli sforzi \mathbf{T} , ed in base alla possibilità di posporre il calcolo della divergenza, che richiede derivate rispetto alle coordinate spaziali, all'operazione di media, che implica integrazioni sul tempo.

Si osserva poi che se si aggiunge all'ultimo termine dell'equazione del moto la quantità, ovviamente nulla,

$$\mathbf{v} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right\}$$

il termine stesso può essere scritto nella forma

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} + \mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \\ &= \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \sum_{i,k} \mathbf{i}_k \left\{ (\rho v_i) \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + v_k \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} \right\} = \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \sum_{i,k} \mathbf{i}_k \frac{\partial(\rho v_i v_k)}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Si possono scindere ora le velocità nelle loro componenti medie e fluttuanti, e si può eseguire la media temporale dei vari termini. Oltre alla possibilità di invertire l'ordine delle operazioni di derivazione rispetto a variabili spaziali e di media rispetto al tempo, occorre qui tener presente che la durata T dell'integrazione deve essere tanto grande da cancellare l'effetto sulla media delle escursioni di $\varrho \mathbf{v}'$, e perciò anche tanto grande da rendere

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{\partial(\varrho \mathbf{v}')}{\partial t} dt = 0,$$

e che, contemporaneamente, la medesima durata deve essere tanto breve da permettere di scrivere

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{\partial(\bar{\varrho} \bar{\mathbf{v}})}{\partial t} dt = \frac{\partial(\bar{\varrho} \bar{\mathbf{v}})}{\partial t}$$

e perciò da trattare $\bar{\mathbf{v}}$ come costante sull'intervallo di integrazione. Ne segue

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{\partial[\varrho(\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}')]}{\partial t} dt &= \frac{\partial(\bar{\varrho} \bar{\mathbf{v}})}{\partial t} \\ \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \sum_{i,k} \mathbf{i}_k \frac{\partial[\varrho(\bar{v}_i + v'_i)(\bar{v}_k + v'_k)]}{\partial x_i} dt &= \\ &= \sum_{i,k} \mathbf{i}_k \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \bar{v}_i \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \varrho \bar{v}_k dt + \bar{v}_i \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \varrho v'_k dt + \bar{v}_k \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \varrho v'_i dt + \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \varrho v'_i v'_k dt \right\} = \\ &= \sum_{i,k} \mathbf{i}_k \frac{\partial}{\partial x_i} \{ \bar{\varrho} \bar{v}_i \bar{v}_k + \overline{\varrho v'_i v'_k} \} \end{aligned}$$

in cui, al solito, il soprasegno indica la media temporale. Dunque

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \varrho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} dt &= \frac{\partial(\bar{\varrho} \bar{\mathbf{v}})}{\partial t} + \sum_{i,k} \mathbf{i}_k \frac{\partial}{\partial x_i} \{ \bar{\varrho} \bar{v}_i \bar{v}_k + \overline{\varrho v'_i v'_k} \} = \\ &= \bar{\mathbf{v}} \left\{ \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{\varrho} \bar{\mathbf{v}}) \right\} + \bar{\varrho} \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \bar{\varrho} \bar{\mathbf{v}} \cdot \operatorname{grad} \bar{\mathbf{v}} + \sum_{i,k} \mathbf{i}_k \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{\varrho v'_i v'_k}) = \\ &= \bar{\varrho} \frac{D\bar{\mathbf{v}}}{Dt} + \sum_{i,k} \mathbf{i}_k \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{\varrho v'_i v'_k}). \end{aligned}$$

Infine, introducendo il tensore $\overline{\mathbf{T}}_R$ rappresentato dal quadro

$$\overline{\mathbf{T}}_R \equiv \begin{bmatrix} \overline{\rho v_x'^2} & \overline{\rho v_x' v_y'} & \overline{\rho v_x' v_z'} \\ \overline{\rho v_y' v_x'} & \overline{\rho v_y'^2} & \overline{\rho v_y' v_z'} \\ \overline{\rho v_z' v_x'} & \overline{\rho v_z' v_y'} & \overline{\rho v_z'^2} \end{bmatrix}$$

la sommatoria residua può essere scritta nella forma

$$\sum_{i,k}^3 \mathbf{i}_k \frac{\partial(\overline{\rho v_i' v_k'})}{\partial x_i} = \text{div } \overline{\mathbf{T}}_R.$$

Complessivamente si ha

$$\overline{\rho \mathbf{f}} - \text{div } \overline{\mathbf{T}} - \text{div } \overline{\mathbf{T}}_R = \overline{\rho} \frac{D\mathbf{v}}{Dt}.$$

Questa *prima equazione indefinita del moto medio* è nota come *equazione di Reynolds*, e risale al 1895. Essa differisce da quella relativa al moto effettivo per la presenza del termine $-\text{div } \overline{\mathbf{T}}_R$. Il risultato ottenuto può essere esposto anche dicendo che un'equazione formalmente analoga a quella del moto effettivo sussiste pure per il moto medio, a patto di aggiungere il *tensore degli sforzi di Reynolds*, $\overline{\mathbf{T}}_R$, alla media temporale $\overline{\mathbf{T}}$ del tensore relativo agli sforzi presenti nel moto effettivo.

Per costruzione, il tensore $\overline{\mathbf{T}}_R$ è simmetrico: la sua aggiunta al tensore simmetrico $\overline{\mathbf{T}}$ produce un tensore anch'esso simmetrico. Così il tensore degli sforzi complessivi soddisfa una *seconda equazione indefinita per il moto medio*

$$(\overline{\mathbf{T}} + \overline{\mathbf{T}}_R)_{ik} = (\overline{\mathbf{T}} + \overline{\mathbf{T}}_R)_{ki}$$

formalmente identica a quella del moto effettivo.

10.4. Equazioni termodinamiche del moto medio.

È utile applicare l'operazione di media nel tempo anche alla forma indefinita dalla prima equazione fondamentale della termodinamica

$$\overline{\rho} \frac{Du}{Dt} = -\overline{\mathbf{T}} : \mathbf{D} - \text{div } \mathbf{q}.$$

Per il termine contenente il vettore densità del flusso di potenza termica \mathbf{q} , si ha subito, effettuando le derivate spaziali connesse alla diver-

genza dopo aver integrato sul tempo,

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \operatorname{div} \mathbf{q} \, dt = \operatorname{div} \left(\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \mathbf{q} \, dt \right) = \operatorname{div} \bar{\mathbf{q}}.$$

Nel caso del doppio prodotto del tensore degli sforzi \mathbf{T} per il tensore delle velocità di deformazione \mathbf{D} conviene separare in partenza le componenti medie da quelle fluttuanti dei singoli fattori, scrivendo

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \mathbf{T} : \mathbf{D} \, dt &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \sum_{i,k}^3 T_{ik} D_{ik} \, dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \sum_{i,k}^3 (\bar{T}_{ik} + T'_{ik}) \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial(\bar{v}_k + v'_k)}{\partial x_i} + \frac{\partial(\bar{v}_i + v'_i)}{\partial x_k} \right\} dt. \end{aligned}$$

Ricordando poi che i valori medi $\bar{\mathbf{T}}$ e $\bar{\mathbf{v}}$ sono da trattare come costanti sull'intervallo T , si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \mathbf{T} : \mathbf{D} \, dt &= \sum_{i,k}^3 \left\{ \bar{T}_{ik} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} \right) + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{1}{T} \int_t^{t+T} T'_{ik} \, dt \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} \right) + \frac{1}{T} \int_t^{t+T} T_{ik} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v'_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \right) dt \right\} = \\ &= \sum_{i,k}^3 \{ \bar{T}_{ik} \bar{D}_{ik} + \bar{T}'_{ik} \bar{D}'_{ik} \} = \bar{\mathbf{T}} : \bar{\mathbf{D}} + \bar{\mathbf{T}}' : \bar{\mathbf{D}}'. \end{aligned}$$

Per trattare il primo membro, costituito dal prodotto della densità ρ con la derivata sostanziale dell'energia interna specifica u , si aggiunge la quantità nulla

$$u \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right\}.$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} u + u \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \\ &= \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \sum_k^3 \left\{ (\rho v_k) \frac{\partial u}{\partial x_k} + u \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k} \right\} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \sum_k^3 \frac{\partial(\rho v_k u)}{\partial x_k}, \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} dt = \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{u})}{\partial t},$$

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \sum_k \frac{\partial(\rho v_k u)}{\partial x_k} dt = \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \bar{v}_k \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \rho \bar{u} dt + \bar{v}_k \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \rho u' dt + \bar{u} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \rho v_k' dt + \right. \\ \left. + \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \rho v_k u' dt \right\} = \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\rho} \bar{v}_k \bar{u} + \overline{\rho v_k u'}).$$

Perciò

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \rho \frac{D u}{D t} dt = \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{u})}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\rho} \bar{v}_k \bar{u} + \overline{\rho v_k u'}) = \\ = \bar{u} \left\{ \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \text{div}(\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}) \right\} + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\rho v_k u'}) + \bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \\ + \bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad} \bar{u} = \bar{\rho} \frac{D \bar{u}}{D t} + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\rho v_k u'}) = \bar{\rho} \frac{D \bar{u}}{D t} + \text{div} \bar{\mathbf{q}}_R,$$

intendendo con $\bar{\mathbf{q}}_R$ il vettore di componenti

$$\bar{q}_{Rx} = \overline{\rho v_x' u'}, \quad \bar{q}_{Ry} = \overline{\rho v_y' u'}, \quad \bar{q}_{Rz} = \overline{\rho v_z' u'}.$$

Raccogliendo i vari risultati, la *prima equazione fondamentale per la termodinamica del moto medio* assume la forma

$$\bar{\rho} \frac{D \bar{u}}{D t} = - \bar{\mathbf{T}} : \bar{\mathbf{D}} - \bar{\mathbf{T}} : \bar{\mathbf{D}}' - \text{div} \bar{\mathbf{q}} - \bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{q}}_R.$$

Essa è formalmente analoga a quella valida per il moto effettivo, salvo la presenza del termine $-\bar{\mathbf{T}} : \bar{\mathbf{D}}'$, connesso a potenze meccaniche sviluppate dagli sforzi interni effettivi a causa delle fluttuazioni turbolente delle velocità, e salvo la presenza del termine $-\text{div} \bar{\mathbf{q}}_R$, che tien conto del trasporto di energia interna effettuato dalle medesime oscillazioni delle velocità. Il vettore $\bar{\mathbf{q}}_R$ può essere chiamato *vettore densità del flusso turbolento dell'energia interna*; il suo modulo e le sue componenti vanno misurate in watt al metro quadrato, Wm^{-2} .

La densità del flusso medio della potenza termica è descritta dal vettore $\bar{\mathbf{q}}$. Si ammette ancora che, nel moto effettivo, \mathbf{q} sia legato alla distribuzione della temperatura τ dall'equazione costitutiva di Fourier

$$\mathbf{q} = -k \text{grad} \tau.$$

Per il moto medio deve essere perciò

$$\bar{q} = -k \overline{\text{grad } \tau} .$$

10.5. Aspetti del moto turbolento medio.

Al crescere della distanza dal contorno della zona interessata dal moto, la turbolenza tende a diventare isotropa: le oscillazioni turbolente di velocità assumono via via assetto sempre più indipendente dalla particolare direzione presa in esame. È perciò

$$\overline{\rho v_x'^2} = \overline{\rho v_y'^2} = \overline{\rho v_z'^2} .$$

Inoltre, la mancanza di correlazione di sorta fra componenti di oscillazione lungo direzioni differenti rende nulle le medie temporali che contengono i relativi prodotti. Così gli sforzi tangenziali di Reynolds sono tutti nulli:

$$\overline{\rho v_x' v_y'} = \overline{\rho v_y' v_x'} = \overline{\rho v_x' v_z'} = 0 .$$

Complessivamente, il tensore degli sforzi di Reynolds diviene un tensore isotropo.

Nelle medesime zone, l'intensa agitazione dovuta alla turbolenza opera una continua cancellazione delle disuniformità del moto medio, ed il moto medio stesso appare come sostanzialmente solenoidale ed irrotazionale. Come tale, esso è privo anche degli sforzi tangenziali legati alla viscosità, e risulta perciò descrivibile in termini delle equazioni di Euler, purché si sommi la pressione di Reynolds a quella media. Sussistono quindi, per il moto medio, le conseguenze tratte nei capitoli 7 ed 8 dall'equazione dei fluidi ideali, benché la dissipazione di energia meccanica per turbolenza sia fatto importante. Resta valido, in particolare, il teorema di Bernoulli.

Avvicinandosi alle pareti solide, le velocità relative alle pareti stesse devono ridursi progressivamente fino ad annullarsi, data la condizione di aderenza. Ciò significa che debbono annullarsi, in valore relativo, tanto la velocità fluttuante, quanto la velocità media.

A seguito delle continue riduzioni di intensità delle fluttuazioni turbolente, gli sforzi di Reynolds locali divengono sempre più piccoli. Per contro, a causa della caduta della velocità media, gli sforzi legati alla viscosità assumono importanza relativa sempre maggiore, quanto più ci si avvicina alle pareti, senza che questo implichi l'esistenza in loco di un moto laminare. Inoltre, proprio a causa della condizione di aderenza, il moto medio non può più essere descritto accuratamente dalle equazioni dei fluidi ideali.

In prossimità di superfici di contorno di altro genere, le condizioni sono ancora diverse. Ad esempio, su un pelo libero sono le sole componenti normali della fluttuazione turbolenta della velocità e della velocità media che debbono essere nulle, mentre le componenti tangenziali non sono vincolate. Così, un pelo libero introduce anisotropia nel campo della turbolenza.

10.6. La distribuzione delle velocità medie.

Le equazioni per il moto medio, presentate nei paragrafi 10.3 e 10.4, non contengono solo funzioni dei valori medi delle variabili in gioco: esse contengono anche termini legati in modo esclusivo alle fluttuazioni turbolente. Il loro impiego non è perciò sufficiente ad inquadrare e studiare il moto medio, senza occuparsi contemporaneamente anche delle oscillazioni dovute alla turbolenza. Questo ostacolo può essere aggirato solo affiancando alle equazioni per il moto medio ulteriori relazioni, dedotte per via sperimentale diretta.

È risultato conveniente fissare senz'altro l'attenzione sui valori che la velocità media \bar{v} parallela ad una parete solida fissa assume all'aumentare della distanza y dalla parete stessa. Ciò perché le esperienze hanno permesso di accertare che adimensionalizzando in modo adeguato \bar{v} ed y , il legame fra tali grandezze assume sostanzialmente la stessa forma nella maggior parte dei casi di interesse tecnico.

Il parametro v_* adatto per adimensionalizzare \bar{v} è quello

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\bar{\rho}}},$$

detto *velocità di attrito*, costruito con la densità media $\bar{\rho}$ del fluido, e con lo sforzo tangenziale τ_0 presente contro la parete, sulla linea lungo la quale si valuta y .

Contemporaneamente, occorre rapportare la distanza y alla lunghezza

$$y_* = \frac{y}{v_*},$$

costruita ricorrendo alla viscosità cinematica ν del fluido.

In questo modo, il legame fra \bar{v} ed y si presenta nella forma

$$\frac{\bar{v}}{v_*} = f\left(\frac{y}{y_*}\right),$$

con f che, come si è detto, assume sostanzialmente la stessa struttura

anche nei casi più disparati. È precisamente

$$\frac{\bar{v}}{v_*} = 2,5 \ln \left(\frac{y}{y_*} \right) + 5,5.$$

Questa relazione è nota come *legge logaritmica* per la distribuzione delle velocità medie, ed è dovuta, nella sostanza, ad indicazioni di Prandtl risalenti al 1925. I valori numerici introdotti sono quelli ricavati nel 1932 da Nikuradse, con misure in tubi cilindrici circolari.

È chiaro che la legge logaritmica fornisce solo una descrizione approssimata del reale assetto della velocità media. Essa, ad esempio, non è utilizzabile nell'immediata prossimità della parete, perché, all'annullarsi di y , finirebbe per porgere velocità negative, crescenti in modulo oltre ogni limite. Inoltre, a seconda della porzione di corrente per la quale è richiesta una rappresentazione più accurata delle velocità, cambiano i valori numerici da introdurre nella legge logaritmica. Cambiamenti analoghi possono essere utili passando ad ambienti di moto con geometrie generali diverse. Entrambi i ritocchi sono però sempre di entità percentualmente modesta.

Nonostante le limitazioni ora esposte, la legge logaritmica costituisce un valido strumento per lo studio del moto turbolento, e conduce a valori sufficientemente approssimati delle portate volumetriche in transito e delle resistenze complessive al moto. Come tale, essa verrà sistematicamente utilizzata in seguito, indicando eventualmente, caso per caso, i valori numerici che i vari ricercatori hanno assegnato alle costanti per ottenere una più completa aderenza all'insieme dei dati sperimentali.

Sempre nel seguito, nell'esame di moti turbolenti, si dovranno considerare in prevalenza i soli valori medi delle grandezze in gioco, e si potrà perciò sottintendere il soprassedo che indica il riferimento al risultato dell'operazione di media temporale.

Riferimenti citati.

NIKURADSE, JOHANN, *Gesetzmässigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Röhren*, Forschungsarb. auf dem Geb. des Ingenieurwesens, Heft 356, 1932.

PRANDTL, LUDWIG, *Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz*, Z. angew. Math. Mech., 1925, pp. 136-139.

REYNOLDS, OSBORNE, *An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels*, Phil. Trans. Roy. Soc., 1883, pp. 935-982.

— *On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion*, Phil. Trans. Roy. Soc., 1895, pp. 123-164.

CAPITOLO UNDICESIMO

EQUAZIONI GLOBALI DELLA DINAMICA DEI FLUIDI

11.1. I teoremi meccanici globali.

L'equazione cardinale di continuità

$$\frac{D}{Dt} \int_V \varrho dV = 0,$$

e le equazioni cardinali del moto

$$\int_V \varrho \mathbf{f} dV + \int_A \boldsymbol{\tau} dA = \frac{D}{Dt} \int_V \varrho \mathbf{v} dV,$$
$$\int_V (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \varrho \mathbf{f} dV + \int_A (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \boldsymbol{\tau} dA = \frac{D}{Dt} \int_V (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \varrho \mathbf{v} dV,$$

introdotte nel capitolo 4, costituiscono l'ossatura fondamentale di tutti gli schemi per il moto dei fluidi. Schemi che differiscono fra loro per la particolare dipendenza ammessa della densità ϱ dalle condizioni locali di temperatura e pressione, oppure per lo specifico legame messo in conto per collegare gli sforzi interni $\boldsymbol{\tau}$ con l'entità delle deformazioni o delle velocità delle deformazioni subite dal fluido.

Quale che sia lo schema adottato, le stesse equazioni cardinali, applicate a volumi finiti di fluido, forniscono sempre informazioni sui valori globali delle varie grandezze in gioco. Questi ultimi dati, già interessanti di per sé, sono spesso proprio quelli di maggior importanza tecnica, e le tre equazioni cardinali, utilizzate per volumi finiti di fluido, svolgono pertanto un ruolo primario nello studio di molti fenomeni.

Questo tipo di impiego è tanto frequente da giustificare l'introduzione di terminologie particolari. Così, l'equazione cardinale di continuità è detta *equazione globale di continuità* se applicata ad un volume finito di fluido. Spesso l'equazione stessa è riscritta trasportando sotto il segno d'integrale l'operazione di derivazione sostanziale rispetto al tempo. Come si è visto nel paragrafo 4.2, se la densità ρ e la velocità \mathbf{v} sono di classe C^1 , si ha

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \, dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV - \int_A \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA$$

essendo A la superficie che racchiude V , ed \mathbf{n} il suo versore normale interno. All'equazione globale di continuità compete perciò anche la forma

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV = \int_A \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA$$

nella quale V è ora un volume fisso rispetto all'osservatore. Per sottolineare quest'ultimo fatto si dice che V è il *volume di controllo* adottato per l'applicazione dell'equazione globale di continuità.

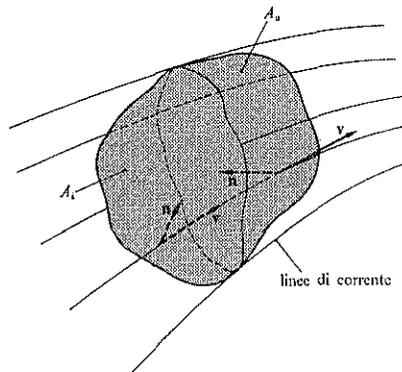


Fig. 11.1. - Volume di controllo considerato per descrivere l'impiego globale delle equazioni cardinali.

Spesso conviene suddividere A isolandone la porzione A_1 sulla quale $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ è positivo, e quella A_2 sulla quale $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ è invece negativo. Su A_1 , come indicato in figura 11.1, la velocità normale è diretta verso V , ed attraverso A_1 penetra in V la *portata in massa di ingresso*

$$Q_{M1} = \int_{A_1} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA ;$$

su A_2 , per contro, la velocità normale è diretta verso la zona esterna a V ,

così che la *portata in massa di uscita*

$$Q_{Mu} = - \int_{A_u} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA_u,$$

che abbandona V attraverso A_u , riesce positiva.

Ricordando ancora che la massa di fluido presente in V all'istante t vale

$$M = \int_V \rho dV,$$

si può presentare l'equazione di continuità nella forma più compatta

$$\frac{\partial M}{\partial t} = Q_{Mi} - Q_{Mu},$$

la quale mostra che il tasso di variazione nel tempo della massa presente entro il volume V eguaglia la *portata netta in massa* che affluisce in V , costituita dalla differenza fra la portata in massa che entra in V e quella che lo abbandona.

Nel caso in cui le densità non variano nel tempo, la derivata temporale della massa racchiusa nel volume di controllo è nulla, e l'equazione globale di continuità porge complessivamente

$$Q_{Mi} - Q_{Mu} = 0,$$

indicando che la portata netta in massa che attraversa la superficie del volume di controllo è nulla.

Se poi la densità del fluido è costante, conviene evidenziare le *portate volumetriche*

$$Q_i = \int_{A_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA_i, \quad Q_u = - \int_{A_u} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA_u$$

entranti ed uscenti dal volume di controllo, che riducono l'equazione globale di continuità alla forma

$$Q_i - Q_u = 0.$$

Questa nuova scrittura può essere letta dicendo che, nel moto permanente di fluido a densità costante, la portata volumetrica attraverso le varie superfici intersecate dalle medesime traiettorie rimane sempre la stessa.

Trasformazioni del tutto analoghe possono essere effettuate anche sulle due equazioni cardinali del moto, che, per essere ora applicate a volumi

finiti, conviene denominare *teorema della quantità di moto*, e, nell'ordine, *teorema del momento della quantità di moto*. Trasportando sotto il segno di integrale le derivate sostanziali con la formula vista nel paragrafo 4.2, sempre nell'ipotesi che ρ e \mathbf{v} siano di classe C^1 , si ha, rispettivamente

$$\int_V \rho \mathbf{f} dV + \int_A \boldsymbol{\tau} dA = \int_V \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} dV - \int_A \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA,$$

$$\int_V (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \rho \mathbf{f} dV + \int_A (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \boldsymbol{\tau} dA =$$

$$= \int_V (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} dV - \int_A (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA.$$

Anche nel caso di questi due teoremi conviene distinguere in A le parti A_i ed A_u sulle quali $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ è positivo oppure negativo. Attraverso A_i si immettono nel volume di controllo la *portata di quantità di moto*

$$\hat{\mathbf{Q}}_i = \int_{A_i} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA_i$$

e la *portata di momento della quantità di moto* rispetto ad \mathbf{x}_0

$$\hat{\mathbf{Q}}_{mi} = \int_{A_i} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA_i.$$

Contemporaneamente, attraverso A_u , abbandonano il volume di controllo le portate di quantità di moto e di momento della quantità di moto

$$\hat{\mathbf{Q}}_u = - \int_{A_u} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA_u,$$

$$\hat{\mathbf{Q}}_{mu} = - \int_{A_u} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA_u.$$

Poiché

$$\mathbf{G} = \int_V \rho \mathbf{f} dV, \quad \mathbf{H} = \int_A \boldsymbol{\tau} dA, \quad \mathbf{I} = \int_V \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} dV$$

costituiscono i risultanti delle forze di massa, degli sforzi di superficie e del tasso di variazione nel tempo della quantità di moto locale, il teorema della quantità di moto può essere scritto pure nella forma

$$\mathbf{G} + \mathbf{H} = \mathbf{I} + \hat{\mathbf{Q}}_u - \hat{\mathbf{Q}}_i$$

a sottolineare il fatto che il risultante delle forze esterne uguaglia la somma

delle *inerzie locali* \mathbf{I} con la portata netta, $\hat{\mathbf{Q}}_u - \hat{\mathbf{Q}}_i$, di quantità di moto uscente dal volume di controllo.

Parallelamente, poiché

$$\mathbf{G}_m = \int_V (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \rho \mathbf{f} dV,$$

$$\mathbf{\Pi}_m = \int_A (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \boldsymbol{\tau} dA,$$

$$\mathbf{I}_m = \int_V (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} dV,$$

rappresentano i momenti rispetto ad \mathbf{x}_0 delle forze esterne di massa e di superficie, ed il tasso di variazione nel tempo del momento della quantità di moto locale, il teorema del momento della quantità di moto si presenta come

$$\mathbf{G}_m + \mathbf{\Pi}_m = \mathbf{I}_m + \hat{\mathbf{Q}}_{mu} - \hat{\mathbf{Q}}_{mi}$$

e ciò pone in evidenza che il momento risultante delle forze esterne compensa la somma delle *inerzie girotoriche locali* \mathbf{I}_m con la portata complessiva, $\hat{\mathbf{Q}}_{mu} - \hat{\mathbf{Q}}_{mi}$, di momento di quantità di moto uscente dal volume di controllo.

È appena il caso di avvertire che \mathbf{I} ed \mathbf{I}_m sono nulli quando il moto è permanente e la densità è stazionaria.

11.2. Correnti e vene rettilinee.

Per il moto laminare di un fluido viscoso che presenti densità ρ , pressione p e velocità \mathbf{v} di classe C^1 , viscosità μ e μ' uniformi, e che sia connesso a forze specifiche di massa \mathbf{f} di classe C^0 , vale localmente l'equazione di Stokes

$$\rho \mathbf{f} - \text{grad } p + (\mu + \mu') \text{grad div } \mathbf{v} + \mu \nabla^2 \mathbf{v} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{a}.$$

Le componenti di \mathbf{a} normali a \mathbf{v} si annullano quando le linee di corrente sono rettilinee e parallele fra loro, e quando, inoltre, le velocità trasversali restano costantemente nulle. Se poi \mathbf{v} non muta lungo le singole linee di corrente, svanisce anche $\text{div } \mathbf{v}$. In tal caso, proiettando l'equazione di Stokes lungo due assi y e z normali alle linee di corrente, posto che $\text{div } \mathbf{v}$

non dipenda da y e z , si ha

$$\rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

$$\rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} = 0,$$

e si vede così che la distribuzione delle pressioni su ciascun piano perpendicolare alle linee di corrente è descritta dalle stesse equazioni della statica.

Il risultato è di impiego particolarmente frequente nel caso di densità sempre ed ovunque costante, e di forze specifiche di massa dovute al geopotenziale: allora, su ciascuna sezione trasversale al flusso, il carico piezometrico è uniforme.

Sempre nel campo del geopotenziale, la presenza di un moto a linee di corrente rettilinee e reciprocamente parallele e con velocità trasversali costantemente nulle può presentarsi quando il moto stesso si svolge in ambiente delimitato da pareti solide cilindriche. Si dice che la massa fluida in moto costituisce una *corrente rettilinea* sostenuta dalla parete solida. Va sottolineato che la corrente rettilinea può presentare anche una superficie di separazione da altro fluido, ed in particolare un pelo libero. Queste ultime superfici hanno traccia orizzontale su ciascuna sezione normale, per i motivi già esposti nel paragrafo 6.3.

Nel campo del geopotenziale, un moto con le caratteristiche richieste può avvenire anche in assenza di pareti solide ed in seno ad un fluido governato dalla medesima equazione di stato. Si dice, in questo caso, che la massa fluida in moto è una *vena rettilinea* in un fluido di pari densità. Non può aversi invece una vena del tipo in esame a contatto con un fluido governato da equazione di stato differente, ed in particolare non può aversi una vena liquida rettilinea libera nell'atmosfera. Ciò perché verrebbe a mancare la spinta di sostentamento capace di controbilanciare le forze del geopotenziale.

Anche quando la vena liquida libera può essere assimilata per breve tratto ad una vena rettilinea, la distribuzione interna della pressione è molto diversa da quella statica. Infatti, assunto orizzontale l'asse y , si ha ancora

$$\rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

e ciò mostra che la pressione si mantiene sempre uniforme su ciascuna linea orizzontale e trasversale. Ora però la sezione trasversale è delimitata dal bordo di contatto con l'atmosfera, che è soggetta a pressioni praticamente uniformi. Così la pressione interna assume lo stesso valore su

tutte le linee orizzontali. Nella vena libera sostanzialmente rettilinea la pressione interna è dunque uniforme, ed uguale alla pressione atmosferica.

A volte occorre tener conto della tensione superficiale σ necessariamente presente al contatto della vena liquida con l'aeriforme ambiente. Se la sezione trasversale della vena libera è circolare, di raggio r , la maggior pressione interna ammonta a

$$\Delta p = \frac{\sigma}{r}.$$

Nel caso particolare di una vena d'acqua di diametro $2r = 1$ cm, assunto $\sigma = 7,35 \cdot 10^{-2}$ N m⁻¹, si ha soltanto $\Delta p = 14,70$ N m⁻², contro $p_{\text{atm}} \simeq 10^5$ N m⁻².

Tutti i risultati esposti in questo paragrafo con riferimento al moto laminare di fluido viscoso valgono a maggior ragione quando il fluido si comporta come fluido ideale ed assume un moto descrivibile in termini dell'equazione di Euler anziché di quella di Stokes.

Quando il moto è turbolento invece che laminare, si parla ancora di correnti e vene rettilinee, con riferimento al moto medio. Le equazioni da impiegare sono ora quelle di Reynolds, al posto di quelle di Stokes, e le pressioni normali sulle superfici ortogonali alle linee di corrente risultano aumentate dalle rispettive tensioni di Reynolds, già considerate nel paragrafo 10.4, e calcolabili solo unitamente alla risoluzione completa del problema del moto. Tuttavia, l'analisi sperimentale ha permesso di stabilire che le tensioni normali di Reynolds sono di solito trascurabili di fronte agli altri sforzi di pressione. In questi casi i risultati già esposti con riferimento al moto laminare possono essere estesi anche al moto turbolento.

Per le correnti di fluido a densità uniforme e permanente, in moto con traiettorie rettilinee e parallele, è possibile costruire un carico effettivo uniforme su ciascuna sezione trasversale: basta aggiungere al carico piezometrico, già uniforme, l'altezza generatrice della velocità media U :

$$H = h + \frac{U^2}{2g}.$$

Naturalmente, questo carico effettivo non coincide con la media dei carichi effettivi presenti nella stessa sezione, proprio perché la velocità U differisce punto per punto dalla velocità realmente presente. Spesso, tuttavia, le differenze fra i due carichi non sono importanti. La media delle altezze generatrici delle velocità locali

$$\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \frac{v^2}{2g} d\Omega$$

supera sempre l'altezza generatrice della velocità media

$$\frac{U^2}{2g} = \frac{1}{2g} \left(\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} v \, d\Omega \right)^2,$$

ma il rapporto fra le due quantità varia da 1,01 ad 1,15 nella maggior parte delle circostanze tecnicamente interessanti, specie quando il mescolamento per turbolenza tende ad equalizzare le velocità nella sezione. Possono riscontrarsi però anche valori più alti. Nel caso della corrente laminare in condotto cilindrico circolare, la distribuzione delle velocità lungo i singoli diametri è parabolica, come si è visto nel paragrafo 9.6. Il rapporto fra la media delle altezze generatrici delle velocità locali e l'altezza generatrice della velocità media vale allora 4/3, ossia circa 1,33.

Il carico effettivo per l'intera sezione della corrente acquista un significato energetico importante quando il moto si svolge nel campo del geopotenziale, quando il moto stesso è permanente, e quando la densità è uniforme e stazionaria. Per metterlo in evidenza si può applicare il primo principio della termodinamica

$$\frac{D}{Dt} \int_V \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) dV = \int_V \rho \mathbf{f} \cdot d\mathbf{V} + \int_A \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dA + \int_A \omega \, dA$$

ad un tronco di corrente delimitato da due sezioni trasversali collocate in zone ove la corrente stessa presenta traiettorie rettilinee e parallele.

Eseguito la derivata sostanziale del termine contenente v^2 , si ha intanto

$$\frac{D}{Dt} \int_V \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) dV - \int_A \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA.$$

Ma la costanza nel tempo della densità ρ e del modulo v della velocità rende nullo il primo integrale a secondo membro. Per valutare il secondo conviene scindere A nella sezione A_1 di ingresso al tronco di corrente in esame, sulla quale è $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = v$, nella sezione A_u di uscita, sulla quale è invece $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = -v$, e nella superficie residua A_v , sulla quale, data la permanenza del moto, la velocità \mathbf{v} non può avere componente normale. Resta così

$$\frac{D}{Dt} \int_V \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) dV = - \int_{A_1} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) v \, dA_1 + \int_{A_u} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) v \, dA_u.$$

Si osserva poi che, posto $\mathbf{f} = \text{grad}\phi$, è

$$\int_V \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f} dV = \int_V \mathbf{v} \cdot \rho \text{grad}\phi dV = \int_V \text{div}(\mathbf{v}\rho\phi) dV = - \int_A (\mathbf{v}\rho\phi) \cdot \mathbf{n} dA,$$

perché la costanza della densità implica $\text{div}\mathbf{v} = 0$. Ne segue, con $\phi = -gz$, e con la decomposizione di A già utilizzata

$$\int_V \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f} dV = \int_{A_1} (\rho g z) v dA_1 - \int_{A_u} (\rho g z) v dA_u.$$

Accantonando per il momento la parte

$$\int_{A_p} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA_p$$

dell'integrale contenente gli sforzi di superficie $\boldsymbol{\tau}$, si nota ancora che

$$\int_{A_1 + A_u} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA = \int_{A_1} p v dA_1 - \int_{A_u} p v dA_u.$$

Nel riunire questi primi risultati parziali, si può tener conto del fatto che la portata volumetrica in transito attraverso le sezioni A_1 ed A_u è la stessa:

$$Q = \int_{A_1} v dA_1 = \int_{A_u} v dA_u,$$

del fatto che il carico piezometrico è uniforme su ciascuna di tali sezioni, e del fatto che, avendo ammesso di poter confondere la media delle altezze generatrici delle velocità locali con l'altezza generatrice della velocità media, deve essere contemporaneamente, con approssimazione poco inferiore

$$\int_{A_1} \left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) v dA_1 = \frac{U_1^2}{2g} \gamma Q, \quad \int_{A_u} \left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) v dA_u = \frac{U_u^2}{2g} \gamma Q.$$

Si ha perciò

$$\frac{D}{Dt} \int_V \left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) dV - \int_V \rho \mathbf{f} dV - \int_{A_1 + A_u} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA = \gamma Q (H_u - H_1).$$

In base al primo principio della termodinamica deve essere contemporaneamente

$$\gamma Q (H_u - H_1) = - \frac{D}{Dt} \int_V \rho u dV + \int_{A_p} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA_p + \int_A \omega dA.$$

Riprendendo ora dal paragrafo 4.10 le espressioni

$$\frac{Du}{Dt} = \tau \frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v},$$

$$\frac{De}{Dt} = \frac{h_t}{\tau} + \frac{h_a}{\tau},$$

e ricordando che, per definizione,

$$\int_A \omega \, dA = \int_V \rho h_t \, dV,$$

si giunge alla

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho u \, dV - \int_A \omega \, dA = \int_V \rho h_a \, dV$$

perché $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Risulta così

$$\gamma Q (H_u - H_t) = \int_{A_p} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dA_p - \int_V \rho h_a \, dV,$$

e l'incremento di carico effettivo, moltiplicato per la portata in peso, appare uguale alla potenza meccanica esercitata sulla corrente attraverso il suo contorno laterale, e depurata dalla potenza dissipata. In questo senso, si può attribuire al carico effettivo della corrente il significato di energia per unità di peso di fluido in transito.

11.3. Fenomeni di efflusso libero.

L'efflusso di un fluido da un recipiente attraverso una piccola apertura può essere studiato in base allo schema di fluido ideale, se le dissipazioni di energia si mantengono limitate rispetto alle energie cinetiche messe in atto. Per giungere a risultati coerenti con l'esperienza occorre ammettere che la vena effluente si stacchi dalla parete del recipiente in corrispondenza del bordo dell'apertura, come indicato in figura 11.2. Il getto uscente assume così carattere di vena libera in fluido fermo. L'esperienza mostra che a distanze dall'apertura confrontabili con le sue dimensioni trasversali la vena ha già raggiunto la sezione minima ed è assimilabile, per breve tratto, ad una vena rettilinea. Le sezioni nelle quali sono verificate queste circostanze vengono dette *sezioni contratte*.

In condizioni di moto permanente, in presenza delle sole forze specifiche di massa legate al geopotenziale, ossia delle forze specifiche $f'_z = -g$,

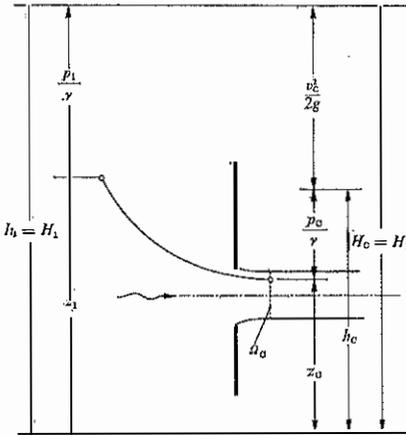


Fig. 11.2. - Efflusso da un'apertura circolare in parete piana.

con l'asse z verticale e diretto verso l'alto, e per un fluido con peso specifico γ sempre ed ovunque costante, la somma di Bernoulli

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}$$

assume valore uniforme su ciascuna traiettoria. Fissata l'attenzione sulla traiettoria indicata nella figura 11.2, che si svolge da un punto di quota z_1 e pressione p_1 , scelto in una zona ove il fluido ha altezze generatrici della velocità $v_1^2/2g$ trascurabili rispetto al carico piezometrico $h_1 = z_1 + p_1/\gamma$, e che termina in un punto di quota z_c e pressione p_0 scelto su una sezione contratta, si ha subito

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = z_c + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{v_0^2}{2g},$$

il che porta all'espressione del modulo v_0 della velocità nel punto terminale

$$v_0 = \sqrt{2g(h_1 - h_0)}.$$

A questo valore si dà il nome di *velocità torricelliana*, per ricordare che Torricelli conseguì tale risultato nel 1644, ben prima dei lavori di Bernoulli. La velocità raggiunta è quella che assumerebbe un grave inizialmente fermo cadendo per un dislivello $h_1 - h_0$ sotto la sola azione delle forze descritte dal geopotenziale.

Si osserva che il punto iniziale della traiettoria esaminata è stato scelto in una zona in cui il fluido è sostanzialmente fermo: nella stessa zona il carico piezometrico h_1 è perciò essenzialmente uniforme. Il punto ter-

minale della stessa traiettoria è stato scelto invece in una sezione contratta, ove la vena libera è praticamente rettilinea. Qui il carico piezometrico h_0 è uniforme se la vena è circondata da fluido di uguale densità: in questo caso la velocità di efflusso è la stessa su tutta la sezione contratta. Se invece la vena è circondata da fluido di peso specifico molto inferiore, è la pressione p_c ad essere uniforme sul piano della sezione contratta: la velocità terminale dipende allora dalla quota del punto finale considerato, ed è presente perciò una modesta vorticità.

Il fatto che le dissipazioni di energia, benché piccole, non siano nulle fa sì che le velocità realmente misurate risultino sempre minori del valore torricelliano. Altrettanto avviene per la velocità media U_0 nella sezione contratta. È uso porre

$$U_0 = C_v \sqrt{2g(h_1 - h_{G0})},$$

evidenziando il carico piezometrico h_{G0} nel baricentro della sezione contratta, ed introducendo il *coefficiente riduttore della velocità*, C_v .

Insieme a questo coefficiente, si considera anche il *coefficiente di contrazione* C_c , inteso come rapporto fra l'area Ω_0 della sezione contratta e l'area Ω dell'apertura.

La portata effluente, data dal prodotto dell'area della sezione contratta per la velocità media sulla stessa sezione, vale pertanto

$$Q = \Omega_0 U_0 = C_c C_v \Omega \sqrt{2g(h_1 - h_{G0})} = C_q \Omega \sqrt{2g(h_1 - h_{G0})},$$

ove $C_q = C_c C_v$ è detto *coefficiente riduttore della portata*.

Per aperture circolari in parete piana, l'esperienza fornisce i valori medi

$$C_v = 0,98, \quad C_c = 0,64, \quad C_q = 0,62.$$

Dati e definizioni esposti per l'efflusso da aperture praticate su pareti piane possono essere estesi a forme diverse di aperture, ad esempio a quelle indicate in figura 11.3.

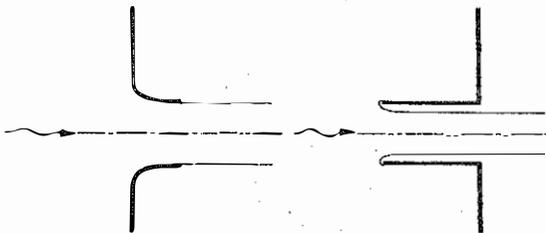


Fig. 11.3. - Efflusso da un serbatoio accompagnato da un boccaglio circolare, ed efflusso attraverso un tubo addizionale interno a sezione circolare.

Se le pareti, in corrispondenza dell'apertura, sono sagomate ad invito sufficientemente dolce, si dice che l'apertura stessa costituisce un bocaglio. Per il *bocaglio a sezione circolare*, l'esperienza dà

$$C_v = 0,97, \quad C_o = 1,00, \quad C_q = 0,97.$$

La riduzione di C_v evidenzia le maggiori perdite dovute al più lungo contatto con le pareti solide della parte di vena già animata da velocità sensibili. Il valore di C_o indica che non esiste più contrazione della vena.

Se, invece, l'apertura è all'inizio di una parete molto rientrante si dice che l'apertura è formata a *tubo addizionale interno*. Si ha allora

$$C_v = 0,98, \quad C_o = 0,52, \quad C_q = 0,51.$$

Questi ultimi valori sono largamente indipendenti dalla forma della sezione trasversale dell'apertura. Inoltre, i due coefficienti C_v e C_o sono direttamente collegati fra loro. Entrambi i fatti discendono subito dal teorema della quantità di moto

$$\mathbf{G} + \mathbf{\Pi} = \hat{\mathbf{Q}}_u - \hat{\mathbf{Q}}_i,$$

presentato nel paragrafo 11.1.

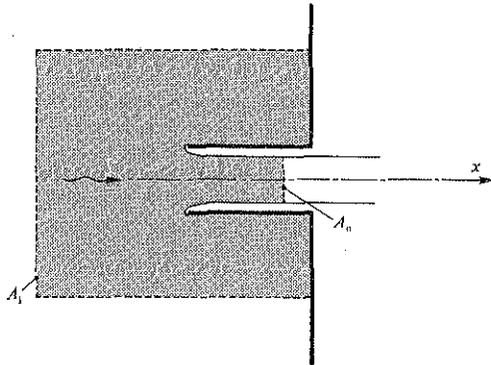


Fig. 11.4. - Volume di controllo per lo studio dell'efflusso attraverso un tubo addizionale interno.

Se si sceglie il volume di controllo come indicato in figura 11.4, e se si considerano le componenti nella direzione orizzontale x di uscita del getto, si osserva che G_x è nullo e che Π_x ammonta a

$$\Omega(p_{a1} - p_{ac}) = \Omega \rho g(h_1 - h_{ac})$$

essendo Ω l'area dell'apertura, ρ la densità, uniforme, del fluido, p_{a1} e p_{ac}

le pressioni esistenti all'altezza del baricentro G di Ω internamente al recipiente a grande distanza dall'apertura e, rispettivamente, nella sezione contratta, mentre h_1 ed h_{g_0} sono i carichi piezometrici corrispondenti. Va da sé che considerando $\rho g h_1$ al posto di p_{G1} non è più necessario riferirsi alla quota del baricentro G , dato che la stima è fatta in una zona nella quale il fluido è sostanzialmente fermo, ed il carico piezometrico uniforme. Altrettanto può dirsi rispetto al valore $\rho g h_{g_0}$, se la vena effluente scorre in ambiente occupato da fluido fermo e di pari densità; se invece il fluido ambiente presenta densità radicalmente minore, è la pressione a valle dell'apertura che riesce uniforme, ed il riferimento alla quota baricentrica nella stima del carico piezometrico può avere importanza.

La portata di quantità di moto, \hat{Q}_1 , entrante nel volume di controllo è trascurabile, perché la sezione di ingresso del fluido è fissata in una zona ove la velocità del fluido è evanescente. La portata di quantità di moto in uscita, \hat{Q}_u , è diretta invece nel verso delle x crescenti, ed ha modulo

$$\hat{Q}_u = \rho \Omega_0 U_0^2,$$

essendo Ω_0 l'area della sezione contratta, ed assumendo che la velocità media U_0 nella sezione contratta si confonda con le velocità ivi realmente presenti.

Uguagliando il risultante delle forze esterne alla differenza fra le portate di quantità di moto uscente ed entrante, si ottiene

$$\Omega \rho g (h_1 - h_{g_0}) = \rho \Omega_0 U_0^2,$$

ossia, tenendo conto dell'espressione torricelliana per la velocità di efflusso, corretta con il coefficiente C_v ,

$$U_0 = C_v \sqrt{2g(h_1 - h_{g_0})},$$

anche

$$\Omega = 2\Omega_0 C_v^2.$$

In base alla definizione del coefficiente C_0 , se ne conclude che deve essere

$$2C_0 C_v^2 = 1.$$

Il ragionamento ora svolto non è utilizzabile per le altre geometrie dell'apertura, considerate in precedenza, in quanto le alte velocità del fluido presso le pareti ed i bordi dell'apertura determinano riduzioni delle pressioni contro le pareti stesse rispetto al livello idrostatico, e la componente nella direzione del getto uscente del risultante di tali depressioni non può essere valutata in partenza. È certo tuttavia che questa compo-

nente è diretta nel verso delle velocità nella vena, il che è in accordo con i valori maggiori di $1/2$ osservati per il coefficiente di contrazione. Con geometrie ancora differenti, ad esempio con spina assiale a monte quale organo di parzializzazione dell'apertura, il verso del risultante in questione può risultare opposto, ed il coefficiente di contrazione può essere allora minore di $1/2$.

Il moto considerato in questo paragrafo è, in generale, moto laminare: il breve contatto della corrente con le pareti solide è insufficiente per innescare e diffondere la turbolenza.

11.4. Imbocco di condotte.

I vari fenomeni di efflusso attraverso aperture praticate nella parete di un recipiente si realizzano anche quando la parete stessa, anziché terminare bruscamente sull'apertura, prosegue verso valle per costituire successivamente una condotta. Il getto effluente, dopo aver raggiunto la sezione contratta, finisce ora con l'interessare l'intera sezione della condotta.

Le geometrie più comunemente impiegate in campo tecnico sono quelle riportate nella figura 11.5, insieme ad un'indicazione qualitativa della forma assunta dal getto quando i numeri di Reynolds sono abbastanza elevati.

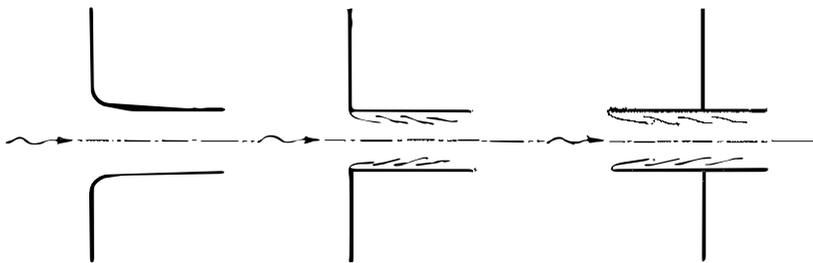


Fig. 11.5. - Forme correnti di collegamento di condotte a sezione circolare con serbatoi di testa: boccheggio, innesto diretto, tubo aggiuntivo interno.

Per lo studio della vena possono essere utilizzate le relazioni del capitolo che precede, evidenziando nelle formule il carico piezometrico uniforme h_c presente nella sezione contratta. È però uso conglobare nello studio dell'efflusso anche l'eventuale brusco allargamento della vena, che comporta l'urto del fluido animato da velocità sostenute nel transito attraverso la sezione contratta con il fluido in moto comparativamente lento

che occupa tutta la sezione della condotta. L'urto stesso è associato ad intenso rimescolamento, a forte turbolenza, ed a vistosi fatti dissipativi.

Amnesso che il fluido presenti densità sempre ed ovunque costante, e che il moto sia permanente, la potenza dissipata nell'imboccare la condotta terminale, rapportata all'unità di peso in transito, è uguale alla caduta di carico effettivo $-\Delta H$, come si è visto nel paragrafo 11.2. Di norma la caduta di carico effettivo viene espressa come frazione dell'energia cinetica residua per unità di peso. Questa, trascurando le differenze fra le velocità locali nella condotta già totalmente occupata dalla corrente e la velocità media U_2 nella stessa zona, vale $U_2^2/2g$.

Il coefficiente di perdita concentrata ξ , che porge

$$-\Delta H = \xi \frac{U_2^2}{2g},$$

dipende dalla particolare geometria dell'imboccatura.

È sempre possibile esprimere la portata Q in transito con una relazione del tipo

$$Q = C_{Q2} \Omega \sqrt{2g(h_1 - h_2)},$$

in cui h_2 sta per il carico piezometrico nelle sezioni situate ove la corrente ha già interessato l'intera sezione della condotta, e C_{Q2} svolge il ruolo di coefficiente riduttore della portata. Essendo, per definizione,

$$-\Delta H = h_1 - h_2 - \frac{U_2^2}{2g} = \xi \frac{U_2^2}{2g},$$

il coefficiente di portata C_{Q2} ed il coefficiente di perdita ξ sono collegati fra loro dalla relazione

$$\frac{1}{C_{Q2}^2} - 1 = \xi.$$

Per il raccordo graduale fra le pareti del serbatoio e quelle della condotta, e cioè nel caso di *boccaglio di invito a sezione circolare*, si ha

$$\xi = 0,06, \quad C_{Q2} = 0,970,$$

per il *collegamento diretto* della condotta, di sezione circolare, al serbatoio, si trova

$$\xi = 0,50, \quad C_{Q2} = 0,815,$$

e nel caso di *condotta innestata* entro il serbatoio di partenza risulta

$$\xi = 1,00, \quad C_{Q2} = 0,707.$$

Quest'ultimo valore, a differenza dei due precedenti che hanno origine sperimentale diretta, può essere dedotto dal teorema della quantità di moto, seguendo il medesimo ragionamento svolto nel paragrafo 11.3, a proposito del getto libero che imbocca un'apertura rientrante, e che ha portato al legame

$$2C_o C_v^2 = 1$$

fra il coefficiente di contrazione C_o ed il coefficiente riduttore della velocità C_v relativi alla sezione contratta della vena. Poiché ora ci si riferisce ad una sezione già completamente occupata dalla corrente, si deve porre $C_{o2} = 1$. Ne segue appunto

$$C_{q2} = C_{o2} C_{v2} = C_{o2} \sqrt{\frac{1}{2C_{o2}}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,707.$$

Data la permanenza del moto e la costanza della densità, la portata Q che passa attraverso la sezione contratta è uguale a quella che attraversa le sezioni di condotta interamente occupate dalla corrente, poste poco più a valle. Deve essere cioè

$$Q = C_o \Omega \sqrt{2g(h_1 - h_o)} = C_{q2} \Omega \sqrt{2g(h_1 - h_2)},$$

e quindi

$$\frac{h_1 - h_o}{h_1 - h_2} = \frac{C_{q2}}{C_o}.$$

È facile controllare, con i valori numerici riportati in questo paragrafo ed in quello precedente, che il coefficiente riduttore della portata C_{q2} riferito alla sezione piena della condotta non è mai inferiore al corrispondente coefficiente C_o relativo alla sezione contratta. Ne segue che è pure

$$h_o < h_2.$$

Questo aumento del carico piezometrico nel verso del moto è caratteristica generale dei bruschi allargamenti di sezione delle correnti, come si vedrà meglio nel paragrafo 11.5.

11.5. Brusco allargamento di sezione della corrente.

Si considera qui una corrente delimitata da pareti solide cilindriche che passano bruscamente da una sezione di area Ω_1 ad una sezione di area maggiore Ω_2 , come schematizzato in figura 11.6. Si sceglie quale volume di controllo quello lungo L , ombreggiato in figura, che è compreso nella

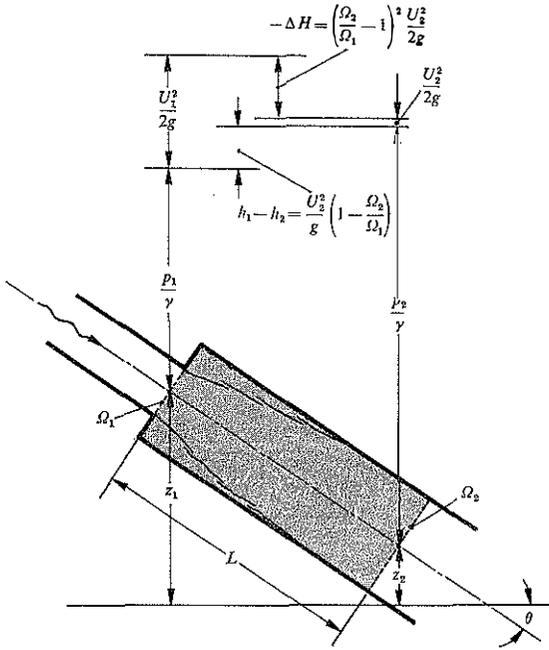


Fig. 11.6. - Volume di controllo per l'esame del brusco allargamento di sezione in una condotta.

condotta di dimensioni maggiori, e che è delimitato longitudinalmente dalla sezione nella quale avviene il salto di area trasversale e da quella in cui la corrente occupa di nuovo tutta la sezione disponibile.

L'osservazione sperimentale mostra che la corrente in transito lungo la condotta di sezione minore si distacca dalle pareti in corrispondenza del brusco allargamento, per espandersi poi progressivamente.

Posto che la densità ρ rimanga sempre ed ovunque costante, si può ammettere che la pressione sia distribuita in modo idrostatico sulla sezione terminale della condotta di monte, di area Ω_1 , perché ivi le traiettorie medie sono rettilinee e parallele fra loro. Anche sulla sezione anulare di raccordo fra la condotta di monte e quella di valle la pressione deve essere distribuita con legge idrostatica, dato che il fluido è mediamente fermo contro di essa. Di più, per continuità, le due distribuzioni idrostatiche devono portare alle stesse pressioni sul bordo comune delle due aree. Pure nella sezione terminale del volume di controllo, di area Ω_2 , ove le traiettorie medie si presentano di nuovo rettilinee e reciprocamente

parallele, si può ritenere che la pressione vari con legge idrostatica. Infine, si pone che sulla parete laterale del volume di controllo gli sforzi tangenziali siano trascurabili.

In accordo con tali considerazioni, le forze esterne agenti sul fluido racchiuso nel volume di controllo hanno componente

$$\rho g \Omega_2 L \sin \theta + \Omega_2 (p_1 - p_2)$$

nella direzione e nel verso del moto. Si intende che le forze specifiche di massa sono quelle del geopotenziale $\phi = -gz$, che θ indica l'affondamento angolare dell'asse della condotta rispetto all'orizzontale, e che p_1 e p_2 sono, nell'ordine, le pressioni nei baricentri delle sezioni estreme di monte e di valle. Dette z_1 e z_2 le quote di tali baricentri, si ha

$$L \sin \theta = z_1 - z_2,$$

e così la componente in questione può essere espressa anche nella forma

$$\rho g \Omega_2 (h_1 - h_2)$$

ricorrendo ai valori h_1 ed h_2 del carico piezometrico nelle sezioni di monte e di valle.

Nello stato di moto permanente, la portata netta di quantità di moto uscente dal volume di controllo ha componente secondo il deflusso

$$\rho Q (U_2 - U_1),$$

essendo, al solito, Q la portata volumetrica in transito, U_2 ed U_1 , le velocità medie nelle sezioni di area Ω_2 ed Ω_1 , rispettivamente.

In accordo con il teorema della quantità di moto visto nel paragrafo 11.1, deve risultare

$$g \Omega_2 (h_1 - h_2) = Q (U_2 - U_1).$$

Dato che il moto è permanente, e la densità sempre ed ovunque la stessa, deve essere

$$Q = \Omega_1 U_1 = \Omega_2 U_2,$$

e la relazione ora ottenuta può essere trascritta nella forma

$$h_1 - h_2 = \frac{U_2^2}{g} \left(1 - \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right).$$

Si nota, in particolare, che il carico piezometrico aumenta nel verso del moto, perché l'area Ω_2 è maggiore di quella Ω_1 .

Parallelamente all'incremento del carico piezometrico ha luogo una caduta di carico effettivo

$$H_1 - H_2 = \left(h_1 + \frac{U_1^2}{2g} \right) - \left(h_2 + \frac{U_2^2}{2g} \right)$$

che vale

$$\begin{aligned} H_1 - H_2 &= \frac{U_2^2}{g} \left(1 - \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right) + \frac{U_1^2}{2g} - \frac{U_2^2}{2g} = \\ &= \frac{U_2^2}{g} \left(1 - \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right) - \frac{U_2^2}{2g} \left(1 - \frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2} \right) = \frac{U_2^2}{2g} \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2. \end{aligned}$$

Come ricordato nel paragrafo 11.4, le perdite di carico effettivo che si presentano su sviluppi di condotta confrontabili con le dimensioni trasversali, ossia, in modo più conciso, le *perdite concentrate di carico effettivo* vengono espresse abitualmente in termini dell'altezza generatrice della velocità media residua, ponendo

$$-\Delta H = H_1 - H_2 = \xi \frac{U_2^2}{2g}.$$

Nel caso ora esaminato il *coefficiente di perdita* ξ ha il valore

$$\xi = \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2.$$

L'espressione per la perdita di carico effettivo non è più utilizzabile quando la sezione Ω_2 è molto maggiore di quella Ω_1 , come avviene per esempio allo sbocco di una condotta in un serbatoio: l'altezza generatrice della velocità media residua è allora evanescente, mentre ξ risulta enormemente più grande dell'unità. In questi casi conviene trasformare l'espressione della caduta del carico effettivo mettendo in evidenza l'altezza generatrice della velocità media iniziale. È

$$-\Delta H = H_1 - H_2 = \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2 \frac{U_2^2}{2g} = \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2 \frac{U_1^2}{2g} \frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2} = \left(1 - \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \right)^2 \frac{U_1^2}{2g}$$

che si riduce sostanzialmente a

$$-\Delta H = \frac{U_1^2}{2g}$$

quando Ω_2 è molto maggiore di Ω_1 . In questo caso limite, il carico piezometrico resta invariato.

Quanto osservato a proposito del brusco allargamento di sezione non può essere trasferito al caso del brusco restringimento di sezione. In un condotto sagomato come in figura 11.7, la corrente in arrivo si contrae nell'imboccare la condotta più stretta, per espandersi successivamente fino ad occupare tutta la sezione di valle. Si ripresentano qui fenomeni si-

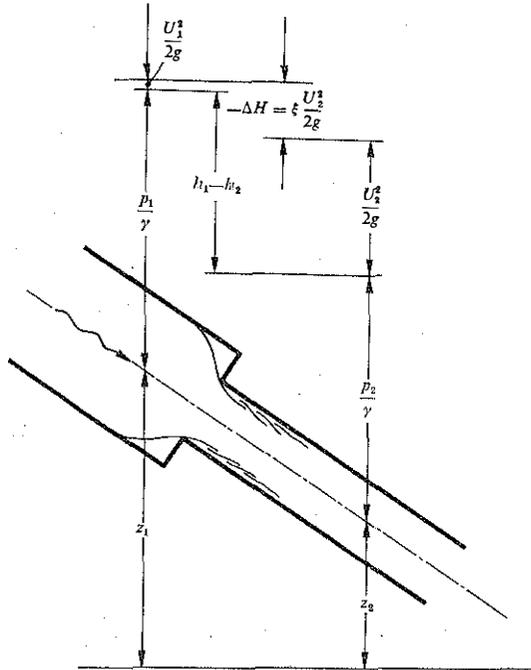


Fig. 11.7. - Schema di brusco restringimento di sezione in una condotta.

mili a quelli già descritti nel paragrafo 11.4 con riferimento all'imbocco delle condotte. Ora però le dimensioni trasversali della condotta di monte sono confrontabili con le dimensioni analoghe della condotta di valle, e ciò non consente di stimare l'area della sezione contratta servendosi dei dati forniti allora. Di conseguenza, la caduta di carico effettivo che ha luogo nel passaggio dalla sezione contratta a quella finale di valle non può essere calcolata con la formula relativa al brusco allargamento di sezione. È uso ricorrere sempre alla definizione del coefficiente di perdita ξ

$$-\Delta H = H_1 - H_2 = \xi \frac{U_2^2}{2g}$$

e dedurre i valori di ξ dall'esperienza diretta. Si è ottenuto

Ω_2/Ω_1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
ξ	0,48	0,44	0,41	0,35	0,30	0,24	0,18	0,13	0,06

Poiché l'altezza generatrice della velocità media di monte è ora inferiore a quella della velocità media di valle, la perdita di carico effettivo porta ad una caduta ancora maggiore del carico piezometrico.

11.6. Iniettore.

Lo studio dell'effetto dell'immissione di un getto entro una corrente ad esso parallela è strettamente connesso allo studio del brusco allargamento di sezione, già riportato nel paragrafo che precede.

Come indicato in figura 11.8, il getto, di sezione Ω' e velocità media U' , è abbandonato in una corrente di sezione Ω'' e di velocità media U'' , ma di uguale densità ρ . Dopo breve tratto in ambiente cilindrico di sezione $\Omega_2 = \Omega' + \Omega''$, le due correnti risultano mescolate tanto da formare un'unica corrente di velocità media U_2 .

Con riferimento al volume di controllo ombreggiato in figura, la componente nella direzione generale del moto delle forze esterne mantiene l'espressione

$$\rho g \Omega_2 (h_1 - h_2)$$

valida per il brusco allargamento di sezione. Anche qui si intendono messe in conto solo le forze specifiche di massa dovute al geopotenziale $\phi = -gz$; inoltre h_1 ed h_2 continuano ad indicare i carichi piezometrici nelle sezioni di monte e di valle del volume di controllo.

Sempre in moto permanente, la portata netta della quantità di moto uscente dal volume di controllo risulta invece diversa da quella relativa al brusco allargamento di sezione: è ora

$$\rho U_2^2 \Omega_2 - \rho U'^2 \Omega' - \rho U''^2 \Omega''.$$

Il teorema della quantità di moto fornisce così il legame

$$g \Omega_2 (h_1 - h_2) = U_2^2 \Omega_2 - U'^2 \Omega' - U''^2 \Omega'',$$

ossia quello

$$h_1 - h_2 = \frac{1}{g} \left(U_2^2 - U'^2 \frac{\Omega'}{\Omega_2} - U''^2 \frac{\Omega''}{\Omega_2} \right).$$

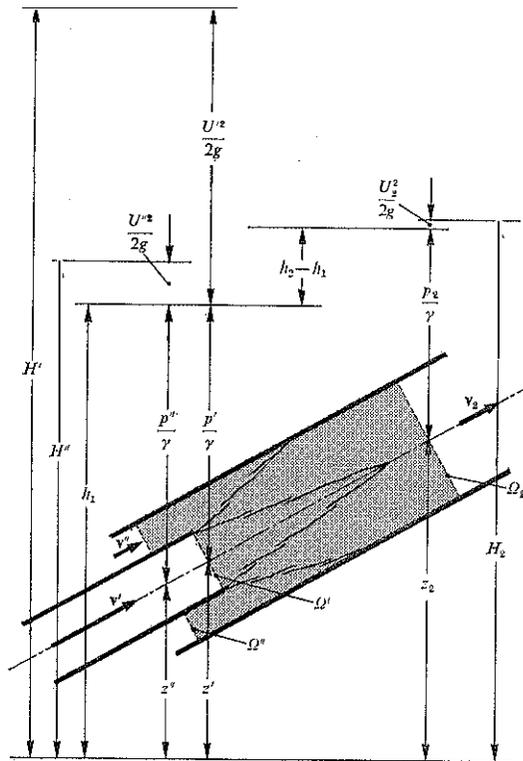


Fig. 11.8. - Iniettore: la corrente motrice di velocità v' trascina la corrente di velocità v'' , aumentando il carico piezometrico h ed il carico effettivo H .

Unendo la relazione

$$\Omega_2 = \Omega' + \Omega''$$

all'equazione di continuità

$$U_2 \Omega_2 = U' \Omega' + U'' \Omega'',$$

si può esprimere la variazione di carico piezometrico in forma più compatta. È, ad esempio,

$$\begin{aligned} h_1 - h_2 &= \frac{1}{g} \left\{ U_2^2 - U'^2 \frac{\Omega'}{\Omega_2} - U''^2 \frac{\Omega''}{\Omega_2} \right\} = \frac{1}{g} \left\{ U_2^2 - \left(\frac{U_2 \Omega_2 - U'' \Omega''}{\Omega'} \right)^2 \frac{\Omega'}{\Omega_2} - U''^2 \frac{\Omega''}{\Omega_2} \right\} = \\ &= \frac{1}{g \Omega'} \left\{ -U_2^2 \Omega'' - U''^2 \Omega'' + 2U_2 U'' \Omega'' \right\}, \end{aligned}$$

e quindi

$$h_1 - h_2 = -\frac{1}{g} \frac{\Omega''}{\Omega'} \{U_2 - U''\}^2.$$

In modo del tutto analogo, eliminando U'' anziché U' , si ha

$$h_1 - h_2 = -\frac{1}{g} \frac{\Omega'}{\Omega''} \{U_2 - U'\}^2.$$

Eliminando invece U_2 si ottiene

$$h_1 - h_2 = -\frac{1}{g} \frac{\Omega' \Omega''}{\Omega_2^2} \{U' - U''\}^2.$$

Ciascuna di queste scritture mette in evidenza il fatto che il carico piezometrico aumenta nel corso del mescolamento delle due correnti in arrivo. Tale aumento rende il dispositivo capace di trasferire energia dall'una all'altra corrente. Il dispositivo stesso, che costituisce allora un *iniettore*, viene alimentato da una corrente motrice, di portata $U' \Omega'$ e di carico effettivo iniziale

$$H' = h_1 + \frac{U'^2}{2g},$$

che trascina in moto la corrente di portata $U'' \Omega''$ e di carico effettivo di partenza più basso

$$H'' = h_1 + \frac{U''^2}{2g}.$$

La corrente motrice subisce perciò la caduta di carico effettivo

$$\begin{aligned} H' - H_2 &= h_1 - h_2 + \frac{U'^2}{2g} - \frac{U_2^2}{2g} = \\ &= -\frac{1}{g} \frac{\Omega' \Omega''}{\Omega_2^2} \{U' - U''\}^2 + \frac{U'^2 (\Omega' + \Omega'')^2}{2g \Omega_2^2} - \frac{(U' \Omega' + U'' \Omega'')^2}{2g \Omega_2^2} = \\ &= \frac{\Omega''}{2g \Omega_2} (U' - U'') \left\{ U' \frac{\Omega'}{\Omega_2} + U'' \left(1 + \frac{\Omega'}{\Omega_2} \right) \right\}, \end{aligned}$$

mentre la corrente passiva aumenta il proprio carico effettivo di

$$H_2 - H'' = \frac{\Omega'}{2g \Omega_2} (U' - U'') \left\{ U'' \frac{\Omega'}{\Omega_2} + U' \left(1 + \frac{\Omega''}{\Omega_2} \right) \right\}.$$

11.7. Urti di getti.

Urti di vene contro ostacoli vengono utilizzati spesso nella tecnica. In casi di questo genere i fenomeni dissipativi giocano di norma un ruolo del tutto secondario, ed il moto può essere descritto come moto di fluido ideale. Ugualmente irrilevante è l'azione delle forze specifiche di massa, dalle quali si può prescindere. Inoltre, si può assumere che la densità ρ del fluido sia costante. Qui, si esamineranno solo moti permanenti.

In accordo con le varie ipotesi elencate, la pressione ambiente è uniforme, la vena in arrivo è rettilinea, il suo contorno libero, non a contatto con la parete solida investita, è costituito da traiettorie, e lungo ciascuna di queste traiettorie il modulo della velocità è uniforme. Quest'ultimo fatto è conseguenza immediata del teorema di Bernoulli.

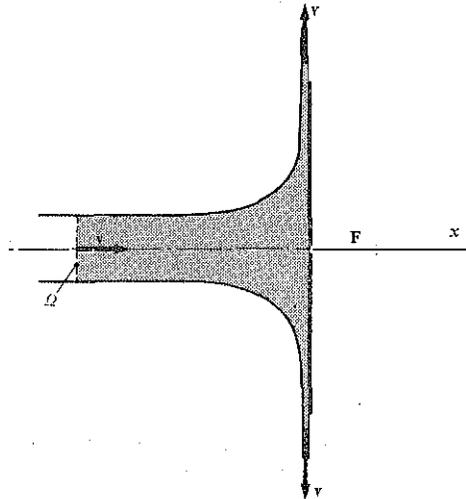


Fig. 11.9. - Urto frontale di un getto contro una parete piana tanto ampia da deviare la velocità di un angolo retto. È indicato il volume di controllo impiegato nello studio del moto.

Come primo esempio si considera il caso della vena a sezione circolare, con velocità uniformemente distribuite all'inizio e perciò coincidenti in modulo con la velocità media U , che investe normalmente una parete piana molto ampia rispetto alla sezione Ω della vena incidente. L'aspetto generale della corrente è quello indicato in figura 11.9. In particolare, il fluido abbandona la lastra con velocità ad essa tangenti. Il teorema della quantità di moto, applicato al volume di controllo tratteggiato in figura e

proiettato nella direzione e nel verso x della velocità d'arrivo, porge subito

$$F = \rho U^2 \Omega = \rho QU$$

per il modulo F della spinta complessiva esercitata dalla vena sulla parete. Infatti, poiché la pressione ambiente è uniforme, il risultante degli sforzi esterni di pressione si riduce al risultante degli sforzi trasmessi dalla lastra alla corrente, che vale $-F$. Nello stesso tempo la portata di quantità di moto uscente dal volume di controllo ha componente nulla in direzione x , e la componente nella direzione e nel verso x della portata di quantità di moto entrante nello stesso volume vale ρQU . Per ragioni di simmetria, il risultante F passa per l'asse del getto incidente.

Un'estensione immediata del risultato permette l'esame dell'urto contro una parete di ampiezza confrontabile con la sezione iniziale della vena. Dopo l'urto, come indicato in figura 11.10, si forma una vena conica

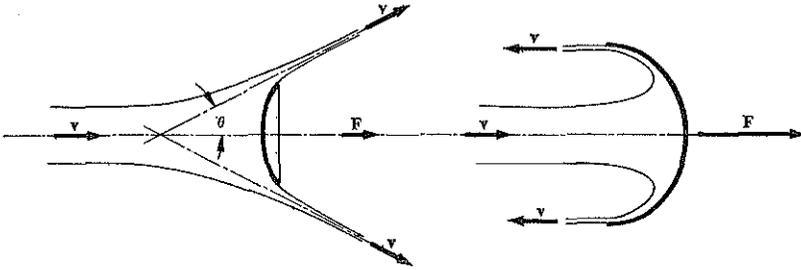


Fig. 11.10. - Urto centrale di un getto a sezione circolare contro una parete di ampiezza così limitata da consentire solo una deviazione ridotta del getto incidente, ed urto contro una parete sagomata in modo da riportare il getto sulla direzione di arrivo.

con angolo al vertice θ , dipendente dall'estensione della parete e dalla sua forma generale. Si ammette inoltre che il fenomeno riesca simmetrico rispetto all'asse della vena in arrivo e che le traiettorie d'uscita finiscano con il risultare sensibilmente parallele fra loro su ciascun semipiano meridiano. Quest'ultima ipotesi assicura che la pressione è uniforme anche all'interno del getto uscente, e che il modulo delle velocità di uscita resta U . Così, il teorema della quantità di moto porta ora al valore

$$F = \rho U^2 \Omega (1 - \cos \theta) = \rho QU (1 - \cos \theta).$$

In particolare, se la conformazione della parete è tale da determinare un getto d'uscita parallelo a quello incidente, e di direzione opposta, come

schematizzato nella stessa figura 11.10, si ha $\theta = \pi$, e quindi

$$F = 2\rho U^2 \Omega = 2\rho QU.$$

In ogni caso, la retta d'azione della spinta esercitata coincide con l'asse del getto, per ragioni di simmetria.

Le condizioni di simmetria finora ammesse hanno un ruolo importante nella determinazione completa della spinta che il getto esercita sull'ostacolo. Per illustrare meglio il fatto basta prendere in esame il caso della vena a sezione circolare che investe una lastra piana, molto ampia rispetto al diametro della vena, ma inclinata in modo che la sua normale, orientata dall'interno della vena verso la lastra stessa, formi un angolo θ con la velocità d'arrivo. Il teorema della quantità di moto, proiettato su tale normale, permette subito il calcolo del modulo della spinta in discussione. È

$$F = \rho U^2 \Omega \cos \theta = \rho QU \cos \theta.$$

Inoltre, le traiettorie all'uscita risultano parallele alla lastra, e le velocità locali mantengono modulo di valore U .

Per completare l'esame con il solo impiego di equazioni globali occorre ammettere adesso l'esistenza di qualche simmetria. Si può considerare, ad esempio, il caso del moto piano. Con riferimento all'unità di sviluppo in direzione normale al piano di simmetria, la spinta vale

$$F' = \rho U^2 d \cos \theta,$$

essendo d lo spessore del getto in arrivo, come indicato in figura 11.11.

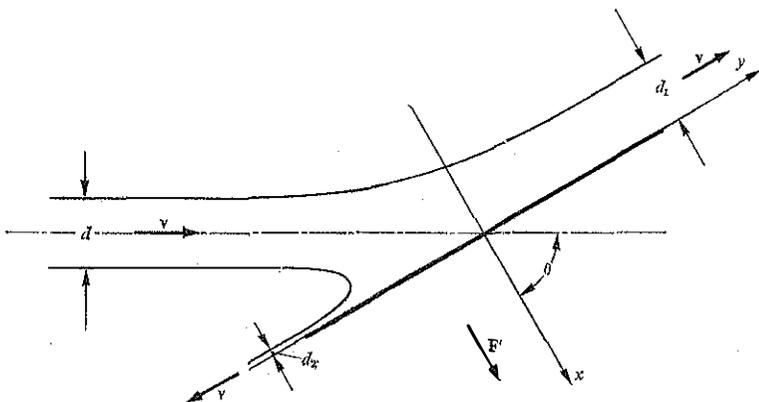


Fig. 11.11. - Urto di un getto piano contro una parete piana inclinata.

Il teorema della quantità di moto, proiettato ora nella direzione y precisata nella stessa figura, porge

$$\rho U^2 d_1 - \rho U^2 d_2 - \rho U^2 d \sin \theta = 0.$$

Unendo a questa relazione quella

$$d = d_1 + d_2,$$

dettata dall'equazione globale di continuità, si ottengono intanto gli spessori d_1 e d_2 dei getti di uscita:

$$d_1 = \frac{d}{2}(1 + \sin \theta), \quad d_2 = \frac{d}{2}(1 - \sin \theta).$$

Ricorrendo poi al teorema del momento della quantità di moto, con riferimento all'intersezione della lastra con l'asse del getto incidente, si ha anche

$$-yF' = \rho U^2 \frac{d_1^2}{2} - \rho U^2 \frac{d_2^2}{2},$$

il che, visti i valori di d_1 e d_2 già ottenuti, conduce alla coordinata

$$y = -\frac{d}{2} \operatorname{tg} \theta$$

per la retta d'azione della spinta.

11.8. Turbine Pelton.

Fra le applicazioni tecniche dei fenomeni d'urto ricordati nel paragrafo precedente, merita una descrizione particolare quella della turbina Pelton. In queste macchine, un getto d'acqua sostanzialmente cilindrico, animato da velocità media U , è fornito da un ugello, la cui sezione è parzializzata da una spina centrale, l'ago Doble, per la regolazione della portata. Il getto, come schematizzato in figura 11.12, investe successivamente le pale a doppio cucchiaio, sistemate sulla periferia di una ruota, e ne viene deviato fino all'annullamento della velocità nella direzione iniziale: resta solo una piccola velocità parallela all'asse della ruota, necessaria per allontanare e scaricare la portata. Il diametro della ruota è di norma tanto grande rispetto alle dimensioni trasversali del getto da consentire di riguardare il moto delle pale come moto rettilineo uniforme per tutto il tempo del loro contatto con la vena d'acqua.

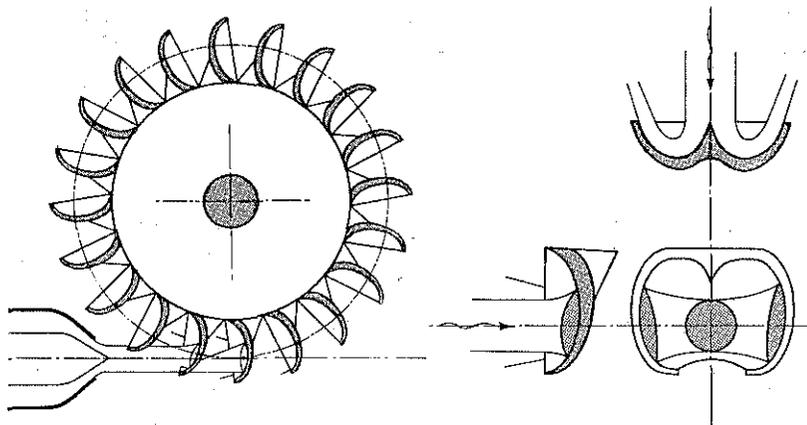


Fig. 11.12. - Schema di turbina Pelton.

La spinta esercitata dal getto su ciascuna pala, che è ora in moto con velocità uniforme v , può essere stimata da un osservatore solidale con la pala, che vede in arrivo un getto di sezione Ω e velocità $(U - v)$: è perciò

$$F_1 = 2\rho(U - v)^2\Omega.$$

Per valutare poi la spinta complessiva esercitata su tutte le pale contemporaneamente impegnate basta tener presente che il getto è via via frazionato dalle varie pale sopravvenienti, e che i singoli tronconi di getto continuano ad agire sulle pale rispettive fino ad esserne deviati assialmente. La spinta totale va quindi calcolata in base alla portata assoluta ΩU anziché a quella relativa $\Omega(U - v)$, ed ammonta a

$$F = 2\rho\Omega U(U - v).$$

La potenza meccanica ceduta alla ruota vale

$$Fv = 2\rho\Omega U(U - v)v.$$

ed assume il suo valore massimo quando è $v = U/2$. Quest'ultima è appunto la velocità periferica prevista per la ruota: il passo di posizionamento delle pale sulla ruota è tale che ciascuna pala abbia tempo di deviare del tutto in direzione parallela all'asse di rotazione della macchina il troncone di getto isolato dalla pala successiva prima di allontanarsi, per effetto della rotazione, dalla traiettoria rettilinea del getto indisturbato.

Se la velocità periferica della ruota è proprio pari alla metà della velocità dell'acqua nel getto, l'energia cinetica per unità di peso effluente dall'ugello

$$\frac{\frac{1}{2} \rho U^2 \Omega U}{\rho g \Omega U} = \frac{1}{2g} U^2$$

eguaglia la potenza, riferita sempre all'unità di peso effluente, che viene ceduta alla ruota

$$\frac{Fv}{\rho g \Omega U} = \frac{2\rho \Omega U (U-v)v}{\rho g \Omega U} = \frac{2}{g} (U-v)v = \frac{1}{2g} U^2.$$

In queste condizioni, il rendimento della macchina sarebbe unitario; il rendimento stesso risulta in realtà poco inferiore, perché le pale devono essere sagomate in modo da fornire una velocità residua assiale capace di allontanare la portata utilizzata dalla zona di impatto, con conseguente perdita di energia sotto forma cinetica.

11.9. Pompe e turbine a reazione.

Si considera, innanzi tutto, un condotto fisso, dotato di simmetria circolare intorno ad un asse. Internamente a questo condotto ruota, intorno allo stesso asse e con velocità angolare ω costante nel tempo, un'altra parete, che ha il medesimo tipo di simmetria, e che porta una serie di palettature rigide, tutte sagomate nella stessa maniera, ugualmente disposte e distribuite intorno all'asse di rotazione. Si ammette che la zona spazzata dalle palettature sia sede di un moto permanente di un fluido a densità ρ uniforme e stazionaria. Si ammette inoltre che gli sforzi esercitati dalle pareti solide siano tutti normali alle pareti stesse.

Il teorema del momento della quantità di moto può essere applicato al fluido racchiuso nel volume di controllo ombreggiato in figura 11.13, adottando come punto fisso \mathbf{x}_0 per il calcolo dei momenti un punto dell'asse di rotazione, e proiettando poi il risultato nella direzione ω .

Nel campo del geopotenziale, le forze esterne di massa hanno risultante che passa per l'asse di rotazione, date le simmetrie esistenti nel volume di controllo, e che ha perciò momento rispetto ad \mathbf{x}_0 privo di componente nella direzione ω .

Anche gli sforzi applicati dalla parete fissa e da quella rotante al fluido racchiuso nel volume di controllo, e quelli esercitati dal fluido contiguo

attraverso le sezioni di ingresso e di uscita per il volume di controllo hanno tutti rette d'azione passante per l'asse di rotazione a causa delle simmetrie esistenti, e non possono avere momento rispetto ad x_0 dotato di componente in direzione ω .

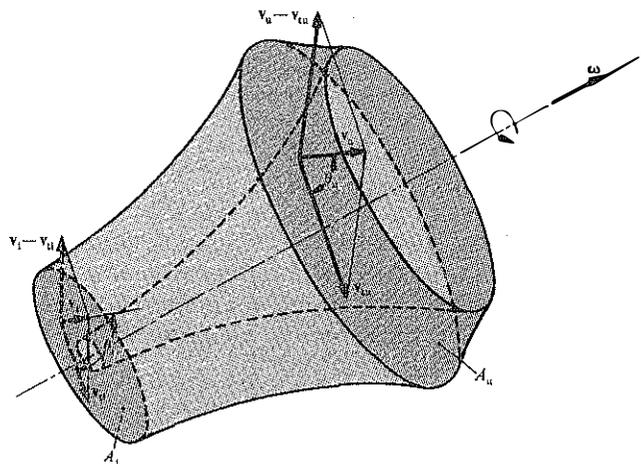


Fig. 11.13. - Volume di controllo considerato per esaminare il comportamento idraulico delle giranti di macchine a reazione.

L'unica componente in direzione ω dei momenti delle forze esterne è quella dovuta agli sforzi esercitati sul fluido dalla palettatura rotante: se ne indica con Π_m il valore.

La portata netta di momento della quantità di moto uscente dal volume di controllo è determinata da quella che transita attraverso le sezioni A_1 ed A_u di ingresso e di uscita per il volume di controllo stesso, dato che la velocità normale alla parete fissa ed a quella rotante è nulla. Per esplicitare le portate di momento della quantità di moto che passano attraverso le sezioni A_1 ed A_u conviene scindere la velocità \mathbf{v} presente nel generico punto \mathbf{x} nelle sue componenti normale e tangente alle superfici in questione. La componente tangente, per ragioni di simmetria, è tangente pure alla circonferenza passante per \mathbf{x} , centrata sull'asse di rotazione e disposta su un piano ortogonale allo stesso asse. Fissato sulla circonferenza verso concorde con quello di rotazione, ed indicato con θ l'angolo formato da \mathbf{v} con la tangente alla circonferenza così orientata, le componenti normale e tangente di \mathbf{v} sono, nell'ordine, $v \sin \theta$ e $v \cos \theta$. Di conseguenza, la portata di momento della quantità di moto uscente

dal volume di controllo attraverso A_u è parallela all'asse di rotazione, e vale

$$\hat{Q}_{mu} = \int_{A_u} \rho v_u \sin \theta_u r v_u \cos \theta_u dA_u,$$

essendo r la distanza di x dal medesimo asse. In modo analogo, la portata di momento della quantità di moto entrante attraverso A_i è

$$\hat{Q}_{mi} = \int_{A_i} \rho v_i \sin \theta_i r v_i \cos \theta_i dA_i.$$

Posto ora che $v_u \cos \theta_u$ e $v_i \cos \theta_i$ non dipendano da r , e che r_u ed r_i costituiscano dei valori medi adeguati, le due espressioni possono essere riassunte dalle scritte

$$\hat{Q}_{mu} = \rho r_u v_u \cos \theta_u \int_{A_u} v_u \sin \theta_u dA_u = \rho Q r_u v_u \cos \theta_u,$$

$$\hat{Q}_{mi} = \rho r_i v_i \cos \theta_i \int_{A_i} v_i \sin \theta_i dA_i = \rho Q r_i v_i \cos \theta_i,$$

essendo Q la portata volumetrica in transito.

Complessivamente riesce dunque

$$I_m = \rho Q (r_u v_u \cos \theta_u - r_i v_i \cos \theta_i).$$

La potenza comunicata alla corrente è perciò

$$\mathcal{P}_m = \omega I_m = \rho Q \omega (r_u v_u \cos \theta_u - r_i v_i \cos \theta_i)$$

ossia

$$\mathcal{P}_m = \rho Q (v_{tu} v_u \cos \theta_u - v_{ti} v_i \cos \theta_i),$$

intendendo con $v_{tu} = \omega r_u$ e $v_{ti} = \omega r_i$ le velocità periferiche delle palettature alle distanze r_u ed r_i .

Non tutta la potenza meccanica fornita alla corrente si traduce in aumento del carico effettivo della corrente stessa: parte della potenza fornita viene dissipata.

Le perdite di energia meccanica divengono presto importanti man mano che le velocità del fluido differiscono da quelle previste. Ciò perché un osservatore solidale con la palettatura rotante vede velocità del fluido aventi componente ancora uguale a $v_u \sin \theta_u$ e $v_i \sin \theta_i$, in direzione normale alla superficie di uscita e di ingresso, rispettivamente, ma vede componenti periferiche pari a $v_u \cos \theta_u - v_{tu}$ e, nell'ordine, $v_i \cos \theta_i - v_{ti}$. I bordi

delle varie pale sono sagomati in modo da accompagnare una corrente avente queste componenti della velocità, ma se il rapporto fra tali componenti muta perché variano v_u e v_l nascono necessariamente fenomeni di urto fra la corrente e le pale rotanti, con conseguenti fatti dissipativi via via più vistosi.

In campo tecnico, il dispositivo ora studiato costituisce il cuore delle *pompe cinetiche*. Di norma la corrente in arrivo è assiale, ossia parallela all'asse di rotazione. Mancano quindi componenti tangenziali della velocità di ingresso, perché non esistono palettature fisse d'invito capaci di imprimere alla corrente un moto elicoidale. È allora

$$\mathcal{P}_m = \rho Q v_{lu} v_u \cos \theta_u .$$

La corrente fluida, nel percorrere i condotti delimitati dalle palettature mobili e dalla parete che le sostiene, ossia nel superare la zona di contatto con la *girante*, aumenta il proprio carico effettivo di

$$H_u - H_1 = \frac{\eta_g \mathcal{P}_m}{\rho g Q} ,$$

essendo η_g il *rendimento della girante*. Parte di questo aumento compare come incremento del carico piezometrico, $h_u - h_1$, parte come incremento dell'altezza generatrice della velocità, $(U_u^2/2g) - (U_1^2/2g)$. A seconda dell'importanza relativa di questi due incrementi, cambia la geometria generale della macchina. Al crescere del *grado di reazione*

$$\varepsilon_R = \frac{h_u - h_1}{H_u - H_1} ,$$

si è riscontrato utile realizzare giranti sagomate per sezioni di uscita inizialmente cilindriche e coassiali con l'asse di rotazione, e via via inclinate rispetto a questo fino a divenirne ortogonali. La figura 11.14 dà un'idea delle forme impiegate. Nell'uso corrente, si dicono *pompe centrifughe* quelle con grado di reazione dell'ordine di 0,70 ÷ 0,80, *pompe elicoidali* quelle previste per gradi di reazione prossimi a 0,85, e *pompe ad elica* quelle che presentano i gradi di reazione più elevati. In ogni caso, la corrente in uscita è raccolta da una camera, eventualmente munita di palettature fisse, che è parte integrante della pompa, e che indirizza la corrente verso la tubazione di mandata. Anche le geometrie delle camere di raccolta dipendono dal grado di reazione, come indicato nella stessa figura 11.14: si passa dalle *camere a chiocciola* delle pompe centrifughe, alle *camere assiali*, caratteristiche delle pompe ad elica, che sono dotate di palettature fisse in grado di eliminare il moto elicoidale presente all'uscita della

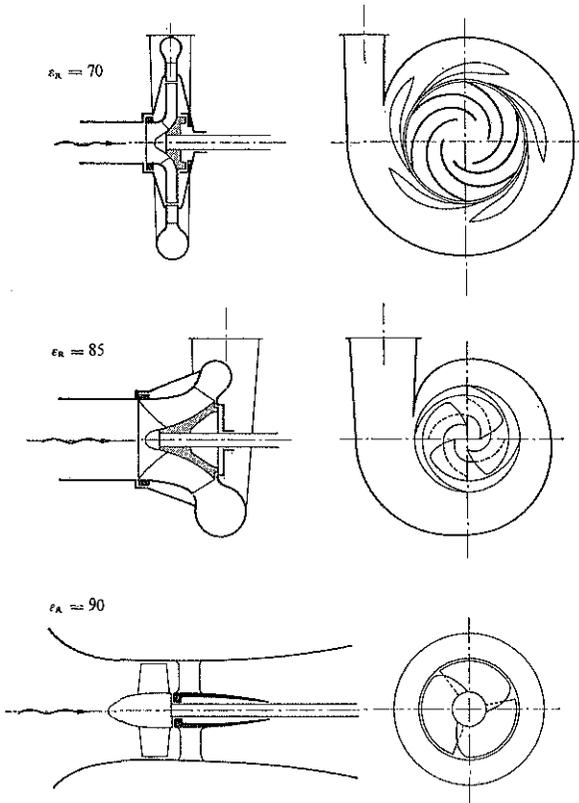


Fig. 11.14. - Forme costruttive adottate per le pompe in corrispondenza a diversi gradi di reazione.

girante. Nelle camere di raccolta avviene sempre una parziale trasformazione dell'altezza generatrice della velocità in carico piezometrico.

Il rendimento complessivo η della pompa, che tien conto anche delle perdite di potenza meccanica nella camera di raccolta, è definito implicitamente dalla

$$H_{ma} - H = \frac{\eta \mathcal{P}_m}{\rho g Q},$$

nella quale H_{ma} è il carico effettivo alla bocca di mandata. Si dice *prevalenza dinamica* della pompa l'incremento

$$\Delta H = H_{ma} - H_1$$

di carico effettivo, *prevalenza manometrica* l'incremento

$$\Delta h = h_{m_a} - h_i$$

dei carichi piezometrici, che differisce dal precedente solo quando le sezioni delle bocche di mandata e di ingresso hanno area differente.

La figura 11.15 riporta le *caratteristiche di funzionamento* delle pompe; la figura 11.16 i loro rendimenti. Si nota subito che quando le macchine vengono impiegate al di fuori delle condizioni di progetto le

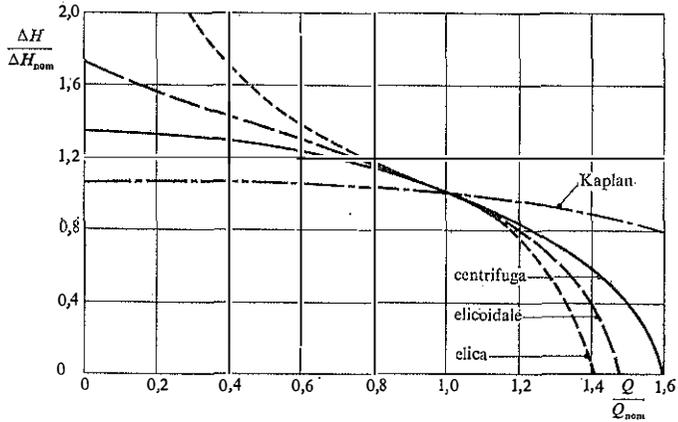


Fig. 11.15. - Caratteristiche di funzionamento delle pompe a reazione impiegate a velocità costante.

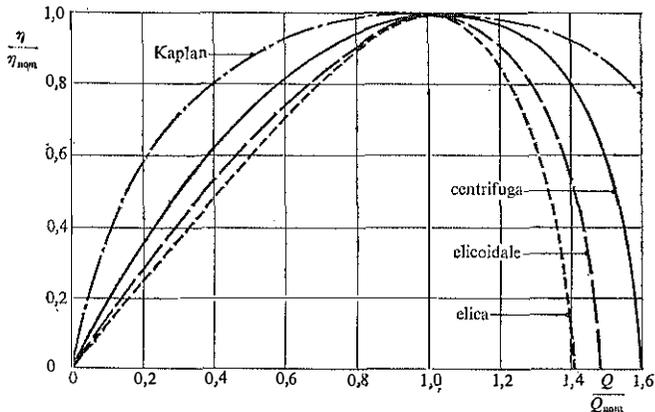


Fig. 11.16. - Rendimento delle pompe a reazione mosse a velocità costante.

prestazioni subiscono un deterioramento tanto più rapido quanto più alto è il grado di reazione. La tendenza è contrastata in modo efficace nelle pompe ad elica, sia pure al prezzo di notevoli complicazioni costruttive, ricorrendo al modello Kaplan, che ha pale giranti orientabili su comando meccanico esterno, per adeguarne volta a volta il calettamento alle particolari condizioni di impiego.

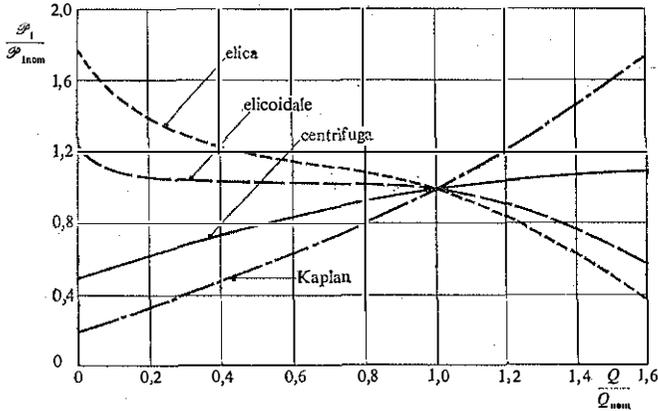


Fig. 11.17. - Potenza assorbita dalle pompe a reazione, a velocità di rotazione costante.

La figura 11.17 mostra la potenza assorbita dalla pompa, rapportata a quella assorbita a regime. Il grafico interessa in particolare durante le manovre di avviamento ed indica, fra l'altro, che le pompe a più alto grado di reazione non devono mai essere avviate quando le eventuali saracinesche inserite nella condotta di mandata sono chiuse.

La medesima struttura studiata all'inizio del paragrafo costituisce anche la parte principale delle *turbine a reazione*. In questo caso, il momento Π_m è resistente, e la potenza meccanica \mathcal{P}_m è sottratta alla corrente. Inoltre, si fa in modo che la corrente che abbandona la girante sia già una corrente assiale, priva di moti elicoidali. Si ha perciò

$$\mathcal{P}_m = \rho Q v_{t1} v \cos \theta_1.$$

La corrente fluida, nell'attraversare la girante, subisce una perdita di carico effettivo

$$H_1 - H_u = \frac{\mathcal{P}_m}{\eta_G \rho g Q},$$

essendo sempre η_g il rendimento della girante. Anche ora parte di questa perdita si manifesta come caduta del carico piezometrico e parte come caduta dell'altezza generatrice della velocità. Si definisce grado di reazione della turbina il valore

$$\epsilon_R = \frac{h_1 - h_u}{H_1 - H_u}$$

Le forme costruttive che sono risultate convenienti per le turbine dipendono dal grado di reazione, come nel caso delle pompe. Si passa così dalle *turbine Francis lente*, per $\epsilon_R = 0,30 \div 0,40$, alle *turbine Francis veloci*, con $\epsilon_R = 0,40 \div 0,60$, per giungere alle *turbine ad elica*, quando ϵ_R è ancora maggiore. Questi vari tipi hanno le strutture schematizzate in figura 11.18. Per le turbine ad elica può essere previsto un calettamento della palettatura girante adeguabile a comando alla portata in transito; esse vengono dette allora *turbine Kaplan*.

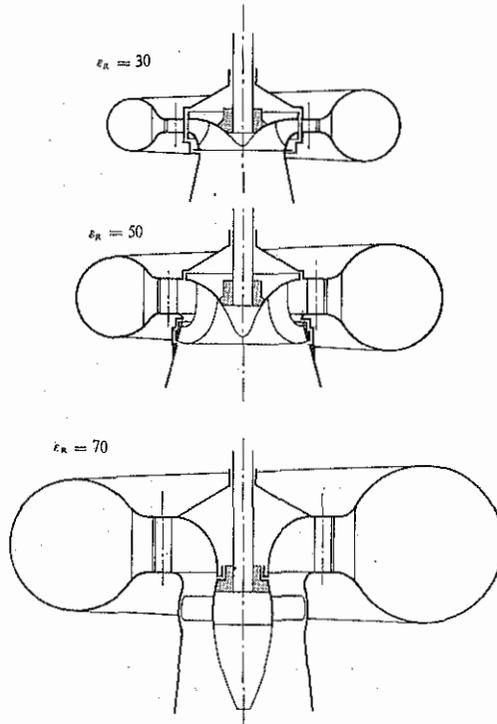


Fig. 11.18. - Forme costruttive per le turbine a reazione, e gradi di reazione corrispondenti.

In tutti i casi, l'immissione avviene attraverso superfici cilindriche a sezione circolare, coassiali con l'asse di rotazione della girante. È prevista una camera munita di palettature di invito registrabili, che hanno la funzione di indirizzare la corrente verso la girante con il giusto angolo di incidenza, e attraverso la loro registrazione, pure quella di parzializzare la portata in transito. Più a monte è prevista una camera a chiocciola, munita di palettature fisse, per distribuire uniformemente sulla periferia della macchina la portata convogliata dalla condotta di alimentazione. Le due camere, insieme, formano la *camera di distribuzione*. Gli schemi di queste strutture sono riportati in figura 11.19.

Il rendimento complessivo η della turbina, tenuto conto delle inevitabili perdite nella camera di distribuzione, è dato implicitamente dalla formula

$$H_{al} - H_u = \frac{\mathcal{P}_m}{\eta g Q},$$

nella quale H_{al} sta per il carico effettivo di alimentazione.

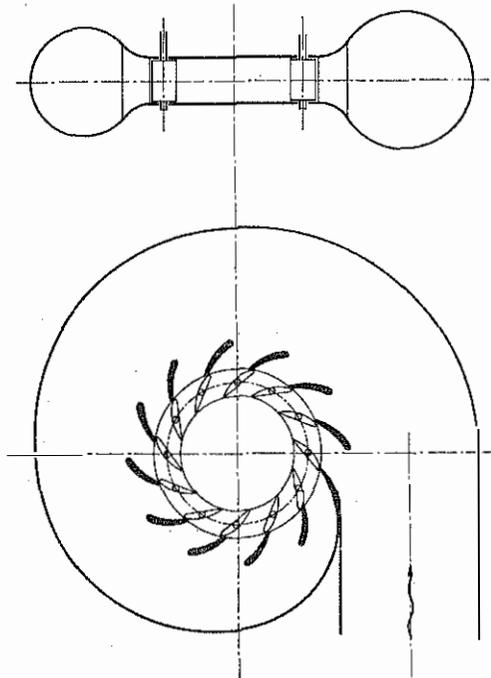


Fig. 11.19. - La camera a spirale, la palettatura fissa ed il distributore regolabile di una turbina a reazione.

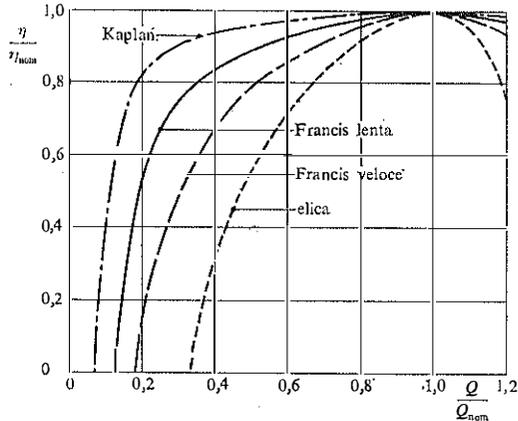


Fig. 11.20. - Rendimenti tipici delle turbine a reazione, per velocità di rotazione costante.

La figura 11.20 mostra l'andamento tipico del rendimento al variare delle condizioni di impiego della turbina. È evidente il miglioramento delle prestazioni generali con il diminuire del grado di reazione. E sono anche evidenti i vantaggi offerti dalla costruzione Kaplan rispetto a quella della turbina ad elica fissa.

11.10. Eliche.

Si considera una corrente originariamente uniforme, di velocità \mathbf{v}_a , che investe normalmente un'elica in rotazione. L'osservazione sperimentale mostra che, nel moto permanente, le traiettorie della corrente in arrivo convergono verso l'asse dell'elica, attraversano il disco che questa descrive nel suo moto, e se ne allontanano successivamente con andamento elicoidale per assumere, dopo un'ulteriore convergenza verso l'asse, assetto rettilineo e parallelo, con velocità finale \mathbf{v}_v diretta sostanzialmente come \mathbf{v}_a . La situazione complessiva è quella schematizzata in figura 11.21.

La spinta in direzione \mathbf{v}_a comunicata dall'elica al fluido ha modulo

$$F_e = (p_v - p_m) \Omega_e,$$

intendendo con Ω_e l'area del disco descritto dall'elica, ed indicando con p_m e p_v le pressioni medie esistenti subito a monte ed a valle di esso. Se la densità ρ è sempre ed ovunque costante, e se le uniche forze specifiche

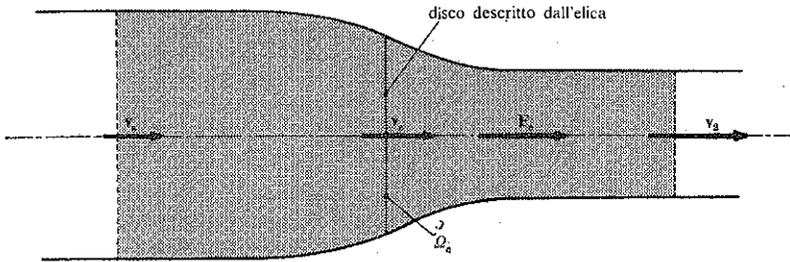


Fig. 11.21. - Volume di controllo adatto allo studio del comportamento di un'elica libera.

di massa presenti sono quelle del geopotenziale $\phi = -gz$, si ha pure

$$F_e = \rho g (h_v - h_m) \Omega_e,$$

ove h_m ed h_v indicano i carichi piezometrici medi immediatamente prima e dopo l'elica.

La stessa spinta può essere ricavata dal teorema della quantità di moto applicato al volume di controllo delimitato dalle traiettorie che si appoggiano al bordo del disco spazzato dall'elica, e troncato, molto a monte e molto a valle di questo, da piani normali alla velocità v_a . Si può ammettere che su tutta la superficie ora descritta il carico piezometrico si mantenga uniforme: è certamente uniforme sulle due sezioni piane di monte e di valle, ove le traiettorie sono rettilinee e parallele, ed uniforme deve essere sulla parte residua della superficie di contorno, che è a contatto con fluido sostanzialmente fermo. Ne segue che l'unica spinta esterna è quella F_e esercitata dall'elica.

Indicata ora con Q la portata in volume che attraversa in direzione v_a il disco descritto dall'elica, la portata netta di quantità di moto uscente dal volume di controllo ha componente in direzione v_a

$$\hat{Q}_2 - \hat{Q}_1 = \rho Q (v_2 - v_1).$$

Si ha pertanto

$$F_e = \rho Q (v_2 - v_1),$$

ovvero

$$F_e = \rho v_e \Omega_e (v_2 - v_1),$$

intendendo con v_e la velocità media con la quale il fluido attraversa il piano dell'elica.

Mentre la velocità asintotica di monte v_a e quella v_o di attraversamento del disco dell'elica sono normalmente assegnate, i carichi piezometrici medi, h_m ed h_v , prima e dopo l'elica, e la velocità finale v_2 non lo sono: nessuna delle due espressioni per la spinta F_o fornisce direttamente quest'ultimo valore.

Per completare l'esame basta però osservare che gli scambi energetici fra la corrente che attraversa il disco dell'elica e l'esterno sono concentrati su tale disco e che, in confronto a questi, le dissipazioni nelle altre zone sono trascurabili. A monte dell'elica il carico effettivo si mantiene perciò costante lungo ciascuna traiettoria, ed è anzi uniforme in tutta la corrente in arrivo perché è tale sulla sezione asintotica di monte, che interseca tutte le traiettorie considerate, sezione nella quale il carico piezometrico h_a e la velocità v_a sono uniformi. Così

$$h_a + \frac{v_a^2}{2g} = h_m + \frac{v_o^2}{2g},$$

purché si ammetta che i valori medi di h_m e v_o si presentino nello stesso punto. Considerazioni analoghe per il tronco di corrente a valle dell'elica portano a scrivere

$$h_v + \frac{v_o^2}{2g} = h_a + \frac{v_2^2}{2g},$$

purché si ammetta in più che le componenti di velocità in direzione normale a \mathbf{v}_a connesse all'assetto elicoidale del moto siano trascurabili rispetto alle componenti longitudinali.

Dal confronto delle due relazioni ora ottenute si trae

$$\frac{v_o^2}{2g} - h_a = \frac{v_a^2}{2g} - h_m = \frac{v_2^2}{2g} - h_v,$$

ossia

$$h_v - h_m = \frac{1}{2g} (v_2^2 - v_a^2).$$

Contemporaneamente, dal confronto fra le due espressioni per la spinta F_o esercitata dall'elica, si ha

$$h_v - h_m = \frac{1}{g} v_o (v_2 - v_a).$$

Deve perciò essere

$$v_o = \frac{1}{2} (v_2 + v_a).$$

il che significa che la velocità di attraversamento del disco dell'elica è la media aritmetica fra le velocità asintotiche di monte e di valle.

Valendosi di questo risultato, la spinta F_o può essere espressa come

$$F_o = 2\rho\Omega_o v_o(v_o - v_a),$$

in termini di grandezze di norma assegnate in partenza.

È possibile esprimere in funzione delle stesse grandezze anche l'incremento globale del carico effettivo

$$H_2 - H_a = \left(h_a + \frac{v_o^2}{2g}\right) - \left(h_a + \frac{v_a^2}{2g}\right):$$

si ottiene subito

$$H_2 - H_a = \frac{2}{g} v_o(v_o - v_a).$$

Si osserva infine che, data la permanenza del moto, la potenza meccanica comunicata dall'elica al fluido vale

$$\mathcal{P}_m = \rho g Q (H_2 - H_a)$$

ossia

$$\mathcal{P}_m = 2\rho\Omega_o v_o^2(v_o - v_a).$$

Le considerazioni ora esposte si adattano immediatamente alle varie condizioni di impiego tecnico.

Se l'elica è mantenuta in rotazione con mezzi esterni e cede potenza alla corrente, ma il suo disco è fermo rispetto all'osservatore, la velocità v_a appare nulla e risulta $v_2 = 2v_o$: è il caso dei *ventilatori* a pale non intubate e dei *rotori* per elicottero.

Anche quando l'elica è utilizzata come mezzo *propulsore* per mezzi di trasporto, essa deve essere mantenuta in rotazione da motori esterni e deve cedere potenza al fluido. Si ha ancora una volta $v_a = 0$ e quindi $v_2 = 2v_o$, però il disco dell'elica è adesso in moto di traslazione rispetto all'osservatore. Tutto il campo di moto va dedotto da quello già studiato sottraendo ad esso la velocità uniforme v_a . In particolare, il disco dell'elica trasla con velocità $-v_a$.

Quando l'elica è trascinata in rotazione dalla corrente fluida, ma non ne assorbe potenza, deve essere $v_o = v_a$, e quindi $v_2 = v_a$: è il caso dei *mulinelli* usati per la misura della velocità del fluido.

Se poi l'elica è trascinata in rotazione dalla corrente e ne assorbe potenza, deve risultare $v_o < v_a$, e di conseguenza $v_2 = 2v_o - v_a < v_a$: la corrente è ora ritardata. Questa situazione si presenta nel caso dei *motori eolici*.

11.11. Propulsione a reazione.

Esaminando i fenomeni di efflusso, nel paragrafo 11.3, si è messa in luce l'esistenza di una spinta complessiva esercitata dal recipiente sul fluido contenuto. La corrispondente reazione sviluppata dal fluido sul recipiente può essere impiegata quale elemento di propulsione del recipiente stesso.

Per illustrare meglio questo tipo di impiego conviene estendere un poco le considerazioni svolte nel paragrafo 11.3, in modo da includere quei particolari fenomeni di efflusso che la tecnica utilizza nella propulsione a reazione.

L'analisi verrà condotta prescindendo dalle resistenze al moto del mezzo mobile, e trascurando la presenza delle forze di massa, in modo da concentrare l'attenzione sul solo fenomeno della reazione di efflusso. Si ammetterà anche che la densità ρ resti sempre ed ovunque costante e che il moto del fluido sia permanente.

Come primo esempio si considera il caso del reattore, fermo rispetto all'osservatore, investito da una corrente inizialmente uniforme di velocità \mathbf{v}_a .

Sia $e_a Q_a$ la portata in massa entrante nel reattore. Internamente al reattore la portata in transito viene accelerata ed inviata all'uscita con velocità uniforme \mathbf{v}_2 . I particolari dispositivi impiegati per ottenere questo scopo non hanno influenza sul risultato che ora interessa: possono essere utilizzate eliche, come si fa nel caso degli *idroreattori* per mezzi navali, oppure iniettori alimentati da gas provenienti da reazioni chimiche, come si fa nei *reattori a combustione* da aereo. Va però tenuto presente che nel primo di questi casi la portata in massa uscente è ancora quella $e_a Q_a$ di ingresso, in mentre nel secondo si aggiunge ad essa la portata $e_c Q_c$ dei prodotti immessi per la combustione.

Con riferimento al volume di controllo delimitato dalle traiettorie che lambiscono i bordi di ingresso e di uscita del reattore, e troncato da due piani ortogonali alle velocità di ingresso o di uscita, tracciati in zone di distribuzione sostanzialmente uniforme delle velocità stesse, come indicato in figura 11.22, sia \mathbf{F}_r il risultante degli sforzi esercitati dal reattore sul fluido. Esso è anche il risultante degli sforzi applicati al fluido racchiuso nel volume di controllo, perché, trascurando le forze di massa, si è implicitamente ammesso che la pressione sia uniforme su tutta la superficie del volume di controllo esterna al reattore.

La portata netta di quantità di moto uscente dal volume di controllo vale, in modulo,

$$(e_a Q_a + e_c Q_c) v_2 - e_a Q_a v_a$$

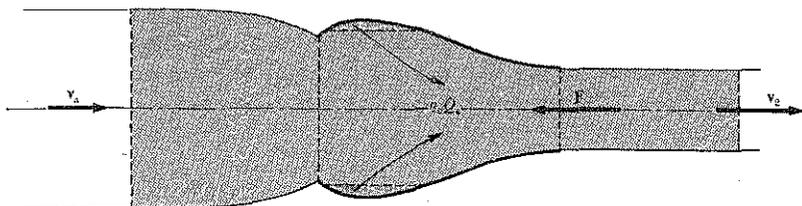


Fig. 11.22. - Volume di controllo per l'esame di un reattore.

ove si ammetta, come fatto nella figura 11.22, che il getto di ingresso e quello di uscita siano paralleli.

Ne segue che la reazione $F = -F_r$ applicata al reattore ha modulo

$$F = (\rho_a Q_a + \rho_c Q_c) v_a - \rho_a Q_a v_a$$

ed è diretta in verso opposto a quello delle velocità asintotiche v_a e v_e .

Il risultato ha il suo impiego più frequente espresso sempre in termini delle portate in gioco e della velocità di efflusso $v_u = v_e$, stimate da un osservatore solidale con il reattore, ma evidenziando il modulo v_r della velocità $v_r = -v_a$ del reattore stesso, misurata da un osservatore che lo veda dirigersi verso una zona nella quale il fluido è fermo. Risulta allora

$$F = (\rho_a Q_a + \rho_c Q_c) v_u - \rho_a Q_a v_r.$$

Nel caso particolare dell'*endoreattore*, che non incamera e non tratta fluido ambiente, si ha

$$F = \rho_c Q_c v_u.$$

11.12. Teorema di Kutta e Joukowsky.

In accordo con il teorema di d'Alembert, ricordato nel paragrafo 7.7, una corrente di fluido ideale che investe un ostacolo, e che assume assetto uniforme a grande distanza da tale corpo solido, non può esercitare sull'ostacolo spinte dirette come la velocità asintotica. Ciò non esclude la presenza della componente ortogonale per il risultante delle spinte. Tale componente normale alla velocità asintotica è indicata con il termine di *portanza*.

Come esempio, si considera il caso del moto piano permanente di fluido a densità ρ sempre ed ovunque costante, che investe ortogonalmente un ostacolo cilindrico. L'esame viene condotto prescindendo dalle forze

di massa. Tuttavia, la presenza delle forze specifiche \mathbf{f} dovute al geopotenziale non cambia la natura del problema. Il loro effetto sarebbe soltanto quello di determinare una componente additiva p_i sulle pressioni, in accordo con la legge idrostatica

$$\rho \mathbf{f} - \text{grad } p_i = 0,$$

cui corrisponderebbe una spinta archimedeica sull'ostacolo.

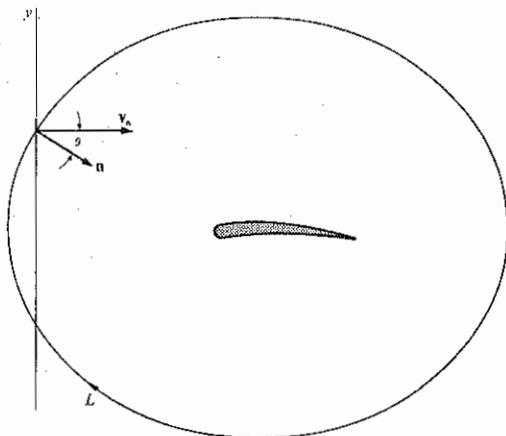


Fig. 11.23. - Il moto irrotazionale piano che avvolge un ostacolo sviluppando circolazione determina contemporaneamente una portanza sull'ostacolo stesso.

Nella figura 11.23, l'ostacolo è indicato come un profilo alare, per ricordare il particolare problema tecnico che ha destato interesse per questo tipo di ricerche, ma il risultato non dipende direttamente dalla forma della sezione trasversale del corpo cilindrico investito.

Si suppone infine che la circolazione della velocità \mathbf{v} ,

$$\Gamma = \int_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x},$$

lungo i vari circuiti chiusi L abbraccianti una volta l'ostacolo ed equiversi abbia sempre lo stesso valore. Per inciso, si osserva che il moto deve essere di conseguenza irrotazionale, giusta la formula di Kelvin del paragrafo 5.10.

Si fissa ora l'attenzione sul volume di controllo a tronco di cilindro, delimitato normalmente al piano del disegno da due piani a distanza reciproca b , ed avente come direttrice delle pareti il bordo dell'ostacolo e la

curva L , tracciata in una zona tanto lontana dall'ostacolo da essere percorsa da traiettorie già sensibilmente rettilinee e parallele.

L'asse y è scelto sul piano del disegno, ortogonale alla velocità asintotica \mathbf{v}_a , e con verso fissato ruotando di un angolo retto il vettore \mathbf{v}_a nel verso opposto a quello assunto come positivo nel calcolare la circolazione Γ .

Per ragioni di simmetria, il risultante degli sforzi di pressione esercitati attraverso le due pareti piane è nullo. Ugualmente nullo è il risultante degli sforzi esercitati attraverso la superficie cilindrica di direttrice L , perché qui le pressioni sono uniformi. Il risultante delle forze esterne si riduce quindi a quello delle pressioni trasmesse dall'ostacolo al fluido, e coincide, a parte il verso, con la portanza \mathbf{F} da calcolare.

Sulle due superfici piane e sulla superficie dell'ostacolo, la componente normale della velocità è nulla, ed attraverso queste superfici non può aversi flusso di quantità di moto. La portata netta di quantità di moto in direzione y uscente attraverso la superficie cilindrica che ha L come direttrice vale invece

$$[\hat{Q}_n - \hat{Q}_i]_y = \left[-b \int_L \rho v_y \mathbf{i}_y (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dL \right]_y.$$

Ma qui la velocità \mathbf{v} si confonde già con quella asintotica \mathbf{v}_a , e perciò si può scrivere anche

$$[\hat{Q}_n - \hat{Q}_i]_y = \left[-bv_a \int_L \rho v_y \mathbf{i}_y \cos \theta dL \right]_y,$$

essendo θ l'angolo fra \mathbf{v}_a e la normale interna \mathbf{n} . Si osserva ora che la circolazione lungo L della velocità uniforme \mathbf{v}_a è evidentemente nulla: la circolazione di \mathbf{v} lungo la stessa linea mantiene il valore Γ , in accordo con le ipotesi fatte, se risulta

$$\int_L v_y \cos \theta dL = \int_L (v_y \mathbf{i}_y) \cdot d\mathbf{x} = \Gamma.$$

Così

$$[\hat{Q}_n - \hat{Q}_i]_y = -bv_a \rho \Gamma.$$

In conclusione, la spinta complessiva in direzione y esercitata dalla corrente sul corpo investito è

$$F'_y = \rho v_a \Gamma,$$

per unità di sviluppo del corpo stesso.

Questo risultato è stato ottenuto da Joukowski nel 1905 e, indipendentemente da Kutta nel 1902, ed è noto perciò come *teorema di Kutta e Joukowski*.

Riferimenti citati.

ЖУКОВСКИЙ, НИКОЛАЙ ЕГОРОВИЧ = Жуковский, Николай Егорович, *O prisoedinenich wichriach* = О присоединённых вихрях, Soc. Imperiale degli Amici delle Sc. Nat., Москва, Fasc. 2, 1905.

KUTTA, MARTIN WILHELM, *Auftriebeskräfte in strömenden Flüssigkeiten*, Illustrierte aeronautische Mitteilungen, 1902, pp. 133-135.

TORRICELLI, EVANGELISTA, *De motu gravium naturaliter descendentium et proiectorum*, Firenze, 1644.

CAPITOLO DODICESIMO

STRATO LIMITE

12.1. Genesi della vorticità.

Si è già notato, nel paragrafo 7.3, che un moto di fluido ideale può avere carattere irrotazionale, e mantenere nel tempo lo stesso carattere se le forze specifiche di massa ammettono potenziale univoco e se il comportamento del fluido è barotropico.

L'osservazione resta valida, come si è visto nel paragrafo 8.1, nel moto originato dallo stato di quiete, ovviamente irrotazionale, dal movimento imposto alle superfici solide che delimitano la massa fluida. Escludendo sempre l'azione della viscosità il moto instaurato resta irrotazionale, ma presenta di solito velocità tangenziali non nulle alla frontiera, e non soddisfa, di norma, la condizione di aderenza alle porzioni di contorno costituite da pareti solide.

L'aderenza del fluido alla parete solida deve causare una distorsione del campo di moto previsto dallo schema irrotazionale, distorsione che, almeno all'inizio, deve essere concentrata in prossimità delle pareti, e tale da portare qui a valori non più nulli della vorticità $w = \text{rot}v$. Come si è detto nel paragrafo 5.10, w è localmente parallelo alla parete solida: si può pensare quindi che il fluido poco distante dalla parete ed animato dalla velocità tangenziale imposta dallo schema di moto irrotazionale ponga in rotolamento lungo la parete il fluido a questa più prossimo. In tale fenomeno, la viscosità gioca un ruolo essenziale.

Una volta generata presso la parete, la vorticità si diffonde successivamente nella massa fluida. Può avvenire che tutto il moto finisca con il divenire rotazionale; può accadere invece che la vorticità rimanga sempre confinata presso la parete. Questa evoluzione temporale, che è legata

all'azione della viscosità, può essere descritta in base alle equazioni dei fluidi newtoniani. Nei paragrafi 9.6 e 9.8 sono stati considerati fenomeni che si concludono con un moto globalmente rotazionale. Nei quattro paragrafi seguenti verranno esaminati invece altrettanti esempi classici di confinamento permanente della vorticità.

12.2. Problema di Rayleigh.

Il semipiano $y > 0$ è occupato da fluido di densità ρ e viscosità cinematica ν uniformi e permanenti, che è sottoposto a forze specifiche di massa \mathbf{f} anch'esse uniformi. Il piano $y = 0$ è formato dalla superficie di un corpo solido. Fino all'istante $t = 0$ le velocità sono costantemente nulle; dall'istante $t = 0$ in poi il corpo solido è posto in moto con velocità costante \mathbf{v}_0 , parallela alla superficie $y = 0$ del corpo stesso.

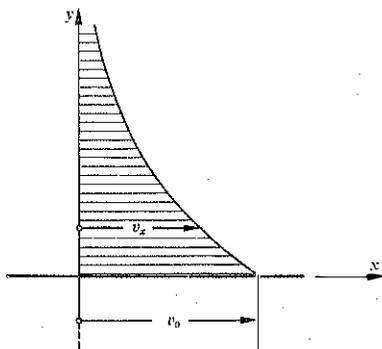


Fig. 12.1. - Notazioni impiegate per lo studio del problema di Rayleigh e di quello di Stokes.

Assegnati all'asse x direzione e verso di \mathbf{v}_0 , come in figura 12.1, e scelto l'asse z ortogonale alla \mathbf{v}_0 stessa, si osserva subito che le componenti v_y e v_z della velocità \mathbf{v} del fluido si mantengono necessariamente nulle, e che la componente v_x deve essere indipendente da x e da z .

Nelle condizioni esposte, l'equazione di Navier

$$\mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt}$$

ha proiezioni lungo gli assi y e z prive dei termini contenenti le velocità. Altrettanto avviene per la proiezione lungo l'asse x , a distanza sufficientemente grande dalla superficie solida, perché, in questo campo asinto-

tico, v_x si mantiene nulla. Complessivamente, la pressione p risulta perciò distribuita con la legge

$$\mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p = 0$$

su ciascun piano normale all'asse x ed in tutta la zona più lontana dalla superficie solida. Per l'uniformità delle forze specifiche di massa \mathbf{f} , ne segue che la stessa legge è valida in tutta la massa fluida. L'equazione di Navier si riduce di conseguenza alla forma

$$\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial v_x}{\partial t}.$$

La condizione di aderenza impone che sia

$$[v_x]_{y=0} = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0, \\ v_0 & \text{per } t > 0. \end{cases}$$

Inoltre, v_x deve essere uniformemente nulla fino a $t = 0$ e risultare poi evanescente al crescere di y .

È immediato controllare che la soluzione è

$$v_x = v_0 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y/2\sqrt{\nu t}} \exp(-\zeta^2) d\zeta \right) = v_0 \left(1 - \text{erf} \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \right).$$

Si ha infatti

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{2v_0}{\sqrt{\pi}} \exp(-\zeta^2) \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{2v_0}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{4\nu t}\right) \frac{1}{2\sqrt{\nu t}} \right) = \frac{v_0}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{4\nu t}\right) \frac{y}{2\nu t \sqrt{\nu t}}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{2v_0}{\sqrt{\pi}} \exp(-\zeta^2) \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{v_0}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{4\nu t}\right) \frac{y}{2t \sqrt{\nu t}}. \end{aligned}$$

Le distribuzioni delle velocità nei vari istanti sono tutte simili fra loro, nel senso che esse possono essere ridotte allo stesso andamento rapportando a $2\sqrt{\nu t}$ le ordinate y , e dividendo contemporaneamente per v_0 le velocità v_x . Nella figura 12.2 è riportato questo andamento comune.

La v_x si riduce all'1% della v_0 già quando

$$\frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \simeq 2,$$

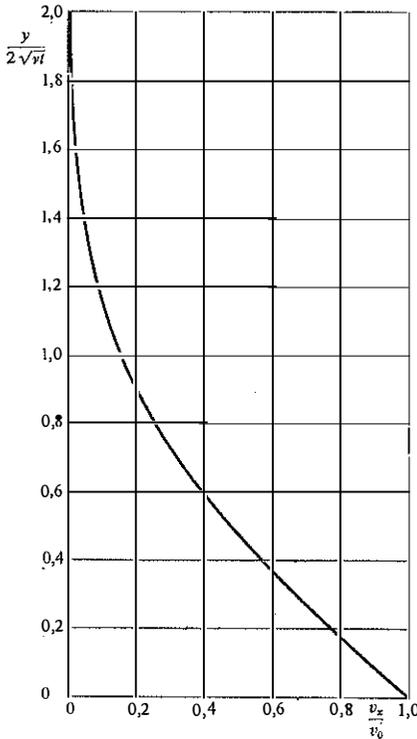


Fig. 12.2. - Velocità indotte dal brusco inizio dello scorrimento di una lastra piana.

così che il moto indotto nel fluido è apprezzabile solo fino alla distanza dalla superficie solida

$$y \simeq 4\sqrt{vt},$$

ed interessa quindi una fascia, contigua alla superficie solida, che si allarga progressivamente con la radice quadrata del tempo.

La resistenza opposta dal fluido al moto della parete, riferita all'unità d'area di quest'ultima, vale

$$[T_{-y,z}]_{y=0} = -\mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial (-y)} \right]_{y=0} = \rho\nu \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} \right]_{y=0} = -\frac{\rho\nu v_0}{\sqrt{\pi\nu t}} = -\rho v_0 \sqrt{\frac{\nu}{\pi t}}$$

e decresce con l'inverso della radice quadrata del tempo, diminuendo perciò man mano che si allarga lo strato di fluido nel quale si può pensare concentrato il salto di velocità da v_0 a zero.

Rayleigh ha studiato questo particolare problema di moto nel 1880.

12.3. Problema di Stokes.

Il semipiano $y > 0$ è occupato da fluido di densità ρ e viscosità cinematica ν uniformi e costanti, le forze specifiche di massa \mathbf{f} sono uniformi, ed il piano $y = 0$ è formato dalla superficie di un corpo solido, come nel problema di Rayleigh, esaminato nel paragrafo precedente. Ora però si ammette che il corpo solido sia animato da un moto sinusoidale rettilineo parallelamente alla propria superficie.

Scelto sempre l'asse x parallelo al moto del corpo solido, l'equazione di Navier si riduce ancora alla forma

$$\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial v_x}{\partial t}$$

e garantisce ancora che la distribuzione della pressione p è quella idrostatica, compatibile con la

$$\mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p = 0,$$

purché v_x tenda ad annullarsi al crescere dei valori di y .

La condizione di aderenza del fluido alla parete solida si traduce invece in un vincolo del tipo

$$[v_x]_{y=0} = v_0 \cos \frac{2\pi}{T} t,$$

se v_0 è la velocità massima della parete, e T il periodo delle sue oscillazioni.

Si verifica subito che deve essere di conseguenza

$$v_x = v_0 \exp\left(-y \sqrt{\frac{\pi}{\nu T}}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T} t - y \sqrt{\frac{\pi}{\nu T}}\right).$$

Le velocità in seno al fluido compiono quindi oscillazioni armoniche nel tempo, smorzate lungo y . Le ampiezze massime

$$v_0 \exp\left(-y \sqrt{\frac{\pi}{\nu T}}\right)$$

si riducono all'1% dell'ampiezza v_0 della velocità della parete quando

$$y \sqrt{\frac{\pi}{\nu T}} \simeq 5;$$

così che il moto del fluido appare confinato entro la fascia

$$y \lesssim 5 \sqrt{\frac{\nu T}{\pi}},$$

di spessore tanto più piccolo quanto minori sono la viscosità cinematica del fluido ed il periodo dell'oscillazione impressa.

Si osserva inoltre che, a distanza y dalla parete, le escursioni della velocità del fluido sono sfasate in ritardo di

$$\frac{1}{2}y \sqrt{\frac{T}{\nu\pi}}$$

rispetto a quelle della parete stessa, e che si ripresentano perciò in fase tra loro dopo una distanza

$$\Delta y = 2\sqrt{\pi\nu T}.$$

L'aspetto generale del campo delle velocità è rappresentato nella figura 12.3, in coordinate adimensionalizzate e per diversi istanti.

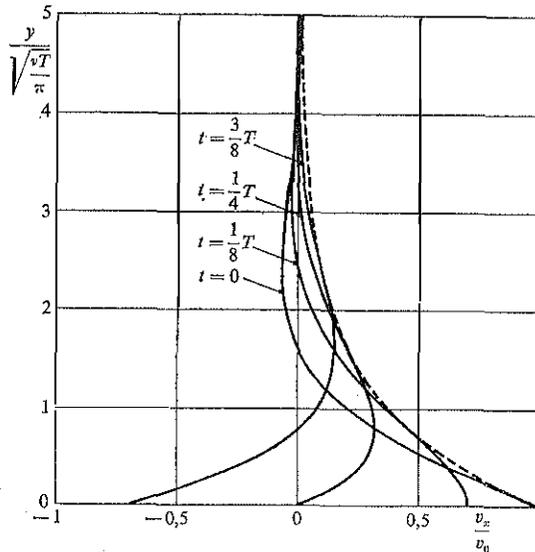


Fig. 12.3. - Velocità indotte da una lastra piana oscillante.

La resistenza offerta dal fluido, rapportata all'unità d'area della superficie solida, è

$$[T_{-y,x}]_{y=0} = -\mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial (-y)} \right]_{y=0} = \rho\nu \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} \right]_{y=0} = -\rho v_0 \sqrt{\frac{2\nu y}{T}} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

ed ha perciò i suoi massimi $1/8$ di periodo prima che la parete oscillante raggiunga la sua velocità massima, ossia prima che la parete stessa passi per la sua posizione media.

Il moto descritto è stato studiato da Stokes nel 1851.

12.4. Problema di Hiemenz.

Il confinamento della vorticità presso la superficie solida non è vincolato al fatto che le velocità del fluido si estinguano a grande distanza dalla parete, come avviene nei problemi di Rayleigh e di Stokes, esaminati nei due paragrafi precedenti. Può essere che le velocità si mantengano apprezzabili ovunque, e che proprio la loro presenza impedisca il diffondersi della vorticità: le velocità stesse finiscono allora con l'assumere assetto irrotazionale man mano che ci si allontana dalla parete.

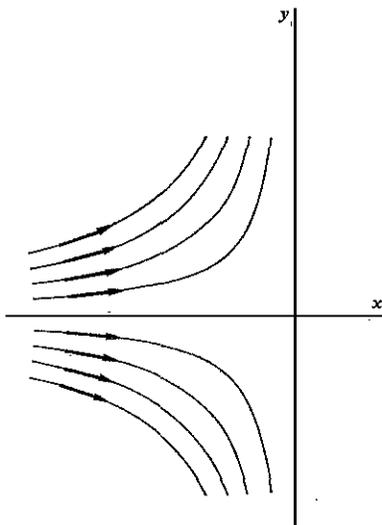


Fig. 12.4. - Problema di Hiemenz: una corrente piana investe frontalmente una parete piana, aderendo ad essa.

Quale esempio di questo secondo tipo di fenomeno viene qui esaminato il caso della corrente piana che, provenendo da regioni ad ascisse x negative, investe normalmente la superficie impermeabile $x = 0$, come schematizzato in figura 12.4. Si ammette ancora che la densità ρ e la viscosità cinematica ν siano uniformi e permanenti, e che le forze specifiche di massa f siano uniformi.

Nell'ipotesi di moto irrotazionale ed isocoro, il problema è già stato affrontato nel paragrafo 8.3. Esiste allora la funzione di corrente di Lagrange

$$\psi = -Cxy,$$

con l'asse y disposto sul piano di simmetria del moto, e con C costante positiva. Le componenti della velocità hanno i valori

$$v_x = -Cx, \quad v_y = Cy,$$

che non si annullano sulla parete $x = 0$. Indicando con p_1 una componente idrostatica della pressione, compatibile con la legge

$$\mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p_1 = 0,$$

la pressione p ammonta a

$$p = p_1 - \frac{\rho}{2} C^2 (x^2 + y^2).$$

Descrivendo invece il fenomeno in base all'equazione di Navier, si può richiedere il rispetto della condizione di aderenza. Poiché il moto resta isocoro, esiste ancora una funzione di corrente ψ , naturalmente diversa da quella valida per il moto irrotazionale. Nello stesso tempo, risulta alterata anche la distribuzione della pressione. È facile verificare che le espressioni di ψ e p adatte al nuovo contesto sono

$$\begin{aligned} \psi &= y \sqrt{C\nu} f\left(-x \sqrt{\frac{C}{\nu}}\right) \\ p &= p_1 - \frac{\rho}{2} C^2 y^2 - \rho C \nu f_v\left(-x \sqrt{\frac{C}{\nu}}\right) \end{aligned}$$

rispettivamente. Sostituendo questi valori nella proiezione lungo y dell'equazione di Navier,

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial(p - p_1)}{\partial y} + \nu \nabla^2 v_y = \frac{Dv_y}{Dt},$$

si vede subito che la funzione f deve soddisfare l'equazione alle derivate ordinarie

$$f''' + ff'' - f'^2 + 1 = 0.$$

La f risulta così completamente determinata ricorrendo alla condizione di aderenza

$$[\mathbf{v}]_{x=0} = 0,$$

che implica

$$f(0) = f'(0) = 0,$$

ed imponendo che a grande distanza dalla parete solida le velocità si riducano a quelle dedotte con lo schema irrotazionale, ossia imponendo che in tale campo asintotico sia

$$f\left(-x\sqrt{\frac{C}{\nu}}\right) \simeq -x\sqrt{\frac{C}{\nu}}.$$

Nota la f , la sostituzione delle espressioni di ψ e di p nella proiezione lungo x dell'equazione di Navier,

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial(p - p_1)}{\partial x} + \nu \nabla^2 v_x = \frac{Dv_x}{Dt},$$

porta all'equazione ordinaria

$$f_x' = f'' + ff'$$

per la f_p . La f_p stessa ne resta determinata, a meno della costante di integrazione. Si può richiedere che sia

$$f_p(0) = 0$$

in modo da avere $p = p_1$ nell'origine degli assi.

Il calcolo numerico, iniziato da Hiemenz nel 1911, ha condotto ai valori di f'' , f' , f ed f_p riportati nella tabella 12.1. L'andamento delle tre ultime funzioni è indicato anche nella figura 12.5.

Si nota in particolare che la velocità

$$v_y = Cyf' \left(-x\sqrt{\frac{C}{\nu}}\right)$$

differisce da quella legata allo schema irrotazionale,

$$v_y = Cy,$$

di meno dell'1% già quando è

$$-x\sqrt{\frac{C}{\nu}} \simeq 2,4.$$

TABELLA 12.1. — Funzioni connesse al problema di Hiemenz.

$-x\sqrt{\frac{C}{\nu}}$	f''	f'	f	f_p
0	1,2326	0	0	0
0,2	1,0345	0,2266	0,0233	0,2270
0,4	0,8463	0,4144	0,0881	0,4186
0,6	0,6751	0,5662	0,1867	0,5843
0,8	0,5251	0,6859	0,3124	0,7356
1,0	0,3980	0,7778	0,4592	0,8676
1,2	0,2937	0,8467	0,6220	1,0246
1,4	0,2109	0,8968	0,7966	1,1987
1,6	0,1473	0,9324	0,9798	1,3970
1,8	0,0999	0,9569	1,1688	1,6247
2,0	0,0658	0,9732	1,3619	1,8855
2,2	0,0420	0,9841	1,5577	2,1821
2,4	0,0260	0,9905	1,7552	2,5160
2,6	0,0156	0,9946	1,9537	2,8883
2,8	0,0091	0,9971	2,1529	3,2998
3,0	0,0051	0,9985	2,3525	3,7508
3,2	0,0027	0,9992	2,5522	4,2415
3,4	0,0019	0,9996	2,7521	4,7721
3,6	0,0010	0,9998	2,9520	5,3426
3,8	0,0004	0,9999	3,1518	5,9530
4,0	0,0002	1,0000	3,3518	6,6034

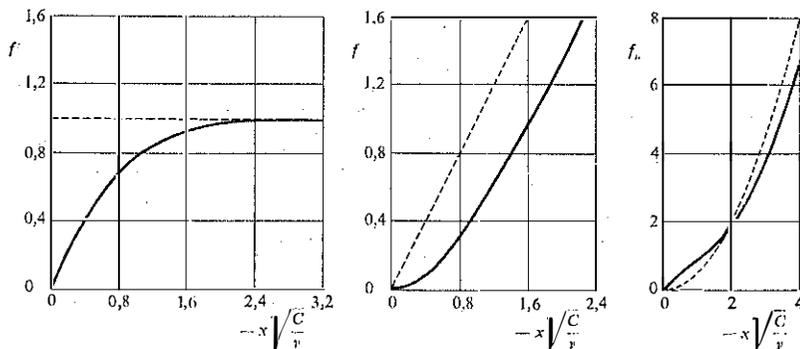


Fig. 12.5. — Funzioni collegate al problema di Hiemenz.

La nuova velocità è perciò apprezzabilmente diversa da quella indicata dallo schema irrotazionale solo entro una fascia, contigua alla parete solida, avente spessore

$$2,4 \sqrt{\frac{v}{C}},$$

indipendente da y . Del resto, il tipo di assetto della v_y lungo x è indipendente da y : a parità di x i valori di v_y sono proporzionali alla y stessa.

La velocità

$$v_x = \sqrt{Cv} f\left(-x \sqrt{\frac{C}{v}}\right)$$

risulta invece diversa da quella

$$v_x = -Cx$$

del moto irrotazionale su una fascia ben più ampia. Poiché f , a distanza sufficientemente grande dalla parete, può essere approssimata da

$$f \simeq -0,65 - x \sqrt{\frac{C}{v}},$$

lo scarto delle nuove velocità v_x si riduce a meno dell'1% della corrispondente velocità irrotazionale solo quando

$$-x \sqrt{\frac{C}{v}} \simeq 65.$$

Va osservato però che il rotore associato alla nuova v_x , ossia $\text{rot}(v_x \mathbf{i}_x)$, è uniformemente nullo, così che la vorticità resta confinata entro la fascia di spessore

$$2,4 \sqrt{\frac{v}{C}},$$

considerata in precedenza esaminando gli scarti della v_y dalle indicazioni dello schema irrotazionale.

La zona a pressioni perturbate è ancora più ampia. Si ha ora

$$p = p_1 - \frac{\rho}{2} C^2 y^2 - \rho C v f_v\left(-x \sqrt{\frac{C}{v}}\right),$$

con f_v che, per valori sufficientemente elevati dell'argomento, tende a

$$f_v \simeq 6,6 - 0,65\left(-x \sqrt{\frac{C}{v}}\right) + \frac{1}{2}\left(-x \sqrt{\frac{C}{v}}\right)^2.$$

Lo scarto rispetto alla pressione calcolata in base allo schema irrotazionale

$$p = p_1 - \frac{\rho}{2} C^2 y^2 - \frac{\rho}{2} C^2 x^2$$

si riduce perciò a meno dell'1% solo quando

$$-x \sqrt{\frac{C}{\nu}} \simeq 120.$$

La forza tangenziale esercitata dal fluido sulla parete investita, rapportata all'unità d'area di quest'ultima, ammonta a

$$[T_{xy}]_{x=0} = -\mu \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} \right]_{x=0} = -\rho \nu \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} \right]_{x=0} = \rho \nu C y [f'']_{x=0} \sqrt{\frac{C}{\nu}}$$

e, per essere

$$[f'']_{x=0} = 1,2326,$$

vale

$$[T_{xy}]_{x=0} = 1,2326 \rho \nu C \sqrt{\frac{C}{\nu}}.$$

12.5. Problema di Ekman.

Confinamenti della vorticità presso la parete solida possono manifestarsi anche in presenza di forze specifiche di massa non uniformi. Può servire da esempio il caso di una massa fluida che poggia su una superficie solida orizzontale e che è in moto con velocità uniforme a grande distanza da tale superficie.

Separando nell'equazione di Navier le forze specifiche di massa uniformi \mathbf{g} , dovute al geopotenziale, dalle forze specifiche di Coriolis $-2\boldsymbol{\omega}_g \wedge \mathbf{v}$, connesse alla velocità di rotazione siderale $\boldsymbol{\omega}_g$ del geoide, si ha

$$\mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega}_g \wedge \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt}.$$

Scelto ora l'asse z verticale e diretto verso l'alto, si cerca una soluzione $\mathbf{v}(z)$ indipendente dal tempo, che soddisfi la condizione di aderenza $\mathbf{v} = 0$ sulla superficie solida $z = 0$, e che si riduca in quota ad una velocità uniforme ed orizzontale \mathbf{v}_a . È comodo assumere l'asse x parallelo ed equiverso alla \mathbf{v}_a , come indicato in figura 12.6.

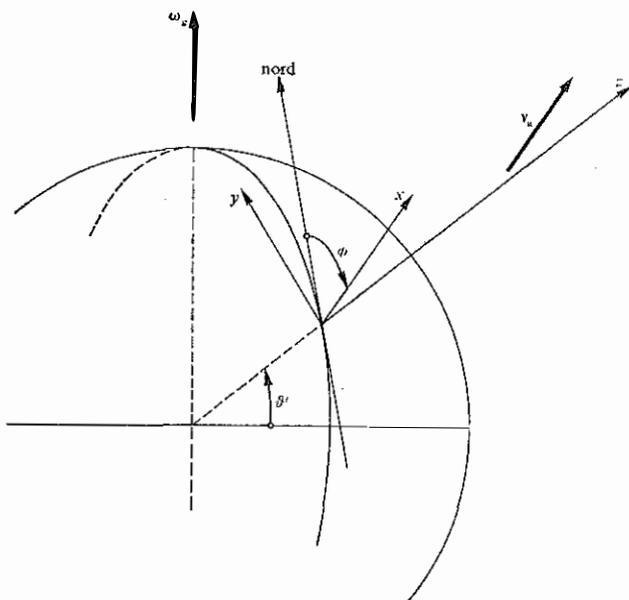


Fig. 12.6. – Coordinate e notazioni adottate per l'esame del problema di Ekman.

Dato che la densità ρ è uniforme e costante, l'equazione di continuità, $\text{div } \mathbf{v} = 0$, unita alla condizione che \mathbf{v} dipenda solo da z ed a quella di impermeabilità del suolo,

$$[v_z]_{z=0} = 0,$$

avverte subito che la componente verticale della velocità è identicamente nulla.

L'equazione del moto presenta così le componenti

$$\begin{aligned} -(2\omega_e \wedge \mathbf{v})_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} &= 0, \\ -(2\omega_e \wedge \mathbf{v})_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} &= 0, \\ -g - (2\omega_e \wedge \mathbf{v})_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

L'ultima di queste relazioni, derivata rispetto ad x , oppure ad y , mostra che

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) = 0,$$

e quindi che il gradiente orizzontale della pressione p è indipendente da z . Convien valutarlo perciò ad alta quota, dove la velocità si riduce alla velocità uniforme v_a . In questo campo asintotico, indicata con ϑ' la latitudine media locale, ossia il complemento a $\pi/2$ dell'angolo formato da ω_g con la direzione positiva dall'asse z , le proiezioni orizzontali dell'equazione del moto porgono

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 2\omega_g v_a \sin \vartheta',$$

e questo risultato resta valido, come si è detto, in tutta la massa fluida.

Il problema è così ricondotto alla ricerca delle velocità $v_x(z)$ e $v_y(z)$ che soddisfano le equazioni

$$2\omega_g v_y \sin \vartheta' + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = 0,$$

$$-2\omega_g (v_x - v_a) \sin \vartheta' + \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} = 0,$$

che si annullano su $z=0$ e che tendono a v_a , o, rispettivamente, a zero, con l'aumentare di z . Determinato l'andamento delle velocità, la proiezione lungo z dell'equazione del moto consente infine di valutare il gradiente verticale della pressione.

È facile controllare che la soluzione cercata è quella

$$v_x = v_a - v_a \cos \sqrt{\frac{z^2 \omega_g |\sin \vartheta'|}{\nu}} \exp \left[-\sqrt{\frac{z^2 \omega_g |\sin \vartheta'|}{\nu}} \right]$$

$$v_y = \pm v_a \sin \sqrt{\frac{z^2 \omega_g |\sin \vartheta'|}{\nu}} \exp \left[-\sqrt{\frac{z^2 \omega_g |\sin \vartheta'|}{\nu}} \right],$$

già indicata da Ekman nel 1905, nella quale il segno superiore va utilizzato per l'emisfero nord, dove è $\vartheta' > 0$, mentre quello inferiore va impiegato per l'emisfero sud, dove è $\vartheta' < 0$.

Gli scarti di queste velocità dal valore assintotico v_a della v_x si riducono a meno dell'1% già quando

$$\frac{z^2 \omega_g |\sin \vartheta'|}{\nu} \simeq 25,$$

e la vorticità resta perciò confinata entro la fascia più prossima al suolo, di spessore

$$5 \sqrt{\frac{\nu}{\omega_g |\sin \vartheta'|}}.$$

Un'idea dell'andamento effettivo delle velocità è fornito dalla figura 12.7, che si riferisce all'emisfero nord.

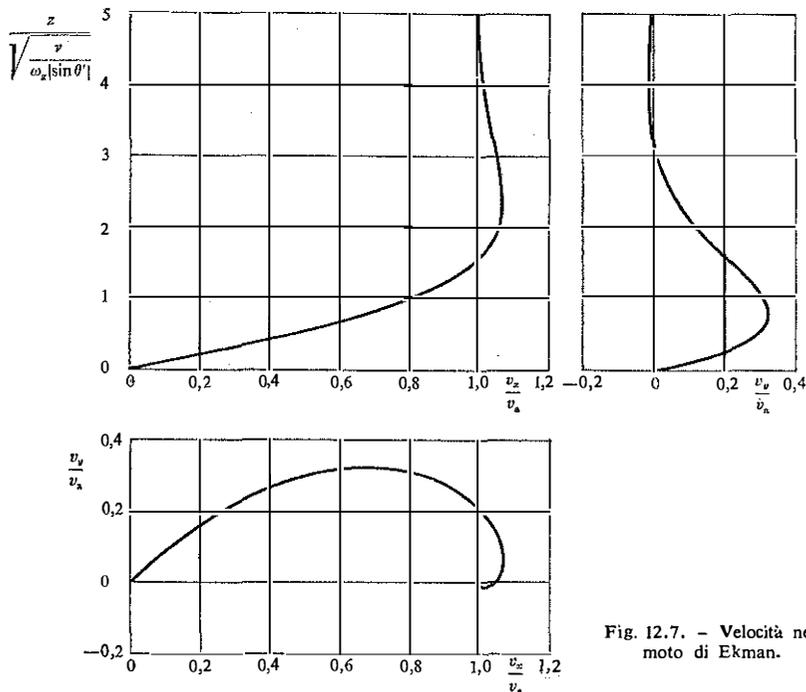


Fig. 12.7. - Velocità nel moto di Ekman.

Le correnti uniformi esistenti sui singoli piani orizzontali sono diverse per intensità e per direzione: avvicinandosi al suolo sono via via meno intense e, per un osservatore che guardi il moto dall'alto, sempre più deviate in senso antiorario. Sull'emisfero sud la deviazione è inversa. La deviazione massima rispetto alla direzione di v_a vale, in modulo,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \left| \frac{v_y}{v_x} \right| = \frac{\pi}{4}.$$

L'andamento della pressione $p(z)$, come si è visto, è determinato dalla proiezione lungo z dell'equazione del moto

$$-g - 2\omega_g \cos \vartheta' (-v_x \sin \varphi + v_y \cos \varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0,$$

nella quale φ è l'angolo di scostamento dell'asse x positivo dalla dire-

zione nord, valutato in senso orario da un osservatore che guardi il moto dall'alto. Indicata con $p(0)$ la pressione al suolo, ne segue subito

$$p = p(0) - \rho g z - 2 \rho \omega_g v_a \cos \vartheta' \sin \phi - \rho \cos \vartheta' v_a \sqrt{\frac{\nu \omega_g}{|\sin \vartheta'|}} \exp \left[- \sqrt{\frac{z^2 \omega_g |\sin \vartheta'|}{\nu}} \right] \cdot \left\{ - \left[\cos \sqrt{\frac{z^2 \omega_g |\sin \vartheta'|}{\nu}} - \sin \sqrt{\frac{z^2 \omega_g |\sin \vartheta'|}{\nu}} \right] \sin \phi \mp \mp \left[\cos \sqrt{\frac{z^2 \omega_g |\sin \vartheta'|}{\nu}} + \sin \sqrt{\frac{z^2 \omega_g |\sin \vartheta'|}{\nu}} \right] \cos \phi \right\}$$

nella quale, al solito, il segno superiore riguarda l'emisfero nord, ed il segno inferiore quello sud.

La forza orizzontale esercitata dal fluido sul suolo è uniforme ed ha componenti, per unità d'area,

$$[T_{-z,x}]_{z=0} = -\mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial(-z)} \right]_{z=0} = \rho \nu \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} \right]_{z=0} = \rho v_a \sqrt{\nu \omega_g |\sin \vartheta'|}$$

$$[T_{-z,y}]_{z=0} = -\mu \left[\frac{\partial v_y}{\partial(-z)} \right]_{z=0} = \rho \nu \left[\frac{\partial v_y}{\partial z} \right]_{z=0} = \pm \rho v_a \sqrt{\nu \omega_g |\sin \vartheta'|},$$

con la convenzione sul doppio segno già più volte citata.

12.6. Concetto di strato limite.

Il moto di un fluido a distanza sufficientemente grande dalle pareti solide può essere inquadrato spesso nello schema di moto irrotazionale ed isocoro: esempi del genere sono stati esposti nei quattro paragrafi che precedono.

Quando il moto, a distanza abbastanza grande dalle pareti, si riduce ad un moto irrotazionale ed isocoro, le componenti della velocità divengono armoniche, come si è già messo in evidenza nel paragrafo 5.7. Nelle equazioni di Navier, i termini legati alla viscosità sono allora identicamente nulli, e le equazioni stesse si riducono a quelle di Euler.

L'effetto della viscosità riesce invece, di norma, essenziale per descrivere il moto in prossimità delle pareti: risulta infatti dalle conclusioni del paragrafo 7.7 che lo schema di fluido ideale non può fornire, abitualmente, campi di velocità continui che soddisfino la condizione di aderenza del fluido alla parete solida. Lo schema di fluido viscoso, per contro, consente di rispettare la condizione di velocità nulla alla parete, al prezzo dell'introduzione di una adeguata vorticità presso la parete stessa.

Se questa vorticità resta confinata vicino alla parete, si dice che la zona costituisce uno *strato limite* del campo del moto.

L'introduzione del concetto di strato limite non semplifica, di per sé, lo studio del moto: si tratta sempre di risolvere le equazioni di Navier, anche se si ammette in partenza che l'importanza relativa dei termini contenenti la viscosità si estingua al crescere della distanza dalla parete.

Spesso, però, lo spessore dello strato limite è veramente esiguo nei confronti delle dimensioni generali del campo interessato dal moto, e questo consente di introdurre notevoli semplificazioni nelle equazioni di Navier. Il genere di approssimazioni utilizzabili verrà esposto nel paragrafo seguente, a proposito di un problema che costituisce il capostipite degli studi sullo strato limite.

12.7. Strato limite laminare.

Una corrente con velocità \mathbf{v}_a inizialmente uniforme giunge a lambire una lastra piana, disposta parallelamente alla \mathbf{v}_a , ed avente spessore irrilevante. Si ammette che il fluido abbia densità ρ e viscosità cinematica ν uniformi e permanenti, e che sia soggetto a forze specifiche di massa \mathbf{f} uniformi. Si ammette inoltre che la vorticità sviluppata a contatto con la lastra resti confinata in una zona di spessore limitato rispetto alla dimensione longitudinale della lastra stessa.

Date le ipotesi fatte, si richiede che il moto, a distanza sufficientemente grande dalla lastra, soddisfi l'equazione di Euler

$$\mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p = \frac{D\mathbf{v}}{Dt},$$

che corrisponde all'equazione di Navier privata del termine contenente la viscosità, e che soddisfi invece l'equazione completa di Navier

$$\mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt}$$

entro lo strato limite interessato dalla vorticità. In entrambe le zone, vale l'equazione di continuità

$$\text{div } \mathbf{v} = 0.$$

Si vuole infine che la velocità \mathbf{v} si annulli sulla superficie della lastra.

Al solito, si può concentrare l'attenzione, anziché sulla pressione effet-

tiva p , solamente sul suo eccesso rispetto al valore idrostatico p_1 , determinato in base all'equazione

$$\mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p_1 = 0.$$

In particolare, tale eccesso si riduce a zero nelle zone in cui la velocità è uniforme.

Le altre possibili semplificazioni del problema sono invece caratteristiche della teoria dello strato limite. Esse sono state indicate da Prandtl nel 1904.

Si può ritenere che, internamente allo strato limite e lungo le singole normali alla parete, le variazioni dell'eccesso di pressione sul livello idrostatico siano inapprezzabili. Ciò equivale ad ammettere che la pressione abbia il valore idrostatico in tutta la massa fluida, perché si è già riconosciuto che essa ha tale valore esternamente allo strato limite.

Nell'ulteriore ipotesi che lo spessore dello strato limite aumenti lentamente nella direzione della corrente esterna, si può assumere che, almeno al confine esterno dello strato, la componente di velocità parallela alla parete sia molto più importante della componente ad essa normale. Sotto la medesima ipotesi di lenta variazione dello spessore dello strato limite, si può assumere pure che, entro tutto lo strato, le derivate prime e seconde della velocità parallela alla parete, eseguite nella direzione della corrente, siano molto minori delle analoghe derivate eseguite in direzione normale alla parete.

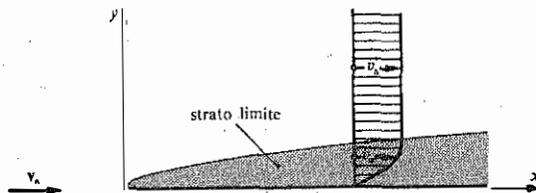


Fig. 12.8. - Schema di strato limite laminare.

Adottato l'asse x parallelo ed equiverso alla v_a , con origine sul bordo d'attacco della lastra, e l'asse y normale alla lastra stessa, come indicato in figura 12.8, queste ultime ipotesi si traducono nelle scritture

$$|v_x| \gg |v_y|, \quad \left| \frac{\partial v_x}{\partial x} \right| \ll \left| \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|, \quad \left| \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right|.$$

Infine, osservando che il moto è piano, si conclude che, per la zona occupata dallo strato limite, l'equazione di Navier assume la forma

$$v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Per il quadrante $x > 0, y \geq 0$, ed in termini della funzione ψ di Lagrange, la soluzione è del tipo

$$\psi = \sqrt{v v_a x} f \left(y \sqrt{\frac{v_a}{v x}} \right).$$

Essa rappresenta le velocità

$$\begin{aligned} v_x &= v_a f', \\ v_y &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v v_a}{x}} \left(y \sqrt{\frac{v_a}{v x}} f' - f \right). \end{aligned}$$

Sostituendo, si controlla subito che la funzione incognita f deve soddisfare l'equazione

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0.$$

La f risulta poi completamente determinata dalle condizioni di aderenza alla parete $y = 0$

$$f(0) = f'(0) = 0,$$

e dalla condizione che, al crescere della distanza dalla parete, dove la v_x tende al valore v_a , la f' si riduca ad 1.

Il calcolo numerico, iniziato da Blasius nel 1908, conduce ai valori riportati nella tabella 12.2; l'andamento delle velocità v_x e v_y è indicato nella figura 12.9.

Intendendo che lo strato limite termini quando la v_x differisce solo dell'1% dalla velocità asintotica v_a , il che avviene per

$$y \sqrt{\frac{v_a}{v x}} \simeq 5,$$

si può dire che lo spessore dello strato limite vale

$$5 \sqrt{\frac{v x}{v_a}}.$$

Così, lo strato limite nasce sul bordo d'attacco della lastra ed assume uno spessore via via crescente con la radice della distanza dal bordo. Per

TABELLA 12.2. - Funzioni impiegate nello studio dello strato limite laminare.

$y\sqrt{\frac{v_a}{\nu x}}$	f''	f'	f	$y\sqrt{\frac{v_a}{\nu x}}$	f''	f'	f
0	0,3321	0	0	4,0	0,0642	0,9555	2,3058
0,2	0,3320	0,0664	0,0066	4,2	0,0505	0,9670	2,4981
0,4	0,3315	0,1328	0,0266	4,4	0,0390	0,9759	2,6924
0,6	0,3301	0,1989	0,0597	4,6	0,0295	0,9827	2,8883
0,8	0,3274	0,2647	0,1061	4,8	0,0219	0,9878	3,0853
1,0	0,3230	0,3298	0,1656	5,0	0,0159	0,9916	3,2833
1,2	0,3166	0,3939	0,2380	5,2	0,0113	0,9943	3,4819
1,4	0,3079	0,4563	0,3230	5,4	0,0079	0,9962	3,6809
1,6	0,2967	0,5168	0,4203	5,6	0,0054	0,9975	3,8803
1,8	0,2829	0,5748	0,5295	5,8	0,0037	0,9984	4,0799
2,0	0,2668	0,6298	0,6500	6,0	0,0024	0,9990	4,2796
2,2	0,2484	0,6813	0,7812	6,2	0,0016	0,9994	4,4795
2,4	0,2281	0,7290	0,9223	6,4	0,0010	0,9996	4,6794
2,6	0,2065	0,7725	1,0725	6,6	0,0006	0,9998	4,8793
2,8	0,1840	0,8115	1,2310	6,8	0,0004	0,9999	5,0793
3,0	0,1614	0,8461	1,3968	7,0	0,0002	0,9999	5,2793
3,2	0,1391	0,8761	1,5691	7,2	0,0001	1,0000	5,4793
3,4	0,1179	0,9018	1,7470	7,4	0,0001	1,0000	5,6792
3,6	0,0981	0,9233	1,9295	7,6	0,0000	1,0000	5,8792
3,8	0,0801	0,9411	2,1161	7,8	0,0000	1,0000	6,0792
4,0	0,0642	0,9555	2,3058	8,0	0,0000	1,0000	6,2792

$\nu = 1,14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, come può essere per l'acqua nelle normali condizioni ambientali, e per $v_a = 1 \text{ ms}^{-1}$, lo spessore dello strato limite è ancora di soli 5 mm ad 1 m dal bordo d'attacco. Per l'aria, nella stessa situazione, ma con $\nu = 14,6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, si ha invece uno spessore terminale di circa 19 mm.

Esternamente allo strato limite risulta

$$f' \simeq 1, \quad f \simeq -1,72 + y \sqrt{\frac{v_a}{\nu x}},$$

e perciò la componente trasversale della velocità tende qui al valore

$$v_y = 0,86 \sqrt{\frac{\nu v_a}{x}},$$

non nullo. La presenza di questa velocità di allontanamento dalla parete è connessa con il fatto che, al crescere di x , cresce lo spessore dello strato

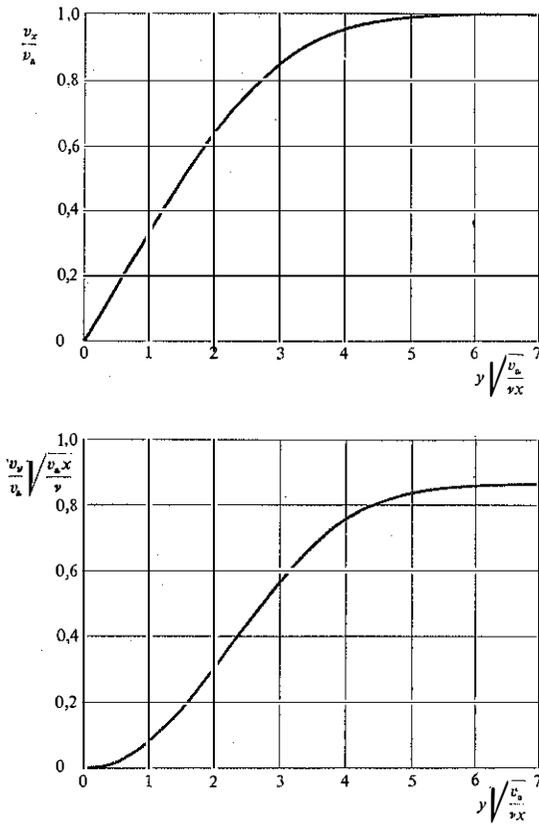


Fig. 12.9. - Distribuzione delle velocità entro lo strato limite laminare.

limite, ossia lo spessore della zona interessata da velocità longitudinali ridotte. La stessa velocità v_y è comunque così modesta rispetto a v_a da permettere di ritenere irrotazionale il moto all'esterno dello strato limite.

È immediato verificare, per contro, che le limitazioni per le componenti della velocità e per le loro derivate, poste alla base della teoria dello strato limite, non sono più soddisfatte in prossimità del bordo d'attacco, quando x è minore di circa ν/v_a . In questa zona, la teoria stessa non è più applicabile. Ma i risultati conseguiti per valori di x più elevati concordano bene con i rilievi sperimentali di velocità. Accordo ugualmente soddisfacente si è avuto per i valori delle forze tangenziali esercitate dallo strato limite sulla parete lambita.

Lo sforzo trasmesso dal fluido alla lastra è

$$[T_{-v,x}]_{y=0} = \mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} \right]_{y=0} = \rho \nu \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} \right]_{y=0} = \rho v_a^2 \sqrt{\frac{\nu}{v_a x}} [f'']_{y=0},$$

si ha

$$[f'']_{y=0} = 0,332.$$

Se la lastra ha sviluppo L nella direzione x , la forza nel verso delle x crescenti, F' , complessivamente esercitata dal fluido su una faccia della lastra per metro di larghezza vale

$$F' = \int_0^L [T_{-v,x}]_{y=0} dx = 0,332 \rho v_a^2 \sqrt{\frac{\nu}{v_a}} \int_0^L \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 0,664 \rho v_a^2 \sqrt{\frac{\nu}{v_a L}} L.$$

Il risultato è posto abitualmente nella forma

$$F' = C_R \rho \frac{v_a^2}{2} L,$$

introducendo il coefficiente di resistenza C_R , al quale compete il valore

$$C_R = 1,328 \sqrt{\frac{\nu}{v_a L}}.$$

Naturalmente, se è richiesta la forza per unità di larghezza $2F'$ esercitata su entrambe le facce opposte della lastra, il coefficiente C_R risulta raddoppiato.

12.8. Attrito fra correnti laminari parallele.

Fenomeni analoghi a quelli che si svolgono presso una parete piana lambita da una corrente ad essa parallela avvengono pure alla superficie di separazione fra due correnti parallele a contatto reciproco.

Si può pensare, ad esempio, a due correnti piane, separate fino ad $x = 0$ da una parete solida di spessore irrilevante collocata sul piano $y = 0$, come schematizzato in figura 12.10. Trascurando gli strati limite sviluppatisi a contatto con la parete, si ammette che le due correnti si presentino uniformi sull'ascissa $x = 0$. Siano v_{a1} , ρ_1 , e ν_1 la velocità lungo x , la densità e la viscosità cinematica della corrente che attraversa il semipiano $y > 0$; e siano v_{a2} , ρ_2 , e ν_2 i corrispondenti valori per la corrente in transito ove è $y < 0$. Si ammette inoltre che le densità e le viscosità cine-

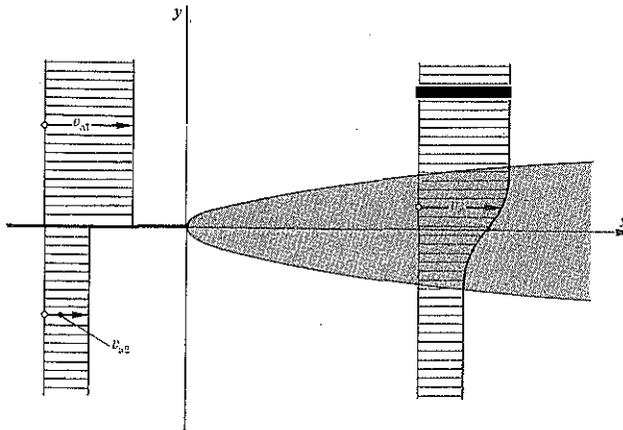


Fig. 12.10. – Correnti parallele che giungono a contatto reciproco sviluppando uno strato limite laminare.

matiche non dipendano da x , e che le componenti lungo l'asse x delle velocità conservino i valori ora indicati anche al crescere dell'ascissa x , purché l'ordinata y sia, in modulo, abbastanza elevata.

Nello strato limite che si forma intorno al semipiano x positivo, si ritengono utilizzabili le equazioni approssimate

$$\begin{aligned} \nu_1 \frac{\partial^2 v_{x1}}{\partial y^2} &= v_{x1} \frac{\partial v_{x1}}{\partial x} + v_{y1} \frac{\partial v_{x1}}{\partial y}, \\ \nu_2 \frac{\partial^2 v_{x2}}{\partial y^2} &= v_{x2} \frac{\partial v_{x2}}{\partial x} + v_{y2} \frac{\partial v_{x2}}{\partial y}, \end{aligned}$$

in tutto analoghe a quelle viste nel caso della corrente che si muove parallelamente ad una lastra piana. Ora i due strati limite, oltre che raccordarsi con le correnti indisturbate esterne, devono anche saldarsi fra loro. Occorre perciò che entrambe le velocità trasversali v_{y1} e v_{y2} siano nulle sul semipiano positivo $y=0$, e che, sullo stesso semipiano, siano continui gli sforzi tangenziali esercitati da ciascuna corrente sull'altra. Quest'ultima condizione, che si traduce nella scrittura

$$\varrho_1 \nu_1 \left[\frac{\partial v_{x1}}{\partial y} \right]_{y=0} = \varrho_2 \nu_2 \left[\frac{\partial v_{x2}}{\partial y} \right]_{y=0},$$

implica una discontinuità nei gradienti trasversali delle velocità lungo x , quando i due fluidi hanno viscosità dinamiche $\varrho\nu$ differenti.

L'uniformità delle ϱ consente di ricorrere ancora alle funzioni di corrente di Lagrange per descrivere i campi delle velocità. Si verifica subito che la coppia di soluzioni richieste è del tipo

$$\psi_1 = \sqrt{v_1 v_{a1}} x f_1 \left(y \sqrt{\frac{v_{a1}}{v_1 x}} \right),$$

$$\psi_2 = \sqrt{v_2 v_{a1}} x f_2 \left(y \sqrt{\frac{v_{a1}}{v_2 x}} \right),$$

purché le due funzioni f_1 ed f_2 soddisfino le equazioni indefinite

$$f_1''' + \frac{1}{2} f_1 f_1'' = 0,$$

$$f_2''' + \frac{1}{2} f_2 f_2'' = 0,$$

abbiano derivate prime tendenti asintoticamente ai valori

$$f_1' = 1, \quad f_2' = \frac{v_{a2}}{v_{a1}}$$

per grandi distanze da $y = 0$, e siano in accordo con le condizioni di

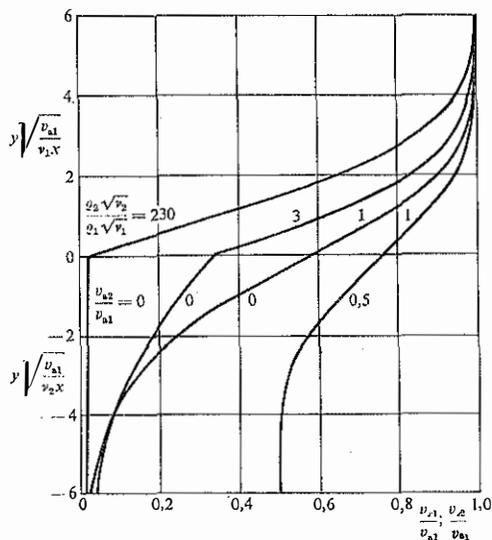


Fig. 12.11. - Velocità nello strato limite laminare prodotto da correnti parallele inizialmente uniformi.

saldatura

$$[f_1]_{y=0} = [f_2]_{y=0} = 0, \\ \varrho_1 \sqrt{\nu_1} [f_1']_{y=0} = \varrho_2 \sqrt{\nu_2} [f_2']_{y=0}.$$

La figura 12.11 riporta le velocità longitudinali relative

$$\frac{v_{x1}}{v_{a1}} = f_1 \left(y \sqrt{\frac{v_{a1}}{\nu_1 x}} \right), \quad \frac{v_{x2}}{v_{a1}} = f_2 \left(y \sqrt{\frac{v_{a1}}{\nu_2 x}} \right)$$

ottenute con integrazioni numeriche. Tali funzioni, oltre che dal loro argomento, dipendono solo dal rapporto $\varrho_2 \sqrt{\nu_2} / \varrho_1 \sqrt{\nu_1}$ e da quello v_{a2} / v_{a1} . L'uso nella figura di due diverse scale per le ordinate fa sì che il rapporto fra i coefficienti angolari delle due tangenti in $y=0$ a ciascuna curva non si mantenga inalterato passando a scale reali, uniformi. Si è già notato in precedenza che i profili delle velocità longitudinali hanno un flesso su $y=0$ quando i due fluidi presentano la medesima viscosità dinamica $\varrho\nu$. Per essere

$$\frac{\partial \frac{v_{x1}}{v_{a1}}}{\partial y} = \frac{\partial \frac{v_{x1}}{v_{a1}}}{\partial \left(y \sqrt{\frac{v_{a1}}{\nu_1 x}} \right)} \sqrt{\frac{v_{a1}}{\nu_1 x}}, \quad \frac{\partial \frac{v_{x2}}{v_{a1}}}{\partial y} = \frac{\partial \frac{v_{x2}}{v_{a1}}}{\partial \left(y \sqrt{\frac{v_{a1}}{\nu_2 x}} \right)} \sqrt{\frac{v_{a1}}{\nu_2 x}},$$

compare un flesso analogo nella figura in esame se e solo se, contemporaneamente, è pure $\sqrt{\nu_1} = \sqrt{\nu_2}$ e quindi $\varrho_2 \sqrt{\nu_2} / \varrho_1 \sqrt{\nu_1} = 1$.

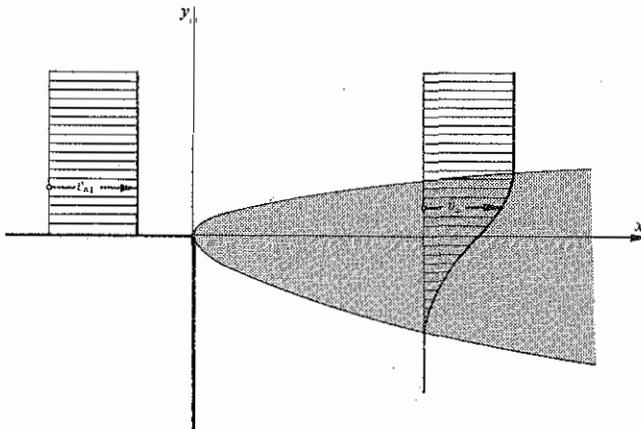


Fig. 12.12. — Corrente uniforme che abbandona tangenzialmente una parete in corrispondenza di uno spigolo vivo, trascinando in moto il fluido ambiente.

Le curve tracciate in figura 12.11 per $v_{a2} = 0$ riguardano il caso di una corrente avente velocità di arrivo v_{a1} che lambisce una massa fluida altrimenti ferma. Sul semipiano $x = 0$, $y \leq 0$ può essere allora collocata una parete solida, come indicato in figura 12.12, ed i risultati esposti riguardano perciò anche il moto di una corrente che abbandona tangenzialmente uno spigolo vivo. Il valore 230 del parametro $\rho_2 \sqrt{v_2} / \rho_1 \sqrt{v_1}$ si presenta quando il fluido in arrivo è aria ed il fluido lambito è acqua.

12.9. Separazione dello strato limite.

Non sempre il moto in prossimità di un corpo solido si svolge in assenza di gradienti longitudinali di pressione diversi da quelli atti a compensare l'effetto delle forze esterne di massa. Nel paragrafo 8.3 si è visto, ad esempio, che una corrente ideale piana che investe normalmente una lastra piana presenta pressioni in eccesso sul livello idrostatico via via minori man mano che ci si allontana dal punto di ristagno. Per contro, come si è osservato nello stesso paragrafo 8.3, nel caso del cilindro circolare immerso in una corrente asintoticamente uniforme e normale al suo asse l'eccesso di pressione a poppa aumenta progressivamente quando ci si avvicina al punto di ristagno terminale.

L'esperienza mostra che un gradiente di pressione netta orientato in modo da favorire il moto costipa sempre lo strato limite. Nel caso particolare della lastra piana investita frontalmente, il gradiente di pressione è tale da impedire del tutto il progressivo aumento dello spessore dello strato limite, giusto il calcolo di Hiemenz riportato nel paragrafo 12.4.

Invece, un gradiente di pressione netta che contrasti il moto espande sempre lo strato limite, giungendo pure, quando è abbastanza intenso, ad allontanare dalla parete solida la corrente principale.

In quest'ultimo caso, si ha uno scollamento dello strato limite dalla

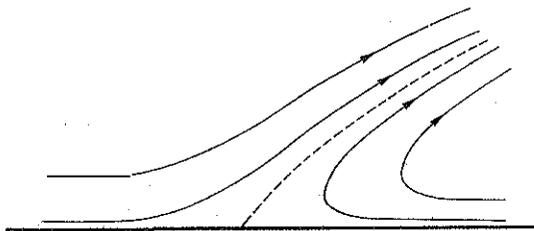


Fig. 12.13. - Distacco della corrente da una parete.

parete e la formazione, più a valle, di un nuovo strato limite con velocità contrarie a quelle di partenza. Nascono così due zone distinte, separate dalla linea di corrente che si distacca dalla parete nel punto d'inversione della velocità longitudinale. La situazione è quella schematizzata in figura 12.13.

Basandosi soltanto sulle informazioni generali acquisite per via sperimentale, la collocazione del punto di distacco della vena si presenta evidente a priori solo in pochi casi: ad esempio, in corrispondenza di uno spigolo vivo e convesso della parete deve avvenire un distacco di vena. Casi del genere sono già stati presi in esame nei paragrafi 11.3 ed 11.4, a proposito dell'efflusso da un'apertura di un serbatoio o dell'imbocco di una condotta.

Ma quando mancano spigoli di questo tipo la posizione del punto di distacco dipende, fra l'altro, dall'andamento generale del moto, e non può essere indicata disgiuntamente dall'esame globale del moto stesso: nell'esempio del cilindro investito dalla corrente uniforme il punto di scollamento può spostarsi avanti od indietro, lungo la circonferenza, a seconda dei valori assunti dalla velocità della corrente in arrivo, dal diametro del cilindro e dalla viscosità cinematica del fluido.

Difficoltà analoghe sono legate alla collocazione dell'eventuale punto di riattacco della vena alla parete, ed alla determinazione dell'ampiezza e della forma della sacca di fluido che la vena separata racchiude a valle, escludendola dal moto d'insieme. Una situazione tipica è schematizzata nella figura 12.14.

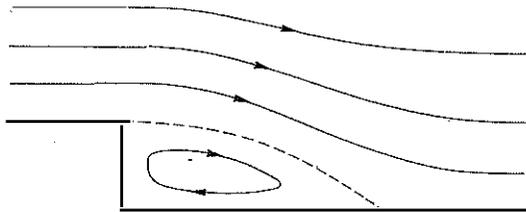


Fig. 12.14. - Corrente che aderisce di nuovo alla parete.

In ogni caso i fenomeni di separazione dello strato limite dipendono sempre dal verso generale del moto. Affinando lo schema di fluido ideale con la considerazione dei fatti connessi allo strato limite si possono perciò aggirare le difficoltà d'impiego del puro schema di fluido ideale dovute alla reversibilità di questi tipi di moto, cui si è fatto cenno nel paragrafo 7.7.

12.10. Strato limite turbolento.

Il campo di moto entro lo strato limite può risultare modificato, oltre che da fenomeni di distacco della vena del genere considerato nel paragrafo che precede, anche dal passaggio del deflusso dal regime laminare a quello turbolento, per trasformazioni analoghe a quelle viste nel paragrafo 10.1.

Ad esempio, nel caso della corrente di velocità v_a , inizialmente uniforme, che lambisce una lastra ad essa parallela, come nel problema esaminato nel paragrafo 12.7, l'esperienza mostra che lo strato limite si mantiene laminare solo finché il numero di Reynolds

$$Re = \frac{v_a x}{\nu}$$

definito con la distanza x dal bordo di attacco, resta inferiore ad un livello compreso nell'intervallo

$$Re_{crit.} = 3 \cdot 10^5 \div 3 \cdot 10^6,$$

livello che è tanto maggiore quanto meno intensa è la turbolenza già presente nella corrente in arrivo.

Per numeri di Reynolds più alti del valore critico, inizia lo sviluppo di turbolenza entro lo strato limite. Il processo, di norma, si conclude quando il numero di Reynolds supera il valore

$$Re \simeq 10^8$$

anche se permane ancora, a contatto con la parete solida, un substrato di spessore estremamente ridotto, entro il quale il moto, almeno in forma sporadica, è ancora dominato dalle tensioni viscose. Questo substrato residuo è comunque destinato ad essere distrutto dalla turbolenza quando il numero di Reynolds cresce ulteriormente. La situazione generale è schematizzata in figura 12.15.

Un'analisi completa del moto turbolento di strato limite in base ai principi generali della meccanica dei fluidi viscosi presenta le difficoltà già espone nel paragrafo 10.6. Ciò che può essere ottenuto abbastanza agevolmente è un legame fra lo spessore assunto dallo strato limite e la resistenza complessiva trasmessa alla parete, assumendo in partenza una distribuzione lungo la normale alla lastra delle velocità medie longitudinali ricavata per via sperimentale, e ricorrendo poi al teorema della quantità di moto.

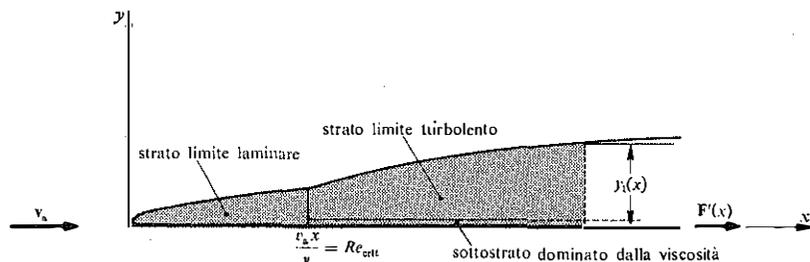


Fig. 12.15. - Passaggio dallo strato limite laminare a quello turbolento.

Se si fissa l'attenzione sul volume di controllo indicato con tratteggio nella figura 12.15, e se si ammette che la densità resti sempre ed ovunque costante, e che le pressioni siano distribuite con legge idrostatica, il risultante delle forze esterne per unità di sviluppo della lastra in direzione normale a \mathbf{v}_a si riduce alla forza di modulo $F'(x)$ esercitata in direzione x , ma in verso contrario, dalla lastra sulla corrente.

La portata di quantità di moto uscente dal volume di controllo attraverso la sua sezione terminale ha componente nella direzione e nel verso x pari a

$$\int_0^{y_1} \rho v_x^2 dy,$$

sempre con riferimento all'unità di sviluppo trasversale della lastra. Analogamente, attraverso il lembo libero dello strato limite, di ordinata $y_1(x)$, vettore normale interno \mathbf{n} , ed area A' per unità di sviluppo trasversale, esce una portata di quantità di moto con componente lungo x pari a

$$-\int_{A'} \rho v_a [\mathbf{v}(y_1) \cdot \mathbf{n}] dA'.$$

In condizioni di moto stazionario, l'equazione globale di continuità assicura che

$$\int_{A'} [\mathbf{v}(y_1) \cdot \mathbf{n}] dA' = \int_0^{y_1} v_x dy.$$

Così, la portata complessiva di quantità di moto uscente in direzione x dal volume di controllo può essere espressa nella forma

$$\hat{Q}'_{ux} = -\rho \int_0^{y_1} v_x (v_a - v_x) dy.$$