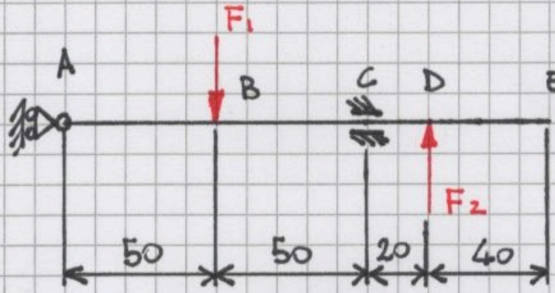
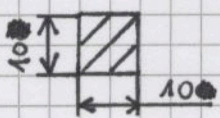
LINEA ELASTICA 3/12/2018

ALLUMINIO $F_1 = 1\ KN$ $F_2 = 5\ kN$
$E = 70\ GPa$

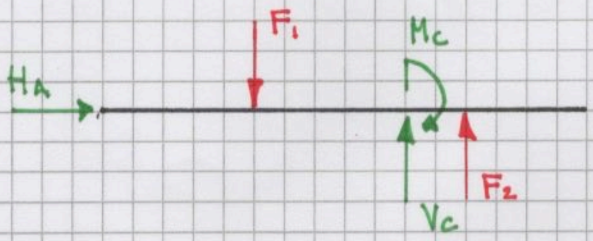
1) Calcolare l'equazione della linea elastica su TUTTA la trave
2) Calcolare rotazione e spostamento verticale del punto E.
3) Verificare il risultato ottenuto con il Teorema di Betti.

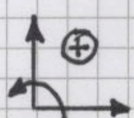




$J = \frac{bh^3}{12} = \frac{(10)^4}{12} = 833.33\ mm^4$

• CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI





$\xrightarrow{+}$ • $H_A = \emptyset$

$\uparrow +$ $V_C + F_2 - F_1 = \emptyset$

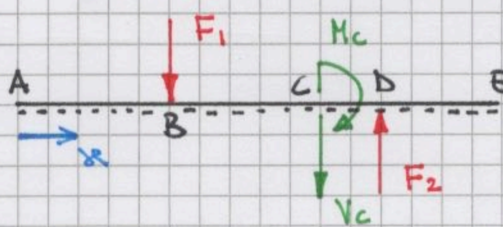
• $V_C = F_1 - F_2 = -4000\ N$

$\overset{+}{\curvearrowleft} C)$ $-M_C + F_1 \cdot (50) + F_2 (20) = \emptyset$

• $M_C = F_1 \cdot (50) + F_2 (20) = 150'000\ Nmm$

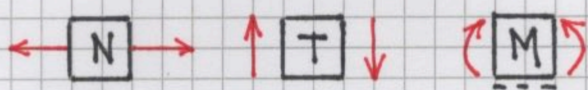
Ricapitolando

Come al solito procediamo a cambiare segno a Vc e invertire il suo verso nello schema.

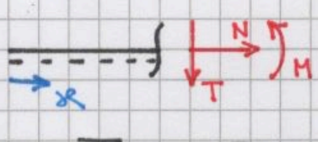


$$\begin{cases} V_C = 4000\ N \\ M_C = 150'000\ Nmm \end{cases}$$

• CALCOLO DELLE AZIONI INTERNE

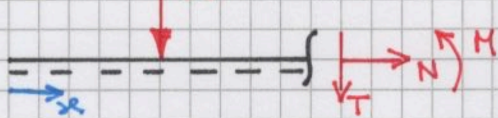


TRATTO $\overline{AB}$ $0 < x < 50$



$N = T = M = \emptyset$

TRATTO $\overline{BC}$ $50 < x < 100$



• $N = \emptyset$

$T + F_1 = \emptyset$

• $T = -F_1 = -1000N$

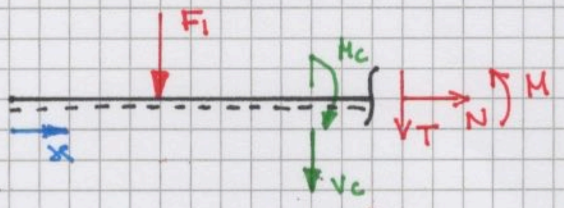
$M + F_1 (x - 50) = \emptyset$

• $M = -F_1 (x-50)$ $M(50) = \emptyset$

$M(100) = -50'000\ Nmm$

• CALCOLO DELLE AZIONI INTERNE

TRATTO $\overline{CD}$ $\quad 100 < x < 120$



$\cdot N = 0$

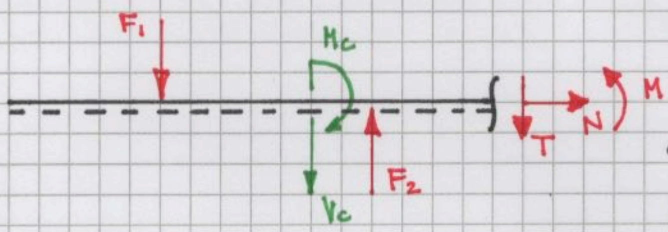
$T + F_1 + V_C = 0$

$\bullet\ T = -(F_1 + V_C) = -5000\,N$

$M + F_1(x-50) - M_C + V_C(x-100) = 0$

$\bullet\ M = M_C - F_1(x-50) + - V_C(x-100)$ $\qquad M(100) = 100'000\ Nmm$ $\qquad M(120) = \cancel{80000}\ 0\ Nmm$

TRATTO $\overline{DE}$ $\quad 120 < x < 160$



$\bullet\ N = 0$

$T + F_1 + V_C - F_2 = 0$

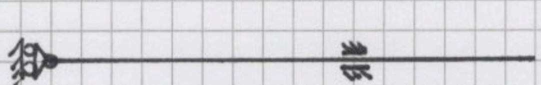
$\bullet\ T = F_2 - (F_1 + V_C) = 0$

$M + F_1(x-50) + V_C(x-100) - M_C - F_2(x-120) = 0$

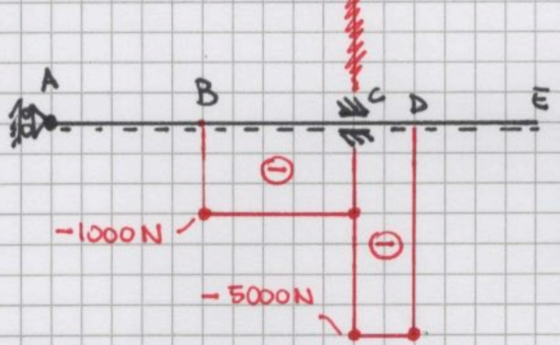
$\bullet\ M = 0 \longleftarrow \bullet\ M = M_C + F_2(x-120) - V_C(x-100) - F_1(x-50)$

$M(120) = 0 \qquad M(160) = 0$

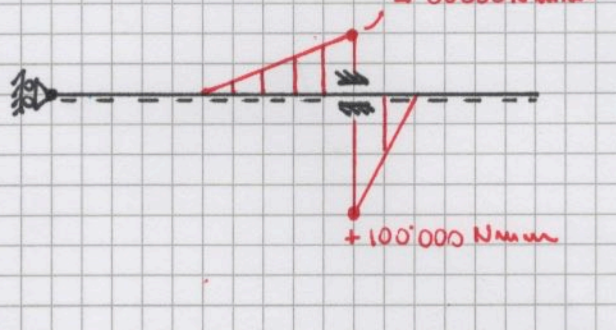
• DIAGRAMMI AZIONI INTERNE



$\boxed{N}$ ASSENTE

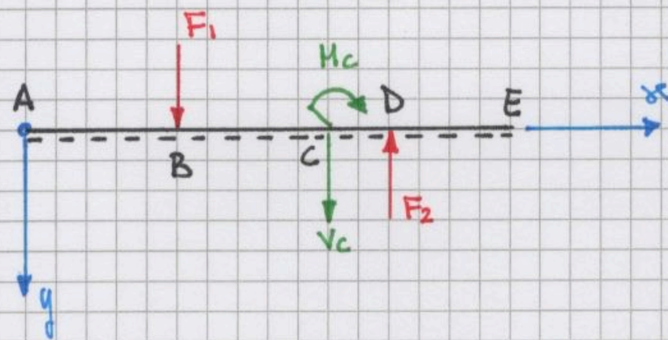


$\boxed{T}$ Nel punto C il salto del diagramma eguaglia la reazione V_C



$\boxed{M}$ Il salto nel punto C eguaglia il valore del momento M_C.

EQUAZIONE DELLA LINEA ELASTICA



$E = 70'000$ MPa

$J = 833.3333\ mm^4$

$y'' = -\dfrac{M(x)}{EJ}$ VALIDA PER:

1) Spostamenti positivi se diretti verso il basso $\downarrow y$
2) Momenti positivi se tendono le fibre inferiori.

INTEGRAZIONE

• TRATTO $\overline{AB}$ $0 < x < 50$

$M(x) = \emptyset$

$EJy'' = \emptyset \longrightarrow EJy' = C_1 \longrightarrow EJ\,y = C_1 x + C_2$

• TRATTO $\overline{BC}$ $50 < x < 100$

$M(x) = -F_1(x-50)$

$EJy'' = F_1(x-50) \longrightarrow EJ\,y' = F_1\dfrac{x^2}{2} - F_1(50)x + C_3$

$EJ\,y = F_1\dfrac{x^3}{6} - F_1(50)\dfrac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$

• TRATTO $\overline{CD}$ $100 < x < 120$

$M(x) = M_C - F_1(x-50) - V_C(x-100)$

$EJ\,y'' = -M_C + F_1(x-50) + V_C(x-100)$

$EJ\,y' = -M_C x + \dfrac{F_1 x^2}{2} - F_1(50)x + V_C\dfrac{x^2}{2} - V_C(100)x + C_5$

$EJ\,y = -M_C\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{F_1 x^3}{6} - F_1(50)\dfrac{x^2}{2} + V_C\dfrac{x^3}{6} - V_C(100)\dfrac{x^2}{2} + C_5 x + C_6$

• TRATTO $\overline{DE}$ $120 < x < 160$

$M(x) = M_C + F_2(x-120) - V_C(x-100) - F_1(x-50)$ $\quad EJy' = C_7$

$EJy'' = -M_C - F_2(x-120) + V_C(x-100) + F_1(x-50)$ $\quad EJy = C_7 x + C_8$

$EJy' = -M_C x - \dfrac{F_2 x^2}{2} + F_2(120)x + V_C\dfrac{x^2}{2} - V_C(100)x + F_1\dfrac{x^2}{2} - F_1(50)x + C_7$

$EJ\,y = -M_C\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{F_2 x^3}{6} + F_2(120)\dfrac{x^2}{2} + V_C\dfrac{x^3}{6} - V_C(100)\dfrac{x^2}{2} + F_1\dfrac{x^3}{6} +$

$\quad - F_1(50)\dfrac{x^2}{2} + C_7 x + C_8$

CALCOLO DELLE COSTANTI DI INTEGRAZIONE

Dato che abbiamo integrato l'equazione della linea elastica su 4 tratti dobbiamo determinare 8 costanti di integrazione. Oltre alle condizioni al contorno fornite dai vincoli è necessario ricordare che nei punti tra due tratti consecutivi tangente e rotazione d'asse devono essere uguali. In poche parole la funzione deve essere continua e derivabile in ogni punto.

$y_C = \emptyset$, $y'_C = \emptyset$ $\rightarrow$ CONDIZIONI DI VINCOLO ($\overline{BC}$ e $\overline{CD}$)

$y_{AB}(B) = y_{BC}(B)$; $y'_{AB}(B) = y'_{BC}(B)$ $\rightarrow$ CONTINUITÀ IN B

$y_{CD}(D) = y_{DE}(D)$; $y'_{CD}(D) = y'_{DE}(D)$ $\rightarrow$ CONTINUITÀ IN D

Si inizia dal tratto $\overline{BC}$:

- TRATTO $\overline{BC}$ $x = 100 \rightarrow y'_{BC} = \emptyset$, $y_{BC} = \emptyset$

$$\emptyset = F_1 \frac{(100)^2}{2} - F_1(50)(100) + C_3 \rightarrow C_3 = \emptyset$$

$$\emptyset = F_1 \frac{(100)^3}{6} - F_1(50)\frac{(100)^2}{2} + C_4 \rightarrow C_4 = 83'333'333,3333$$

- $y'_{BC}(x) = \frac{1}{EJ}\left[F_1 \frac{x^2}{2} - F_1(50)x\right]$

- $y_{BC}(x) = \frac{1}{EJ}\left[F_1 \frac{x^3}{6} - F_1(50)\frac{x^2}{2} + 8.33E07\right]$

- TRATTO $\overline{CD}$ $x = 100 \rightarrow y'_{CD} = \emptyset$, $y_{CD} = \emptyset$

$$\emptyset = -M_C(100) + F_1\frac{(100)^2}{2} - F_1(50)(100) + V_C\frac{(100)^2}{2} - V_C(100)^2 + C_5$$

$C_5 = 35'000'000$

$$\emptyset = -M_C\frac{(100)^2}{2} + F_1\frac{(100)^3}{6} - F_1(50)\frac{(100)^2}{2} + V_C\frac{(100)^3}{6} - V_C\frac{(100)^3}{2} + C_5(100) + C_6$$

$C_6 = -1.3333E09$

CALCOLO DELLE COSTANTI DI INTEGRAZIONE

- TRATTO $\overline{CD}$

- $y'_{CD}(x) = \frac{1}{EJ}\left[-M_C x + F_1 \frac{x^2}{2} - F_1(50)x + V_C \frac{x^2}{2} - V_C(100)x + 35E6\right]$

- $y_{CD}(x) = \frac{1}{EJ}\left[-M_C \frac{x^2}{2} + F_1 \frac{x^3}{6} - F_1(50)\frac{x^2}{2} + V_C \frac{x^3}{6} - V_C(100)\frac{x^2}{2} + (35E6)x + - 1.333E09\right]$

- TRATTO $\overline{AB}$ $\quad y_{AB} = y_{BC}$, $y'_{AB} = y'_{BC}$ per $x = 50$ (B)

$y'_{BC}(50) = C_1 \longrightarrow C_1 = -1'250'000$

$y_{BC}(50) = C_1 x(50) + C_2 \qquad C_2 = 1.0467E08$

- $y'_{AB}(x) = \frac{1}{EJ}\left[-1'250'000\right]$

- $y_{AB}(x) = \frac{1}{EJ}\left[-1'250'000\,x + 1.04167E08\right]$

- TRATTO $\overline{DE}$ $\quad y_{CD}(120) = y_{DE}(120)$; $y'_{CD}(120) = y'_{DE}(120)$

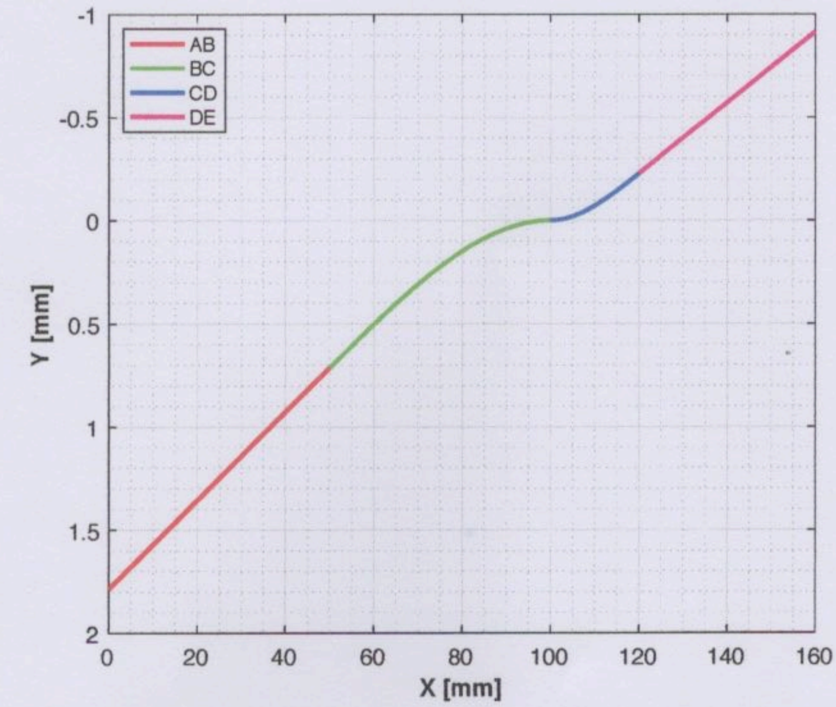
$y'_{CD}(120) = C_7 \longrightarrow C_7 = -1E06$

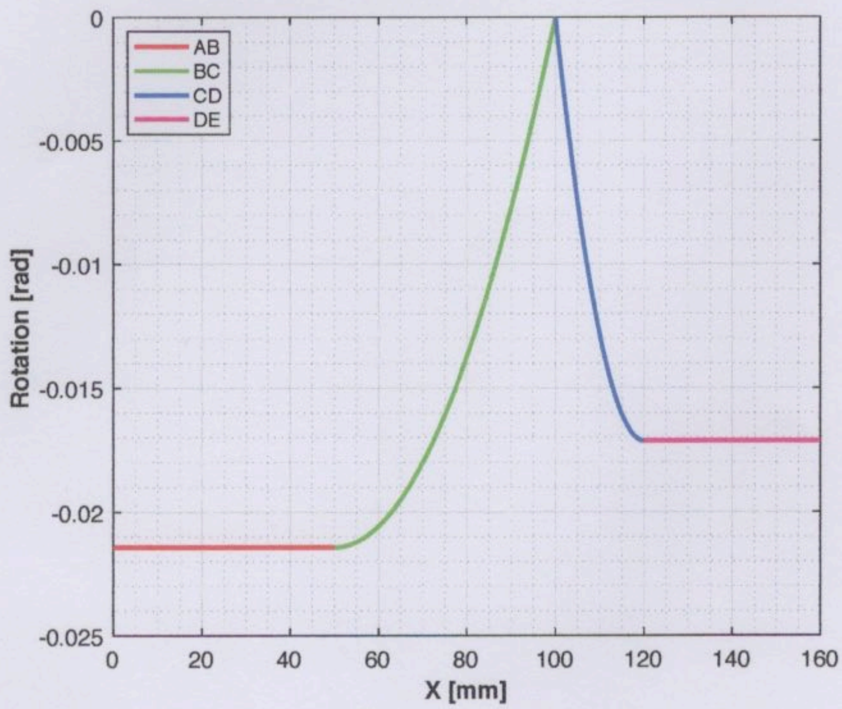
$y_{CD}(120) = C_7(120) + C_8 \longrightarrow C_8 = 1.0667E08$

- $y'_{DE}(x) = \frac{1}{EJ}\left[-1E06\right]$

- $y_{DE}(x) = \frac{1}{EJ}\left[-1E06 \cdot x + 1.0667E08\right]$

In questo modo è stata definita totalmente l'equazione della linea elastica su tutta la trave. Nella pagina seguente si riportano gli andamenti attraverso due grafici ottenuti con MATLAB.


AB
BC
CD
DE
Y [mm]
X [mm]
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
0
20
40
60
80
100
120
140
160


AB
BC
CD
DE
Rotation [rad]
X [mm]
0
-0.005
-0.01
-0.015
-0.02
-0.025
0
20
40
60
80
100
120
140
160

CALCOLO DELLO SPOSTAMENTO E DELLA ROTAZIONE NEL PUNTO E

$$y'_{DE}(160) = \frac{1}{EJ}\left[-1E+06\right] = -0.0171 \text{ rad}$$

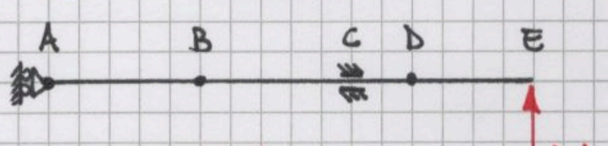
$$y_{DE}(160) = \frac{1}{EJ}\left[-1E06\,(160) + 1.0667E08\right] = -0.9143 \text{ mm}$$

VERIFICA CON IL TEOREMA DI BETTI.

Il teorema di Betti è molto utile nel caso si abbia a che fare con un gran numero di forze applicate sulla trave.

FORMULAZIONE: dati due sistemi equilibrati di forze che agiscono su un corpo elastico, il lavoro generato dalle forze del primo sistema, che agiscono sugli spostamenti causati dal secondo, è uguale a quello generato dalle forze del secondo sistema che agiscono sugli spostamenti generati dal primo.

SPOSTAMENTO



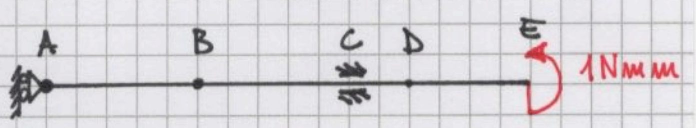
Forza unitaria

$$1 \cdot v_E = F_1 \cdot \underbrace{v_B + F_2\, v_D}$$

Spostamento in E causato dalle F_1 e F_2

Spostamenti causati dalle forze unitarie in B e D

ROTAZIONE



coppia unitaria

$$1 \cdot \vartheta_E = F_1\, \underbrace{v_B + F_2\, v_D}$$

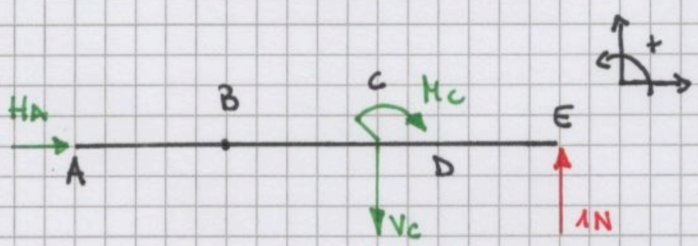
rotazione in E causata dalle F_1 e F_2

Spostamenti causati dalle coppie unitarie in B e D.

CALCOLO DELLO SPOSTAMENTO IN E

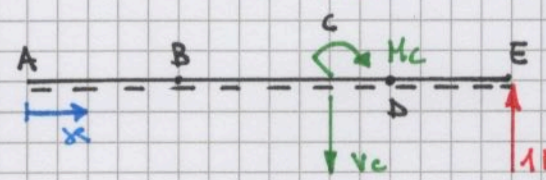
(TEOR. DI BETTI)

Come primo passo è necessario calcolare gli spostamenti v_B e v_D causati dalla fase unitaria in E attraverso la linea elastica.



$H_A = \emptyset \qquad V_C = 1\,N$

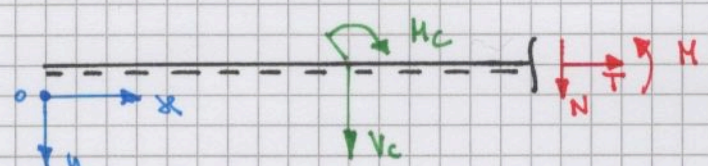
$M_C = 1(60) = 60\,N\cdot mm$



TRATTO $\overline{AC}$ $\quad 0 < x < 100$

$N = T = M = \emptyset$

TRATTO $\overline{CE}$ $\quad 100 < x < 160$



- $N = \emptyset$
- $T = -V_C = -1\,N$
- $M = M_C - V_C(x-100)$

EQUAZIONE DELLA LINEA ELASTICA

$\overline{AC}$ $\quad M(x) = \emptyset \qquad 0 < x < 100$

$$EJ\,y''_{AC}(x) = \emptyset \rightarrow EJ\,y'_{AC}(x) = C_1 \rightarrow EJ\,y_{AC}(x) = C_1 x + C_2$$

per $x = 100 \qquad y_{AC}(100) = \emptyset \qquad y'_{AC}(100) = \emptyset$

$C_1 = \emptyset \qquad C_2 = \emptyset$

$\overline{CE}$ $\quad M(x) = M_C - V_C(x-100) \qquad 100 < x < 160$

$$EJ\,y''_{CE}(x) = V_C(x-100) - M_C \qquad EJ\,y'_{CE}(x) = V_C\frac{x^2}{2} - V_C(100)x - M_C x + C_3$$

$$EJ\,y_{CE}(x) = V_C\frac{x^3}{6} - V_C(100)\frac{x^2}{2} - M_C\frac{x^2}{2} + C_3\cdot x + C_4$$

$y'_{CE}(100) = \emptyset \qquad y_{CE}(100) = \emptyset$

CALCOLO DELLO SPOSTAMENTO IN E

(TEOR. DI BETTI)

$$\emptyset = 1\frac{(100)^2}{2} - 1\cdot(100)^2 - 60\cdot(100) + C_3$$

$$C_3 = 60(100) + (100)^2 - \frac{(100)^2}{2} = 11'000$$

$$\emptyset = \frac{100^3}{6} - \frac{(100)^3}{2} - 60\frac{(100)^2}{2} + 11'000(100) + C_4$$

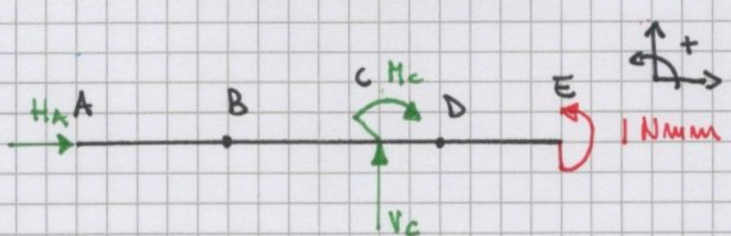
$$C_4 = \frac{(100)^3}{2} - \frac{(100)^3}{6} + 60\frac{(100)^2}{2} - 11'000(100) = -4.6667\,E\,05$$

$$y_B = \emptyset \qquad y_D = \frac{1}{EJ}\left[\frac{(120)^3}{6} - (100)\frac{(120)^2}{2} - 60\frac{(120)^2}{2} + 11E3\,(120) + C_4\right]$$

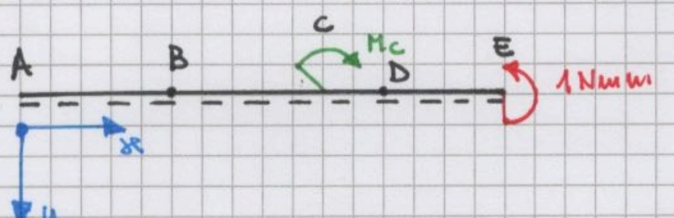
$y_D = -1.8286\,E{-}04$ mm -> Spostamento verso l'alto: il lavoro di F_2 e y_D è POSITIVO

CALCOLO DELLA ROTAZIONE IN E

(TEOR. DI BETTI)



$H_A = \emptyset \quad V_C = \emptyset \quad M_C = 1$ Nmm



AZIONI INTERNE

$\overline{AC}$ $\quad 0 < x < 100$

$N = T = M = \emptyset$

$\overline{CE}$ $\quad 100 < x < 160$

$N = \emptyset \quad T = \emptyset$

$M = 1$

EQUAZIONE DELLA LINEA ELASTICA

TRATTO $\overline{AC}$ $\quad 0 < x < 100$

$$EJ\,y''_{AC}(x) = \emptyset \qquad EJ\,y'_{AC}(x) = C_1 \qquad EJ\,y_{AC}(x) = C_1 x + C_2$$

$$y'_{AC}(100) = \emptyset = C_1 \quad \rightarrow \quad C_1 = \emptyset$$

$$y_{AC}(100) = \emptyset = \emptyset(100) + C_2 \quad \rightarrow \quad C_2 = \emptyset$$

CALCOLO DELLA ROTAZIONE IN E

(TEOR. DI BETTI)

TRATTO CE $\quad 100 < x < 160 \quad M(x) = 1$

$$EJ\, y''_{CE}(x) = -1 \qquad EJ\, y'_{CE}(x) = -x + C_3 \qquad EJ\, y_{CE}(x) = -\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

$$y'_{CE}(100) = \emptyset = -100 + C_3 \rightarrow C_3 = 100$$

$$y_{CE}(100) = \emptyset = -\frac{100^2}{2} + 100(100) + C_4 \rightarrow C_4 = \frac{100^2}{2} - 100^2 = -5000$$

$$y_B = \emptyset \qquad y_D = \frac{1}{EJ}\left[-\frac{(120)^2}{2} + 100(120) - 5000\right]$$

$y_D = -3.4286\ E\text{-}06$ mm $\rightarrow$ $y_D < \emptyset$, quindi lo spostamento è verso l'alto. Il lavoro di F_2 è positivo

Come si evince dalla semplicità del calcolo, nel caso di numerose forze presenti sulla trave, il teorema di Betti rende il calcolo molto più generale.

CALCOLO DELLO SPOSTAMENTO IN E

$v_D = |y_D| = 1.8286\ E\text{-}04$ mm $\rightarrow$ concorde in verso con F_2.

$v_B = \emptyset$

- $1 \cdot v_E = v_D \cdot F_2 = +0.9143$ mm $\rightarrow$ Siccome v_E è positivo allora è diretto come la forza unitaria, quindi verso l'alto. VERIFICATO

CALCOLO DELLA ROTAZIONE IN E

$v_D = |y_D| = +3.4286\ E\text{-}06$ mm $\qquad v_B = \emptyset$

- $1 \cdot \theta_E = v_D \cdot F_2 = +0.0171$ rad $\rightarrow$ siccome θ_E è positivo la rotazione avviene nello stesso verso della coppia unitaria, quindi in CCW. Anche questo risultato è VERIFICATO.