

Indice

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Vettori e geometria analitica | 4 |
| 1.0 | Scopo del capitolo | 4 |
| 1.1 | Vettori | 4 |
| 1.2 | Prodotto scalare, vettoriale e misto | 10 |
| 1.3 | Geometria analitica in \mathbb{R}^3 | 18 |
| 1.4 | Geometria analitica in \mathbb{R}^2 | 33 |
| 1.5 | Esercizi di riepilogo | 38 |
| 1.6 | Considerazioni conclusive | 47 |
| 2 | Numeri complessi | 48 |
| 2.0 | Scopi del capitolo | 48 |
| 2.1 | Definizioni introduttive e operazioni in \mathbb{C} | 48 |
| 2.2 | Forma trigonometrica dei numeri complessi e radici n -esime . . | 52 |
| 2.3 | Teorema fondamentale dell'algebra e molteplicità algebrica . . | 57 |
| 2.4 | Esercizi di riepilogo | 60 |
| 2.5 | Considerazioni conclusive | 63 |
| 3 | Matrici | 65 |
| 3.0 | Scopi del capitolo | 65 |
| 3.1 | Operazioni con le matrici | 66 |
| 3.2 | Determinanti e matrice inversa | 75 |
| 3.3 | Rango di una matrice | 84 |
| 3.4 | Trasformazioni elementari su righe e colonne | 88 |
| 3.5 | Esercizi di riepilogo | 91 |
| 3.6 | Considerazioni conclusive | 97 |
| 4 | Sistemi lineari | 98 |
| 4.0 | Scopi del capitolo | 98 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 4.1 | Spazi vettoriali, sottospazi e basi | 99 |
| 4.2 | Teorema di Rouché-Capelli, sistemi triangolari e di Cramer . . | 100 |
| 4.3 | Risoluzione di sistemi nel caso generale: metodo di Cramer generalizzato e algoritmo di Gauss | 108 |
| 4.4 | Esercizi di riepilogo | 115 |
| 4.5 | Considerazioni conclusive | 120 |
| 5 | Diagonalizzazione | 121 |
| 5.0 | Scopi del capitolo | 121 |
| 5.1 | Autovalori e autovettori | 122 |
| 5.2 | Criterio di diagonalizzabilità | 127 |
| 5.3 | Diagonalizzazione | 130 |
| 5.4 | Matrici di rotazione e diagonalizzazione di matrici simmetriche | 132 |
| 5.5 | Esercizi di riepilogo | 136 |
| 5.6 | Considerazioni conclusive | 142 |
| 6 | Coniche e quadriche | 144 |
| 6.0 | Introduzione | 144 |
| 6.1 | Cambiamenti di sistema di riferimento in \mathbb{R}^2 | 146 |
| 6.2 | Generalità sulle coniche e caso $a_{12} = 0$ | 148 |
| 6.3 | Caso $a_{12} \neq 0$: rotazione degli assi e conclusioni | 150 |
| 6.4 | Quadriche | 156 |
| 6.5 | Considerazioni conclusive | 160 |

Premessa

Questo file.pdf deriva da un lavoro di rielaborazione, aggiornamento e semplificazione di alcune parti del libro:

Matematica per le Scuole di Architettura

Autori: Andrea Ratto e Antonio Cazzani

Casa Editrice: Liguori (Napoli, 2010).

Codice ISBN: 978-88-207-5242-2

Codice eISBN: 978-88-207-5344-3

In particolare, vengono trattati **tutti** gli argomenti del programma di Geometria e Algebra per le lauree triennali in Scienze dell'Architettura (solo per quanto riguarda alcune conoscenze preliminari, lo Studente dovrà far riferimento allo specifico file conoscenze-preliminari.pdf disponibile sulla pagina web del docente)

L'autore ha ritenuto importante realizzare una proposta specificamente finalizzata a fornire le conoscenze *operative* necessarie per ragionare autonomamente su concetti di geometria analitica e algebra lineare. La trattazione dei diversi argomenti è concepita in senso essenzialmente applicativo, per cui risulta mirata soprattutto allo sviluppo della capacità di utilizzare strumenti matematici piuttosto che all'approfondimento di questioni di natura teorica. Ogni capitolo prevede l'introduzione delle varie nozioni attraverso l'uso di esempi ed esercizi applicativi, interamente svolti, che consentono allo studente un apprendimento più rapido rispetto a quello derivante dalla lettura dei testi tradizionali di geometria e algebra lineare. D'altra parte, sottolineiamo che l'approccio proposto non rappresenta un riassunto delle varie opere esistenti, né vuole essere una raccolta di "ricette" per la risoluzione di

esercizi; al contrario, l'obiettivo è quello di sviluppare al massimo le capacità critiche e di ragionamento del lettore, nelle forme più adatte per acquisire padronanza consapevole di quei concetti matematici che risultano indispensabili per seguire con profitto corsi di statica, fisica tecnica, e poi scienza e tecnica delle costruzioni.

Alla fine di ogni argomento viene proposto un congruo numero di esercizi di riepilogo (con soluzione) per consentire, oltre ad una maggiore assimilazione dell'uso delle nozioni apprese, anche un'utile verifica del livello di apprendimento. Gli argomenti (o esercizi) contrassegnati da un (*) sono leggermente più complessi e richiedono quindi uno studio attento.

A beneficio degli studenti interessati ad ulteriori approfondimenti, nella bibliografia finale abbiamo raccolto una serie di opere collegate agli argomenti trattati.

Ogni suggerimento dei lettori per migliorare questo testo ed eliminare eventuali errori o refusi è gradito.

Cagliari, 20 Novembre 2019

Andrea Ratto

Capitolo 1

Vettori e geometria analitica

1.0 Scopo del capitolo

Nella prima parte del capitolo introduciamo il concetto di vettore. In fisica, grandezze fondamentali come forze, velocità, campi elettrici e magnetici vengono convenientemente descritte mediante l'uso dei vettori. Dal nostro punto di vista, i vettori e le loro operazioni ci consentiranno di capire come descrivere e studiare rette, piani e altre figure geometriche mediante l'utilizzo delle coordinate cartesiane (e della trigonometria): questo è l'oggetto della cosiddetta *geometria analitica*. Cercare di svolgere in modo consapevole gli esercizi di geometria analitica rappresenta uno dei metodi più utili per allenare la mente al ragionamento matematico. Inoltre, la motivazione geometrica di questi problemi li rende al tempo stesso concreti e suscettibili di futuri sviluppi più astratti nel contesto dell'algebra lineare che studieremo in seguito. Il lettore dovrebbe arrivare ad essere in grado di ricavare con i propri mezzi le formule più semplici (tipo distanza punto-piano, equazione di una retta parallela ad una data direzione e passante per un punto dato, etc.), e poi dovrà riuscire ad applicare con senso critico le formule più complesse, in modo da saperle all'occorrenza adattare alle proprie esigenze.

1.1 Vettori

L'ambiente geometrico più naturale nel quale introdurre il concetto di vettore è lo spazio euclideo tridimensionale (denotato \mathbb{R}^3), in cui assumeremo che sia

fissato un sistema di assi cartesiani a due a due ortogonali, orientati come nella Figura 1.1.

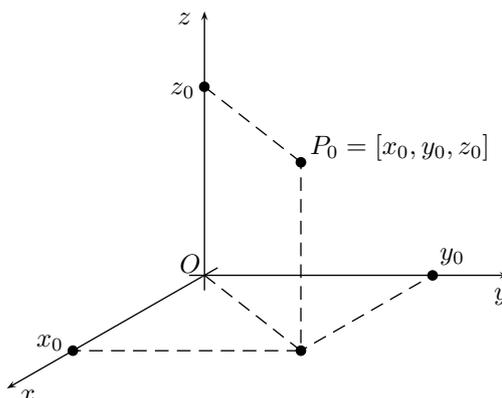


Figura 1.1 – Sistema di assi cartesiani in \mathbb{R}^3 .

Si noti che, in questo contesto, abbiamo stabilito una corrispondenza biunivoca tra punti dello spazio \mathbb{R}^3 e terne ordinate di numeri reali. Scrivendo $P_0 = [x_0, y_0, z_0]$, diremo che x_0, y_0, z_0 sono le coordinate (cartesiane) di P_0 . Come primo esempio di uso delle coordinate, possiamo generalizzare al nostro caso tridimensionale due semplici formule, già viste in \mathbb{R}^2 , che consentono di calcolare rispettivamente la distanza tra due punti P_0, P_1 e il punto medio M di un segmento $\overline{P_0P_1}$. Più precisamente, siano $P_0 = [x_0, y_0, z_0]$ e $P_1 = [x_1, y_1, z_1]$: allora una doppia applicazione del teorema di Pitagora fornisce

$$(1.1.1) \quad \overline{P_0P_1} = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2} \quad .$$

Inoltre,

$$(1.1.2) \quad M = \left[\frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{y_0 + y_1}{2}, \frac{z_0 + z_1}{2} \right] \quad .$$

Ora siamo nella condizione giusta per spiegare che cos'è un vettore. Il modo più intuitivo, anche se matematicamente non completamente rigoroso, per introdurre questo concetto è il seguente: diremo che un *vettore* \vec{v} è identificato mediante l'assegnazione di

1. una lunghezza;

2. una direzione;
3. un verso.

La maniera più semplice per rappresentare simultaneamente queste tre cose consiste nell'utilizzare un segmento orientato, come nella Figura 1.2.

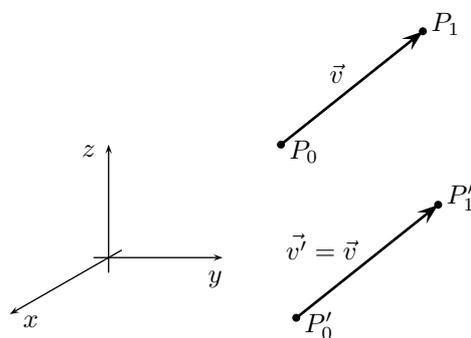


Figura 1.2 – Due rappresentazioni di un vettore \vec{v} in \mathbb{R}^3 .

La lunghezza di \vec{v} coincide con la distanza fra i suoi estremi. La direzione di \vec{v} è quella della retta che passa per P_0 e P_1 . Il verso è quello indicato dalla freccia.

Una simbologia alternativa per \vec{v} è $\overrightarrow{(P_1 - P_0)}$. P_0 è detto *punto di applicazione* del vettore. A questo punto bisogna fare un'osservazione: se, come in Figura 1.2, consideriamo un segmento orientato $\overrightarrow{(P'_1 - P'_0)}$ ottenuto da $\overrightarrow{(P_1 - P_0)}$ mediante traslazione rigida, ci rendiamo conto subito che $\overrightarrow{(P'_1 - P'_0)}$ e $\overrightarrow{(P_1 - P_0)}$ hanno uguale lunghezza, direzione e verso. In altre parole, essi sono *due diverse rappresentazioni dello stesso vettore* \vec{v} . Allora, per descrivere nel modo più semplice possibile le operazioni con i vettori, converrà da ora in avanti fissare l'origine O come punto di applicazione dei vettori, come in Figura 1.3.

In particolare, è importante osservare che, così facendo, le coordinate di $\overrightarrow{(P_1 - P_0)}$ sono date da $[x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0]$, dove $[x_i, y_i, z_i]$ sono le coordinate di $P_i, i = 0, 1$. Questo spiega anche la simbologia $\overrightarrow{(P_1 - P_0)}$ (si legge P_1 meno P_0) per il vettore che va da P_0 a P_1 come in Figura 1.2.

La situazione di Figura 1.3 determina una corrispondenza biunivoca tra punti P dello spazio, $P \neq O$, e vettori.

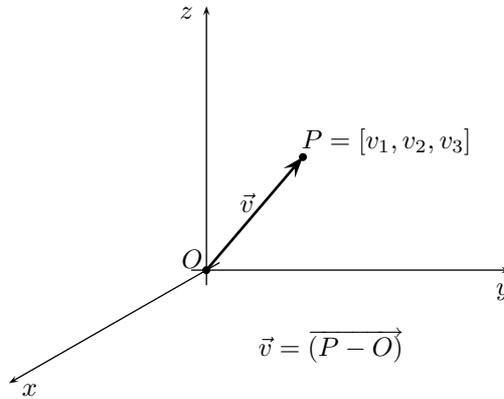


Figura 1.3 – Rappresentazione di un vettore \vec{v} uscente da O .

Per completare questa corrispondenza, oltre che per motivi di natura algebrica e fisica, conviene introdurre un vettore anomalo, che chiameremo *vettore nullo* e identificheremo con l'origine $O = [0, 0, 0]$. Il vettore nullo, anche denotato $\vec{0}$, ha lunghezza zero, direzione e verso non precisati. Tornando al discorso generale identifichiamo dunque un vettore \vec{v} con le coordinate del suo estremo P : di solito, scriveremo $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$.

La lunghezza di \vec{v} (detta anche modulo) si indica $|\vec{v}|$ e, in funzione delle sue coordinate, è espressa da

$$(1.1.3) \quad |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \quad .$$

Le prime operazioni che possiamo definire sono la somma di due vettori e la moltiplicazione di un vettore per un numero reale.

Siano $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$, $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3]$ due vettori, e sia $\lambda \in \mathbb{R}$: definiamo

$$(1.1.4) \quad \vec{u} + \vec{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3] \quad ;$$

$$(1.1.5) \quad \lambda \vec{v} = [\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda v_3] \quad .$$

Si può notare che, se $\lambda \neq 0$, $\lambda \vec{v}$ ha la stessa direzione di \vec{v} e verso coincidente con quello di \vec{v} se e solo se $\lambda > 0$.

Inoltre, usando (1.1), è immediato verificare che

$$|\lambda \vec{v}| = |\lambda| |\vec{v}| \quad .$$

Osservazione 1: Dato che λ e \vec{v} sono un numero reale e un vettore, $|\lambda|$ e $|\vec{v}|$ indicano rispettivamente il valore assoluto di λ e il modulo (o lunghezza) di \vec{v} . In certi contesti di algebra lineare può diventare necessario moltiplicare un vettore per un $\lambda \in K$, dove K è un campo di numeri non necessariamente coincidente con \mathbb{R} (ad esempio, $K = \mathbb{C}$, i numeri complessi che studieremo nel prossimo capitolo). Allora, per prepararsi a questa situazione, si usa riferirsi a λ chiamandolo uno *scalare*, anche se nell'ambito di questo capitolo avremo esclusivamente a che fare con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Anche la somma (1.1.4) ha un importante significato geometrico, illustrato nella Figura 1.4.

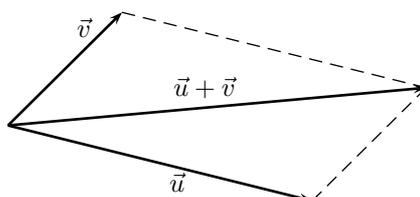


Figura 1.4 – Somma di due vettori: la regola del parallelogramma.

La Figura 1.4 ci spiega che, se \vec{u} e \vec{v} non sono allineati, allora $\vec{u} + \vec{v}$ coincide con la diagonale del parallelogramma da essi individuato. Inoltre, considerando uno dei due triangoli in cui la diagonale divide il parallelogramma, vediamo che l'intuizione geometrica supporta la validità della seguente disuguaglianza

$$(1.1.6) \quad |\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}| \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \quad ,$$

detta, appunto, *disuguaglianza triangolare* (si noti che l'uguaglianza ha luogo in (1.1.6) se e solo se \vec{u} e \vec{v} hanno la stessa direzione e lo stesso verso).

Definizione 1: Diciamo che un vettore \vec{v} è un *versore* se $|\vec{v}| = 1$.

Esempio 1: Siano $\vec{i} = [1, 0, 0]$, $\vec{j} = [0, 1, 0]$ e $\vec{k} = [0, 0, 1]$. Questi tre versori sono detti versori, rispettivamente, dell'asse x , y e z . Notiamo che ogni vettore $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ può essere riscritto, usando le (1.1.4) e (1.1.5), come

$$(1.1.7) \quad \vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k} \quad .$$

Ciò evidenzia anche il significato di v_i , $i = 1, 2, 3$, come componenti di \vec{v} lungo i tre assi, come si può anche vedere nella Figura 1.5.

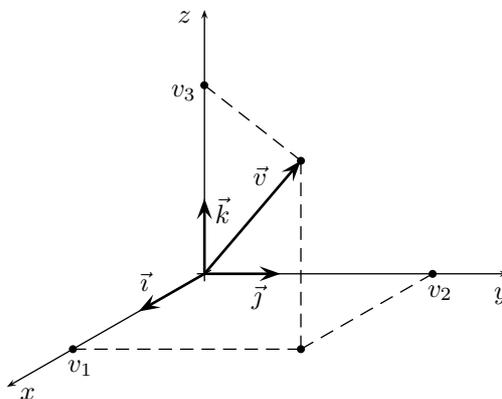


Figura 1.5 – Componenti di un vettore.

Una scrittura del tipo (1.1.7) si chiama *combinazione lineare* di \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} . Anticipando un concetto che riprenderemo al momento dello studio dei cosiddetti sottospazi vettoriali, la proprietà che ogni vettore si scriva in modo univoco come in (1.1.7) si esprime dicendo che \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} sono una *base* di \mathbb{R}^3 .

▷ Esercizio 1 ◁

Testo

Sia $\vec{v} = [2, 2\sqrt{5}, 5]$. Determinare un versore \vec{w} parallelo a \vec{v} .

Soluzione

Il parallelismo si impone richiedendo che \vec{w} sia del tipo

$$(1.1.8) \quad \vec{w} = \lambda\vec{v} = [2\lambda, 2\sqrt{5}\lambda, 5\lambda] \quad .$$

Poi, si deve avere $|\vec{w}| = 1$, cioè

$$(1.1.9) \quad \sqrt{(2\lambda)^2 + (2\sqrt{5}\lambda)^2 + (5\lambda)^2} = 1$$

che equivale a

$$(1.1.10) \quad 49\lambda^2 = 1 \quad ,$$

da cui $\lambda = \pm\frac{1}{7}$. Ne segue che

$$\vec{w} = \left[\frac{2}{7}, \frac{2\sqrt{5}}{7}, \frac{5}{7} \right]$$

oppure

$$\vec{w} = \left[-\frac{2}{7}, -\frac{2\sqrt{5}}{7}, -\frac{5}{7} \right] \quad .$$

□

Il calcolo dell'esercizio precedente può chiaramente essere generalizzato: se $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3] \neq \vec{0}$, allora

$$\vec{w} = \pm \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v} \quad .$$

In particolare, si usa indicare

$$(1.1.11) \quad \text{vers}(\vec{v}) = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \quad .$$

In parole, $\text{vers}(\vec{v})$ è quel vettore che ha modulo 1 e direzione e verso coincidenti con quelli di \vec{v} .

1.2 Prodotto scalare, vettoriale e misto

Definizione 2: Siano $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3]$ e $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ due vettori. Il loro *prodotto scalare*, denotato $\vec{u} \cdot \vec{v}$, è definito da

$$(1.2.1) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \quad \left(\sum_{i=1}^3 u_i v_i \right) \quad .$$

È immediato notare che

$$(1.2.2) \quad \begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{u} &= |\vec{u}|^2 \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= \vec{v} \cdot \vec{u} \\ (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} &= \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

La proprietà fondamentale del prodotto scalare (che non dimostriamo) è

$$(1.2.3) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta ,$$

dove abbiamo indicato con θ l'angolo formato da \vec{u} e \vec{v} , con $0 \leq \theta \leq \pi$. In particolare, deduciamo da (1.2.3) che, se $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$, allora

$$(1.2.4) \quad \vec{u} \perp \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

dove \perp indica che \vec{u} e \vec{v} sono tra loro ortogonali.

▷ Esercizio 2 ◁

Testo

Siano $\vec{u} = [1, -2, 4]$ e $\vec{v} = [2, 3, 5]$.

- (i) Calcolare $\vec{u} \cdot \vec{v}$;
- (ii) Calcolare l'angolo θ formato da \vec{u} e \vec{v} .

Soluzione

- (i)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 16$$

direttamente da (1.2.1).

- (ii) Poiché $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$, ricaviamo da (1.2.3)

$$(1.2.5) \quad \cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} .$$

Ora calcoliamo

$$(1.2.6) \quad |\vec{u}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{21} , \quad |\vec{v}| = \sqrt{38} .$$

Sostituendo la (1.2.6) e il risultato di (i) in (1.2.5), troviamo

$$(1.2.7) \quad \cos \theta = \frac{16}{\sqrt{21}\sqrt{38}}$$

da cui, applicando la funzione arccos (l'inversa del coseno), concludiamo che

$$(1.2.8) \quad \theta = \arccos\left(\frac{16}{\sqrt{21}\sqrt{38}}\right) \cong 0.97 \text{ radianti} \quad ,$$

dove l'ultima approssimazione si ottiene mediante l'uso di una comune calcolatrice tascabile. \square

▷ Esercizio 3 ◁

Testo

Siano \vec{v}, \vec{u} due vettori non nulli. Determinare il vettore \vec{w} proiezione di \vec{v} lungo \vec{u} .

Soluzione

Per capire meglio il testo di questo esercizio possiamo aiutarci rappresentando la situazione come nella Figura 1.6.

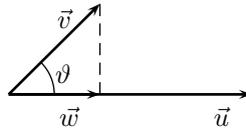


Figura 1.6 – Proiezione di un vettore \vec{v} lungo un altro vettore \vec{u} : caso $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

In questa rappresentazione vediamo che \vec{w} ha direzione e verso come $\text{vers}(\vec{u})$ e $|\vec{w}| = |\vec{v}| \cos \theta$. Quindi

$$(1.2.9) \quad \vec{w} = (\vec{v} \cdot \text{vers}(\vec{u})) \text{vers}(\vec{u}) = \frac{(\vec{v} \cdot \vec{u})}{|\vec{u}|^2} \vec{u} \quad .$$

Nel caso di Figura 1.7, abbiamo invece che \vec{w} ha direzione e verso come $-\text{vers}(\vec{u})$, e $|\vec{w}| = |\vec{v}| \cos(\pi - \theta)$. Poiché $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$, abbiamo ancora come soluzione

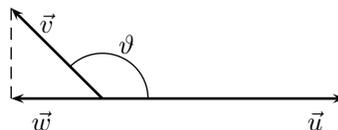


Figura 1.7 – Proiezione di un vettore \vec{v} lungo un altro vettore \vec{u} : caso $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$.

la (1.2.9) che, quindi, risulta essere la soluzione dell'esercizio qualunque sia la

posizione reciproca dei due vettori. □

▷ Esercizio 4 ◁

Testo

Siano $\vec{v} = [1, 1, 2]$, $\vec{u} = [-1, 3, 4]$. Determinare il vettore \vec{w} proiezione di \vec{v} lungo \vec{u} .

Soluzione

Dalla (1.2.9),

$$\vec{w} = \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} \right) \vec{u} = \frac{10}{26} \cdot [-1, 3, 4] = \left[-\frac{5}{13}, \frac{15}{13}, \frac{20}{13} \right] .$$

□

Allo stesso modo possiamo proiettare lungo una retta orientata. Infatti,

▷ Esercizio 5 ◁

Testo

Sia $\vec{v} = [1, 4, 6]$. Determinare il vettore \vec{w} proiezione di \vec{v} lungo l'asse y .

Soluzione

Sempre dalla (1.2.9), con $\vec{u} = \vec{j}$,

$$\vec{w} = (\vec{v} \cdot \vec{j}) \vec{j} = 4\vec{j} = [0, 4, 0] .$$

□

Osservazione 2: Segnaliamo che, in altri testi di possibile consultazione, il prodotto scalare può essere indicato con la simbologia seguente:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle .$$

La terminologia prodotto scalare di due vettori suggerisce il fatto che il risultato dell'operazione è un numero reale, cioè uno scalare. Invece il prodotto vettoriale di due vettori, che vedremo tra poco, ha come risultato un vettore.

Definizione 3: Siano $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3]$, $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$. Il loro *prodotto vettoriale* (indicato $\vec{u} \wedge \vec{v}$, oppure $\vec{u} \times \vec{v}$) è il vettore definito da

$$(1.2.10) \quad \vec{u} \wedge \vec{v} = [u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1] \quad .$$

Questa definizione non stimola alcuna intuizione e quindi, in prima istanza, è solo importante che il lettore si abitui ad utilizzare la (1.2.10). Come vedremo nel capitolo 3, un modo semplice per ricostruire la (1.2.10) si basa sulla nozione di *determinante* di una matrice di ordine 3 (si veda (3.2.24)).

▷ Esercizio 6 ◁

Testo

Siano $\vec{u} = [1, 2, 1]$, $\vec{v} = [6, -4, 1]$. Calcolare $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Soluzione

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = [2 \cdot 1 - 1 \cdot (-4), 1 \cdot 6 - 1 \cdot 1, 1 \cdot (-4) - 2 \cdot 6] = [6, 5, -16] \quad .$$

□

▷ Esercizio 7 ◁

Testo

Calcolare $\vec{i} \wedge \vec{j}$, $\vec{j} \wedge \vec{k}$, $\vec{k} \wedge \vec{i}$.

Soluzione

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}; \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}; \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}.$$

□

Il prodotto vettoriale ha alcune proprietà algebriche e geometriche di grande importanza. Più precisamente, dal punto di vista algebrico valgono le seguenti uguaglianze:

$$(1.2.11) \quad \begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= -(\vec{v} \wedge \vec{u}) && \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3; \\ \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) &= (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w}) && \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3; \\ (\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} &= \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{u} \wedge (\lambda \vec{v}) && \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Queste proprietà non sono di difficile dimostrazione: il lettore dovrebbe riuscire a verificarle confrontando, per ognuna di esse, l'espressione a sinistra con quella a destra del simbolo di uguaglianza, dopo aver applicato la (1.2.10).

Per quanto riguarda invece gli aspetti geometrici, indicando ancora con θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) l'angolo compreso tra \vec{u} e \vec{v} , si ha:

(1.2.12)

(i) $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta$;

(ii) Se $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$, allora $\vec{u} \wedge \vec{v}$ è ortogonale al piano individuato da \vec{u} e \vec{v} ;

(iii) Se $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$, allora i tre vettori $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}\}$ formano una terna destrorsa.

La dimostrazione matematica completa delle (2.2.12) non è elementare e perciò è omessa.

Però alcuni commenti sono ora molto importanti: dalla (1.2.12)(i) si deduce che, se $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$, allora

(1.2.13) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u} \parallel \vec{v}$

(il simbolo \parallel indica parallelismo tra \vec{u} e \vec{v}). Inoltre, se \vec{u} e \vec{v} non sono paralleli, la (1.2.12)(i) dice anche che

(1.2.14) $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = \text{area del parallelogramma individuato da } \vec{u} \text{ e } \vec{v}.$

Per capire quest'ultima formula, è sufficiente guardare la Figura 1.8 e ricordarsi che l'area di un parallelogramma si ottiene moltiplicando la base per l'altezza.

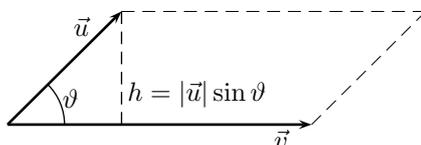


Figura 1.8 – L'area di un parallelogramma espressa mediante $|\vec{u} \wedge \vec{v}|$.

Se $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$, allora sappiamo che \vec{u} e \vec{v} non sono paralleli e quindi esiste un unico piano che contiene entrambi. La (1.2.12)(ii) ci dice che $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ha direzione perpendicolare a questo piano, la qual cosa risulterà veramente molto utile nelle successive sezioni che dedicheremo alla geometria analitica.

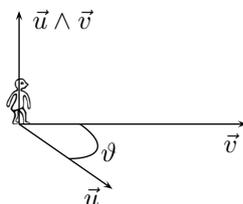


Figura 1.9 – Terna destrorsa.

La (1.2.12)(iii) sostanzialmente ci dà un'informazione sul verso di $\vec{u} \wedge \vec{v}$: in pratica, terna destrorsa significa che l'omino di Figura 1.9 vede in senso antiorario \vec{u} andare a sovrapporsi su \vec{v} muovendosi nell'angolo θ .

Intuitivamente, si può pensare che una terna destrorsa sia una terna orientata come gli assi di riferimento di Figura 1.1. Segnaliamo però che una formalizzazione rigorosa del concetto di orientazione è matematicamente troppo complessa per questo livello di trattazione, perciò è omessa.

Concludiamo questo paragrafo illustrando il prodotto misto di tre vettori e le sue proprietà.

Definizione 4: Siano $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ tre vettori. Allora il loro *prodotto misto* è

$$(1.2.15) \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) \quad (\in \mathbb{R}) .$$

▷ Esercizio 8 ◁

Testo

Siano $\vec{u} = [2, 1, 0], \vec{v} = [3, 1, 4], \vec{w} = [-1, 3, 2]$. Calcolare $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

Soluzione

Si calcola $\vec{v} \wedge \vec{w} = [-10, -10, 10]$. Poi

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = [2, 1, 0] \cdot [-10, -10, 10] = -20 - 10 + 0 = -30 \quad .$$

□

Geometricamente, il valore assoluto di $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$ rappresenta (quando è diverso da zero) il volume del parallelepipedo individuato da \vec{u}, \vec{v} e \vec{w} . Ciò può essere capito mediante la Figura 1.10.

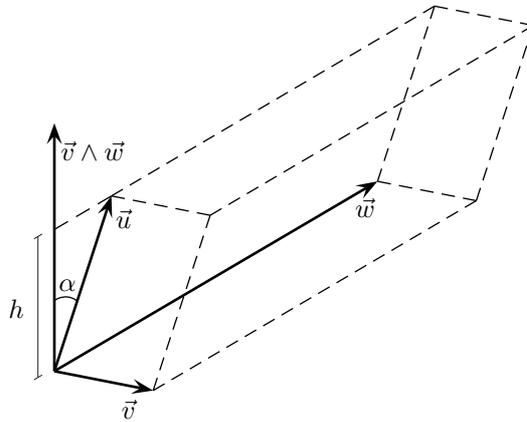


Figura 1.10 – Volume del parallelepipedo individuato da tre vettori.

L'altezza del parallelepipedo è h . Indicando con α l'angolo tra $(\vec{v} \wedge \vec{w})$ e \vec{u} , si ha

$$(1.2.16) \quad h = |\vec{u}| |\cos \alpha|$$

Il valore assoluto $|\cos \alpha|$ è necessario perché, in generale, può capitare che sia $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Poiché il volume del parallelepipedo si calcola come area di base per altezza, ed essendo l'area di base pari a $|\vec{v} \wedge \vec{w}|$ per la (1.2.14), abbiamo

$$(1.2.17) \quad \text{Volume} = |\vec{v} \wedge \vec{w}| h = |\vec{v} \wedge \vec{w}| |\vec{u} \cos \alpha| = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})|$$

che ci dice, appunto, che il volume coincide con il valore assoluto del prodotto misto. I casi in cui il prodotto misto è nullo corrispondono alla situazione in cui i tre vettori sono complanari (nel qual caso si ha un parallelepipedo degenere con volume nullo).

▷ Esercizio 9 ◁

Testo

Calcolare il volume del parallelepipedo individuato da $\vec{u} = [1, 2, 0]$, $\vec{v} = [1, 1, 1]$, $\vec{w} = [-1, 0, 1]$.

Soluzione

Volume = $|\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})| = |-3| = 3$. □

Osservazione 3: Nell'esercizio precedente un volume risulta espresso mediante uno scalare invece che come quantità in m^3 , cm^3 o altre simili unità di misura. In realtà, questo discorso si applica anche alle lunghezze e alle aree di cui abbiamo parlato sinora: semplicemente, si deve notare che nel sistema di riferimento cartesiano di Figura 1.1 sono implicitamente fissate unità di misura lungo gli assi (ad esempio, centimetri), e tutte le aree o i volumi risultano allora esprimibili nella conseguente corretta unità di misura (ad esempio, in cm^2 o cm^3 , etc.).

1.3 Geometria analitica in \mathbb{R}^3

In questa sezione utilizzeremo la teoria dei vettori per studiare, mediante l'uso delle coordinate cartesiane, rette e piani nello spazio euclideo tridimensionale \mathbb{R}^3 . Dal punto di vista geometrico, il modo più semplice per individuare un piano Π in \mathbb{R}^3 è specificare

- (1.3.1) (i) Un punto $P_0 = [x_0, y_0, z_0] \in \Pi$;
 (ii) un vettore $\vec{N} = [a, b, c]$ ortogonale a Π .

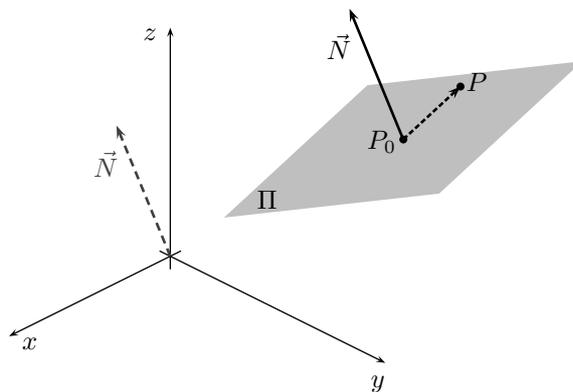


Figura 1.11 – Caratterizzazione analitica (1.3.1) di un piano Π .

In Figura 1.11, \vec{N} è applicato in P_0 poiché geometricamente dovremo confrontarlo con $\overrightarrow{P - P_0}$, ma $[a, b, c]$ sono le coordinate di \vec{N} come vettore applicato in O . Nell'ipotesi (1.3.1)(ii) è implicito che \vec{N} sia $\neq \vec{0}$. Questo vettore è stato chiamato \vec{N} perché spesso, in geometria, si usa il termine *normale* come sinonimo di ortogonale. Diremo anche che \vec{N} è un *vettore direzionale* di Π . Ora dobbiamo lavorare per passare dalla descrizione geometrica (1.3.1) di Π a quella analitica, cioè all'equazione cartesiana (1.3.4) di Π , sfruttando le coordinate cartesiane.

Per prima cosa osserviamo che un generico punto $P = [x, y, z]$ di \mathbb{R}^3 appartiene a Π se e solo se il vettore $\overrightarrow{P - P_0}$ è ortogonale a \vec{N} . Dato che l'ortogonalità tra vettori equivale (vedi (1.2.4)) all'annullarsi del loro prodotto scalare, concludiamo che

$$(1.3.2) \quad P \in \Pi \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{P - P_0} \cdot \vec{N} = 0 \quad .$$

Come osservato nella sezione 2.2, il vettore $\overrightarrow{P - P_0}$ ha coordinate $[x - x_0, y - y_0, z - z_0]$. Usando le coordinate, la (1.3.2) diventa

$$(1.3.3) \quad P \in \Pi \quad \Leftrightarrow \quad [x - x_0, y - y_0, z - z_0] \cdot [a, b, c] = 0$$

che possiamo ora esplicitare:

$$(1.3.4) \quad a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \quad .$$

La (1.3.4) è l'equazione (cartesiana) del piano Π che è normale a $\vec{N} = [a, b, c]$ e contiene il punto $P_0 = [x_0, y_0, z_0]$. È fondamentale aver chiaro che, come scritto in (1.3.3), un generico punto P di \mathbb{R}^3 appartiene a Π se e solo se le sue coordinate soddisfano l'equazione (1.3.4).

▷ Esercizio 10 ◁

Testo

Siano $P_0 = [1, 3, 2]$, $\vec{N} = [4, 6, 5]$. Scrivere l'equazione del piano Π che contiene P_0 ed è ortogonale a \vec{N} .

Soluzione

Dalla (1.3.4) si trova che Π : $4(x - 1) + 6(y - 3) + 5(z - 2) = 0$, cioè

$$\Pi : \quad 4x + 6y + 5z - 32 = 0 \quad .$$

□

In generale possiamo dire che l'equazione

$$(1.3.5) \quad ax + by + cz + d = 0 \quad ([a, b, c] \neq [0, 0, 0])$$

rappresenta un piano perpendicolare alla direzione $\vec{N} = [a, b, c]$. In particolare, tenendo fisso \vec{N} e facendo variare $d \in \mathbb{R}$, la (1.3.5) descrive un *fascio* (cioè, una famiglia) di piani paralleli tra loro.

▷ Esercizio 11 ◁

Testo

Scrivere l'equazione del piano Π che contiene $P_0 = [1, 2, 3]$ ed è parallelo al piano coordinato xz .

Soluzione

Dato che il piano coordinato xz è quello che contiene gli assi x e z , un vettore direzionale di Π è chiaramente $\vec{j} = [0, 1, 0]$. L'equazione di Π segue dunque dalla (1.3.4) con $\vec{N} = \vec{j}$ e $P_0 = [1, 2, 3]$:

$$\Pi: \quad 0(x - 1) + 1(y - 2) + 0(z - 3) = 0 \quad ,$$

cioè

$$(1.3.6) \quad y - 2 = 0 \quad .$$

Soluzione alternativa

Il fascio di piani paralleli al piano coordinato xz ha equazione (dalla (1.3.5)):

$$(1.3.7) \quad y + d = 0 \quad .$$

Ora il valore specifico di $d \in \mathbb{R}$ si determina imponendo che le coordinate di P_0 soddisfino l'equazione (1.3.7): si ha $2 + d = 0$, da cui $d = -2$ e si ritrova la soluzione (1.3.6). □

▷ Esercizio 12 ◁

Testo

Siano $\vec{u} = [1, 2, 0]$, $\vec{v} = [2, -1, 3]$ due vettori, e sia $P_0 = [0, 2, 0]$. Scrivere l'equazione del piano Π che contiene P_0 ed è parallelo ai vettori \vec{u} e \vec{v} .

Soluzione

Sappiamo dalla (2.1.12)(ii) che il vettore $\vec{u} \wedge \vec{v}$ è perpendicolare al piano individuato da \vec{u} e \vec{v} .

Quindi, come vettore direzionale di Π , possiamo scegliere proprio $\vec{N} = \vec{u} \wedge \vec{v}$. Calcolando si ottiene $\vec{N} = \vec{u} \wedge \vec{v} = [6, -3, -5]$. Ora quindi possiamo scrivere l'equazione di Π :

$$\Pi : \quad 6(x - 0) - 3(y - 2) - 5(z - 0) = 0 \quad ,$$

cioè

$$\Pi : \quad 6x - 3y - 5z + 6 = 0 \quad .$$

A margine di questo esercizio, un suggerimento: dopo aver calcolato $\vec{u} \wedge \vec{v}$, è bene controllare che il risultato ottenuto risulti ortogonale sia a \vec{u} , sia a \vec{v} . Infatti la verifica che $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0$, $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$ dà ottime probabilità di non aver sbagliato il calcolo di $\vec{u} \wedge \vec{v}$. \square

Per accrescere le nostre capacità di utilizzo delle coordinate cartesiane per descrivere figure geometriche, affrontiamo adesso un altro esercizio.

▷ Esercizio 13 ◁

Testo

Scrivere l'equazione della sfera S di centro $C = [1, 2, 3]$ e raggio $R = 2$.

Soluzione

Geometricamente possiamo descrivere la sfera come

$$(1.3.8) \quad S = \{ P \in \mathbb{R}^3 : \text{dist}(P, C) = R \} .$$

Ora, indicando con $[x, y, z]$ le coordinate del generico P , possiamo esprimere la condizione $\text{dist}(P, C) = R$ come

$$\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2} = R$$

Questa espressione si manipola meglio elevando entrambi i suoi membri al quadrato: si ottiene, usando $R = 2$,

$$(1.3.9) \quad (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 4 \quad ,$$

che è l'equazione di S . \square

Più generalmente, è chiaro che

$$(1.3.10) \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

rappresenta la sfera di centro $C = [x_0, y_0, z_0]$ e raggio R . Si noti sempre, come già sottolineato per (1.3.3), che dire che una certa equazione descrive

un luogo geometrico equivale a dire che un punto P appartiene a questa figura geometrica se e solo se le sue coordinate soddisfano l'equazione.

▷ Esercizio 14 ◁

Testo

Sia $P = [3, 1, 2]$. P appartiene alla sfera dell'esercizio 13? P appartiene al piano Π dell'esercizio 12?

Soluzione

Vediamo se le coordinate di P soddisfano l'equazione (1.3.9), cioè se è vero che $(3 - 1)^2 + (1 - 2)^2 + (2 - 3)^2 = 4$. Calcolando si ottiene $6 \neq 4$, per cui $P \notin S$.

Per quanto riguarda l'appartenenza di P al piano Π di equazione $6x - 3y - 5z + 6 = 0$, abbiamo

$$6 \cdot 3 - 3 \cdot 1 - 5 \cdot 2 + 6 \neq 0 \quad ,$$

per cui $P \notin \Pi$. □

Adesso, al fine di ampliare le nostre possibilità di sviluppare considerazioni geometriche significative, ci poniamo il problema di descrivere analiticamente una retta in \mathbb{R}^3 .

Intanto possiamo dire che due piani non paralleli, diciamo Π e Π' , di equazione rispettivamente $ax + by + cz + d = 0$ e $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, si intersecano in una retta r . Possiamo quindi scrivere

$$(1.3.11) \quad r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

a condizione che

$$(1.3.12) \quad \vec{v}_r = [a, b, c] \wedge [a', b', c'] \neq \vec{0} \quad .$$

La scrittura (1.3.11) è un sistema di equazioni: ciò significa che un punto $P \in \mathbb{R}^3$ è una soluzione del sistema (cioè $P \in r$) se e solo se le sue coordinate soddisfano *entrambe* le equazioni .

Il significato geometrico di questa affermazione è che P sta sia su Π , sia su Π' , o, in altre parole, $r = \Pi \cap \Pi'$.

Si può anche notare che, dato che $r \subset \Pi$ e $r \subset \Pi'$, r risulta ortogonale sia a $[a, b, c]$, sia a $[a', b', c']$. Di conseguenza, grazie alla (2.1.12)(ii), r è parallela al vettore \vec{v}_r definito in (1.3.12).

Diciamo quindi che \vec{v}_r è un vettore direzionale di r .

▷ Esercizio 15 ◁

Testo

Sia r la retta definita dal sistema

$$(1.3.13) \quad r : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

- (i) Stabilire se $P = [1, 1, 1]$ e O appartengono a r ;
- (ii) Determinare un vettore parallelo a r .

Soluzione

(i) Si può verificare facilmente che le coordinate di P soddisfano il sistema (1.3.13), quindi $P \in r$; invece $O = [0, 0, 0]$ soddisfa solo una delle due equazioni di (1.3.13), per cui $O \notin r$.

(ii) Un vettore con le proprietà richieste è $\vec{w} = [1, -2, 1] \wedge [1, 1, 1]$. Calcolando questo prodotto vettoriale si ottiene $\vec{w} = [-3, 0, 3]$. □

Da una descrizione di una retta r come quella data in (1.3.11) non si deducono immediatamente le informazioni necessarie, ad esempio, a disegnare r . Può essere quindi molto utile descrivere r in modo diverso.

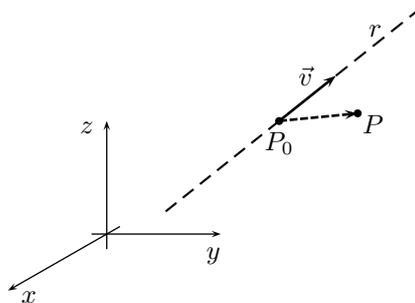


Figura 1.12 – Descrizione di una retta r passante per P_0 e parallela a \vec{v} .

Facciamo riferimento alla Figura 1.12: sia $P_0 = [x_0, y_0, z_0] \in r$, e sia $\vec{v} = [l, m, n] \neq \vec{0}$ un vettore direzionale di r (cioè $\vec{v} \parallel r$). È geometricamente evidente che un generico punto $P = [x, y, z]$ appartiene a r se e solo se $\overrightarrow{P - P_0} \parallel \vec{v}$. Questa condizione può essere sintetizzata dicendo

$$(1.3.14) \quad P \in r \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{P - P_0} = t\vec{v} \quad ,$$

per qualche $t \in \mathbb{R}$.

Usando le coordinate cartesiane, se ne deduce subito che $P = [x, y, z] \in r$ se e solo se

$$(1.3.15) \quad r : \begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} .$$

La (1.3.15) è nota come *rappresentazione parametrica* della retta r che passa per $P_0 = [x_0, y_0, z_0]$ ed è parallela a $\vec{v} = [l, m, n]$. Il significato del parametro $t \in \mathbb{R}$ in (1.3.15) è il seguente: al variare di t in \mathbb{R} , la (1.3.15) fornisce le coordinate di tutti i punti di r . Ad esempio, per $t = 0$ abbiamo P_0 .

▷ Esercizio 16 ◁

Testo

Siano $\vec{v} = [2, 1, 0]$, $P = [1, 1, 1]$.

- (i) Dare una rappresentazione parametrica della retta r che passa per P ed è parallela a \vec{v} ;
- (ii) Scrivere la retta r del punto (i) come sistema di equazioni.

Soluzione

- (i) Applicando direttamente la (1.3.15), abbiamo

$$(1.3.16) \quad r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} .$$

- (ii) Il passaggio da una rappresentazione parametrica di r al corrispondente sistema di equazioni avviene per eliminazione di t attraverso operazioni algebriche. Ad esempio, in (1.3.16) ricaviamo dalla seconda equazione $t = y - 1$: sostituendo nella prima equazione si ottiene $x = 1 + 2(y - 1)$. In conclusione

$$(1.3.17) \quad r : \begin{cases} x = 1 + 2(y - 1) \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad r : \begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$$

□

▷ Esercizio 17 ◁

Testo

Siano $P = [1, 2, 1]$, $\Pi : 2x - 3y + z + 1 = 0$.

- (i) Dopo aver verificato che $P \notin \Pi$, determinare la proiezione ortogonale Q di P su Π e dedurne la distanza tra Π e P ;
- (ii) Determinare il punto P' simmetrico di P rispetto a Π .

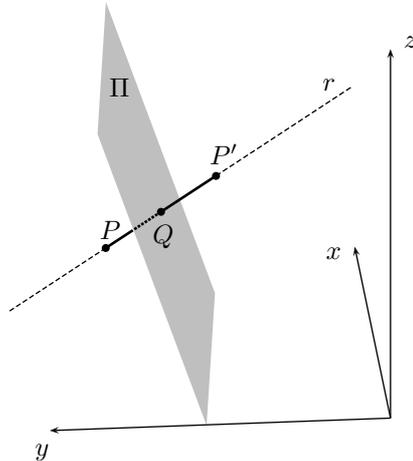


Figura 1.13 – Il punto P' simmetrico di P rispetto al piano Π .

Soluzione

(i) Facciamo riferimento alla Figura 1.13.

Le coordinate di P non soddisfano l'equazione del piano Π , in quanto $2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 1 + 1 \neq 0$, per cui $P \notin \Pi$. La proiezione ortogonale Q richiesta coincide con l'intersezione tra r e Π , dove r è la retta che passa per P ed è ortogonale a Π . Poiché r è parallela a un vettore direzionale di Π , possiamo immediatamente scriverne una rappresentazione parametrica:

$$(1.3.18) \quad r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 1 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} .$$

Per trovare Q dobbiamo individuare quel punto di r che appartiene anche a Π . In formule $[1 + 2t, 2 - 3t, 1 + t]$ deve soddisfare l'equazione di Π : ciò porta a

$$(1.3.19) \quad 2(1 + 2t) - 3(2 - 3t) + (1 + t) + 1 = 0 \quad .$$

Risolvendo l'equazione in t si ottiene $t = \frac{1}{7}$ e, sostituendo questo valore nella (1.3.18), si ha

$$Q = \left[1 + \frac{2}{7}, 2 - \frac{3}{7}, 1 + \frac{1}{7} \right] = \left[\frac{9}{7}, \frac{11}{7}, \frac{8}{7} \right] .$$

A questo punto si può calcolare

(1.3.20)

$$\text{dist}(P, \Pi) = \text{dist}(P, Q) = \sqrt{\left(1 - \frac{9}{7}\right)^2 + \left(2 - \frac{11}{7}\right)^2 + \left(1 - \frac{8}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{7}} .$$

(ii) Per calcolare le coordinate di P' si può osservare che Q è il punto medio del segmento $\overline{PP'}$ per cui, chiamando $P' = [x', y', z']$ e usando la (1.1.2), si ottiene

$$(1.3.21) \quad \left[\frac{9}{7}, \frac{11}{7}, \frac{8}{7} \right] = \left[\frac{1+x'}{2}, \frac{2+y'}{2}, \frac{1+z'}{2} \right]$$

da cui, risolvendo separatamente per ciascuna coordinata, si ottiene

$$P' = \left[\frac{11}{7}, \frac{8}{7}, \frac{9}{7} \right] .$$

□

Osservazione 4: Nell'esercizio precedente, consideriamo la parametrizzazione (1.3.18) di r . In essa, P corrisponde a $t = 0$, mentre Q a $t = \frac{1}{7}$. In altre parole, passando da $t = 0$ a $t = \frac{1}{7}$ ci siamo spostati da P a Q . Per passare invece da P a P' bisogna percorrere una distanza doppia, cosa che si ottiene per un valore doppio di t , ovvero $t = \frac{2}{7}$ che, sostituito nella (1.3.18) restituisce le coordinate di P' .

L'esercizio 17 ci ha consentito di utilizzare una serie di concetti chiave, quindi è assolutamente necessario che il lettore lo abbia compreso a fondo prima di continuare nella lettura. A titolo di verifica si possono svolgere i due esercizi seguenti.

▷ Esercizio 18 ◁

Testo

Ripetere l'esercizio 17 con $P = [1, 0, 1]$, $\Pi : x - y + z = 0$.

Soluzione

$$Q = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right], \quad P' = \left[-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3} \right], \quad \text{dist}(P, \Pi) = \frac{2}{\sqrt{3}} .$$

□

▷ Esercizio 19 ◁

Testo

Ripetere l'esercizio 17 con $P = [1, 1, 1]$, $\Pi : x + y + z - 1 = 0$.

Soluzione

$$Q = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right], \quad P' = \left[-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right], \quad \text{dist}(P, \Pi) = \frac{2}{\sqrt{3}} .$$

□

Nel prossimo esercizio dimostreremo una formula di interesse abbastanza generale.

▷ Esercizio 20 ◁

Testo

Siano dati un piano $\Pi : ax + by + cz + d = 0$ e un punto $P_0 = [x_0, y_0, z_0]$. Si dimostri che

$$(1.3.22) \quad \text{dist}(P_0, \Pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad .$$

(**Suggerimento:** indicare con $P_1 = [x_1, y_1, z_1]$ un punto di Π e ispirarsi alla Figura 1.14).

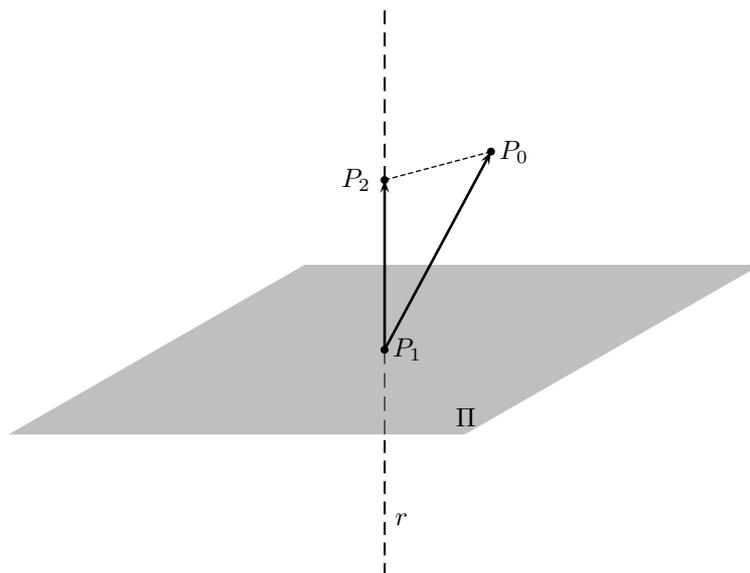


Figura 1.14 – Distanza di un punto da un piano.

Soluzione

La retta r è la retta che passa per P_1 ed è perpendicolare a Π . Quindi $\text{dist}(P_0, \Pi)$ coincide con la lunghezza del vettore $\overrightarrow{P_2 - P_1}$, che è la proiezione di $\overrightarrow{P_0 - P_1}$ lungo r . Un versore parallelo ad r è

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \cdot [a, b, c] \quad .$$

Usando ora la (1.2.9) si ottiene

$$(1.3.23) \quad \overrightarrow{P_2 - P_1} = (\overrightarrow{P_0 - P_1} \cdot \vec{u}) \vec{u} = \left(\frac{a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right) \vec{u} .$$

Quindi

$$(1.3.24) \quad \text{dist}(P_0, \Pi) = |\overrightarrow{P_2 - P_1}| = \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} |\vec{u}|$$

Poiché \vec{u} è un versore, $|\vec{u}| = 1$ nella (1.3.24). Ora si osserva che, dato che $P_1 \in \Pi$, $-ax_1 - by_1 - cz_1 = d$. Sostituendo questa relazione nella (1.3.24) si ottiene la (1.3.22). \square

▷ Esercizio 21 ◁

Testo

Siano $\Pi : x - y + z - 1 = 0$, $C = [1, 2, 0]$. Scrivere l'equazione della sfera S con centro C e tangente a Π .

Soluzione

Geometricamente, la situazione è quella presentata in Figura 1.15.

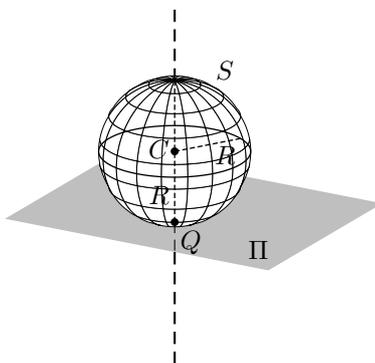


Figura 1.15 – Sfera di centro dato e tangente a un assegnato piano Π .

Il raggio R coincide con la distanza tra C e Π . Quindi, usando la (1.3.22), abbiamo

$$R = \text{dist}(C, \Pi) = \frac{|1 - 2 + 0 - 1|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} ,$$

per cui applicando la (1.3.10) otteniamo

$$S : \quad (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = \frac{4}{3} \quad .$$

□

Un altro concetto estremamente utile è quello di *fascio di piani* generato da una retta r .

Per illustrare questo concetto conviene partire dalla descrizione di r come sistema di equazioni, come in (1.3.11). Per fascio di piani generato da r si intende la famiglia formata da tutti i piani che contengono r . Questo fascio di piani è descritto mediante la famiglia di equazioni

$$(1.3.25) \quad \lambda(ax + by + cz + d) + \mu(a'x + b'y + c'z + d') = 0 \quad ,$$

dove $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sono una coppia di parametri, $[\lambda, \mu] \neq [0, 0]$. Per capire il significato della (1.3.25) possiamo ragionare nel modo seguente: innanzitutto, comunque si fissino i valori della coppia $[\lambda, \mu]$ ($\neq [0, 0]$), la (1.3.25) rappresenta un piano. Inoltre, ogni punto P di r verifica la (1.3.25), poiché sostituendo le sue coordinate in (1.3.25) si ha

$$\lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0 \quad .$$

Dunque ognuno dei piani in (1.3.25) contiene r . Viceversa, e questo non lo dimostriamo, è anche vero che ogni piano contenente r è descrivibile con la (1.3.25). Applichiamo adesso questi concetti per risolvere alcuni esercizi.

▷ Esercizio 22 ◁

Testo

Siano $P = [1, 1, 6]$ e

$$r : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$$

Determinare l'equazione del piano Π che contiene P e r .

Soluzione

Per prima cosa notiamo che $P \notin r$. Il piano Π appartiene al fascio generato da r , per cui, dalla (1.3.25), è del tipo

$$(1.3.26) \quad \lambda(x - 2y + z) + \mu(x - z - 1) = 0$$

Adesso dobbiamo determinare i valori di λ e μ . Poiché P deve appartenere a Π , dobbiamo imporre che le coordinate di P soddisfino la (1.3.26). Si ottiene quindi

$$(1.3.27) \quad \lambda(1 - 2 \cdot 1 + 6) + \mu(1 - 6 - 1) = 0 \quad \text{ovvero} \quad 5\lambda - 6\mu = 0 \quad .$$

Adesso è sufficiente scegliere una coppia di valori λ, μ , non entrambi nulli, tali che la (1.3.27) sia soddisfatta. Possiamo ad esempio scegliere

$$(1.3.28) \quad \lambda = 6, \quad \mu = 5 \quad .$$

Sostituendo questi valori nella (1.3.26) si ottiene

$$(1.3.29) \quad \Pi : \quad 11x - 12y + z - 5 = 0 \quad .$$

Vale la pena notare che la scelta in (1.3.28) non è unica, in quanto ogni coppia $\lambda = 6\alpha, \mu = 5\alpha$, con $\alpha \neq 0$, sarebbe stata accettabile e avrebbe portato all'equazione

$$\alpha (11x - 12y + z - 5) = 0$$

che, per ogni $\alpha \neq 0$, rappresenta sempre il piano Π di (1.3.29). □

▷ Esercizio 23 ◁

Testo

Sia $P = [1, 3, 5]$. Scrivere l'equazione del piano Π che contiene P e l'asse y .

Soluzione

L'asse y è definito dal sistema

$$(1.3.30) \quad \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad .$$

Quindi il piano Π cercato è del tipo $\lambda x + \mu z = 0$. Imponendo che le coordinate di P soddisfino questa equazione si ottiene $\lambda + 5\mu = 0$. A questo punto, ponendo, ad esempio, $\lambda = 5, \mu = -1$, troviamo

$$\Pi : \quad 5x - z = 0 \quad .$$

□

▷ Esercizio 24 ◁

Testo

Sia r la retta data in forma parametrica da

$$(1.3.31) \quad r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad .$$

Scrivere l'equazione del piano Π che contiene l'origine e r .

Soluzione

Possiamo scrivere r nella forma di sistema di equazioni e poi procedere come nei due esercizi precedenti. Eliminando algebricamente t nella rappresentazione parametrica (1.3.31) si ottiene

$$(1.3.32) \quad r : \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ y + 2z - 2 = 0 \end{cases} .$$

Quindi Π è del tipo

$$\lambda(x - z - 1) + \mu(y + 2z - 2) = 0 .$$

Imponendo $O \in \Pi$ si arriva facilmente a

$$\Pi : 2x - y - 4z = 0 .$$

□

▷ Esercizio 25 ◁

Testo

Scrivere l'equazione del piano Π che contiene l'asse x e il punto $P = [1, 0, 2]$.

Soluzione

$$\Pi : y = 0 .$$

□

Rappresentazione parametrica di un piano: Siano dati un punto $P_0 = [x_0, y_0, z_0]$ e due vettori non nulli $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3]$ e $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$. Allora, chiaramente, esiste un unico piano Π che passa per il punto P_0 ed è parallelo ai due vettori u e v . Possiamo osservare che un generico punto $P = [x, y, z]$ appartiene al piano Π se e solo se

$$\overrightarrow{(P - P_0)} = s\vec{u} + t\vec{v}$$

per qualche coppia di numeri reali s, t . Riscrivendo la precedente uguaglianza vettoriale rispetto alle tre coordinate cartesiane otteniamo una *rappresentazione parametrica* del piano Π :

$$\begin{cases} x = x_0 + s u_1 + t v_1 \\ y = y_0 + s u_2 + t v_2 \\ z = z_0 + s u_3 + t v_3 \end{cases} \quad \text{dove } s, t \in \mathbb{R} .$$

Si noti che, intuitivamente, un piano ha dimensione 2 e quindi risulta naturale che sia stato necessario usare due parametri per descrivere l'insieme dei suoi punti.

Ora possediamo gli strumenti per affrontare anche esercizi diversi e più articolati.

▷ Esercizio 26 ◁

Testo

Siano $P = [1, 0, 3]$ e

$$(1.3.33) \quad r : \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Calcolare la distanza tra P e r .

(**Suggerimento:** $\text{dist}(P, r) = \text{dist}(P, Q)$, dove Q è la proiezione ortogonale di P su r , come rappresentato nella Figura 1.16).

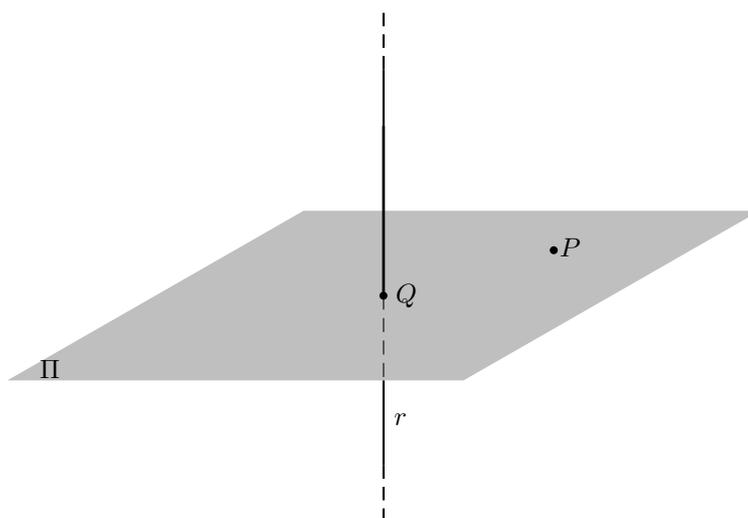


Figura 1.16 – Proiezione ortogonale di un punto su una retta in \mathbb{R}^3 .

Soluzione

Abbiamo $Q = r \cap \Pi$, dove Π è il piano che passa per P ed è ortogonale ad r . Un vettore direzionale \vec{N} di Π è dato, secondo (1.3.12), da

$$\vec{N} = [1, 0, -1] \wedge [1, 1, 0] = [1, -1, 1] \quad ,$$

per cui $\Pi: 1(x-1) - 1(y-0) + 1(z-3) = 0$, cioè $\Pi: x - y + z - 4 = 0$.

Adesso le coordinate di Q devono soddisfare sia l'equazione di Π sia il sistema di equazioni (1.3.33). Queste due condizioni equivalgono a dire che Q è una soluzione del sistema

$$(1.3.34) \quad r : \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ x + y = 0 \\ x - y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

Il (1.3.34) è un sistema lineare con tre equazioni e tre incognite. Nel capitolo sui sistemi lineari impareremo a riconoscere che (1.3.34) ammette un'unica soluzione e spiegheremo il metodo per calcolarla. Allo stato attuale ce la possiamo cavare con un approccio più diretto e geometrico. Osserviamo che $P^* = [0, 0, 1] \in r$. Quindi, poiché $r \parallel \vec{N}$, una rappresentazione parametrica di r è

$$(1.3.35) \quad r : \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Poiché Q è quel punto di r che sta anche su Π , basta determinare quel valore di t per cui $[t, -t, 1+t]$ soddisfa l'equazione di Π . Si deve avere

$$t - (-t) + (1+t) - 4 = 0 \quad ,$$

da cui si deduce che $t = 1$ e $Q = [1, -1, 2]$. Infine, $\text{dist}(P, r) = \text{dist}(P, Q) = \sqrt{2}$. A titolo di verifica, si noti che le coordinate di Q forniscono l'unica soluzione di (1.3.34). \square

1.4 Geometria analitica in \mathbb{R}^2

Un vettore \vec{v} in \mathbb{R}^2 è descritto mediante due coordinate: $\vec{v} = [v_1, v_2]$. Le operazioni di somma, moltiplicazione per $\lambda \in \mathbb{R}$ e prodotto scalare funzionano esattamente come in \mathbb{R}^3 . In particolare, se $\vec{v} = [v_1, v_2]$, $\vec{u} = [u_1, u_2]$, allora

$$(1.4.1) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta \quad ,$$

dove $0 \leq \theta \leq \pi$ è l'angolo formato da \vec{u} e \vec{v} . Ne segue che, anche in questo caso, l'ortogonalità tra \vec{u} e \vec{v} è riconducibile all'annullarsi del loro prodotto scalare. Va però segnalato che $\vec{u} \wedge \vec{v}$ non ha senso in questo contesto, come

si può intuire dal fatto che $\vec{u} \wedge \vec{v}$ darebbe un risultato non appartenente al piano di partenza.

Con queste premesse, possiamo considerare sostanzialmente la geometria analitica in \mathbb{R}^2 come un utile esercizio in cui applichiamo i vari strumenti che abbiamo acquisito durante lo studio della sezione precedente. Come punto di partenza osserviamo che un ragionamento *identico* a quello che ci ha condotto all'equazione di un piano in \mathbb{R}^3 (si vedano le (1.3.4) e (1.3.5)) consente di affermare che l'equazione

$$(1.4.2) \quad a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \quad , \text{ con } [a, b] \neq [0, 0] ,$$

rappresenta, nel piano cartesiano \mathbb{R}^2 , la retta r che passa per $P_0 = [x_0, y_0]$ ed è ortogonale a $\vec{N} = [a, b]$.

Ne segue che, al variare di $c \in \mathbb{R}$, la famiglia di equazioni

$$(1.4.3) \quad ax + by + c = 0$$

descrive un fascio di rette parallele tra loro, tutte ortogonali alla direzione $\vec{N} = [a, b]$. Quando la retta non è parallela all'asse y la sua equazione può essere riscritta nella forma

$$(1.4.4) \quad y = mx + c \quad , \quad m, c \in \mathbb{R} .$$

In questo caso m è detto *coefficiente angolare* della retta e coincide con la tangente dell'angolo θ formato dalla retta con l'asse x , $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. La Figura 1.17 illustra il caso $m > 0$, $c > 0$.

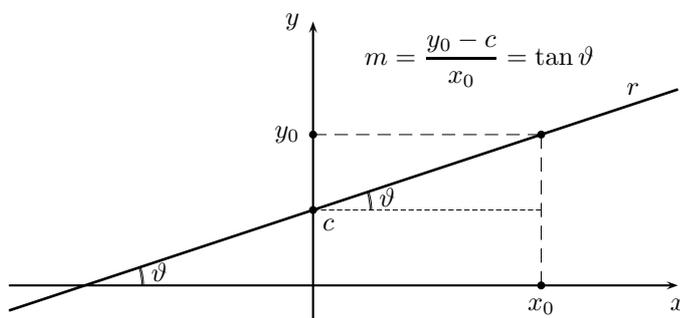


Figura 1.17 – Coefficiente angolare di una retta in \mathbb{R}^2 .

Possiamo ora risolvere una serie di esercizi illustrativi.

\triangleright Esercizio 27 \triangleleft

Testo

Siano $P_1 = [1, 2]$, $P_2 = [2, -1]$. Scrivere l'equazione della retta r che contiene P_1 e P_2 , e disegnarla.

Soluzione

Usando la (1.4.2) possiamo dire che tutte le rette passanti per P_1 hanno equazione del tipo

$$(1.4.5) \quad a(x - 1) + b(y - 2) = 0 \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad [a, b] \neq [0, 0] .$$

Per determinare i valori di a e b dobbiamo imporre che le coordinate di P_2 soddisfino la (1.4.5). Si ottiene

$$(1.4.6) \quad a(2 - 1) + b(-1 - 2) = 0 \quad \text{ovvero} \quad a - 3b = 0 ,$$

per cui possiamo scegliere, ad esempio, $a = 3$, $b = 1$ e abbiamo

$$(1.4.7) \quad r : \quad 3(x - 1) + (y - 2) = 0 \quad \text{ovvero} \quad r : \quad 3x + y - 5 = 0 .$$

A titolo di verifica il lettore può controllare che le coordinate di entrambi i punti P_1 e P_2 soddisfano l'equazione 1.4.7 così ricavata.

Notiamo anche che r interseca l'asse x ($y = 0$) nel punto di coordinate $[\frac{5}{3}, 0]$. L'intersezione con l'asse y è invece $[0, 5]$. Con tutti questi elementi non c'è difficoltà per realizzare il disegno di Figura 1.18. □

\triangleright Esercizio 28 \triangleleft

Testo

Siano $r : y = 2x + 1$, $P = [-2, 2]$.

- (i) Disegnare r e P nel piano cartesiano \mathbb{R}^2 ;
- (ii) Calcolare la proiezione ortogonale Q di P su r ;
- (iii) Calcolare $\text{dist}(P, r)$;
- (iv) Scrivere l'equazione della circonferenza γ di centro P e tangente a r ;
- (v) Determinare il punto P' simmetrico di P rispetto a r .

Soluzione

(i) Per disegnare r è sufficiente determinare due punti che appartengono a r . Ad esempio, l'intersezione di r con l'asse x è $[-\frac{1}{2}, 0]$, mentre quella con l'asse y è $[0, 1]$. Si perviene quindi alla Figura 1.19.

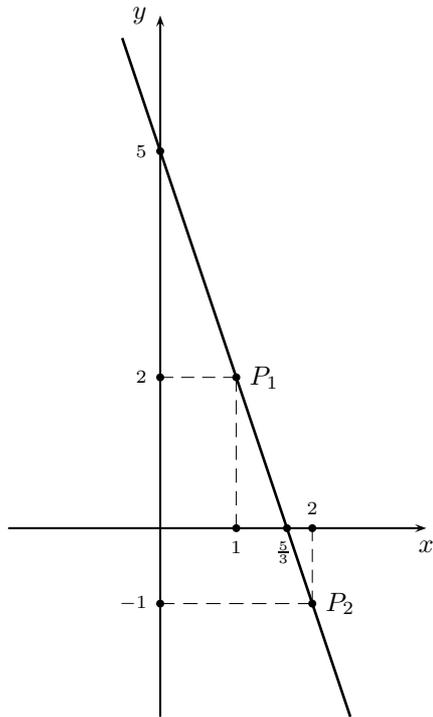


Figura 1.18 – La retta dell'esercizio 27.

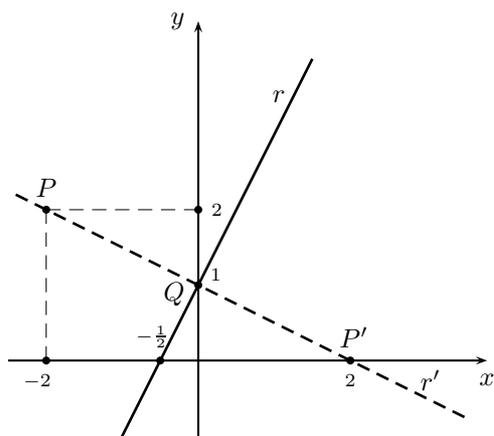


Figura 1.19 – La retta dell'esercizio 28.

(ii) $Q = r \cap r'$, dove r' è la retta passante per P e ortogonale a r . Poiché r ha equazione

$$(1.4.8) \quad 2x - y + 1 = 0 \quad ,$$

il confronto con (1.4.3) ci dice che $r \perp [2, -1]$ e quindi $r' \parallel [2, -1]$. Questo ci consente di scrivere immediatamente una rappresentazione parametrica di r' :

$$(1.4.9) \quad r' : \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 2 - t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R} .$$

Quindi Q sarà quel punto di tipo $[-2 + 2t, 2 - t]$ che soddisfa l'equazione (1.4.8) di r . Cioè

$$2(-2 + 2t) - (2 - t) + 1 = 0 \quad ,$$

da cui $t = 1$ e, sostituendo questo valore nella (1.4.9), $Q = [0, 1]$.

$$(iii) \quad \text{dist}(P, r) = \text{dist}(P, Q) = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{5} .$$

(iv) Come in (1.3.10), possiamo dire che l'equazione della circonferenza di centro $C = [x_0, y_0]$ e raggio R è

$$(1.4.10) \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \quad .$$

Nel nostro caso $C = P$ e $R = \text{dist}(P, r) = \sqrt{5}$, quindi l'equazione della circonferenza γ richiesta è

$$\gamma : (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 5 \quad .$$

(v) Il simmetrico P' di P rispetto ad r si ottiene imponendo che Q sia il punto medio del segmento $\overline{PP'}$. In formule

$$Q = \frac{P' + P}{2} \quad \text{ovvero} \quad P' = 2Q - P = [2, 0] \quad .$$

□

Osservazione 5: Nell'esercizio precedente il fatto che Q e P' coincidessero con le intersezioni di r' con gli assi è puramente casuale. Per calcolare $\text{dist}(P, r)$ era altresì possibile utilizzare la seguente formula, che è l'analogo in \mathbb{R}^2 della (1.3.22) (anche la dimostrazione data nell'esercizio 20 si

adatta perfettamente a questo caso). Precisamente, siano $P_0 = [x_0, y_0]$ e $r : ax + by + c = 0$: allora

$$(1.4.11) \quad \text{dist}(P_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} .$$

1.5 Esercizi di riepilogo

Il lettore dovrebbe essere in grado di svolgere senza difficoltà il seguente esercizio.

▷ Esercizio 29 ◁

Testo

Siano $\vec{u} = [1, -1, 2]$, $\vec{v} = [2, 0, 1]$ e $P = [1, 0, 0]$:

- (i) Calcolare $\cos \vartheta$, dove ϑ è l'angolo formato da \vec{u} e \vec{v} ($0 \leq \vartheta \leq \pi$) ;
- (ii) Calcolare l'area del parallelogramma individuato da \vec{u} e \vec{v} ;
- (iii) Scrivere l'equazione del piano Π che contiene P ed è parallelo a \vec{u} e \vec{v} ;
- (iv) Calcolare $\text{dist}(O, \Pi)$;
- (v) Descrivere mediante un sistema di equazioni la retta r che contiene O e P ;
- (vi) Scrivere una rappresentazione parametrica della retta r' che contiene $P' = [1, 3, 1]$ ed è parallela a \vec{u} ;
- (vii) Scrivere l'equazione del piano Π' che contiene l'asse y e P' ;
- (viii) Scrivere l'equazione del piano Π'' che contiene P ed è parallelo al piano $y = 8$.

Soluzione

(i)

$$\cos \vartheta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{4}{\sqrt{6} \sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{30}} .$$

(ii)

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = [-1, 3, 2] ; \text{ area parallelogramma} = |\vec{u} \wedge \vec{v}| = \sqrt{14} .$$

(iii)

$$\Pi \perp (\vec{u} \wedge \vec{v}) \Rightarrow$$

$$\Pi : \quad -1(x-1) + 3(y-0) + 2(z-0) = 0 ,$$

cioè

$$\Pi : \quad x - 3y - 2z - 1 = 0 .$$

(iv) Usando la (1.3.22) con $P_0 = O$ otteniamo

$$\text{dist}(O, \Pi) = \frac{1}{\sqrt{14}} .$$

(v) In forma parametrica r è descritta da

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R} ;$$

ciò equivale al sistema di equazioni

$$r : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

(r è l'asse x).

(vi) Applicando direttamente la (1.3.15) otteniamo

$$r' : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R} .$$

(vii) Π' appartiene al fascio $\lambda x + \mu z = 0$. Imponendo $P' \in \Pi'$ si ottiene la condizione $\lambda + \mu = 0$. Si conclude che $\Pi' : x - z = 0$.

(viii) Π'' è del tipo $y = c$. Imponendo $P \in \Pi''$ si trova $c = 0$ e dunque

$$\Pi'' : \quad y = 0 .$$

□

Facciamo ora un ragionamento utile partendo dalla generica rappresentazione parametrica (1.3.15) di una retta r . Se supponiamo che l , m e n siano tutti diversi da zero, possiamo ricavare t dalle tre equazioni di (1.3.15) e scrivere

$$(1.5.1) \quad (t =) \quad \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \quad .$$

La (1.5.1) in pratica descrive r mediante un sistema di equazioni. Se applichiamo ciò alla retta r' del punto (vi) dell'esercizio 30, troviamo

$$(1.5.2) \quad r' : \quad \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 3}{(-1)} = \frac{z - 1}{2} \quad ,$$

che equivale a scrivere

$$(1.5.3) \quad r' : \quad \begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2y + z - 7 = 0 \end{cases} \quad .$$

Notiamo anche che, in luogo di (1.5.3), avremmo potuto scrivere, ad esempio,

$$r' : \quad \begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases} \quad .$$

La non unicità nella scrittura di una retta r come intersezione di due piani non deve stupire, in quanto sono infinite le coppie di piani aventi come intersezione la stessa retta. Vediamo una semplice applicazione di (1.5.1):

▷ Esercizio 30 ◁

Testo

Siano $P_1 = [2, 0, 1]$ e $P_2 = [1, -1, 2]$. Scrivere un sistema di equazioni che individua la retta r che passa per P_1 e P_2 .

Soluzione

$$r \parallel \overrightarrow{P_2 - P_1} = [-1, -1, 1] \quad .$$

Pertanto, usando la (1.5.1) con $[x_0, y_0, z_0] = P_1$, otteniamo

$$(1.5.4) \quad r : \quad \frac{x - 2}{(-1)} = \frac{y - 0}{(-1)} = \frac{z - 1}{1} \quad ,$$

da cui, ad esempio,

$$(1.5.5) \quad r : \quad \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x + z - 3 = 0 \end{cases} \quad .$$

□

Osservazione 6: Per scrivere la (1.5.1) abbiamo richiesto che l , m e n fossero tutti diversi da zero. Se, ad esempio, $l = 0$, guardando la (1.3.15) vediamo che, invece di (1.5.1), dobbiamo scrivere

$$(1.5.6) \quad x - x_0 = 0, \quad (t =) \quad \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} .$$

I casi in cui m o n si annullano sono simili (ricordare però che almeno uno tra i coefficienti l , m e n deve essere non nullo, altrimenti la (1.3.15) non rappresenta una retta).

▷ Esercizio 31 ◁

Testo

Siano $P_1 = [2, 1, 0]$ e $P_2 = [3, 1, 1]$. Scrivere un sistema di equazioni che individua la retta r che passa per P_1 e P_2 .

Soluzione

$$r \parallel \overrightarrow{P_2 - P_1} = [1, 0, 1] .$$

Pertanto, ragionando come nell'osservazione precedente, arriviamo subito a:

$$(1.5.7) \quad r : \quad y - 1 = 0, \quad \frac{x - 2}{1} = \frac{z - 0}{1} ,$$

da cui

$$r : \begin{cases} y - 1 = 0 \\ x - z - 2 = 0 \end{cases} .$$

□

▷ Esercizio 32 ◁

Testo

Ripetere l'esercizio precedente con $P_1 = [2, 1, 0]$ e $P_2 = [3, 1, 0]$.

Soluzione

$$r : \begin{cases} y - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases} .$$

□

▷ Esercizio 33 ◁

Testo

Siano $\vec{u} = [1, 0, 1]$, $\vec{v} = [0, 1, 2]$, $\vec{w} = [1, 1, 1]$.

- (i) Determinare il volume del parallelepipedo individuato da \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} ;
- (ii) Calcolare l'area del parallelogramma individuato da \vec{v} e \vec{w} ;
- (iii) Se ϑ è l'angolo formato da \vec{u} e \vec{v} ($0 \leq \vartheta \leq \pi$), l'affermazione $\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \pi$ è vera o falsa?

Soluzione

Iniziamo da

(ii)

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = [-1, 2, -1] \quad ,$$

per cui l'area richiesta vale

$$|\vec{v} \wedge \vec{w}| = \sqrt{6} \quad .$$

(i)

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = [1, 0, 1] \cdot [-1, 2, -1] = -2 \quad .$$

Quindi il volume richiesto vale

$$|\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})| = |-2| = 2 \quad .$$

(iii)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 > 0 \quad ,$$

per cui $\cos \vartheta > 0$ e quindi $0 \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}$. Dunque l'affermazione $\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \pi$ è falsa. □

▷ Esercizio 34 ◁

Testo

Sia $\Pi : x + y + z = 0$, e sia $P = [1, 2, 1]$.

- (i) Calcolare la proiezione ortogonale Q di P su Π ;
- (ii) Calcolare $\text{dist}(P, \Pi)$;
- (iii) Determinare il punto P' simmetrico di P rispetto a Π .

Soluzione

(i) $Q = \Pi \cap r$, dove r è la retta passante per P e ortogonale a Π :

$$(1.5.8) \quad r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R} .$$

Per calcolare Q dobbiamo determinare il punto di r che sta su Π :

$$(1 + t) + (2 + t) + (1 + t) = 0 \quad ,$$

da cui $t = -(4/3)$ e quindi, sostituendo in (1.5.8),

$$Q = \left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right] .$$

(ii)

$$\text{dist}(P, \Pi) = \text{dist}(P, Q) = \frac{4}{\sqrt{3}} .$$

(iii)

$$P' = 2Q - P = \left[-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{5}{3} \right] .$$

□

▷ Esercizio 35 ◁

Testo

Sia

$$(1.5.9) \quad r : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} .$$

Scrivere l'equazione del piano Π che contiene r e O .

Soluzione

Il piano Π appartiene al fascio di piani generato da r , per cui è della forma

$$(1.5.10) \quad \lambda(x + y - 1) + \mu(y + z) = 0 .$$

Imponendo che le coordinate di O soddisfino la (1.5.10) si ottiene la relazione $-\lambda = 0$. Per cui possiamo scegliere $\lambda = 0$, $\mu = 1$ e concludiamo che $\Pi : y + z = 0$.

□

Posizione reciproca di due rette

Siano r_1 e r_2 due rette distinte in \mathbb{R}^3 . Allora possono verificarsi tre casi che descrivono la reciproca posizione delle due rette:

(1.5.11) : r_1 e r_2 hanno un punto in comune, nel qual caso si dice che sono *incidenti*;

(1.5.12) : r_1 e r_2 sono *parallele*;

(1.5.13) : r_1 e r_2 non sono né incidenti né parallele. In questo caso si dice

che sono *sghembe*.

▷ Esercizio 36 ◁

Testo

Sia r_1 la retta definita in (1.5.9). E sia

$$(1.5.14) \quad r_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} .$$

Stabilire la reciproca posizione di r_1 e r_2 .

Soluzione

$$r_1 \parallel ([1, 1, 0] \wedge [0, 1, 1]) = [1, -1, 1] = \vec{u} .$$

Poi,

$$r_2 \parallel [1, 2, 1] = \vec{v} .$$

Poiché $\vec{u} \neq \lambda \vec{v} \forall \lambda \in \mathbb{R}$, \vec{u} e \vec{v} non sono paralleli. Quindi r_1 e r_2 possono solo essere incidenti o sghembe. Vediamo se esiste un punto di r_2 che appartiene a r_1 : sostituendo $[t, 2t, 1 + t]$ in (1.5.9) troviamo

$$(1.5.15) \quad \begin{cases} t + (2t) - 1 = 0 \\ 2t + (1 + t) = 0 \end{cases},$$

da cui

$$\begin{cases} t = (1/3) \\ t = -(1/3) \end{cases},$$

risultato che rappresenta un evidente assurdo, in quanto t non può essere simultaneamente uguale a due valori diversi. Quindi r_1 e r_2 non hanno punti in comune e sono pertanto sghembe. □

▷ Esercizio 37 ◁

Testo

Siano $\Pi : x - y + z = 0$ e $P = [1, 0, 1]$.

- (i) Scrivere l'equazione della sfera S di centro P e tangente al piano Π ;
- (ii) Determinare il punto Q simmetrico di P rispetto al piano Π .

Soluzione

(i)

$$S : (x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = \frac{4}{3} .$$

(ii)

$$Q = \left[-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3} \right] .$$

□

▷ Esercizio 38 ◁

Testo

Sia r la retta

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R} .$$

(i) Scrivere l'equazione del piano Π che contiene r e O .

(ii) Stabilire la reciproca posizione di r e dell'asse x .

Soluzione

(i)

$$\Pi : \quad 3x - 2y + 2z = 0 .$$

(ii) Sghembe.

□

▷ Esercizio 39 ◁

Testo

Nel piano cartesiano \mathbb{R}^2 si considerino la retta $r : y = 3x - 1$ e il punto $P = [2, 2]$:

(i) Determinare il punto P' simmetrico di P rispetto a r ;

(ii) Scrivere l'equazione della circonferenza γ di centro P e passante per O ;

(iii) Scrivere l'equazione della retta r' che passa per P ed è ortogonale a r .

Soluzione

(i)

$$P' = \left[\frac{1}{5}, \frac{13}{5} \right] .$$

(ii)

$$\gamma : \quad (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8 .$$

(iii)

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3} .$$

□

▷ Esercizio 40 ◁

Testo (*)

Date due rette sghembe r_1 e r_2 esiste un'unica retta r con la proprietà di essere

- (a) incidente a entrambe;
- (b) perpendicolare a entrambe.

r è detta la *comune perpendicolare* a r_1 e r_2 .

Siano ora

$$r_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} ; \quad r_2 : \begin{cases} x - 2 = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases} .$$

Determinare la loro comune perpendicolare r .

Soluzione

Scriviamo r_1 e r_2 in forma parametrica:

$$r_1 : [0, 1, t] , t \in \mathbb{R} ; \quad r_2 : [2, s, -1] , s \in \mathbb{R} .$$

Utilizzando la (1.5.1) possiamo dire che la generica retta incidente a r_1 e r_2 è definita dal sistema

$$(1.5.16) \quad \frac{x-0}{2-0} = \frac{y-1}{s-1} = \frac{z-t}{-1-t} ;$$

è importante mettere in luce che, al variare dei parametri s e t in (1.5.16), si ottiene sempre una retta che congiunge un punto di r_1 con uno di r_2 . Ora,

$$r_1 \parallel [0, 0, 1] = \vec{u}_1 ; \quad r_2 \parallel [0, 1, 0] = \vec{u}_2 .$$

La retta (1.5.16) è invece parallela a $[2, s-1, -1-t]$. Imponendo che quest'ultimo vettore sia ortogonale ad entrambi \vec{u}_1 e \vec{u}_2 , si trovano le due seguenti condizioni:

$$-1-t = 0 ; \quad s-1 = 0 ,$$

da cui $t = -1$ e $s = 1$. Sostituendo questi valori in (1.5.16), e tenendo conto dell'osservazione 6, si conclude che la comune perpendicolare r è

$$r : \begin{cases} y - 1 = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases} .$$

Si noti che

$$r \cap r_1 = [0, 1, -1] ; \quad r \cap r_2 = [2, 1, -1] .$$

□

1.6 Considerazioni conclusive

Nella sezione 1.1 abbiamo introdotto il concetto di vettore in modo diretto e intuitivo. Una formalizzazione matematicamente rigorosa avrebbe richiesto l'uso del concetto matematico di *relazione di equivalenza*.

Segnaliamo fin da ora che lo studio dei vettori, con le loro operazioni, costituisce il modello di riferimento per una teoria di grande importanza, avente come oggetto i cosiddetti *spazi vettoriali* di cui parleremo successivamente (capitolo 4 e 5).

Capitolo 2

Numeri complessi

2.0 Scopi del capitolo

Consideriamo l'equazione

$$(2.0.1) \quad x^2 + 1 = 0.$$

Questa semplice equazione polinomiale non è risolvibile in \mathbb{R} .

Il campo dei numeri complessi, denotato mediante il simbolo \mathbb{C} , è un'estensione di \mathbb{R} in cui ogni equazione di tipo polinomiale ammette soluzione. In questo capitolo impariamo che cosa sono i numeri complessi e come si effettuano le operazioni in \mathbb{C} . Come applicazione, risolviamo equazioni di 2° grado (con $\Delta < 0$) e altre equazioni polinomiali del tipo $x^n = x_0$.

Nella sezione 2.3 enunciamo il teorema fondamentale dell'algebra e riprendiamo il concetto di molteplicità algebrica di una radice: questo sarà uno strumento necessario nello studio della diagonalizzazione di matrici, come vedremo nel capitolo 5.

2.1 Definizioni introduttive e operazioni in \mathbb{C}

Operativamente, possiamo definire un numero complesso come una scrittura del tipo $a + bi$, dove a e b sono due numeri reali, ed i ha il significato che spiegheremo fra poco. Di solito indicheremo i numeri complessi con le lettere z oppure w : per esempio, $z = 1 + \sqrt{2}i$, $w = -1/3 + 3\pi i$ sono numeri complessi. L'insieme dei numeri complessi si indica con il simbolo \mathbb{C} :

$$(2.1.1) \quad \mathbb{C} = \{a + bi \text{ t.c. } a, b \in \mathbb{R}\} .$$

Tutto ciò acquista significato quando si descrive la *struttura algebrica* di \mathbb{C} . A tal fine, diciamo che la somma ed il prodotto di due numeri complessi avviene *secondo l'usuale algebra del calcolo letterale, con la seguente proprietà aggiuntiva*:

$$(2.1.2) \quad i^2 = -1 \quad .$$

In maggior dettaglio, se $z = a + bi$ e $w = c + di$ sono due numeri complessi, abbiamo:

$$(2.1.3) \quad z + w = (a + c) + (b + d)i \quad ;$$

$$(2.1.4) \quad \begin{aligned} zw &= (a + ib)(c + id) = ac + ibc + iad + i^2bd \\ &= (ac - bd) + (bc + ad)i \quad , \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza si ottiene usando la (2.1.2) e riordinando i termini.

▷ Esercizio 1 ◁

Testo

Siano $z = 1 - 2i$ e $w = 3 + i$. Calcolare $z + w$ e zw .

Soluzione

$$\begin{aligned} z + w &= (1 + 3) + (-2 + 1)i = 4 - i \quad ; \\ zw &= (1 - 2i)(3 + i) = (1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1)) + (-2 \cdot 3 + 1 \cdot 1)i = 5 - 5i \quad . \end{aligned}$$

□

I numeri complessi possono essere identificati con i punti del piano cartesiano \mathbb{R}^2 : $z = a + bi$ corrisponde al punto di coordinate $[a, b]$, come illustrato in Figura 2.1.

È importante notare che i numeri *reali* corrispondono esattamente a quei numeri complessi che si trovano sull'asse x (cioè caratterizzati da $b = 0$). Perciò, in questo contesto, l'asse x viene chiamato *asse reale*, mentre l'asse y è detto *asse immaginario*. L'ascissa a viene detta *parte reale* di z , e si scrive $a = \text{Re}(z)$, mentre l'ordinata b è indicata con $b = \text{Im}(z)$, *parte immaginaria* di z . Il numero complesso $\bar{z} = a - bi$ è detto il *coniugato* di z ; le rappresentazioni di z e \bar{z} nel piano cartesiano sono riportate in Figura 2.1. Introduciamo anche il modulo del numero complesso z , così definito:

$$(2.1.5) \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad .$$

Per il teorema di Pitagora $|z|$ coincide con la distanza di z dall'origine O .

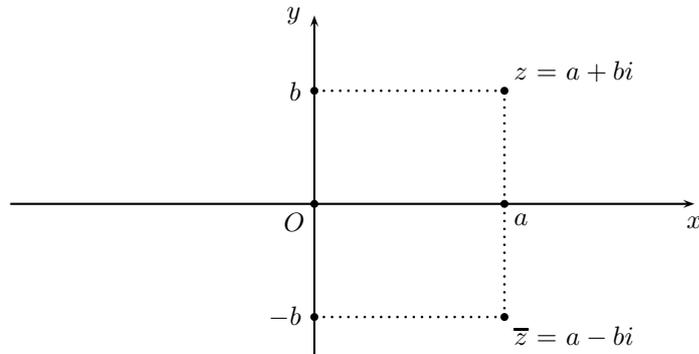


Figura 2.1 – Corrispondenza fra numeri complessi e punti del piano cartesiano.

▷ Esercizio 2 ◁

Testo

Verificare le seguenti identità, valide $\forall z, w \in \mathbb{C}$:

$$(2.1.6) \quad \begin{aligned} & \text{(i)} \quad zw = wz ; \\ & \text{(ii)} \quad \overline{z\bar{w}} = \bar{z}w ; \\ & \text{(iii)} \quad z\bar{z} = |z|^2 . \end{aligned}$$

Soluzione

Poniamo $z = a + bi$, $w = c + di$ e verifichiamo la (ii). Abbiamo:

$$(2.1.7) \quad \overline{z\bar{w}} = \overline{(a + bi)(c + di)} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i$$

$$(2.1.8) \quad \bar{z}w = (a - bi)(c + di) = (ac - bd) + (-ad - bc)i.$$

Confrontando la (2.1.7) e la (2.1.8) si ottiene la (2.1.6)(ii). Le altre identità in (2.1.6) sono simili e la loro verifica è lasciata al lettore. \square

Le operazioni con l'*inverso* di un numero complesso ($\neq 0$), cioè con $1/z$, possono essere effettuate facilmente tenendo conto dell'identità seguente:

$$(2.1.9) \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

▷ Esercizio 3 ◁

Testo

Sia $z = 2 - 3i$. Calcolare $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$, $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right)$.

Soluzione

Usando la (2.1.9) si ha:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2 - 3i} = \frac{2 + 3i}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \frac{2 + 3i}{2^2 + 3^2} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i.$$

In conclusione: $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{2}{13}$; $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{3}{13}$. □

Cerchiamo ora soluzioni in \mathbb{C} dell'equazione di 2° grado:

$$(2.1.10) \quad az^2 + bz + c = 0,$$

dove $a, b, c \in \mathbb{R}$ sono fissati, con $a \neq 0$. Già sappiamo che, se $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, allora la (2.1.10) è risolvibile in \mathbb{R} (e, quindi, anche in \mathbb{C}). Il fatto nuovo e interessante è che, se $\Delta < 0$, allora la (2.1.10) ha due soluzioni in \mathbb{C} date da:

$$(2.1.11) \quad z_1 = \frac{-b + (\sqrt{-\Delta})i}{2a}, \quad z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b - (\sqrt{-\Delta})i}{2a}.$$

Il lettore dovrebbe, per esercizio, riuscire a verificare che la (2.1.11) si ricava dallo stesso ragionamento algebrico utilizzato per determinare le soluzioni di (2.1.10) nel caso $\Delta \geq 0$ (si veda il file.pdf proposto dal docente per le conoscenze preliminari).

▷ Esercizio 4 ◁

Testo

Determinare le soluzioni in \mathbb{C} di:

$$(2.1.12) \quad z^2 + z + 1 = 0$$

e verificare il risultato.

Soluzione

Risulta $\Delta = b^2 - 4ac = -3 < 0$. Usando le (2.1.11) si ottiene:

$$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_2 = \overline{z_1} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Verificare il risultato significa controllare che z_1 e z_2 effettivamente soddisfano la (2.1.12). Si deve, cioè, avere $z_1^2 + z_1 + 1 = 0$ che, sostituendo l'espressione trovata per z_1 , dà:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 1 = \\ & \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)i + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 1 = \\ & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 = 0, \end{aligned}$$

come richiesto. La verifica per z_2 è del tutto simile. □

Osservazione 1: Ragionando come nell'esercizio 4, lo studente dovrebbe ora essere in grado di verificare, con sostituzione diretta in (2.1.10), la validità della formula risolutiva (2.1.11).

2.2 Forma trigonometrica dei numeri complessi e radici n -esime

Indichiamo, secondo consuetudine, $\rho = |z|$ e facciamo riferimento alla Figura 2.2.

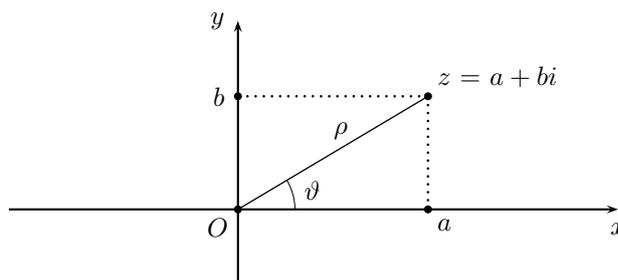


Figura 2.2 – Forma trigonometrica dei numeri complessi.

Se $z \neq 0$, allora z è univocamente determinato dalla conoscenza di ρ (sempre > 0) e dell'angolo ϑ . Il legame tra le coordinate $[\rho, \vartheta]$ (che, in un contesto

successivo, chiameremo *coordinate polari*) e le coordinate cartesiane $[a, b]$ è espresso dalle relazioni:

$$(2.2.1) \quad \begin{cases} a = \rho \cos \vartheta \\ b = \rho \sin \vartheta \end{cases} .$$

Ne segue che un numero $z = a + bi$ può essere riscritto, mediante le (2.2.1), come:

$$(2.2.2) \quad z = a + bi = (\rho \cos \vartheta) + (\rho \sin \vartheta)i = \rho[\cos \vartheta + \sin \vartheta i].$$

Il formalismo si semplifica definendo il cosiddetto *esponenziale complesso*:

$$(2.2.3) \quad e^{i\vartheta} \stackrel{\text{def}}{=} [\cos \vartheta + \sin \vartheta i].$$

Sostituendo in (2.2.2) otteniamo:

$$(2.2.4) \quad z = \rho e^{i\vartheta},$$

che è denominata *forma trigonometrica* di z . È importante rendersi conto che la (2.2.3) è solo una definizione di comodo, in cui la terminologia *esponenziale complesso* è giustificata dal fatto che, come vedremo nella successiva (2.2.6), $e^{i\vartheta}$ ha proprietà algebriche simili a quelle di cui godono le funzioni esponenziali reali.

Osservazione 2: Dato che le funzioni $\cos \vartheta$ e $\sin \vartheta$ sono periodiche di periodo 2π , abbiamo che:

$$(2.2.5) \quad e^{i\vartheta} = e^{i(\vartheta+2k\pi)}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \forall \vartheta \in \mathbb{R}.$$

Per questo motivo è conveniente assumere che l'angolo ϑ , che chiameremo *argomento* di z , (si scrive $\vartheta = \text{Arg}(z)$), sia *definito a meno di multipli interi di 2π* . Per esempio, scrivere $\text{Arg}(z) = 0$ è equivalente a scrivere $\text{Arg}(z) = 2\pi$, oppure $\text{Arg}(z) = 4\pi$.

L'osservazione precedente consente di enunciare la prima proprietà di interesse per noi, e cioè:

$$(2.2.6) \quad e^{i(\vartheta_1+\vartheta_2)} = e^{i\vartheta_1} \cdot e^{i\vartheta_2}, \quad \forall \vartheta_1, \vartheta_2 \in \mathbb{R} .$$

▷ Esercizio 5 ◁

Testo

Verificare la validità della (2.2.6).

Soluzione

Calcoliamo direttamente partendo dalla definizione (2.2.3):

$$\begin{aligned} e^{i\vartheta_1} \cdot e^{i\vartheta_2} &= [\cos \vartheta_1 + \sin \vartheta_1 i][\cos \vartheta_2 + \sin \vartheta_2 i] \\ &= [\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 - \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2] + [\cos \vartheta_2 \sin \vartheta_1 + \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2]i \\ &= \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)i = e^{i(\vartheta_1 + \vartheta_2)}, \end{aligned}$$

dove, per la penultima uguaglianza, abbiamo usato note formule trigonometriche. □

Applicando iterativamente la (2.2.6) si deduce anche la:

$$(2.2.7) \quad [e^{i\vartheta}]^n = e^{in\vartheta}, \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N},$$

da cui, ragionando ora sulla forma trigonometrica (2.2.4), segue:

$$(2.2.8) \quad z^n = \rho^n e^{in\vartheta}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, z \neq 0.$$

La (2.2.8) è detta formula di de Moivre.

▷ Esercizio 6 ◁

Testo

Sia $z = (1 + i)$. Calcolare $\operatorname{Re}(z^{17})$, $\operatorname{Im}(z^{17})$.

Soluzione

Il punto z si trova sulla bisettrice $y = x$, per cui possiamo subito notare che $\operatorname{Arg}(z) = \pi/4$. Poiché $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, la forma trigonometrica di z è

$$(2.2.9) \quad z = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Applicando la formula di de Moivre alla (2.2.9), troviamo

$$(2.2.10) \quad \begin{aligned} z^{17} &= 2^{\frac{17}{2}} e^{i\frac{17}{4}\pi} = (2^8 \sqrt{2}) e^{i(\frac{16}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi)} \\ &= 2^8 \sqrt{2} e^{i(4\pi + \frac{1}{4}\pi)} = 2^8 \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}, \end{aligned}$$

dove, oltre alle proprietà delle potenze, abbiamo usato l'osservazione 2.

Riprendendo la (2.2.10), abbiamo:

$$(2.2.11) \quad z^{17} = 2^8 \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = 2^8 \sqrt{2} \left[\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} i \right] = 2^8 + 2^8 i .$$

In conclusione: $\operatorname{Re}(z^{17}) = 2^8 = 256$, $\operatorname{Im}(z^{17}) = 256$. □

▷ Esercizio 7 ◁

Testo

Sia $z = 1 - i$. Calcolare $\operatorname{Re}(z^{11})$, $\operatorname{Im}(z^{11})$.

Soluzione

$\operatorname{Re}(z^{11}) = -32$, $\operatorname{Im}(z^{11}) = -32$.

(**Suggerimento:** in questo caso, $\operatorname{Arg}(z) = -\pi/4$). □

Ora utilizziamo la forma trigonometrica e la formula di de Moivre per determinare le cosiddette *radici n-esime* di un numero complesso.

▷ Esercizio 8 ◁

Testo

Determinare le soluzioni in \mathbb{C} dell'equazione:

$$(2.2.12) \quad z^4 = -4 .$$

Soluzione

Trasformiamo l'equazione (2.2.12) in forma trigonometrica usando la (2.2.4) e notando che $\operatorname{Arg}(-4) = \pi$, in quanto -4 si trova sulla parte *negativa* dell'asse reale; otteniamo che la (2.2.12) si riscrive nel modo seguente:

$$(2.2.13) \quad (\rho e^{i\vartheta})^4 = 4e^{i\pi} ,$$

o ancora, usando la formula di de Moivre:

$$(2.2.14) \quad \rho^4 e^{i4\vartheta} = 4 e^{i\pi} .$$

Affinché l'uguaglianza sussista, è necessario che i membri dell'equazione (2.2.14) abbiano lo stesso modulo e lo stesso argomento, la qual cosa equivale a imporre:

$$(2.2.15) \quad \begin{array}{ll} \text{(i)} & \rho^4 = 4 \\ \text{(ii)} & 4\vartheta = \pi + 2k\pi , \quad k \in \mathbb{Z} . \end{array}$$

Va notato che la sola richiesta $4\vartheta = \pi$, a causa dell'osservazione 2, non sarebbe stata sufficiente in quanto avrebbe portato alla perdita di soluzioni. D'altra parte,

in (2.2.15)(ii), la soluzione associata a $k = 4$ coincide con quella relativa a $k = 0$; nella sostanza, quindi, possiamo riscrivere la (2.2.15) come:

$$(2.2.16) \quad \begin{array}{ll} \text{(i)} & \rho^4 = 4 \\ \text{(ii)} & 4\vartheta = \pi + 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, 3. \end{array}$$

Con un ulteriore passaggio, usando la sostituzione $4^{1/4} = 2^{2/4} = \sqrt{2}$, concludiamo che:

$$(2.2.17) \quad \begin{array}{ll} \text{(i)} & \rho = \sqrt{2} \\ \text{(ii)} & \vartheta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3. \end{array}$$

Ne segue che abbiamo determinato quattro soluzioni, tutte poste sulla circonferenza di centro O e raggio $\rho = \sqrt{2}$ (si veda la Figura 2.3):

$$(2.2.18) \quad z_0 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_1 = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}, \quad z_2 = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4}}, \quad z_3 = \sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{4}}.$$

Usando la definizione (2.2.3) si può ora risalire facilmente all'espressione delle

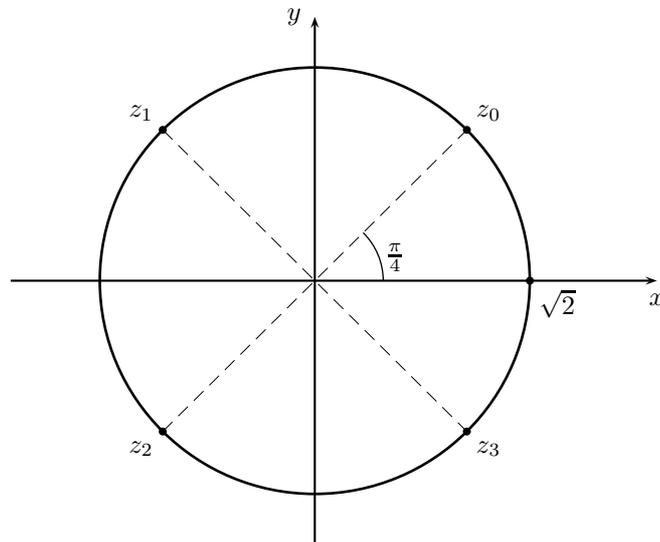


Figura 2.3 – Rappresentazione delle 4 radici complesse dell'equazione $z^4 = -4$.

soluzioni in forma cartesiana:

$$(2.2.19) \quad z_0 = 1 + i, \quad z_1 = -1 + i, \quad z_2 = -1 - i, \quad z_3 = 1 - i.$$

Si può notare che $z_3 = \overline{z_0}$, $z_2 = \overline{z_1}$. Inoltre vediamo che le quattro soluzioni dividono la circonferenza cui appartengono in quattro parti uguali.

Le quattro soluzioni trovate sono chiamate radici n -esime ($n = 4$) del numero (complesso) -4 . \square

Il procedimento descritto nell'esercizio precedente ha validità generale, cioè può essere applicato per determinare le n soluzioni in \mathbb{C} dell'equazione:

$$(2.2.20) \quad z^n = z_0,$$

dove $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, e $z_0 \in \mathbb{C}$ sono fissati. Le n soluzioni così trovate sono dette radici n -esime di z_0 . Si trovano tutte sulla circonferenza di centro O e raggio $\rho = |z_0|^{1/n}$, e la dividono in n parti uguali.

▷ Esercizio 9 ◁

Testo

Risolvere in \mathbb{C} :

$$z^4 = 1.$$

Soluzione

$$z_0 = 1, z_1 = i, z_2 = -1, z_3 = -i. \quad \square$$

2.3 Teorema fondamentale dell'algebra e molteplicità algebrica

Un *polinomio* di grado n a coefficienti complessi è un'espressione del tipo:

$$(2.3.1) \quad P(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n \quad (a_n \neq 0),$$

dove i coefficienti a_0, \dots, a_n sono dei numeri complessi. Più sinteticamente, avremmo potuto scrivere:

$$(2.3.2) \quad P(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j, \quad a_j \in \mathbb{C}, a_n \neq 0.$$

Riprendiamo ora brevemente alcuni concetti che già conosciamo bene dallo studio dei polinomi a coefficienti reali. Più precisamente, diremo che $z_0 \in \mathbb{C}$

è una radice di $P(z)$ se è una soluzione dell'equazione $P(z) = 0$, o, in altre parole, se

$$(2.3.3) \quad P(z_0) = 0 \quad .$$

Se z_0 è una radice di $P(z)$, allora esiste un'unica fattorizzazione di $P(z)$ del tipo:

$$(2.3.4) \quad P(z) = (z - z_0)^k Q(z) \quad ,$$

dove $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$, mentre $Q(z)$ ha grado $(n - k)$ e $Q(z_0) \neq 0$. Il numero naturale k si chiama *molteplicità algebrica* di z_0 e si indica con la simbologia:

$$(2.3.5) \quad \mu_a(z_0) = k \quad .$$

Il seguente è un esercizio di ripasso sulla divisione di polinomi.

▷ Esercizio 10 ◁

Testo

Sia $P(z) = z^4 - 3z^3 + 2z^2 + z - 1$. Verificare che $z_0 = 1$ è una radice di $P(z)$ e determinare $\mu_a(1)$.

Soluzione

$$P(1) = 1^4 - 3 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 + 1 - 1 = 0 \quad ,$$

per cui effettivamente $z_0 = 1$ è una radice di $P(z)$. Per ottenere la fattorizzazione (2.3.4) dobbiamo dividere $P(z)$ per $(z - 1)$, usando l'algoritmo euclideo per la divisione dei polinomi:

$$(2.3.6) \quad \begin{array}{r|l} \begin{array}{rrrrr} +z^4 & -3z^3 & +2z^2 & +z & -1 \\ -z^4 & +z^3 & & & \end{array} & z - 1 \\ \hline // & \begin{array}{rrrrr} -2z^3 & +2z^2 & +z & -1 \\ +2z^3 & -2z^2 & & & \end{array} & z^3 - 2z^2 + 1. \\ \hline & \begin{array}{rrrr} // & // & +z & -1 \\ & & -z & +1 \\ & & // & // \end{array} & \end{array}$$

Da (2.3.6) risulta:

$$(2.3.7) \quad P(z) = (z - 1)(z^3 - 2z^2 + 1) = (z - 1)Q(z),$$

dove abbiamo posto $Q(z) = z^3 - 2z^2 + 1$. Poiché $Q(1) = 0$, la fattorizzazione non è ancora terminata e bisogna dividere $Q(z)$ per $z - 1$. Abbiamo:

$$(2.3.8) \quad \begin{array}{r|l} \begin{array}{r} +z^3 \quad -2z^2 \quad +1 \\ -z^3 \quad +z^2 \\ \hline // \quad -z^2 \quad +1 \\ \quad +z^2 \quad -z \\ \hline // \quad -z \quad +1 \\ \quad +z \quad -1 \\ \hline // \quad // \end{array} & \begin{array}{l} z - 1 \\ \hline z^2 - z - 1. \end{array} \end{array}$$

Da cui $Q(z) = (z - 1)(z^2 - z - 1)$, che sostituita in (2.3.7) fornisce:

$$(2.3.9) \quad P(z) = (z - 1)^2 (z^2 - z - 1),$$

che è la fattorizzazione di tipo (2.3.4) richiesta, in quanto $z_0 = 1$ non è radice di $(z^2 - z - 1)$. Allora $\mu_a(1) = 2$. \square

Possiamo adesso enunciare il seguente importante risultato:

Teorema 1: (Teorema fondamentale dell'algebra)

Sia $P(z)$ un polinomio a coefficienti complessi di grado n .

Allora $P(z)$ ammette esattamente n radici in \mathbb{C} , a condizione che ognuna di esse sia contata un numero di volte pari alla sua molteplicità algebrica.

▷ Esercizio 11 ◁

Testo

Determinare le quattro radici in \mathbb{C} del polinomio $P(z)$ dell'esercizio precedente.

Soluzione

Da (2.3.9) sappiamo che $z_0 = 1$ è radice che va contata due volte (ha infatti molteplicità algebrica $\mu_a = 2$). Le altre due radici si ottengono risolvendo l'equazione:

$$(2.3.10) \quad z^2 - z - 1 = 0.$$

Si ottiene:

$$(2.3.11) \quad z_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad z_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

In conclusione: le radici di $P(z)$ sono $z_0 = 1$ (contata due volte) e poi z_1 e z_2 , date in (2.3.11). \square

2.4 Esercizi di riepilogo

\triangleright Esercizio 12 \triangleleft

Testo

Sia: $z = 1 + 2i$. Calcolare $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)$ e $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)$.

Soluzione

$$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{1 - 2i} = \frac{1 + 2i}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{1 + 2i}{1^2 + 2^2} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i,$$

per cui $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{1}{5}$, $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{2}{5}$. \square

\triangleright Esercizio 13 \triangleleft

Testo

Rappresentare graficamente in \mathbb{R}^2 l'insieme

$$A = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.c. } 1 \leq |z + i| \leq 2\}$$

Soluzione

Convien partire da un'osservazione preliminare: siano $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$ due numeri complessi. Allora

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2},$$

ovvero $|z_1 - z_2|$ coincide con la distanza euclidea tra i due punti z_1 e z_2 . Detto questo, è allora chiaro che l'insieme A è costituito da quegli $z \in \mathbb{C}$ la cui distanza da $(-i)$ è compresa tra 1 e 2. Dunque A è la corona circolare in Figura 2.4.

\triangleright Esercizio 14 \triangleleft

Testo

Sia $P(z) = z^4 - 3z^3 + 2z^2 - 4z + 8$. Sapendo che $z_0 = 2$ è una radice di $P(z)$, determinare le radici di $P(z)$ e le loro rispettive molteplicità algebriche.

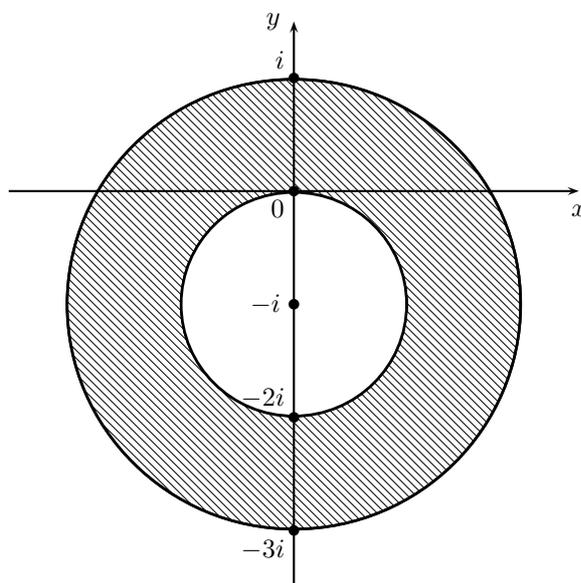


Figura 2.4 – Rappresentazione grafica dell'insieme $A = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.c. } 1 \leq |z+i| \leq 2\}$.

Soluzione

$$z_0 = 2, \mu_a(z_0) = 2 \cdot z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}, z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}, \text{ con } \mu_a(z_j) = 1, j = 1, 2. \quad \square$$

▷ Esercizio 15 ◁

Testo

Risolvere in \mathbb{C} l'equazione

$$z^3 + 8 = 0.$$

Soluzione

Passando alla forma trigonometrica, l'equazione diventa:

- (i) $\rho^3 = 8$
- (ii) $3\vartheta = \pi + 2k\pi, k = 0, 1, 2.$

In forma cartesiana, le tre soluzioni risultano essere:

$$z_0 = 1 + \sqrt{3}i, \quad z_1 = -2, \quad z_2 = \overline{z_0} = 1 - \sqrt{3}i.$$

□

▷ Esercizio 16 ◁

Testo

Sia $z = -i$. Calcolare $\operatorname{Re}(z^{20})$, $\operatorname{Im}(z^{21})$.

Soluzione

In forma trigonometrica, $z = e^{i\frac{3}{2}\pi}$. Applicando la (2.2.8) si perviene a $\operatorname{Re}(z^{20}) = 1$, $\operatorname{Im}(z^{21}) = -1$. □

▷ Esercizio 17 ◁

Testo

Risolvere in \mathbb{C} l'equazione

$$z^{12} = 1.$$

Soluzione

Si trova $\rho = 1$, $\vartheta = k\frac{\pi}{6}$, $k = 0, \dots, 11$. Usando i noti valori per $\cos \vartheta$, $\sin \vartheta$ si arriva a:

$$\begin{aligned} z_0 = 1, \quad z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_3 = i, \\ z_4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_5 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad z_6 = -1, \quad z_7 = \overline{z_5}, \\ z_8 = \overline{z_4}, \quad z_9 = -i = \overline{z_3}, \quad z_{10} = \overline{z_2}, \quad z_{11} = \overline{z_1}. \end{aligned}$$

□

▷ Esercizio 18 ◁

Testo

Poniamo $z = -1 + i$, $w = 2i$. Calcolare:

(i) $\operatorname{Re}\left(\frac{z}{w}\right)$ (ii) $\operatorname{Re}((1+z)^{18})$ (iii) $\operatorname{Im}((\overline{w})^{19})$.

Soluzione

(i): $\frac{1}{2}$ (ii): -1 (iii): 2^{19} .

□

2.5 Considerazioni conclusive

I numeri complessi, oltre che in svariati campi della matematica, vengono usati in fisica (in particolare, in meccanica quantistica), nonché in ingegneria (specialmente elettronica, telecomunicazioni e elettrotecnica) per la loro utilità nel rappresentare onde elettromagnetiche e correnti elettriche ad andamento temporale sinusoidale.

I numeri complessi hanno avuto una lunga storia: il più antico riferimento alla radice di un numero negativo si trova negli scritti di Erone di Alessandria, risalenti al secolo I a.C. La comparsa di radici di numeri negativi iniziò a farsi più frequente nel secolo XVI, quando vennero scoperte le soluzioni delle equazioni di terzo grado e il matematico italiano Tartaglia riuscì a risolvere le equazioni di quarto grado. Queste formule evidenziavano come le radici dei numeri negativi fossero utili formalmente per trovare le radici di un polinomio.

Il termine *immaginario* venne utilizzato per la prima volta in questo contesto da Cartesio, nel secolo XVII, e ben rappresenta la titubanza dei matematici dell'epoca verso questi nuovi numeri. Nel secolo successivo i lavori di A. de Moivre e di Eulero fornirono una prima base teorica per lo studio dei numeri complessi. L'esistenza dei numeri complessi fu però accettata completamente solo quando la loro interpretazione geometrica fu scoperta prima da C. Wessel nel 1799, e poi riscoperta e resa famosa da Gauss (nel suo saggio pubblicato nel 1832). In particolare, il lavoro di Gauss comprendeva una prima sistematizzazione moderna della dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra. L'enunciato di questo celebre teorema risale all'opera del matematico di origine fiamminga A. Girard (*L'invention en algebre*, 1629); un primo serio, ma incompleto, tentativo di dimostrazione del teorema fu effettuato da d'Alembert intorno al 1745, e per questo motivo il teorema fondamentale dell'algebra è noto, in Francia, come teorema di d'Alembert.

La teoria delle funzioni di variabili complesse è quella branca dell'analisi matematica che applica le nozioni del calcolo infinitesimale alle funzioni che hanno per dominio e codominio insiemi di numeri complessi. In questo contesto, un concetto fondamentale è quello di *funzione olomorfa*: si tratta di una classe di funzioni $f(z)$ su cui è definita una nozione di derivata simile a quella usuale per le funzioni reali. Le funzioni olomorfe preservano gli angoli,

ma non necessariamente le distanze, e risultano essere uno strumento estremamente utile nello studio delle superfici nello spazio euclideo (teoria delle superfici di Riemann).

Nella sezione 3.3 si è reso necessario effettuare la divisione tra polinomi. L'algoritmo per la divisione di polinomi è concettualmente equivalente al classico algoritmo euclideo per trovare il massimo comune divisore (M.C.D.) tra due numeri interi. Questo è uno degli algoritmi più antichi, essendo presente nella celebrata opera *Elementi* di Euclide (300 a.C.). L'importanza di questi concetti nell'algebra moderna è notevole: ogni oggetto algebrico in cui è possibile eseguire la divisione col resto è chiamato *anello euclideo*.

Capitolo 3

Matrici

3.0 Scopi del capitolo

L'algebra lineare è uno strumento matematico essenziale praticamente in tutti gli ambiti scientifici: noi la trattiamo in questo capitolo, e poi nei successivi capitolo 4 (Sistemi lineari) e 5 (Diagonalizzazione). In linea generale, va subito detto che la vastità, nonché la concettuale complessità, di questo ramo della matematica sono talmente elevati da rendere impensabile che uno studente del primo anno universitario possa avere la maturità scientifica necessaria per cogliere gli aspetti più profondi di queste teorie. Purtroppo, di conseguenza, si rende indispensabile procedere attraverso un'estesa semplificazione dei concetti, perseguendo, almeno in prima istanza, semplicemente lo scopo di consentire al lettore l'acquisizione delle capacità sufficienti per lavorare con le matrici: ciò si rivelerà, in seguito, fondamentale per recepire il linguaggio tensoriale usato nei corsi di meccanica razionale e scienza delle costruzioni.

Come riprenderemo più formalmente nei paragrafi successivi, una matrice A a coefficienti reali è una tabella del tipo

$$(3.0.1) \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

dove i coefficienti $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. L'ambiente matematico più appropriato per sviluppare la teoria delle matrici è quello dei cosiddetti

spazi vettoriali. D'altra parte, visto il notevole grado di astrazione di questo concetto, anche in rapporto alla limitatezza dei nostri obiettivi, abbiamo deciso sostanzialmente di limitare al massimo il formalismo della teoria degli spazi vettoriali a vantaggio della descrizione operativa delle principali operazioni che dobbiamo imparare a eseguire con le matrici. Più precisamente, solo nel successivo capitolo sui sistemi lineari si renderà necessario fare qualche breve cenno alla nozione di spazio vettoriale astratto. In questo capitolo, invece, il lettore dovrà soprattutto riuscire a prendere concretamente familiarità con i seguenti concetti: somma e prodotto di matrici; determinanti, matrice inversa e rango di una matrice.

3.1 Operazioni con le matrici

Definizione 1: Una matrice, di tipo $(m \times n)$ a coefficienti reali, denotata $A = [a_{ij}]$, dove $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, è una tabella del tipo

$$(3.1.1) \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

con $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Notiamo che la matrice A in (3.1.1) ha m righe e n colonne, e i suoi coefficienti a_{ij} sono numeri reali. L'insieme delle matrici di tipo $m \times n$ è denotato $M_{m,n}(\mathbb{R})$. Nel caso in cui $m = n$ (matrici quadrate di ordine n) scriveremo semplicemente $M_n(\mathbb{R})$. Segnaliamo da subito che, in certe situazioni, è utile considerare matrici a coefficienti complessi ($M_{m,n}(\mathbb{C})$). Nella nostra trattazione elementare presenteremo i vari concetti, e le operazioni, nel caso $M_{m,n}(\mathbb{R})$. Però, è utile sapere che tutta questa teoria comprende anche, senza modifiche concettuali, il caso $M_{m,n}(\mathbb{C})$; a ciò fa eccezione la teoria della diagonalizzazione del capitolo 5, in cui lavorare in \mathbb{C} piuttosto che in \mathbb{R} comporta alcune differenze, come anche accennato nell'ultima sezione di quel capitolo.

Torniamo ora alla nostra generica matrice (3.1.1): vediamo che a ogni coefficiente corrispondono due numeri naturali, cioè i cosiddetti *indici*: l'indice a

sinistra (i , nella nostra notazione) è detto indice di riga, mentre j rappresenta l'indice di colonna. In altre parole, il coefficiente a_{23} si trova sulla seconda riga e sulla terza colonna (le righe si considerano con numerazione crescente dall'alto al basso, mentre le colonne sono numerate da sinistra a destra). Oltre a i e j , altre lettere che tipicamente useremo per denotare indici sono l e k . All'inizio il formalismo che coinvolge gli indici può risultare difficile, quindi abbiamo deciso di limitarne l'uso. Però bisogna da subito capire che la teoria che stiamo illustrando comprende casi in cui m e n (in (3.1.1)) possono essere numeri molto grandi. Quindi non sarebbe assolutamente efficace, in generale, descrivere le varie operazioni usando, ad esempio, $n \cdot m$ simboli diversi invece degli indici!

Iniziamo ora con i primi concetti ed esempi. Sia $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$: chiameremo *diagonale principale* di A quella formata dai coefficienti con $i = j$, cioè dagli a_{ii} , dove $1 \leq i \leq p$, con $p = \text{Min}\{m, n\}$ (quest'ultima scrittura significa che p è il più piccolo tra m e n).

Esempio 1:

$$(3.1.2) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 0 & 1 & 4 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R}) \quad .$$

La diagonale principale è costituita dai coefficienti a_{11} , a_{22} e a_{33} che valgono rispettivamente 2, 0 e 2.

Definizione 2: Sia $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Diremo che A è una matrice *triangolare superiore (inferiore)* se tutti i coefficienti al di sotto (sopra) della diagonale principale sono nulli.

Esempio 2:

$$(3.1.3) \quad \text{(i)} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{(ii)} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} .$$

In (3.1.3) vediamo che $A \in M_{3,4}(\mathbb{R})$ è una matrice triangolare superiore. Invece $B \in M_{4,5}(\mathbb{R})$ è triangolare inferiore.

L'uso della dizione *sotto (sopra) la diagonale principale* nella definizione precedente non è molto buono. Per esprimere in modo matematicamente più appropriato questo concetto conviene usare gli indici: più specificamente il lettore, ora che, mediante (3.1.3), ha visualizzato matrici triangolari superiori e inferiori, dovrebbe riuscire a svolgere autonomamente il seguente esercizio:

▷ Esercizio 1 ◁

Testo

Riesprimere la definizione 2 usando gli indici di righe e colonne.

Soluzione

Sia $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Diremo che A è una matrice *triangolare superiore* se

$$(3.1.4) \quad (i > j) \Rightarrow (a_{ij} = 0) \quad .$$

In modo analogo, diremo che A è una matrice *triangolare inferiore* se

$$(3.1.5) \quad (i < j) \Rightarrow (a_{ij} = 0) \quad .$$

□

Definizione 3: Sia $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Si indica col simbolo tA (si legge *trasposta* di A) la matrice, di tipo $n \times m$, che si ottiene da A invertendo i ruoli di righe e colonne: cioè, la prima riga di A diventa la prima colonna di tA , etc.

Esempio 3: Se

$$(3.1.6) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R}),$$

allora

$$(3.1.7) \quad {}^tA = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \in M_{4,3}(\mathbb{R}).$$

Definizione 4: Sia $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$. Diremo che A è *simmetrica* se ${}^tA = A$.

Esempio 4:

$$(3.1.8) \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & \sqrt{2} \\ -2 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \quad .$$

La matrice A in (3.1.8) è simmetrica.

Notiamo anche, per uso futuro, che la condizione ${}^tA = A$ può anche essere riformulata mediante la richiesta

$$(3.1.9) \quad a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j \quad .$$

Terminato questo lavoro preliminare, in cui abbiamo preso confidenza con il linguaggio delle matrici, possiamo passare alla descrizione delle varie operazioni.

Somma di matrici: Siano $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ 2 matrici di tipo $m \times n$ (cioè $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$). Definiamo

$$(3.1.10) \quad A + B = [a_{ij} + b_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \quad .$$

In pratica, stiamo dicendo che la somma avviene coefficiente per coefficiente.

▷ Esercizio 2 ◁

Testo

Siano $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$, dove

$$(3.1.11) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Calcolare $A + B$ e $A + B + C$.

Soluzione

$$(3.1.12) \quad A + B = \begin{bmatrix} 2+0 & -1-2 \\ 3+4 & 4-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \quad ;$$

$$(3.1.13) \quad A + B + C = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \quad .$$

□

Moltiplicazione di una matrice per un numero reale: Siano $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Definiamo

$$(3.1.14) \quad \lambda A = [\lambda a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \quad .$$

In pratica, ognuno dei coefficienti di A è moltiplicato per λ .

▷ Esercizio 3 ◁

Testo

Sia

$$(3.1.15) \quad A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}).$$

Calcolare $3A$.

Soluzione

$$(3.1.16) \quad 3A = \begin{bmatrix} 3 \cdot 3 & 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & 12 \end{bmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \quad .$$

□

▷ Esercizio 4 ◁

Testo

Siano

$$(3.1.17) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Calcolare $2A - 3B$ e $3A - 2B$.

Soluzione

$$(3.1.18) \quad \begin{aligned} 2A - 3B &= 2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & 3 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 3 \\ 3 & -8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$(3.1.19) \quad 3A - 2B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 7 & -7 \end{bmatrix}.$$

□

La prossima operazione è molto importante e richiede maggiore attenzione.

Prodotto (righe per colonne) di due matrici: Siano $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B = [b_{k\ell}] \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. Il loro prodotto $C = A \cdot B \in M_{m,p}(\mathbb{R})$ è definito mediante

$$(3.1.20) \quad C = [c_{i\ell}] \quad , \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq \ell \leq p,$$

dove

$$(3.1.21) \quad c_{i\ell} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{j\ell} \quad .$$

Iniziamo con alcune osservazioni: per prima cosa, notiamo che il prodotto $A \cdot B$ ha senso solo quando il numero di colonne di A coincide col numero di righe di B . Questo prodotto si chiama 'righe per colonne' per il seguente motivo: il coefficiente $c_{i\ell}$, definito in (3.1.21), si ottiene facendo il *prodotto scalare* tra la riga i -esima di A e la colonna ℓ -esima di B . In realtà, si tratta di un prodotto scalare generalizzato, cioè: se $\vec{u} = [u_1, \dots, u_n]$, $\vec{v} = [v_1, \dots, v_n]$, allora

$$(3.1.22) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n \quad \left(= \sum_{i=1}^n u_i v_i \right) \quad .$$

Si noti che la (3.1.22) coincide col prodotto scalare usuale (si veda il capitolo 1) nel caso in cui $n = 3$. La generalizzazione (3.1.22) è utile nel contesto degli spazi vettoriali astratti, come vedremo nel capitolo 4. Per il momento, ci accontentiamo di aver capito che la definizione in (3.1.21) dice proprio che $c_{i\ell}$ è il prodotto scalare della riga i -esima di A con la colonna ℓ -esima di B . Questi due vettori devono dunque avere lo stesso numero n di coordinate, da cui la necessità, già evidenziata, che il numero di colonne di A coincida col numero di righe di B . Le cose si chiariscono molto affrontando qualche primo esempio.

▷ Esercizio 5 ◁

Testo

Siano

$$(3.1.23) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calcolare $C = A \cdot B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$.

Soluzione

Scriviamo tutti i passaggi:

$$(3.1.24) \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix},$$

dove

$$(3.1.25) \quad c_{11} = \sum_{j=1}^3 a_{1j}b_{j1}, \quad c_{12} = \sum_{j=1}^3 a_{1j}b_{j2} \quad \text{etc.}$$

Quindi

$$(3.1.26) \quad \begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) = -3 \\ c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 1 \\ c_{13} &= \dots\dots\dots = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 3 = 8 \\ c_{21} &= \dots\dots\dots = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) = -7 \\ c_{22} &= 5 \quad \quad c_{23} = 7 \end{aligned}$$

In conclusione

$$(3.1.27) \quad C = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 8 \\ -7 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

□

Nel caso in cui A, B siano matrici quadrate dello stesso ordine (cioè $A, B \in M_n(\mathbb{R})$) è possibile calcolare sia $A \cdot B$ sia $B \cdot A$: in generale però si ottiene un risultato diverso, per cui la moltiplicazione di matrici in $M_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 2$) non è un'operazione commutativa.

▷ Esercizio 6 ◁

Testo

Siano

$$(3.1.28) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Calcolare $A \cdot B$ e $B \cdot A$.

Soluzione

Iniziamo col calcolo di $C = A \cdot B$. Abbiamo

$$(3.1.29) \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix},$$

con

$$(3.1.30) \quad \begin{aligned} c_{11} &= 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 0 & ; & \quad c_{12} = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 4 = 4 \\ c_{21} &= 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 = -3 & ; & \quad c_{22} = 3 \cdot 0 + 0 \cdot 4 = 0 \end{aligned}$$

e quindi

$$(3.1.31) \quad A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

In modo simile, si calcola

$$(3.1.32) \quad B \cdot A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 16 & 2 \end{bmatrix}.$$

Confrontando i due risultati ottenuti si constata immediatamente che $A \cdot B \neq B \cdot A$.

□

A questo punto il lettore dovrebbe essere in grado di svolgere agevolmente il seguente:

▷ Esercizio 7 ◁

Testo

Siano

$$(3.1.33) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Calcolare $A \cdot B$ e $B \cdot A$.

Soluzione

Il risultato è

$$(3.1.34) \quad A \cdot B = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

□

Definizione 5: Sia $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$. Diremo che A è una *matrice diagonale* se

$$(3.1.35) \quad (i \neq j) \Rightarrow (a_{ij} = 0) \quad .$$

Ad esempio,

$$(3.1.36) \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

è una matrice diagonale. Una matrice diagonale molto importante è la cosiddetta *matrice identità*

$$(3.1.37) \quad I = [\delta_{ij}]$$

dove δ_{ij} , detto simbolo di Kronecker, è definito da

$$(3.1.38) \quad \begin{aligned} \delta_{ij} &= 1 && \text{se } i = j \\ \delta_{ij} &= 0 && \text{se } i \neq j \end{aligned}$$

Ad esempio

$$(3.1.39) \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \quad , \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

rappresentano rispettivamente la matrice identità di ordine 2 e 3. Abbiamo evitato la notazione I_n per la matrice identità di ordine n , in quanto l'ordine

della matrice sarà sempre chiaro dal contesto. La matrice identità è così chiamata in quanto gode della seguente proprietà:

$$(3.1.40) \quad A \cdot I = I \cdot A = A \quad \forall A \in M_n(\mathbb{R}).$$

In pratica, la matrice I riveste il ruolo che 1 occupa per la moltiplicazione fra numeri reali. Si consiglia al lettore di testare la validità di (3.1.40) scegliendo a caso qualche $A \in M_2(\mathbb{R})$, oppure $A \in M_3(\mathbb{R})$. Altrimenti

▷ Esercizio 8 ◁

Testo (*)

Verificare la (3.1.40).

Soluzione

Posto $C = A \cdot I$, si ha

$$(3.1.41) \quad c_{i\ell} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \delta_{j\ell} = a_{i\ell} \quad ,$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che l'unico addendo della sommatoria che dà contributo non nullo è $j = \ell$. Ma la (3.1.41) dice proprio $C = A$. Il caso $I \cdot A$ è analogo. □

3.2 Determinanti e matrice inversa

Sia $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$. Il *determinante* di A , denotato $\det A$, è un numero reale che viene associato ad A mediante un processo di calcolo che ora illustriamo.

Caso n=1:

$$(3.2.1) \quad A = [a_{11}] \quad , \quad \det A = a_{11} \quad .$$

Caso n=2: posto

$$(3.2.2) \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad ,$$

allora

$$(3.2.3) \quad \det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \quad .$$

In alcuni contesti è preferibile usare una notazione alternativa per $\det A$: scriveremo i coefficienti di A tra due barre verticali, come segue:

$$(3.2.4) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \quad .$$

Ad esempio,

$$(3.2.5) \quad \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 1 \cdot (-6) = 18 \quad .$$

Questa stessa notazione sarà applicata anche a matrici quadrate di ordine n qualunque. Per quanto riguarda appunto il calcolo di $\det A$, con A quadrata di ordine $n \geq 3$, l'idea operativa è la seguente: ricondurre il calcolo di un determinante di ordine n al calcolo di n determinanti di ordine $(n - 1)$. Applicando questo ragionamento poi ai determinanti di ordine $(n - 1)$, e visto che sappiamo calcolare $\det A$ quando $n = 2$, si intuisce che in un numero finito di passi si può arrivare al risultato. Tutto ciò diviene assai più chiaro già dopo aver esaminato il seguente

Caso n=3: posto

$$(3.2.6) \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad ,$$

allora

$$(3.2.7) \quad \det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad .$$

In particolare, nella (3.2.7) vediamo esplicitamente come il calcolo di un determinante di ordine 3 sia riconducibile a quello di tre determinanti di ordine 2 (ognuno dei quali può essere calcolato mediante (3.2.3)).

▷ Esercizio 9 ◁

Testo

Siano

$$(3.2.8) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcolare $\det A$ e $\det B$.

Soluzione

$$(3.2.9) \quad \det A = 1 \cdot 5 - 2 \cdot (-3) = 11$$

$$(3.2.10) \quad \det B = 1 \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

da cui

$$(3.2.11) \quad \det B = 1 \cdot 19 - 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-10) = -13$$

□

La formula (3.2.7) rappresenta il calcolo di $\det A$ sviluppato secondo la prima riga. In realtà, è possibile calcolare $\det A$ sviluppando secondo una riga (o colonna) qualunque. Per arrivare a capire questo meccanismo generale dobbiamo fare un po' di lavoro preliminare che risulterà molto utile anche per la trattazione di altri argomenti successivi.

Complemento algebrico: Sia $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$. Il *complemento algebrico* del coefficiente a_{ij} , denotato A_{ij} , è definito da

$$(3.2.12) \quad A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} \cdots & | & \cdots \\ - & - & - & a_{ij} & - & - & - \\ \cdots & | & \cdots \end{vmatrix},$$

dove il determinante in (3.2.12), di ordine $(n - 1)$, è quello della matrice che si ottiene da A cancellando la riga e la colonna che contengono a_{ij} (cioè, riga i -esima e colonna j -esima). A questo punto, un minimo di concentrazione consente di riconoscere che la (3.2.7) può essere riscritta esattamente come segue:

$$(3.2.13) \quad \det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \quad (= \sum_{j=1}^3 a_{1j}A_{1j})$$

Come già anticipato, possiamo sviluppare $\det A$ secondo una riga, o colonna, a piacere. Inoltre, ciò vale per matrici quadrate di qualunque ordine, come esplicitato nel seguente celebre risultato.

Teorema 1: (Teorema di Laplace) Sia

$$(3.2.14) \quad A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R}) \quad .$$

Fissiamo a piacere i nell'intervallo $1 \leq i \leq n$. Allora

$$(3.2.15) \quad \det A = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} \quad .$$

La (3.2.15) esprime il calcolo di $\det A$ sviluppato secondo la riga i -esima. Lo stesso vale per le colonne: più precisamente, fissando a piacere j nell'intervallo $1 \leq j \leq n$, vale

$$(3.2.16) \quad \det A = \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj} \quad .$$

La (3.2.16) rappresenta il calcolo di $\det A$ sviluppato secondo la colonna j -esima.

Prima di fare ulteriori commenti, vediamo alcuni esercizi per renderci conto che il lavoro svolto ci consente di calcolare $\det A$ per matrici quadrate A di ordine n arbitrario.

▷ Esercizio 10 ◁

Testo

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Calcolare $\det A$ sviluppando secondo la seconda riga.

Soluzione

Applichiamo la (3.2.15) con $i = 2$ e $n = 3$:

$$(3.2.17) \quad \det A = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \quad .$$

Ora

$$(3.2.18) \quad A_{21} = (-1)^{2+1} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 = -1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 = 8$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 2 = -2$$

Usando i calcoli (3.2.18) nella (3.2.17) si ottiene:

$$(3.2.19) \quad \det A = (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 8 + 1 \cdot (-2) = 15 \quad .$$

A titolo di esercizio, il lettore verifichi che allo stesso risultato si perviene sviluppando secondo una qualunque altra riga o colonna. \square

In genere, conviene sviluppare secondo una riga, o colonna, avente un elevato numero di zeri.

\triangleright Esercizio 11 \triangleleft

Testo

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Calcolare $\det A$.

Soluzione

Conviene sviluppare secondo la seconda colonna:

$$(3.2.20) \quad \det A = a_{12}A_{12} (+0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{32}) = (-1) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 23 \quad .$$

\square

\triangleright Esercizio 12 \triangleleft

Testo

Sia

$$(3.2.21) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R}) \quad .$$

Calcolare $\det A$.

Soluzione

Possiamo, ad esempio, sviluppare secondo la prima riga:

$$(3.2.22) \quad \det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} \quad .$$

Usando i valori numerici in (3.2.21), la (3.2.22) diventa

$$(3.2.23) \quad \det A = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} \\ + 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

La (3.2.23) riduce il calcolo di $\det A$ (ordine 4) a quello di quattro determinanti di ordine 3 (in questo esempio, solo tre di questi quattro determinanti influiscono sul risultato, dato che il quarto è poi moltiplicato per 0). Il lettore può ora completare l'esercizio e verificare che il risultato è: $\det A = 0$.

□

Notiamo inoltre che, se A è triangolare (superiore o inferiore), allora $\det A$ è dato (facile verifica!) semplicemente dal prodotto degli elementi sulla diagonale principale.

▷ Esercizio 13 ◁

Testo

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \sqrt{2} & 6 & \pi \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \in M_5(\mathbb{R}) .$$

Calcolare $\det A$.

Soluzione

$$\det A = 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-2) = -48 \quad .$$

□

Il concetto di determinante ci fornisce un utile espediente per ricostruire la formula del prodotto vettoriale di due vettori.

Se $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3]$ e $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
 (3.2.24) \quad \vec{u} \wedge \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \\
 &= (u_2v_3 - v_2u_3)\vec{i} - (u_1v_3 - v_1u_3)\vec{j} + (u_1v_2 - v_1u_2)\vec{k} \\
 &= [u_2v_3 - v_2u_3, u_3v_1 - v_3u_1, u_1v_2 - v_1u_2]
 \end{aligned}$$

Se poi $\vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$ è un terzo vettore, vale la seguente formula per il prodotto misto:

$$(3.2.25) \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Riassumendo brevemente ciò che abbiamo visto in questa sezione 3.2, possiamo dire di aver operativamente imparato a calcolare $\det A$ per una matrice quadrata A di ordine n qualunque. Il lettore attento dovrebbe però aver notato che, formalmente, *non* abbiamo dato la definizione della funzione

$$\begin{aligned}
 (3.2.26) \quad \det : M_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\
 A &\rightarrow \det A \quad .
 \end{aligned}$$

In realtà, presentare questa definizione richiederebbe un lavoro matematico alquanto complesso, per cui ci limiteremo solo a fare qualche osservazione in proposito nella parte finale di questo capitolo. Adesso invece utilizziamo i concetti di determinante e complemento algebrico per spiegare che cos'è, e come eventualmente si calcola, l'*inversa* di una matrice. Il termine matrice inversa è riferito al prodotto di matrici definito in (3.1.20) e (3.1.21). Più precisamente

Definizione 6: Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. Diremo che A è invertibile se esiste $B \in M_n(\mathbb{R})$ tale che

$$(3.2.27) \quad A \cdot B = B \cdot A = I$$

Se tale B esiste, si scrive $B = A^{-1}$ e si dice che B è la *matrice inversa* di A .

Si possono dimostrare i fatti seguenti:

$$(3.2.28) \quad A \text{ è invertibile} \iff \det A \neq 0 \quad .$$

Se $\det A \neq 0$, allora

$$(3.2.29) \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t[A_{ij}] \quad ,$$

dove ${}^t[A_{ij}]$ è la trasposta della matrice costituita dai complementi algebrici (si veda (3.2.12)) dei coefficienti di A .

▷ Esercizio 14 ◁

Testo

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Stabilire se A è invertibile e, in caso affermativo, calcolare A^{-1} .

Soluzione

$\det A = -5 \neq 0$, per cui A^{-1} esiste. Applichiamo la (3.2.29):

$$(3.2.30) \quad A^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Per verificare la correttezza del risultato, il lettore può controllare che $A \cdot A^{-1} = I$ (oppure, $A^{-1} \cdot A = I$).

□

▷ Esercizio 15 ◁

Testo

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Stabilire se A è invertibile e, in caso affermativo, calcolare A^{-1} .

Soluzione

$\det A = -3 \neq 0$, per cui A^{-1} esiste. Applichiamo la (3.2.29):

$$(3.2.31) \quad A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{matrix} t \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & & 0 & 2 & & 0 & -1 & \\ & 0 & 3 & & 0 & 3 & & 0 & 0 & \\ & & & & & & & & & \\ - & 0 & 2 & & 1 & 2 & & 1 & 0 & \\ & 0 & 3 & & 0 & 3 & & 0 & 0 & \\ & & & & & & & & & \\ 0 & 2 & & 1 & 2 & & 1 & 0 & & \\ - & -1 & 2 & & 0 & 2 & & 0 & -1 & \end{array} \right] \end{matrix}$$

$$= -\frac{1}{3} \begin{matrix} t \\ \left[\begin{array}{ccc} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{array} \right] \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

□

▷ Esercizio 16 ◁

Testo

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Stabilire se A è invertibile e, in caso affermativo, calcolare A^{-1} .

Soluzione

$\det A = -3 \neq 0$, per cui A^{-1} esiste. Si calcola

$$(3.2.32) \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

□

3.3 Rango di una matrice

Il determinante, come vedremo anche nei capitoli 4 e 5, fornisce informazioni importanti su una matrice *quadrata* A . D'altra parte, lo studio dei sistemi lineari, con le relative implicazioni geometriche, coinvolge regolarmente matrici $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, con $m \neq n$. Ciò rende indispensabile introdurre la nozione di *rango* di cui ora ci occupiamo. Indichiamo con R_i la riga i -esima di una matrice, e con C_j la colonna j -esima. Sia $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Supponiamo di scegliere p righe e p colonne di A ($p \leq \text{Min}\{m, n\}$). Ciò individua una *sottomatrice quadrata* di A di ordine p . Ad esempio, se

$$(3.3.1) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R}) \quad ,$$

possiamo dire che

$$(3.3.2) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

sono due sottomatrici quadrate di ordine 3 di A : la prima deriva dalla scelta R_1, R_2, R_3 e C_1, C_3, C_4 , mentre la seconda da R_1, R_2, R_3 e C_2, C_3, C_4 . In modo simile,

$$(3.3.3) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

sono due sottomatrici quadrate di ordine 2 di A : la prima deriva dalla scelta R_1, R_3 e C_1, C_3 , mentre la seconda da R_2, R_3 e C_3, C_4 .

Definizione 7: Sia $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Un *minore* di ordine p di A è il determinante di una sottomatrice quadrata di A di ordine p .

Con riferimento alla matrice A in (3.3.1), possiamo dire, usando (3.3.2), che

$$(3.3.4) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -10 \quad , \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

sono 2 minori di ordine 3 di A . Invece, da (3.3.3), deduciamo che

$$(3.3.5) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad , \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1$$

sono due minori di ordine 2 di A . Adesso possiamo definire il rango di una matrice.

Definizione 8: Sia $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Diremo che il *rango* di A è p ($p \in \mathbb{N}$) (si scriverà $\rho(A) = p$) se

- (3.3.6) (i) esiste un minore di A , di ordine p , non nullo; e
 (ii) tutti i minori di A di ordine $> p$ sono nulli.

Ad esempio, la matrice A in (3.3.1) ha $\rho(A) = 3$. Questo discende dal fatto che, in (3.3.4), abbiamo trovato almeno un minore, non nullo, di ordine 3 (e, ovviamente, non ci sono minori di ordine > 3 , avendo A solo tre righe).

▷ Esercizio 17 ◁

Testo

Sia

$$(3.3.7) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & -1 & -4 \end{bmatrix} \in M_{3,5}(\mathbb{R})$$

Calcolare $\rho(A)$.

Soluzione

Da R_1, R_2 e C_1, C_2 si ottiene

$$(3.3.8) \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

per cui $\rho(A) \geq 2$. Dobbiamo stabilire se $\rho(A) = 2$ oppure $\rho(A) = 3$. Andiamo quindi a calcolare i vari minori di ordine 3 (se ne trovassimo anche uno solo non nullo, potremmo fermarci e concludere che $\rho(A) = 3$). Per ognuno dei minori di ordine 3, la scelta R_1, R_2, R_3 è obbligata, mentre per le colonne abbiamo 10 possibilità differenti, e cioè

$$(3.3.9) \quad [C_1, C_2, C_3], [C_1, C_2, C_4], [C_1, C_2, C_5], [C_2, C_3, C_4], [C_1, C_3, C_5], \\ [C_2, C_3, C_5], [C_1, C_3, C_4], [C_3, C_4, C_5], [C_1, C_4, C_5], [C_2, C_4, C_5].$$

cui corrispondono nell'ordine

$$(3.3.10) \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

Poiché tutti i minori di ordine 3 risultano nulli concludiamo che $\rho(A) = 2$.

□

La procedura usata nell'esercizio precedente è corretta, ma risulta abbastanza laboriosa e può essere abbreviata tenendo conto di quanto segue.

Diciamo che un minore di ordine $(p+1)$ *orla* un dato minore di ordine p se la sua corrispondente sottomatrice quadrata è ottenuta aggiungendo una riga e una colonna alla sottomatrice del minore di ordine p .

▷ Esercizio 18 ◁

Testo

Sia $A \in M_{3,5}(\mathbb{R})$ la matrice definita in (3.3.7). Scrivere tutti i minori di ordine 3 che orlano il minore di ordine 2 definito in (3.3.8).

Soluzione

Per orlare il minore in (3.3.8) possiamo aggiungere R_3 (unica scelta possibile per le righe), e poi una colonna a scelta tra C_3, C_4, C_5 . Quindi in tutto abbiamo 3 minori, che sono

$$(3.3.11) \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

□

Confrontando (3.3.10) e (3.3.11) diventa evidente l'utilità del seguente

Teorema 2: (Teorema di Kronecker) Sia

$$(3.3.12) \quad A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \quad .$$

Se

- $$(3.3.13) \quad \begin{array}{l} \text{(i) esiste un minore di } A, \text{ di ordine } p, \text{ non nullo; e} \\ \text{(ii) tutti i minori di } A \text{ che lo orlano sono nulli,} \end{array}$$

allora $\rho(A) = p$.

▷ Esercizio 19 ◁

Testo

Sia $A \in M_{3,5}(\mathbb{R})$ la matrice definita in (3.3.7). Calcolare $\rho(A)$ usando il teorema di Kronecker.

Soluzione

Partendo con (3.3.8) si deduce che $\rho(A) \geq 2$. Considerando poi i 3 minori che orlano il minore in (3.3.8), già indicati in (3.3.11), si conclude che $\rho(A) = 2$. \square

▷ Esercizio 20 ◁

Testo

Sia $A_t \in M_{3,5}(\mathbb{R})$ la famiglia di matrici definite da

$$(3.3.14) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ t & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Determinare, in funzione del parametro $t \in \mathbb{R}$, $\rho(A_t)$.

Soluzione

Considerando R_1, R_3 e C_1, C_2 si estrae il seguente minore di ordine 2

$$(3.3.15) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad ,$$

per cui $\rho(A_t) \geq 2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Un primo minore di ordine 3 che orla il minore in (3.3.15) è

$$(3.3.16) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ t & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2t \quad .$$

Ora osserviamo che, se $t \neq 2$, il minore (3.3.16) è $\neq 0$; quindi $\rho(A_t) = 3$ se $t \neq 2$. Se $t = 2$, dobbiamo esaminare i rimanenti due minori di ordine 3 che orlano (3.3.15). Essi, avendo posto $t = 2$, sono:

$$(3.3.17) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Dal teorema di Kronecker deduciamo quindi che $\rho(A_2) = 2$. In conclusione: se $t = 2$, $\rho(A_t) = 2$. Se $t \neq 2$, $\rho(A_t) = 3$. \square

3.4 Trasformazioni elementari su righe e colonne

In questa sezione illustriamo una famiglia di *trasformazioni elementari* (dette anche *operazioni elementari*, o *mosse di Gauss*) che, agendo su righe (o colonne) di una matrice, risultano molto utili nello studio dei sistemi lineari che affronteremo nel successivo capitolo 4.

Trasformazioni elementari sulle righe: Se

$$(3.4.1) \quad A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \quad ,$$

le trasformazioni in oggetto sono di 3 tipi, e precisamente:

$$(3.4.2) \quad R_i \longleftrightarrow R_j \quad (i \neq j) \quad ,$$

che significa scambio della riga R_i con la riga R_j .

$$(3.4.3) \quad R_i \longrightarrow \lambda R_i \quad (\lambda \neq 0) \quad ,$$

che significa moltiplicazione di ognuno dei coefficienti di R_i per lo scalare $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$(3.4.4) \quad R_i \longrightarrow R_i + \lambda R_j \quad (i \neq j \text{ e } \lambda \neq 0),$$

dove la somma $R_i + \lambda R_j$ si intende coefficiente per coefficiente.

Per acquisire un po' di confidenza con queste trasformazioni vediamo un esempio: nella successiva sequenza ogni matrice si ottiene da quella precedente operando la trasformazione elementare indicata sopra il simbolo \implies .

$$(3.4.5) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{|R_1 \leftrightarrow R_2|} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \xrightarrow{|R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1|} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{|R_3 \rightarrow R_3 + 3R_2|} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 11 & 11 & 18 \end{bmatrix}$$

Osserviamo che, attraverso la sequenza in (3.4.5), abbiamo trasformato A in una matrice triangolare superiore: questo procedimento, opportunamente formalizzato, costituirà la base del cosiddetto *algoritmo di Gauss*, che è uno dei principali metodi per determinare le soluzioni di un sistema lineare, come vedremo nel capitolo 4. Enunciamo ora alcune proprietà fondamentali che riassumono come determinanti e rango variano in seguito all'applicazione di trasformazioni elementari.

Effetti delle trasformazioni elementari sul determinante: Sia $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$. Se $B \in M_n(\mathbb{R})$ è ottenuta da A

- $$(3.4.6) \quad \begin{array}{ll} \text{(i)} & \text{mediante una (3.4.2), allora } \det B = -\det A; \\ \text{(ii)} & \text{mediante una (3.4.3), allora } \det B = \lambda \det A; \\ \text{(iii)} & \text{mediante una (3.4.4), allora } \det B = \det A. \end{array}$$

▷ Esercizio 21 ◁

Testo

Sia

$$(3.4.7) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -1 & 2\pi \\ \sqrt{2} & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & -1 & 2\pi \\ 4 & 5 & 7 & -2 \end{bmatrix} .$$

Calcolare $\det A$.

Soluzione

Poiché $R_1 = R_3$, applicando $R_1 \longleftrightarrow R_3$ e (3.4.6)(i), deduciamo

$$(3.4.8) \quad \det A = -\det A$$

da cui $\det A = 0$. Più generalmente, ogni volta che una matrice quadrata presenta due righe fra loro proporzionali il suo determinante è nullo (grazie sempre alle (3.4.6)(i) e (ii)). □

Effetti delle trasformazioni elementari sul rango: Sia

$$(3.4.9) \quad A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \quad .$$

Se $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ è ottenuta da A mediante trasformazioni elementari di tipo (3.4.2), (3.4.3) o (3.4.4), allora $\rho(A) = \rho(B)$.

▷ Esercizio 22 ◁

Testo

Sia $A \in M_{3,5}(\mathbb{R})$ la matrice definita in (3.4.5). Calcolare $\rho(A)$.

Soluzione

Dato che il rango non varia a seguito dell'applicazione di trasformazioni elementari, possiamo dire che $\rho(A) = \rho(B)$, dove

$$(3.4.10) \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 11 & 11 & 18 \end{bmatrix}$$

è l'ultima matrice della sequenza in (3.4.5). Ma ora è subito evidente, considerando le prime tre colonne di B , che $\rho(B) = 3$, per cui anche $\rho(A) = 3$. □

Anche se non ne faremo un grande uso in seguito, segnaliamo che gli stessi discorsi fatti per le righe valgono anche per le colonne: le trasformazioni elementari, in questo contesto, sono denotate rispettivamente

$$(3.4.11) \quad C_i \longleftrightarrow C_j \quad , \quad C_i \longrightarrow \lambda C_i \quad , \quad C_i \longrightarrow C_i + \lambda C_j \quad .$$

Anche gli effetti di queste trasformazioni su rango e determinante sono analoghi a quelli illustrati per le righe.

(*) In (3.2.26) abbiamo segnalato la difficoltà di dare una definizione rigorosa della funzione $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$. Un'impostazione assiomatica del discorso consente di definire la funzione $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ come quell'unica funzione che soddisfa le proprietà (3.4.6) relative alle trasformazioni elementari.

3.5 Esercizi di riepilogo

Teorema 3: (Teorema di Binet) Siano

$$(3.5.1) \quad A, B \in M_n(\mathbb{R}) \quad .$$

Allora

$$(3.5.2) \quad \det(A \cdot B) = (\det A)(\det B) \quad .$$

Non dimostriamo questo teorema (un risultato classico, non elementare), ma lo applichiamo nel seguente

▷ Esercizio 23 ◁

Testo

Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice invertibile. Dimostrare che

$$(3.5.3) \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} \quad .$$

Soluzione

Sappiamo che $\det(A) \neq 0$ e

$$(3.5.4) \quad A^{-1} \cdot A = I \quad .$$

Applicando la (3.5.2) a (3.5.4), e osservando che $\det I = 1$, si ottiene subito la (3.5.3). □

▷ Esercizio 24 ◁

Testo

Siano $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ definite da

$$(3.5.5) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad .$$

Calcolare $C = 2A^2 - B^{-1} \cdot A$.

Soluzione

Prima calcoliamo

$$(3.5.6) \quad B^{-1} = \frac{1}{\det B} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$(3.5.7) \quad A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} (4-1) & (-2-2) \\ (2+2) & (-1+4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Ora, usando (3.5.6) e (3.5.7), abbiamo

$$(3.5.8) \quad C = 2 \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{3} & -9 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

□

▷ Esercizio 25 ◁

Testo

Siano $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ definite da

$$(3.5.9) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} .$$

- (i) Calcolare $C = A \cdot B - B \cdot A$;
- (ii) Calcolare, se possibile, A^{-1} e B^{-1} .

Soluzione

(i)

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} ;$$

(ii)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

mentre B^{-1} non esiste in quanto $\det B = 0$.

□

▷ Esercizio 26 ◁

Testo

Sia

$$(3.5.10) \quad A_t = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1-t & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1+t & t & 1+t & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{3,5}(\mathbb{R}), t \in \mathbb{R} .$$

Calcolare $\rho(A_t)$.

Soluzione

Conviene partire scegliendo, se possibile, dei minori non nulli che non dipendono da t . Da R_1, R_2 e C_4, C_5 si ottiene

$$(3.5.11) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 ,$$

per cui $\rho(A_t) \geq 2 \forall t \in \mathbb{R}$. Orlandando il minore (3.5.11) con R_3 e C_3 abbiamo

$$(3.5.12) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1+t & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1+t$$

Ne deduciamo che $\rho(A_t) = 3$ se $t \neq -1$. Ora orliamo (3.5.11) con R_3 e C_2 ($t = -1$):

$$(3.5.13) \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

La conclusione è: $\rho(A_t) = 3 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

□

▷ Esercizio 27 ◁

Testo

Sia

$$(3.5.14) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R}) \quad .$$

Calcolare $\rho(A)$.

Soluzione

Il rango non varia a seguito di trasformazioni elementari su righe o colonne. Abbiamo

$$(3.5.15) \quad A \begin{array}{l} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \\ \xleftrightarrow{\iff} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad .$$

Ora, la riga nulla è ininfluenza ai fini del computo del rango, quindi è facile concludere che $\rho(A) = 2$.

□

▷ Esercizio 28 ◁

Testo

In $M_4(\mathbb{R})$, siano

$$(3.5.16) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & \pi & 0 & e^2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ \pi & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad .$$

Calcolare $\det(A \cdot B)$.

Soluzione

A e B sono 2 matrici triangolari, per cui il loro determinante è di calcolo immediato, essendo dato dal prodotto dei coefficienti sulla diagonale principale:

$$(3.5.17) \quad \det A = 2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 3 = -6 \quad , \quad \det B = 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-2) = -24 \quad .$$

Quindi conviene usare il teorema di Binet (si veda (3.5.2)) che ci consente di evitare il calcolo del prodotto di matrici $A \cdot B$! Abbiamo, usando (3.5.17),

$$(3.5.18) \quad \det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B) = -6 \cdot (-24) = 144 \quad .$$

□

▷ Esercizio 29 ◁

Testo

Stabilire quale, fra le seguenti matrici in $M_3(\mathbb{R})$, è simmetrica:

$$(3.5.19) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

Soluzione

Abbiamo

$$(3.5.20) \quad {}^tA = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad {}^tB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad {}^tC = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

Quindi ${}^tA \neq A$ e ${}^tB \neq B$, ma ${}^tC = C$: dunque la matrice simmetrica è C . Si può osservare che i coefficienti di B soddisfano la relazione $b_{ij} = -b_{ji}$: le matrici con questa proprietà vengono dette *antisimmetriche*.

□

▷ Esercizio 30 ◁

Testo

Sia

$$(3.5.21) \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad .$$

Calcolare, se possibile, A^{-1} .

Soluzione

$\det A = -2 \neq 0$, per cui A^{-1} esiste. Usando la (3.2.29) come in (3.2.31) si ottiene

$$(3.5.22) \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

□

▷ Esercizio 31 ◁

Testo

Sia A come in (3.5.21). Eseguire una trasformazione elementare, di tipo (3.4.4), in modo da trasformare A in una matrice triangolare superiore.

Soluzione

In pratica, dobbiamo solo azzerare il coefficiente a_{21} :

$$(3.5.23) \quad A \begin{matrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + R_1} \\ \xleftrightarrow{\quad} \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

□

▷ Esercizio 32 ◁

Testo

Siano

$$(3.5.24) \quad \vec{u} = [1, 0, 3] \quad , \quad \vec{v} = [-1, 1, 0] \quad , \quad \vec{w} = [2, 1, 3] \quad .$$

- (i) Calcolare il volume V del parallelepipedo individuato da \vec{u}, \vec{v} e \vec{w} ;
- (ii) Calcolare l'area A del parallelogramma individuato da \vec{u} e \vec{w} .

Soluzione

Nel capitolo 1 abbiamo imparato che il volume richiesto è dato dal valore assoluto del prodotto misto, mentre l'area coincide col modulo del prodotto vettoriale. Usando (3.2.25) e (3.2.24) troviamo:

(i)

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -6 \quad .$$

Quindi

$$V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})| = |-6| = 6 \quad .$$

(ii)

$$\vec{u} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = [-3, 3, 1] \quad .$$

Quindi

$$A = |\vec{u} \wedge \vec{w}| = \sqrt{19} \quad .$$

□

3.6 Considerazioni conclusive

Nel termine *algebra lineare* la parola lineare vuole sottolineare il fatto che questa teoria riguarda funzioni polinomiali di primo grado, le quali geometricamente descrivono appunto luoghi di punti lineari (rette, piani etc.). La storia dell'algebra lineare moderna inizia intorno al 1840 grazie ai lavori di W. Hamilton (che introdusse il termine vettore); A. Cayley introdusse le matrici (2×2), una delle idee fondamentali dell'algebra lineare, nel 1857. Anche se l'algebra lineare trae le sue origini dallo studio dei vettori, da noi presentato nel capitolo 1, per iniziare a coglierne l'importanza è sufficiente pensare brevemente al concetto di linearizzazione di funzioni di variabile reale (polinomio di Taylor di primo grado). Infatti questo concetto gioca un ruolo fondamentale nei problemi di approssimazione locale per semplificare problemi di origine fisica, derivanti ad esempio dallo studio di equazioni differenziali; quando tutto ciò viene esteso alle funzioni dipendenti da più di una variabile il linguaggio delle matrici diventa uno strumento essenziale. Per un'interessante excursus storico sull'evoluzione di questi concetti, parallela allo sviluppo del calcolo infinitesimale, si può consultare [7].

La matrice A è detta *matrice dei coefficienti* del sistema, X è il vettore n -dimensionale delle *incognite*, mentre B rappresenta i cosiddetti *termini noti*. $A \cdot X$ indica il prodotto (righe per colonne) della matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ con la matrice (= vettore colonna) $X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) (= \mathbb{R}^n)$. Il nostro obiettivo è quello di utilizzare la teoria delle matrici, illustrata nel capitolo 3, per stabilire quando (4.0.3) ammette soluzioni e, in caso affermativo, determinarle. Nel caso specifico in cui B è il vettore nullo si dirà che il sistema lineare è *omogeneo*. In questo caso, (4.0.3) è sempre risolubile e l'insieme delle sue soluzioni forma un cosiddetto *sottospazio vettoriale* W di \mathbb{R}^n . Al fine di chiarire questo concetto, in relazione anche alla fondamentale nozione di *base* di W , dedichiamo la prima sezione di questo capitolo ad una breve introduzione alla teoria degli spazi vettoriali.

Gli strumenti di algebra lineare che applicheremo per determinare le soluzioni di (4.0.2) sono formalmente complessi, dovendo essi trattare una situazione generale dove m, n possono essere arbitrariamente grandi. Nei nostri esercizi invece, in pratica, avremo sempre $m, n \leq 7$: quindi i calcoli risultano molto più agevoli e il lettore deve abituarsi ad eseguirli senza perdere di vista le usuali regole dell'algebra elementare (in altre parole: è inutile applicare un complicato *algoritmo di Gauss* a casi in cui le soluzioni sono *sotto gli occhi* grazie a considerazioni algebriche semplici.. d'altra parte, il nostro studio teorico è indispensabile per acquisire la necessaria consapevolezza di ciò che si sta facendo).

4.1 Spazi vettoriali, sottospazi e basi

Il primo esempio di spazio vettoriale (in realtà, proprio quello da cui questo concetto deriva il nome) è l'insieme dei vettori di \mathbb{R}^3 , munito delle operazioni di somma $\vec{u} + \vec{v}$ e moltiplicazione di un vettore per uno scalare ($\lambda \vec{v}$) definite nel capitolo 1. Più generalmente, un \mathbb{R} -spazio vettoriale V è un insieme V sugli elementi del quale sono definite una somma, e una moltiplicazione per $\lambda \in \mathbb{R}$, che godono di proprietà algebriche (associativa, distributiva etc.) *analoghe a quelle dei vettori in \mathbb{R}^3* . Non precisiamo ulteriormente questo concetto dal punto di vista del formalismo algebrico, ma diciamo che l'esempio guida per capire che cosa sia un \mathbb{R} -spazio vettoriale è $V = \mathbb{R}^n$, dotato della struttura algebrica che ora descriviamo. Dal punto di vista insiemistico, $\mathbb{R}^n = M_{n,1}(\mathbb{R})$: gli elementi di \mathbb{R}^n , che chiameremo *vettori*, sono quindi individuati da n coordinate reali che, per ragioni di comodità algebrica, conviene considerare

come colonne (piuttosto che come righe). In altre parole, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ significa

$$(4.1.1) \quad \vec{v} = {}^t[v_1, \dots, v_n] \quad ,$$

dove $v_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$. Scriveremo $\vec{0}$ ($= {}^t[0, \dots, 0]$) per indicare il *vettore nullo*. **Prevedibilmente**, definiamo

$$(4.1.2) \quad \vec{u} + \vec{v} = {}^t[u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n] \quad ,$$

$$(4.1.3) \quad \lambda \vec{v} = {}^t[\lambda v_1, \dots, \lambda v_n] \quad .$$

Definizione 1: Sia $W \subseteq V$, dove V è un \mathbb{R} -spazio vettoriale. Diremo che W è un *sottospazio vettoriale* di V se valgono le due seguenti proprietà:

$$(4.1.4) \quad \vec{u}, \vec{v} \in W \implies (\vec{u} + \vec{v}) \in W \quad ;$$

$$(4.1.5) \quad \vec{v} \in W \implies \lambda \vec{v} \in W \quad , \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad .$$

Per approfondimenti si possono consultare le dispense per il corso per gli Studenti di Ingegneria.

4.2 Teorema di Rouché-Capelli, sistemi triangolari e di Cramer

Definizione 2: Si consideri un generico sistema lineare (4.0.2) (o, equivalentemente, (4.0.3)). Diremo che il sistema è *risolubile* se ammette almeno una soluzione.

Notiamo, a scanso di equivoci, che in (4.0.2) i coefficienti $[a_{ij}]$ e b_j sono preassegnati. Determinare una soluzione significa individuare una n -upla (cioè, un vettore) ${}^t[x_1, \dots, x_n]$ in modo che simultaneamente le m equazioni che costituiscono (4.0.2) siano verificate. I sistemi omogenei (cioè $B = \vec{0}$) sono sempre ovviamente risolubili, in quanto $X = \vec{0} = {}^t[0, \dots, 0]$ è una soluzione. Ciò però non esaurisce lo studio di questi sistemi, dato che bisogna capire quando ammettono *altre* soluzioni e, in caso affermativo, determinarle.

Un primo, importante esempio di sistemi risolvibili, per i quali non è difficile determinare l'insieme delle soluzioni, è quello dei cosiddetti

(4.2.1) **Sistemi triangolari :** Si dice che un sistema lineare (4.0.2) (o (4.0.3)) è *triangolare* se la matrice $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, con $m \leq n$, è una matrice triangolare superiore con la proprietà che

$$(4.2.2) \quad a_{ii} \neq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Le soluzioni di questo tipo di sistema possono essere facilmente determinate mediante *sostituzione diretta*, partendo dall'ultima equazione e via via risalendo. Più precisamente, dall'ultima equazione si ricava l'espressione di x_m in funzione delle restanti $(n - m)$ incognite, cioè x_{m+1}, \dots, x_n . Poi si sostituisce questa espressione di x_m nell'equazione sopra, ricavando quindi x_{m-1} ancora in funzione delle incognite x_{m+1}, \dots, x_n . Procedendo in questo modo, si arriva all'espressione delle incognite x_1, \dots, x_m in funzione delle rimanenti x_{m+1}, \dots, x_n . Queste ultime vengono dette *incognite libere*, perché possono assumere valori arbitrari (cioè, liberi), in funzione dei quali sono poi determinati i valori delle incognite x_1, \dots, x_m . Nel caso $m = n$ non ci sono incognite libere e il sistema ha un'unica soluzione. Approfondiremo meglio questo discorso nel teorema di Rouché-Capelli sotto, mentre ora ci preoccupiamo di illustrare, attraverso alcuni esercizi, come quanto sopra esposto sui sistemi triangolari sia di facile applicazione pratica.

▷ Esercizio 1 ◁

Testo

Determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema triangolare

$$(4.2.3) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ \frac{1}{2}x_3 + x_4 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Soluzione

Si tratta di un sistema lineare con matrice dei coefficienti A e vettore dei termini noti B dati rispettivamente da

$$(4.2.4) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

quindi effettivamente A è triangolare superiore e soddisfa la (4.2.2). Il primo passaggio consiste nel ricavare x_3 dalla terza equazione:

$$(4.2.5) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_3 = 1 - 2x_4 \end{cases} .$$

Ora, sostituendo l'espressione di x_3 , appena ottenuta, nella seconda equazione, si calcola l'espressione di x_2 in funzione di x_4 :

$$(4.2.6) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 = 1 - 4x_4 \\ x_3 = 1 - 2x_4 \end{cases} .$$

Infine, sostituendo le espressioni di x_2 e x_3 nella prima equazione, si ricava anche x_1 in funzione dell'incognita libera x_4 :

$$(4.2.7) \quad \begin{cases} x_1 = 1 - x_4 \\ x_2 = 1 - 4x_4 \\ x_3 = 1 - 2x_4 \end{cases} .$$

In conclusione, l'insieme delle soluzioni di (4.2.3) è:

$$(4.2.8) \quad \{ {}^t[1 - x_4, 1 - 4x_4, 1 - 2x_4, x_4] \in \mathbb{R}^4 : x_4 \in \mathbb{R} \} .$$

Si noti che x_4 è libera, cioè può assumere valore arbitrario: ad esempio, se $x_4 = 0$, la corrispondente soluzione è ${}^t[1, 1, 1, 0]$. Se $x_4 = \frac{1}{2}$, la corrispondente soluzione è ${}^t[\frac{1}{2}, -1, 0, \frac{1}{2}]$. Si può pensare a x_4 come ad un parametro che descrive le ∞^1 soluzioni del sistema. In questo senso, la (4.2.8) altro non è che la rappresentazione parametrica di una retta in \mathbb{R}^4 , cioè:

$$(4.2.9) \quad \begin{cases} x_1 = 1 - t \\ x_2 = 1 - 4t \\ x_3 = 1 - 2t \\ x_4 = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} .$$

Questa retta in \mathbb{R}^4 passa per il punto ${}^t[1, 1, 1, 0]$ ed è parallela al vettore ${}^t[-1, -4, -2, 1]$. □

▷ Esercizio 2 ◁

Testo

Si consideri:

$$(4.2.10) \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} .$$

Determinare l'insieme delle soluzioni di (4.2.10).

Soluzione

La matrice dei coefficienti è

$$(4.2.11) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} .$$

Non vi sono difficoltà algebriche per esplicitare x_1, x_2 in funzione di x_3, x_4 . Procedendo infatti come nell'esercizio 3 si arriva a

$$(4.2.12) \quad \begin{cases} x_1 = -x_3 + 2x_4 \\ x_2 = 2x_3 + x_4 \end{cases}$$

Si conclude quindi che l'insieme delle ∞^2 soluzioni del sistema (4.2.10) è dato da

$$(4.2.13) \quad \{ {}^t[-x_3 + 2x_4, 2x_3 + x_4, x_3, x_4] \in \mathbb{R}^4 : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \} .$$

□

Conviene considerare la matrice

$$(4.2.14) \quad A' = [A, B] \in M_{m, n+1}(\mathbb{R}) .$$

La notazione in (4.2.14) significa che la matrice A' si ottiene da A aggiungendo a destra una colonna, costituita dal termine noto B . La matrice A' è detta *matrice completa* associata al sistema (4.0.3).

▷ Esercizio 3 ◁

Testo

Scrivere la matrice completa associata al sistema lineare (4.2.3).

Soluzione

Da (4.2.4), si arriva subito a

$$(4.2.15) \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \in M_{3,5}(\mathbb{R}) \quad .$$

□

Il risultato seguente, di cui omettiamo la dimostrazione, è importante:

Teorema 1: (Teorema di Rouché-Capelli) Si consideri un generico sistema lineare (4.0.3). Allora

$$(4.2.16) \quad ((4.0.3) \text{ è risolubile}) \iff (\rho(A) = \rho(A')) \quad .$$

Inoltre, se (4.0.3) è risolubile, allora ammette un numero di incognite libere pari a $(n - \rho(A))$ (cioè, $\infty^{n-\rho(A)}$ soluzioni) (se $n = \rho(A)$, esiste un'unica soluzione).

Notiamo subito che le eventuali incognite libere non necessariamente coincidono con x_{m+1}, \dots, x_n come avveniva nel caso particolare dei sistemi triangolari. Approfondiremo questo problema nella sezione 4.3, dove tratteremo i metodi generali di soluzione.

▷ Esercizio 4 ◁

Testo

Stabilire se il seguente sistema lineare è risolubile:

$$(4.2.17) \quad \begin{cases} x_1 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_4 + 3x_5 = 1 \end{cases}$$

Soluzione

Abbiamo

$$(4.2.18) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad .$$

Ora il lettore, usando i metodi appresi nel capitolo 3, verificherà che

$$(4.2.19) \quad \rho(A) = 2 \quad , \quad \rho(A') = 3 \quad .$$

Poiché dunque risulta $\rho(A) \neq \rho(A')$ si conclude, grazie a (4.2.16), che il sistema non è risolubile. \square

\triangleright Esercizio 5 \triangleleft

Testo

Sia W l'insieme delle soluzioni definito da

$$(4.2.20) \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Calcolare il numero di incognite libere necessarie a descrivere W . Si noti che questo numero, spesso denotato $\dim W$, rappresenta geometricamente la dimensione di W .

Soluzione

Il sistema (4.2.20) è omogeneo e quindi risolubile. La dimensione $\dim W$ coincide col numero di incognite libere: quindi, per il teorema di Rouché-Capelli,

$$(4.2.21) \quad \dim W = n - \rho(A) \quad ,$$

dove $n = 5$ e la matrice dei coefficienti A è

$$(4.2.22) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad .$$

Ora il lettore dovrebbe verificare che $\rho(A) = 2$: sostituendo questa informazione in (4.2.21) si conclude che $\dim W = 5 - 2 = 3$. \square

Concludiamo questo paragrafo con l'illustrazione di una famiglia di sistemi che sono risolubili e ammettono un'unica soluzione ($\rho(A) = n$).

(4.2.23) **Sistemi di Cramer** : Si consideri

$$(4.2.24) \quad A \cdot X = B$$

nell'ipotesi

$$(4.2.25) \quad A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \det A \neq 0 \quad .$$

Questi sistemi lineari vengono chiamati *sistemi di Cramer* e, dato che $\rho(A) = \rho(A') = n$, ammettono un'unica soluzione. Formalmente, applicando A^{-1} a entrambi i membri di (4.2.24), deduciamo che la soluzione del sistema è data da

$$(4.2.26) \quad X = A^{-1} \cdot B \quad .$$

L'applicazione della formula (4.2.26) richiede il calcolo di A^{-1} e l'esecuzione di un prodotto di matrici: risulta invece più rapido utilizzare la regola seguente, che asserisce che l'unica soluzione del nostro sistema di Cramer è data da

$$(4.2.27) \quad X = {}^t \left[\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta} \right] ,$$

dove $\Delta = \det A$ (per ipotesi, $\Delta \neq 0$) e Δ_i indica il determinante della matrice quadrata di ordine n , ottenuta da A sostituendo la i -esima colonna col vettore B .

▷ Esercizio 6 ◁

Testo

Determinare le soluzioni di

$$(4.2.28) \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Soluzione

Abbiamo

$$(4.2.29) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Poiché $\Delta = \det A = 3 \neq 0$ si tratta di un sistema di Cramer. L'unica sua soluzione, in virtù di (4.2.27), è data da

$$(4.2.30) \quad X = {}^t \left[\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta} \right] = \frac{1}{3} \quad {}^t \left[\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right] \\ = \quad {}^t \left[\frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right]$$

□

▷ Esercizio 7 ◁

Testo

Si consideri il sistema lineare

$$(4.2.31) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

- (i) Verificare che (4.2.31) è un sistema di Cramer e risolverlo usando la (4.2.27);
- (ii) Verificare il risultato ottenuto in (i) mediante la (4.2.26).

Soluzione

(i) Abbiamo

$$(4.2.32) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si calcola $\Delta = \det A = 4 \neq 0$, quindi si tratta di un sistema di Cramer. Applicando la (4.2.27) otteniamo:

$$(4.2.33) \quad X = {}^t \left[\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}, \frac{\Delta_3}{\Delta} \right],$$

dove

$$(4.2.34) \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 4.$$

Sostituendo (4.2.34) e $\Delta = 4$ in (4.2.33) si ottiene la soluzione

$$(4.2.35) \quad X = {}^t [1, 2, 1].$$

(ii) Bisogna calcolare A^{-1} mediante la formula (3.2.29) del capitolo 3. Si ottiene

$$\begin{aligned}
 (4.2.36) \quad A^{-1} &= \frac{1}{4} \begin{matrix} t \\ \left[\begin{array}{ccc} \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{array} \right| & - \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \right| \\ - \left| \begin{array}{cc} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{array} \right| & - \left| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{array} \right| & - \left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right| \end{array} \right] \end{matrix} \\
 &= \frac{1}{4} \begin{matrix} t \\ \left[\begin{array}{ccc} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{array} \right] \end{matrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Ora, usando la (4.2.26), la soluzione è

$$(4.2.37) \quad X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

□

4.3 Risoluzione di sistemi nel caso generale: metodo di Cramer generalizzato e algoritmo di Gauss

In questo paragrafo affrontiamo il problema di determinare le soluzioni di un sistema lineare generale di tipo (4.0.3), ovviamente nel caso in cui esso sia risolubile (cioè, quando $\rho(A) = \rho(A')$). Illustreremo due possibili procedure: la prima, nota col nome di *metodo di Cramer generalizzato*, consiste nel trasformare il sistema in modo da poter applicare opportunamente la (4.2.27). La

seconda, conosciuta come *algoritmo di Gauss*, è basata sull'uso delle trasformazioni elementari, introdotte nella sezione 3.4 del capitolo 3, per ricondursi ad un sistema triangolare.

(4.3.1) **Metodo di Cramer generalizzato** : Consideriamo il generico sistema lineare (4.0.2) e assumiamo che esso sia risolubile: quindi, per il teorema di Rouché-Capelli, possiamo dire che

$$(4.3.2) \quad \rho(A)(= \rho(A')) = p$$

per un certo $p \leq \text{Min}\{m, n\}$. In particolare, la matrice dei coefficienti A ammetterà un minore, di ordine p , non nullo. Questo minore individua p righe e p colonne di A : è lecito, ai fini della determinazione delle soluzioni, considerare *soltanto* le p equazioni corrispondenti alle p righe del minore di cui sopra (le altre equazioni si cancellano). Ora lavoriamo su queste p equazioni: spostiamo a destra dell'uguale le $(n - p)$ incognite (nessuna incognita se $p = n$) relative alle $(n - p)$ colonne che *non* abbiamo usato per costruire il minore di ordine p di cui sopra. A questo punto abbiamo creato un sistema di Cramer di ordine p , con termine noto che dipende dalle $(n - p)$ incognite (libere) che abbiamo portato a destra dell'uguale: poi la risoluzione è completabile mediante l'uso della regola (4.2.27). Illustriamo questo procedimento attraverso il seguente

▷ Esercizio 8 ◁

Testo

Determinare le soluzioni del sistema lineare (4.2.20).

Soluzione

Abbiamo già visto, nel corso dell'esercizio 7, che questo sistema è risolubile e ammette 3 incognite libere, in quanto $\rho(A) = 2$. Osservando, in (4.2.22), la matrice dei coefficienti A , vediamo che, ad esempio, R_1, R_2 e C_1, C_2 individuano un minore di ordine 2 non nullo: quindi, cancellando R_3 e spostando a destra dell'uguale le incognite corrispondenti alle altre colonne (cioè x_3, x_4 e x_5), concludiamo che il sistema lineare (4.2.20) è equivalente al seguente

$$(4.3.3) \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = x_4 - 3x_5 \\ x_1 + x_2 = -x_3 - 2x_5 \end{cases} .$$

Ora, (4.3.3) è considerabile come un sistema di Cramer di ordine 2, con matrice dei coefficienti A e vettore dei termini noti B dati rispettivamente da

$$(4.3.4) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} x_4 - 3x_5 \\ -x_3 - 2x_5 \end{bmatrix} .$$

La soluzione, che ovviamente risulterà dipendente dalle incognite libere x_3, x_4 e x_5 , può essere determinata usando la (4.2.27): si ha

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

e quindi

$$\begin{aligned} (4.3.5) \quad X &= {}^t \left[\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta} \right] \\ &= {}^t \left[\begin{vmatrix} x_4 - 3x_5 & 1 \\ -x_3 - 2x_5 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & x_4 - 3x_5 \\ 1 & -x_3 - 2x_5 \end{vmatrix} \right] \\ &= {}^t [x_3 + x_4 - x_5, -2x_3 - x_4 - x_5] \quad . \end{aligned}$$

In conclusione, l'insieme delle soluzioni di (4.2.20) è dato da

$$(4.3.6) \quad W = \{ {}^t [x_3 + x_4 - x_5, -2x_3 - x_4 - x_5, x_3, x_4, x_5] \in \mathbb{R}^5 : x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \} \quad .$$

□

Si noti che il sottospazio W in (4.3.6) ha dimensione 3, e quindi sono necessarie 3 incognite libere per parametrizzarlo. In molte situazioni, come in questo caso, la scelta per le incognite libere non è unica: però segnaliamo subito che questa scelta non è arbitraria. *In pratica, certe $(n - p)$ incognite possono essere scelte come libere se e solo se dalle rimanenti p colonne si può estrarre un minore di ordine p non nullo ($p = \rho(A) = \rho(A')$).*

(4.3.7) **Algoritmo di Gauss :** Ancora, partiamo da un sistema lineare generale come in (4.0.2), e assumiamo che esso sia risolubile, cioè che valga la (4.3.2). L'idea dell'algoritmo è quella di formalizzare il processo di trasformazione della matrice completa A' in una matrice triangolare superiore, come nella sequenza (3.4.5) del capitolo 3. Il sistema lineare così ottenuto risulta avere le stesse soluzioni del sistema di partenza, e ad esso è possibile applicare il metodo di sostituzione diretta relativo ai sistemi triangolari. Passiamo quindi alla descrizione delle operazioni da effettuare sulla matrice completa A' :

Passo 1: Questo passo consiste nella trasformazione della prima colonna in una colonna del tipo seguente:

$$(4.3.8) \quad {}^t [a_{11}, 0, \dots, 0] \quad , \quad \text{con } a_{11} \neq 0 \quad .$$

Se, in partenza, si avesse $a_{11} = 0$, bisognerebbe per prima cosa effettuare uno scambio di righe $R_1 \longleftrightarrow R_j$, con $a_{j1} \neq 0$. In questo modo è lecito assumere $a_{11} \neq 0$.

Nota: se C_1 è nulla, bisogna fare uno scambio $C_1 \longleftrightarrow C_j$, con C_j non identicamente nulla: in questo caso, bisogna però anche, conseguentemente, invertire tra loro le posizioni di x_1 e x_j .

Riassumendo, ci siamo messi nella condizione di avere $a_{11} \neq 0$. Dobbiamo quindi azzerare i coefficienti sotto a_{11} , operando come segue:

$$(4.3.9) \quad R_j \longrightarrow R_j - \left(\frac{a_{j1}}{a_{11}}\right)R_1 \quad j = 2 \dots m \quad .$$

Passo 2: Questo passo consiste nella trasformazione della seconda colonna in una colonna del tipo seguente:

$$(4.3.10) \quad {}^t[a_{12}, a_{22}, 0, \dots, 0] \quad , \quad \text{con } a_{22} \neq 0 \quad .$$

Si procede come all'inizio del passo 1, senza però usare R_1 negli eventuali scambi di riga, per arrivare alla condizione $a_{22} \neq 0$. Poi si azzerano i coefficienti sotto a_{22} mediante

$$(4.3.11) \quad R_j \longrightarrow R_j - \left(\frac{a_{j2}}{a_{22}}\right)R_2 \quad j = 3 \dots m \quad .$$

Passi successivi: Si procede trattando in tutto p colonne come sopra e si arriva ad un sistema triangolare con p righe, equivalente al (cioè, avente le stesse soluzioni del) sistema di partenza. Si noti che, se $p < m$, le righe eccedenti danno luogo a delle identità $0 = 0$ che possono ovviamente essere ignorate.

▷ Esercizio 9 ◁

Testo

Sia W il sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^5 definito da

$$(4.3.12) \quad \begin{cases} x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

Determinare, mediante l'algoritmo di Gauss, una parametrizzazione di W , precisando il valore di $\dim W$.

Soluzione

La matrice completa del sistema è

$$(4.3.13) \quad A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} .$$

Considerando C_1, C_3, C_4 si verifica che $\rho(A) = 3$, per cui $\dim W = n - \rho(A) = 2$. Poiché $a_{11} = 0$, per prima cosa operiamo uno scambio di righe, ad esempio $R_1 \leftrightarrow R_2$, che ci conduce a

$$(4.3.14) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} .$$

Ora possiamo completare il passo 1 applicando (4.3.9): R_2 non varia, mentre $R_3 \rightarrow R_3 - R_1$. Da (4.3.14) si ottiene quindi

$$(4.3.15) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} .$$

Per poter eseguire il passo 2, è necessario uno scambio di colonne in quanto C_2 è nulla. Ad esempio, eseguiamo $C_2 \leftrightarrow C_4$: per ricordarci che ciò comporta il corrispondente scambio di incognite, scriveremo le varie incognite sopra le rispettive colonne

$$(4.3.16) \quad \begin{array}{cccccc} & x_1 & x_4 & x_3 & x_2 & x_5 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ora $a_{22} \neq 0$, per cui possiamo subito completare il passo 2 applicando (4.3.11), che in questo caso si riduce a $R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2$: così la (4.3.16) diventa:

$$(4.3.17) \quad \begin{array}{cccccc} & x_1 & x_4 & x_3 & x_2 & x_5 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Riassumendo, abbiamo ottenuto che il sistema (4.3.12) di partenza equivale al sistema triangolare con matrice completa A' data da (4.3.17), e cioè:

$$(4.3.18) \quad \begin{cases} x_1 + x_4 - 2x_3 - x_5 = 0 \\ -x_4 + x_3 + x_5 = 0 \\ 2x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Adesso, risolvendo per sostituzione diretta partendo dal basso, i passaggi sono:

$$(4.3.19) \quad \begin{cases} x_1 + x_4 - 2x_3 - x_5 = 0 \\ -x_4 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_3 = -\frac{1}{2}x_5 \end{cases},$$

poi

$$(4.3.20) \quad \begin{cases} x_1 + x_4 - 2x_3 - x_5 = 0 \\ x_4 = \frac{1}{2}x_5 \\ x_3 = -\frac{1}{2}x_5 \end{cases},$$

e infine

$$(4.3.21) \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_5 \\ x_4 = \frac{1}{2}x_5 \\ x_3 = -\frac{1}{2}x_5 \end{cases}.$$

Conclusione: l'insieme delle soluzioni di (4.3.12) (cioè, la parametrizzazione di W) è

$$(4.3.22) \quad W = \left\{ \left[-\frac{1}{2}x_5, x_2, -\frac{1}{2}x_5, \frac{1}{2}x_5, x_5 \right] \in \mathbb{R}^5 : x_2, x_5 \in \mathbb{R} \right\}.$$

□

Osserviamo che, nell'applicazione dell'algoritmo di Gauss a sistemi omogenei, come nell'esercizio precedente, si potrebbe lavorare su A (invece che su A') considerando implicitamente che l'ultima colonna di A' resta sempre nulla durante la sequenza.

Inoltre, se già, come nel caso dei sistemi omogenei, si sa che il sistema è risolubile, non è necessario calcolare preventivamente $\rho(A)$: infatti l'algoritmo conduce a una matrice triangolare con un numero di righe significative che necessariamente coinciderà con $\rho(A)$.

Concludiamo questa sezione con un ultimo esercizio in cui eseguiamo spedatamente la sequenza prevista dall'algoritmo di Gauss.

▷ Esercizio 10 ◁

Testo

Usare l'algoritmo di Gauss per risolvere

$$(4.3.23) \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 + 5x_7 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 + 2x_6 + x_7 = -3 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 + x_5 + 7x_6 + 7x_7 = 1 \end{cases}$$

Soluzione

Abbiamo

(4.3.24)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 1 & 7 & 7 \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 1 & 7 & 7 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dall'esame di C_1, C_2, C_5 si ricava

$$(4.3.25) \quad \rho(A) = 3 = \rho(A'),$$

per cui il sistema è risolubile, con $n - \rho(A) = 7 - 3 = 4$ incognite libere. La sequenza dell'algoritmo parte con l'applicazione ad A' di $R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$ e $R_3 \rightarrow R_3 - 5R_1$. Si ottiene

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & -3 & -4 & -9 & -17 \\ 0 & 6 & 2 & -4 & -4 & -8 & -18 & -34 \end{bmatrix}$$

Ora, per il passo 2, si esegue $R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2$: si ottiene

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & -3 & -4 & -9 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A questo punto, $C_3 \leftrightarrow C_5$ ci conduce a

(4.3.26)

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_5 & x_4 & x_3 & x_6 & x_7 & \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & -3 & -2 & 1 & -4 & -9 & -17 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Quindi, esplicitando (4.3.26), concludiamo che il sistema di partenza (4.3.23) è equivalente al seguente sistema triangolare

$$(4.3.27) \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_5 + 2x_4 + 3x_6 + 5x_7 = 7 \\ 3x_2 - 3x_5 - 2x_4 + x_3 - 4x_6 - 9x_7 = -17 \\ 2x_5 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo dal basso per sostituzione diretta (le incognite libere sono x_4, x_3, x_6, x_7) si ottiene

$$(4.3.28) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_6 - 2x_7 \\ x_2 = -\frac{17}{3} + \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_6 + 3x_7 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

In conclusione, l'insieme delle soluzioni di (4.3.23) è

$$(4.3.29) \quad \left\{ \left[\frac{4}{3} - \frac{4}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_6 - 2x_7, -\frac{17}{3} + \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_6 + 3x_7, \right. \right. \\ \left. \left. x_3, x_4, 0, x_6, x_7 \right] \in \mathbb{R}^7 : x_3, x_4, x_6, x_7 \in \mathbb{R} \right\}$$

□

Si può notare che, indipendentemente dal metodo scelto per risolvere il sistema (4.3.23), la x_5 non avrebbe mai potuto comparire tra le incognite libere!

4.4 Esercizi di riepilogo

▷ Esercizio 11 ◁

Testo

Risolvere, se possibile, il seguente sistema lineare

$$(4.4.1) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_1 = 1 \end{cases}$$

Soluzione

Abbiamo matrice dei coefficienti A e vettore dei termini noti B dati rispettivamente da

$$(4.4.2) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nota: per la costruzione di A , la terza equazione del sistema deve ovviamente essere letta come

$$2x_1 + x_2 = 1 \quad .$$

Si calcola $\Delta = \det A = 2 \neq 0$: si tratta di un sistema di Cramer che quindi ammette un'unica soluzione. Applicando la (4.2.27) otteniamo:

$$(4.4.3) \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \\ x_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ x_3 &= \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

In conclusione, l'unica soluzione del nostro sistema è ${}^t[\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}]$. □

▷ Esercizio 12 ◁

Testo

Determinare una rappresentazione parametrica del piano W , passante per l'origine di \mathbb{R}^3 , definito da

$$(4.4.4) \quad 2x_1 - x_2 - 5x_3 = 0 \quad .$$

Soluzione

Trattando (4.4.4) come un sistema lineare omogeneo, con $n - \rho(A) = 3 - 1 = 2$ incognite libere (ad esempio, x_2, x_3) possiamo facilmente scrivere

$$(4.4.5) \quad W = \left\{ {}^t\left[\frac{1}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3, x_2, x_3\right] \in \mathbb{R}^3 : x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \quad .$$

La (4.4.5) è, in sostanza, la richiesta parametrizzazione di W . Se però vogliamo darle una forma più simile a quella di rappresentazione parametrica di una retta, descritta nel capitolo 2, possiamo chiamare s e t i 2 parametri liberi e riscrivere (4.4.5) come segue:

$$(4.4.6) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}s + \frac{5}{2}t \\ x_2 = s \\ x_3 = t \end{cases} \quad s, t \in \mathbb{R} .$$

Si noti che, ovviamente, trattandosi di un piano, sono necessari 2 parametri per una completa descrizione. □

▷ Esercizio 13 ◁

Testo

Risolvere, se possibile, il seguente sistema lineare

$$(4.4.7) \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

Soluzione

Abbiamo

$$(4.4.8) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi è facile verificare che $\rho(A) = 2 = \rho(A')$. Il sistema è pertanto risolubile e ammette $n - \rho(A) = 4 - 2 = 2$ incognite libere, ad esempio x_3, x_4 . Usando il metodo di Cramer generalizzato, riscriviamo (4.4.7) come

$$(4.4.9) \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -x_3 - x_4 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

che possiamo trattare come un sistema di Cramer di ordine 2, con

$$(4.4.10) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -x_3 - x_4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ora, $\Delta = \det A = 4$, e

$$(4.4.11) \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} -x_3 - x_4 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-x_3 - x_4 + 1) \\ x_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 1 & -x_3 - x_4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}(1 + x_3 + x_4) \end{aligned}$$

In conclusione, l'insieme delle soluzioni di (4.4.7) è

$$(4.4.12) \quad W = \left\{ \frac{1}{2}(1 - x_3 - x_4), \frac{1}{4}(1 + x_3 + x_4), x_3, x_4 \right\} \in \mathbb{R}^4 : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \quad .$$

▷ Esercizio 14 ◁

□

Testo

Risolvere il sistema lineare (4.4.7) usando l'algoritmo di Gauss.

Soluzione

$$(4.4.13) \quad A' \Big|_{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi (4.4.7) equivale a

$$(4.4.14) \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_2 - x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

Risolvendo ora mediante sostituzione diretta, partendo dalla seconda equazione, si riottiene (4.4.12). \square

\triangleright **Esercizio 15** \triangleleft

Testo

Siano

$$(4.4.15) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Stabilire quali, fra i seguenti sistemi lineari, sono risolvibili ($X = {}^t[x_1, x_2, x_3, x_4]$):

$$(4.4.16) \quad (i) A \cdot X = B \quad ; \quad (ii) A \cdot X = C \quad ; \quad (iii) A \cdot X = D \quad .$$

Soluzione

Abbiamo $\rho(A) = 2$. Nei casi (4.4.16)(i), (ii) e (iii) si verifica rispettivamente $\rho(A') = 2$, $\rho(A') = 3$ e $\rho(A') = 2$. Quindi (4.4.16)(i) e (iii) sono risolvibili, con ∞^2 soluzioni, mentre (4.4.16)(ii) non ammette soluzione. \square

\triangleright **Esercizio 16** \triangleleft

Testo

Si consideri il sistema di Cramer $A \cdot X = B$, dove

$$(4.4.17) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Determinare l'unica soluzione.

Soluzione

(Calcoli omissi): $X = {}^t[-\frac{3}{14}, -\frac{5}{14}, \frac{9}{14}]$. \square

\triangleright **Esercizio 17** \triangleleft

Testo

Determinare la soluzione del seguente sistema di Cramer a coefficienti in \mathbb{C} :

$$(4.4.18) \quad \begin{cases} (1+i)x - y = 1 \\ (1+i)x + y = 0 \end{cases}$$

Soluzione

Abbiamo

$$(4.4.19) \quad A = \begin{bmatrix} (1+i) & -1 \\ (1+i) & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si ha: $\Delta = \det A = (2+2i) \neq 0$, per cui

$$(4.4.20) \quad x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{(2+2i)} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{(2+2i)} = \frac{1}{4} - \frac{i}{4}$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{(2+2i)} \begin{vmatrix} (1+i) & 1 \\ (1+i) & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

In conclusione, $X = {}^t[\frac{1}{4} - \frac{i}{4}, -\frac{1}{2}]$. □

▷ Esercizio 18 ◁

Testo

Risolvere in \mathbb{C} :

$$(4.4.21) \quad \begin{cases} (1+i)x - 2iy = 1 \\ (2+i)x + y = 0 \end{cases}$$

Soluzione

(Calcoli omissi): $X = {}^t[-\frac{1}{26}(1+5i), \frac{1}{26}(-3+11i)]$. □

▷ Esercizio 19 ◁

Testo

Risolvere, se possibile,

(4.4.22)

$$(i) \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \quad (iii) \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Soluzione

(Calcoli omissi):

(i) $\{^t[x_4, -x_4, 1 - x_4, x_4] \in \mathbb{R}^4 : x_4 \in \mathbb{R}\}$;

(ii) Sistema non risolubile, perché $\rho(A) = 2$, ma $\rho(A') = 3$;

(iii) $\{^t[x_1, \frac{1}{2}(1 - x_1), -x_1] \in \mathbb{R}^3 : x_1 \in \mathbb{R}\}$. □

4.5 Considerazioni conclusive

È importante rendersi conto che la notevole importanza teorica di un metodo come l'algoritmo di Gauss risiede nel fatto che esso consente, anche mediante l'implementazione in appositi programmi informatici, di risolvere sistemi di dimensioni arbitrariamente grandi.

Segnaliamo che i concetti da noi esposti in questo capitolo sono sostanzialmente estendibili al caso in cui \mathbb{R} viene sostituito da \mathbb{C} . Inoltre, tutto ciò non ha rilevanza solo nell'ambito della matematica pura, ma anche in svariati campi delle scienze applicate (studi sulle onde elettromagnetiche e meccanica quantistica, ad esempio), in cui si rende anche necessario considerare spazi vettoriali i cui elementi hanno un numero infinito di coordinate (spazi di Hilbert, dal nome del grande matematico che per primo, agli inizi del 900, ne iniziò uno studio sistematico).

Capitolo 5

Diagonalizzazione

5.0 Scopi del capitolo

Sia $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$. Consideriamo una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita da

$$(5.0.1) \quad f(X) = A \cdot X \quad ,$$

dove $X = {}^t[x_1, \dots, x_n]$ e $A \cdot X$ denota il prodotto di matrici. Le funzioni di tipo (5.0.1) sono dette *applicazioni lineari* e sono caratterizzate dalle due seguenti proprietà:

$$(5.0.2) \quad \begin{array}{ll} \text{(i)} & f(X + Y) = f(X) + f(Y) \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^n ; \\ \text{(ii)} & f(\lambda X) = \lambda f(X) \quad \forall X \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R} . \end{array}$$

La situazione in cui risulta sicuramente *più semplice* studiare un'applicazione lineare è il caso in cui A è una matrice diagonale, cioè con $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$, diciamo

$$(5.0.3) \quad A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad , \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n .$$

Infatti, quando A ha la forma (5.0.3) è immediato constatare che

$$(5.0.4) \quad f({}^t[x_1, \dots, x_n]) = {}^t[\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n] .$$

La teoria della diagonalizzazione consente, quando la matrice di partenza A è *diagonalizzabile*, di arrivare ad una descrizione di f del tipo (5.0.4) (per i dettagli, non inclusi nel programma d'esame del corso per Scienze dell'Architettura, si possono vedere le dispense per gli Studenti di Ingegneria).

Definizione: Diremo che una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ è *diagonalizzabile* se esiste una matrice invertibile $P \in M_n(\mathbb{R})$ tale che

$$(5.0.5) \quad P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} .$$

Come riprenderemo nella sezione 5.1 sotto, i λ_i sono detti *autovalori* di A . Lo scopo di questo capitolo è spiegare, per prima cosa, come si calcolano gli autovalori di A . Poi illustreremo il metodo per capire se una data matrice è diagonalizzabile e, in caso affermativo, porteremo a termine la costruzione completa di P .

Segnaliamo in questa introduzione che questi argomenti hanno un ruolo centrale in moltissimi settori della matematica, tra cui, ad esempio, lo studio dei sistemi di equazioni differenziali oppure la geometria delle coniche (capitolo 6). Una comprensione profonda di questi concetti richiederebbe un lavoro al di là dei nostri obiettivi. Qualcosa in questo spirito sarà presentato nella sezione 5.4, in cui introdurremo le matrici di rotazione. Per quanto riguarda invece quella che può essere una prima fase di studio, riteniamo importante che il lettore acquisti familiarità con i concetti che esporremo nelle sezioni 5.1, 5.2 e 5.3. La teoria ivi contenuta ha portata molto generale, ma i nostri esercizi si concentreranno soprattutto sui casi dimensionalmente più agevoli, cioè $n = 2$ o $n = 3$.

5.1 Autovalori e autovettori

Sia $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$. Vogliamo fare un lavoro preparatorio all'eventuale costruzione di una matrice invertibile P che realizzi la (5.0.5). Le colonne di P devono soddisfare un'equazione del tipo

$$(5.1.1) \quad A \cdot X = \lambda X \quad , \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} .$$

La (5.1.1) può essere riscritta, usando la matrice identità I di ordine n , come

$$(5.1.2) \quad [A - \lambda I] \cdot X = \vec{0} \quad .$$

La teoria dei sistemi lineari (teorema di Rouché-Capelli) ci ha insegnato che (5.1.2) ammette soluzioni non nulle se e solo se

$$(5.1.3) \quad |A - \lambda I| = 0 \quad .$$

Posto $P(\lambda) = |A - \lambda I|$, si può osservare che $P(\lambda)$ è un polinomio di grado n nella variabile $\lambda \in \mathbb{R}$; $P(\lambda)$ è detto *polinomio caratteristico* di A . Le soluzioni in \mathbb{R} dell'equazione (5.1.3), cioè $P(\lambda) = 0$, sono dette *autovalori* di A . Quindi, se λ è un autovalore di A , si può definire

$$(5.1.4) \quad V_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^n : [A - \lambda I] \cdot X = \vec{0}\} \quad .$$

Sappiamo che V_λ è descritto da un certo numero di incognite libere e scriveremo

$$(5.1.5) \quad m_g(\lambda) = \dim V_\lambda \quad .$$

Il numero naturale $m_g(\lambda)$ è chiamato *molteplicità geometrica* dell'autovalore λ . Per quanto visto nel capitolo sui sistemi lineari, sappiamo anche che

$$(5.1.6) \quad m_g(\lambda) = n - \rho(A - \lambda I) \quad .$$

In sostanza, $m_g(\lambda)$ coincide col numero di incognite libere del sistema omogeneo (5.1.2), come prescritto dal teorema di Rouché-Capelli. Il sottospazio V_λ è detto *autospazio* associato all'autovalore λ ; i suoi elementi non nulli sono invece chiamati *autovettori* associati all'autovalore λ . Infine, ricordiamo che ogni autovalore λ , essendo una radice di $P(\lambda)$, cioè di un polinomio di grado n , ha una sua molteplicità algebrica, denotata $m_a(\lambda)$.

Questo è il momento di eseguire alcuni esercizi per prendere confidenza con questi concetti.

▷ Esercizio 1 ◁

Testo

Sia

$$(5.1.7) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \quad .$$

- (i) Determinare gli autovalori di A ;
- (ii) Per ogni autovalore λ , indicare $m_a(\lambda)$ e $m_g(\lambda)$;
- (iii) Determinare una base degli eventuali autospazi.

Soluzione

(i) Il polinomio caratteristico è

$$\begin{aligned}
 (5.1.8) \quad P(\lambda) = |A - \lambda I| &= \left| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| \\
 &= \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \right| = (1-\lambda)^2 .
 \end{aligned}$$

Ne segue che A ha un unico autovalore $\lambda_1 = 1$.

(ii) Abbiamo

$$\begin{aligned}
 (5.1.9) \quad m_a(\lambda_1) &= 2 \quad , \quad m_g(\lambda_1) = n - \rho(A - \lambda_1 I) = \\
 &= 2 - \rho \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 2 - 1 = 1 .
 \end{aligned}$$

(iii) V_{λ_1} è definito come l'insieme delle soluzioni di

$$(5.1.10) \quad [A - \lambda_1 I] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} ,$$

cioè

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} .$$

Ora, $\dim V_{\lambda_1} = 1$, e un suo autovettore è $\{^t[1, 0]\}$. □

▷ Esercizio 2 ◁

Testo

Ripetere le domande dell'esercizio precedente, con

$$(5.1.11) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) .$$

Soluzione

(i) Il polinomio caratteristico è

$$\begin{aligned}
 (5.1.12) \quad P(\lambda) = |A - \lambda I| &= \left| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| \\
 &= \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \right| = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda(\lambda - 2) .
 \end{aligned}$$

Ne segue che A ha due autovalori, $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$.

(ii) è evidente che $m_a(\lambda_1) = 1$ e $m_a(\lambda_2) = 1$. Per quanto riguarda le molteplicità geometriche, abbiamo

$$(5.1.13) \quad \begin{aligned} m_g(\lambda_1) &= n - \rho(A - \lambda_1 I) = \\ &= 2 - \rho\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

e

$$(5.1.14) \quad \begin{aligned} m_g(\lambda_2) &= n - \rho(A - \lambda_2 I) = \\ &= 2 - \rho\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = 2 - 1 = 1 \quad . \end{aligned}$$

(iii) Studio degli autospazi: V_{λ_1} è definito da

$$(5.1.15) \quad [A - \lambda_1 I] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ,$$

cioè

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \quad .$$

Ora, $\dim V_{\lambda_1} = 1$, e un suo autovettore è

$$(5.1.16) \quad \{^t[1, -1]\} \quad .$$

In modo simile, si vede che V_{λ_2} è definito da

$$(5.1.17) \quad \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \quad ,$$

per cui si trova che un autovettore di V_{λ_2} è

$$(5.1.18) \quad \{^t[1, 1]\} \quad .$$

□

Prima di procedere oltre, riteniamo che sia utile enunciare la seguente proprietà generale:

Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e λ è un autovalore di A , allora

$$(5.1.19) \quad 1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) \quad .$$

In particolare, la (5.1.19) assicura che, se un autovalore, come nell'esercizio precedente, ha molteplicità algebrica 1, allora automaticamente anche la sua molteplicità geometrica vale 1.

▷ Esercizio 3 ◁

Testo

Sia

$$(5.1.20) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \quad .$$

Determinare gli autovalori di A .

Soluzione

Il polinomio caratteristico è

$$(5.1.21) \quad P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 \quad .$$

Poiché $P(\lambda)$ non ha radici reali, questa matrice non ha autovalori. □

Nell'esempio precedente, si può notare che $P(\lambda)$ ha 2 radici complesse non reali ($\pm i$): la diagonalizzazione di matrici in \mathbb{C} tiene conto di queste radici non reali, ma per i nostri scopi è sufficiente illustrare il caso reale.

▷ Esercizio 4 ◁

Testo

Sia

$$(5.1.22) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \quad .$$

Determinare gli autovalori di A , indicando per ciascuno di essi la molteplicità algebrica e quella geometrica.

Soluzione

Il polinomio caratteristico è

$$(5.1.23) \quad P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - \lambda - 1) \quad .$$

Quindi abbiamo 3 autovalori distinti:

$$(5.1.24) \quad \lambda_1 = 0 \quad , \quad \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad , \quad \lambda_3 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad .$$

Per ciascuno di essi la molteplicità algebrica è ovviamente 1, e così pure quella geometrica, per (5.1.19). □

▷ Esercizio 5 ◁

Testo

Sia

$$(5.1.25) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \in M_2(\mathbb{R}) \quad .$$

Determinare gli autovalori di A , indicando per ciascuno di essi la molteplicità algebrica e quella geometrica.

Soluzione

Si trova: $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 5$, entrambi con molteplicità algebrica e geometrica 1. □

5.2 Criterio di diagonalizzabilità

Attraverso la (5.0.5) abbiamo definito il concetto di matrice diagonalizzabile. Il seguente criterio consente di stabilire sotto quali condizioni una matrice è diagonalizzabile.

(5.2.1) **Criterio di diagonalizzabilità:** Sia $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$. Allora A è diagonalizzabile se e solo se sono soddisfatte le due proprietà seguenti:

(5.2.2) Tutte le radici di $P(\lambda)$ sono reali;

(5.2.3) per ognuna di esse (autovalore), si ha $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$.

Osservazione 1: Se $P(\lambda)$ ammette n radici reali distinte fra loro, allora A è diagonalizzabile. Infatti, in questo caso è ovvio che ogni autovalore abbia molteplicità algebrica 1, e quindi anche la sua molteplicità geometrica deve valere 1, per la (5.1.19).

Osservazione 2: Se A è diagonalizzabile, i numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ che compaiono nella matrice a destra in (5.0.5) sono precisamente gli autovalori di A , ognuno contato un numero di volte pari alla propria molteplicità. Della costruzione della matrice diagonalizzante P ci occuperemo nella sezione 5.3 sotto.

▷ Esercizio 6 ◁

Testo

Stabilire quali, fra le matrici degli esercizi da 1 a 5 sopra, sono diagonalizzabili.

Soluzione

La matrice (5.1.7) soddisfa la (7.2.2). Ma $m_a(\lambda_1) \neq m_g(\lambda_1)$, quindi questa matrice non è diagonalizzabile.

La matrice (5.1.11) è diagonalizzabile per l'osservazione 1, e lo stesso ragionamento si applica anche alle matrici (5.1.22) e (5.1.25).

Invece, la (5.1.20) non è diagonalizzabile perché non soddisfa la (7.2.2).

□

▷ Esercizio 7 ◁

Testo

Sia

$$(5.2.4) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \quad .$$

Stabilire se A è diagonalizzabile.

Soluzione

Il polinomio caratteristico è

$$(5.2.5) \quad P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} (2 - \lambda) & 0 & 0 \\ 6 & (1 - \lambda) & 6 \\ 0 & 0 & (2 - \lambda) \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2(1 - \lambda) \quad .$$

Quindi la (7.2.2) è soddisfatta, con due autovalori:

$$(5.2.6) \quad \lambda_1 = 2 \quad , \quad m_a(\lambda_1) = 2 \quad e \quad \lambda_2 = 1 \quad , \quad m_a(\lambda_2) = 1 \quad .$$

Per stabilire se A è diagonalizzabile, bisogna calcolare $m_g(\lambda_1)$ (Il calcolo di $m_g(\lambda_2)$ non è necessario, per la (5.1.19)). Abbiamo, da (5.1.6),

$$(5.2.7) \quad \begin{aligned} m_g(\lambda_1) &= n - \rho(A - \lambda_1 I) = \\ &= 3 - \rho \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 3 - 1 = 2 \end{aligned}$$

Quindi la (7.2.3) è soddisfatta e concludiamo che A è diagonalizzabile. □

▷ Esercizio 8 ◁

Testo

Sia

$$(5.2.8) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \quad .$$

Stabilire se A è diagonalizzabile.

Soluzione

Il polinomio caratteristico è

$$(5.2.9) \quad P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} (2 - \lambda) & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \lambda) & 2 \\ 0 & 2 & (1 - \lambda) \end{vmatrix} = (2 - \lambda) [(1 - \lambda)^2 - 4]$$

da cui si ricava:

$$(5.2.10) \quad \lambda_1 = 2 \quad , \quad \lambda_2 = 3 \quad e \quad \lambda_3 = -1 \quad .$$

Ora, A è diagonalizzabile per l'osservazione 1 sopra. □

In realtà, la diagonalizzabilità della matrice A dell'esercizio precedente poteva essere affermata senza calcoli, in virtù della proprietà generale seguente,

che approfondiremo successivamente, nella sezione 5.4 sotto.

Sia $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$. Allora

$$(5.2.11) \quad {}^t A = A \quad \Rightarrow \quad A \text{ diagonalizzabile .}$$

Detto a parole: **le matrici simmetriche sono diagonalizzabili.**

5.3 Diagonalizzazione

In questa sezione esaminiamo la costruzione della matrice diagonalizzante P in (5.0.5). Abbiamo già osservato in (??) che le colonne di P sono costituite da una base di \mathbb{R}^n formata da autovettori di A . Più precisamente, ad ogni autovalore λ_i dobbiamo far corrispondere un numero di colonne di P pari a $m_g(\lambda_i)$: queste colonne devono essere formate da autovettori di V_{λ_i} . Si noti che non è importante l'ordine degli autovalori, ma c'è corrispondenza tra l'ordine delle colonne di P e la successione degli autovalori che compaiono nella matrice diagonale a destra in (5.0.5): ad esempio, supponiamo di scegliere come λ_1 un autovalore con $m_g(\lambda_1) = 2$. Allora le prime due colonne di P saranno formate da una base di V_{λ_1} , e nella matrice diagonale a destra in (5.0.5) si avrà: $a_{11} = a_{22} = \lambda_1$. Poi, considerando tutti gli altri autovalori, si completa la costruzione di P .

▷ Esercizio 9 ◁

Testo

Sia A come in (5.1.11). Determinare, se possibile, $P \in M_2(\mathbb{R})$ tale che

$$P^{-1} \cdot A \cdot P$$

sia diagonale.

Soluzione

Abbiamo già verificato, nell'esercizio 6, che A è diagonalizzabile, quindi la P richiesta esiste. Dall'esercizio 2 sappiamo che $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$. Inoltre, da (5.1.16) e (5.1.18) vediamo che i corrispondenti autovettori sono rispettivamente $\vec{v}_1 = {}^t[1, -1]$ e $\vec{v}_2 = {}^t[1, 1]$. Quindi, posto

$$(5.3.1) \quad P = [\vec{v}_1, \vec{v}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

si ha

$$(5.3.2) \quad P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad .$$

Si noti che, se avessimo invertito l'ordine degli autovalori, ponendo

$$(5.3.3) \quad P = [\vec{v}_2, \vec{v}_1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

avremmo ottenuto

$$(5.3.4) \quad P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad .$$

□

▷ Esercizio 10 ◁

Testo

Sia A come in (5.2.4). Determinare, se possibile, $P \in M_3(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sia diagonale.

Soluzione

Abbiamo già verificato, nell'esercizio 7, che A è diagonalizzabile, quindi la P richiesta esiste. Da (5.2.6) abbiamo 2 autovalori $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$.

Studio di V_{λ_1} : l'autospazio V_{λ_1} è definito da

$$(5.3.5) \quad [A - \lambda_1 I] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ,$$

Questo sistema si riduce alla sola equazione significativa

$$(5.3.6) \quad 6x_1 - x_2 + 6x_3 = 0 \quad .$$

Dunque possiamo scrivere

$$(5.3.7) \quad V_{\lambda_1} = \{ {}^t[x_1, 6x_1 + 6x_3, x_3] \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_3 \in \mathbb{R} \} \quad .$$

Ora, $\dim V_{\lambda_1} = 2$ e in questo caso bisogna scegliere 2 autovettori NON PARALLELI fra loro. Si ottengono, ad esempio,

$$(5.3.8) \quad \vec{v}_1 = {}^t[1, 6, 0] \quad , \quad \vec{v}_2 = {}^t[0, 6, 1] \quad .$$

Questi 2 autovettori formeranno le prime due colonne di P .
 Studio di V_{λ_2} : l'autospazio V_{λ_2} è definito da

$$(5.3.9) \quad [A - \lambda_2 I] \cdot X = \vec{0} \quad .$$

Questo sistema è dato da

$$(5.3.10) \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ 6x_1 + 6x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad .$$

Sappiamo che solo 2 equazioni sono significative, ad esempio la prima e la terza. Ne segue che l'autovettore più semplice di questo autospazio è $\vec{v}_3 = {}^t[0, 1, 0]$. In conclusione, la matrice

$$(5.3.11) \quad P = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

soddisfa

$$(5.3.12) \quad P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad .$$

□

5.4 Matrici di rotazione e diagonalizzazione di matrici simmetriche

Una rotazione di un angolo θ può essere visualizzata mediante la Figura 5.1: $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ sono i versori degli assi del sistema $\vec{0}xy$, mentre $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$ sono i versori degli assi del sistema $\vec{0}x'y'$. Nel sistema $\vec{0}xy$ possiamo scrivere:

$$(5.4.1) \quad \begin{cases} \text{(i)} & \vec{e}_1 = {}^t[1, 0] \quad , \quad \vec{e}_2 = {}^t[0, 1] \quad ; \\ \text{(ii)} & \vec{e}'_1 = {}^t[\cos \theta, \sin \theta] \quad , \quad \vec{e}'_2 = {}^t[-\sin \theta, \cos \theta] \quad . \end{cases}$$

Esplicitiamo ora il legame tra le coordinate ${}^t[x, y]$ e le coordinate ${}^t[x', y']$. Usando la (5.4.1) (ii) nella seguente

$$(5.4.2) \quad x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = x'\vec{e}'_1 + y'\vec{e}'_2 \quad ,$$

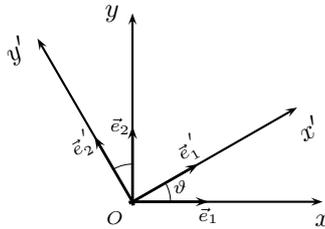


Figura 5.1 – Rotazione di un sistema di assi cartesiani in \mathbb{R}^2 .

troviamo

$$(5.4.3) \quad x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = (x' \cos \theta - y' \sin \theta)\vec{e}_1 + (x' \sin \theta + y' \cos \theta)\vec{e}_2 ,$$

da cui

$$(5.4.4) \quad \begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases} .$$

La trasformazione (5.4.4) può essere riscritta in forma matriciale come segue:

$$(5.4.5) \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

dove

$$(5.4.6) \quad P = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} .$$

La matrice P soddisfa le due proprietà seguenti:

$$(5.4.7) \quad \begin{cases} \text{(i)} & {}^t P = P^{-1} ; \\ \text{(ii)} & \det P = 1 . \end{cases}$$

In generale, una matrice $P \in M_n(\mathbb{R})$ che soddisfa la (5.4.7)(i) è detta *matrice ortogonale* (si scrive $P \in \mathcal{O}(n)$). Se una $P \in \mathcal{O}(n)$ soddisfa anche la (5.4.7)(ii) si dice che P è una *matrice ortogonale speciale* o, semplicemente, una *matrice di rotazione* (si scrive $P \in \mathcal{SO}(n)$).

Queste matrici occupano un ruolo centrale in molti problemi geometrici (si veda il capitolo 6) e, come adesso illustriamo, nella diagonalizzazione delle

matrici simmetriche. Infatti, vale la seguente proprietà:

Sia

$$(5.4.8) \quad A \in M_n(\mathbb{R}) \quad , \quad {}^tA = A \quad .$$

Allora esiste $P \in \mathcal{SO}(n)$ tale che

$$(5.4.9) \quad {}^tP \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad .$$

Noi utilizzeremo questa proprietà solo nel caso $n = 2$ quando studieremo le coniche. In questo caso, la costruzione di P avviene con un'unica differenza rispetto alla sezione 5.3: quando si scelgono gli autovettori, bisogna prenderli di lunghezza 1.

▷ Esercizio 11 ◁

Testo

Sia A come in (5.1.11). Determinare $P \in \mathcal{SO}(2)$ tale che

$$(5.4.10) \quad {}^tP \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad .$$

Soluzione

Poiché ${}^tA = A$, la P richiesta esiste. Prendendo i versori degli autovettori trovati in (5.1.16) e (5.1.18), otteniamo

$$(5.4.11) \quad P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad .$$

Con riferimento alla Figura 12.1 e a (5.4.6), possiamo dire che il sistema di riferimento individuato dagli autovettori è ottenuto da quello canonico mediante una rotazione di un angolo $\theta = \frac{7}{4}\pi$. □

Osservazione 3: Se, alla fine di questo processo di costruzione di $P \in \mathcal{SO}(2)$, si trovasse $\det P = -1$, sarebbe sufficiente scambiare tra loro le due colonne di P per ottenere anche la (5.4.7)(ii) (oppure, si potrebbe moltiplicare per -1 un'intera colonna).

▷ Esercizio 12 ◁

Testo

Sia A come in (5.2.8). Determinare $P \in \mathcal{SO}(3)$ tale che

$$(5.4.12) \quad {}^tP \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} .$$

Soluzione

Poiché ${}^tA = A$, la P richiesta esiste. Abbiamo trovato, in (5.2.10), 3 autovalori reali e distinti: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = -1$. Studiamone i rispettivi autospazi. V_{λ_1} è definito da

$$(5.4.13) \quad [A - \lambda_1 I] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ,$$

cioè

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} .$$

Un versore in V_{λ_1} è

$$(5.4.14) \quad \vec{v}_1 = {}^t[1, 0, 0] .$$

Per V_{λ_2} , il sistema lineare omogeneo associato è

$$(5.4.15) \quad \begin{cases} -x_1 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} .$$

Studiando (5.4.15), si conclude rapidamente che un autovettore di lunghezza 1 in V_{λ_2} è

$$(5.4.16) \quad \vec{v}_2 = {}^t\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] .$$

In modo analogo, lo studio di V_{λ_3} fornisce

$$(5.4.17) \quad \vec{v}_3 = {}^t[0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}] \quad .$$

Mettendo insieme (5.4.14), (5.4.16) e (5.4.17) concludiamo che

$$(5.4.18) \quad P = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

soddisfa

$$(5.4.19) \quad {}^tP \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad .$$

□

5.5 Esercizi di riepilogo

▷ Esercizio 13 ◁

Testo

Sia

$$(5.5.1) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \in M_3(\mathbb{R}) \quad .$$

Stabilire se A è diagonalizzabile.

Soluzione

Il polinomio caratteristico è

$$(5.5.2) \quad P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix} = -\lambda[\lambda^2 - 1] - \lambda = -\lambda^3 \quad .$$

Abbiamo quindi un unico autovalore $\lambda_1 = 0$, con $m_a(\lambda_1) = 3$. Ma $m_g(\lambda_1) = n - \rho(A) = 3 - 2 = 1 \neq m_a(\lambda_1)$, per cui A non è diagonalizzabile. □

▷ Esercizio 14 ◁

Testo

Sia

$$(5.5.3) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \quad .$$

Stabilire se A è diagonalizzabile e, in caso affermativo, determinare $P \in M_3(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ risulti diagonale.

Soluzione

Il polinomio caratteristico è

$$(5.5.4) \quad P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & (1 - \lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 (1 - \lambda) \quad .$$

Quindi la condizione (7.2.2) è soddisfatta con $\lambda_1 = 0$, $m_a(\lambda_1) = 2$, e $\lambda_2 = 1$, $m_a(\lambda_2) = 1$. Inoltre, $m_g(\lambda_1) = 3 - \rho(A) = 2 = m_a(\lambda_1)$, quindi possiamo concludere che A è diagonalizzabile.

Costruzione di P : le prime due colonne di P sono formate da due autovettori non paralleli dell'autospazio V_{λ_1} , definito da

$$(5.5.5) \quad A \cdot X = \vec{0}$$

che è equivalente alla sola equazione

$$x_3 = 0 \quad .$$

Allora possiamo scegliere semplicemente $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$.

L'altro autospazio, V_{λ_2} , è definito da

$$(5.5.6) \quad [A - \lambda_2 I] \cdot X = \vec{0}$$

che è equivalente al seguente sistema

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad .$$

Quindi

$$(5.5.7) \quad V_{\lambda_2} = \{ {}^t[x_3, x_3, x_3] \in \mathbb{R}^3 : x_3 \in \mathbb{R} \} \quad .$$

Ne segue che un autovettore di V_{λ_2} è $\{ {}^t[1, 1, 1] \}$. In conclusione, la matrice

$$(5.5.8) \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

soddisfa

$$(5.5.9) \quad P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad .$$

▷ Esercizio 15 ◁

□

Testo

Sia

$$(5.5.10) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \in M_3(\mathbb{R}) \quad .$$

Stabilire se A è diagonalizzabile.

Soluzione

Il polinomio caratteristico è

$$(5.5.11) \quad P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 + 1) \quad .$$

Poiché non tutte le radici di $P(\lambda)$ sono reali (abbiamo infatti le radici complesse coniugate $\pm i$), la prima condizione del criterio di diagonalizzabilità non è soddisfatta e quindi A non è diagonalizzabile.

□

▷ Esercizio 16 ◁

Testo

Sia

$$(5.5.12) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \in M_3(\mathbb{R}) \quad .$$

Stabilire se A è diagonalizzabile e, in caso affermativo, determinare $P \in M_3(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ risulti diagonale.

Soluzione

${}^tA = A$, quindi, per (5.2.11), A è diagonalizzabile. Per costruire P , iniziamo con il calcolo degli autovalori:

$$(5.5.13) \quad P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 1) \quad .$$

Quindi abbiamo tre autovalori reali e distinti

$$(5.5.14) \quad \lambda_1 = 0 \quad , \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 1 \quad .$$

Ognuno di essi ha quindi molteplicità algebrica e geometrica pari a 1. Ne segue che i tre autospazi associati agli autovalori in (5.5.14) hanno tutti dimensione uno. Il sistema lineare omogeneo che definisce V_{λ_1} è:

$$(5.5.15) \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \quad .$$

Quindi la corrispondente colonna di P è $\vec{v}_1 = {}^t[0, 0, 1]$. V_{λ_2} è definito da

$$(5.5.16) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad ,$$

che porta a $\vec{v}_2 = {}^t[1, -1, 0]$. Infine, V_{λ_3} è definito da

$$(5.5.17) \quad \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{cases}$$

che fornisce $\vec{v}_3 = {}^t[1, 1, 0]$. In conclusione,

$$(5.5.18) \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

soddisfa

$$(5.5.19) \quad P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad .$$

Notiamo che, nel contesto della sezione 5.4, avremmo potuto realizzare la (5.5.19) con una matrice ortogonale speciale. Più specificamente, avremmo trovato che

$$(5.5.20) \quad P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

soddisfa

$$(5.5.21) \quad {}^t P \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

□

▷ Esercizio 17 ◁

Testo (*)

Scrivere la relazione inversa delle (5.4.4).

Soluzione

Dato che (5.4.4) equivale a (5.4.5), deduciamo che

$$(5.5.22) \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Ora

$$(5.5.23) \quad P^{-1} = {}^t P = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} .$$

Sostituendo la (5.5.23) nella (5.5.22) e calcolando si ottiene

$$(5.5.24) \quad \begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' = x (-\sin \theta) + y \cos \theta \end{cases}$$

□

▷ Esercizio 18 ◁

Testo

Dire quale fra le seguenti matrici è diagonalizzabile:

$$(5.5.25) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} ;$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} ; \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} .$$

Soluzione (Calcoli omissi)

Solo A risulta diagonalizzabile. □

▷ Esercizio 19 ◁

Testo

Sia

$$(5.5.26) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) .$$

Stabilire se A è diagonalizzabile e, in caso affermativo, determinare $P \in M_3(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ risulti diagonale.

Soluzione

Si trova $\lambda_1 = 0$, con $m_a(\lambda_1) = 2 = m_g(\lambda_1)$; e $\lambda_2 = 1$, con $m_a(\lambda_2) = 1 = m_g(\lambda_2)$. Poi si costruisce

$$(5.5.27) \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

□

▷ Esercizio 20 ◁

Testo

Sia

$$(5.5.28) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) .$$

Determinare, se possibile, $P \in M_3(\mathbb{R})$ tale che

$$(5.5.29) \quad P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} .$$

Soluzione

Dato che $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 3$ risultano essere i tre autovalori (reali e distinti) di A , si conclude che la P richiesta esiste. Studiando i relativi autospazi si arriva a

$$(5.5.30) \quad P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 11 \\ 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} .$$

□

▷ Esercizio 21 ◁

Testo

Sia

$$(5.5.31) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) .$$

Stabilire se A è diagonalizzabile.

Soluzione

Si trova $\lambda_1 = 0$, con $m_a(\lambda_1) = 1$, e $\lambda_2 = 0$, con $m_a(\lambda_2) = 2$. Ma

$$(5.5.32) \quad \begin{aligned} m_g(\lambda_2) &= n - \rho(A - \lambda_2 I) = \\ &= 3 - \rho \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 3 - 2 = 1 , \end{aligned}$$

per cui A non è diagonalizzabile.

□

5.6 Considerazioni conclusive

Un'importante applicazione della teoria della diagonalizzazione consente uno studio geometrico completo delle coniche in \mathbb{R}^2 . In particolare, nel capitolo 6 vedremo che ogni conica non degenera equivale ad uno dei tre casi canonici (ellisse, iperbole, parabola), a condizione di individuare un'opportuna rotazione (eventualmente seguita da una traslazione) degli assi cartesiani di

riferimento. Questa rotazione viene appunto determinata *diagonalizzando una matrice simmetrica di ordine due associata alla conica*.

In molte situazioni di interesse matematico e fisico è necessario considerare la diagonalizzabilità di matrici $A \in M_n(\mathbb{C})$. In questo caso, l'unica sostanziale modifica rispetto alla teoria da noi illustrata è la seguente: sono autovalori tutte le radici del polinomio caratteristico (anche quelle complesse non reali), e la condizione di diagonalizzabilità si riduce alla sola richiesta $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$ per ogni autovalore λ .

Per approfondimenti sugli argomenti di questo capitolo citiamo Greco *et al.* [5], Abate [1], Betti [2] e Robbiano [8]. Concludiamo segnalando che le nozioni apprese attraverso lo studio dei capitoli 3, 4 e 5 risulteranno fondamentali per poter affrontare proficuamente lo studio dei tensori degli sforzi e delle deformazioni, usati in meccanica dei fluidi e in scienza delle costruzioni per definire lo stato tenso-deformativo in ogni punto di un determinato mezzo o struttura.

Capitolo 6

Coniche e quadriche

6.0 Introduzione

Una *conica* in \mathbb{R}^2 è il luogo di punti γ definito da un'equazione di secondo grado in x, y , cioè

$$(6.0.1) \quad \gamma : \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad ,$$

con l'ipotesi che a_{11}, a_{12}, a_{22} non siano tutti nulli. La matrice simmetrica

$$(6.0.2) \quad A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

è detta *matrice della conica* γ . La sua sottomatrice quadrata (anch'essa simmetrica)

$$(6.0.3) \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

è detta *matrice della parte quadratica di* γ . È facile verificare che l'equazione (6.0.1) è equivalente a

$$(6.0.4) \quad [x, y, 1] \cdot A' \cdot {}^t[x, y, 1] = 0 \quad .$$

Inoltre,

$$(6.0.5) \quad [x, y] \cdot A \cdot {}^t[x, y] = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

(in (6.0.4) e (6.0.5) \cdot indica il prodotto righe per colonne di matrici).

In questo capitolo mostreremo che le principali caratteristiche geometriche delle coniche possono essere determinate attraverso l'applicazione della teoria della diagonalizzazione alla matrice simmetrica A . Segnaliamo, per completezza culturale, che queste figure geometriche derivano il loro nome dal fatto che sono altresì caratterizzabili come le intersezioni, in \mathbb{R}^3 , tra un piano e il cono di equazione

$$(6.0.6) \quad z^2 = x^2 + y^2 \quad .$$

Ad illustrazione di ciò, si vedano la Figura 6.1 e la Figura 6.2.

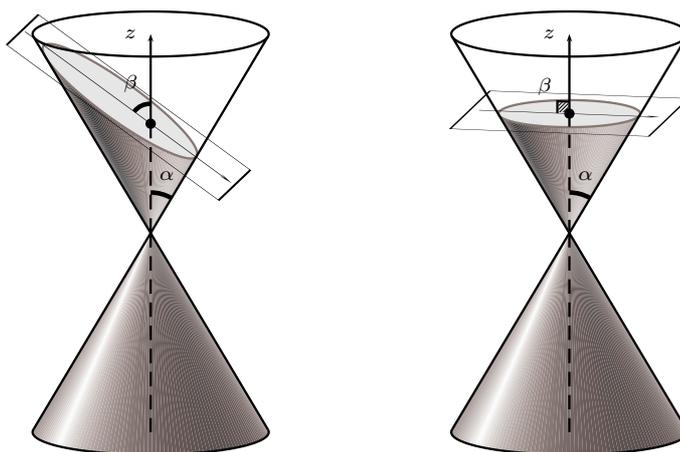


Figura 6.1 – L'ellisse ottenuta come sezione di un cono: $\alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ (a sinistra).
La circonferenza ottenuta come sezione di un cono: $\beta = \frac{\pi}{2}$ (a destra).

Le *quadriche* sono superfici in \mathbb{R}^3 definite da un'equazione di secondo grado in x, y, z (la (6.0.6) è un esempio di quadrica degenera). Per queste superfici è disponibile una teoria equivalente a quella che illustreremo per le coniche ma, dato che le matrici di rotazione in dimensione tre hanno un significato più complesso e meno intuitivo, non la tratteremo e ci limiteremo a descrivere le quadriche in forma canonica.

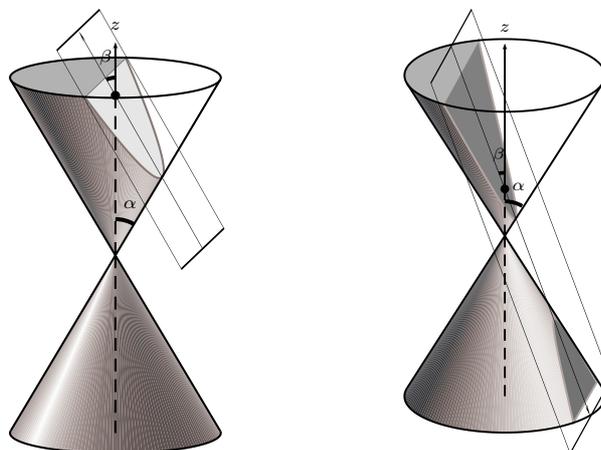


Figura 6.2 – La parabola ottenuta come sezione di un cono: $\beta = \alpha$ (a sinistra).
L'iperbole ottenuta come sezione di un cono: $0 < \beta < \alpha$ (a destra).

6.1 Cambiamenti di sistema di riferimento in \mathbb{R}^2

Una traslazione di assi (si veda la Figura 6.3) è semplicemente esprimibile mediante

$$(6.1.1) \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad ,$$

dove ${}^t[a, b]$ sono le coordinate di O' nel sistema Oxy .

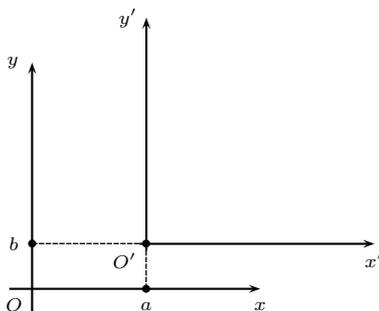


Figura 6.3 – Traslazione del sistema di riferimento.

Nel capitolo 5, cui rimandiamo per le notazioni e i dettagli, abbiamo imparato a descrivere le rotazioni di assi. In particolare, ricordiamo ora che l'espressione del cambio di coordinate del sistema Oxy , corrispondente ad una rotazione di un angolo θ in senso antiorario, è la seguente:

$$(6.1.2) \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad ,$$

dove P è la matrice di rotazione

$$(6.1.3) \quad P = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad .$$

Poiché $P^{-1} = {}^tP$, l'inversa di (6.1.2) è

$$(6.1.4) \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = {}^tP \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad .$$

Nello studio delle coniche può risultare necessario combinare insieme traslazioni e rotazioni: ciò dà luogo alle cosiddette roto-traslazioni, visualizzabili nella Figura 6.4.

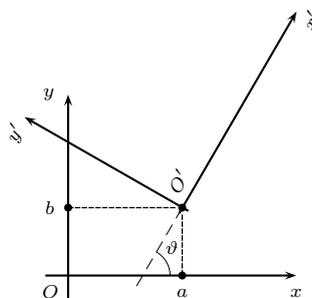


Figura 6.4 – Roto-traslazione.

In formule, la descrizione analitica della roto-traslazione della Figura 6.4 è:

$$(6.1.5) \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$(6.1.6) \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = {}^tP \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + {}^tP \cdot \begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix}$$

6.2 Generalità sulle coniche e caso $a_{12} = 0$

Le coniche, definite attraverso l'equazione (6.0.1) (oppure, (6.0.4)), si dividono in due sottofamiglie:

(6.2.1) Coniche *degeneri*, se $\det A' = 0$;

(6.2.2) Coniche *non degeneri*, se $\det A' \neq 0$.

Le coniche degeneri non presentano un vero interesse geometrico e possono essere studiate con semplici ragionamenti algebrici *ad hoc*, come illustrato nell'esercizio seguente:

▷ Esercizio 1 ◁

Testo

Studiare la conica γ definita da

$$(6.2.3) \quad x^2 + y^2 + 2xy - x - y = 0 \quad .$$

Soluzione

La matrice di γ è:

$$(6.2.4) \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \quad .$$

La matrice A' ha due colonne uguali, quindi $\det A' = 0$ e γ pertanto è degenera. Riscriviamo la (6.2.3) come

$$(6.2.5) \quad (x + y)^2 - (x + y) = 0$$

e, con un ulteriore passaggio,

$$(6.2.6) \quad (x + y)(x + y - 1) = 0 \quad .$$

Ora, da (6.2.6) è facile concludere che γ è costituita dall'unione di due rette parallele r_1 e r_2 , di equazioni rispettivamente

$$(6.2.7) \quad r_1 : x + y = 0; \quad r_2 : x + y - 1 = 0.$$

□

Altri casi degeneri che possono presentarsi sono:

$$(6.2.8) \quad \begin{array}{ll} \text{(i)} & x^2 = 0 ; \\ \text{(ii)} & x y = 0 ; \\ \text{(iii)} & x^2 + y^2 = 0 ; \\ \text{(iv)} & x^2 + 1 = 0 . \end{array}$$

In queste situazioni γ è rispettivamente: (i) una retta r (l'asse y) contata due volte; (ii) l'unione di due rette incidenti (gli assi); (iii) un punto (l'origine); (iv) l'insieme vuoto.

Una teoria sistematica per trattare lo studio delle coniche degeneri è disponibile, ma non presenta particolare interesse geometrico ed è pertanto omessa. Da ora in avanti ci occuperemo invece delle coniche *non* degeneri. In forma canonica, esse sono di tre tipi, di cui già conosciamo le caratteristiche geometriche: *ellisse, iperbole e parabola*.

(6.2.9) Il risultato principale nella teoria delle coniche consiste nel fatto che ogni conica non degenera è equivalente a una di queste tre, a condizione di operare una opportuna roto-traslazione.

Per illustrare il procedimento necessario conviene separare due casi: il caso $a_{12} = 0$, in cui è sufficiente una semplice traslazione; e il caso $a_{12} \neq 0$, in cui è necessario operare anche un'opportuna rotazione, determinabile usando la teoria della diagonalizzazione delle matrici simmetriche. Vediamo ora i dettagli.

(6.2.10) **Caso** $a_{12} = 0$. L'individuazione della traslazione opportuna avviene per via puramente algebrica, mediante il metodo di completamento dei quadrati che illustriamo attraverso l'esercizio seguente:

▷ Esercizio 2 ◁

Testo

Studiare la conica γ definita da

$$(6.2.11) \quad x^2 + 2y^2 - 2x - 8y + 8 = 0 \quad .$$

Soluzione

Per prima cosa, si verifica facilmente che $\det A' \neq 0$, per cui γ è non degenere. Ora, si riscrive la (6.2.11), aggiungendo e sottraendo quantità uguali con l'intento di formare dei quadrati:

$$(6.2.12) \quad (x^2 - 2x + 1) - 1 + 2(y^2 - 4y + 4) - 8 + 8 = 0$$

che equivale a

$$(6.2.13) \quad (x - 1)^2 + 2(y - 2)^2 = 1 \quad .$$

Da (6.2.13) si deduce immediatamente che l'opportuna traslazione cercata è

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad ,$$

cioè

$$(6.2.14) \quad \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y - 2 \end{cases} \quad .$$

Sostituendo la (6.2.14) nella (6.2.13) si conclude che l'equazione di γ , nel sistema di riferimento traslato $Ox'y'$, è

$$(6.2.15) \quad x'^2 + 2y'^2 = 1$$

o, ancora,

$$(6.2.16) \quad x'^2 + \frac{y'^2}{(1/\sqrt{2})^2} = 1$$

che (nel sistema $Ox'y'$) rappresenta un'ellisse canonica con semiassi $a = 1$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$. La situazione può essere agevolmente visualizzata attraverso la Figura 6.5.

□

6.3 Caso $a_{12} \neq 0$: rotazione degli assi e conclusioni

Prima di passare all'aspetto puramente analitico conviene visualizzare la situazione geometrica esaminando la Figura 6.6.

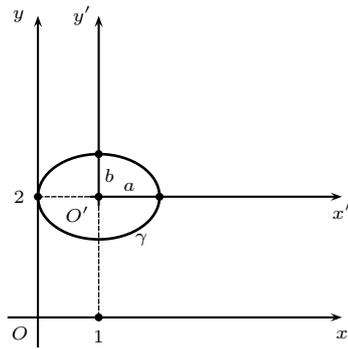


Figura 6.5 – Esempio di ellisse canonica in un sistema di riferimento traslato.

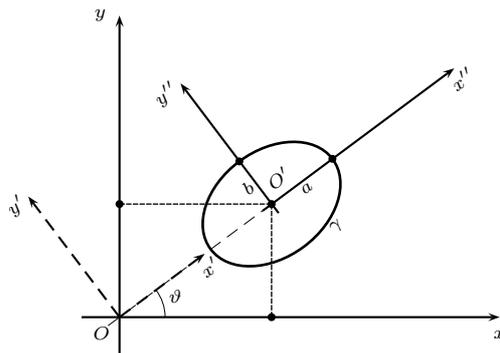


Figura 6.6 – Ellisse canonica in un sistema ruotato e traslato.

Si può pensare che l'ellisse γ di Figura 6.6 sia descritta da un'equazione come in (6.0.1), con $a_{12} \neq 0$. Ma, nel riferimento $O'x''y''$, l'equazione di γ sarà

$$(6.3.1) \quad \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1 \quad .$$

Il problema è quindi il seguente: individuare la roto-traslazione che consente di passare da (6.0.1) a (6.3.1). Per prima cosa bisogna individuare gli assi tratteggiati in Figura 6.6: ciò corrisponde a determinare il buon angolo di rotazione θ , in modo che si azzeri il coefficiente a_{12} . Analiticamente, ciò significa costruire la *matrice ortogonale speciale* P (vedi capitolo 5) che diagonalizza la matrice simmetrica A . Fatto questo, si concluderà poi individuando la traslazione necessaria come spiegato nell'analisi del caso $a_{12} = 0$.

Illustriamo ora più dettagliatamente i passi del procedimento. Partendo da A , costruiamo la matrice di rotazione $P \in \mathcal{SO}(2)$ tale che

$$(6.3.2) \quad {}^tP \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad ,$$

dove $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sono gli autovalori (reali, ma non necessariamente distinti) di A . Ora effettuiamo il cambio di coordinate (6.1.2), la cui versione trasposta (usando ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$) è

$$(6.3.3) \quad [x, y] = [x', y'] \cdot {}^tP \quad .$$

Sostituendo (6.1.2) e (6.3.3) nella (6.0.5) si ottiene che la parte quadratica dell'equazione diventa

$$(6.3.4) \quad [x', y'] \cdot {}^tP \cdot A \cdot P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = [x', y'] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \\ = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 \quad .$$

Completando poi la sostituzione si ottiene che ora la (6.0.1) equivale a:

$$(6.3.5) \quad \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a_{13}[\cos \theta x' - \sin \theta y'] + 2a_{23}[\sin \theta x' + \cos \theta y'] + a_{33} = 0 \quad .$$

Osserviamo che la (6.3.5) presenta $a_{12} = 0$: quindi si può completare lo studio col metodo di completamento dei quadrati che consente di determinare

l'eventuale traslazione necessaria.

Adesso è importante applicare il nostro lavoro teorico allo studio di un caso concreto.

▷ Esercizio 3 ◁

Testo

Studiare la conica γ definita da

$$(6.3.6) \quad 2x^2 + 4xy + 5y^2 + 4x + 13y - \frac{1}{4} = 0 \quad .$$

Soluzione

La matrice della conica γ è:

$$(6.3.7) \quad A' = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & \frac{13}{2} \\ 2 & \frac{13}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad .$$

Poiché $\det A' \neq 0$, γ è non degenera. Dato che $a_{12} = 2 \neq 0$, dobbiamo operare una rotazione di assi diagonalizzando la matrice della parte quadratica di γ , cioè

$$(6.3.8) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad .$$

Svolgendo i calcoli secondo il procedimento illustrato nel capitolo 12 si trova che gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$, e

$$(6.3.9) \quad {}^tP \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad ,$$

con

$$(6.3.10) \quad P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \quad .$$

Esplicitando il relativo cambio di coordinate (6.1.2) si ottiene

$$(6.3.11) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}[2x' + y'] \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}[-x' + 2y'] \end{cases} \quad .$$

Ora possiamo trasformare la (6.3.6) per esprimere γ in funzione delle coordinate x', y' . Senza calcoli, possiamo subito scrivere il risultato relativo alla parte quadratica, che è il seguente:

$$(6.3.12) \quad 2x^2 + 4xy + 5y^2 = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = x'^2 + 6y'^2 \quad .$$

Poi, usando (6.3.11) in (6.3.6), completiamo la trasformazione dell'equazione di γ ottenendo (verificarlo è utile)

$$(6.3.13) \quad x'^2 + 6y'^2 - \sqrt{5}x' + 6\sqrt{5}y' - \frac{1}{4} = 0 \quad .$$

Utilizzando ora il metodo di completamento dei quadrati in (6.3.13) possiamo determinare la traslazione conclusiva: l'equazione (6.3.13) di γ equivale a

$$(6.3.14) \quad \left[x' - \frac{\sqrt{5}}{2} \right]^2 + 6 \left[y' + \frac{\sqrt{5}}{2} \right]^2 = 9$$

o, ancora,

$$(6.3.15) \quad \frac{[x' - \frac{\sqrt{5}}{2}]^2}{3^2} + \frac{[y' + \frac{\sqrt{5}}{2}]^2}{(\sqrt{\frac{3}{2}})^2} = 1 \quad .$$

Ora si conclude introducendo le coordinate traslate

$$(6.3.16) \quad \begin{cases} x'' = x' - \frac{\sqrt{5}}{2} \\ y'' = y' + \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases} \quad .$$

Rispetto a queste coordinate l'equazione (6.3.15) di γ si presenta nella forma canonica richiesta:

$$(6.3.17) \quad \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1 \quad ,$$

con $a = 3$, $b = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Concludiamo questo esercizio osservando che la trasformazione che lega le coordinate x, y di partenza alle coordinate finali x'', y'' è la roto-traslazione

$$(6.3.18) \quad \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = {}^t P \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sqrt{5}/2 \\ -\sqrt{5}/2 \end{bmatrix} \quad ,$$

dove P è la matrice di rotazione (6.3.10).

□

▷ Esercizio 4 ◁

Testo

Studiare la conica γ definita da

$$(6.3.19) \quad 2x^2 - 4xy - y^2 - 4x + 10y - 13 = 0 \quad .$$

Soluzione (Traccia)

La conica γ è non degenere. Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$. La rotazione diagonalizzante risulta essere

$$(6.3.20) \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad .$$

L'equazione finale di γ è

$$(6.3.21) \quad \frac{x''^2}{2^2} - \frac{y''^2}{(\sqrt{6})^2} = 1 \quad ,$$

ottenuta dopo la traslazione

$$(6.3.22) \quad \begin{cases} x'' = x' - \frac{3}{\sqrt{5}} \\ y'' = y' - \frac{4}{\sqrt{5}} \end{cases} \quad .$$

Da (6.3.21) vediamo che γ è un'iperbole.

□

▷ Esercizio 5 ◁

Testo

Studiare la conica γ definita da

$$(6.3.23) \quad 9x^2 + 24xy + 16y^2 - 20x + 15y = 0 \quad .$$

Soluzione (Traccia)

La conica γ è non degenere e risulta essere una parabola di equazione

$$(6.3.24) \quad x'^2 + y' = 0 \quad ,$$

dove le coordinate x', y' sono legate alle coordinate x, y di partenza dalla rotazione

$$(6.3.25) \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} .$$

□

I metodi fin qui illustrati consentono uno studio completo di qualunque conica. D'altra parte, è giusto segnalare che, in molte situazioni pratiche, l'esplicitazione della roto-traslazione che conduce alla forma canonica di γ può richiedere calcoli anche lunghi e complessi. Quindi, se si vuole ottenere solo un numero più limitato di informazioni su γ si può tenere conto di quanto segue:

(6.3.26) Supponiamo $\det A' \neq 0$ (cioè, γ non degenera). Allora

- (i) $\det A > 0 \Rightarrow \gamma$ è un'ellisse;
- (ii) $\det A < 0 \Rightarrow \gamma$ è un'iperbole;
- (iii) $\det A = 0 \Rightarrow \gamma$ è una parabola.

Si noti che le (8.3.26) sono una semplice conseguenza del fatto che $\det A = \lambda_1 \lambda_2$.

6.4 Quadriche

Le quadriche sono superfici in \mathbb{R}^3 definite da un'equazione di secondo grado in x, y, z . Come per le coniche, è disponibile una teoria di riduzione a forma canonica basata sulla diagonalizzazione della matrice simmetrica, di ordine tre, associata alla parte quadratica dell'equazione. Concettualmente l'approccio è analogo a quello illustrato per le coniche e quindi omettiamo di descriverlo in dettaglio.

La forma canonica delle quadriche è una delle due seguenti ($\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$):

$$(6.4.1) \quad \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = \delta \quad ;$$

$$(6.4.2) \quad \alpha x^2 + \beta y^2 = 2\delta z \quad .$$

Se tutti i coefficienti in (6.4.1) o (6.4.2) sono non nulli, allora la quadrica è *non degenera*. Questa è la situazione geometricamente più interessante e ora presentiamo una breve illustrazione dei relativi casi, che sono:

$$(6.4.3) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (\text{ellissoide});$$

$$(6.4.4) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (\text{iperboloide a 1 falda});$$

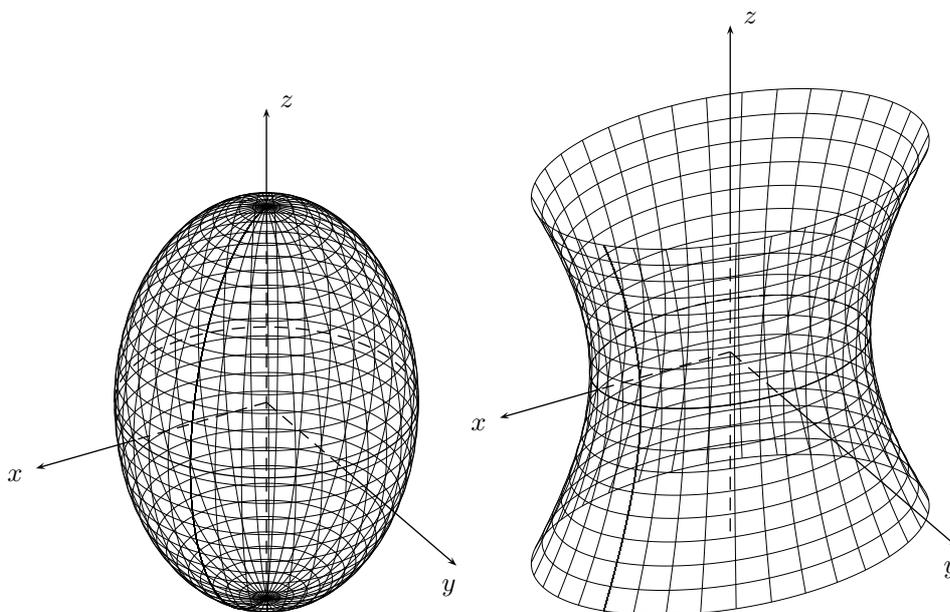


Figura 6.7 – Ellissoide di rotazione (*a sinistra*) e iperboloide a una falda (*a destra*).

Nella Figura 6.7 (*a sinistra*) è rappresentato un ellissoide di rotazione attorno all'asse z (con $a = b$ e $c > a$ in (6.4.3)). Nella Figura 6.7 (*a destra*) è invece raffigurata la regione di un iperboloide a una falda compresa tra due piani $z \pm h$. Si può notare che le intersezioni di questo iperboloide con i piani del tipo $z = c$ sono ellissi, mentre le sue intersezioni con i piani $x = c$ sono iperboli.

$$(6.4.5) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (\text{iperboloide a 2 falde}).$$

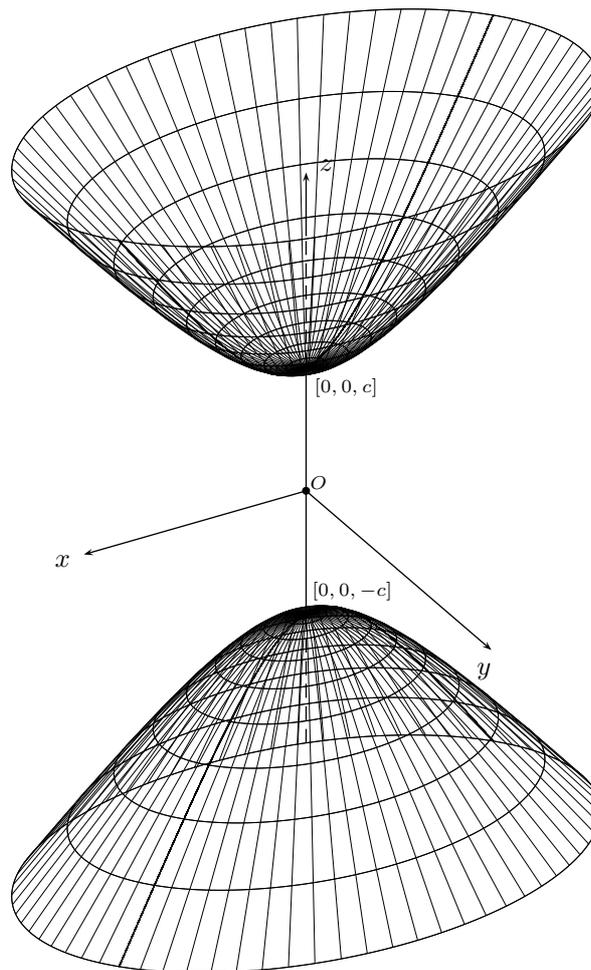


Figura 6.8 – Iperboloide a due falde.

L'iperboloide a due falde è invece unione di due superfici disgiunte, come visualizzabile in Figura 6.8.

E poi, da (6.4.2),

$$(6.4.6) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \quad (\text{paraboloide ellittico});$$

$$(6.4.7) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \quad (\text{paraboloide iperbolico}).$$

Il paraboloido ellittico è illustrato nella Figura 6.9 (*sopra*).

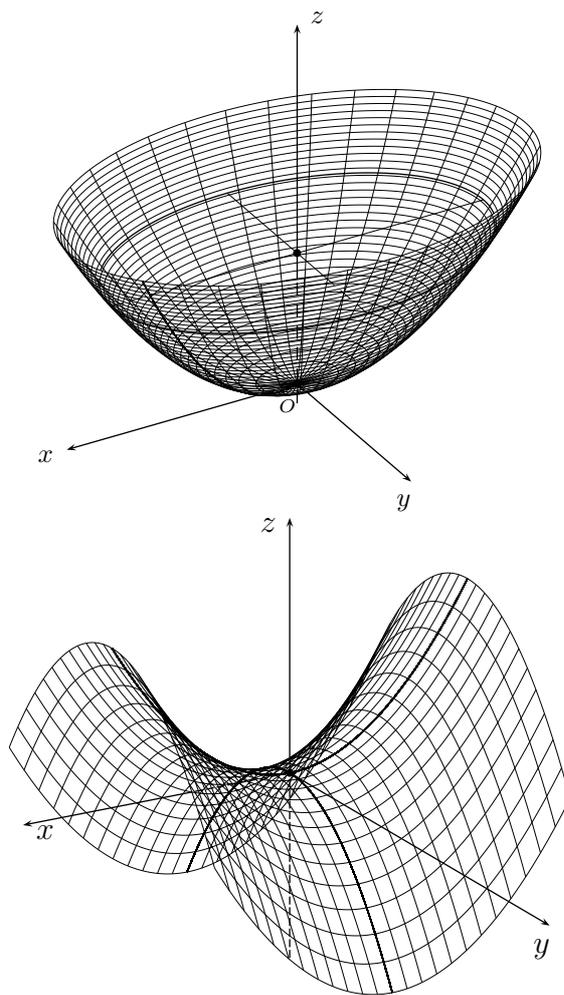


Figura 6.9 – Paraboloide ellittico (*sopra*) e paraboloide a sella (*sotto*).

Le intersezioni del paraboloido ellittico con i piani $z = c$ sono ellissi, mentre quelle con i piani del tipo $x = c$ oppure $y = c$ sono parabole.

Il paraboloido iperbolico, per la sua forma particolare, è anche detto *paraboloide a sella*. Una sua porzione è illustrata nella Figura 6.9 (*sotto*).

6.5 Considerazioni conclusive

Lo studio delle quadriche è, ovviamente, intimamente collegato a quello delle superfici in \mathbb{R}^3 : ad esempio, l'iperboloide ad una falda è un esempio di *superficie rigata* (si veda [4]). Gli argomenti di questo capitolo sono ampiamente illustrati, ad esempio, in [5], [6] e [3].

Bibliografia

- [1] M. Abate. *Geometria*. McGraw-Hill, 1996.
- [2] R. Betti. *Lezioni di geometria (1)*. Zanichelli, 2002.
- [3] R. Betti. *Lezioni di geometria (2)*. Zanichelli, 2002.
- [4] M.P. doCarmo. *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice Hall, 1976.
- [5] S. Greco e P. Valabrega. *Lezioni di geometria (1)*. Levrotto e Bella, 1999.
- [6] S. Greco e P. Valabrega. *Lezioni di geometria (2)*. Levrotto e Bella, 1999.
- [7] E. Giusti. *Piccola storia del calcolo infinitesimale dall'antichità al novecento*. Ist. Editoriali e Poligrafici, 2007.
- [8] L. Robbiano. *Algebra lineare: per tutti*. Springer Italia, 2006.

Indice analitico

- algoritmo di Gauss, 110
- area di un parallelogramma, 15
- argomento di z , 53
- assi cartesiani, 5
- autospazio, 123
- autovalori, 123
- autovettori, 123

- complemento algebrico, 77
- coniche, 144
- coniugato di $z \in \mathbb{C}$, 49
- coordinate di un punto, 5
- coordinate polari, 53

- determinante di matrici, 75
- diagonale principale, 67
- diagonalizzabilità (criterio di), 127
- diagonalizzazione (applicazioni), 149
- distanza tra due punti, 5
- disuguaglianza triangolare, 8
- divisione di polinomi, 58

- ellissoide, 157
- equazione di un piano, 19
- esponenziale complesso, 53

- fascio di piani, 20, 29
- forma trigonometrica, 53
- formula di de Moivre, 54

- incognite libere, 101, 104
- indice di riga o colonna, 66

- iperboloide, 157

- matrice, 65
- matrice antisimmetrica, 95
- matrice completa, 103
- matrice dei coefficienti, 99
- matrice di rotazione, 133
- matrice diagonale, 74, 121
- matrice identità, 74
- matrice inversa, 81
- matrice invertibile, 81
- matrice ortogonale, 133
- matrice quadrata di ordine n , 66
- matrice simmetrica, 69
- matrice trasposta, 68
- matrice triangolare, 67
- metodo di Cramer generalizzato, 109
- minore di ordine p , 84
- modulo di un numero complesso, 49
- molteplicità algebrica, 58, 123
- molteplicità geometrica, 123

- numeri complessi, 48

- operazioni elementari, 88
- orlare un minore, 86

- paraboloide, 158
- parte immaginaria di $z \in \mathbb{C}$, 49
- parte reale di $z \in \mathbb{C}$, 49
- polinomio, 57
- polinomio caratteristico, 123

prodotto di matrici, 71
 prodotto misto, 16
 prodotto scalare, 10, 71
 prodotto vettoriale, 14, 80
 proiezione di un vettore, 12
 punto medio, 5

 quadriche, 145, 156

 rango di una matrice, 84
 rappresentazione parametrica, 24
 regola del parallelogramma, 8
 retta in \mathbb{R}^3 , 22
 rette e sistemi lineari, 98
 rotazione degli assi, 132, 147
 roto-traslazioni, 147

 sfera, 21
 simbolo di Kronecker, 74
 sistema lineare, 98
 sistema lineare omogeneo, 99
 sistemi lineari di Cramer, 105
 sistemi lineari triangolari, 101
 somma di matrici, 69
 somma di vettori, 8
 sottomatrice, 84
 sottospazi vettoriali, 100
 spazio vettoriale, 99

 teorema di Binet, 91
 teorema di Kronecker, 87
 teorema di Laplace, 78
 teorema di Rouché-Capelli, 104
 teorema fondamentale dell'algebra, 59
 termini noti, 99
 terna destrorsa, 16
 trasformazioni elementari, 88
 traslazione degli assi, 146

 versore, 8

 vettore, 5
 vettore direzionale, 19
 vettore nullo, 7, 100
 volume di un parallelepipedo, 17