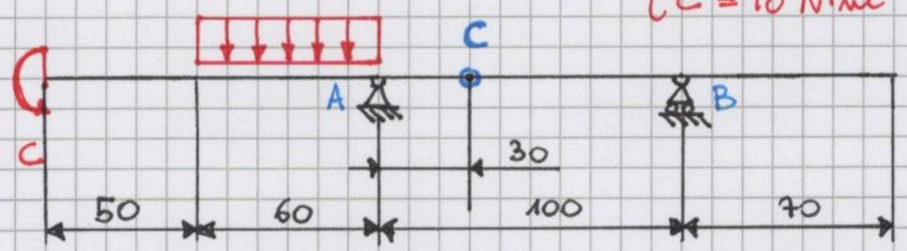
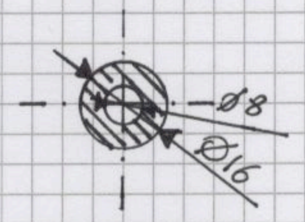
LINEA ELASTICA 26/11/2018 ①

COMPITO PROFESSOR AYMERICH 28/01/2013 ES 3

$\begin{cases} q = 2\ N/mm \\ C = 10\ N \cdot m \end{cases}$



SEZIONE



MATERIALE :
ALLUMINIO
$E = 70\ GPa$

• ANALISI STATICA

N° ASTE : 1

GDL : 3 → STRUTTURA ISOSTATICA

GDV : 3

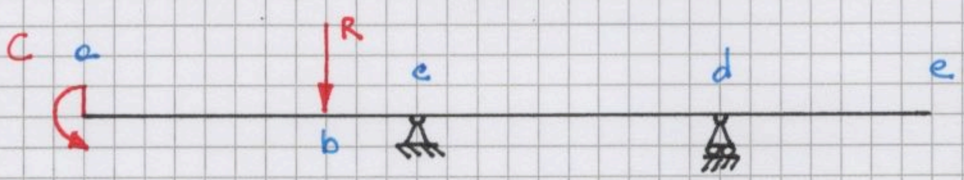
• ANALISI CINEMATICA

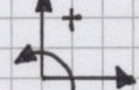
La cerniera A e il carrello B sono posizionati in modo che i centri di istantanea rotazione dell'uno e dell'altro abbiano intersezione nulla. Struttura NON LABILE.

• REAZIONI VINCOLARI

Risultante del carico uniforme distribuito :

$R = \int_l q\, dl = q \cdot (60) = 2 \cdot 60 = 120\ N$





EQUILIBRIO

• $H_c = \phi$

$V_c + V_d = R$

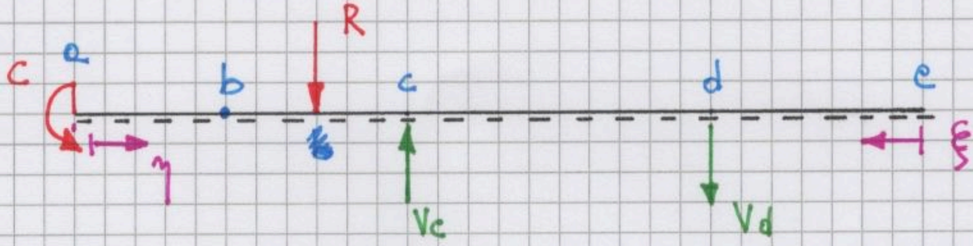
C: $V_d(100) + R(30) + C = \phi$

• $V_d = \dfrac{-\cancel{100}^{120}(30) - 10'000}{100} = -136\ N$ → • $V_c = R - V_d = \cancel{100}^{120} + 136 = 256\ N$

Come al solito cambiamo di segno V_d e invertiamo il vettore nella rappresentazione grafica.

- REAZIONI VINCOLARI

Schema di riepilogo



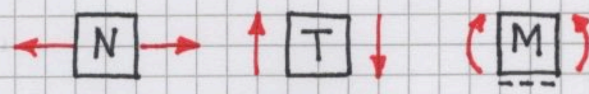
$$\begin{cases} V_c = 256\,N \\ V_d = 136\,N \end{cases}$$

Per lo studio delle azioni interne si utilizzeranno due coordinate curvilinee:

ξ per lo studio del tratto $e \to c$

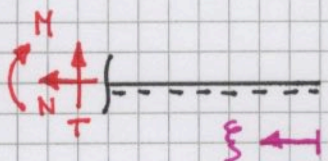
η per lo studio del tratto $a \to c$

- AZIONI INTERNE



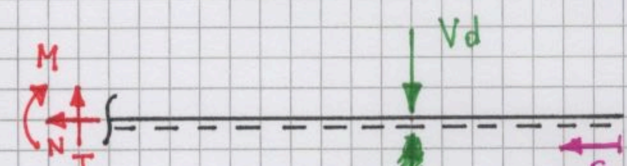
CONVENZIONI PER LA POSITIVITÀ DELLE AZIONI INTERNE

TRATTO $e \to d$ $\quad 0 < \xi < 70$



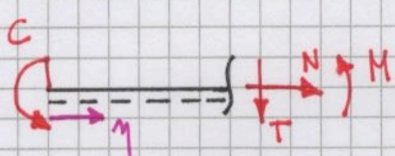
- $N = T = M = \emptyset$

TRATTO $d \to c$ $\quad 70 < \xi < 170$



- $N = \emptyset$
- $T = V_d = 136\,N$
- $M = -V_d\,(\xi - 70)$ $\begin{cases} M(70) = \emptyset \\ M(170) = -13600\,Nmm \end{cases}$

TRATTO $a \to b$ $\quad 0 < \eta < 50$



- $N = T = \emptyset$
- $M = -C = -10'000\,N\,mm$

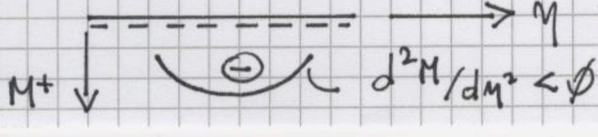
TRATTO $b \to c$ $\quad 50 < \eta < 110$

- $N = \emptyset$
- $T = -q(\eta - 50)$ $\begin{cases} T(50) = \emptyset \\ T(110) = -120\,N \end{cases}$

$T = \emptyset \to \bar{\eta} = 50\,mm$

- $M = -C - \dfrac{q(\eta-50)^2}{2} =$ $\begin{cases} M(50) = -C = -10'000\,Nmm \\ M(110) = -13600\,Nmm \end{cases}$

$\dfrac{dM^2}{d\eta^2} = -q < \emptyset \to$ funzione concava

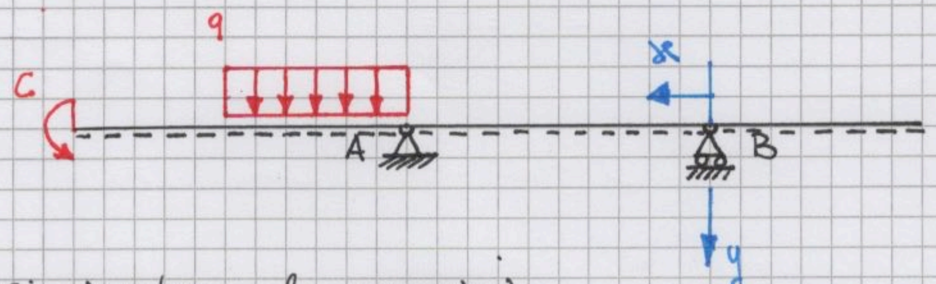


CALCOLO DELLA LINEA ELASTICA
SUL TRATTO A-B (c-d)

• Calcolo del momento di inerzia della sezione:
questa possiede momento centrifugo nullo, quindi essendo una sezione circolare come si ottiene:

$$I = \pi \frac{D^4 - d^4}{64} = \pi \frac{16^4 - 8^4}{64} = 3015.9289 \ mm^4$$

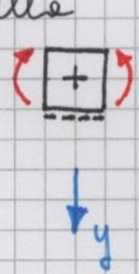
Nel caso di sezione circolare i momenti di inerzie calcolati rispetto a due assi perpendicolari diametrali sono uguali. Se la sezione non fosse stata circolare si sarebbe dovuto utilizzare il momento di inerzia calcolato rispetto a un asse perpendicolare al piano di sollecitazione.



Fissiamo un sistema di coordinate x nel punto B

Si ricordano le convenzioni per il tracciamento della linea elastica espressa come

$$y'' = -\frac{M(x)}{EI}$$



• Momento flettente positivo se tende le fibre inferiori
• Spostamenti y positivi se diretti verso il basso.

Rispetto al punto B il momento può essere espresso come:

$$0 < x < 100 \qquad M(x) = -V_d\, x = -136\, x$$

È ora necessario integrare l'equazione della linea elastica

$$EI\, y'' = -M(x) \quad \rightarrow \quad (EI) \int y''(x)dx = -\int M(x)\, dx$$

$$(EI) y'(x) = 136 \frac{x^2}{2} + C_1 \rightarrow (EI) \int y'(x)dx = \int \left(136 \frac{x^2}{2} + C_1\right) dx$$

$$(EI)\, y(x) = 136 \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$$

EQUAZIONE DELLA LINEA ELASTICA A-B

$$(EI)y(x) = 136\,\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 \quad \rightarrow \quad \text{SPOSTAMENTI}$$

$$(EI)\,y'(x) = 136\,\frac{x^2}{2} + C_1 \quad \rightarrow \quad \text{ROTAZIONI}$$

Per determinare le due costanti di integrazione C_1 e C_2 è necessario scrivere due condizioni agli estremi A e B.

PUNTO B $(x=0) \rightarrow y = 0$

$$(EI)0 = \frac{136}{6}(0)^3 + C_1(0) + C_2 \longrightarrow \underline{C_2 = 0}$$

PUNTO A $(x=100) \longrightarrow y = 0$

$$(EI)(0) = \frac{136}{6}(100)^3 + C_1\cdot(100) \longrightarrow C_1 = -\frac{136(100)^3}{600} = -2.2\bar{6}\,e05.$$

$$y(x) = \frac{136}{6}x^3 - 226'666,6667\,x \quad \rightarrow$$ equazione che governa gli spostamenti verticali

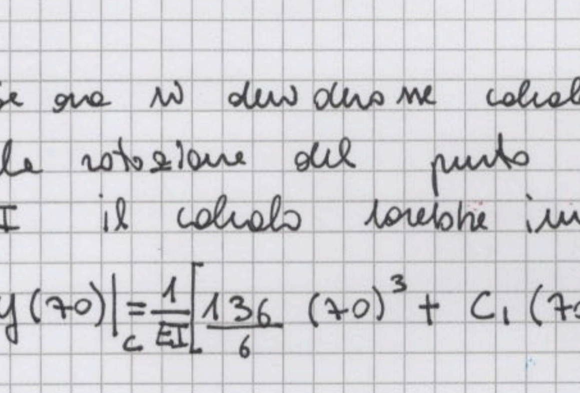
$$y'(x) = \frac{136}{2}x^2 - 226'666,6667 \quad \rightarrow$$ equazione che governa le rotazioni dell'asse.

Se ora si desiderasse calcolare lo spostamento verticale e la rotazione del punto C $(x = 70)$ dati $E = 70e3$ MPa e I il calcolo sarebbe immediato:

$$y(70)\Big|_C = \frac{1}{EI}\left[\frac{136}{6}(70)^3 + C_1(70)\right] = -0.0383 \text{ mm}$$

Spostamento negativo: siamo al di sopra dell'asse della trave.

$$y'(70) = \frac{1}{EI}\left[\frac{136}{2}(70)^2 + C_1\right] = +5.0462 \text{ rad}$$

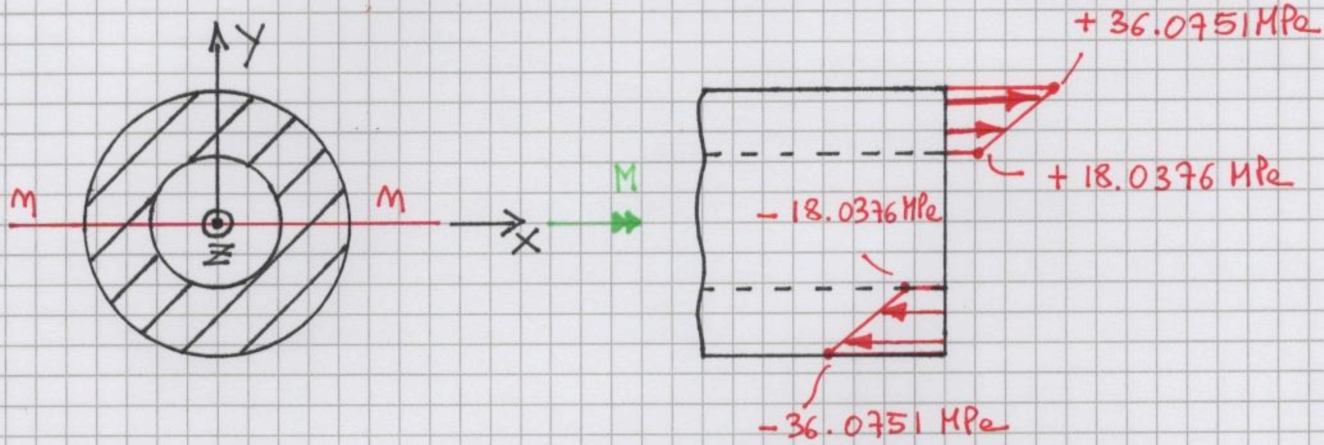


Per come sono disposti gli assi l'asse z della terna destrorsa esce dal piano del foglio. Dato che le rotazioni sono piccole è possibile confondere la tangente all'asse della trave (coincidente a sua volta con y') con l'angolo che essa forma con l'asse nello stato indeformato. $\tan(\alpha) \cong \alpha$ per $\alpha \rightarrow 0$.

CALCOLO DEGLI SFORZI

Si vuole calcolare lo stato di sforzo nella sezione in cui le sollecitazioni sono massime. La sollecitazione che provoca gli sforzi più gravosi nelle strutture che si analizzano è di solito il momento flettente. In questo caso ci si limiterà a calcolare gli sforzi dovuti esclusivamente a quest'ultimo.

Il punto in cui il momento è massimo (in valore assoluto) risulta essere il punto C e il suo valore è 13 600 Nmm. In questa sezione tende le fibre superiori della trave.



L'asse M-M rappresenta l'asse neutro, ovvero il luogo dei punti in cui le fibre non subiscono allungamenti o accorciamenti. Per il calcolo degli sforzi si utilizza la formula di Navier.

$$\sigma_z = \frac{M\,Y}{I_x} \quad \begin{cases} \sigma_z(Y=8) = \dfrac{13600\,(8)}{I_x} = 36.0751 \text{ MPa} \\[2ex] \sigma_z(Y=4) = \dfrac{13600\,(4)}{I_x} = 18.0376 \text{ MPa} \end{cases}$$

Per il calcolo delle deformazioni è sufficiente applicare la legge di Hooke: $\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E}$

$$\varepsilon_z(Y=8) = \frac{\sigma_z(Y=8)}{E} = 5.1536\,E{-}4 \text{ mm/mm}$$

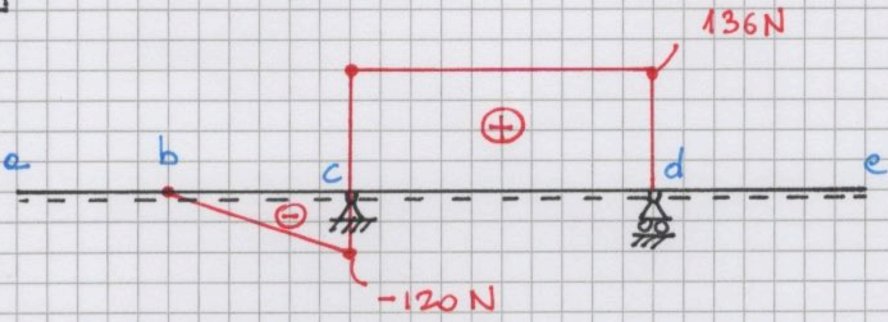
$$\varepsilon_z(Y=4) = \frac{\sigma_z(Y=4)}{E} = 2.5768\,E{-}4 \text{ mm/mm}$$

Si noti che la distribuzione degli sforzi è del tipo a farfalla.

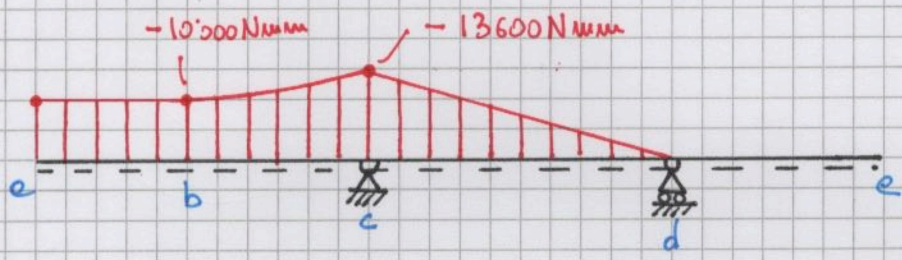
DIAGRAMMI DELLE AZIONI INTERNE

Azione normale assente.

T



M



OSSERVAZIONI:

- Momento flettente continuo, perché non vi sono coppie concentrate se non nell'estremo a della trave.
- La discontinuità del taglio nel punto c eguaglia la reazione vincolare V_c.