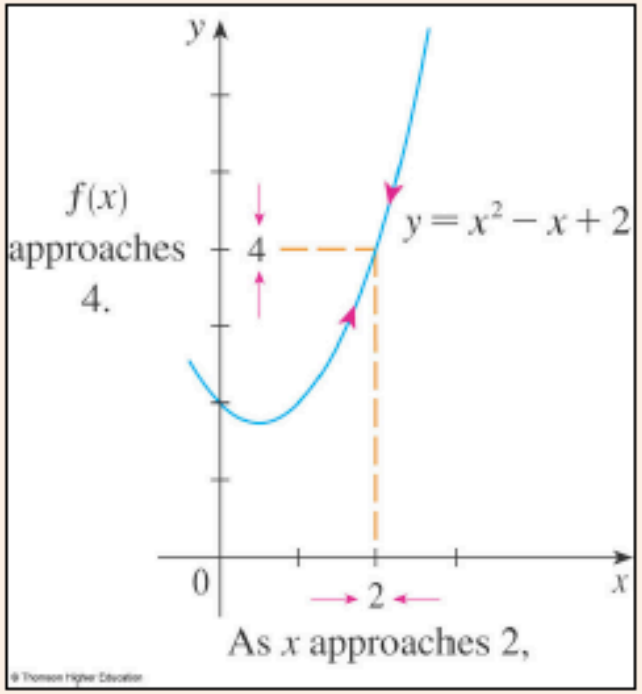
Definizione di Limite

Vogliamo analizzare piu` in generale cosa succede ad una funzione *f(x)* quando x tende ad un valore fissato, avvicinandosi sempre di piu` senza mai raggiungerlo.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.0	2.000000	3.0	8.000000
1.5	2.750000	2.5	5.750000
1.8	3.440000	2.2	4.640000
1.9	3.710000	2.1	4.310000
1.95	3.852500	2.05	4.152500
1.99	3.970100	2.01	4.030100
1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001

Esempio:

$f(x) = x^2 - x + 2$



Dalla tabella e dal grafico sembra che:

$$\lim_{x \to 2}\left(x^2 - x + 2\right) = 4$$

Definizione di Limite

- Scriveremo:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

e diremo che "il limite di *f*(*x*), quando *x* tende ad a, e` uguale *L*"

se possiamo rendere i valori di *f*(*x*) arbitrariamente vicini ad *L* (vicini quanto vogliamo) prendendo *x* sufficientemente vicino ad *a* (da entrambi i lati di *a*) ma diverso da *a*.

Limiti da Destra e da Sinistra

Scriveremo

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

e diremo che il limite di $f(x)$, quando x tende ad a da sinistra, e` uguale $L$ se e` possibile rendere i valori di $f(x)$ arbitrariamente vicini ad L prendendo x sufficientemente vicino ad a e minore di a.

Analogamente e` possibile definire il limite da destra.

Limiti Infiniti

Scriveremo:

$$\lim_{x \to a} f\left(x\right) = +\infty$$

per indicare che i valori di *f*(*x*) possono essere resi arbitrariamente grandi prendendo ***x*** sufficientemente vicino ad ***a*** ma diverso da ***a***.

Diremo che ***f*** diverge positivamente per ***x*** che tende ad ***a***.

Analogamente:

$$\lim_{x \to a} f\left(x\right) = -\infty$$

se i valori di ***f(x)*** possono essere resi arbitrariamente grandi e negativi prendendo ***x*** sufficientemente vicino ad ***a*** ma diverso da ***a***.

Diremo che ***f*** diverge negativamente per ***x*** che tende ad ***a***.

Limiti Infiniti

Attenzione:

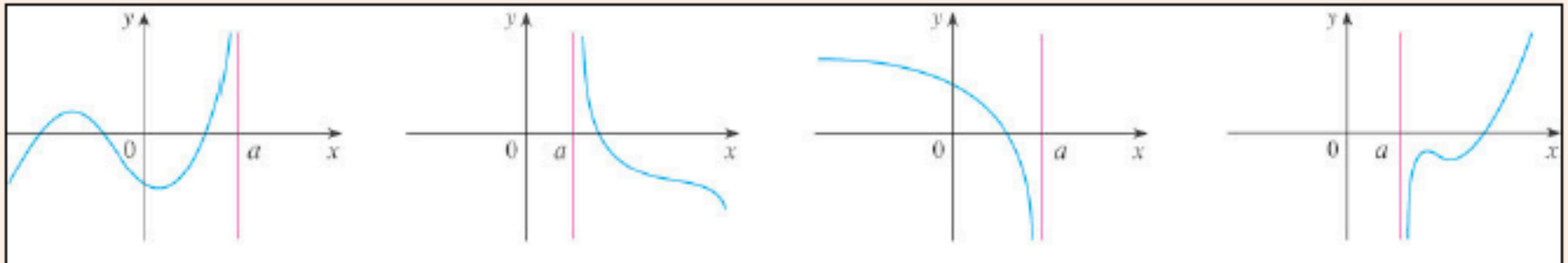
1. Infinito NON e` un numero. E` semplicemente un simbolo per identificare un comportamento : il divenire sempre piu` grande e positivo ($+\infty$) o negativo ($-\infty$).

2. “Infinito senza segno” (∞) non esiste! Di solito intendiamo semplicemente $+\infty$.

La linea ***x*=*a*** si dice asintoto verticale di ***f(x)*** se si verifica almeno una delle seguenti:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x)=\infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$$



(a) $\lim_{x\to a^-} f(x)=\infty$ (b) $\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$ (c) $\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ (d) $\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

Limiti all'Infinito

Sia *f* una funzione definita in un intervallo (a, ∞)

Allora,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

se i valori di *f*(*x*) possono essere resi arbitrariamente vicini ad *L* prendendo ***x*** abbastanza grande.

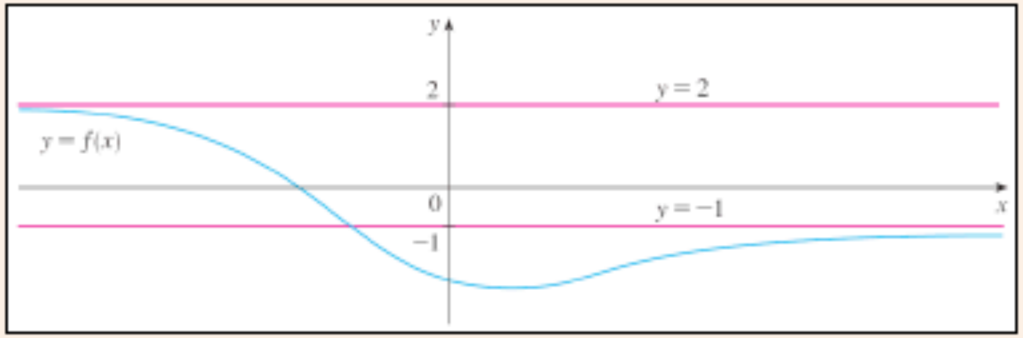
Analogamente:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

se i valori di *f*(*x*) possono essere resi arbitrariamente vicini ad *L* prendendo ***x*** abbastanza grande e negativo.

In entrambi i casi diremo che la retta *y*=*L* e` un asintoto orizzontale.

Nota: gli asintoti orizzontali a + e – infinito non sono necessariamente uguali.



Calcolo dei Limiti

$$\lim_{x \to a} x = a \qquad \lim_{x \to a} c = c$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ pari} \\ -\infty & n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} x^n = 0$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n} = \pm\infty$$

Se $a > 0 \Rightarrow$

$$\lim_{x \to +\infty} x^a = +\infty,$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^a = \begin{cases} +\infty & a \text{ pari} \\ -\infty & a \text{ dispari} \end{cases}$$

Se $a > 1 \Rightarrow$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0} \log_a x = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$

Proprieta` dei Limiti

Supponiamo che $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ esistano e siano finiti.

Allora:

$$1. \lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)$$

$$2. \lim_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)$$

$$3. \lim_{x\to a}\left[cf(x)\right]=c\lim_{x\to a} f(x)$$

$$4. \lim_{x\to a}\left[f(x)g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)$$

$$5. \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \quad \text{if} \lim_{x\to a} g(x)\neq 0$$

Proprieta` dei Limiti

Supponiamo che $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x)$ esistano

Se: $\lim_{x \to a} g(x) = t$

6. $\lim_{x \to a} f[g(x)]=\lim_{x \to t} f[x]$

Esempio: calcolare $\lim_{x \to \infty} \log\left(\frac{1}{x}\right)$

Sapendo che: $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ e che $\lim_{t \to 0} \log(t) = -\infty$

Avremo:

$$\lim_{x \to \infty} \log\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$$

Calcolo dei Limiti

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ dove P e Q sono polinomi. Allora:

possiamo trascurare i termini di grado inferiore al numeratore e denominatore:

- Se il grado di P e` maggiore del grado di $Q$ allora il limite e` $\pm\infty$, il segno e` dato dal rapporto tra i termini di grado massimo.
- Se il grado di P e` inferiore al grado di $Q$ allora il limite e` 0
- Se P e Q hanno stesso grado, il limite e` il rapporto tra i coefficienti.

Esempio:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^3 + 2x^2 - x + 4}{x^2 - 3x + 7} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 3x + 7}{4x^3 + 2x^2 - x + 4} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^3 + 2x^2 - x + 4}{2x^3 - 3x + 7} = 2$$