

# Indice

<b>1</b>	<b>Vettori e geometria analitica</b>	<b>4</b>
1.0	Scopo del capitolo . . . . .	4
1.1	Vettori . . . . .	4
1.2	Prodotto scalare, vettoriale e misto . . . . .	10
1.3	Geometria analitica in $\mathbb{R}^3$ . . . . .	18
1.4	Geometria analitica in $\mathbb{R}^2$ . . . . .	33
1.5	Esercizi di riepilogo . . . . .	38
1.6	Considerazioni conclusive . . . . .	47
<b>2</b>	<b>Numeri complessi</b>	<b>48</b>
2.0	Scopi del capitolo . . . . .	48
2.1	Definizioni introduttive e operazioni in $\mathbb{C}$ . . . . .	48
2.2	Forma trigonometrica dei numeri complessi e radici $n$ -esime . . . . .	52
2.3	Teorema fondamentale dell'algebra e molteplicità algebrica . . . . .	57
2.4	Esercizi di riepilogo . . . . .	60
2.5	Considerazioni conclusive . . . . .	63
<b>3</b>	<b>Matrici</b>	<b>65</b>
3.0	Scopi del capitolo . . . . .	65
3.1	Operazioni con le matrici . . . . .	66
3.2	Determinanti e matrice inversa . . . . .	75
3.3	Rango di una matrice . . . . .	84
3.4	Trasformazioni elementari su righe e colonne . . . . .	88
3.5	Esercizi di riepilogo . . . . .	91
3.6	Considerazioni conclusive . . . . .	97
<b>4</b>	<b>Elementi di teoria delle curve in <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>98</b>
4.0	Scopi del capitolo . . . . .	98

4.1	Ascissa curvilinea e concetto di curvatura . . . . .	99
4.2	Torsione e triedro di Frenet (*) . . . . .	109
4.3	Esercizi di riepilogo . . . . .	112
4.4	Considerazioni conclusive . . . . .	118
<b>5</b>	<b>Elementi di teoria delle superfici in <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>119</b>
5.0	Scopi del capitolo . . . . .	119
5.1	Superfici regolari in $\mathbb{R}^3$ . . . . .	119
5.2	Esercizi di riepilogo . . . . .	128
5.3	Considerazioni conclusive . . . . .	132
<b>6</b>	<b>Sistemi lineari</b>	<b>133</b>
6.0	Scopi del capitolo . . . . .	133
6.1	Spazi vettoriali, sottospazi e basi . . . . .	134
6.2	Teorema di Rouché-Capelli, sistemi triangolari e di Cramer . . . . .	139
6.3	Risoluzione di sistemi nel caso generale: metodo di Cramer generalizzato e algoritmo di Gauss . . . . .	147
6.4	Basi ortonormali e metodo di ortonormalizzazione di Gram- Schmidt(*) . . . . .	154
6.5	Esercizi di riepilogo . . . . .	157
6.6	Considerazioni conclusive . . . . .	162
<b>7</b>	<b>Diagonalizzazione</b>	<b>163</b>
7.0	Scopi del capitolo . . . . .	163
7.1	Autovalori e autovettori . . . . .	166
7.2	Criterio di diagonalizzabilità . . . . .	171
7.3	Diagonalizzazione . . . . .	174
7.4	Matrici di rotazione e diagonalizzazione di matrici simmetriche	176
7.5	Matrici simili, invarianti e decomposizione di matrici . . . . .	180
7.6	Esercizi di riepilogo . . . . .	184
7.7	Considerazioni conclusive . . . . .	192
<b>8</b>	<b>Coniche e quadriche</b>	<b>194</b>
8.0	Introduzione . . . . .	194
8.1	Cambiamenti di sistema di riferimento in $\mathbb{R}^2$ . . . . .	196
8.2	Generalità sulle coniche e caso $a_{12} = 0$ . . . . .	198
8.3	Caso $a_{12} \neq 0$ : rotazione degli assi e conclusioni . . . . .	200
8.4	Quadriche . . . . .	206

8.5 Considerazioni conclusive . . . . . 209

# Premessa

Questo file.pdf deriva da un lavoro di rielaborazione, aggiornamento e integrazione di alcune parti del libro:

## **Matematica per le Scuole di Architettura**

Autori: Andrea Ratto e Antonio Cazzani

Casa Editrice: Liguori (Napoli, 2010).

Codice ISBN: 978-88-207-5242-2

Codice eISBN: 978-88-207-5344-3

In particolare, vengono trattati **tutti** gli argomenti del programma del corso di Geometria e Algebra per le lauree triennali in Ingegneria Civile o Ambientale (solo per quanto riguarda alcune conoscenze preliminari, lo Studente dovrà far riferimento allo specifico file conoscenze-preliminari.pdf disponibile sulla pagina web del docente)

L'autore ha ritenuto importante realizzare una proposta specificamente finalizzata a fornire le conoscenze *operative* necessarie per ragionare autonomamente su concetti di geometria analitica e algebra lineare. La trattazione dei diversi argomenti è concepita in senso essenzialmente applicativo, per cui risulta mirata soprattutto allo sviluppo della capacità di utilizzare strumenti matematici piuttosto che all'approfondimento di questioni di natura teorica. Ogni capitolo prevede l'introduzione delle varie nozioni attraverso l'uso di esempi ed esercizi applicativi, interamente svolti, che consentono allo studente un apprendimento più rapido rispetto a quello derivante dalla lettura dei testi tradizionali di geometria e algebra lineare. D'altra parte, sottolineiamo che l'approccio proposto non rappresenta un riassunto delle varie opere esistenti, né vuole essere una raccolta di "ricette" per la risoluzione di

esercizi; al contrario, l'obiettivo è quello di sviluppare al massimo le capacità critiche e di ragionamento del lettore, nelle forme più adatte per acquisire padronanza consapevole di quei concetti matematici che risultano indispensabili per seguire con profitto corsi di statica, fisica tecnica, e poi scienza e tecnica delle costruzioni.

Alla fine di ogni argomento viene proposto un congruo numero di esercizi di riepilogo (con soluzione) per consentire, oltre ad una maggiore assimilazione dell'uso delle nozioni apprese, anche un'utile verifica del livello di apprendimento. Gli argomenti (o esercizi) contrassegnati da un (\*) sono leggermente più complessi e richiedono quindi uno studio attento. I capitoli sulla teoria delle curve e delle superfici sostanzialmente non saranno trattati e non faranno parte degli argomenti d'esame: sono comunque inseriti per colmare eventuali future necessità di approfondimento di questi temi che completano il programma di analisi matematica 2 del secondo anno.

A beneficio degli studenti interessati ad ulteriori approfondimenti, nella bibliografia finale abbiamo raccolto una serie di opere collegate agli argomenti trattati.

Ogni suggerimento dei lettori per migliorare questo testo ed eliminare eventuali errori o refusi è gradito.

Cagliari, 20 Novembre 2019

Andrea Ratto

# Capitolo 1

## Vettori e geometria analitica

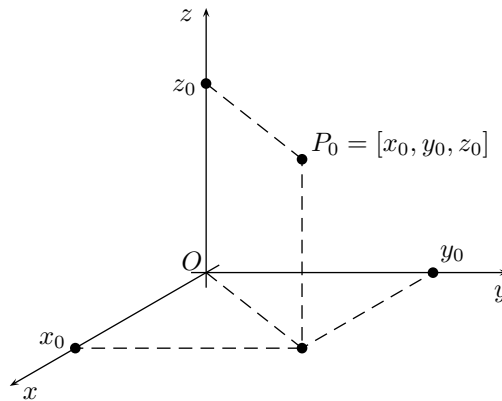
### 1.0 Scopo del capitolo

Nella prima parte del capitolo introduciamo il concetto di vettore. In fisica, grandezze fondamentali come forze, velocità, campi elettrici e magnetici vengono convenientemente descritte mediante l'uso dei vettori. Dal nostro punto di vista, i vettori e le loro operazioni ci consentiranno di capire come descrivere e studiare rette, piani e altre figure geometriche mediante l'utilizzo delle coordinate cartesiane (e della trigonometria): questo è l'oggetto della cosiddetta *geometria analitica*. Cercare di svolgere in modo consapevole gli esercizi di geometria analitica rappresenta uno dei metodi più utili per allenare la mente al ragionamento matematico. Inoltre, la motivazione geometrica di questi problemi li rende al tempo stesso concreti e suscettibili di futuri sviluppi più astratti nel contesto dell'algebra lineare che studieremo in seguito. Il lettore dovrebbe arrivare ad essere in grado di ricavare con i propri mezzi le formule più semplici (tipo distanza punto-piano, equazione di una retta parallela ad una data direzione e passante per un punto dato, etc.), e poi dovrà riuscire ad applicare con senso critico le formule più complesse, in modo da saperle all'occorrenza adattare alle proprie esigenze.

### 1.1 Vettori

L'ambiente geometrico più naturale nel quale introdurre il concetto di vettore è lo spazio euclideo tridimensionale (denotato  $\mathbb{R}^3$ ), in cui assumeremo che sia

fissato un sistema di assi cartesiani a due a due ortogonali, orientati come nella Figura 1.1.



**Figura 1.1** – Sistema di assi cartesiani in  $\mathbb{R}^3$ .

Si noti che, in questo contesto, abbiamo stabilito una corrispondenza biunivoca tra punti dello spazio  $\mathbb{R}^3$  e terne ordinate di numeri reali. Scrivendo  $P_0 = [x_0, y_0, z_0]$ , diremo che  $x_0, y_0, z_0$  sono le coordinate (cartesiane) di  $P_0$ . Come primo esempio di uso delle coordinate, possiamo generalizzare al nostro caso tridimensionale due semplici formule, già viste in  $\mathbb{R}^2$ , che consentono di calcolare rispettivamente la distanza tra due punti  $P_0, P_1$  e il punto medio  $M$  di un segmento  $\overline{P_0P_1}$ . Più precisamente, siano  $P_0 = [x_0, y_0, z_0]$  e  $P_1 = [x_1, y_1, z_1]$ : allora una doppia applicazione del teorema di Pitagora fornisce

$$(1.1.1) \quad \overline{P_0P_1} = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2} \quad .$$

Inoltre,

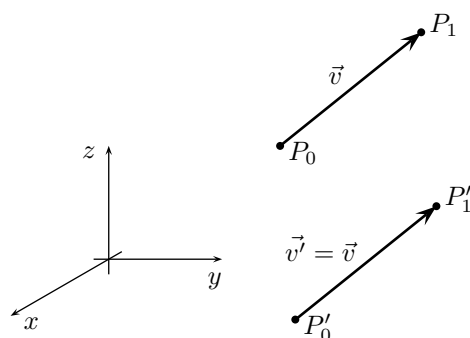
$$(1.1.2) \quad M = \left[ \frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{y_0 + y_1}{2}, \frac{z_0 + z_1}{2} \right] \quad .$$

Ora siamo nella condizione giusta per spiegare che cos'è un vettore. Il modo più intuitivo, anche se matematicamente non completamente rigoroso, per introdurre questo concetto è il seguente: diremo che un *vettore*  $\vec{v}$  è identificato mediante l'assegnazione di

1. una lunghezza;

2. una direzione;
3. un verso.

La maniera più semplice per rappresentare simultaneamente queste tre cose consiste nell'utilizzare un segmento orientato, come nella Figura 1.2.



**Figura 1.2** – Due rappresentazioni di un vettore  $\vec{v}$  in  $\mathbb{R}^3$ .

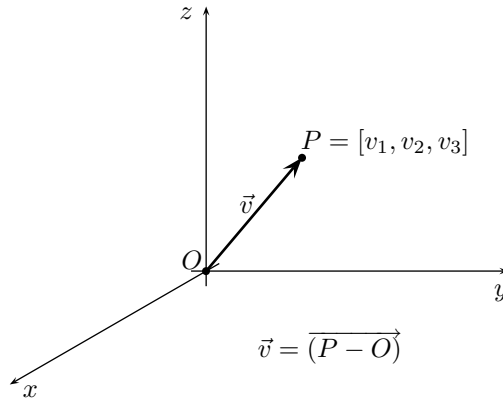
La lunghezza di  $\vec{v}$  coincide con la distanza fra i suoi estremi. La direzione di  $\vec{v}$  è quella della retta che passa per  $P_0$  e  $P_1$ . Il verso è quello indicato dalla freccia.

Una simbologia alternativa per  $\vec{v}$  è  $\overrightarrow{(P_1 - P_0)}$ .  $P_0$  è detto *punto di applicazione* del vettore. A questo punto bisogna fare un'osservazione: se, come in Figura 1.2, consideriamo un segmento orientato  $\overrightarrow{(P'_1 - P'_0)}$  ottenuto da  $\overrightarrow{(P_1 - P_0)}$  mediante traslazione rigida, ci rendiamo conto subito che  $\overrightarrow{(P'_1 - P'_0)}$  e  $\overrightarrow{(P_1 - P_0)}$  hanno uguale lunghezza, direzione e verso. In altre parole, essi sono *due diverse rappresentazioni dello stesso vettore*  $\vec{v}$ . Allora, per descrivere nel modo più semplice possibile le operazioni con i vettori, converrà da ora in avanti fissare l'origine  $O$  come punto di applicazione dei vettori, come in Figura 1.3.

In particolare, è importante osservare che, così facendo, le coordinate di  $\overrightarrow{(P_1 - P_0)}$  sono date da  $[x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0]$ , dove  $[x_i, y_i, z_i]$  sono le coordinate di  $P_i, i = 0, 1$ . Questo spiega anche la simbologia  $\overrightarrow{(P_1 - P_0)}$  (si legge  $P_1$  meno  $P_0$ ) per il vettore che va da  $P_0$  a  $P_1$  come in Figura 1.2.

La situazione di Figura 1.3 determina una corrispondenza biunivoca tra punti  $P$  dello spazio,  $P \neq O$ , e vettori.





**Figura 1.3** – Rappresentazione di un vettore  $\vec{v}$  uscente da  $O$ .

Per completare questa corrispondenza, oltre che per motivi di natura algebrica e fisica, conviene introdurre un vettore anomalo, che chiameremo *vettore nullo* e identificheremo con l'origine  $O = [0, 0, 0]$ . Il vettore nullo, anche denotato  $\vec{0}$ , ha lunghezza zero, direzione e verso non precisati. Tornando al discorso generale identifichiamo dunque un vettore  $\vec{v}$  con le coordinate del suo estremo  $P$ : di solito, scriveremo  $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ .

La lunghezza di  $\vec{v}$  (detta anche modulo) si indica  $|\vec{v}|$  e, in funzione delle sue coordinate, è espressa da

$$(1.1.3) \quad |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \quad .$$

Le prime operazioni che possiamo definire sono la somma di due vettori e la moltiplicazione di un vettore per un numero reale.

Siano  $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ ,  $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3]$  due vettori, e sia  $\lambda \in \mathbb{R}$ : definiamo

$$(1.1.4) \quad \vec{u} + \vec{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3] \quad ;$$

$$(1.1.5) \quad \lambda \vec{v} = [\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda v_3] \quad .$$

Si può notare che, se  $\lambda \neq 0$ ,  $\lambda \vec{v}$  ha la stessa direzione di  $\vec{v}$  e verso coincidente con quello di  $\vec{v}$  se e solo se  $\lambda > 0$ .

Inoltre, usando (1.1), è immediato verificare che

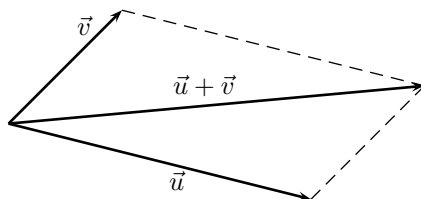
$$|\lambda \vec{v}| = |\lambda| |\vec{v}| \quad .$$

---

---

**Osservazione 1:** Dato che  $\lambda$  e  $\vec{v}$  sono un numero reale e un vettore,  $|\lambda|$  e  $|\vec{v}|$  indicano rispettivamente il valore assoluto di  $\lambda$  e il modulo (o lunghezza) di  $\vec{v}$ . In certi contesti di algebra lineare può diventare necessario moltiplicare un vettore per un  $\lambda \in K$ , dove  $K$  è un campo di numeri non necessariamente coincidente con  $\mathbb{R}$  (ad esempio,  $K = \mathbb{C}$ , i numeri complessi che studieremo nel prossimo capitolo). Allora, per prepararsi a questa situazione, si usa riferirsi a  $\lambda$  chiamandolo uno *scalare*, anche se nell'ambito di questo capitolo avremo esclusivamente a che fare con  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Anche la somma (1.1.4) ha un importante significato geometrico, illustrato nella Figura 1.4.



**Figura 1.4** – Somma di due vettori: la regola del parallelogramma.

La Figura 1.4 ci spiega che, se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  non sono allineati, allora  $\vec{u} + \vec{v}$  coincide con la diagonale del parallelogramma da essi individuato. Inoltre, considerando uno dei due triangoli in cui la diagonale divide il parallelogramma, vediamo che l'intuizione geometrica supporta la validità della seguente disuguaglianza

$$(1.1.6) \quad |\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}| \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \quad ,$$

detta, appunto, *disuguaglianza triangolare* (si noti che l'uguaglianza ha luogo in (1.1.6) se e solo se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  hanno la stessa direzione e lo stesso verso).

---

---

**Definizione 1:** Diciamo che un vettore  $\vec{v}$  è un *versore* se  $|\vec{v}| = 1$ .

---

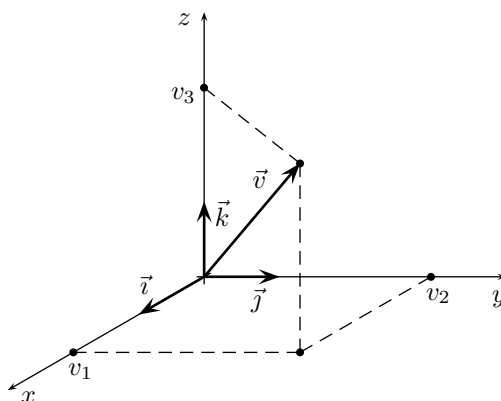
---

---

**Esempio 1:** Siano  $\vec{i} = [1, 0, 0]$ ,  $\vec{j} = [0, 1, 0]$  e  $\vec{k} = [0, 0, 1]$ . Questi tre versori sono detti versori, rispettivamente, dell'asse  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Notiamo che ogni vettore  $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$  può essere riscritto, usando le (1.1.4) e (1.1.5), come

$$(1.1.7) \quad \vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k} \quad .$$

Ciò evidenzia anche il significato di  $v_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , come componenti di  $\vec{v}$  lungo i tre assi, come si può anche vedere nella Figura 1.5.



**Figura 1.5** – Componenti di un vettore.

Una scrittura del tipo (1.1.7) si chiama *combinazione lineare* di  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$ . Anticipando un concetto che riprenderemo al momento dello studio dei cosiddetti sottospazi vettoriali, la proprietà che ogni vettore si scriva in modo univoco come in (1.1.7) si esprime dicendo che  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$  sono una *base* di  $\mathbb{R}^3$ .

---

▷ Esercizio 1 ◁

**Testo**

Sia  $\vec{v} = [2, 2\sqrt{5}, 5]$ . Determinare un versore  $\vec{w}$  parallelo a  $\vec{v}$ .

**Soluzione**

Il parallelismo si impone richiedendo che  $\vec{w}$  sia del tipo

$$(1.1.8) \quad \vec{w} = \lambda\vec{v} = [2\lambda, 2\sqrt{5}\lambda, 5\lambda] \quad .$$

Poi, si deve avere  $|\vec{w}| = 1$ , cioè

$$(1.1.9) \quad \sqrt{(2\lambda)^2 + (2\sqrt{5}\lambda)^2 + (5\lambda)^2} = 1$$

che equivale a

$$(1.1.10) \quad 49\lambda^2 = 1 \quad ,$$

da cui  $\lambda = \pm\frac{1}{7}$ . Ne segue che

$$\vec{w} = \left[ \frac{2}{7}, \frac{2\sqrt{5}}{7}, \frac{5}{7} \right]$$

oppure

$$\vec{w} = \left[ -\frac{2}{7}, -\frac{2\sqrt{5}}{7}, -\frac{5}{7} \right] \quad .$$

□

Il calcolo dell'esercizio precedente può chiaramente essere generalizzato: se  $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3] \neq \vec{0}$ , allora

$$\vec{w} = \pm \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v} \quad .$$

In particolare, si usa indicare

$$(1.1.11) \quad \text{vers}(\vec{v}) = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \quad .$$

In parole,  $\text{vers}(\vec{v})$  è quel vettore che ha modulo 1 e direzione e verso coincidenti con quelli di  $\vec{v}$ .

## 1.2 Prodotto scalare, vettoriale e misto

---

**Definizione 2:** Siano  $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3]$  e  $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$  due vettori. Il loro *prodotto scalare*, denotato  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , è definito da

$$(1.2.1) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \quad \left( \sum_{i=1}^3 u_i v_i \right) \quad .$$

---

È immediato notare che

$$\begin{aligned}(1.2.2) \quad & \vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 \\ & \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \\ & (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

La proprietà fondamentale del prodotto scalare (che non dimostriamo) è

$$(1.2.3) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta ,$$

dove abbiamo indicato con  $\theta$  l'angolo formato da  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , con  $0 \leq \theta \leq \pi$ . In particolare, deduciamo da (1.2.3) che, se  $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ , allora

$$(1.2.4) \quad \vec{u} \perp \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

dove  $\perp$  indica che  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  sono tra loro ortogonali.

▷ Esercizio 2 ◁

**Testo**

Siano  $\vec{u} = [1, -2, 4]$  e  $\vec{v} = [2, 3, 5]$ .

- (i) Calcolare  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ;
- (ii) Calcolare l'angolo  $\theta$  formato da  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

**Soluzione**

- (i)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 16$$

direttamente da (1.2.1).

- (ii) Poiché  $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ , ricaviamo da (1.2.3)

$$(1.2.5) \quad \cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} .$$

Ora calcoliamo

$$(1.2.6) \quad |\vec{u}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{21} , \quad |\vec{v}| = \sqrt{38} .$$

Sostituendo la (1.2.6) e il risultato di (i) in (1.2.5), troviamo

$$(1.2.7) \quad \cos \theta = \frac{16}{\sqrt{21}\sqrt{38}}$$

da cui, applicando la funzione arccos (l'inversa del coseno), concludiamo che

$$(1.2.8) \quad \theta = \arccos\left(\frac{16}{\sqrt{21}\sqrt{38}}\right) \cong 0.97 \text{ radianti} \quad ,$$

dove l'ultima approssimazione si ottiene mediante l'uso di una comune calcolatrice tascabile.  $\square$

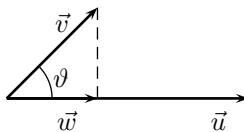
▷ Esercizio 3 ◁

**Testo**

Siano  $\vec{v}, \vec{u}$  due vettori non nulli. Determinare il vettore  $\vec{w}$  proiezione di  $\vec{v}$  lungo  $\vec{u}$ .

**Soluzione**

Per capire meglio il testo di questo esercizio possiamo aiutarci rappresentando la situazione come nella Figura 1.6.

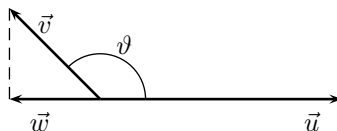


**Figura 1.6** – Proiezione di un vettore  $\vec{v}$  lungo un altro vettore  $\vec{u}$ : caso  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ .

In questa rappresentazione vediamo che  $\vec{w}$  ha direzione e verso come  $\text{vers}(\vec{u})$  e  $|\vec{w}| = |\vec{v}| \cos \theta$ . Quindi

$$(1.2.9) \quad \vec{w} = (\vec{v} \cdot \text{vers}(\vec{u})) \text{vers}(\vec{u}) = \frac{(\vec{v} \cdot \vec{u})}{|\vec{u}|^2} \vec{u} \quad .$$

Nel caso di Figura 1.7, abbiamo invece che  $\vec{w}$  ha direzione e verso come  $-\text{vers}(\vec{u})$ , e  $|\vec{w}| = |\vec{v}| \cos(\pi - \theta)$ . Poiché  $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$ , abbiamo ancora come soluzione



**Figura 1.7** – Proiezione di un vettore  $\vec{v}$  lungo un altro vettore  $\vec{u}$ : caso  $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ .

la (1.2.9) che, quindi, risulta essere la soluzione dell'esercizio qualunque sia la

posizione reciproca dei due vettori. □

▷ Esercizio 4 ◁

**Testo**

Siano  $\vec{v} = [1, 1, 2]$ ,  $\vec{u} = [-1, 3, 4]$ . Determinare il vettore  $\vec{w}$  proiezione di  $\vec{v}$  lungo  $\vec{u}$ .

**Soluzione**

Dalla (1.2.9),

$$\vec{w} = \left( \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} \right) \vec{u} = \frac{10}{26} \cdot [-1, 3, 4] = \left[ -\frac{5}{13}, \frac{15}{13}, \frac{20}{13} \right] .$$

□

Allo stesso modo possiamo proiettare lungo una retta orientata. Infatti,

▷ Esercizio 5 ◁

**Testo**

Sia  $\vec{v} = [1, 4, 6]$ . Determinare il vettore  $\vec{w}$  proiezione di  $\vec{v}$  lungo l'asse  $y$ .

**Soluzione**

Sempre dalla (1.2.9), con  $\vec{u} = \vec{j}$ ,

$$\vec{w} = (\vec{v} \cdot \vec{j}) \vec{j} = 4\vec{j} = [0, 4, 0] .$$

□

---

---

**Osservazione 2:** Segnaliamo che, in altri testi di possibile consultazione, il prodotto scalare può essere indicato con la simbologia seguente:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle .$$

La terminologia prodotto scalare di due vettori suggerisce il fatto che il risultato dell'operazione è un numero reale, cioè uno scalare. Invece il prodotto vettoriale di due vettori, che vedremo tra poco, ha come risultato un vettore.

---

---

---

**Definizione 3:** Siano  $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3]$ ,  $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ . Il loro *prodotto vettoriale* (indicato  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ , oppure  $\vec{u} \times \vec{v}$ ) è il vettore definito da

$$(1.2.10) \quad \vec{u} \wedge \vec{v} = [u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1] \quad .$$


---

Questa definizione non stimola alcuna intuizione e quindi, in prima istanza, è solo importante che il lettore si abitui ad utilizzare la (1.2.10). Come vedremo nel capitolo 3, un modo semplice per ricostruire la (1.2.10) si basa sulla nozione di *determinante* di una matrice di ordine 3 (si veda (3.2.24)).

▷ Esercizio 6 ◁

**Testo**

Siano  $\vec{u} = [1, 2, 1]$ ,  $\vec{v} = [6, -4, 1]$ . Calcolare  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ .

**Soluzione**

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = [2 \cdot 1 - 1 \cdot (-4), 1 \cdot 6 - 1 \cdot 1, 1 \cdot (-4) - 2 \cdot 6] = [6, 5, -16] \quad .$$

□

▷ Esercizio 7 ◁

**Testo**

Calcolare  $\vec{i} \wedge \vec{j}$ ,  $\vec{j} \wedge \vec{k}$ ,  $\vec{k} \wedge \vec{i}$ .

**Soluzione**

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}; \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}; \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}.$$

□

Il prodotto vettoriale ha alcune proprietà algebriche e geometriche di grande importanza. Più precisamente, dal punto di vista algebrico valgono le seguenti uguaglianze:

$$(1.2.11) \quad \begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= -(\vec{v} \wedge \vec{u}) && \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3; \\ \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) &= (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w}) && \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3; \\ (\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} &= \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{u} \wedge (\lambda \vec{v}) && \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Queste proprietà non sono di difficile dimostrazione: il lettore dovrebbe riuscire a verificarle confrontando, per ognuna di esse, l'espressione a sinistra con quella a destra del simbolo di uguaglianza, dopo aver applicato la (1.2.10).



Per quanto riguarda invece gli aspetti geometrici, indicando ancora con  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) l'angolo compreso tra  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , si ha:

(1.2.12)

(i)  $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta$  ;

(ii) Se  $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$ , allora  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  è ortogonale al piano individuato da  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ ;

(iii) Se  $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$ , allora i tre vettori  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}\}$  formano una terna destrorsa.

La dimostrazione matematica completa delle (2.2.12) non è elementare e perciò è omessa.

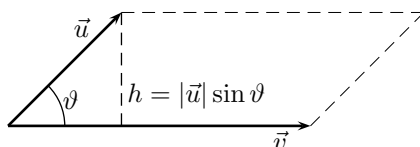
Però alcuni commenti sono ora molto importanti: dalla (1.2.12)(i) si deduce che, se  $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ , allora

(1.2.13)  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u} \parallel \vec{v}$

(il simbolo  $\parallel$  indica parallelismo tra  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ ). Inoltre, se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  non sono paralleli, la (1.2.12)(i) dice anche che

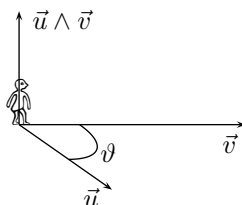
(1.2.14)  $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = \text{area del parallelogramma individuato da } \vec{u} \text{ e } \vec{v}.$

Per capire quest'ultima formula, è sufficiente guardare la Figura 1.8 e ricordarsi che l'area di un parallelogramma si ottiene moltiplicando la base per l'altezza.



**Figura 1.8** – L'area di un parallelogramma espressa mediante  $|\vec{u} \wedge \vec{v}|$ .

Se  $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$ , allora sappiamo che  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  non sono paralleli e quindi esiste un unico piano che contiene entrambi. La (1.2.12)(ii) ci dice che  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  ha direzione perpendicolare a questo piano, la qual cosa risulterà veramente molto utile nelle successive sezioni che dedicheremo alla geometria analitica.



**Figura 1.9** – Terna destrorsa.

La (1.2.12)(iii) sostanzialmente ci dà un'informazione sul verso di  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ : in pratica, terna destrorsa significa che l'omino di Figura 1.9 vede in senso antiorario  $\vec{u}$  andare a sovrapporsi su  $\vec{v}$  muovendosi nell'angolo  $\theta$ .

Intuitivamente, si può pensare che una terna destrorsa sia una terna orientata come gli assi di riferimento di Figura 1.1. Segnaliamo però che una formalizzazione rigorosa del concetto di orientazione è matematicamente troppo complessa per questo livello di trattazione, perciò è omessa.

Concludiamo questo paragrafo illustrando il prodotto misto di tre vettori e le sue proprietà.

**Definizione 4:** Siano  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  tre vettori. Allora il loro *prodotto misto* è

$$(1.2.15) \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) \quad (\in \mathbb{R}) .$$

▷ Esercizio 8 ◁

**Testo**

Siano  $\vec{u} = [2, 1, 0], \vec{v} = [3, 1, 4], \vec{w} = [-1, 3, 2]$ . Calcolare  $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$ .

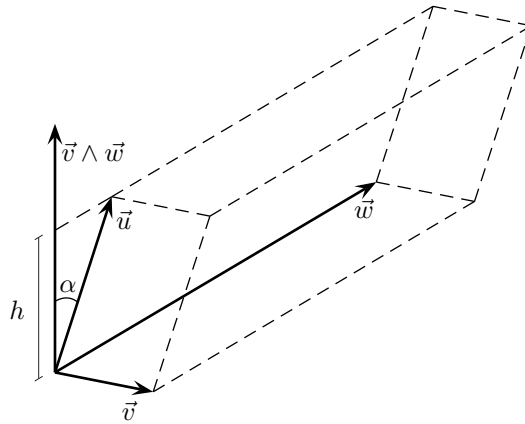
**Soluzione**

Si calcola  $\vec{v} \wedge \vec{w} = [-10, -10, 10]$ . Poi

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = [2, 1, 0] \cdot [-10, -10, 10] = -20 - 10 + 0 = -30 .$$

□

Geometricamente, il valore assoluto di  $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$  rappresenta (quando è diverso da zero) il volume del parallelepipedo individuato da  $\vec{u}, \vec{v}$  e  $\vec{w}$ . Ciò può essere capito mediante la Figura 1.10.



**Figura 1.10** – Volume del parallelepipedo individuato da tre vettori.

L'altezza del parallelepipedo è  $h$ . Indicando con  $\alpha$  l'angolo tra  $(\vec{v} \wedge \vec{w})$  e  $\vec{u}$ , si ha

$$(1.2.16) \quad h = |\vec{u}| |\cos \alpha|$$

Il valore assoluto  $|\cos \alpha|$  è necessario perché, in generale, può capitare che sia  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Poiché il volume del parallelepipedo si calcola come area di base per altezza, ed essendo l'area di base pari a  $|\vec{v} \wedge \vec{w}|$  per la (1.2.14), abbiamo

$$(1.2.17) \quad \text{Volume} = |\vec{v} \wedge \vec{w}| h = |\vec{v} \wedge \vec{w}| |\vec{u} \cos \alpha| = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})|$$

che ci dice, appunto, che il volume coincide con il valore assoluto del prodotto misto. I casi in cui il prodotto misto è nullo corrispondono alla situazione in cui i tre vettori sono complanari (nel qual caso si ha un parallelepipedo degenere con volume nullo).

▷ Esercizio 9 ◁

**Testo**

Calcolare il volume del parallelepipedo individuato da  $\vec{u} = [1, 2, 0]$ ,  $\vec{v} = [1, 1, 1]$ ,  $\vec{w} = [-1, 0, 1]$ .

**Soluzione**

$$\text{Volume} = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})| = |-3| = 3. \quad \square$$

---

---

**Osservazione 3:** Nell'esercizio precedente un volume risulta espresso mediante uno scalare invece che come quantità in  $\text{m}^3$ ,  $\text{cm}^3$  o altre simili unità di misura. In realtà, questo discorso si applica anche alle lunghezze e alle aree di cui abbiamo parlato sinora: semplicemente, si deve notare che nel sistema di riferimento cartesiano di Figura 1.1 sono implicitamente fissate unità di misura lungo gli assi (ad esempio, centimetri), e tutte le aree o i volumi risultano allora esprimibili nella conseguente corretta unità di misura (ad esempio, in  $\text{cm}^2$  o  $\text{cm}^3$ , etc.).

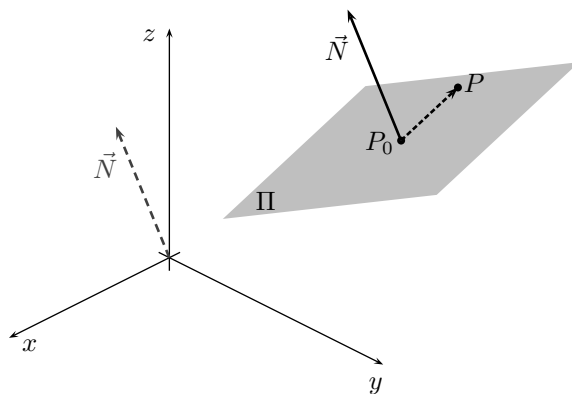
---

---

### 1.3 Geometria analitica in $\mathbb{R}^3$

In questa sezione utilizzeremo la teoria dei vettori per studiare, mediante l'uso delle coordinate cartesiane, rette e piani nello spazio euclideo tridimensionale  $\mathbb{R}^3$ . Dal punto di vista geometrico, il modo più semplice per individuare un piano  $\Pi$  in  $\mathbb{R}^3$  è specificare

- (1.3.1)            (i) Un punto  $P_0 = [x_0, y_0, z_0] \in \Pi$  ;  
                      (ii) un vettore  $\vec{N} = [a, b, c]$  ortogonale a  $\Pi$  .



**Figura 1.11** – Caratterizzazione analitica (1.3.1) di un piano  $\Pi$ .

In Figura 1.11,  $\vec{N}$  è applicato in  $P_0$  poiché geometricamente dovremo confrontarlo con  $\overrightarrow{P - P_0}$ , ma  $[a, b, c]$  sono le coordinate di  $\vec{N}$  come vettore applicato in  $O$ . Nell'ipotesi (1.3.1)(ii) è implicito che  $\vec{N}$  sia  $\neq \vec{0}$ . Questo vettore è stato chiamato  $\vec{N}$  perché spesso, in geometria, si usa il termine *normale* come sinonimo di ortogonale. Diremo anche che  $\vec{N}$  è un *vettore direzionale* di  $\Pi$ . Ora dobbiamo lavorare per passare dalla descrizione geometrica (1.3.1) di  $\Pi$  a quella analitica, cioè all'equazione cartesiana (1.3.4) di  $\Pi$ , sfruttando le coordinate cartesiane.

Per prima cosa osserviamo che un generico punto  $P = [x, y, z]$  di  $\mathbb{R}^3$  appartiene a  $\Pi$  se e solo se il vettore  $\overrightarrow{P - P_0}$  è ortogonale a  $\vec{N}$ . Dato che l'ortogonalità tra vettori equivale (vedi (1.2.4)) all'annullarsi del loro prodotto scalare, concludiamo che

$$(1.3.2) \quad P \in \Pi \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{P - P_0} \cdot \vec{N} = 0 \quad .$$

Come osservato nella sezione 2.2, il vettore  $\overrightarrow{P - P_0}$  ha coordinate  $[x - x_0, y - y_0, z - z_0]$ . Usando le coordinate, la (1.3.2) diventa

$$(1.3.3) \quad P \in \Pi \quad \Leftrightarrow \quad [x - x_0, y - y_0, z - z_0] \cdot [a, b, c] = 0$$

che possiamo ora esplicitare:

$$(1.3.4) \quad a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \quad .$$

La (1.3.4) è l'equazione (cartesiana) del piano  $\Pi$  che è normale a  $\vec{N} = [a, b, c]$  e contiene il punto  $P_0 = [x_0, y_0, z_0]$ . È fondamentale aver chiaro che, come scritto in (1.3.3), un generico punto  $P$  di  $\mathbb{R}^3$  appartiene a  $\Pi$  se e solo se le sue coordinate soddisfano l'equazione (1.3.4).

▷ Esercizio 10 ◁

**Testo**

Siano  $P_0 = [1, 3, 2]$ ,  $\vec{N} = [4, 6, 5]$ . Scrivere l'equazione del piano  $\Pi$  che contiene  $P_0$  ed è ortogonale a  $\vec{N}$ .

**Soluzione**

Dalla (1.3.4) si trova che  $\Pi$  :  $4(x - 1) + 6(y - 3) + 5(z - 2) = 0$ , cioè

$$\Pi : \quad 4x + 6y + 5z - 32 = 0 \quad .$$

□

In generale possiamo dire che l'equazione

$$(1.3.5) \quad ax + by + cz + d = 0 \quad ([a, b, c] \neq [0, 0, 0])$$

rappresenta un piano perpendicolare alla direzione  $\vec{N} = [a, b, c]$ . In particolare, tenendo fisso  $\vec{N}$  e facendo variare  $d \in \mathbb{R}$ , la (1.3.5) descrive un *fascio* (cioè, una famiglia) di piani paralleli tra loro.

▷ Esercizio 11 ◁

**Testo**

Scrivere l'equazione del piano  $\Pi$  che contiene  $P_0 = [1, 2, 3]$  ed è parallelo al piano coordinato  $xz$ .

**Soluzione**

Dato che il piano coordinato  $xz$  è quello che contiene gli assi  $x$  e  $z$ , un vettore direzionale di  $\Pi$  è chiaramente  $\vec{j} = [0, 1, 0]$ . L'equazione di  $\Pi$  segue dunque dalla (1.3.4) con  $\vec{N} = \vec{j}$  e  $P_0 = [1, 2, 3]$ :

$$\Pi: \quad 0(x - 1) + 1(y - 2) + 0(z - 3) = 0 \quad ,$$

cioè

$$(1.3.6) \quad y - 2 = 0 \quad .$$

**Soluzione alternativa**

Il fascio di piani paralleli al piano coordinato  $xz$  ha equazione (dalla (1.3.5)):

$$(1.3.7) \quad y + d = 0 \quad .$$

Ora il valore specifico di  $d \in \mathbb{R}$  si determina imponendo che le coordinate di  $P_0$  soddisfino l'equazione (1.3.7): si ha  $2 + d = 0$ , da cui  $d = -2$  e si ritrova la soluzione (1.3.6). □

▷ Esercizio 12 ◁

**Testo**

Siano  $\vec{u} = [1, 2, 0]$ ,  $\vec{v} = [2, -1, 3]$  due vettori, e sia  $P_0 = [0, 2, 0]$ . Scrivere l'equazione del piano  $\Pi$  che contiene  $P_0$  ed è parallelo ai vettori  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

**Soluzione**

Sappiamo dalla (2.1.12)(ii) che il vettore  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  è perpendicolare al piano individuato da  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

Quindi, come vettore direzionale di  $\Pi$ , possiamo scegliere proprio  $\vec{N} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ . Calcolando si ottiene  $\vec{N} = \vec{u} \wedge \vec{v} = [6, -3, -5]$ . Ora quindi possiamo scrivere l'equazione di  $\Pi$ :

$$\Pi : \quad 6(x - 0) - 3(y - 2) - 5(z - 0) = 0 \quad ,$$

cioè

$$\Pi : \quad 6x - 3y - 5z + 6 = 0 \quad .$$

A margine di questo esercizio, un suggerimento: dopo aver calcolato  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ , è bene controllare che il risultato ottenuto risulti ortogonale sia a  $\vec{u}$ , sia a  $\vec{v}$ . Infatti la verifica che  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0$ ,  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$  dà ottime probabilità di non aver sbagliato il calcolo di  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ .  $\square$

Per accrescere le nostre capacità di utilizzo delle coordinate cartesiane per descrivere figure geometriche, affrontiamo adesso un altro esercizio.

▷ Esercizio 13 ◁

**Testo**

Scrivere l'equazione della sfera  $S$  di centro  $C = [1, 2, 3]$  e raggio  $R = 2$ .

**Soluzione**

Geometricamente possiamo descrivere la sfera come

$$(1.3.8) \quad S = \{ P \in \mathbb{R}^3 : \text{dist}(P, C) = R \} .$$

Ora, indicando con  $[x, y, z]$  le coordinate del generico  $P$ , possiamo esprimere la condizione  $\text{dist}(P, C) = R$  come

$$\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2} = R$$

Questa espressione si manipola meglio elevando entrambi i suoi membri al quadrato: si ottiene, usando  $R = 2$ ,

$$(1.3.9) \quad (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 4 \quad ,$$

che è l'equazione di  $S$ .  $\square$

Più generalmente, è chiaro che

$$(1.3.10) \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

rappresenta la sfera di centro  $C = [x_0, y_0, z_0]$  e raggio  $R$ . Si noti sempre, come già sottolineato per (1.3.3), che dire che una certa equazione descrive

un luogo geometrico equivale a dire che un punto  $P$  appartiene a questa figura geometrica se e solo se le sue coordinate soddisfano l'equazione.

▷ Esercizio 14 ◁

**Testo**

Sia  $P = [3, 1, 2]$ .  $P$  appartiene alla sfera dell'esercizio 13?  $P$  appartiene al piano  $\Pi$  dell'esercizio 12?

**Soluzione**

Vediamo se le coordinate di  $P$  soddisfano l'equazione (1.3.9), cioè se è vero che  $(3 - 1)^2 + (1 - 2)^2 + (2 - 3)^2 = 4$ . Calcolando si ottiene  $6 \neq 4$ , per cui  $P \notin S$ .

Per quanto riguarda l'appartenenza di  $P$  al piano  $\Pi$  di equazione  $6x - 3y - 5z + 6 = 0$ , abbiamo

$$6 \cdot 3 - 3 \cdot 1 - 5 \cdot 2 + 6 \neq 0 \quad ,$$

per cui  $P \notin \Pi$ . □

Adesso, al fine di ampliare le nostre possibilità di sviluppare considerazioni geometriche significative, ci poniamo il problema di descrivere analiticamente una retta in  $\mathbb{R}^3$ .

Intanto possiamo dire che due piani non paralleli, diciamo  $\Pi$  e  $\Pi'$ , di equazione rispettivamente  $ax + by + cz + d = 0$  e  $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ , si intersecano in una retta  $r$ . Possiamo quindi scrivere

$$(1.3.11) \quad r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

a condizione che

$$(1.3.12) \quad \vec{v}_r = [a, b, c] \wedge [a', b', c'] \neq \vec{0} \quad .$$

La scrittura (1.3.11) è un sistema di equazioni: ciò significa che un punto  $P \in \mathbb{R}^3$  è una soluzione del sistema (cioè  $P \in r$ ) se e solo se le sue coordinate soddisfano *entrambe* le equazioni .

Il significato geometrico di questa affermazione è che  $P$  sta sia su  $\Pi$ , sia su  $\Pi'$ , o, in altre parole,  $r = \Pi \cap \Pi'$ .

Si può anche notare che, dato che  $r \subset \Pi$  e  $r \subset \Pi'$ ,  $r$  risulta ortogonale sia a  $[a, b, c]$ , sia a  $[a', b', c']$ . Di conseguenza, grazie alla (2.1.12)(ii),  $r$  è parallela al vettore  $\vec{v}_r$  definito in (1.3.12).

Diciamo quindi che  $\vec{v}_r$  è un vettore direzionale di  $r$ .



▷ Esercizio 15 ◁

**Testo**

Sia  $r$  la retta definita dal sistema

$$(1.3.13) \quad r : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

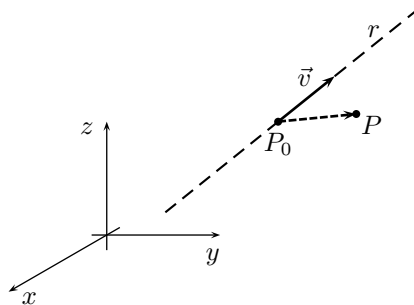
- (i) Stabilire se  $P = [1, 1, 1]$  e  $O$  appartengono a  $r$ ;
- (ii) Determinare un vettore parallelo a  $r$ .

**Soluzione**

(i) Si può verificare facilmente che le coordinate di  $P$  soddisfano il sistema (1.3.13), quindi  $P \in r$ ; invece  $O = [0, 0, 0]$  soddisfa solo una delle due equazioni di (1.3.13), per cui  $O \notin r$ .

(ii) Un vettore con le proprietà richieste è  $\vec{w} = [1, -2, 1] \wedge [1, 1, 1]$ . Calcolando questo prodotto vettoriale si ottiene  $\vec{w} = [-3, 0, 3]$ . □

Da una descrizione di una retta  $r$  come quella data in (1.3.11) non si deducono immediatamente le informazioni necessarie, ad esempio, a disegnare  $r$ . Può essere quindi molto utile descrivere  $r$  in modo diverso.



**Figura 1.12** – Descrizione di una retta  $r$  passante per  $P_0$  e parallela a  $\vec{v}$ .

Facciamo riferimento alla Figura 1.12: sia  $P_0 = [x_0, y_0, z_0] \in r$ , e sia  $\vec{v} = [l, m, n] \neq \vec{0}$  un vettore direzionale di  $r$  (cioè  $\vec{v} \parallel r$ ). È geometricamente evidente che un generico punto  $P = [x, y, z]$  appartiene a  $r$  se e solo se  $\overrightarrow{P - P_0} \parallel \vec{v}$ . Questa condizione può essere sintetizzata dicendo

$$(1.3.14) \quad P \in r \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{P - P_0} = t\vec{v} \quad ,$$

per qualche  $t \in \mathbb{R}$ .

Usando le coordinate cartesiane, se ne deduce subito che  $P = [x, y, z] \in r$  se e solo se

$$(1.3.15) \quad r : \begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} .$$

La (1.3.15) è nota come *rappresentazione parametrica* della retta  $r$  che passa per  $P_0 = [x_0, y_0, z_0]$  ed è parallela a  $\vec{v} = [l, m, n]$ . Il significato del parametro  $t \in \mathbb{R}$  in (1.3.15) è il seguente: al variare di  $t$  in  $\mathbb{R}$ , la (1.3.15) fornisce le coordinate di tutti i punti di  $r$ . Ad esempio, per  $t = 0$  abbiamo  $P_0$ .

▷ Esercizio 16 ◁

### Testo

Siano  $\vec{v} = [2, 1, 0]$ ,  $P = [1, 1, 1]$ .

- (i) Dare una rappresentazione parametrica della retta  $r$  che passa per  $P$  ed è parallela a  $\vec{v}$ ;  
(ii) Scrivere la retta  $r$  del punto (i) come sistema di equazioni.

### Soluzione

- (i) Applicando direttamente la (1.3.15), abbiamo

$$(1.3.16) \quad r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} .$$

- (ii) Il passaggio da una rappresentazione parametrica di  $r$  al corrispondente sistema di equazioni avviene per eliminazione di  $t$  attraverso operazioni algebriche. Ad esempio, in (1.3.16) ricaviamo dalla seconda equazione  $t = y - 1$ : sostituendo nella prima equazione si ottiene  $x = 1 + 2(y - 1)$ . In conclusione

$$(1.3.17) \quad r : \begin{cases} x = 1 + 2(y - 1) \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad r : \begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$$

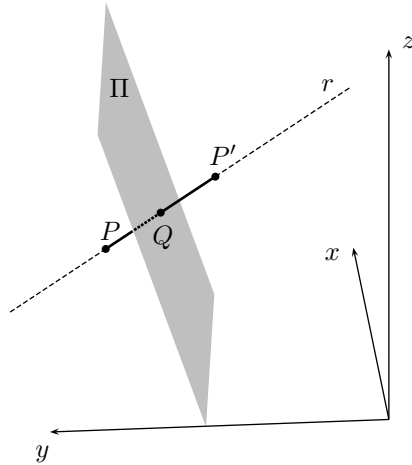
□

▷ Esercizio 17 ◁

### Testo

Siano  $P = [1, 2, 1]$ ,  $\Pi : 2x - 3y + z + 1 = 0$ .

- (i) Dopo aver verificato che  $P \notin \Pi$ , determinare la proiezione ortogonale  $Q$  di  $P$  su  $\Pi$  e dedurne la distanza tra  $\Pi$  e  $P$ ;  
(ii) Determinare il punto  $P'$  simmetrico di  $P$  rispetto a  $\Pi$ .



**Figura 1.13** – Il punto  $P'$  simmetrico di  $P$  rispetto al piano  $\Pi$ .

### Soluzione

(i) Facciamo riferimento alla Figura 1.13.

Le coordinate di  $P$  non soddisfano l'equazione del piano  $\Pi$ , in quanto  $2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 1 + 1 \neq 0$ , per cui  $P \notin \Pi$ . La proiezione ortogonale  $Q$  richiesta coincide con l'intersezione tra  $r$  e  $\Pi$ , dove  $r$  è la retta che passa per  $P$  ed è ortogonale a  $\Pi$ . Poiché  $r$  è parallela a un vettore direzionale di  $\Pi$ , possiamo immediatamente scriverne una rappresentazione parametrica:

$$(1.3.18) \quad r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 1 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Per trovare  $Q$  dobbiamo individuare quel punto di  $r$  che appartiene anche a  $\Pi$ . In formule  $[1 + 2t, 2 - 3t, 1 + t]$  deve soddisfare l'equazione di  $\Pi$ : ciò porta a

$$(1.3.19) \quad 2(1 + 2t) - 3(2 - 3t) + (1 + t) + 1 = 0.$$

Risolvendo l'equazione in  $t$  si ottiene  $t = \frac{1}{7}$  e, sostituendo questo valore nella (1.3.18), si ha

$$Q = \left[ 1 + \frac{2}{7}, 2 - \frac{3}{7}, 1 + \frac{1}{7} \right] = \left[ \frac{9}{7}, \frac{11}{7}, \frac{8}{7} \right].$$

A questo punto si può calcolare

(1.3.20)

$$\text{dist}(P, \Pi) = \text{dist}(P, Q) = \sqrt{\left(1 - \frac{9}{7}\right)^2 + \left(2 - \frac{11}{7}\right)^2 + \left(1 - \frac{8}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{7}}.$$

(ii) Per calcolare le coordinate di  $P'$  si può osservare che  $Q$  è il punto medio del segmento  $\overline{PP'}$  per cui, chiamando  $P' = [x', y', z']$  e usando la (1.1.2), si ottiene

$$(1.3.21) \quad \left[ \frac{9}{7}, \frac{11}{7}, \frac{8}{7} \right] = \left[ \frac{1+x'}{2}, \frac{2+y'}{2}, \frac{1+z'}{2} \right]$$

da cui, risolvendo separatamente per ciascuna coordinata, si ottiene

$$P' = \left[ \frac{11}{7}, \frac{8}{7}, \frac{9}{7} \right] .$$

□

**Osservazione 4:** Nell'esercizio precedente, consideriamo la parametrizzazione (1.3.18) di  $r$ . In essa,  $P$  corrisponde a  $t = 0$ , mentre  $Q$  a  $t = \frac{1}{7}$ . In altre parole, passando da  $t = 0$  a  $t = \frac{1}{7}$  ci siamo spostati da  $P$  a  $Q$ . Per passare invece da  $P$  a  $P'$  bisogna percorrere una distanza doppia, cosa che si ottiene per un valore doppio di  $t$ , ovvero  $t = \frac{2}{7}$  che, sostituito nella (1.3.18) restituisce le coordinate di  $P'$ .

L'esercizio 17 ci ha consentito di utilizzare una serie di concetti chiave, quindi è assolutamente necessario che il lettore lo abbia compreso a fondo prima di continuare nella lettura. A titolo di verifica si possono svolgere i due esercizi seguenti.

▷ Esercizio 18 ◁

**Testo**

Ripetere l'esercizio 17 con  $P = [1, 0, 1]$ ,  $\Pi : x - y + z = 0$ .

**Soluzione**

$$Q = \left[ \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right], \quad P' = \left[ -\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3} \right], \quad \text{dist}(P, \Pi) = \frac{2}{\sqrt{3}} .$$

□

▷ Esercizio 19 ◁

**Testo**

Ripetere l'esercizio 17 con  $P = [1, 1, 1]$ ,  $\Pi : x + y + z - 1 = 0$ .

**Soluzione**

$$Q = \left[ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right], \quad P' = \left[ -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right], \quad \text{dist}(P, \Pi) = \frac{2}{\sqrt{3}} .$$

□

Nel prossimo esercizio dimostreremo una formula di interesse abbastanza generale.

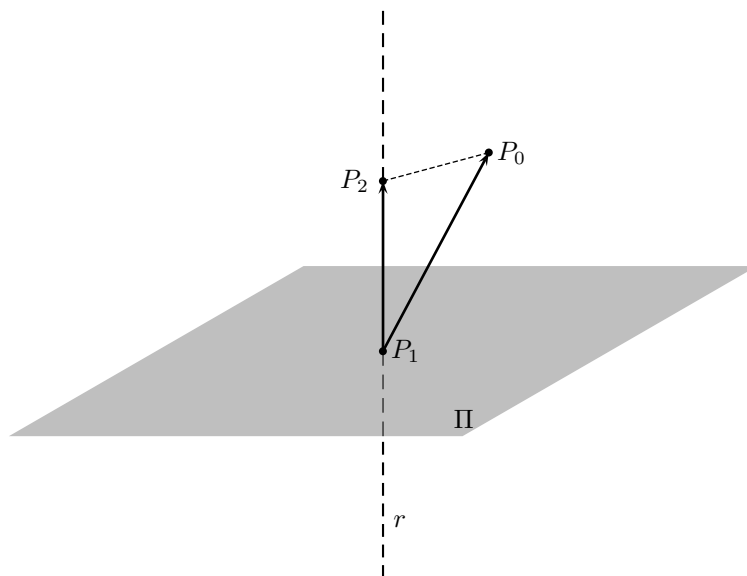
▷ Esercizio 20 ◁

**Testo**

Siano dati un piano  $\Pi : ax + by + cz + d = 0$  e un punto  $P_0 = [x_0, y_0, z_0]$ . Si dimostri che

$$(1.3.22) \quad \text{dist}(P_0, \Pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad .$$

(**Suggerimento:** indicare con  $P_1 = [x_1, y_1, z_1]$  un punto di  $\Pi$  e ispirarsi alla Figura 1.14).



**Figura 1.14** – Distanza di un punto da un piano.

**Soluzione**

La retta  $r$  è la retta che passa per  $P_1$  ed è perpendicolare a  $\Pi$ . Quindi  $\text{dist}(P_0, \Pi)$  coincide con la lunghezza del vettore  $\overrightarrow{P_2 - P_1}$ , che è la proiezione di  $\overrightarrow{P_0 - P_1}$  lungo  $r$ . Un versore parallelo ad  $r$  è

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \cdot [a, b, c] \quad .$$

Usando ora la (1.2.9) si ottiene

$$(1.3.23) \quad \overrightarrow{P_2 - P_1} = (\overrightarrow{P_0 - P_1} \cdot \vec{u}) \vec{u} = \left( \frac{a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right) \vec{u} .$$

Quindi

$$(1.3.24) \quad \text{dist}(P_0, \Pi) = |\overrightarrow{P_2 - P_1}| = \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} |\vec{u}|$$

Poiché  $\vec{u}$  è un versore,  $|\vec{u}| = 1$  nella (1.3.24). Ora si osserva che, dato che  $P_1 \in \Pi$ ,  $-ax_1 - by_1 - cz_1 = d$ . Sostituendo questa relazione nella (1.3.24) si ottiene la (1.3.22).  $\square$

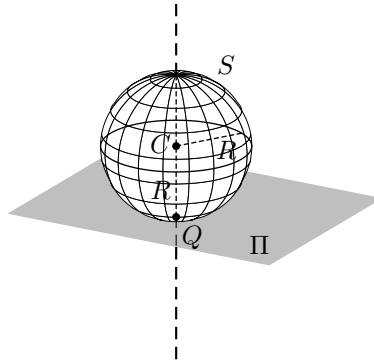
▷ Esercizio 21 ◁

**Testo**

Siano  $\Pi : x - y + z - 1 = 0$ ,  $C = [1, 2, 0]$ . Scrivere l'equazione della sfera  $S$  con centro  $C$  e tangente a  $\Pi$ .

**Soluzione**

Geometricamente, la situazione è quella presentata in Figura 1.15.



**Figura 1.15** – Sfera di centro dato e tangente a un assegnato piano  $\Pi$ .

Il raggio  $R$  coincide con la distanza tra  $C$  e  $\Pi$ . Quindi, usando la (1.3.22), abbiamo

$$R = \text{dist}(C, \Pi) = \frac{|1 - 2 + 0 - 1|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} ,$$

per cui applicando la (1.3.10) otteniamo

$$S : \quad (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = \frac{4}{3} \quad .$$

□

Un altro concetto estremamente utile è quello di *fascio di piani* generato da una retta  $r$ .

Per illustrare questo concetto conviene partire dalla descrizione di  $r$  come sistema di equazioni, come in (1.3.11). Per fascio di piani generato da  $r$  si intende la famiglia formata da tutti i piani che contengono  $r$ . Questo fascio di piani è descritto mediante la famiglia di equazioni

$$(1.3.25) \quad \lambda(ax + by + cz + d) + \mu(a'x + b'y + c'z + d') = 0 \quad ,$$

dove  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  sono una coppia di parametri,  $[\lambda, \mu] \neq [0, 0]$ . Per capire il significato della (1.3.25) possiamo ragionare nel modo seguente: innanzitutto, comunque si fissino i valori della coppia  $[\lambda, \mu]$  ( $\neq [0, 0]$ ), la (1.3.25) rappresenta un piano. Inoltre, ogni punto  $P$  di  $r$  verifica la (1.3.25), poiché sostituendo le sue coordinate in (1.3.25) si ha

$$\lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0 \quad .$$

Dunque ognuno dei piani in (1.3.25) contiene  $r$ . Viceversa, e questo non lo dimostriamo, è anche vero che ogni piano contenente  $r$  è descrivibile con la (1.3.25). Applichiamo adesso questi concetti per risolvere alcuni esercizi.

▷ Esercizio 22 ◁

**Testo**

Siano  $P = [1, 1, 6]$  e

$$r : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$$

Determinare l'equazione del piano  $\Pi$  che contiene  $P$  e  $r$ .

**Soluzione**

Per prima cosa notiamo che  $P \notin r$ . Il piano  $\Pi$  appartiene al fascio generato da  $r$ , per cui, dalla (1.3.25), è del tipo

$$(1.3.26) \quad \lambda(x - 2y + z) + \mu(x - z - 1) = 0$$

Adesso dobbiamo determinare i valori di  $\lambda$  e  $\mu$ . Poiché  $P$  deve appartenere a  $\Pi$ , dobbiamo imporre che le coordinate di  $P$  soddisfino la (1.3.26). Si ottiene quindi

$$(1.3.27) \quad \lambda(1 - 2 \cdot 1 + 6) + \mu(1 - 6 - 1) = 0 \quad \text{ovvero} \quad 5\lambda - 6\mu = 0 \quad .$$

Adesso è sufficiente scegliere una coppia di valori  $\lambda, \mu$ , non entrambi nulli, tali che la (1.3.27) sia soddisfatta. Possiamo ad esempio scegliere

$$(1.3.28) \quad \lambda = 6, \quad \mu = 5 \quad .$$

Sostituendo questi valori nella (1.3.26) si ottiene

$$(1.3.29) \quad \Pi : \quad 11x - 12y + z - 5 = 0 \quad .$$

Vale la pena notare che la scelta in (1.3.28) non è unica, in quanto ogni coppia  $\lambda = 6\alpha, \mu = 5\alpha$ , con  $\alpha \neq 0$ , sarebbe stata accettabile e avrebbe portato all'equazione

$$\alpha (11x - 12y + z - 5) = 0$$

che, per ogni  $\alpha \neq 0$ , rappresenta sempre il piano  $\Pi$  di (1.3.29). □

▷ Esercizio 23 ◁

**Testo**

Sia  $P = [1, 3, 5]$ . Scrivere l'equazione del piano  $\Pi$  che contiene  $P$  e l'asse  $y$ .

**Soluzione**

L'asse  $y$  è definito dal sistema

$$(1.3.30) \quad \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad .$$

Quindi il piano  $\Pi$  cercato è del tipo  $\lambda x + \mu z = 0$ . Imponendo che le coordinate di  $P$  soddisfino questa equazione si ottiene  $\lambda + 5\mu = 0$ . A questo punto, ponendo, ad esempio,  $\lambda = 5, \mu = -1$ , troviamo

$$\Pi : \quad 5x - z = 0 \quad .$$

□

▷ Esercizio 24 ◁

**Testo**

Sia  $r$  la retta data in forma parametrica da

$$(1.3.31) \quad r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad .$$

Scrivere l'equazione del piano  $\Pi$  che contiene l'origine e  $r$ .



### Soluzione

Possiamo scrivere  $r$  nella forma di sistema di equazioni e poi procedere come nei due esercizi precedenti. Eliminando algebricamente  $t$  nella rappresentazione parametrica (1.3.31) si ottiene

$$(1.3.32) \quad r : \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ y + 2z - 2 = 0 \end{cases} .$$

Quindi  $\Pi$  è del tipo

$$\lambda(x - z - 1) + \mu(y + 2z - 2) = 0 .$$

Imponendo  $O \in \Pi$  si arriva facilmente a

$$\Pi : 2x - y - 4z = 0 .$$

□

▷ Esercizio 25 ◁

### Testo

Scrivere l'equazione del piano  $\Pi$  che contiene l'asse  $x$  e il punto  $P = [1, 0, 2]$ .

### Soluzione

$$\Pi : y = 0 .$$

□

**Rappresentazione parametrica di un piano:** Siano dati un punto  $P_0 = [x_0, y_0, z_0]$  e due vettori non nulli  $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3]$  e  $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ . Allora, chiaramente, esiste un unico piano  $\Pi$  che passa per il punto  $P_0$  ed è parallelo ai due vettori  $u$  e  $v$ . Possiamo osservare che un generico punto  $P = [x, y, z]$  appartiene al piano  $\Pi$  se e solo se

$$\overrightarrow{(P - P_0)} = s\vec{u} + t\vec{v}$$

per qualche coppia di numeri reali  $s, t$ . Riscrivendo la precedente uguaglianza vettoriale rispetto alle tre coordinate cartesiane otteniamo una *rappresentazione parametrica* del piano  $\Pi$ :

$$\begin{cases} x = x_0 + s u_1 + t v_1 \\ y = y_0 + s u_2 + t v_2 \\ z = z_0 + s u_3 + t v_3 \end{cases} \quad \text{dove } s, t \in \mathbb{R} .$$

Si noti che, intuitivamente, un piano ha dimensione 2 e quindi risulta naturale che sia stato necessario usare due parametri per descrivere l'insieme dei suoi punti.

Ora possediamo gli strumenti per affrontare anche esercizi diversi e più articolati.

▷ Esercizio 26 ◁

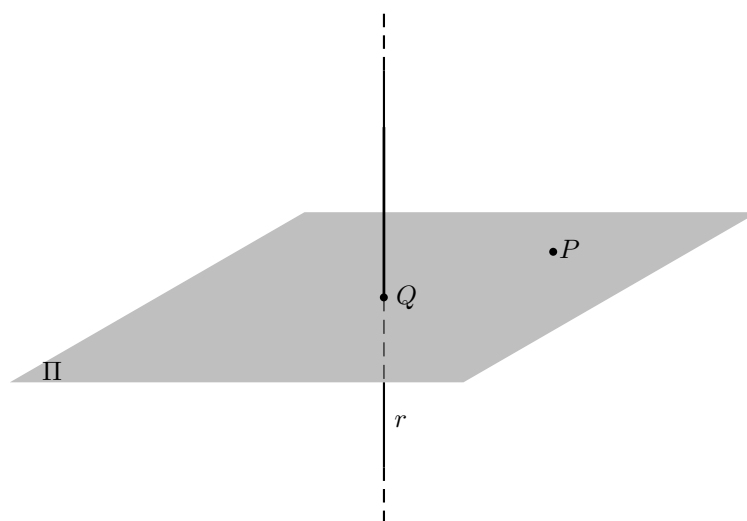
**Testo**

Siano  $P = [1, 0, 3]$  e

$$(1.3.33) \quad r : \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Calcolare la distanza tra  $P$  e  $r$ .

(**Suggerimento:**  $\text{dist}(P, r) = \text{dist}(P, Q)$ , dove  $Q$  è la proiezione ortogonale di  $P$  su  $r$ , come rappresentato nella Figura 1.16).



**Figura 1.16** – Proiezione ortogonale di un punto su una retta in  $\mathbb{R}^3$ .

**Soluzione**

Abbiamo  $Q = r \cap \Pi$ , dove  $\Pi$  è il piano che passa per  $P$  ed è ortogonale ad  $r$ . Un vettore direzionale  $\vec{N}$  di  $\Pi$  è dato, secondo (1.3.12), da

$$\vec{N} = [1, 0, -1] \wedge [1, 1, 0] = [1, -1, 1] \quad ,$$

per cui  $\Pi: 1(x-1) - 1(y-0) + 1(z-3) = 0$ , cioè  $\Pi: x - y + z - 4 = 0$ .

Adesso le coordinate di  $Q$  devono soddisfare sia l'equazione di  $\Pi$  sia il sistema di equazioni (1.3.33). Queste due condizioni equivalgono a dire che  $Q$  è una soluzione del sistema

$$(1.3.34) \quad r : \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ x + y = 0 \\ x - y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

Il (1.3.34) è un sistema lineare con tre equazioni e tre incognite. Nel capitolo sui sistemi lineari impareremo a riconoscere che (1.3.34) ammette un'unica soluzione e spiegheremo il metodo per calcolarla. Allo stato attuale ce la possiamo cavare con un approccio più diretto e geometrico. Osserviamo che  $P^* = [0, 0, 1] \in r$ . Quindi, poiché  $r \parallel \vec{N}$ , una rappresentazione parametrica di  $r$  è

$$(1.3.35) \quad r : \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Poiché  $Q$  è quel punto di  $r$  che sta anche su  $\Pi$ , basta determinare quel valore di  $t$  per cui  $[t, -t, 1+t]$  soddisfa l'equazione di  $\Pi$ . Si deve avere

$$t - (-t) + (1+t) - 4 = 0 \quad ,$$

da cui si deduce che  $t = 1$  e  $Q = [1, -1, 2]$ . Infine,  $\text{dist}(P, r) = \text{dist}(P, Q) = \sqrt{2}$ . A titolo di verifica, si noti che le coordinate di  $Q$  forniscono l'unica soluzione di (1.3.34).  $\square$

## 1.4 Geometria analitica in $\mathbb{R}^2$

Un vettore  $\vec{v}$  in  $\mathbb{R}^2$  è descritto mediante due coordinate:  $\vec{v} = [v_1, v_2]$ . Le operazioni di somma, moltiplicazione per  $\lambda \in \mathbb{R}$  e prodotto scalare funzionano esattamente come in  $\mathbb{R}^3$ . In particolare, se  $\vec{v} = [v_1, v_2]$ ,  $\vec{u} = [u_1, u_2]$ , allora

$$(1.4.1) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta \quad ,$$

dove  $0 \leq \theta \leq \pi$  è l'angolo formato da  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Ne segue che, anche in questo caso, l'ortogonalità tra  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  è riconducibile all'annullarsi del loro prodotto scalare. Va però segnalato che  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  non ha senso in questo contesto, come

si può intuire dal fatto che  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  darebbe un risultato non appartenente al piano di partenza.

Con queste premesse, possiamo considerare sostanzialmente la geometria analitica in  $\mathbb{R}^2$  come un utile esercizio in cui applichiamo i vari strumenti che abbiamo acquisito durante lo studio della sezione precedente. Come punto di partenza osserviamo che un ragionamento *identico* a quello che ci ha condotto all'equazione di un piano in  $\mathbb{R}^3$  (si vedano le (1.3.4) e (1.3.5)) consente di affermare che l'equazione

$$(1.4.2) \quad a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \quad , \text{ con } [a, b] \neq [0, 0] ,$$

rappresenta, nel piano cartesiano  $\mathbb{R}^2$ , la retta  $r$  che passa per  $P_0 = [x_0, y_0]$  ed è ortogonale a  $\vec{N} = [a, b]$ .

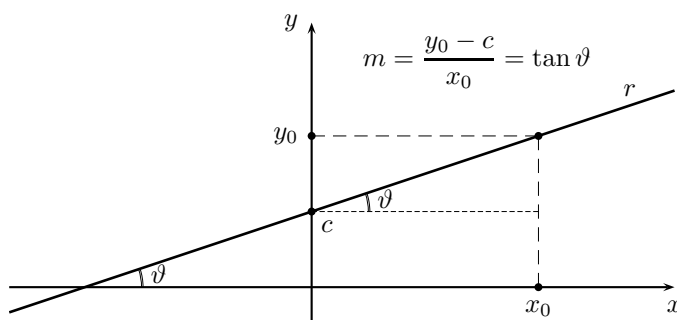
Ne segue che, al variare di  $c \in \mathbb{R}$ , la famiglia di equazioni

$$(1.4.3) \quad ax + by + c = 0$$

descrive un fascio di rette parallele tra loro, tutte ortogonali alla direzione  $\vec{N} = [a, b]$ . Quando la retta non è parallela all'asse  $y$  la sua equazione può essere riscritta nella forma

$$(1.4.4) \quad y = mx + c \quad , \quad m, c \in \mathbb{R} .$$

In questo caso  $m$  è detto *coefficiente angolare* della retta e coincide con la tangente dell'angolo  $\theta$  formato dalla retta con l'asse  $x$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ . La Figura 1.17 illustra il caso  $m > 0$ ,  $c > 0$ .



**Figura 1.17** – Coefficiente angolare di una retta in  $\mathbb{R}^2$ .

Possiamo ora risolvere una serie di esercizi illustrativi.

$\triangleright$  Esercizio 27  $\triangleleft$

**Testo**

Siano  $P_1 = [1, 2]$ ,  $P_2 = [2, -1]$ . Scrivere l'equazione della retta  $r$  che contiene  $P_1$  e  $P_2$ , e disegnarla.

**Soluzione**

Usando la (1.4.2) possiamo dire che tutte le rette passanti per  $P_1$  hanno equazione del tipo

$$(1.4.5) \quad a(x - 1) + b(y - 2) = 0 \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad [a, b] \neq [0, 0] .$$

Per determinare i valori di  $a$  e  $b$  dobbiamo imporre che le coordinate di  $P_2$  soddisfino la (1.4.5). Si ottiene

$$(1.4.6) \quad a(2 - 1) + b(-1 - 2) = 0 \quad \text{ovvero} \quad a - 3b = 0 ,$$

per cui possiamo scegliere, ad esempio,  $a = 3$ ,  $b = 1$  e abbiamo

$$(1.4.7) \quad r : \quad 3(x - 1) + (y - 2) = 0 \quad \text{ovvero} \quad r : \quad 3x + y - 5 = 0 .$$

A titolo di verifica il lettore può controllare che le coordinate di entrambi i punti  $P_1$  e  $P_2$  soddisfano l'equazione 1.4.7 così ricavata.

Notiamo anche che  $r$  interseca l'asse  $x$  ( $y = 0$ ) nel punto di coordinate  $[\frac{5}{3}, 0]$ . L'intersezione con l'asse  $y$  è invece  $[0, 5]$ . Con tutti questi elementi non c'è difficoltà per realizzare il disegno di Figura 1.18.  $\square$

$\triangleright$  Esercizio 28  $\triangleleft$

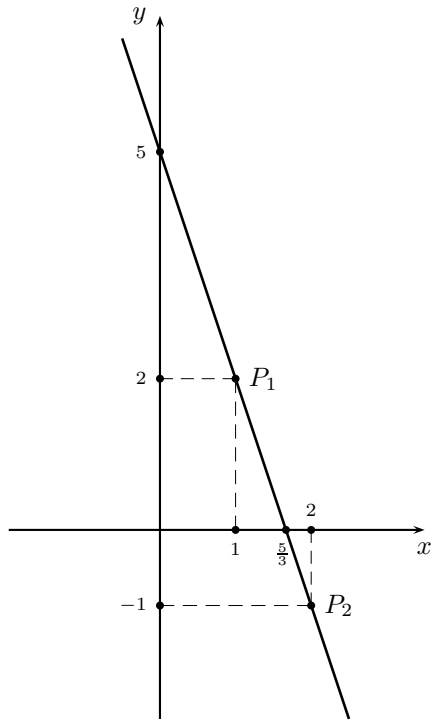
**Testo**

Siano  $r : y = 2x + 1$ ,  $P = [-2, 2]$ .

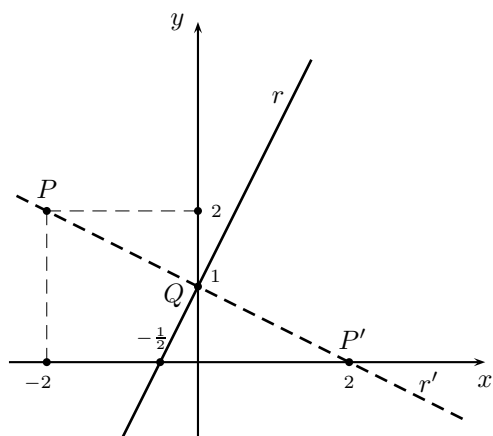
- (i) Disegnare  $r$  e  $P$  nel piano cartesiano  $\mathbb{R}^2$ ;
- (ii) Calcolare la proiezione ortogonale  $Q$  di  $P$  su  $r$ ;
- (iii) Calcolare  $\text{dist}(P, r)$ ;
- (iv) Scrivere l'equazione della circonferenza  $\gamma$  di centro  $P$  e tangente a  $r$ ;
- (v) Determinare il punto  $P'$  simmetrico di  $P$  rispetto a  $r$ .

**Soluzione**

(i) Per disegnare  $r$  è sufficiente determinare due punti che appartengono a  $r$ . Ad esempio, l'intersezione di  $r$  con l'asse  $x$  è  $[-\frac{1}{2}, 0]$ , mentre quella con l'asse  $y$  è  $[0, 1]$ . Si perviene quindi alla Figura 1.19.



**Figura 1.18** – La retta dell'esercizio 27.



**Figura 1.19** – La retta dell'esercizio 28.

(ii)  $Q = r \cap r'$ , dove  $r'$  è la retta passante per  $P$  e ortogonale a  $r$ . Poiché  $r$  ha equazione

$$(1.4.8) \quad 2x - y + 1 = 0 \quad ,$$

il confronto con (1.4.3) ci dice che  $r \perp [2, -1]$  e quindi  $r' \parallel [2, -1]$ . Questo ci consente di scrivere immediatamente una rappresentazione parametrica di  $r'$  :

$$(1.4.9) \quad r' : \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 2 - t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R} .$$

Quindi  $Q$  sarà quel punto di tipo  $[-2 + 2t, 2 - t]$  che soddisfa l'equazione (1.4.8) di  $r$ . Cioè

$$2(-2 + 2t) - (2 - t) + 1 = 0 \quad ,$$

da cui  $t = 1$  e, sostituendo questo valore nella (1.4.9),  $Q = [0, 1]$ .

$$(iii) \quad \text{dist}(P, r) = \text{dist}(P, Q) = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{5} .$$

(iv) Come in (1.3.10), possiamo dire che l'equazione della circonferenza di centro  $C = [x_0, y_0]$  e raggio  $R$  è

$$(1.4.10) \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \quad .$$

Nel nostro caso  $C = P$  e  $R = \text{dist}(P, r) = \sqrt{5}$ , quindi l'equazione della circonferenza  $\gamma$  richiesta è

$$\gamma : (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 5 \quad .$$

(v) Il simmetrico  $P'$  di  $P$  rispetto ad  $r$  si ottiene imponendo che  $Q$  sia il punto medio del segmento  $\overline{PP'}$ . In formule

$$Q = \frac{P' + P}{2} \quad \text{ovvero} \quad P' = 2Q - P = [2, 0] \quad .$$

□

**Osservazione 5:** Nell'esercizio precedente il fatto che  $Q$  e  $P'$  coincidessero con le intersezioni di  $r'$  con gli assi è puramente casuale. Per calcolare  $\text{dist}(P, r)$  era altresì possibile utilizzare la seguente formula, che è l'analogo in  $\mathbb{R}^2$  della (1.3.22) (anche la dimostrazione data nell'esercizio 20 si

adatta perfettamente a questo caso). Precisamente, siano  $P_0 = [x_0, y_0]$  e  $r : ax + by + c = 0$ : allora

$$(1.4.11) \quad \text{dist}(P_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} .$$

---

## 1.5 Esercizi di riepilogo

Il lettore dovrebbe essere in grado di svolgere senza difficoltà il seguente esercizio.

▷ Esercizio 29 ◁

### Testo

Siano  $\vec{u} = [1, -1, 2]$ ,  $\vec{v} = [2, 0, 1]$  e  $P = [1, 0, 0]$ :

- (i) Calcolare  $\cos \vartheta$ , dove  $\vartheta$  è l'angolo formato da  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  ( $0 \leq \vartheta \leq \pi$ ) ;
- (ii) Calcolare l'area del parallelogramma individuato da  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  ;
- (iii) Scrivere l'equazione del piano  $\Pi$  che contiene  $P$  ed è parallelo a  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  ;
- (iv) Calcolare  $\text{dist}(O, \Pi)$  ;
- (v) Descrivere mediante un sistema di equazioni la retta  $r$  che contiene  $O$  e  $P$  ;
- (vi) Scrivere una rappresentazione parametrica della retta  $r'$  che contiene  $P' = [1, 3, 1]$  ed è parallela a  $\vec{u}$  ;
- (vii) Scrivere l'equazione del piano  $\Pi'$  che contiene l'asse  $y$  e  $P'$  ;
- (viii) Scrivere l'equazione del piano  $\Pi''$  che contiene  $P$  ed è parallelo al piano  $y = 8$  .



**Soluzione**

(i)

$$\cos \vartheta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{4}{\sqrt{6} \sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{30}} .$$

(ii)

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = [-1, 3, 2] ; \text{ area parallelogramma} = |\vec{u} \wedge \vec{v}| = \sqrt{14} .$$

(iii)

$$\Pi \perp (\vec{u} \wedge \vec{v}) \Rightarrow$$

$$\Pi : \quad -1(x-1) + 3(y-0) + 2(z-0) = 0 ,$$

cioè

$$\Pi : \quad x - 3y - 2z - 1 = 0 .$$

(iv) Usando la (1.3.22) con  $P_0 = O$  otteniamo

$$\text{dist}(O, \Pi) = \frac{1}{\sqrt{14}} .$$

(v) In forma parametrica  $r$  è descritta da

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R} ;$$

ciò equivale al sistema di equazioni

$$r : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

( $r$  è l'asse  $x$ ).

(vi) Applicando direttamente la (1.3.15) otteniamo

$$r' : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R} .$$

(vii)  $\Pi'$  appartiene al fascio  $\lambda x + \mu z = 0$  . Imponendo  $P' \in \Pi'$  si ottiene la condizione  $\lambda + \mu = 0$  . Si conclude che  $\Pi' : x - z = 0$  .

(viii)  $\Pi''$  è del tipo  $y = c$  . Imponendo  $P \in \Pi''$  si trova  $c = 0$  e dunque

$$\Pi'' : \quad y = 0 .$$

□

Facciamo ora un ragionamento utile partendo dalla generica rappresentazione parametrica (1.3.15) di una retta  $r$ . Se supponiamo che  $l$ ,  $m$  e  $n$  siano tutti diversi da zero, possiamo ricavare  $t$  dalle tre equazioni di (1.3.15) e scrivere

$$(1.5.1) \quad (t =) \quad \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \quad .$$

La (1.5.1) in pratica descrive  $r$  mediante un sistema di equazioni. Se applichiamo ciò alla retta  $r'$  del punto (vi) dell'esercizio 30, troviamo

$$(1.5.2) \quad r' : \quad \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 3}{(-1)} = \frac{z - 1}{2} \quad ,$$

che equivale a scrivere

$$(1.5.3) \quad r' : \quad \begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2y + z - 7 = 0 \end{cases} \quad .$$

Notiamo anche che, in luogo di (1.5.3), avremmo potuto scrivere, ad esempio,

$$r' : \quad \begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases} \quad .$$

La non unicità nella scrittura di una retta  $r$  come intersezione di due piani non deve stupire, in quanto sono infinite le coppie di piani aventi come intersezione la stessa retta. Vediamo una semplice applicazione di (1.5.1):

▷ Esercizio 30 ◁

**Testo**

Siano  $P_1 = [2, 0, 1]$  e  $P_2 = [1, -1, 2]$ . Scrivere un sistema di equazioni che individua la retta  $r$  che passa per  $P_1$  e  $P_2$ .

**Soluzione**

$$r \parallel \overrightarrow{P_2 - P_1} = [-1, -1, 1] \quad .$$

Pertanto, usando la (1.5.1) con  $[x_0, y_0, z_0] = P_1$ , otteniamo

$$(1.5.4) \quad r : \quad \frac{x - 2}{(-1)} = \frac{y - 0}{(-1)} = \frac{z - 1}{1} \quad ,$$

da cui, ad esempio,

$$(1.5.5) \quad r : \quad \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x + z - 3 = 0 \end{cases} \quad .$$

□

---

---

**Osservazione 6:** Per scrivere la (1.5.1) abbiamo richiesto che  $l$ ,  $m$  e  $n$  fossero tutti diversi da zero. Se, ad esempio,  $l = 0$ , guardando la (1.3.15) vediamo che, invece di (1.5.1), dobbiamo scrivere

$$(1.5.6) \quad x - x_0 = 0, \quad (t =) \quad \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} .$$

I casi in cui  $m$  o  $n$  si annullano sono simili (ricordare però che almeno uno tra i coefficienti  $l$ ,  $m$  e  $n$  deve essere non nullo, altrimenti la (1.3.15) non rappresenta una retta).

---

---

▷ Esercizio 31 ◁

**Testo**

Siano  $P_1 = [2, 1, 0]$  e  $P_2 = [3, 1, 1]$ . Scrivere un sistema di equazioni che individua la retta  $r$  che passa per  $P_1$  e  $P_2$ .

**Soluzione**

$$r \parallel \overrightarrow{P_2 - P_1} = [1, 0, 1] .$$

Pertanto, ragionando come nell'osservazione precedente, arriviamo subito a:

$$(1.5.7) \quad r : \quad y - 1 = 0, \quad \frac{x - 2}{1} = \frac{z - 0}{1} ,$$

da cui

$$r : \begin{cases} y - 1 = 0 \\ x - z - 2 = 0 \end{cases} .$$

□

▷ Esercizio 32 ◁

**Testo**

Ripetere l'esercizio precedente con  $P_1 = [2, 1, 0]$  e  $P_2 = [3, 1, 0]$ .

**Soluzione**

$$r : \begin{cases} y - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases} .$$

□

▷ Esercizio 33 ◁

**Testo**

Siano  $\vec{u} = [1, 0, 1]$ ,  $\vec{v} = [0, 1, 2]$ ,  $\vec{w} = [1, 1, 1]$ .

- (i) Determinare il volume del parallelepipedo individuato da  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  ;
- (ii) Calcolare l'area del parallelogramma individuato da  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  ;
- (iii) Se  $\vartheta$  è l'angolo formato da  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  ( $0 \leq \vartheta \leq \pi$ ), l'affermazione  $\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \pi$  è vera o falsa?

**Soluzione**

Iniziamo da

(ii)

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = [-1, 2, -1] \quad ,$$

per cui l'area richiesta vale

$$|\vec{v} \wedge \vec{w}| = \sqrt{6} \quad .$$

(i)

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = [1, 0, 1] \cdot [-1, 2, -1] = -2 \quad .$$

Quindi il volume richiesto vale

$$|\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})| = |-2| = 2 \quad .$$

(iii)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 > 0 \quad ,$$

per cui  $\cos \vartheta > 0$  e quindi  $0 \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}$  . Dunque l'affermazione  $\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \pi$  è falsa. □

▷ Esercizio 34 ◁

**Testo**

Sia  $\Pi : x + y + z = 0$  , e sia  $P = [1, 2, 1]$  .

- (i) Calcolare la proiezione ortogonale  $Q$  di  $P$  su  $\Pi$  ;
- (ii) Calcolare  $\text{dist}(P, \Pi)$  ;
- (iii) Determinare il punto  $P'$  simmetrico di  $P$  rispetto a  $\Pi$  .

**Soluzione**

(i)  $Q = \Pi \cap r$  , dove  $r$  è la retta passante per  $P$  e ortogonale a  $\Pi$  :

$$(1.5.8) \quad r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R} .$$

Per calcolare  $Q$  dobbiamo determinare il punto di  $r$  che sta su  $\Pi$  :

$$(1 + t) + (2 + t) + (1 + t) = 0 \quad ,$$

da cui  $t = -(4/3)$  e quindi, sostituendo in (1.5.8),

$$Q = \left[ -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right] .$$

(ii)

$$\text{dist}(P, \Pi) = \text{dist}(P, Q) = \frac{4}{\sqrt{3}} .$$

(iii)

$$P' = 2Q - P = \left[ -\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{5}{3} \right] .$$

□

▷ Esercizio 35 ◁

**Testo**

Sia

$$(1.5.9) \quad r : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} .$$

Scrivere l'equazione del piano  $\Pi$  che contiene  $r$  e  $O$ .

**Soluzione**

Il piano  $\Pi$  appartiene al fascio di piani generato da  $r$ , per cui è della forma

$$(1.5.10) \quad \lambda(x + y - 1) + \mu(y + z) = 0 .$$

Imponendo che le coordinate di  $O$  soddisfino la (1.5.10) si ottiene la relazione  $-\lambda = 0$ . Per cui possiamo scegliere  $\lambda = 0$ ,  $\mu = 1$  e concludiamo che  $\Pi : y + z = 0$

.

□

## Posizione reciproca di due rette

Siano  $r_1$  e  $r_2$  due rette distinte in  $\mathbb{R}^3$ . Allora possono verificarsi tre casi che descrivono la reciproca posizione delle due rette:

(1.5.11) :  $r_1$  e  $r_2$  hanno un punto in comune, nel qual caso si dice che sono *incidenti*;

(1.5.12) :  $r_1$  e  $r_2$  sono *parallele*;

(1.5.13) :  $r_1$  e  $r_2$  non sono né incidenti né parallele. In questo caso si dice

che sono *sghembe*.

▷ Esercizio 36 ◁

**Testo**

Sia  $r_1$  la retta definita in (1.5.9). E sia

$$(1.5.14) \quad r_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} .$$

Stabilire la reciproca posizione di  $r_1$  e  $r_2$  .

**Soluzione**

$$r_1 \parallel ([1, 1, 0] \wedge [0, 1, 1]) = [1, -1, 1] = \vec{u} .$$

Poi,

$$r_2 \parallel [1, 2, 1] = \vec{v} .$$

Poiché  $\vec{u} \neq \lambda \vec{v} \forall \lambda \in \mathbb{R}$  ,  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  non sono paralleli. Quindi  $r_1$  e  $r_2$  possono solo essere incidenti o sghembe. Vediamo se esiste un punto di  $r_2$  che appartiene a  $r_1$ : sostituendo  $[t, 2t, 1 + t]$  in (1.5.9) troviamo

$$(1.5.15) \quad \begin{cases} t + (2t) - 1 = 0 \\ 2t + (1 + t) = 0 \end{cases},$$

da cui

$$\begin{cases} t = (1/3) \\ t = -(1/3) \end{cases},$$

risultato che rappresenta un evidente assurdo, in quanto  $t$  non può essere simultaneamente uguale a due valori diversi. Quindi  $r_1$  e  $r_2$  non hanno punti in comune e sono pertanto sghembe. □

▷ Esercizio 37 ◁

**Testo**

Siano  $\Pi : x - y + z = 0$  e  $P = [1, 0, 1]$  .

- (i) Scrivere l'equazione della sfera  $S$  di centro  $P$  e tangente al piano  $\Pi$  ;
- (ii) Determinare il punto  $Q$  simmetrico di  $P$  rispetto al piano  $\Pi$  .

**Soluzione**

(i)

$$S : (x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = \frac{4}{3} .$$

(ii)

$$Q = \left[ -\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3} \right] .$$

□

▷ Esercizio 38 ◁

**Testo**

Sia  $r$  la retta

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R} .$$

(i) Scrivere l'equazione del piano  $\Pi$  che contiene  $r$  e  $O$ .

(ii) Stabilire la reciproca posizione di  $r$  e dell'asse  $x$ .

**Soluzione**

(i)

$$\Pi : \quad 3x - 2y + 2z = 0 .$$

(ii) Sghembe.

□

▷ Esercizio 39 ◁

**Testo**

Nel piano cartesiano  $\mathbb{R}^2$  si considerino la retta  $r : y = 3x - 1$  e il punto  $P = [2, 2]$ :

(i) Determinare il punto  $P'$  simmetrico di  $P$  rispetto a  $r$  ;

(ii) Scrivere l'equazione della circonferenza  $\gamma$  di centro  $P$  e passante per  $O$  ;

(iii) Scrivere l'equazione della retta  $r'$  che passa per  $P$  ed è ortogonale a  $r$  .

**Soluzione**

(i)

$$P' = \left[ \frac{1}{5}, \frac{13}{5} \right] .$$

(ii)

$$\gamma : \quad (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8 .$$

(iii)

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3} .$$

□

▷ Esercizio 40 ◁

**Testo (\*)**

Date due rette sghembe  $r_1$  e  $r_2$  esiste un'unica retta  $r$  con la proprietà di essere

- (a) incidente a entrambe;
- (b) perpendicolare a entrambe.

$r$  è detta la *comune perpendicolare* a  $r_1$  e  $r_2$ .

Siano ora

$$r_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} ; \quad r_2 : \begin{cases} x - 2 = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases} .$$

Determinare la loro comune perpendicolare  $r$ .

**Soluzione**

Scriviamo  $r_1$  e  $r_2$  in forma parametrica:

$$r_1 : [0, 1, t], \quad t \in \mathbb{R}; \quad r_2 : [2, s, -1], \quad s \in \mathbb{R} .$$

Utilizzando la (1.5.1) possiamo dire che la generica retta incidente a  $r_1$  e  $r_2$  è definita dal sistema

$$(1.5.16) \quad \frac{x-0}{2-0} = \frac{y-1}{s-1} = \frac{z-t}{-1-t} ;$$

è importante mettere in luce che, al variare dei parametri  $s$  e  $t$  in (1.5.16), si ottiene sempre una retta che congiunge un punto di  $r_1$  con uno di  $r_2$ . Ora,

$$r_1 \parallel [0, 0, 1] = \vec{u}_1 ; \quad r_2 \parallel [0, 1, 0] = \vec{u}_2 .$$

La retta (1.5.16) è invece parallela a  $[2, s-1, -1-t]$ . Imponendo che quest'ultimo vettore sia ortogonale ad entrambi  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_2$ , si trovano le due seguenti condizioni:

$$-1-t = 0 ; \quad s-1 = 0 ,$$

da cui  $t = -1$  e  $s = 1$ . Sostituendo questi valori in (1.5.16), e tenendo conto dell'osservazione 6, si conclude che la comune perpendicolare  $r$  è

$$r : \begin{cases} y - 1 = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases} .$$

Si noti che

$$r \cap r_1 = [0, 1, -1] ; \quad r \cap r_2 = [2, 1, -1] .$$

□



## 1.6 Considerazioni conclusive

Nella sezione 1.1 abbiamo introdotto il concetto di vettore in modo diretto e intuitivo. Una formalizzazione matematicamente rigorosa avrebbe richiesto l'uso del concetto matematico di *relazione di equivalenza*.

Segnaliamo fin da ora che lo studio dei vettori, con le loro operazioni, costituisce il modello di riferimento per una teoria di grande importanza, avente come oggetto i cosiddetti *spazi vettoriali* di cui parleremo successivamente (capitolo 6 e 7).

# Capitolo 2

## Numeri complessi

### 2.0 Scopi del capitolo

Consideriamo l'equazione

$$(2.0.1) \quad x^2 + 1 = 0.$$

Questa semplice equazione polinomiale non è risolvibile in  $\mathbb{R}$ .

Il campo dei numeri complessi, denotato mediante il simbolo  $\mathbb{C}$ , è un'estensione di  $\mathbb{R}$  in cui ogni equazione di tipo polinomiale ammette soluzione. In questo capitolo impariamo che cosa sono i numeri complessi e come si effettuano le operazioni in  $\mathbb{C}$ . Come applicazione, risolviamo equazioni di 2° grado (con  $\Delta < 0$ ) e altre equazioni polinomiali del tipo  $x^n = x_0$ .

Nella sezione 2.3 enunciamo il teorema fondamentale dell'algebra e riprendiamo il concetto di molteplicità algebrica di una radice: questo sarà uno strumento necessario nello studio della diagonalizzazione di matrici, come vedremo nel capitolo 7.

### 2.1 Definizioni introduttive e operazioni in $\mathbb{C}$

Operativamente, possiamo definire un numero complesso come una scrittura del tipo  $a + bi$ , dove  $a$  e  $b$  sono due numeri reali, ed  $i$  ha il significato che spiegheremo fra poco. Di solito indicheremo i numeri complessi con le lettere  $z$  oppure  $w$ : per esempio,  $z = 1 + \sqrt{2}i$ ,  $w = -1/3 + 3\pi i$  sono numeri complessi. L'insieme dei numeri complessi si indica con il simbolo  $\mathbb{C}$ :

$$(2.1.1) \quad \mathbb{C} = \{a + bi \text{ t.c. } a, b \in \mathbb{R}\} .$$

Tutto ciò acquista significato quando si descrive la *struttura algebrica* di  $\mathbb{C}$ . A tal fine, diciamo che la somma ed il prodotto di due numeri complessi avviene *secondo l'usuale algebra del calcolo letterale, con la seguente proprietà aggiuntiva*:

$$(2.1.2) \quad i^2 = -1 \quad .$$

In maggior dettaglio, se  $z = a + bi$  e  $w = c + di$  sono due numeri complessi, abbiamo:

$$(2.1.3) \quad z + w = (a + c) + (b + d)i \quad ;$$

$$(2.1.4) \quad \begin{aligned} zw &= (a + ib)(c + id) = ac + ibc + iad + i^2bd \\ &= (ac - bd) + (bc + ad)i \quad , \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza si ottiene usando la (2.1.2) e riordinando i termini.

▷ Esercizio 1 ◁

**Testo**

Siano  $z = 1 - 2i$  e  $w = 3 + i$ . Calcolare  $z + w$  e  $zw$ .

**Soluzione**

$$\begin{aligned} z + w &= (1 + 3) + (-2 + 1)i = 4 - i \quad ; \\ zw &= (1 - 2i)(3 + i) = (1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1)) + (-2 \cdot 3 + 1 \cdot 1)i = 5 - 5i \quad . \end{aligned}$$

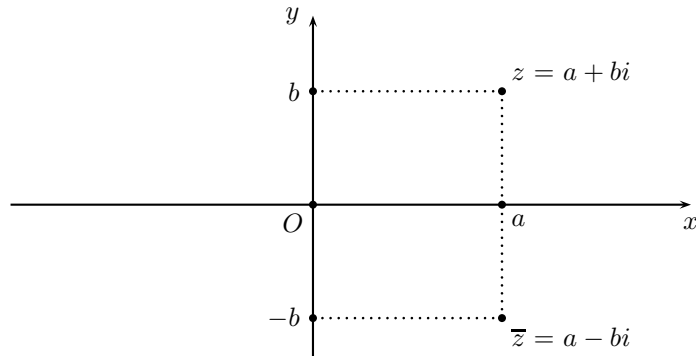
□

I numeri complessi possono essere identificati con i punti del piano cartesiano  $\mathbb{R}^2$ :  $z = a + bi$  corrisponde al punto di coordinate  $[a, b]$ , come illustrato in Figura 2.1.

È importante notare che i numeri *reali* corrispondono esattamente a quei numeri complessi che si trovano sull'asse  $x$  (cioè caratterizzati da  $b = 0$ ). Perciò, in questo contesto, l'asse  $x$  viene chiamato *asse reale*, mentre l'asse  $y$  è detto *asse immaginario*. L'ascissa  $a$  viene detta *parte reale* di  $z$ , e si scrive  $a = \text{Re}(z)$ , mentre l'ordinata  $b$  è indicata con  $b = \text{Im}(z)$ , *parte immaginaria* di  $z$ . Il numero complesso  $\bar{z} = a - bi$  è detto il *coniugato* di  $z$ ; le rappresentazioni di  $z$  e  $\bar{z}$  nel piano cartesiano sono riportate in Figura 2.1. Introduciamo anche il modulo del numero complesso  $z$ , così definito:

$$(2.1.5) \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad .$$

Per il teorema di Pitagora  $|z|$  coincide con la distanza di  $z$  dall'origine  $O$ .



**Figura 2.1** – Corrispondenza fra numeri complessi e punti del piano cartesiano.

▷ Esercizio 2 ◁

**Testo**

Verificare le seguenti identità, valide  $\forall z, w \in \mathbb{C}$ :

$$(2.1.6) \quad \begin{aligned} & \text{(i)} \quad zw = wz ; \\ & \text{(ii)} \quad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w} ; \\ & \text{(iii)} \quad z\bar{z} = |z|^2 . \end{aligned}$$

**Soluzione**

Poniamo  $z = a + bi$ ,  $w = c + di$  e verifichiamo la (ii). Abbiamo:

$$(2.1.7) \quad \overline{zw} = \overline{(a + bi)(c + di)} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i$$

$$(2.1.8) \quad \bar{z}\bar{w} = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) + (-ad - bc)i.$$

Confrontando la (2.1.7) e la (2.1.8) si ottiene la (2.1.6)(ii). Le altre identità in (2.1.6) sono simili e la loro verifica è lasciata al lettore. □

Le operazioni con l'*inverso* di un numero complesso ( $\neq 0$ ), cioè con  $1/z$ , possono essere effettuate facilmente tenendo conto dell'identità seguente:

$$(2.1.9) \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

▷ Esercizio 3 ◁

**Testo**

Sia  $z = 2 - 3i$ . Calcolare  $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$ ,  $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right)$ .

**Soluzione**

Usando la (2.1.9) si ha:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2 - 3i} = \frac{2 + 3i}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \frac{2 + 3i}{2^2 + 3^2} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i.$$

In conclusione:  $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{2}{13}$ ;  $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{3}{13}$ . □

Cerchiamo ora soluzioni in  $\mathbb{C}$  dell'equazione di 2° grado:

$$(2.1.10) \quad az^2 + bz + c = 0,$$

dove  $a, b, c \in \mathbb{R}$  sono fissati, con  $a \neq 0$ . Già sappiamo che, se  $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ , allora la (2.1.10) è risolvibile in  $\mathbb{R}$  (e, quindi, anche in  $\mathbb{C}$ ). Il fatto nuovo e interessante è che, se  $\Delta < 0$ , allora la (2.1.10) ha due soluzioni in  $\mathbb{C}$  date da:

$$(2.1.11) \quad z_1 = \frac{-b + (\sqrt{-\Delta})i}{2a}, \quad z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b - (\sqrt{-\Delta})i}{2a}.$$

Il lettore dovrebbe, per esercizio, riuscire a verificare che la (2.1.11) si ricava dallo stesso ragionamento algebrico utilizzato per determinare le soluzioni di (2.1.10) nel caso  $\Delta \geq 0$  (si veda il file.pdf proposto dal docente per le conoscenze preliminari).

▷ Esercizio 4 ◁

**Testo**

Determinare le soluzioni in  $\mathbb{C}$  di:

$$(2.1.12) \quad z^2 + z + 1 = 0$$

e verificare il risultato.

**Soluzione**

Risulta  $\Delta = b^2 - 4ac = -3 < 0$ . Usando le (2.1.11) si ottiene:

$$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_2 = \overline{z_1} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Verificare il risultato significa controllare che  $z_1$  e  $z_2$  effettivamente soddisfano la (2.1.12). Si deve, cioè, avere  $z_1^2 + z_1 + 1 = 0$  che, sostituendo l'espressione trovata per  $z_1$ , dà:

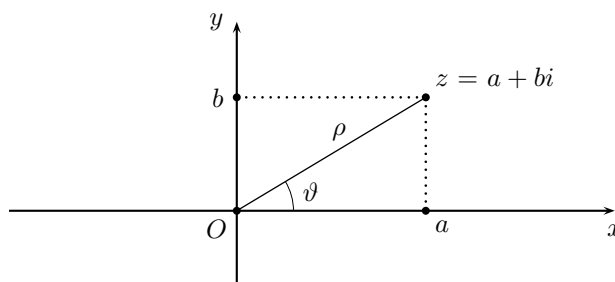
$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 1 = \\ & \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)i + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 1 = \\ & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 = 0, \end{aligned}$$

come richiesto. La verifica per  $z_2$  è del tutto simile. □

**Osservazione 1:** Ragionando come nell'esercizio 4, lo studente dovrebbe ora essere in grado di verificare, con sostituzione diretta in (2.1.10), la validità della formula risolutiva (2.1.11).

## 2.2 Forma trigonometrica dei numeri complessi e radici $n$ -esime

Indichiamo, secondo consuetudine,  $\rho = |z|$  e facciamo riferimento alla Figura 2.2.



**Figura 2.2** – Forma trigonometrica dei numeri complessi.

Se  $z \neq 0$ , allora  $z$  è univocamente determinato dalla conoscenza di  $\rho$  (sempre  $> 0$ ) e dell'angolo  $\vartheta$ . Il legame tra le coordinate  $[\rho, \vartheta]$  (che, in un contesto

successivo, chiameremo *coordinate polari*) e le coordinate cartesiane  $[a, b]$  è espresso dalle relazioni:

$$(2.2.1) \quad \begin{cases} a = \rho \cos \vartheta \\ b = \rho \sin \vartheta \end{cases} .$$

Ne segue che un numero  $z = a + bi$  può essere riscritto, mediante le (2.2.1), come:

$$(2.2.2) \quad z = a + bi = (\rho \cos \vartheta) + (\rho \sin \vartheta)i = \rho[\cos \vartheta + \sin \vartheta i].$$

Il formalismo si semplifica definendo il cosiddetto *esponenziale complesso*:

$$(2.2.3) \quad e^{i\vartheta} \stackrel{\text{def}}{=} [\cos \vartheta + \sin \vartheta i].$$

Sostituendo in (2.2.2) otteniamo:

$$(2.2.4) \quad z = \rho e^{i\vartheta},$$

che è denominata *forma trigonometrica* di  $z$ . È importante rendersi conto che la (2.2.3) è solo una definizione di comodo, in cui la terminologia *esponenziale complesso* è giustificata dal fatto che, come vedremo nella successiva (2.2.6),  $e^{i\vartheta}$  ha proprietà algebriche simili a quelle di cui godono le funzioni esponenziali reali.

**Osservazione 2:** Dato che le funzioni  $\cos \vartheta$  e  $\sin \vartheta$  sono periodiche di periodo  $2\pi$ , abbiamo che:

$$(2.2.5) \quad e^{i\vartheta} = e^{i(\vartheta+2k\pi)}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \forall \vartheta \in \mathbb{R}.$$

Per questo motivo è conveniente assumere che l'angolo  $\vartheta$ , che chiameremo *argomento* di  $z$ , (si scrive  $\vartheta = \text{Arg}(z)$ ), sia *definito a meno di multipli interi di  $2\pi$* . Per esempio, scrivere  $\text{Arg}(z) = 0$  è equivalente a scrivere  $\text{Arg}(z) = 2\pi$ , oppure  $\text{Arg}(z) = 4\pi$ .

L'osservazione precedente consente di enunciare la prima proprietà di interesse per noi, e cioè:

$$(2.2.6) \quad e^{i(\vartheta_1+\vartheta_2)} = e^{i\vartheta_1} \cdot e^{i\vartheta_2}, \quad \forall \vartheta_1, \vartheta_2 \in \mathbb{R} .$$

▷ Esercizio 5 ◁

**Testo**

Verificare la validità della (2.2.6).

**Soluzione**

Calcoliamo direttamente partendo dalla definizione (2.2.3):

$$\begin{aligned} e^{i\vartheta_1} \cdot e^{i\vartheta_2} &= [\cos \vartheta_1 + \sin \vartheta_1 i][\cos \vartheta_2 + \sin \vartheta_2 i] \\ &= [\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 - \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2] + [\cos \vartheta_2 \sin \vartheta_1 + \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2]i \\ &= \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)i = e^{i(\vartheta_1 + \vartheta_2)}, \end{aligned}$$

dove, per la penultima uguaglianza, abbiamo usato note formule trigonometriche. □

Applicando iterativamente la (2.2.6) si deduce anche la:

$$(2.2.7) \quad [e^{i\vartheta}]^n = e^{in\vartheta}, \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N},$$

da cui, ragionando ora sulla forma trigonometrica (2.2.4), segue:

$$(2.2.8) \quad z^n = \rho^n e^{in\vartheta}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, z \neq 0.$$

La (2.2.8) è detta formula di de Moivre.

▷ Esercizio 6 ◁

**Testo**

Sia  $z = (1 + i)$ . Calcolare  $\operatorname{Re}(z^{17})$ ,  $\operatorname{Im}(z^{17})$ .

**Soluzione**

Il punto  $z$  si trova sulla bisettrice  $y = x$ , per cui possiamo subito notare che  $\operatorname{Arg}(z) = \pi/4$ . Poiché  $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ , la forma trigonometrica di  $z$  è

$$(2.2.9) \quad z = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Applicando la formula di de Moivre alla (2.2.9), troviamo

$$(2.2.10) \quad \begin{aligned} z^{17} &= 2^{\frac{17}{2}} e^{i\frac{17}{4}\pi} = (2^8 \sqrt{2}) e^{i(\frac{16}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi)} \\ &= 2^8 \sqrt{2} e^{i(4\pi + \frac{1}{4}\pi)} = 2^8 \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}, \end{aligned}$$

dove, oltre alle proprietà delle potenze, abbiamo usato l'osservazione 2.



Riprendendo la (2.2.10), abbiamo:

$$(2.2.11) \quad z^{17} = 2^8 \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = 2^8 \sqrt{2} \left[ \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} i \right] = 2^8 + 2^8 i .$$

In conclusione:  $\operatorname{Re}(z^{17}) = 2^8 = 256$ ,  $\operatorname{Im}(z^{17}) = 256$ . □

▷ Esercizio 7 ◁

**Testo**

Sia  $z = 1 - i$ . Calcolare  $\operatorname{Re}(z^{11})$ ,  $\operatorname{Im}(z^{11})$ .

**Soluzione**

$\operatorname{Re}(z^{11}) = -32$ ,  $\operatorname{Im}(z^{11}) = -32$ .

(**Suggerimento:** in questo caso,  $\operatorname{Arg}(z) = -\pi/4$ ). □

Ora utilizziamo la forma trigonometrica e la formula di de Moivre per determinare le cosiddette *radici n-esime* di un numero complesso.

▷ Esercizio 8 ◁

**Testo**

Determinare le soluzioni in  $\mathbb{C}$  dell'equazione:

$$(2.2.12) \quad z^4 = -4 .$$

**Soluzione**

Trasformiamo l'equazione (2.2.12) in forma trigonometrica usando la (2.2.4) e notando che  $\operatorname{Arg}(-4) = \pi$ , in quanto  $-4$  si trova sulla parte *negativa* dell'asse reale; otteniamo che la (2.2.12) si riscrive nel modo seguente:

$$(2.2.13) \quad (\rho e^{i\vartheta})^4 = 4e^{i\pi} ,$$

o ancora, usando la formula di de Moivre:

$$(2.2.14) \quad \rho^4 e^{i4\vartheta} = 4 e^{i\pi} .$$

Affinché l'uguaglianza sussista, è necessario che i membri dell'equazione (2.2.14) abbiano lo stesso modulo e lo stesso argomento, la qual cosa equivale a imporre:

$$(2.2.15) \quad \begin{array}{ll} \text{(i)} & \rho^4 = 4 \\ \text{(ii)} & 4\vartheta = \pi + 2k\pi , \quad k \in \mathbb{Z} . \end{array}$$

Va notato che la sola richiesta  $4\vartheta = \pi$ , a causa dell'osservazione 2, non sarebbe stata sufficiente in quanto avrebbe portato alla perdita di soluzioni. D'altra parte,

in (2.2.15)(ii), la soluzione associata a  $k = 4$  coincide con quella relativa a  $k = 0$ ; nella sostanza, quindi, possiamo riscrivere la (2.2.15) come:

$$(2.2.16) \quad \begin{array}{ll} \text{(i)} & \rho^4 = 4 \\ \text{(ii)} & 4\vartheta = \pi + 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, 3. \end{array}$$

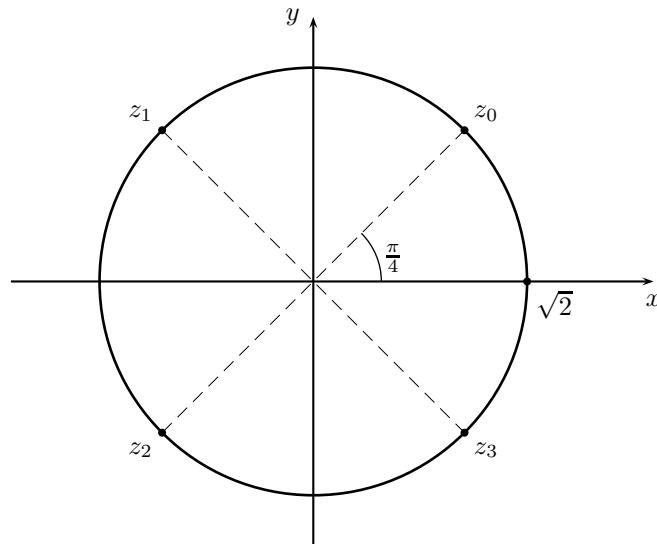
Con un ulteriore passaggio, usando la sostituzione  $4^{1/4} = 2^{2/4} = \sqrt{2}$ , concludiamo che:

$$(2.2.17) \quad \begin{array}{ll} \text{(i)} & \rho = \sqrt{2} \\ \text{(ii)} & \vartheta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3. \end{array}$$

Ne segue che abbiamo determinato quattro soluzioni, tutte poste sulla circonferenza di centro  $O$  e raggio  $\rho = \sqrt{2}$  (si veda la Figura 2.3):

$$(2.2.18) \quad z_0 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_1 = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}, \quad z_2 = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4}}, \quad z_3 = \sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{4}}.$$

Usando la definizione (2.2.3) si può ora risalire facilmente all'espressione delle



**Figura 2.3** – Rappresentazione delle 4 radici complesse dell'equazione  $z^4 = -4$ .

soluzioni in forma cartesiana:

$$(2.2.19) \quad z_0 = 1 + i, \quad z_1 = -1 + i, \quad z_2 = -1 - i, \quad z_3 = 1 - i.$$

Si può notare che  $z_3 = \overline{z_0}$ ,  $z_2 = \overline{z_1}$ . Inoltre vediamo che le quattro soluzioni dividono la circonferenza cui appartengono in quattro parti uguali.

Le quattro soluzioni trovate sono chiamate radici  $n$ -esime ( $n = 4$ ) del numero (complesso)  $-4$ .  $\square$

Il procedimento descritto nell'esercizio precedente ha validità generale, cioè può essere applicato per determinare le  $n$  soluzioni in  $\mathbb{C}$  dell'equazione:

$$(2.2.20) \quad z^n = z_0,$$

dove  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , e  $z_0 \in \mathbb{C}$  sono fissati. Le  $n$  soluzioni così trovate sono dette radici  $n$ -esime di  $z_0$ . Si trovano tutte sulla circonferenza di centro  $O$  e raggio  $\rho = |z_0|^{1/n}$ , e la dividono in  $n$  parti uguali.

▷ Esercizio 9 ◁

**Testo**

Risolvere in  $\mathbb{C}$ :

$$z^4 = 1.$$

**Soluzione**

$z_0 = 1$ ,  $z_1 = i$ ,  $z_2 = -1$ ,  $z_3 = -i$ .  $\square$

## 2.3 Teorema fondamentale dell'algebra e molteplicità algebrica

Un *polinomio* di grado  $n$  a coefficienti complessi è un'espressione del tipo:

$$(2.3.1) \quad P(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n \quad (a_n \neq 0),$$

dove i coefficienti  $a_0, \dots, a_n$  sono dei numeri complessi. Più sinteticamente, avremmo potuto scrivere:

$$(2.3.2) \quad P(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j, \quad a_j \in \mathbb{C}, a_n \neq 0.$$

Riprendiamo ora brevemente alcuni concetti che già conosciamo bene dallo studio dei polinomi a coefficienti reali. Più precisamente, diremo che  $z_0 \in \mathbb{C}$

è una radice di  $P(z)$  se è una soluzione dell'equazione  $P(z) = 0$ , o, in altre parole, se

$$(2.3.3) \quad P(z_0) = 0 \quad .$$

Se  $z_0$  è una radice di  $P(z)$ , allora esiste un'unica fattorizzazione di  $P(z)$  del tipo:

$$(2.3.4) \quad P(z) = (z - z_0)^k Q(z) \quad ,$$

dove  $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ , mentre  $Q(z)$  ha grado  $(n - k)$  e  $Q(z_0) \neq 0$ . Il numero naturale  $k$  si chiama *molteplicità algebrica* di  $z_0$  e si indica con la simbologia:

$$(2.3.5) \quad \mu_a(z_0) = k \quad .$$

Il seguente è un esercizio di ripasso sulla divisione di polinomi.

▷ Esercizio 10 ◁

**Testo**

Sia  $P(z) = z^4 - 3z^3 + 2z^2 + z - 1$ . Verificare che  $z_0 = 1$  è una radice di  $P(z)$  e determinare  $\mu_a(1)$ .

**Soluzione**

$$P(1) = 1^4 - 3 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 + 1 - 1 = 0 \quad ,$$

per cui effettivamente  $z_0 = 1$  è una radice di  $P(z)$ . Per ottenere la fattorizzazione (2.3.4) dobbiamo dividere  $P(z)$  per  $(z - 1)$ , usando l'algoritmo euclideo per la divisione dei polinomi:

$$(2.3.6) \quad \begin{array}{r|rrrrr} +z^4 & -3z^3 & +2z^2 & +z & -1 & z-1 \\ -z^4 & +z^3 & & & & \hline // & -2z^3 & +2z^2 & +z & -1 & z^3 - 2z^2 + 1. \\ & +2z^3 & -2z^2 & & & \\ // & // & & +z & -1 & \\ & & & -z & +1 & \\ // & // & & // & // & \end{array}$$

Da (2.3.6) risulta:

$$(2.3.7) \quad P(z) = (z - 1)(z^3 - 2z^2 + 1) = (z - 1)Q(z),$$

dove abbiamo posto  $Q(z) = z^3 - 2z^2 + 1$ . Poiché  $Q(1) = 0$ , la fattorizzazione non è ancora terminata e bisogna dividere  $Q(z)$  per  $z - 1$ . Abbiamo:

$$(2.3.8) \quad \begin{array}{r|l} \begin{array}{r} +z^3 \quad -2z^2 \quad +1 \\ -z^3 \quad +z^2 \\ \hline // \quad -z^2 \quad +1 \\ \quad +z^2 \quad -z \\ \hline // \quad -z \quad +1 \\ \quad +z \quad -1 \\ \hline // \quad // \end{array} & \begin{array}{l} z - 1 \\ \hline z^2 - z - 1. \end{array} \end{array}$$

Da cui  $Q(z) = (z - 1)(z^2 - z - 1)$ , che sostituita in (2.3.7) fornisce:

$$(2.3.9) \quad P(z) = (z - 1)^2 (z^2 - z - 1),$$

che è la fattorizzazione di tipo (2.3.4) richiesta, in quanto  $z_0 = 1$  non è radice di  $(z^2 - z - 1)$ . Allora  $\mu_a(1) = 2$ .  $\square$

Possiamo adesso enunciare il seguente importante risultato:

---



---

**Teorema 1: (Teorema fondamentale dell'algebra)**

Sia  $P(z)$  un polinomio a coefficienti complessi di grado  $n$ .

Allora  $P(z)$  ammette esattamente  $n$  radici in  $\mathbb{C}$ , a condizione che ognuna di esse sia contata un numero di volte pari alla sua molteplicità algebrica.

---



---

▷ Esercizio 11 ◁

**Testo**

Determinare le quattro radici in  $\mathbb{C}$  del polinomio  $P(z)$  dell'esercizio precedente.

**Soluzione**

Da (2.3.9) sappiamo che  $z_0 = 1$  è radice che va contata due volte (ha infatti molteplicità algebrica  $\mu_a = 2$ ). Le altre due radici si ottengono risolvendo l'equazione:

$$(2.3.10) \quad z^2 - z - 1 = 0.$$

Si ottiene:

$$(2.3.11) \quad z_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad z_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

In conclusione: le radici di  $P(z)$  sono  $z_0 = 1$  (contata due volte) e poi  $z_1$  e  $z_2$ , date in (2.3.11).  $\square$

## 2.4 Esercizi di riepilogo

$\triangleright$  Esercizio 12  $\triangleleft$

**Testo**

Sia:  $z = 1 + 2i$ . Calcolare  $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)$  e  $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)$ .

**Soluzione**

$$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{1 - 2i} = \frac{1 + 2i}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{1 + 2i}{1^2 + 2^2} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i,$$

per cui  $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{1}{5}$ ,  $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{2}{5}$ .  $\square$

$\triangleright$  Esercizio 13  $\triangleleft$

**Testo**

Rappresentare graficamente in  $\mathbb{R}^2$  l'insieme

$$A = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.c. } 1 \leq |z + i| \leq 2\}$$

**Soluzione**

Convien partire da un'osservazione preliminare: siano  $z_1 = a_1 + b_1i$ ,  $z_2 = a_2 + b_2i$  due numeri complessi. Allora

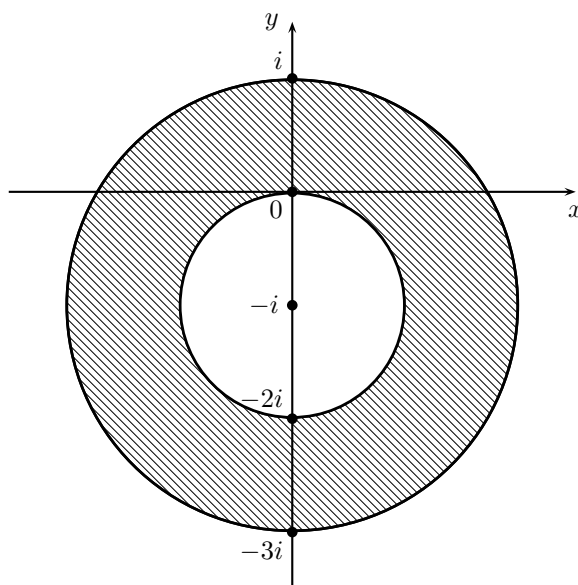
$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2},$$

ovvero  $|z_1 - z_2|$  coincide con la distanza euclidea tra i due punti  $z_1$  e  $z_2$ . Detto questo, è allora chiaro che l'insieme  $A$  è costituito da quegli  $z \in \mathbb{C}$  la cui distanza da  $(-i)$  è compresa tra 1 e 2. Dunque  $A$  è la corona circolare in Figura 2.4.

$\triangleright$  Esercizio 14  $\triangleleft$

**Testo**

Sia  $P(z) = z^4 - 3z^3 + 2z^2 - 4z + 8$ . Sapendo che  $z_0 = 2$  è una radice di  $P(z)$ , determinare le radici di  $P(z)$  e le loro rispettive molteplicità algebriche.



**Figura 2.4** – Rappresentazione grafica dell'insieme  $A = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.c. } 1 \leq |z+i| \leq 2\}$ .

**Soluzione**

$$z_0 = 2, \mu_a(z_0) = 2 \cdot z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}, z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}, \text{ con } \mu_a(z_j) = 1, j = 1, 2. \quad \square$$

▷ Esercizio 15 ◁

**Testo**

Risolvere in  $\mathbb{C}$  l'equazione

$$z^3 + 8 = 0.$$

**Soluzione**

Passando alla forma trigonometrica, l'equazione diventa:

- (i)  $\rho^3 = 8$
- (ii)  $3\vartheta = \pi + 2k\pi, k = 0, 1, 2.$

In forma cartesiana, le tre soluzioni risultano essere:

$$z_0 = 1 + \sqrt{3}i, \quad z_1 = -2, \quad z_2 = \overline{z_0} = 1 - \sqrt{3}i.$$

□

▷ Esercizio 16 ◁

**Testo**

Sia  $z = -i$ . Calcolare  $\operatorname{Re}(z^{20})$ ,  $\operatorname{Im}(z^{21})$ .

**Soluzione**

In forma trigonometrica,  $z = e^{i\frac{3}{2}\pi}$ . Applicando la (2.2.8) si perviene a  $\operatorname{Re}(z^{20}) = 1$ ,  $\operatorname{Im}(z^{21}) = -1$ . □

▷ Esercizio 17 ◁

**Testo**

Risolvere in  $\mathbb{C}$  l'equazione

$$z^{12} = 1.$$

**Soluzione**

Si trova  $\rho = 1$ ,  $\vartheta = k\frac{\pi}{6}$ ,  $k = 0, \dots, 11$ . Usando i noti valori per  $\cos \vartheta$ ,  $\sin \vartheta$  si arriva a:

$$\begin{aligned} z_0 = 1, \quad z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_3 = i, \\ z_4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_5 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad z_6 = -1, \quad z_7 = \overline{z_5}, \\ z_8 = \overline{z_4}, \quad z_9 = -i = \overline{z_3}, \quad z_{10} = \overline{z_2}, \quad z_{11} = \overline{z_1}. \end{aligned}$$

□

▷ Esercizio 18 ◁

**Testo**

Poniamo  $z = -1 + i$ ,  $w = 2i$ . Calcolare:

(i)  $\operatorname{Re}\left(\frac{z}{w}\right)$  (ii)  $\operatorname{Re}((1+z)^{18})$  (iii)  $\operatorname{Im}((\overline{w})^{19})$ .

**Soluzione**

(i):  $\frac{1}{2}$  (ii):  $-1$  (iii):  $2^{19}$ .

□



## 2.5 Considerazioni conclusive

I numeri complessi, oltre che in svariati campi della matematica, vengono usati in fisica (in particolare, in meccanica quantistica), nonché in ingegneria (specialmente elettronica, telecomunicazioni e elettrotecnica) per la loro utilità nel rappresentare onde elettromagnetiche e correnti elettriche ad andamento temporale sinusoidale.

I numeri complessi hanno avuto una lunga storia: il più antico riferimento alla radice di un numero negativo si trova negli scritti di Erone di Alessandria, risalenti al secolo I a.C. La comparsa di radici di numeri negativi iniziò a farsi più frequente nel secolo XVI, quando vennero scoperte le soluzioni delle equazioni di terzo grado e il matematico italiano Tartaglia riuscì a risolvere le equazioni di quarto grado. Queste formule evidenziavano come le radici dei numeri negativi fossero utili formalmente per trovare le radici di un polinomio.

Il termine *immaginario* venne utilizzato per la prima volta in questo contesto da Cartesio, nel secolo XVII, e ben rappresenta la titubanza dei matematici dell'epoca verso questi nuovi numeri. Nel secolo successivo i lavori di A. de Moivre e di Eulero fornirono una prima base teorica per lo studio dei numeri complessi. L'esistenza dei numeri complessi fu però accettata completamente solo quando la loro interpretazione geometrica fu scoperta prima da C. Wessel nel 1799, e poi riscoperta e resa famosa da Gauss (nel suo saggio pubblicato nel 1832). In particolare, il lavoro di Gauss comprendeva una prima sistematizzazione moderna della dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra. L'enunciato di questo celebre teorema risale all'opera del matematico di origine fiamminga A. Girard (*L'invention en algebre*, 1629); un primo serio, ma incompleto, tentativo di dimostrazione del teorema fu effettuato da d'Alembert intorno al 1745, e per questo motivo il teorema fondamentale dell'algebra è noto, in Francia, come teorema di d'Alembert.

La teoria delle funzioni di variabili complesse è quella branca dell'analisi matematica che applica le nozioni del calcolo infinitesimale alle funzioni che hanno per dominio e codominio insiemi di numeri complessi. In questo contesto, un concetto fondamentale è quello di *funzione olomorfa*: si tratta di una classe di funzioni  $f(z)$  su cui è definita una nozione di derivata simile a quella usuale per le funzioni reali. Le funzioni olomorfe preservano gli angoli,

ma non necessariamente le distanze, e risultano essere uno strumento estremamente utile nello studio delle superfici nello spazio euclideo (teoria delle superfici di Riemann).

Nella sezione 3.3 si è reso necessario effettuare la divisione tra polinomi. L'algoritmo per la divisione di polinomi è concettualmente equivalente al classico algoritmo euclideo per trovare il massimo comune divisore (M.C.D.) tra due numeri interi. Questo è uno degli algoritmi più antichi, essendo presente nella celebrata opera *Elementi* di Euclide (300 a.C.). L'importanza di questi concetti nell'algebra moderna è notevole: ogni oggetto algebrico in cui è possibile eseguire la divisione col resto è chiamato *anello euclideo*.

# Capitolo 3

## Matrici

### 3.0 Scopi del capitolo

L'algebra lineare è uno strumento matematico essenziale praticamente in tutti gli ambiti scientifici: noi la trattiamo in questo capitolo, e poi nei successivi capitolo 6 (Sistemi lineari) e 7 (Diagonalizzazione). In linea generale, va subito detto che la vastità, nonché la concettuale complessità, di questo ramo della matematica sono talmente elevati da rendere impensabile che uno studente del primo anno universitario possa avere la maturità scientifica necessaria per cogliere gli aspetti più profondi di queste teorie. Purtroppo, di conseguenza, si rende indispensabile procedere attraverso un'estesa semplificazione dei concetti, perseguendo, almeno in prima istanza, semplicemente lo scopo di consentire al lettore l'acquisizione delle capacità sufficienti per lavorare con le matrici: ciò si rivelerà, in seguito, fondamentale per recepire il linguaggio tensoriale usato nei corsi di meccanica razionale e scienza delle costruzioni.

Come riprenderemo più formalmente nei paragrafi successivi, una matrice  $A$  a coefficienti reali è una tabella del tipo

$$(3.0.1) \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

dove i coefficienti  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ . L'ambiente matematico più appropriato per sviluppare la teoria delle matrici è quello dei cosiddetti

*spazi vettoriali*. D'altra parte, visto il notevole grado di astrazione di questo concetto, anche in rapporto alla limitatezza dei nostri obiettivi, abbiamo deciso sostanzialmente di limitare al massimo il formalismo della teoria degli spazi vettoriali a vantaggio della descrizione operativa delle principali operazioni che dobbiamo imparare a eseguire con le matrici. Più precisamente, solo nel successivo capitolo sui sistemi lineari si renderà necessario fare qualche breve cenno alla nozione di spazio vettoriale astratto. In questo capitolo, invece, il lettore dovrà soprattutto riuscire a prendere concretamente familiarità con i seguenti concetti: somma e prodotto di matrici; determinanti, matrice inversa e rango di una matrice.

### 3.1 Operazioni con le matrici

---

**Definizione 1:** Una matrice, di tipo  $(m \times n)$  a coefficienti reali, denotata  $A = [a_{ij}]$ , dove  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ , è una tabella del tipo

$$(3.1.1) \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

con  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ .

---

Notiamo che la matrice  $A$  in (3.1.1) ha  $m$  righe e  $n$  colonne, e i suoi coefficienti  $a_{ij}$  sono numeri reali. L'insieme delle matrici di tipo  $m \times n$  è denotato  $M_{m,n}(\mathbb{R})$ . Nel caso in cui  $m = n$  (matrici quadrate di ordine  $n$ ) scriveremo semplicemente  $M_n(\mathbb{R})$ . Segnaliamo da subito che, in certe situazioni, è utile considerare matrici a coefficienti complessi ( $M_{m,n}(\mathbb{C})$ ). Nella nostra trattazione elementare presenteremo i vari concetti, e le operazioni, nel caso  $M_{m,n}(\mathbb{R})$ . Però, è utile sapere che tutta questa teoria comprende anche, senza modifiche concettuali, il caso  $M_{m,n}(\mathbb{C})$ ; a ciò fa eccezione la teoria della diagonalizzazione del capitolo 7, in cui lavorare in  $\mathbb{C}$  piuttosto che in  $\mathbb{R}$  comporta alcune differenze, come anche accennato nell'ultima sezione di quel capitolo.

Torniamo ora alla nostra generica matrice (3.1.1): vediamo che a ogni coefficiente corrispondono due numeri naturali, cioè i cosiddetti *indici*: l'indice a

sinistra ( $i$ , nella nostra notazione) è detto indice di riga, mentre  $j$  rappresenta l'indice di colonna. In altre parole, il coefficiente  $a_{23}$  si trova sulla seconda riga e sulla terza colonna (le righe si considerano con numerazione crescente dall'alto al basso, mentre le colonne sono numerate da sinistra a destra). Oltre a  $i$  e  $j$ , altre lettere che tipicamente useremo per denotare indici sono  $l$  e  $k$ . All'inizio il formalismo che coinvolge gli indici può risultare difficile, quindi abbiamo deciso di limitarne l'uso. Però bisogna da subito capire che la teoria che stiamo illustrando comprende casi in cui  $m$  e  $n$  (in (3.1.1)) possono essere numeri molto grandi. Quindi non sarebbe assolutamente efficace, in generale, descrivere le varie operazioni usando, ad esempio,  $n \cdot m$  simboli diversi invece degli indici!

Iniziamo ora con i primi concetti ed esempi. Sia  $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ : chiameremo *diagonale principale* di  $A$  quella formata dai coefficienti con  $i = j$ , cioè dagli  $a_{ii}$ , dove  $1 \leq i \leq p$ , con  $p = \text{Min}\{m, n\}$  (quest'ultima scrittura significa che  $p$  è il più piccolo tra  $m$  e  $n$ ).

**Esempio 1:**

$$(3.1.2) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 0 & 1 & 4 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R}) \quad .$$

La diagonale principale è costituita dai coefficienti  $a_{11}$ ,  $a_{22}$  e  $a_{33}$  che valgono rispettivamente 2, 0 e 2.

**Definizione 2:** Sia  $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ . Diremo che  $A$  è una matrice *triangolare superiore (inferiore)* se tutti i coefficienti al di sotto (sopra) della diagonale principale sono nulli.

**Esempio 2:**

$$(3.1.3) \quad \text{(i)} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{(ii)} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} .$$

In (3.1.3) vediamo che  $A \in M_{3,4}(\mathbb{R})$  è una matrice triangolare superiore. Invece  $B \in M_{4,5}(\mathbb{R})$  è triangolare inferiore.

---

---

L'uso della dizione *sotto (sopra) la diagonale principale* nella definizione precedente non è molto buono. Per esprimere in modo matematicamente più appropriato questo concetto conviene usare gli indici: più specificamente il lettore, ora che, mediante (3.1.3), ha visualizzato matrici triangolari superiori e inferiori, dovrebbe riuscire a svolgere autonomamente il seguente esercizio:

▷ Esercizio 1 ◁

**Testo**

Riesprimere la definizione 2 usando gli indici di righe e colonne.

**Soluzione**

Sia  $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ . Diremo che  $A$  è una matrice *triangolare superiore* se

$$(3.1.4) \quad (i > j) \Rightarrow (a_{ij} = 0) \quad .$$

In modo analogo, diremo che  $A$  è una matrice *triangolare inferiore* se

$$(3.1.5) \quad (i < j) \Rightarrow (a_{ij} = 0) \quad .$$

□

---

---

**Definizione 3:** Sia  $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ . Si indica col simbolo  ${}^tA$  (si legge *trasposta* di  $A$ ) la matrice, di tipo  $n \times m$ , che si ottiene da  $A$  invertendo i ruoli di righe e colonne: cioè, la prima riga di  $A$  diventa la prima colonna di  ${}^tA$ , etc.

---

---

---

---

**Esempio 3:** Se

$$(3.1.6) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R}),$$

allora

$$(3.1.7) \quad {}^tA = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \in M_{4,3}(\mathbb{R}).$$

---

---

---

---

**Definizione 4:** Sia  $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ . Diremo che  $A$  è *simmetrica* se  ${}^tA = A$ .

---

---

---

---

**Esempio 4:**

$$(3.1.8) \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & \sqrt{2} \\ -2 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \quad .$$

La matrice  $A$  in (3.1.8) è simmetrica.

---

---

Notiamo anche, per uso futuro, che la condizione  ${}^tA = A$  può anche essere riformulata mediante la richiesta

$$(3.1.9) \quad a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j \quad .$$

Terminato questo lavoro preliminare, in cui abbiamo preso confidenza con il linguaggio delle matrici, possiamo passare alla descrizione delle varie operazioni.

**Somma di matrici:** Siano  $A = [a_{ij}]$ ,  $B = [b_{ij}]$  2 matrici di tipo  $m \times n$  (cioè  $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ). Definiamo

$$(3.1.10) \quad A + B = [a_{ij} + b_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \quad .$$

In pratica, stiamo dicendo che la somma avviene coefficiente per coefficiente.

▷ Esercizio 2 ◁

**Testo**

Siano  $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$ , dove

$$(3.1.11) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Calcolare  $A + B$  e  $A + B + C$ .

**Soluzione**

$$(3.1.12) \quad A + B = \begin{bmatrix} 2+0 & -1-2 \\ 3+4 & 4-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \quad ;$$

$$(3.1.13) \quad A + B + C = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \quad .$$

□

**Moltiplicazione di una matrice per un numero reale:** Siano  $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Definiamo

$$(3.1.14) \quad \lambda A = [\lambda a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \quad .$$

In pratica, ognuno dei coefficienti di  $A$  è moltiplicato per  $\lambda$ .

▷ Esercizio 3 ◁

**Testo**

Sia

$$(3.1.15) \quad A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}).$$

Calcolare  $3A$ .

**Soluzione**

$$(3.1.16) \quad 3A = \begin{bmatrix} 3 \cdot 3 & 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & 12 \end{bmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \quad .$$

□

▷ Esercizio 4 ◁

**Testo**

Siano

$$(3.1.17) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Calcolare  $2A - 3B$  e  $3A - 2B$ .

**Soluzione**

$$(3.1.18) \quad \begin{aligned} 2A - 3B &= 2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & 3 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 3 \\ 3 & -8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



$$(3.1.19) \quad 3A - 2B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 7 & -7 \end{bmatrix}.$$

□

La prossima operazione è molto importante e richiede maggiore attenzione.

**Prodotto (righe per colonne) di due matrici:** Siano  $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ,  $B = [b_{k\ell}] \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ . Il loro prodotto  $C = A \cdot B \in M_{m,p}(\mathbb{R})$  è definito mediante

$$(3.1.20) \quad C = [c_{i\ell}] \quad , \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq \ell \leq p,$$

dove

$$(3.1.21) \quad c_{i\ell} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{j\ell} \quad .$$

Iniziamo con alcune osservazioni: per prima cosa, notiamo che il prodotto  $A \cdot B$  ha senso solo quando il numero di colonne di  $A$  coincide col numero di righe di  $B$ . Questo prodotto si chiama 'righe per colonne' per il seguente motivo: il coefficiente  $c_{i\ell}$ , definito in (3.1.21), si ottiene facendo il *prodotto scalare* tra la riga  $i$ -esima di  $A$  e la colonna  $\ell$ -esima di  $B$ . In realtà, si tratta di un prodotto scalare generalizzato, cioè: se  $\vec{u} = [u_1, \dots, u_n]$ ,  $\vec{v} = [v_1, \dots, v_n]$ , allora

$$(3.1.22) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n \quad (= \sum_{i=1}^n u_i v_i) \quad .$$

Si noti che la (3.1.22) coincide col prodotto scalare usuale (si veda il capitolo 1) nel caso in cui  $n = 3$ . La generalizzazione (3.1.22) è utile nel contesto degli spazi vettoriali astratti, come vedremo nel capitolo 6. Per il momento, ci accontentiamo di aver capito che la definizione in (3.1.21) dice proprio che  $c_{i\ell}$  è il prodotto scalare della riga  $i$ -esima di  $A$  con la colonna  $\ell$ -esima di  $B$ . Questi due vettori devono dunque avere lo stesso numero  $n$  di coordinate, da cui la necessità, già evidenziata, che il numero di colonne di  $A$  coincida col numero di righe di  $B$ . Le cose si chiariscono molto affrontando qualche primo esempio.

▷ Esercizio 5 ◁

**Testo**

Siano

$$(3.1.23) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calcolare  $C = A \cdot B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ .

**Soluzione**

Scriviamo tutti i passaggi:

$$(3.1.24) \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix},$$

dove

$$(3.1.25) \quad c_{11} = \sum_{j=1}^3 a_{1j}b_{j1}, \quad c_{12} = \sum_{j=1}^3 a_{1j}b_{j2} \quad \text{etc.}$$

Quindi

$$(3.1.26) \quad \begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) = -3 \\ c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 1 \\ c_{13} &= \dots\dots\dots = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 3 = 8 \\ c_{21} &= \dots\dots\dots = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) = -7 \\ c_{22} &= 5 \qquad c_{23} = 7 \end{aligned}$$

In conclusione

$$(3.1.27) \quad C = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 8 \\ -7 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

□

Nel caso in cui  $A, B$  siano matrici quadrate dello stesso ordine (cioè  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ) è possibile calcolare sia  $A \cdot B$  sia  $B \cdot A$ : in generale però si ottiene un risultato diverso, per cui la moltiplicazione di matrici in  $M_n(\mathbb{R})$  ( $n \geq 2$ ) non è un'operazione commutativa.

▷ Esercizio 6 ◁

**Testo**

Siano

$$(3.1.28) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Calcolare  $A \cdot B$  e  $B \cdot A$ .

**Soluzione**

Iniziamo col calcolo di  $C = A \cdot B$ . Abbiamo

$$(3.1.29) \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix},$$

con

$$(3.1.30) \quad \begin{aligned} c_{11} &= 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 0 & ; & \quad c_{12} = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 4 = 4 \\ c_{21} &= 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 = -3 & ; & \quad c_{22} = 3 \cdot 0 + 0 \cdot 4 = 0 \end{aligned}$$

e quindi

$$(3.1.31) \quad A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

In modo simile, si calcola

$$(3.1.32) \quad B \cdot A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 16 & 2 \end{bmatrix}.$$

Confrontando i due risultati ottenuti si constata immediatamente che  $A \cdot B \neq B \cdot A$ .

□

A questo punto il lettore dovrebbe essere in grado di svolgere agevolmente il seguente:

▷ Esercizio 7 ◁

**Testo**

Siano

$$(3.1.33) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Calcolare  $A \cdot B$  e  $B \cdot A$ .

**Soluzione**

Il risultato è

$$(3.1.34) \quad A \cdot B = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

□

**Definizione 5:** Sia  $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ . Diremo che  $A$  è una *matrice diagonale* se

$$(3.1.35) \quad (i \neq j) \Rightarrow (a_{ij} = 0) \quad .$$

Ad esempio,

$$(3.1.36) \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

è una matrice diagonale. Una matrice diagonale molto importante è la cosiddetta *matrice identità*

$$(3.1.37) \quad I = [\delta_{ij}]$$

dove  $\delta_{ij}$ , detto simbolo di Kronecker, è definito da

$$(3.1.38) \quad \begin{aligned} \delta_{ij} &= 1 && \text{se } i = j \\ \delta_{ij} &= 0 && \text{se } i \neq j \end{aligned}$$

Ad esempio

$$(3.1.39) \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \quad , \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

rappresentano rispettivamente la matrice identità di ordine 2 e 3. Abbiamo evitato la notazione  $I_n$  per la matrice identità di ordine  $n$ , in quanto l'ordine

della matrice sarà sempre chiaro dal contesto. La matrice identità è così chiamata in quanto gode della seguente proprietà:

$$(3.1.40) \quad A \cdot I = I \cdot A = A \quad \forall A \in M_n(\mathbb{R}).$$

In pratica, la matrice  $I$  riveste il ruolo che 1 occupa per la moltiplicazione fra numeri reali. Si consiglia al lettore di testare la validità di (3.1.40) scegliendo a caso qualche  $A \in M_2(\mathbb{R})$ , oppure  $A \in M_3(\mathbb{R})$ . Altrimenti

▷ Esercizio 8 ◁

**Testo (\*)**

Verificare la (3.1.40).

**Soluzione**

Posto  $C = A \cdot I$ , si ha

$$(3.1.41) \quad c_{i\ell} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \delta_{j\ell} = a_{i\ell} \quad ,$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che l'unico addendo della sommatoria che dà contributo non nullo è  $j = \ell$ . Ma la (3.1.41) dice proprio  $C = A$ . Il caso  $I \cdot A$  è analogo. □

## 3.2 Determinanti e matrice inversa

Sia  $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ . Il *determinante* di  $A$ , denotato  $\det A$ , è un numero reale che viene associato ad  $A$  mediante un processo di calcolo che ora illustriamo.

**Caso n=1:**

$$(3.2.1) \quad A = [a_{11}] \quad , \quad \det A = a_{11} \quad .$$

**Caso n=2:** posto

$$(3.2.2) \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad ,$$

allora

$$(3.2.3) \quad \det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \quad .$$

In alcuni contesti è preferibile usare una notazione alternativa per  $\det A$ : scriveremo i coefficienti di  $A$  tra due barre verticali, come segue:

$$(3.2.4) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \quad .$$

Ad esempio,

$$(3.2.5) \quad \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 1 \cdot (-6) = 18 \quad .$$

Questa stessa notazione sarà applicata anche a matrici quadrate di ordine  $n$  qualunque. Per quanto riguarda appunto il calcolo di  $\det A$ , con  $A$  quadrata di ordine  $n \geq 3$ , l'idea operativa è la seguente: ricondurre il calcolo di un determinante di ordine  $n$  al calcolo di  $n$  determinanti di ordine  $(n - 1)$ . Applicando questo ragionamento poi ai determinanti di ordine  $(n - 1)$ , e visto che sappiamo calcolare  $\det A$  quando  $n = 2$ , si intuisce che in un numero finito di passi si può arrivare al risultato. Tutto ciò diviene assai più chiaro già dopo aver esaminato il seguente

**Caso n=3:** posto

$$(3.2.6) \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad ,$$

allora

$$(3.2.7) \quad \det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad .$$

In particolare, nella (3.2.7) vediamo esplicitamente come il calcolo di un determinante di ordine 3 sia riconducibile a quello di tre determinanti di ordine 2 (ognuno dei quali può essere calcolato mediante (3.2.3)).

▷ Esercizio 9 ◁

**Testo**

Siano

$$(3.2.8) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcolare  $\det A$  e  $\det B$ .

**Soluzione**

$$(3.2.9) \quad \det A = 1 \cdot 5 - 2 \cdot (-3) = 11$$

$$(3.2.10) \quad \det B = 1 \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

da cui

$$(3.2.11) \quad \det B = 1 \cdot 19 - 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-10) = -13$$

□

La formula (3.2.7) rappresenta il calcolo di  $\det A$  sviluppato secondo la prima riga. In realtà, è possibile calcolare  $\det A$  sviluppando secondo una riga (o colonna) qualunque. Per arrivare a capire questo meccanismo generale dobbiamo fare un po' di lavoro preliminare che risulterà molto utile anche per la trattazione di altri argomenti successivi.

**Complemento algebrico:** Sia  $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ . Il *complemento algebrico* del coefficiente  $a_{ij}$ , denotato  $A_{ij}$ , è definito da

$$(3.2.12) \quad A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} \cdots & | & \cdots \\ - & - & - & a_{ij} & - & - & - \\ \cdots & | & \cdots \end{vmatrix},$$

dove il determinante in (3.2.12), di ordine  $(n - 1)$ , è quello della matrice che si ottiene da  $A$  cancellando la riga e la colonna che contengono  $a_{ij}$  (cioè, riga  $i$ -esima e colonna  $j$ -esima). A questo punto, un minimo di concentrazione consente di riconoscere che la (3.2.7) può essere riscritta esattamente come segue:

$$(3.2.13) \quad \det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \quad (= \sum_{j=1}^3 a_{1j}A_{1j})$$

Come già anticipato, possiamo sviluppare  $\det A$  secondo una riga, o colonna, a piacere. Inoltre, ciò vale per matrici quadrate di qualunque ordine, come esplicitato nel seguente celebre risultato.

---

---

**Teorema 1: (Teorema di Laplace)** Sia

$$(3.2.14) \quad A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R}) \quad .$$

Fissiamo a piacere  $i$  nell'intervallo  $1 \leq i \leq n$ . Allora

$$(3.2.15) \quad \det A = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} \quad .$$

La (3.2.15) esprime il calcolo di  $\det A$  sviluppato secondo la riga  $i$ -esima. Lo stesso vale per le colonne: più precisamente, fissando a piacere  $j$  nell'intervallo  $1 \leq j \leq n$ , vale

$$(3.2.16) \quad \det A = \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj} \quad .$$

La (3.2.16) rappresenta il calcolo di  $\det A$  sviluppato secondo la colonna  $j$ -esima.

---

---

Prima di fare ulteriori commenti, vediamo alcuni esercizi per renderci conto che il lavoro svolto ci consente di calcolare  $\det A$  per matrici quadrate  $A$  di ordine  $n$  arbitrario.

▷ Esercizio 10 ◁

**Testo**

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Calcolare  $\det A$  sviluppando secondo la seconda riga.

**Soluzione**

Applichiamo la (3.2.15) con  $i = 2$  e  $n = 3$ :

$$(3.2.17) \quad \det A = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \quad .$$

Ora

$$(3.2.18) \quad A_{21} = (-1)^{2+1} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 = -1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 = 8$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 2 = -2$$



Usando i calcoli (3.2.18) nella (3.2.17) si ottiene:

$$(3.2.19) \quad \det A = (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 8 + 1 \cdot (-2) = 15 \quad .$$

A titolo di esercizio, il lettore verifichi che allo stesso risultato si perviene sviluppando secondo una qualunque altra riga o colonna.  $\square$

In genere, conviene sviluppare secondo una riga, o colonna, avente un elevato numero di zeri.

$\triangleright$  Esercizio 11  $\triangleleft$

**Testo**

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Calcolare  $\det A$ .

**Soluzione**

Conviene sviluppare secondo la seconda colonna:

$$(3.2.20) \quad \det A = a_{12}A_{12}(+0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{32}) = (-1) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 23 \quad .$$

$\square$

$\triangleright$  Esercizio 12  $\triangleleft$

**Testo**

Sia

$$(3.2.21) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R}) \quad .$$

Calcolare  $\det A$ .

**Soluzione**

Possiamo, ad esempio, sviluppare secondo la prima riga:

$$(3.2.22) \quad \det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} \quad .$$

Usando i valori numerici in (3.2.21), la (3.2.22) diventa

$$(3.2.23) \quad \det A = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} \\ + 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

La (3.2.23) riduce il calcolo di  $\det A$  (ordine 4) a quello di quattro determinanti di ordine 3 (in questo esempio, solo tre di questi quattro determinanti influiscono sul risultato, dato che il quarto è poi moltiplicato per 0). Il lettore può ora completare l'esercizio e verificare che il risultato è:  $\det A = 0$ .

□

Notiamo inoltre che, se  $A$  è triangolare (superiore o inferiore), allora  $\det A$  è dato (facile verifica!) semplicemente dal prodotto degli elementi sulla diagonale principale.

▷ Esercizio 13 ◁

**Testo**

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \sqrt{2} & 6 & \pi \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \in M_5(\mathbb{R}) .$$

Calcolare  $\det A$ .

**Soluzione**

$$\det A = 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-2) = -48 \quad .$$

□

Il concetto di determinante ci fornisce un utile espediente per ricostruire la formula del prodotto vettoriale di due vettori.

Se  $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3]$  e  $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ , possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
 (3.2.24) \quad \vec{u} \wedge \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \\
 &= (u_2v_3 - v_2u_3)\vec{i} - (u_1v_3 - v_1u_3)\vec{j} + (u_1v_2 - v_1u_2)\vec{k} \\
 &= [u_2v_3 - v_2u_3, u_3v_1 - v_3u_1, u_1v_2 - v_1u_2]
 \end{aligned}$$

Se poi  $\vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$  è un terzo vettore, vale la seguente formula per il prodotto misto:

$$(3.2.25) \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Riassumendo brevemente ciò che abbiamo visto in questa sezione 3.2, possiamo dire di aver operativamente imparato a calcolare  $\det A$  per una matrice quadrata  $A$  di ordine  $n$  qualunque. Il lettore attento dovrebbe però aver notato che, formalmente, *non* abbiamo dato la definizione della funzione

$$\begin{aligned}
 (3.2.26) \quad \det : M_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\
 A &\rightarrow \det A \quad .
 \end{aligned}$$

In realtà, presentare questa definizione richiederebbe un lavoro matematico alquanto complesso, per cui ci limiteremo solo a fare qualche osservazione in proposito nella parte finale di questo capitolo. Adesso invece utilizziamo i concetti di determinante e complemento algebrico per spiegare che cos'è, e come eventualmente si calcola, l'*inversa* di una matrice. Il termine matrice inversa è riferito al prodotto di matrici definito in (3.1.20) e (3.1.21). Più precisamente

---

**Definizione 6:** Sia  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Diremo che  $A$  è invertibile se esiste  $B \in M_n(\mathbb{R})$  tale che

$$(3.2.27) \quad A \cdot B = B \cdot A = I$$

Se tale  $B$  esiste, si scrive  $B = A^{-1}$  e si dice che  $B$  è la *matrice inversa* di  $A$ .

---

Si possono dimostrare i fatti seguenti:

$$(3.2.28) \quad A \text{ è invertibile} \iff \det A \neq 0 \quad .$$

Se  $\det A \neq 0$ , allora

$$(3.2.29) \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t[A_{ij}] \quad ,$$

dove  ${}^t[A_{ij}]$  è la trasposta della matrice costituita dai complementi algebrici (si veda (3.2.12)) dei coefficienti di  $A$ .

▷ Esercizio 14 ◁

**Testo**

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Stabilire se  $A$  è invertibile e, in caso affermativo, calcolare  $A^{-1}$ .

**Soluzione**

$\det A = -5 \neq 0$ , per cui  $A^{-1}$  esiste. Applichiamo la (3.2.29):

$$(3.2.30) \quad A^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Per verificare la correttezza del risultato, il lettore può controllare che  $A \cdot A^{-1} = I$  (oppure,  $A^{-1} \cdot A = I$ ).

□

▷ Esercizio 15 ◁

**Testo**

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Stabilire se  $A$  è invertibile e, in caso affermativo, calcolare  $A^{-1}$ .

**Soluzione**

$\det A = -3 \neq 0$ , per cui  $A^{-1}$  esiste. Applichiamo la (3.2.29):

$$(3.2.31) \quad A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{matrix} {}^t \\ \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & & 0 & 2 & & 0 & -1 & \\ & 0 & 3 & & 0 & 3 & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & \\ - & 0 & 2 & & 1 & 2 & & 1 & 0 \\ & 0 & 3 & & 0 & 3 & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & \\ 0 & 2 & & 1 & 2 & & 1 & 0 & \\ -1 & 2 & & 0 & 2 & & 0 & -1 & \end{array} \right] \end{matrix}$$

$$= -\frac{1}{3} \begin{matrix} {}^t \\ \left[ \begin{array}{ccc} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{array} \right] \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

□

## ▷ Esercizio 16 ◁

**Testo**

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Stabilire se  $A$  è invertibile e, in caso affermativo, calcolare  $A^{-1}$ .

**Soluzione**

$\det A = -3 \neq 0$ , per cui  $A^{-1}$  esiste. Si calcola

$$(3.2.32) \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

□

### 3.3 Rango di una matrice

Il determinante, come vedremo anche nei capitoli 6 e 7, fornisce informazioni importanti su una matrice *quadrata*  $A$ . D'altra parte, lo studio dei sistemi lineari, con le relative implicazioni geometriche, coinvolge regolarmente matrici  $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ , con  $m \neq n$ . Ciò rende indispensabile introdurre la nozione di *rango* di cui ora ci occupiamo. Indichiamo con  $R_i$  la riga  $i$ -esima di una matrice, e con  $C_j$  la colonna  $j$ -esima. Sia  $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ . Supponiamo di scegliere  $p$  righe e  $p$  colonne di  $A$  ( $p \leq \text{Min}\{m, n\}$ ). Ciò individua una *sottomatrice quadrata* di  $A$  di ordine  $p$ . Ad esempio, se

$$(3.3.1) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R}) \quad ,$$

possiamo dire che

$$(3.3.2) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

sono due sottomatrici quadrate di ordine 3 di  $A$ : la prima deriva dalla scelta  $R_1, R_2, R_3$  e  $C_1, C_3, C_4$ , mentre la seconda da  $R_1, R_2, R_3$  e  $C_2, C_3, C_4$ . In modo simile,

$$(3.3.3) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

sono due sottomatrici quadrate di ordine 2 di  $A$ : la prima deriva dalla scelta  $R_1, R_3$  e  $C_1, C_3$ , mentre la seconda da  $R_2, R_3$  e  $C_3, C_4$ .

---

**Definizione 7:** Sia  $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ . Un *minore* di ordine  $p$  di  $A$  è il determinante di una sottomatrice quadrata di  $A$  di ordine  $p$ .

---

Con riferimento alla matrice  $A$  in (3.3.1), possiamo dire, usando (3.3.2), che

$$(3.3.4) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -10 \quad , \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

sono 2 minori di ordine 3 di  $A$ . Invece, da (3.3.3), deduciamo che

$$(3.3.5) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad , \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1$$

sono due minori di ordine 2 di  $A$ . Adesso possiamo definire il rango di una matrice.

**Definizione 8:** Sia  $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ . Diremo che il *rango* di  $A$  è  $p$  ( $p \in \mathbb{N}$ ) (si scriverà  $\rho(A) = p$ ) se

- (3.3.6)      (i) esiste un minore di  $A$ , di ordine  $p$ , non nullo; e  
                  (ii) tutti i minori di  $A$  di ordine  $> p$  sono nulli.

Ad esempio, la matrice  $A$  in (3.3.1) ha  $\rho(A) = 3$ . Questo discende dal fatto che, in (3.3.4), abbiamo trovato almeno un minore, non nullo, di ordine 3 (e, ovviamente, non ci sono minori di ordine  $> 3$ , avendo  $A$  solo tre righe).

▷ Esercizio 17 ◁

**Testo**

Sia

$$(3.3.7) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & -1 & -4 \end{bmatrix} \in M_{3,5}(\mathbb{R})$$

Calcolare  $\rho(A)$ .

**Soluzione**

Da  $R_1, R_2$  e  $C_1, C_2$  si ottiene

$$(3.3.8) \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

per cui  $\rho(A) \geq 2$ . Dobbiamo stabilire se  $\rho(A) = 2$  oppure  $\rho(A) = 3$ . Andiamo quindi a calcolare i vari minori di ordine 3 (se ne trovassimo anche uno solo non nullo, potremmo fermarci e concludere che  $\rho(A) = 3$ ). Per ognuno dei minori di ordine 3, la scelta  $R_1, R_2, R_3$  è obbligata, mentre per le colonne abbiamo 10 possibilità differenti, e cioè

$$(3.3.9) \quad [C_1, C_2, C_3], [C_1, C_2, C_4], [C_1, C_2, C_5], [C_2, C_3, C_4], [C_1, C_3, C_5], \\ [C_2, C_3, C_5], [C_1, C_3, C_4], [C_3, C_4, C_5], [C_1, C_4, C_5], [C_2, C_4, C_5].$$

cui corrispondono nell'ordine

$$(3.3.10) \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

Poiché tutti i minori di ordine 3 risultano nulli concludiamo che  $\rho(A) = 2$ .

□

La procedura usata nell'esercizio precedente è corretta, ma risulta abbastanza laboriosa e può essere abbreviata tenendo conto di quanto segue.

Diciamo che un minore di ordine  $(p+1)$  *orla* un dato minore di ordine  $p$  se la sua corrispondente sottomatrice quadrata è ottenuta aggiungendo una riga e una colonna alla sottomatrice del minore di ordine  $p$ .

▷ Esercizio 18 ◁

### Testo

Sia  $A \in M_{3,5}(\mathbb{R})$  la matrice definita in (3.3.7). Scrivere tutti i minori di ordine 3 che orlano il minore di ordine 2 definito in (3.3.8).

### Soluzione

Per orlare il minore in (3.3.8) possiamo aggiungere  $R_3$  (unica scelta possibile per le righe), e poi una colonna a scelta tra  $C_3, C_4, C_5$ . Quindi in tutto abbiamo 3 minori, che sono

$$(3.3.11) \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

□



Confrontando (3.3.10) e (3.3.11) diventa evidente l'utilità del seguente

---

---

**Teorema 2: (Teorema di Kronecker)** Sia

$$(3.3.12) \quad A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \quad .$$

Se

- $$(3.3.13) \quad \begin{array}{l} \text{(i) esiste un minore di } A, \text{ di ordine } p, \text{ non nullo; e} \\ \text{(ii) tutti i minori di } A \text{ che lo orlano sono nulli,} \end{array}$$

allora  $\rho(A) = p$ .

---

---

▷ Esercizio 19 ◁

**Testo**

Sia  $A \in M_{3,5}(\mathbb{R})$  la matrice definita in (3.3.7). Calcolare  $\rho(A)$  usando il teorema di Kronecker.

**Soluzione**

Partendo con (3.3.8) si deduce che  $\rho(A) \geq 2$ . Considerando poi i 3 minori che orlano il minore in (3.3.8), già indicati in (3.3.11), si conclude che  $\rho(A) = 2$ .  $\square$

▷ Esercizio 20 ◁

**Testo**

Sia  $A_t \in M_{3,5}(\mathbb{R})$  la famiglia di matrici definite da

$$(3.3.14) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ t & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Determinare, in funzione del parametro  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\rho(A_t)$ .

**Soluzione**

Considerando  $R_1, R_3$  e  $C_1, C_2$  si estrae il seguente minore di ordine 2

$$(3.3.15) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad ,$$

per cui  $\rho(A_t) \geq 2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ . Un primo minore di ordine 3 che orla il minore in (3.3.15) è

$$(3.3.16) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ t & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2t \quad .$$

Ora osserviamo che, se  $t \neq 2$ , il minore (3.3.16) è  $\neq 0$ ; quindi  $\rho(A_t) = 3$  se  $t \neq 2$ . Se  $t = 2$ , dobbiamo esaminare i rimanenti due minori di ordine 3 che orlano (3.3.15). Essi, avendo posto  $t = 2$ , sono:

$$(3.3.17) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Dal teorema di Kronecker deduciamo quindi che  $\rho(A_2) = 2$ . In conclusione: se  $t = 2$ ,  $\rho(A_t) = 2$ . Se  $t \neq 2$ ,  $\rho(A_t) = 3$ .  $\square$

### 3.4 Trasformazioni elementari su righe e colonne

In questa sezione illustriamo una famiglia di *trasformazioni elementari* (dette anche *operazioni elementari*, o *mosse di Gauss*) che, agendo su righe (o colonne) di una matrice, risultano molto utili nello studio dei sistemi lineari che affronteremo nel successivo capitolo 6.

**Trasformazioni elementari sulle righe:** Se

$$(3.4.1) \quad A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \quad ,$$

le trasformazioni in oggetto sono di 3 tipi, e precisamente:

$$(3.4.2) \quad R_i \longleftrightarrow R_j \quad (i \neq j) \quad ,$$

che significa scambio della riga  $R_i$  con la riga  $R_j$ .

$$(3.4.3) \quad R_i \longrightarrow \lambda R_i \quad (\lambda \neq 0) \quad ,$$

che significa moltiplicazione di ognuno dei coefficienti di  $R_i$  per lo scalare  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$(3.4.4) \quad R_i \longrightarrow R_i + \lambda R_j \quad (i \neq j \text{ e } \lambda \neq 0),$$

dove la somma  $R_i + \lambda R_j$  si intende coefficiente per coefficiente.

Per acquisire un po' di confidenza con queste trasformazioni vediamo un esempio: nella successiva sequenza ogni matrice si ottiene da quella precedente operando la trasformazione elementare indicata sopra il simbolo  $\implies$ .

$$(3.4.5) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{|R_1 \leftrightarrow R_2|} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \xrightarrow{|R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1|} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{|R_3 \rightarrow R_3 + 3R_2|} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 11 & 11 & 18 \end{bmatrix}$$

Osserviamo che, attraverso la sequenza in (3.4.5), abbiamo trasformato  $A$  in una matrice triangolare superiore: questo procedimento, opportunamente formalizzato, costituirà la base del cosiddetto *algoritmo di Gauss*, che è uno dei principali metodi per determinare le soluzioni di un sistema lineare, come vedremo nel capitolo 6. Enunciamo ora alcune proprietà fondamentali che riassumono come determinanti e rango variano in seguito all'applicazione di trasformazioni elementari.

**Effetti delle trasformazioni elementari sul determinante:** Sia  $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ . Se  $B \in M_n(\mathbb{R})$  è ottenuta da  $A$

- $$(3.4.6) \quad \begin{array}{ll} \text{(i)} & \text{mediante una (3.4.2), allora } \det B = -\det A; \\ \text{(ii)} & \text{mediante una (3.4.3), allora } \det B = \lambda \det A; \\ \text{(iii)} & \text{mediante una (3.4.4), allora } \det B = \det A. \end{array}$$

▷ Esercizio 21 ◁

**Testo**

Sia

$$(3.4.7) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -1 & 2\pi \\ \sqrt{2} & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & -1 & 2\pi \\ 4 & 5 & 7 & -2 \end{bmatrix} .$$

Calcolare  $\det A$ .

**Soluzione**

Poiché  $R_1 = R_3$ , applicando  $R_1 \longleftrightarrow R_3$  e (3.4.6)(i), deduciamo

$$(3.4.8) \quad \det A = -\det A$$

da cui  $\det A = 0$ . Più generalmente, ogni volta che una matrice quadrata presenta due righe fra loro proporzionali il suo determinante è nullo (grazie sempre alle (3.4.6)(i) e (ii)). □

**Effetti delle trasformazioni elementari sul rango:** Sia

$$(3.4.9) \quad A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R}) .$$

Se  $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$  è ottenuta da  $A$  mediante trasformazioni elementari di tipo (3.4.2), (3.4.3) o (3.4.4), allora  $\rho(A) = \rho(B)$ .

▷ Esercizio 22 ◁

**Testo**

Sia  $A \in M_{3,5}(\mathbb{R})$  la matrice definita in (3.4.5). Calcolare  $\rho(A)$ .

**Soluzione**

Dato che il rango non varia a seguito dell'applicazione di trasformazioni elementari, possiamo dire che  $\rho(A) = \rho(B)$ , dove

$$(3.4.10) \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 11 & 11 & 18 \end{bmatrix}$$

è l'ultima matrice della sequenza in (3.4.5). Ma ora è subito evidente, considerando le prime tre colonne di  $B$ , che  $\rho(B) = 3$ , per cui anche  $\rho(A) = 3$ . □

Anche se non ne faremo un grande uso in seguito, segnaliamo che gli stessi discorsi fatti per le righe valgono anche per le colonne: le trasformazioni elementari, in questo contesto, sono denotate rispettivamente

$$(3.4.11) \quad C_i \longleftrightarrow C_j \quad , \quad C_i \longrightarrow \lambda C_i \quad , \quad C_i \longrightarrow C_i + \lambda C_j \quad .$$

Anche gli effetti di queste trasformazioni su rango e determinante sono analoghi a quelli illustrati per le righe.

(\*) In (3.2.26) abbiamo segnalato la difficoltà di dare una definizione rigorosa della funzione  $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ . Un'impostazione assiomatica del discorso consente di definire la funzione  $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  come quell'unica funzione che soddisfa le proprietà (3.4.6) relative alle trasformazioni elementari.

## 3.5 Esercizi di riepilogo

---



---

**Teorema 3: (Teorema di Binet)** Siano

$$(3.5.1) \quad A, B \in M_n(\mathbb{R}) \quad .$$

Allora

$$(3.5.2) \quad \det(A \cdot B) = (\det A)(\det B) \quad .$$


---



---

Non dimostriamo questo teorema (un risultato classico, non elementare), ma lo applichiamo nel seguente

▷ Esercizio 23 ◁

**Testo**

Sia  $A \in M_n(\mathbb{R})$  una matrice invertibile. Dimostrare che

$$(3.5.3) \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} \quad .$$

**Soluzione**

Sappiamo che  $\det(A) \neq 0$  e

$$(3.5.4) \quad A^{-1} \cdot A = I \quad .$$

Applicando la (3.5.2) a (3.5.4), e osservando che  $\det I = 1$ , si ottiene subito la (3.5.3). □

▷ Esercizio 24 ◁

**Testo**

Siano  $A, B \in M_2(\mathbb{R})$  definite da

$$(3.5.5) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad .$$

Calcolare  $C = 2A^2 - B^{-1} \cdot A$ .

**Soluzione**

Prima calcoliamo

$$(3.5.6) \quad B^{-1} = \frac{1}{\det B} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$(3.5.7) \quad A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} (4-1) & (-2-2) \\ (2+2) & (-1+4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Ora, usando (3.5.6) e (3.5.7), abbiamo

$$(3.5.8) \quad C = 2 \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{3} & -9 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

□

▷ Esercizio 25 ◁

**Testo**

Siano  $A, B \in M_2(\mathbb{R})$  definite da

$$(3.5.9) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} .$$

- (i) Calcolare  $C = A \cdot B - B \cdot A$ ;
- (ii) Calcolare, se possibile,  $A^{-1}$  e  $B^{-1}$ .

**Soluzione**

(i)

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} ;$$

(ii)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

mentre  $B^{-1}$  non esiste in quanto  $\det B = 0$ .

□

▷ Esercizio 26 ◁

**Testo**

Sia

$$(3.5.10) \quad A_t = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1-t & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1+t & t & 1+t & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{3,5}(\mathbb{R}) \quad , t \in \mathbb{R} .$$

Calcolare  $\rho(A_t)$ .

**Soluzione**

Conviene partire scegliendo, se possibile, dei minori non nulli che non dipendono da  $t$ . Da  $R_1, R_2$  e  $C_4, C_5$  si ottiene

$$(3.5.11) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad ,$$

per cui  $\rho(A_t) \geq 2 \forall t \in \mathbb{R}$ . Orlandando il minore (3.5.11) con  $R_3$  e  $C_3$  abbiamo

$$(3.5.12) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1+t & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1+t$$

Ne deduciamo che  $\rho(A_t) = 3$  se  $t \neq -1$ . Ora orliamo (3.5.11) con  $R_3$  e  $C_2$  ( $t = -1$ ):

$$(3.5.13) \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

La conclusione è:  $\rho(A_t) = 3 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ .

□

▷ Esercizio 27 ◁

**Testo**

Sia

$$(3.5.14) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R}) \quad .$$

Calcolare  $\rho(A)$ .

**Soluzione**

Il rango non varia a seguito di trasformazioni elementari su righe o colonne. Abbiamo

$$(3.5.15) \quad A \begin{matrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \\ \xleftrightarrow{\quad} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad .$$

Ora, la riga nulla è ininfluente ai fini del computo del rango, quindi è facile concludere che  $\rho(A) = 2$ .

□

▷ Esercizio 28 ◁

**Testo**

In  $M_4(\mathbb{R})$ , siano

$$(3.5.16) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & \pi & 0 & e^2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ \pi & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad .$$

Calcolare  $\det(A \cdot B)$ .



**Soluzione**

$A$  e  $B$  sono 2 matrici triangolari, per cui il loro determinante è di calcolo immediato, essendo dato dal prodotto dei coefficienti sulla diagonale principale:

$$(3.5.17) \quad \det A = 2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 3 = -6 \quad , \quad \det B = 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-2) = -24 \quad .$$

Quindi conviene usare il teorema di Binet (si veda (3.5.2)) che ci consente di evitare il calcolo del prodotto di matrici  $A \cdot B$  ! Abbiamo, usando (3.5.17),

$$(3.5.18) \quad \det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B) = -6 \cdot (-24) = 144 \quad .$$

□

## ▷ Esercizio 29 ◁

**Testo**

Stabilire quale, fra le seguenti matrici in  $M_3(\mathbb{R})$ , è simmetrica:

$$(3.5.19) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

**Soluzione**

Abbiamo

$$(3.5.20) \quad {}^tA = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad {}^tB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad {}^tC = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

Quindi  ${}^tA \neq A$  e  ${}^tB \neq B$ , ma  ${}^tC = C$ : dunque la matrice simmetrica è  $C$ . Si può osservare che i coefficienti di  $B$  soddisfano la relazione  $b_{ij} = -b_{ji}$ : le matrici con questa proprietà vengono dette *antisimmetriche*.

□

## ▷ Esercizio 30 ◁

**Testo**

Sia

$$(3.5.21) \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad .$$

Calcolare, se possibile,  $A^{-1}$ .

**Soluzione**

$\det A = -2 \neq 0$ , per cui  $A^{-1}$  esiste. Usando la (3.2.29) come in (3.2.31) si ottiene

$$(3.5.22) \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

□

▷ Esercizio 31 ◁

**Testo**

Sia  $A$  come in (3.5.21). Eseguire una trasformazione elementare, di tipo (3.4.4), in modo da trasformare  $A$  in una matrice triangolare superiore.

**Soluzione**

In pratica, dobbiamo solo azzerare il coefficiente  $a_{21}$ :

$$(3.5.23) \quad A \begin{array}{l} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + R_1} \\ \xleftrightarrow{\iff} \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

□

▷ Esercizio 32 ◁

**Testo**

Siano

$$(3.5.24) \quad \vec{u} = [1, 0, 3] \quad , \quad \vec{v} = [-1, 1, 0] \quad , \quad \vec{w} = [2, 1, 3] \quad .$$

- (i) Calcolare il volume  $V$  del parallelepipedo individuato da  $\vec{u}, \vec{v}$  e  $\vec{w}$ ;
- (ii) Calcolare l'area  $A$  del parallelogramma individuato da  $\vec{u}$  e  $\vec{w}$ .

**Soluzione**

Nel capitolo 1 abbiamo imparato che il volume richiesto è dato dal valore assoluto del prodotto misto, mentre l'area coincide col modulo del prodotto vettoriale. Usando (3.2.25) e (3.2.24) troviamo:

(i)

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -6 \quad .$$

Quindi

$$V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})| = |-6| = 6 \quad .$$

(ii)

$$\vec{u} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = [-3, 3, 1] \quad .$$

Quindi

$$A = |\vec{u} \wedge \vec{w}| = \sqrt{19} \quad .$$

□

## 3.6 Considerazioni conclusive

Nel termine *algebra lineare* la parola lineare vuole sottolineare il fatto che questa teoria riguarda funzioni polinomiali di primo grado, le quali geometricamente descrivono appunto luoghi di punti lineari (rette, piani etc.). La storia dell'algebra lineare moderna inizia intorno al 1840 grazie ai lavori di W. Hamilton (che introdusse il termine vettore); A. Cayley introdusse le matrici ( $2 \times 2$ ), una delle idee fondamentali dell'algebra lineare, nel 1857. Anche se l'algebra lineare trae le sue origini dallo studio dei vettori, da noi presentato nel capitolo 1, per iniziare a coglierne l'importanza è sufficiente pensare brevemente al concetto di linearizzazione di funzioni di variabile reale (polinomio di Taylor di primo grado). Infatti questo concetto gioca un ruolo fondamentale nei problemi di approssimazione locale per semplificare problemi di origine fisica, derivanti ad esempio dallo studio di equazioni differenziali; quando tutto ciò viene esteso alle funzioni dipendenti da più di una variabile il linguaggio delle matrici diventa uno strumento essenziale. Per un'interessante excursus storico sull'evoluzione di questi concetti, parallela allo sviluppo del calcolo infinitesimale, si può consultare [8].

# Capitolo 4

## Elementi di teoria delle curve in $\mathbb{R}^3$

### 4.0 Scopi del capitolo

Partiamo da

$$(4.0.1) \quad \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad ,$$

dove  $[l, m, n] \neq [0, 0, 0]$ . Come ampiamente discusso nel capitolo 1, la (4.0.1) è la rappresentazione parametrica di una retta in  $\mathbb{R}^3$ . Questo è un esempio di *curva regolare* in  $\mathbb{R}^3$ . Più precisamente, diremo che

$$(4.0.2) \quad \gamma(t) = [x(t), y(t), z(t)] \quad , \quad t \in (a, b) \quad ,$$

è una curva regolare in  $\mathbb{R}^3$  se le funzioni in (4.0.2) hanno derivate continue almeno fino al secondo ordine e

$$(4.0.3) \quad \gamma'(t) = [x'(t), y'(t), z'(t)] \neq [0, 0, 0] \quad \forall t \in (a, b) \quad .$$

In certe situazioni può essere necessario considerare  $t \in [a, b]$ , oppure  $a = -\infty$  o  $b = +\infty$ . Nell'ipotesi che  $\gamma(t)$  descriva la traiettoria in funzione del tempo  $t$  di un punto materiale in  $\mathbb{R}^3$ , il vettore  $\gamma'(t)$  rappresenta il vettore velocità istantanea. Da un punto di vista più geometrico è importante precisare che

$$(4.0.4) \quad \gamma'(t) \text{ è parallelo alla retta tangente alla curva nel punto } \gamma(t).$$

In questo capitolo impareremo, grazie alla funzione ascissa curvilinea che introdurremo nella sezione 4.1, a misurare la lunghezza di una curva attraverso un opportuno integrale. Poi definiremo due funzioni,  $k(t)$  e  $\tau(t)$ , dette rispettivamente *curvatura* e *torsione* di  $\gamma(t)$ : la funzione curvatura  $k(t)$  misura quanto  $\gamma(t)$  si discosti dall'andamento rettilineo, mentre la torsione  $\tau(t)$  tiene conto di quanto  $\gamma(t)$  si discosti dall'essere una curva piana. In particolare, se  $k(t) \equiv 0$ , allora  $\gamma(t)$  è parte di una retta. Se invece  $\tau(t) \equiv 0$ , allora i punti di  $\gamma(t)$  sono tutti contenuti in un piano (curva piana). Si noti che, geometricamente, quando è necessario identifichiamo  $\gamma$  con l'immagine della funzione  $\gamma(t)$  in (4.0.2): questo consente quindi di vedere  $\gamma$  come un sottoinsieme (curva) di  $\mathbb{R}^3$ .

## 4.1 Ascissa curvilinea e concetto di curvatura

Prima di procedere alla definizione di ascissa curvilinea, è conveniente prendere un po' di confidenza con il concetto di curva in  $\mathbb{R}^3$  (o in  $\mathbb{R}^2$ ) attraverso l'illustrazione di alcuni esempi.

---

**Esempio 1:** Definiamo

$$(4.1.1) \quad \gamma(t) = ([x(t), y(t), z(t)] =) [1 + 2t, 2t^2, 1 - t^2] , \quad t \in \mathbb{R} .$$

Possiamo osservare che il vettore tangente

$$(4.1.2) \quad \gamma'(t) = [2, 4t, -2t] \quad , \quad t \in \mathbb{R} ,$$

non ha direzione costante. Quindi questa curva non è una retta (impareremo che la sua curvatura  $k(t)$  non è identicamente nulla). Invece, possiamo osservare che tutti i punti di  $\gamma$  soddisfano l'equazione

$$(4.1.3) \quad y + 2z - 2 = 0 \quad .$$

Poiché (4.1.3) rappresenta un piano in  $\mathbb{R}^3$ , concludiamo che  $\gamma$  è una curva piana (un successivo calcolo confermerà che la sua torsione è identicamente nulla).

---

---

---

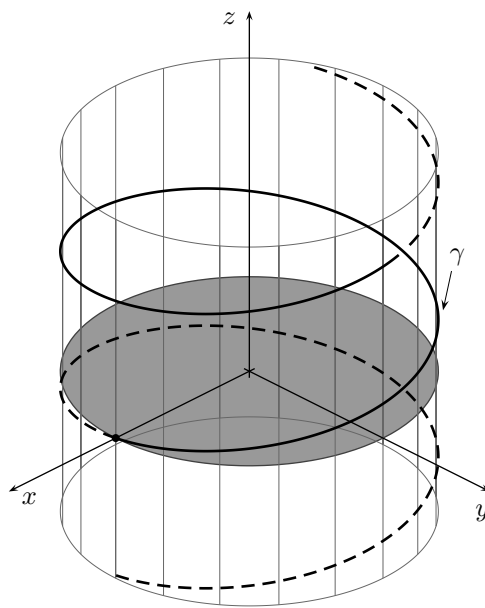
**Esempio 2:** Definiamo

$$(4.1.4) \quad \gamma(t) = [\cos t, \sin t, t] \quad , \quad t \in \mathbb{R} .$$

Calcoleremo sotto curvatura e torsione di  $\gamma$ , e ne dedurremo che  $\gamma$  non è né rettilinea né piana. Si può osservare che i punti di  $\gamma$  soddisfano l'equazione

$$(4.1.5) \quad x^2 + y^2 = 1$$

che rappresenta un cilindro in  $\mathbb{R}^3$ . La curva  $\gamma(t)$  si avvolge sul cilindro (4.1.5) (si veda la Figura 13.1), pertanto  $\gamma$  è detta *elica cilindrica*.



**Figura 4.1** – Elica cilindrica.

---

---

(4.1.6) **Funzione ascissa curvilinea:** possiamo ora definire una funzione, la cosiddetta ascissa curvilinea, che sicuramente occupa un ruolo centrale nello studio delle curve. Se  $\gamma(t)$  è una curva regolare, poniamo

$$(4.1.7) \quad s(t) = \int_{t_0}^t |\gamma'(u)| \, du \quad ,$$

dove  $t_0 \in (a, b)$  è un punto fissato. La funzione  $s(t)$  è detta *ascissa curvilinea misurata dal punto*  $\gamma(t_0)$ . Poiché, come già osservato nella (11.1.30) del capitolo 11,

$$(4.1.8) \quad \frac{ds}{dt} = |\gamma'(t)| \quad ,$$

deduciamo che  $s(t)$  è una funzione strettamente crescente in quanto, da (4.0.3),  $|\gamma'(t)| > 0$  su  $(a, b)$ . Se  $t > t_0$ , allora

$$(4.1.9) \quad s(t) = L(\gamma(t_0), \gamma(t)) \quad ,$$

dove la scrittura in (4.1.9) denota la lunghezza dell'arco di curva che va da  $\gamma(t_0)$  a  $\gamma(t)$ : per questo motivo, l'ascissa curvilinea è anche chiamata *funzione lunghezza d'arco*. Si noti anche che, se  $t < t_0$ , allora la lunghezza del corrispondente arco è data da  $-s(t)$ . Il fatto che l'integrale (4.1.7) misuri proprio la lunghezza degli archi di curva deriva da un processo di limite, basato sull'approssimazione mediante curve rettilinee a tratti (poligonali), costruite congiungendo punti di  $\gamma$  via via più vicini fra loro (dettagli omissi).

▷ Esercizio 1 ◁

**Testo**

Sia  $\gamma(t)$  l'elica cilindrica definita in (4.1.4), ristretta all'arco  $0 \leq t \leq 1$ . Calcolare la lunghezza di  $\gamma$ .

**Soluzione**

Misurando l'ascissa curvilinea a partire da  $\gamma(0)$ , possiamo dire che la lunghezza di  $\gamma$  (denotata  $L(\gamma)$ ) è data da:

$$(4.1.10) \quad L(\gamma) = s(1) = \int_0^1 |\gamma'(u)| \, du \quad .$$

Per determinare il valore dell'integrale in (4.1.10), calcoliamo

$$(4.1.11) \quad \gamma'(t) = [-\sin t, \cos t, 1] \quad ,$$

da cui

$$(4.1.12) \quad |\gamma'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2} \quad .$$

Usando (4.1.12) in (4.1.10), abbiamo

$$(4.1.13) \quad L(\gamma) = s(1) = \int_0^1 \sqrt{2} \, du = \sqrt{2} u \Big|_0^1 = \sqrt{2} \quad .$$

□

Se  $\gamma(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , rappresenta una curva regolare, abbiamo già osservato sopra che  $s(t)$  è strettamente crescente, per cui

$$(4.1.14) \quad s : [a, b] \rightarrow [s(a), s(b)]$$

è bigettiva. Dunque esiste la funzione inversa della (4.1.14): tradizionalmente, si indica tale inversa con la simbologia  $t(s)$ , dove quindi

$$(4.1.15) \quad t : [s(a), s(b)] \rightarrow [a, b] \quad .$$

Si noti che, per definizione di funzione inversa,

$$(4.1.16) \quad s(t(s)) = s \quad \forall s \in [s(a), s(b)] \quad .$$

Sottolineiamo che, nella (4.1.16), non vanno confusi i ruoli di  $s(t)$ , funzione ascissa curvilinea, e di  $s$  vista come variabile indipendente nel dominio della funzione di (4.1.15). Sia ora  $\gamma(t)$  una qualunque curva regolare: possiamo dunque *riparametrizzare*  $\gamma$  rispetto all'ascissa curvilinea, ponendo

$$(4.1.17) \quad \beta(s) = \gamma(t(s)) \quad .$$

Le curve  $\gamma$  e  $\beta$  coincidono come sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^3$ , ma questo cambio di parametrizzazione assicura la validità della seguente importante condizione

$$(4.1.18) \quad |\beta'(s)| \equiv 1 \quad .$$

Intuitivamente, l'asserzione precedente significa questo: posso percorrere qualunque curva regolare con un'intensità di velocità costante. Prima di verificare la (4.1.18) svolgiamo alcuni esercizi per prendere confidenza col concetto di riparametrizzazione di una curva regolare.

▷ Esercizio 2 ◁

**Testo**

Si consideri la retta

$$(4.1.19) \quad \gamma(t) = [1 + t, 2 - t, 3t] \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad .$$

Riparametrizzare  $\gamma$  rispetto all'ascissa curvilinea  $s$  misurata dal punto  $\gamma(0)$  (=  $[1, 2, 0]$ ).



**Soluzione**

Abbiamo

$$(4.1.20) \quad \gamma'(t) = [1, -1, 3] \quad ,$$

per cui

$$(4.1.21) \quad |\gamma'(t)| \equiv \sqrt{11} \quad .$$

Quindi, da (4.1.7),

$$(4.1.22) \quad s(t) = \int_0^t \sqrt{11} \, du = \sqrt{11} t \quad .$$

Ora, la funzione inversa  $t(s)$  dell'ascissa curvilinea (4.1.22) è data ovviamente da

$$(4.1.23) \quad t(s) = \frac{1}{\sqrt{11}} s \quad .$$

Quindi la riparametrizzazione richiesta è

$$(4.1.24) \quad \beta(s) = \gamma(t(s)) = \left[ 1 + \frac{s}{\sqrt{11}}, 2 - \frac{s}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}} s \right] \quad , \quad s \in \mathbb{R} .$$

Si noti che

$$(4.1.25) \quad \beta'(s) \equiv \left[ \frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}} \right] \quad ,$$

per cui è facile constatare che la (4.1.18) è soddisfatta.

□

Il concetto di ascissa curvilinea  $s$  e relativa riparametrizzazione di curve regolari si applica anche al caso di curve in  $\mathbb{R}^2$ . Ad esempio,

▷ Esercizio 3 ◁

**Testo**

In  $\mathbb{R}^2$ , si consideri la curva

$$(4.1.26) \quad \gamma(t) = [2 \cos 3t, 2 \sin 3t] \quad , \quad t \in [0, \frac{\pi}{3}] \quad .$$

Calcolare  $L(\gamma)$  e riparametrizzare  $\gamma$  rispetto all'ascissa curvilinea  $s$  misurata da  $\gamma(0)$  ( $= [2, 0]$ ).

**Soluzione**

Abbiamo

$$(4.1.27) \quad \gamma'(t) = [-6 \sin 3t, 6 \cos 3t] \quad ,$$

per cui

$$(4.1.28) \quad |\gamma'(t)| = \sqrt{36 \sin^2 3t + 36 \cos^2 3t} \equiv 6 \quad .$$

Quindi, da (4.1.7),

$$(4.1.29) \quad s(t) = \int_0^t 6 \, du = 6t \quad , \quad t \in [0, \frac{\pi}{3}] \quad .$$

Ora, la funzione inversa  $t(s)$  dell'ascissa curvilinea (4.1.29) è

$$(4.1.30) \quad t : [0, 2\pi] \rightarrow [0, \frac{\pi}{3}]$$

$$t(s) = \frac{s}{6} \quad .$$

Quindi la riparametrizzazione richiesta è

$$(4.1.31) \quad \beta(s) = \gamma(t(s)) = [2 \cos \frac{s}{2}, 2 \sin \frac{s}{2}] \quad , \quad s \in [0, 2\pi] \quad .$$

A titolo di esercizio, il lettore può facilmente constatare la validità della (4.1.18). Infine,

$$(4.1.32) \quad L(\gamma) = s(\frac{\pi}{3}) = 2\pi \quad .$$

Si noti che, geometricamente,  $\gamma$  rappresenta la semi-circonferenza di equazione

$$(4.1.33) \quad x^2 + y^2 = 4 \quad , \quad y \geq 0 \quad .$$

□

Per dimostrare la (4.1.18), e poi proseguire il nostro studio delle curve, sono utili alcune formule che sono una conseguenza diretta della regola di derivazione delle funzioni composte, illustrata nel capitolo 5. Raccogliamo queste formule nel seguente:

**Lemma 1** Siano  $\vec{u}(t), \vec{v}(t)$  2 funzioni derivabili,  $\vec{u} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n, \vec{v} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Come in (4.0.3), indichiamo col simbolo  $'$  la derivata componente per componente. Allora abbiamo

$$(4.1.34) \quad (\vec{u}(t) + \vec{v}(t))' = \vec{u}'(t) + \vec{v}'(t) \quad ; \quad \text{se } c \in \mathbb{R}, (c\vec{u}(t))' = c\vec{u}'(t).$$

Se  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile, allora

$$(4.1.35) \quad (f(t)\vec{u}(t))' = f'(t)\vec{u}(t) + f(t)\vec{u}'(t) \quad .$$

Se  $\varphi : (c, d) \rightarrow (a, b)$  è derivabile, allora

$$(4.1.36) \quad [\overrightarrow{u(\varphi(t))}]' = [\vec{u}'(\varphi(t))] \varphi'(t) \quad .$$

Inoltre, derivando un prodotto scalare abbiamo

$$(4.1.37) \quad [\overrightarrow{u(t)} \cdot \overrightarrow{v(t)}]' = \overrightarrow{u(t)'} \cdot \overrightarrow{v(t)} + \overrightarrow{u(t)} \cdot \overrightarrow{v(t)'} \quad .$$

E, infine, quando  $n = 3$ , la derivata di un prodotto vettoriale è

$$(4.1.38) \quad [\overrightarrow{u(t)} \wedge \overrightarrow{v(t)}]' = \overrightarrow{u(t)'} \wedge \overrightarrow{v(t)} + \overrightarrow{u(t)} \wedge \overrightarrow{v(t)'} \quad .$$

□

▷ Esercizio 4 ◁

**Testo**

Verificare la (4.1.18).

**Soluzione**

Usando la (4.1.36), calcoliamo

$$(4.1.39) \quad \beta'(s) = [\gamma(t(s))]' = \gamma'(t(s)) t'(s) \quad .$$

Ma, derivando entrambi i membri della (4.1.16), troviamo

$$(4.1.40) \quad \frac{ds}{dt}(t(s)) \cdot t'(s) \equiv 1 \quad ,$$

da cui, usando (4.1.8),

$$(4.1.41) \quad t'(s) = \left[ \frac{ds}{dt}(t(s)) \right]^{-1} = \frac{1}{|\gamma'(t(s))|} \quad .$$

Sostituendo la (4.1.41) nella (4.1.39), arriviamo a

$$(4.1.42) \quad \beta'(s) = \frac{\gamma'(t(s))}{|\gamma'(t(s))|}$$

da cui la (4.1.18) segue immediatamente. □

Facciamo il punto della situazione: quanto visto ci consente di affermare che, per affrontare uno studio geometrico delle curve regolari, è lecito supporre che la curva sia parametrizzata rispetto all'ascissa curvilinea  $s$  (se così non fosse, basta riparametrizzare come negli esercizi 2 e 3 sopra: questo è, teoricamente, sempre possibile, anche se la determinazione esplicita dell'inversa  $t(s)$  non è sempre agevole come nei casi visti).

In definitiva, sia  $\beta(s)$  una curva regolare parametrizzata rispetto a  $s$ . Sappiamo che vale la (4.1.18), e vogliamo fare il lavoro necessario per arrivare alla definizione di curvatura. Per prima cosa, notiamo che  $\beta'(s)$  è un vettore: dato che, come osservato nella sezione introduttiva, esso rappresenta la direzione tangente alla curva in quel punto, è consuetudine utilizzare la notazione seguente:

$$(4.1.43) \quad \vec{T}(s) = \beta'(s) \quad .$$

Ora, riscriviamo la (4.1.18) come

$$(4.1.44) \quad \vec{T}(s) \cdot \vec{T}(s) \equiv 1 \quad .$$

Derivando la (4.1.44) rispetto a  $s$ , e usando la (4.1.37), otteniamo

$$(4.1.45) \quad 2 \left( \vec{T}(s) \cdot \frac{d\vec{T}}{ds}(s) \right) \equiv 0 \quad .$$

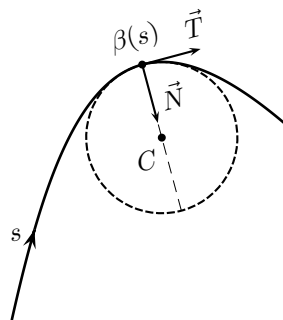
Quindi, se  $\frac{d\vec{T}}{ds}$  non è nullo, cosa che supporremo nel seguito, allora è ortogonale a  $\vec{T}(s)$ . Posto ora

$$(4.1.46) \quad k(s) = \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right| \quad , \quad \vec{N}(s) = \text{vers} \left( \frac{d\vec{T}}{ds} \right) \quad \left( = \frac{d\vec{T}}{ds} / \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right| \right) ,$$

possiamo scrivere

$$(4.1.47) \quad \frac{d\vec{T}}{ds} = k(s) \vec{N}(s) \quad .$$

Il versore  $\vec{N}(s)$  è detto *normale principale* alla curva, nel punto  $\beta(s)$ . La  $k(s)$  è detta curvatura nel punto  $\beta(s)$ . Poiché  $|\vec{T}(s)| \equiv 1$ , possiamo dire che  $k(s)$  dipende dalla variazione di direzione di  $\vec{T}(s)$ , e per questo rappresenta una misura di quanto la curva si discosti dall'essere una retta. Si noti che, quando abbiamo richiesto che  $\frac{d\vec{T}}{ds}$  fosse non nullo, in pratica abbiamo proprio voluto escludere che la curva fosse una retta. Un ulteriore significato geometrico di  $k(s)$  può essere dedotto dalla Figura 13.2, in cui ancora si assume  $k(s) \neq 0$ :



**Figura 4.2** – Cerchio osculatore.

Il cerchio tratteggiato in Figura 13.2 è detto *cerchio osculatore* e rappresenta il cerchio che meglio approssima la curva nel punto  $\beta(s)$ . Questo cerchio ha raggio

$$(4.1.48) \quad \rho(s) = \frac{1}{k(s)}$$

e centro  $C$  collocato lungo la direzione di  $\vec{N}$ . In formule,

$$(4.1.49) \quad C = \beta(s) + \rho(s) \vec{N} \quad .$$

Notiamo anche che, in  $\mathbb{R}^3$ , esistono infinite direzioni ortogonali a  $\vec{T}(s)$ ; tra queste,  $\vec{N}(s)$  individua quella in cui avviene la variazione principale di  $\vec{T}(s)$  ( $\vec{N}(s)$ , come già evidenziato sopra, ha senso quando la curva non è una retta).

▷ Esercizio 5 ◁

**Testo**

Si consideri l'elica cilindrica  $\gamma$  definita da (4.1.4).

- (i) Riparametrizzare  $\gamma$  rispetto all'ascissa curvilinea  $s$  misurata da  $\gamma(0)$ ;
- (ii) Calcolare  $\vec{T}(s)$ ,  $\vec{N}(s)$  e  $k(s)$ .

**Soluzione**

(i) Usando (4.1.12), abbiamo

$$(4.1.50) \quad s(t) = \int_0^t \sqrt{2} \, du = \sqrt{2}t \quad , \quad t \in \mathbb{R} ,$$

per cui

$$(4.1.51) \quad t(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}s \quad , \quad s \in \mathbb{R} .$$

Dunque la riparametrizzazione richiesta è

$$(4.1.52) \quad \beta(s) = \gamma(t(s)) = \left[ \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}} \right]$$

Quindi

$$(4.1.53) \quad \vec{T}(s) = \beta'(s) = \left[ -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \right] .$$

Poi

$$(4.1.54) \quad \frac{d\vec{T}}{ds} = \left[ -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0 \right] .$$

Quindi

$$(4.1.55) \quad k(s) = \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right| \equiv \frac{1}{2} \quad ,$$

e

$$(4.1.56) \quad \vec{N}(s) = \frac{1}{k(s)} \frac{d\vec{T}}{ds} = \left[ -\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0 \right] .$$

□

In varie situazioni pratiche, la  $s(t)$  può risultare analiticamente complessa, al punto da rendere difficile l'esplicitazione della sua inversa  $t(s)$ . La

seguinte formula (che deriva da un'applicazione della regola di derivazione delle funzioni composte) è quindi molto utile, in quanto consente il calcolo diretto della curvatura di una qualunque curva regolare senza effettuare la riparametrizzazione rispetto a  $s$ :

$$(4.1.57) \quad k(t) = \frac{|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3} .$$

▷ Esercizio 6 ◁

**Testo**

Calcolare la curvatura dell'elica cilindrica (4.1.4).

**Soluzione**

Applicando la (4.1.57), possiamo calcolare  $k(t)$  senza riparametrizzare la curva rispetto a  $s$ . Abbiamo

$$(4.1.58) \quad \gamma'(t) = [-\sin t, \cos t, 1] \quad , \quad \gamma''(t) = [-\cos t, -\sin t, 0] \quad .$$

Quindi

$$(4.1.59) \quad \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin t & \cos t & 1 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = [\sin t, -\cos t, 1] \quad .$$

Usando (4.1.58) e (4.1.59) troviamo

$$(4.1.60) \quad |\gamma'(t)| = \sqrt{2} \quad , \quad |\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)| = \sqrt{2} \quad .$$

Sostituendo (4.1.60) nella (4.1.57) concludiamo

$$(4.1.61) \quad k(t) = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^3} \equiv \frac{1}{2} \quad ,$$

come già ottenuto nell'esercizio 5. □

## 4.2 Torsione e triedro di Frenet (\*)

Sia  $\beta(s)$  una curva regolare parametrizzata rispetto all'ascissa curvilinea. Dato che il caso rettilineo non è geometricamente significativo, faremo l'ipotesi  $k(s) > 0$ , in modo che il versore normale principale  $\vec{N}(s)$  risulti ben definito.

In questo modo, in ogni punto della curva resta individuato univocamente il piano che contiene  $\vec{T}(s)$  e  $\vec{N}(s)$ . Questo piano è detto *piano osculatore*. Geometricamente, il piano osculatore è quello che più si avvicina a contenere la curva (intorno al punto in esame). In particolare, se la curva è piana, il piano osculatore coincide col piano della curva. Il versore

$$(4.2.1) \quad \vec{B}(s) = \vec{T}(s) \wedge \vec{N}(s)$$

è ortogonale al piano osculatore ed è chiamato *versore binormale*. Il triedro mobile (varia lungo la curva) formato dai 3 vettori

$$(4.2.2) \quad \{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$$

è noto come *triedro di Frenet*. La variazione di direzione di  $\vec{B}(s)$  misurerà quanto la curva si discosti dall'essere una curva piana (per la quale  $\vec{B}(s)$  è costante). Quindi calcoliamo, usando la (4.1.38),

$$(4.2.3) \quad \begin{aligned} \frac{d\vec{B}}{ds}(s) &= \frac{d}{ds}(\vec{T}(s) \wedge \vec{N}(s)) \\ &= \frac{d\vec{T}}{ds}(s) \wedge \vec{N}(s) + \vec{T}(s) \wedge \frac{d\vec{N}}{ds}(s) \quad . \end{aligned}$$

Ora analizziamo (4.2.3):  $\frac{d\vec{T}}{ds}(s)$  è parallelo a  $\vec{N}(s)$ , quindi il primo addendo a destra dell'ultimo uguale è nullo. Ne segue che

$$(4.2.4) \quad \frac{d\vec{B}}{ds}(s) = \vec{T}(s) \wedge \frac{d\vec{N}}{ds}(s) \quad .$$

Ne deduciamo che  $\frac{d\vec{B}}{ds}(s)$  è ortogonale a  $\vec{T}(s)$ . Ma, applicando a  $\vec{B}(s)$  il ragionamento (4.1.44), (4.1.45), deduciamo che  $\frac{d\vec{B}}{ds}(s)$  è anche ortogonale a  $\vec{B}(s)$ . Ne segue immediatamente che  $\frac{d\vec{B}}{ds}(s)$  deve essere allineato con  $\vec{N}(s)$ , per cui possiamo scrivere

$$(4.2.5) \quad \frac{d\vec{B}}{ds}(s) = \tau(s)\vec{N}(s) \quad .$$

La funzione introdotta in (4.2.5) è detta *torsione* della curva nel punto  $\beta(s)$ . La torsione misura, come già spiegato, la variazione del piano osculatore, cioè



il discostarsi di  $\beta(s)$  dall'essere una curva piana. Per completare il quadro, osserviamo che

$$(4.2.6) \quad \vec{N}(s) = \vec{B}(s) \wedge \vec{T}(s) \quad .$$

Derivando la (4.2.6), e usando (4.1.38), (4.2.5) e (4.1.47), si ottiene

$$(4.2.7) \quad \frac{d\vec{N}}{ds}(s) = -k(s)\vec{T}(s) - \tau(s)\vec{B}(s) \quad .$$

Le (4.1.47), (4.2.5) e (4.2.7) insieme sono note come *formule di Frenet*. Si noti che, mentre  $k(s)$  non può essere negativa,  $\tau(s)$  può essere sia positiva, sia negativa, sia nulla. Come per la curvatura, anche per la torsione si dispone di un'utile formula che consente di calcolarla anche partendo da una curva regolare  $\gamma(t)$  qualunque (cioè, non necessariamente parametrizzata rispetto a  $s$ ). La formula, che completa la (4.1.57), è

$$(4.2.8) \quad \tau(t) = -\frac{[\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)] \cdot \gamma'''(t)}{|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)|^2} \quad .$$

▷ Esercizio 7 ◁

**Testo**

Calcolare curvatura e torsione della curva  $\gamma(t)$  definita in (4.1.1).

**Soluzione**

Abbiamo

$$(4.2.9) \quad \gamma'(t) = [2, 4t, -2t] \quad , \quad \gamma''(t) = [0, 4, -2] \quad , \quad \gamma'''(t) = [0, 0, 0] \quad .$$

Ora,

$$(4.2.10) \quad \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4t & -2t \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = [0, 4, 8] \quad .$$

Sostituendo queste informazioni in (4.1.57), otteniamo

$$(4.2.11) \quad k(t) = \frac{|[0, 4, 8]|}{|[2, 4t, -2t]|^3} = \frac{\sqrt{80}}{[4 + 20t^2]^{\frac{3}{2}}} \\ = \frac{\sqrt{5}}{2} \frac{1}{[1 + 5t^2]^{\frac{3}{2}}} \quad .$$

Poiché  $\gamma'''(t) = [0, 0, 0]$ , da (4.2.8) ricaviamo

$$(4.2.12) \quad \tau(t) \equiv 0 \quad .$$

Quest'ultima informazione poteva essere dedotta, senza calcoli, dal fatto che, come osservato mediante (4.1.3), la curva  $\gamma$  è piana. □

▷ Esercizio 8 ◁

**Testo**

Calcolare la torsione dell'elica cilindrica definita in (4.1.4).

**Soluzione**

Usiamo (4.1.58) per ottenere

$$(4.2.13) \quad \gamma'''(t) = [\sin t, -\cos t, 0] \quad .$$

Adesso usiamo (4.2.13) e (4.1.59) in (4.2.8): si ottiene

$$(4.2.14) \quad \tau(t) = -\frac{[\sin t, -\cos t, 1] \cdot [\sin t, -\cos t, 0]}{|[\sin t, -\cos t, 1]|^2} \equiv -\frac{1}{2} \quad .$$

□

## 4.3 Esercizi di riepilogo

▷ Esercizio 9 ◁

**Testo**

Sia  $\gamma : [0, \frac{2\pi}{3}] \rightarrow \mathbb{R}^3$  la curva regolare definita da

$$(4.3.1) \quad \gamma(t) = [2 \cos 3t, 2 \sin 3t, 1] \quad .$$

- (i) Riparametrizzare  $\gamma$  rispetto a  $s$  e calcolare  $L(\gamma)$ ;
- (ii) Calcolare curvatura e torsione di  $\gamma$ ;
- (iii) Scrivere il triedro di Frenet in  $P = [-2, 0, 1]$ .

**Soluzione**

(i) Abbiamo

$$(4.3.2) \quad \gamma'(t) = [-6 \sin 3t, 6 \sin 3t, 0] \quad , \quad |\gamma'(t)| \equiv 6 \quad .$$

Poi, misurando ad esempio  $s$  da  $\gamma(0)$ ,

$$(4.3.3) \quad s(t) = \int_0^t |\gamma'(u)| du = \int_0^t 6 du = 6t \quad .$$

L'inversa della (4.3.3) è

$$(4.3.4) \quad t(s) = \frac{1}{6} s \quad , \quad s \in [0, 4\pi] \quad .$$

Quindi la riparametrizzazione richiesta è

$$(4.3.5) \quad \beta(s) = [2 \cos(\frac{s}{2}), 2 \sin(\frac{s}{2}), 1] \quad , \quad s \in [0, 4\pi] \quad .$$

e

$$L(\gamma) = s(\frac{2\pi}{3}) = 4\pi \quad .$$

(ii) e (iii): Abbiamo

$$(4.3.6) \quad \vec{T}(s) = \beta'(s) = [-\sin(\frac{s}{2}), \cos(\frac{s}{2}), 0] \quad .$$

Poi,

$$(4.3.7) \quad \frac{d\vec{T}}{ds}(s) = [-\frac{1}{2} \cos(\frac{s}{2}), -\frac{1}{2} \sin(\frac{s}{2}), 0] \quad ,$$

per cui

$$(4.3.8) \quad k(s) = \left| \frac{d\vec{T}}{ds}(s) \right| \equiv \frac{1}{2} \quad ; \quad \vec{N}(s) = [-\cos(\frac{s}{2}), -\sin(\frac{s}{2}), 0] \quad .$$

Il vettore binormale è

$$(4.3.9) \quad \vec{B}(s) = \vec{T}(s) \wedge \vec{N}(s) = [0, 0, 1] \quad .$$

Poiché

$$\frac{d\vec{B}}{ds}(s) \equiv 0 \quad ,$$

la torsione  $\tau(s)$  è nulla (infatti, si tratta di una curva contenuta nel piano  $z = 1$ ). Usando (4.3.6), (4.3.8) e (4.3.9), vediamo infine che il triedro di Frenet in  $P = \beta(2\pi)$  è

$$(4.3.10) \quad \{\vec{T}(2\pi), \vec{N}(2\pi), \vec{B}(2\pi)\} = \{[0, -1, 0], [-1, 0, 0], [0, 0, 1]\} \quad .$$

□

▷ Esercizio 10 ◁

**Testo**

Sia  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  la curva regolare definita da

$$(4.3.11) \quad \gamma(t) = [t, 1+t, 1-t^2] \quad .$$

Esprimere la lunghezza di  $\gamma$  mediante un opportuno integrale e calcolarne la curvatura e la torsione.

**Soluzione**

Si calcola

$$(4.3.12) \quad L(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(u)| du = \int_0^1 \sqrt{2+4t^2} du \quad .$$

Usando (4.1.57) e (4.2.8), si perviene a

$$(4.3.13) \quad k(t) = \frac{1}{[1+2t^2]^{\frac{3}{2}}} \quad ; \quad \tau(t) \equiv 0 \quad .$$

Il fatto che  $\tau$  sia identicamente nulla può anche essere dedotto dal fatto che la curva è piana, in quanto i suoi punti soddisfano l'equazione  $x - y + 1 = 0$ .

□

▷ Esercizio 11 ◁

**Testo**

Sia  $\gamma$  la retta in  $\mathbb{R}^2$  di equazione

$$(4.3.14) \quad 2x - y + 3 = 0 \quad .$$

Dare una parametrizzazione di  $\gamma$  rispetto all'ascissa curvilinea misurata dal punto  $P = [1, 5]$ .

**Soluzione**

Una parametrizzazione di (4.3.14) è

$$(4.3.15) \quad \gamma(t) = [t, 2t+3] \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad .$$

Poiché  $P = \gamma(1)$ , l'ascissa curvilinea richiesta è

$$(4.3.16) \quad s(t) = \int_1^t |\gamma'(u)| du = \int_1^t \sqrt{5} du = \sqrt{5}t - \sqrt{5} \quad .$$

L'inversa della funzione (4.3.16) è

$$(4.3.17) \quad t(s) = \frac{s + \sqrt{5}}{\sqrt{5}} \quad , \quad s \in \mathbb{R} \quad .$$

Quindi la parametrizzazione richiesta è

$$(4.3.18) \quad \beta(s) = \gamma(t(s)) = \left[ \frac{s + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}, 2\left(\frac{s + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right) + 3 \right] \quad , \quad s \in \mathbb{R} \quad .$$

□

▷ Esercizio 12 ◁

**Testo**

Sia  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  la curva regolare definita da

$$(4.3.19) \quad \gamma(t) = \left[ t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3} \right] \quad .$$

Calcolare la curvatura e la torsione di  $\gamma$ .

**Soluzione**

(Calcoli omissi) (Bisogna usare (4.1.57) e (4.2.8)).

$$(4.3.20) \quad k(t) = \frac{\sqrt{t^4 + 4t^2 + 1}}{[t^4 + t^2 + 1]^{\frac{3}{2}}} \quad , \quad \tau(t) = -\frac{2}{t^4 + 4t^2 + 1} \quad .$$

□

▷ Esercizio 13 ◁

**Testo**

Sia  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  la curva regolare definita da

$$(4.3.21) \quad \gamma(t) = [t, 2t, \sin t] \quad .$$

Calcolare la curvatura e la torsione di  $\gamma$ .

**Soluzione** (Calcoli omissi)

$$(4.3.22) \quad k(t) = \frac{\sqrt{5} |\sin t|}{[5 + \cos^2 t]^{\frac{3}{2}}} \quad , \quad \tau(t) \equiv 0 \quad .$$

Si noti che, negli isolati punti in cui la curvatura si annulla, il triedro di Frenet non è ben definito. □

L'equazione

$$(4.3.23) \quad x^2 + y^2 - z^2 = 0 \quad .$$

rappresenta un *cono* in  $\mathbb{R}^3$  (si tratta di una quadrica degenera, si veda l'appendice F). La curva del prossimo esercizio è un'elica che si avvolge sul cono, ed è pertanto detta elica conica.

▷ Esercizio 14 ◁

**Testo**

Sia  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  la curva regolare definita da

$$(4.3.24) \quad \gamma(t) = [t \cos t, t \sin t, t] \quad .$$

Calcolare la curvatura e la torsione di  $\gamma$ .

**Soluzione** (Calcoli omissi)

$$(4.3.25) \quad k(t) = \frac{\sqrt{t^4 + 5t^2 + 6}}{[t^2 + 2]^{\frac{3}{2}}}, \quad \tau(t) = -\frac{6 + t^2}{t^4 + 5t^2 + 8} \quad .$$

□

▷ Esercizio 15 ◁

**Testo**

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile. Esprimere la lunghezza  $L$  del grafico di  $f$  mediante un opportuno integrale.

**Soluzione**

Il grafico di  $f$  può essere identificato con la curva regolare  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita da

$$(4.3.26) \quad \gamma(t) = [t, f(t)] \quad .$$

Quindi

$$(4.3.27) \quad \gamma'(t) = [1, f'(t)] \quad ; \quad |\gamma'(t)| = \sqrt{1 + f'^2(t)} \quad .$$

Ne segue che

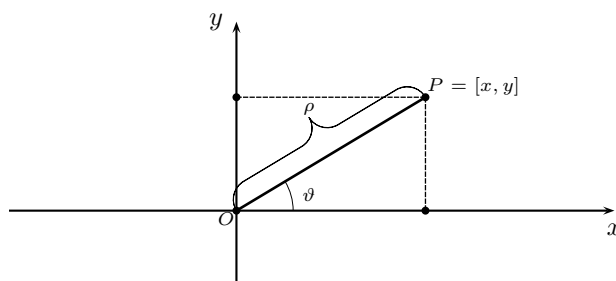
$$(4.3.28) \quad L = L(\gamma) = \int_{\gamma} 1 \, ds = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(t)} \, dt \quad .$$

□

Sappiamo che le coordinate polari  $[\rho, \theta]$  sono legate a quelle cartesiane dalla relazione

$$(4.3.29) \quad \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} .$$

Geometricamente, la (4.3.29) è visualizzabile nella Figura 13.3. Le curve



**Figura 4.3** – Coordinate polari.

descritte mediante una funzione  $\rho = \rho(\theta)$  vengono chiamate *curve piane in forma polare*: il loro studio si colloca perfettamente nell'ambito del lavoro svolto in questo capitolo, in quanto esse possono semplicemente essere identificate con le curve regolari  $\gamma$  in  $\mathbb{R}^2$  parametrizzate da

$$(4.3.30) \quad \gamma(t) = [f(t) \cos t, f(t) \sin t] \quad ,$$

dove  $f$  è una funzione derivabile non identicamente nulla.

▷ Esercizio 16 ◁

**Testo (\*)**

La spirale di Archimede è la curva polare di tipo (4.3.30) con  $f(t) = ct$  ( $c > 0$  è una costante fissata). Esprimere la lunghezza  $L$  dell'arco di spirale  $0 \leq t \leq 1$  mediante un opportuno integrale.

**Soluzione**

Un calcolo che parte da (4.3.30) conduce alla seguente espressione di interesse generale (da verificare come esercizio):

$$(4.3.31) \quad |\gamma'(t)| = \sqrt{f'^2(t) + f^2(t)} \quad ,$$

da cui si ricava

$$(4.3.32) \quad L = \int_0^1 \sqrt{c^2 + c^2 t^2} dt \quad .$$

□

(\*) Segnaliamo, per completezza di esposizione, il fatto seguente: siano  $c, \epsilon > 0$ . Ponendo

$$(4.3.33) \quad f(t) = \frac{\epsilon c}{1 - \epsilon \cos t}$$

in (4.3.30), allora si ottengono rispettivamente:

- (i) Un'ellisse            se  $\epsilon < 1$
- (ii) Una parabola      se  $\epsilon = 1$
- (iii) Un'iperbole      se  $\epsilon > 1$ .

▷ Esercizio 17 ◁

**Testo** (\*)

Sia  $\gamma(t)$  una curva polare piana come in (4.3.30). Esprimere la sua curvatura in funzione di  $f$ .

**Soluzione**

(Calcoli omissi)

$$(4.3.34) \quad k(t) = \frac{|f^2(t) + 2f'^2(t) - f(t)f''(t)|}{[f'^2(t) + f^2(t)]^{\frac{3}{2}}} \quad .$$

□

## 4.4 Considerazioni conclusive

Per un'introduzione generale e completa allo studio delle curve e delle superfici in  $\mathbb{R}^3$  consigliamo al lettore di consultare i testi didattici scritti dal matematico brasiliano Manfredo Do Carmo (in particolare, si veda [5]). Per ulteriori approfondimenti e curiosità sulle curve piane si può consultare [4].



# Capitolo 5

## Elementi di teoria delle superfici in $\mathbb{R}^3$

### 5.0 Scopi del capitolo

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  una regione n-dimensionale: per *campo scalare* intendiamo una funzione  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Nel caso in cui  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ , il grafico di un campo scalare è un esempio di superficie regolare in  $\mathbb{R}^3$ : impareremo a descrivere superfici in  $\mathbb{R}^3$  mediante parametrizzazioni dipendenti da due parametri e otterremo l'equazione del piano tangente ad una superficie regolare. Si presuppone che il lettore abbia familiarità con il concetto di derivata parziale di un campo scalare.

### 5.1 Superfici regolari in $\mathbb{R}^3$

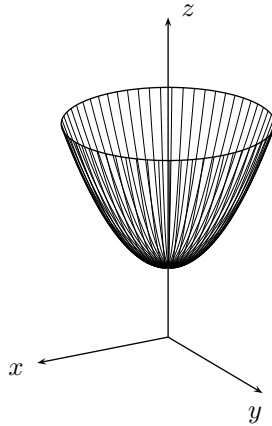
Sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  un campo scalare con derivate parziali continue,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ . Il suo grafico, cioè

$$(5.1.1) \quad \{[x, y, f(x, y)] \in \mathbb{R}^3 : [x, y] \in \Omega\}$$

è un esempio di superficie regolare in  $\mathbb{R}^3$ . Nella Figura 5.1 è rappresentato il grafico del campo scalare

$$(5.1.2) \quad f(x, y) = 1 + x^2 + y^2 \quad , \quad x^2 + y^2 \leq 1 \quad ,$$

(in questo caso  $\Omega$  è il disco chiuso di centro l'origine e raggio uno). Più generalmente, diciamo che la descrizione di una superficie regolare  $S$  in  $\mathbb{R}^3$



**Figura 5.1** – Grafico del campo scalare (5.1.2).

parte da basi simili a quelle che ci hanno guidato nello studio delle curve regolari (capitolo 4), ma con una differenza fondamentale che complica sensibilmente il quadro analitico: per descrivere  $S$  sono necessari 2 parametri (tradizionalmente, chiamati  $u$  e  $v$ ), mentre per le curve bastava il solo  $t$  (o  $s$ ). Procediamo con ordine: una parametrizzazione di una superficie  $S$  in  $\mathbb{R}^3$  è un dato del tipo

$$(5.1.3) \quad \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad [u, v] \in \Omega \quad ,$$

dove  $\Omega$  è una regione di  $\mathbb{R}^2$  (tipicamente,  $\Omega$  potrebbe essere un rettangolo:  $a \leq u \leq b$ ,  $c \leq v \leq d$ ; oppure,  $\Omega = \mathbb{R}^2$ , o, ancora, un disco come in (5.1.2). Le funzioni  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$  e  $z(u, v)$  in (5.1.3) sono 3 campi scalari su  $\Omega$ . L'esempio dei grafici (5.1.1) rientra in questo contesto come il caso in cui (5.1.3) assume la forma seguente:

$$(5.1.4) \quad \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases} \quad [u, v] \in \Omega \quad .$$

Spesso scriveremo  $X(u, v)$  per indicare concisamente una parametrizzazione di tipo (5.1.3). Dunque  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  è un campo vettoriale e, geometricamente, possiamo dire che la superficie  $S$  coincide con l'immagine di  $X$ ,

cioè  $S = X(\Omega)$  (ricordiamo che, anche nel capitolo 13, avevamo identificato una curva  $\gamma$  in  $\mathbb{R}^3$  come l'immagine di una sua parametrizzazione). Prima di introdurre nuovi concetti, prendiamo in considerazione ancora due esempi importanti.

---



---

**Esempio 1:** (*Cilindro*) Si consideri la seguente parametrizzazione  $X(u, v)$ :

$$\begin{cases} x = \sin v \\ y = \cos v \\ z = u \end{cases} \quad 0 \leq v < 2\pi, u \in \mathbb{R}.$$

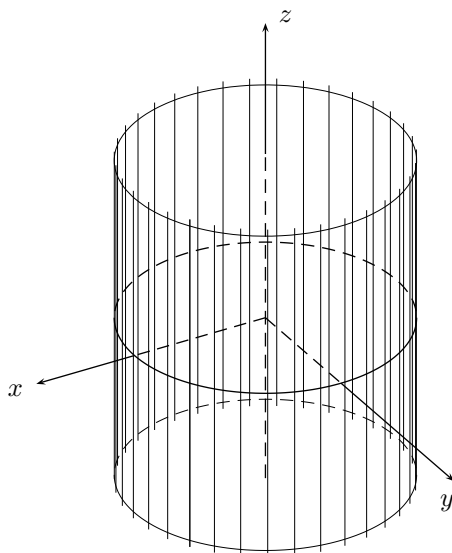
Ora, qui ed in seguito, abbreviamo la scrittura riscrivendo questa parametrizzazione come segue:

$$(5.1.5) \quad X(u, v) = [\sin v, \cos v, u] \quad 0 \leq v < 2\pi, u \in \mathbb{R}.$$


---



---



**Figura 5.2** – Cilindro di equazione  $x^2 + y^2 = 1$ .

La (5.1.5) descrive il cilindro di Figura 5.2, cioè il luogo di punti individuato dall'equazione (in  $\mathbb{R}^3$ !)

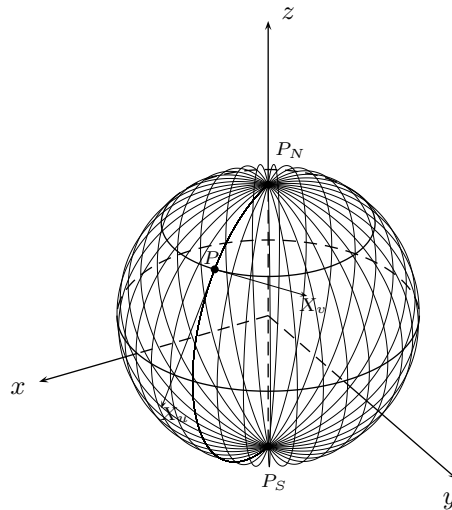
$$x^2 + y^2 = 1 \quad .$$

---

**Esempio 2:** (Sfera di centro  $O$  e raggio fissato  $R > 0$ ) Si consideri

$$(5.1.6) \quad X(u, v) = [R \sin u \sin v, R \sin u \cos v, R \cos u], \quad 0 \leq v < 2\pi, \quad 0 \leq u \leq \pi.$$

Verifichiamo ora che i punti descritti dalla parametrizzazione  $X(u, v)$  in (5.1.6)



**Figura 5.3** – Sfera di equazione  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .

soddisfano la seguente equazione:

$$(5.1.7) \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Infatti, sostituendo le coordinate di  $X(u, v)$  in (5.1.7), abbiamo

$$(5.1.8) \quad \begin{aligned} & (R \sin u \sin v)^2 + (R \sin u \cos v)^2 + (R \cos u)^2 \\ &= R^2 \sin^2 u \sin^2 v + R^2 \sin^2 u \cos^2 v + R^2 \cos^2 u \\ &= R^2 \sin^2 u [\sin^2 v + \cos^2 v] + R^2 \cos^2 u = R^2 \sin^2 u + R^2 \cos^2 u = R^2. \end{aligned}$$

Poiché la (5.1.7) è l'equazione della sfera di centro  $O$  e raggio  $R > 0$ , concludiamo che la superficie  $S$  descritta da (5.1.6) è parte di questa sfera.

In realtà, il fatto che (5.1.6) rappresenti *tutta* la sfera può essere dedotto dall'osservazione della Figura 5.3, in cui emergono i significati geometrici dei parametri  $u$  e  $v$ .

Indicando con  $P_N = [0, 0, R]$ ,  $P_S = [0, 0, -R]$  rispettivamente il polo nord e il polo sud della sfera, vediamo che  $u$  rappresenta la *co-latitudine*: in particolare, per  $u = 0$  siamo al polo nord, per  $u = \frac{\pi}{2}$  ci troviamo sull'equatore ( $z = 0$ ), e in  $u = \pi$  abbiamo il polo sud.

Le curve, sulla superficie sferica, ottenute fissando un valore  $v = v_0$  in (5.1.6) e facendo variare  $u$  nell'intervallo  $[0, \pi]$ , sono i *meridiani*.

Il parametro  $v$  rappresenta invece la *longitudine* (misurata dal meridiano  $v = 0$ ). Le curve ottenute fissando  $u = u_0$  in (5.1.6) ( $0 < u_0 < \pi$ ) sono i *paralleli*. In particolare, il parallelo corrispondente a  $u = \frac{\pi}{2}$  è l'equatore. Se, in Figura 5.3,  $P = X(u_0, v_0)$ , il parallelo ivi rappresentato è quello di equazione  $u = u_0$ .

Sostituendo in (5.1.6), ne deduciamo che

$$(5.1.9) \quad \gamma(v) = X(u_0, v) = [R \sin u_0 \sin v, R \sin u_0 \cos v, R \cos u_0], \quad 0 \leq v < 2\pi,$$

è una curva regolare, nel senso del capitolo 13, che parametrizza questo parallelo.

In modo analogo, il meridiano passante per  $P$  ha equazione  $v = v_0$  e

$$(5.1.10) \quad \beta(u) = X(u, v_0) = [R \sin u \sin v_0, R \sin u \cos v_0, R \cos u], \quad 0 \leq u \leq \pi,$$

è una parametrizzazione di questo meridiano.

Le curve  $\gamma(v)$  e  $\beta(u)$  sono dette *linee coordinate* passanti per  $P$ . Poiché  $\gamma(v) = X(u_0, v)$ , il vettore tangente a  $\gamma(v)$ , cioè  $\gamma'(v)$ , si ottiene facendo le derivate parziali, rispetto a  $v$ , delle componenti di  $X(u, v)$ .

In formule,

$$(5.1.11) \quad \gamma'(v) = \frac{\partial X}{\partial v}(u_0, v) = \left[ \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v) \right] \quad .$$

La notazione usuale, che adotteremo, è quella di scrivere

$$(5.1.12) \quad \gamma'(v) = X_v(u_0, v) \quad .$$

Nella Figura 5.3 abbiamo rappresentato  $X_v(u_0, v_0)$ . In particolare, nel nostro esempio, calcolando le derivate rispetto a  $v$  in (5.1.9), si ottiene

$$(5.1.13) \quad X_v = [R \sin u_0 \cos v, -R \sin u_0 \sin v, 0] .$$

Prevedibilmente, per l'altra linea coordinata (meridiano) poniamo

$$(5.1.14) \quad \beta'(u) = X_u(u, v_0) .$$

Derivando rispetto a  $u$  in (5.1.10) si ottiene, nel caso della nostra sfera,

$$(5.1.15) \quad X_u = [R \cos u \sin v_0, R \cos u \cos v_0, -R \sin u] .$$

Il vettore  $X_u(u_0, v_0)$  è rappresentato in Figura 5.3. In particolare, vediamo che  $X_u$  e  $X_v$ , calcolati in  $[u_0, v_0]$ , risultano entrambi *tangenti alla sfera in  $P$* . Ne segue che

(5.1.16) *Il piano tangente a  $S$  in  $P$ , denotato  $T_P S$ , è il piano passante per  $P$  e parallelo a  $X_u$  e  $X_v$ , o, in altre parole:*

(5.1.17)  *$T_P S$  è il piano passante per  $P$  e ortogonale a  $\vec{N}$ , dove*

$$(5.1.18) \quad \vec{N} = X_u \wedge X_v .$$

▷ Esercizio 1 ◁

**Testo**

Si consideri la sfera  $S$  di centro  $O$  e raggio  $R = 1$ . Si scriva l'equazione del piano tangente  $T_P S$ , dove  $P = [\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ .

**Soluzione**

Una parametrizzazione  $X(u, v)$  di  $S$  si ottiene ponendo  $R = 1$  in (5.1.6). Abbiamo

$$(5.1.19) \quad X(u, v) = [\sin u \sin v, \sin u \cos v, \cos u], \quad 0 \leq v < 2\pi, \quad 0 \leq u \leq \pi .$$

Si può osservare che

$$(5.1.20) \quad P = X(u_0, v_0) \quad , \quad \text{con} \quad u_0 = \frac{\pi}{4}, \quad v_0 = \frac{\pi}{2} .$$

L'espressione dei vettori  $X_u$  e  $X_v$  si ottiene calcolando le derivate parziali in (5.1.19), rispettivamente rispetto a  $u$  e  $v$ :

$$(5.1.21) \quad X_u = [\cos u \sin v, \cos u \cos v, -\sin u] ,$$

$$(5.1.22) \quad X_v = [\sin u \cos v, -\sin u \sin v, 0] .$$

Poi, esplicitando il calcolo del prodotto vettoriale:

$$(5.1.23) \quad \vec{\mathcal{N}} = X_u \wedge X_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos u \sin v & \cos u \cos v & -\sin u \\ \sin u \cos v & -\sin u \sin v & 0 \end{vmatrix}$$

$$= [-\sin^2 u \sin v, -\sin^2 u \cos v, -\sin u \cos u] .$$

Da (5.1.20), il punto  $P$  corrisponde a  $u = u_0 = \frac{\pi}{4}$ ,  $v = v_0 = \frac{\pi}{2}$ . Usando questi valori in (5.1.23), otteniamo che

$$(5.1.24) \quad \vec{\mathcal{N}}_P = [-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}]$$

è un vettore direzionale di  $T_P S$ . Quindi possiamo scriverci l'equazione di  $T_P S$ :

$$(5.1.25) \quad T_P S : \quad -\frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0(y - 0) - \frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 .$$

Semplificando i calcoli in (5.1.25):

$$(5.1.26) \quad T_P S : \quad x + z - \frac{2}{\sqrt{2}} = 0 .$$

Concludiamo questo esercizio con un'osservazione: la nostra risoluzione era finalizzata all'illustrazione di un metodo che, come ridiscuteremo tra poco, consentisse di ricavare l'equazione di  $T_P S$  partendo da una parametrizzazione  $X(u, v)$ . Però, in questo caso specifico, si poteva ricavare un vettore direzionale  $\vec{\mathcal{N}}_P$  di  $T_P S$  con considerazioni geometriche elementari: bastava infatti osservare che  $T_P S$  è ortogonale al vettore

$$(5.1.27) \quad \overrightarrow{P - \vec{O}} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] .$$

Usando (5.1.27) come vettore direzionale di  $T_P S$  si ritrova facilmente il risultato (5.1.26). □

È arrivato il momento di fare il punto della situazione. Il lavoro svolto nell'ambito del precedente esempio 3 ha validità generale: ciò significa che, partendo da una generica superficie  $X(u, v)$  di tipo (5.1.3), è possibile costruire

le linee coordinate  $u = u_0$ , o  $v = v_0$ , come in (5.1.9) e (5.1.10). Inoltre, si possono calcolare i vettori tangenti a queste linee,  $X_u$  e  $X_v$  ((5.1.11) e (5.1.14)), facendo le derivate parziali di  $X(u, v)$  rispetto a  $u$  e  $v$  rispettivamente. Infine, nei punti in cui  $\vec{\mathcal{N}} = X_u \wedge X_v \neq \vec{0}$ , risulta ben definito il piano tangente  $T_P S$ . Visto che l'esistenza di  $T_P S$  è chiaro requisito geometrico di regolarità della superficie, questo discorso serve da motivazione per la seguente:

**Definizione 1:** Sia, come in (5.1.3),

$$(5.1.28) \quad X(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \quad , \quad [u, v] \in \Omega \quad ,$$

una parametrizzazione con derivate parziali  $X_u$  e  $X_v$  continue su  $\Omega$ . Diremo che  $X(u, v)$  rappresenta una *superficie regolare*  $S$  in  $\mathbb{R}^3$  se

$$(5.1.29) \quad \vec{\mathcal{N}} = X_u \wedge X_v \neq \vec{0} \quad \text{in } \Omega .$$

Come osservato sopra, la (5.1.29) assicura l'esistenza di un ben definito piano tangente  $T_P S$  in ogni punto  $P \in S$ .

▷ Esercizio 2 ◁

**Testo**

(i) Verificare che la parametrizzazione (5.1.5) (cilindro) rappresenta una superficie regolare e scrivere l'equazione di  $T_P S$ , quando  $P = [1, 0, 2]$ .

(ii) Descrivere geometricamente le linee coordinate associate a (5.1.5).

**Soluzione**

(i) Calcolando le derivate parziali otteniamo:

$$(5.1.30) \quad X_u = [0, 0, 1] ; \quad X_v = [\cos v, -\sin v, 0] .$$

Quindi

$$(5.1.31) \quad \begin{aligned} \vec{\mathcal{N}} &= X_u \wedge X_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos v & -\sin v & 0 \end{vmatrix} \\ &= [\sin v, \cos v, 0] . \end{aligned}$$

Poiché  $\vec{\mathcal{N}} \neq \vec{0} \quad \forall v \in [0, 2\pi)$  e  $\forall u \in \mathbb{R}$ , la (5.1.29) è soddisfatta e quindi (5.1.5) è una superficie regolare. Poi osserviamo che  $P = X(2, \frac{\pi}{2})$ . Quindi

$$(5.1.32) \quad \vec{\mathcal{N}}_P = [1, 0, 0] .$$



Dunque  $T_P S$  è il piano passante per  $P = [1, 0, 2]$  e ortogonale a  $\vec{N}_P = [1, 0, 0]$ : in conclusione

$$(5.1.33) \quad T_P S : \quad x - 1 = 0 \quad .$$

(ii) Ogni linea coordinata  $\gamma(v) = X(u_0, v)$  è una circonferenza, di raggio 1 e centro sull'asse  $z$ , contenuta nel piano  $z - u_0 = 0$ . Le linee coordinate  $\beta(u) = X(u, v_0)$  sono rette parallele all'asse  $z$ .

□

▷ Esercizio 3 ◁

**Testo**

Si consideri il grafico di un campo scalare  $f(u, v)$ , come in (5.1.4). Assumendo che  $f(u, v)$  abbia derivate parziali continue,

- (i) verificare che la superficie  $S$  definita da (5.1.4) è regolare;
- (ii) determinare l'equazione di  $T_P S$  nel generico punto  $P \in S$ .

**Soluzione**

(i) Abbiamo

$$(5.1.34) \quad X_u = \left[ 1, 0, \frac{\partial f}{\partial u} \right] ; \quad X_v = \left[ 0, 1, \frac{\partial f}{\partial v} \right] .$$

Quindi

$$(5.1.35) \quad \begin{aligned} \vec{N} &= X_u \wedge X_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial u} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial v} \end{vmatrix} \\ &= \left[ -\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1 \right] . \end{aligned}$$

Poiché  $\vec{N} \neq \vec{0}$ , la (5.1.4) è una superficie regolare.

(ii) Posto  $P = [u, v, f(u, v)]$  e usando per  $\vec{N}_P$  l'espressione trovata in (5.1.35), abbiamo

$$(5.1.36) \quad T_P S : \quad -\frac{\partial f}{\partial u}(u, v)(x - u) - \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)(y - u) + (z - f(u, v)) = 0 \quad .$$

□

## 5.2 Esercizi di riepilogo

▷ Esercizio 4 ◁

### Testo

Si consideri la superficie  $S$  in  $\mathbb{R}^3$  costituita dal grafico del campo scalare  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definito da:

$$f(x, y) = \sqrt{(y - x^2)}, \text{ dove } \Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, : y \geq x^2\} .$$

- (i) Dare una parametrizzazione di  $S$ , stabilendo se si tratta di una superficie regolare;  
(ii) Sia  $P = [1, 4, \sqrt{3}]$ . Dopo aver verificato che  $P \in S$ , scrivere l'equazione del piano tangente  $T_P S$ .

### Soluzione

- (i) La parametrizzazione di  $S$  è fornita direttamente dalla (5.1.4):

$$(5.2.1) \quad X(u, v) = [u, v, \sqrt{v - u^2}] \quad , \quad v \geq u^2 .$$

Le derivate parziali

$$(5.2.2) \quad X_u = \left[1, 0, -\frac{u}{\sqrt{v - u^2}}\right] \quad ; \quad X_v = \left[0, 1, \frac{1}{2\sqrt{v - u^2}}\right]$$

esistono e sono continue all'interno di  $\Omega$ , cioè imponendo la restrizione

$$(5.2.3) \quad v > u^2$$

in (5.2.1). Nella regione (5.2.3), si ha (come in (5.1.35))

$$(5.2.4) \quad \vec{N} = X_u \wedge X_v = \left[\frac{u}{\sqrt{v - u^2}}, -\frac{1}{2\sqrt{v - u^2}}, 1\right] .$$

Ovviamente  $\vec{N} \neq \vec{0}$  se  $[u, v]$  soddisfa la (5.2.3). Quindi possiamo concludere che l'interno di  $S$  è una superficie regolare in  $\mathbb{R}^3$ .

- (ii)  $P = X(1, 4)$ , quindi  $P \in S$ . La normale a  $T_P S$  in  $P$  è, da (5.2.4) con  $u = 1, v = 4$ ,

$$(5.2.5) \quad \vec{N}_P = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, 1\right] .$$

Dunque  $T_P S$  è il piano che passa per  $P$  ed ha (5.2.5) come vettore direzionale:

$$(5.2.6) \quad T_P S : \quad \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 1) - \frac{1}{2\sqrt{3}}(y - 4) + (z - \sqrt{3}) = 0 .$$

Completando i calcoli in (5.2.6) troviamo che l'equazione richiesta è

$$(5.2.7) \quad T_P S : \quad 2x - y + 2\sqrt{3}z - 4 = 0 .$$

□

▷ Esercizio 5 ◁

**Testo**

Si consideri

$$(5.2.8) \quad X(u, v) = [1 + 2u - v, 3 - u + 2v, 2 + 3u + v] \quad u, v \in \mathbb{R} .$$

- (i) Verificare che la (5.2.8) definisce una superficie regolare  $S$  in  $\mathbb{R}^3$ .
- (ii) Sia  $P = [0, 5, 3]$ : verificare che  $P \in S$  e scrivere l'equazione di  $T_P S$ .
- (iii) Confrontare i risultati ottenuti in (i) e (ii) con l'esercizio 16 del capitolo 6.

**Soluzione**

(i) Calcolando le derivate parziali troviamo

$$(5.2.9) \quad X_u = [2, -1, 3] \quad ; \quad X_v = [-1, 2, 1] \quad \forall u, v \in \mathbb{R} .$$

Quindi  $X_u$  e  $X_v$  esistono e sono continui per  $[u, v] \in \mathbb{R}^2$ . Inoltre

$$(5.2.10) \quad \vec{N} = X_u \wedge X_v = [-7, -5, 3] \neq 0$$

in ogni punto, quindi la (5.2.8) definisce effettivamente una superficie regolare  $S$  in  $\mathbb{R}^3$ .

(ii)  $P = X(0, 1)$ , quindi  $P \in S$ . Poiché, da (5.2.10),  $\vec{N}_P = [-7, -5, 3]$ , l'equazione di  $T_P S$  è

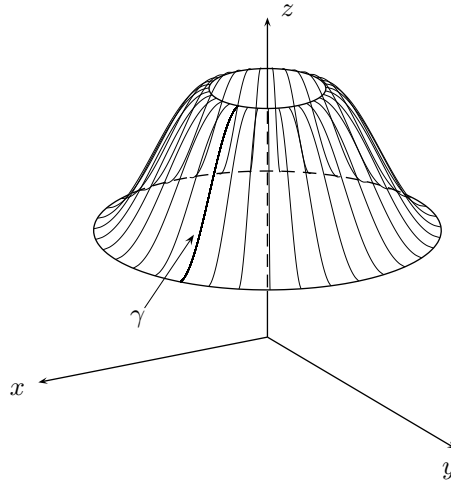
$$(5.2.11) \quad -7(x - 0) - 5(y - 5) + 3(z - 3) = 0 \quad ,$$

cioè

$$(5.2.12) \quad T_P S : \quad 7x + 5y - 3z - 16 = 0 \quad .$$

(iii) La (5.2.8) altro non è che la rappresentazione parametrica del piano che passa per il punto  $Q$  di coordinate  $[1, 3, 2]$  ed è parallelo ai vettori  $X_u$  e  $X_v$  di (5.2.9). Se si esplicita l'equazione di questo piano, si ritrova proprio la (5.2.12): ciò corrisponde al fatto, geometricamente ovvio, che, in ogni punto del piano, il piano tangente al piano coincide con il piano stesso! Notiamo anche quanto segue: il risultare  $X_u$  e  $X_v$  costanti corrisponde all'essere le linee coordinate delle rette. Inoltre,  $\vec{N}$  costante riflette anch'esso l'essere la superficie un piano.

□



**Figura 5.4** – Superficie di rotazione attorno all'asse  $z$ .

▷ Esercizio 6 ◁

**Testo** (*Superfici di rotazione*)

Si consideri una curva regolare  $\gamma(u)$  nel piano  $xz$ , come in Figura 5.4. Dare una rappresentazione parametrica della superficie  $S$  che si ottiene facendo ruotare  $\gamma$  attorno all'asse  $z$ , come in Figura 5.4.

**Soluzione**

Per impostare questo esercizio possiamo supporre che la curva  $\gamma$  da ruotare sia descritta da

$$(5.2.13) \quad \gamma(u) = [x(u), 0, z(u)] \quad , \quad u \in (a, b) ,$$

dove  $x(u)$ ,  $z(u)$  sono due funzioni derivabili, con

$$(5.2.14) \quad x(u) > 0 \quad \forall u \in (a, b) .$$

La (5.2.14) serve a garantire che  $\gamma$  non intersechi l'asse  $z$ , cosa che potrebbe inficiare la regolarità della superficie di rotazione  $S$ .

La rotazione di  $\gamma$  rispetto all'asse  $z$  può essere convenientemente descritta ragionando come segue: sia  $P = [R, 0, z_0]$  un punto di  $\gamma$ . Il punto  $P$  deve percorrere una circonferenza, di raggio  $R > 0$ , nel piano  $z = z_0$ , con centro sull'asse  $z$ .

Una parametrizzazione di questa circonferenza è

$$(5.2.15) \quad \beta(v) = [R \cos v, R \sin v, z_0] \quad , \quad 0 \leq v < 2\pi .$$

Applicando queste considerazioni al generico punto di  $\gamma$ , dato dalla (5.2.13), otteniamo la parametrizzazione della nostra superficie di rotazione  $S$ , e cioè

$$(5.2.16) \quad X(u, v) = [x(u) \cos v, x(u) \sin v, z(u)] \quad ,$$

con  $u \in (a, b)$  e  $0 \leq v < 2\pi$ . Si può notare che, in (5.2.16), le linee coordinate del tipo  $u = u_0$  sono circonferenze come in (5.2.15). Invece, le linee coordinate del tipo  $v = v_0$  sono copie di  $\gamma$  (il lettore può aiutarsi nella visualizzazione di questa affermazione osservando ancora la Figura 5.4). □

In geometria, la superficie di un salvagente è nota con il nome di *toro*. Analiticamente, il toro può essere ottenuto facendo ruotare, come descritto nell'esercizio precedente, una circonferenza  $\gamma$  attorno all'asse  $z$ : i dettagli sono presentati attraverso il prossimo esercizio.

▷ Esercizio 7 ◁

**Testo**

Si consideri la superficie di rotazione  $\mathcal{T}$  definita da

$$(5.2.17) \quad X(u, v) = [(2 + \cos u) \cos v, (2 + \cos u) \sin v, \sin u] \quad , \quad 0 \leq u, v < 2\pi .$$

Sia  $P = X(0, 0) = [3, 0, 0] \in \mathcal{T}$ . Scrivere l'equazione del piano tangente  $T_P\mathcal{T}$ .

**Soluzione**

La (5.2.17) rappresenta un toro  $\mathcal{T}$ , ottenuto ruotando attorno all'asse  $z$  la circonferenza  $\gamma$ , nel piano  $xz$ , definita da

$$(5.2.18) \quad \gamma(u) = [2 + \cos u, 0, \sin u] \quad , \quad 0 \leq u < 2\pi .$$

In particolare, si può notare che  $\gamma$  ha raggio 1 e centro  $C = [2, 0, 0]$ . Ora calcoliamo

$$(5.2.19) \quad X_u = [-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u] \quad ,$$

$$(5.2.20) \quad X_v = [-\sin v(2 + \cos u), \cos v(2 + \cos u), 0] \quad .$$

Quindi, calcolando il loro prodotto vettoriale, si perviene a

$$(5.2.21) \quad \vec{N} = X_u \wedge X_v = (2 + \cos u) [-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u] .$$

Infine, il vettore direzionale  $\vec{N}_P$  del piano tangente  $T_P\mathcal{T}$  si ottiene ponendo  $u = 0$ ,  $v = 0$  in (5.2.21):

$$(5.2.22) \quad \vec{N}_P = [-3, 0, 0] \quad .$$

Poiché  $P = [3, 0, 0]$ , usando (5.2.22) arriviamo subito all'equazione richiesta

$$(5.2.23) \quad T_P\mathcal{T} : \quad x - 3 = 0 \quad .$$

□

### 5.3 Considerazioni conclusive

Per un'introduzione generale e completa allo studio delle curve e delle superfici in  $\mathbb{R}^3$  consigliamo al lettore di consultare i testi didattici scritti dal matematico brasiliano Manfredo Do Carmo (in particolare, si veda [5]).



La matrice  $A$  è detta *matrice dei coefficienti* del sistema,  $X$  è il vettore  $n$ -dimensionale delle *incognite*, mentre  $B$  rappresenta i cosiddetti *termini noti*.  $A \cdot X$  indica il prodotto (righe per colonne) della matrice  $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$  con la matrice (= vettore colonna)  $X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) (= \mathbb{R}^n)$ . Il nostro obiettivo è quello di utilizzare la teoria delle matrici, illustrata nel capitolo 3, per stabilire quando (6.0.3) ammette soluzioni e, in caso affermativo, determinarle. Nel caso specifico in cui  $B$  è il vettore nullo si dirà che il sistema lineare è *omogeneo*. In questo caso, (6.0.3) è sempre risolubile e l'insieme delle sue soluzioni forma un cosiddetto *sottospazio vettoriale*  $W$  di  $\mathbb{R}^n$ . Al fine di chiarire questo concetto, in relazione anche alla fondamentale nozione di *base* di  $W$ , dedichiamo la prima sezione di questo capitolo ad una breve introduzione alla teoria degli spazi vettoriali.

Gli strumenti di algebra lineare che applicheremo per determinare le soluzioni di (6.0.2) sono formalmente complessi, dovendo essi trattare una situazione generale dove  $m, n$  possono essere arbitrariamente grandi. Nei nostri esercizi invece, in pratica, avremo sempre  $m, n \leq 7$ : quindi i calcoli risultano molto più agevoli e il lettore deve abituarsi ad eseguirli senza perdere di vista le usuali regole dell'algebra elementare (in altre parole: è inutile applicare un complicato *algoritmo di Gauss* a casi in cui le soluzioni sono *sotto gli occhi* grazie a considerazioni algebriche semplici.. d'altra parte, il nostro studio teorico è indispensabile per acquisire la necessaria consapevolezza di ciò che si sta facendo).

## 6.1 Spazi vettoriali, sottospazi e basi

Il primo esempio di spazio vettoriale (in realtà, proprio quello da cui questo concetto deriva il nome) è l'insieme dei vettori di  $\mathbb{R}^3$ , munito delle operazioni di somma  $\vec{u} + \vec{v}$  e moltiplicazione di un vettore per uno scalare ( $\lambda \vec{v}$ ) definite nel capitolo 1. Più generalmente, un  $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale  $V$  è un insieme  $V$  sugli elementi del quale sono definite una somma, e una moltiplicazione per  $\lambda \in \mathbb{R}$ , che godono di proprietà algebriche (associativa, distributiva etc.) *analoghe a quelle dei vettori in  $\mathbb{R}^3$* . Non precisiamo ulteriormente questo concetto dal punto di vista del formalismo algebrico, ma diciamo che l'esempio guida per capire che cosa sia un  $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale è  $V = \mathbb{R}^n$ , dotato della struttura algebrica che ora descriviamo. Dal punto di vista insiemistico,  $\mathbb{R}^n = M_{n,1}(\mathbb{R})$ : gli elementi di  $\mathbb{R}^n$ , che chiameremo *vettori*, sono quindi individuati da  $n$  coordinate reali che, per ragioni di comodità algebrica, conviene considerare



come colonne (piuttosto che come righe). In altre parole,  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  significa

$$(6.1.1) \quad \vec{v} = {}^t[v_1, \dots, v_n] \quad ,$$

dove  $v_i \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Scriveremo  $\vec{0}$  ( $= {}^t[0, \dots, 0]$ ) per indicare il *vettore nullo*. **Prevedibilmente**, definiamo

$$(6.1.2) \quad \vec{u} + \vec{v} = {}^t[u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n] \quad ,$$

$$(6.1.3) \quad \lambda \vec{v} = {}^t[\lambda v_1, \dots, \lambda v_n] \quad .$$

---

---

**Definizione 1:** Sia  $W \subseteq V$ , dove  $V$  è un  $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale. Diremo che  $W$  è un *sottospazio vettoriale* di  $V$  se valgono le due seguenti proprietà:

$$(6.1.4) \quad \vec{u}, \vec{v} \in W \implies (\vec{u} + \vec{v}) \in W \quad ;$$

$$(6.1.5) \quad \vec{v} \in W \implies \lambda \vec{v} \in W \quad , \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad .$$

---

---

▷ Esercizio 1 ◁

**Testo (\*)**

Siano  $V = \mathbb{R}^2$  e

$$(6.1.6) \quad W = \{{}^t[x, y] \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\} \quad .$$

Stabilire se  $W$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .

**Soluzione**

Dal punto di vista insiemistico, si può osservare che  $W$  è formato dall'unione degli assi  $x$  e  $y$ . Ai fini dell'esercizio, si osserva che, posto

$$(6.1.7) \quad \vec{u} = {}^t[1, 0] \quad \text{e} \quad \vec{v} = {}^t[0, 1] \quad ,$$

si ha:

$$(6.1.8) \quad \vec{u}, \vec{v} \in W \quad , \quad \text{ma} \quad (\vec{u} + \vec{v}) \notin W \quad .$$

La (6.1.8) dice che la (6.1.4) non è soddisfatta, e da ciò si conclude che  $W$  *non* è un sottospazio vettoriale di  $V$ . □

Sia ora  $V = \mathbb{R}^n$ . I sottospazi vettoriali  $W$  di  $V$  sono (tutti e soli) gli insiemi delle soluzioni dei sistemi lineari omogenei, cioè:

$$(6.1.9) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Ad esempio, sfruttando le nostre conoscenze geometriche derivanti dallo studio del capitolo 1, siamo in grado di riconoscere che i sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^3$  sono

$$(6.1.10) \quad \begin{aligned} \text{(i)} \quad & W = \{\vec{0}\}; \\ \text{(ii)} \quad & W = \text{retta passante per } \vec{0}; \\ \text{(iii)} \quad & W = \text{piano passante per } \vec{0}; \\ \text{(iv)} \quad & W = \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Quando, nel capitolo 1, abbiamo studiato il concetto di rappresentazione parametrica di una retta, abbiamo imparato che per descrivere i punti di un sottospazio di tipo (6.1.10)(ii) è necessario (e sufficiente) un parametro  $t \in \mathbb{R}$ . In questo contesto, ciò significa che un sottospazio vettoriale di tipo (6.1.10)(ii) ha dimensione 1 (si scrive  $\dim W = 1$ ). In modo simile (si veda l'esercizio 5 del capitolo 5) sappiamo che i sottospazi di tipo (iii) sono parametrizzabili usando due variabili. Con queste premesse, adesso dobbiamo fare un po' di lavoro che ci condurrà alla formalizzazione del concetto intuitivo per cui la dimensione dei sottospazi vettoriali di tipo (6.1.10)(i),(ii),(iii),(iv) è rispettivamente 0, 1, 2 e 3.

(6.1.11) **Combinazioni lineari:** Siano  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r$   $r$  vettori di  $\mathbb{R}^n$ . Una *combinazione lineare* di questi vettori è un vettore  $\vec{w}$  di  $\mathbb{R}^n$  della forma

$$(6.1.12) \quad \vec{w} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_r \vec{v}_r \quad \left( = \sum_{j=1}^r \lambda_j \vec{v}_j \right) \quad ,$$

dove  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ .

(6.1.13) **Base canonica di  $\mathbb{R}^n$ :** In  $V = \mathbb{R}^n$ , consideriamo i seguenti  $n$  vettori:

$$(6.1.14) \quad \vec{e}_1 = {}^t[1, 0, \dots, 0], \vec{e}_2 = {}^t[0, 1, 0, \dots, 0], \dots, \vec{e}_n = {}^t[0, \dots, 0, 1]$$

La (6.1.14) dice che  $\vec{e}_i$  è il vettore avente tutte le coordinate nulle ad eccezione della  $i$ -esima, che vale 1. Sia ora  $\vec{v} = {}^t[v_1, \dots, v_n]$  un generico vettore di  $\mathbb{R}^n$ : allora  $\vec{v}$  si scrive, *in modo unico*, come combinazione lineare degli  $n$  vettori in (6.1.14). Infatti si ha

$$(6.1.15) \quad \vec{v} = v_1\vec{e}_1 + \dots + v_n\vec{e}_n \quad .$$

In questa situazione si dice che  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$  è una *base* di  $\mathbb{R}^n$  (detta la *base canonica* di  $\mathbb{R}^n$ ): si noti che, nel capitolo 1, avevamo già incontrato  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  nel caso  $n = 3$ . Più generalmente, adesso consideriamo un sottospazio vettoriale  $W$ . Sia  $\mathcal{C} = \{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_p\}$  un sottoinsieme formato da  $p$  vettori di  $W$  e consideriamo le due proprietà seguenti:

**Proprietà 1:** Se  $\vec{w} \in W$ , allora  $\vec{w}$  è combinazione lineare dei  $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_p$ : cioè

$$\vec{w} = \lambda_1\vec{w}_1 + \dots + \lambda_p\vec{w}_p$$

per opportuni scalari  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ .

**Proprietà 2:** Se

$$\lambda_1\vec{w}_1 + \dots + \lambda_p\vec{w}_p = \vec{0} \quad ,$$

allora

$$\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_p = 0 \quad .$$

Se  $\mathcal{C}$  soddisfa entrambe le proprietà 1 e 2, allora diremo che  $\mathcal{C}$  è una base di  $W$ , e  $\dim W = p$ .

In sostanza, se  $\mathcal{C}$  è una base di  $W$ , allora ogni vettore di  $W$  si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori di  $\mathcal{C}$ . L'unicità della scrittura è garantita dalla validità della proprietà 2, nota come condizione di *indipendenza lineare* dei vettori  $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_p$ .

▷ Esercizio 2 ◁

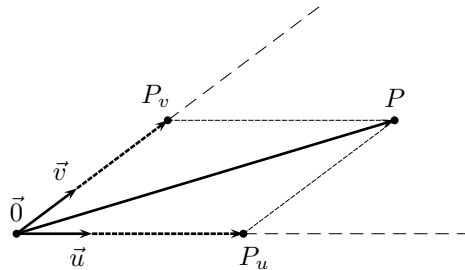
**Testo (\*)**

Sia  $V = \mathbb{R}^3$ . Sia  $W$  il piano passante per  $\vec{0}$  e parallelo a due vettori assegnati  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , con  $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$ . Dimostrare geometricamente che  $\mathcal{C} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$  è una base di  $W$ .

**Soluzione**

Con riferimento alla Figura 6.1, sia  $\overrightarrow{(P-O)}$  un generico vettore in  $W$ . Indichiamo con  $P_u$  e  $P_v$  le proiezioni di  $P$  lungo le direzioni di  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  rispettivamente. Per la regola del parallelogramma abbiamo

$$(6.1.16) \quad \overrightarrow{(P-O)} = \overrightarrow{(P_u-O)} + \overrightarrow{(P_v-O)} \quad .$$



**Figura 6.1** – Base di un piano passante per l'origine.

Ma, per opportuni (unici!)  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , avremo

$$(6.1.17) \quad \overrightarrow{(P_u - O)} = \lambda_1 \vec{u} \quad , \quad \overrightarrow{(P_v - O)} = \lambda_2 \vec{v} \quad .$$

Usando (6.1.17) in (6.1.16) si conclude che

$$(6.1.18) \quad \overrightarrow{(P - O)} = \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} \quad .$$

□

Uno dei principali scopi dei paragrafi successivi sarà quello di imparare a costruire basi (e descrizioni parametriche) di sottospazi vettoriali  $W$ . Ciò, in pratica, è equivalente a esplicitare le soluzioni di un sistema lineare omogeneo come (6.1.9). Il caso non omogeneo ( $B \neq \vec{0}$  in (6.0.3)) equivale, geometricamente, allo studio dei cosiddetti sottospazi affini (pensare a rette, o piani, non passanti per l'origine) e sarà affrontato con metodi simili.

## 6.2 Teorema di Rouché-Capelli, sistemi triangolari e di Cramer

---

**Definizione 2:** Si consideri un generico sistema lineare (6.0.2) (o, equivalentemente, (6.0.3)). Diremo che il sistema è *risolubile* se ammette almeno una soluzione.

---

Notiamo, a scanso di equivoci, che in (6.0.2) i coefficienti  $[a_{ij}]$  e  $b_j$  sono preassegnati. Determinare una soluzione significa individuare una  $n$ -upla (cioè, un vettore)  ${}^t[x_1, \dots, x_n]$  in modo che simultaneamente le  $m$  equazioni che costituiscono (6.0.2) siano verificate. I sistemi omogenei (cioè  $B = \vec{0}$ ) sono sempre ovviamente risolubili, in quanto  $X = \vec{0} = {}^t[0, \dots, 0]$  è una soluzione. Ciò però non esaurisce lo studio di questi sistemi, dato che bisogna capire quando ammettono *altre* soluzioni e, in caso affermativo, determinarle. Un primo, importante esempio di sistemi risolubili, per i quali non è difficile determinare l'insieme delle soluzioni, è quello dei cosiddetti

(6.2.1) **Sistemi triangolari :** Si dice che un sistema lineare (6.0.2) (o (6.0.3)) è *triangolare* se la matrice  $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ , con  $m \leq n$ , è una matrice triangolare superiore con la proprietà che

$$(6.2.2) \quad a_{ii} \neq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Le soluzioni di questo tipo di sistema possono essere facilmente determinate mediante *sostituzione diretta*, partendo dall'ultima equazione e via via risalendo. Più precisamente, dall'ultima equazione si ricava l'espressione di  $x_m$  in funzione delle restanti  $(n - m)$  incognite, cioè  $x_{m+1}, \dots, x_n$ . Poi si sostituisce questa espressione di  $x_m$  nell'equazione sopra, ricavando quindi  $x_{m-1}$  ancora in funzione delle incognite  $x_{m+1}, \dots, x_n$ . Procedendo in questo modo, si arriva all'espressione delle incognite  $x_1, \dots, x_m$  in funzione delle rimanenti  $x_{m+1}, \dots, x_n$ . Queste ultime vengono dette *incognite libere*, perché possono assumere valori arbitrari (cioè, liberi), in funzione dei quali sono poi determinati i valori delle incognite  $x_1, \dots, x_m$ . Nel caso  $m = n$  non ci sono incognite libere e il sistema ha un'unica soluzione. Approfondiremo meglio questo discorso nel teorema di Rouché-Capelli sotto, mentre ora ci preoccupiamo di illustrare, attraverso alcuni esercizi, come quanto sopra esposto sui sistemi triangolari sia di facile applicazione pratica.

▷ Esercizio 3 ◁

**Testo**

Determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema triangolare

$$(6.2.3) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ \frac{1}{2}x_3 + x_4 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

**Soluzione**

Si tratta di un sistema lineare con matrice dei coefficienti  $A$  e vettore dei termini noti  $B$  dati rispettivamente da

$$(6.2.4) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

quindi effettivamente  $A$  è triangolare superiore e soddisfa la (6.2.2). Il primo passaggio consiste nel ricavare  $x_3$  dalla terza equazione:

$$(6.2.5) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_3 = 1 - 2x_4 \end{cases}.$$

Ora, sostituendo l'espressione di  $x_3$ , appena ottenuta, nella seconda equazione, si calcola l'espressione di  $x_2$  in funzione di  $x_4$ :

$$(6.2.6) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 = 1 - 4x_4 \\ x_3 = 1 - 2x_4 \end{cases}.$$

Infine, sostituendo le espressioni di  $x_2$  e  $x_3$  nella prima equazione, si ricava anche  $x_1$  in funzione dell'incognita libera  $x_4$ :

$$(6.2.7) \quad \begin{cases} x_1 = 1 - x_4 \\ x_2 = 1 - 4x_4 \\ x_3 = 1 - 2x_4 \end{cases}.$$

In conclusione, l'insieme delle soluzioni di (6.2.3) è:

$$(6.2.8) \quad \{ {}^t[1 - x_4, 1 - 4x_4, 1 - 2x_4, x_4] \in \mathbb{R}^4 : x_4 \in \mathbb{R} \}.$$

Si noti che  $x_4$  è libera, cioè può assumere valore arbitrario: ad esempio, se  $x_4 = 0$ , la corrispondente soluzione è  ${}^t[1, 1, 1, 0]$ . Se  $x_4 = \frac{1}{2}$ , la corrispondente soluzione

è  ${}^t[\frac{1}{2}, -1, 0, \frac{1}{2}]$ . Si può pensare a  $x_4$  come ad un parametro che descrive le  $\infty^1$  soluzioni del sistema. In questo senso, la (6.2.8) altro non è che la rappresentazione parametrica di una retta in  $\mathbb{R}^4$ , cioè:

$$(6.2.9) \quad \begin{cases} x_1 = 1 - t \\ x_2 = 1 - 4t \\ x_3 = 1 - 2t \\ x_4 = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad .$$

Questa retta in  $\mathbb{R}^4$  passa per il punto  ${}^t[1, 1, 1, 0]$  ed è parallela al vettore  ${}^t[-1, -4, -2, 1]$ . □

Il seguente esercizio è molto importante:

▷ Esercizio 4 ◁

**Testo**

Sia  $W$  il sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^4$  definito da

$$(6.2.10) \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \quad .$$

- (i) Determinare l'insieme delle soluzioni di (6.2.10);
- (ii) Determinare una base di  $W$  e calcolare  $\dim W$ .

**Soluzione**

- (i) La matrice dei coefficienti è

$$(6.2.11) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad .$$

Non vi sono difficoltà algebriche per esplicitare  $x_1, x_2$  in funzione di  $x_3, x_4$ . Procedendo infatti come nell'esercizio 3 si arriva a

$$(6.2.12) \quad \begin{cases} x_1 = -x_3 + 2x_4 \\ x_2 = 2x_3 + x_4 \end{cases}$$

Si conclude quindi che l'insieme delle  $\infty^2$  soluzioni del sistema (6.2.10) è dato da

$$(6.2.13) \quad \{ {}^t[-x_3 + 2x_4, 2x_3 + x_4, x_3, x_4] \in \mathbb{R}^4 : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \} \quad .$$

- (ii) La (6.2.13) costituisce una rappresentazione parametrica di  $W$ . La dimensione di  $W$  coincide col numero di parametri (= numero di incognite libere) necessari a descrivere  $W$ : nel nostro caso  $\dim W = 2$ . Nel linguaggio geometrico generalizzato dell'esercizio precedente possiamo intuire che  $W$  rappresenti un piano, passante per

$\vec{0}$ , in  $\mathbb{R}^4$ . Una base  $\mathcal{C}$  di  $W$  è formata dunque da 2 vettori. Questi vettori possono essere determinati assegnando alle incognite libere i valori prima  $x_3 = 1, x_4 = 0$  e poi  $x_3 = 0, x_4 = 1$ , in corrispondenza dei quali si ottengono rispettivamente  $\vec{w}_1 = {}^t[-1, 2, 1, 0]$  e  $\vec{w}_2 = {}^t[2, 1, 0, 1]$ . Quindi la base richiesta è:

$$(6.2.14) \quad \mathcal{C} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\} \quad .$$

□

(6.2.15) La costruzione effettuata nella parte (ii) dell'esercizio precedente ha validità generale: più precisamente, se  $W$  è descritto da un sistema lineare omogeneo con  $p$  incognite libere, allora  $\dim W = p$ . Inoltre, si può costruire una base di  $W$  assegnando alle incognite libere i seguenti  $p$  insiemi di valori:

$$(6.2.16) \quad 1, 0, \dots, 0 \quad ; \quad 0, 1, 0, \dots, 0 \quad ; \quad \dots \quad ; \quad 0, \dots, 0, 1 \quad .$$

Per chiarezza, esplicitiamo la (6.2.16) nel caso  $p = 4$ :

$$(6.2.17) \quad 1, 0, 0, 0 \quad ; \quad 0, 1, 0, 0 \quad ; \quad 0, 0, 1, 0 \quad ; \quad 0, 0, 0, 1 \quad .$$

Iniziamo ora un lavoro preliminare che ci consentirà di affrontare i sistemi lineari nella loro forma più generale. Ragioniamo sul generico sistema (6.0.2) (o (6.0.3)): se indichiamo con  $C_1, \dots, C_n$  le colonne di  $A$ , possiamo osservare che il sistema equivale a

$$(6.2.18) \quad x_1 C_1 + \dots + x_n C_n = B \quad .$$

Questo ci dice una cosa fondamentale: il sistema è risolubile se e solo se  $B$  è una combinazione lineare delle colonne di  $A$ . Per precisare ulteriormente questo concetto, conviene considerare la matrice

$$(6.2.19) \quad A' = [A, B] \in M_{m, n+1}(\mathbb{R}) \quad .$$

La notazione in (6.2.19) significa che la matrice  $A'$  si ottiene da  $A$  aggiungendo a destra una colonna, costituita dal termine noto  $B$ . La matrice  $A'$  è detta *matrice completa* associata al sistema (6.0.3).



▷ Esercizio 5 ◁

**Testo**

Scrivere la matrice completa associata al sistema lineare (6.2.3).

**Soluzione**

Da (6.2.4), si arriva subito a

$$(6.2.20) \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \in M_{3,5}(\mathbb{R}) \quad .$$

□

Se si tiene conto dell'invarianza del rango in presenza di trasformazioni elementari (vedi capitolo 3) si intuisce che la possibilità di realizzare (6.2.18) (cioè, la risolubilità del sistema) equivale alla condizione

$$(6.2.21) \quad \rho(A) = \rho(A')$$

Questa deduzione è una parte del seguente fondamentale risultato, di cui omettiamo la dimostrazione completa:

---

**Teorema 1: (Teorema di Rouché-Capelli)** Si consideri un generico sistema lineare (6.0.3). Allora

$$(6.2.22) \quad ((6.0.3) \text{ è risolubile}) \iff (\rho(A) = \rho(A')) \quad .$$

Inoltre, se (6.0.3) è risolubile, allora ammette un numero di incognite libere pari a  $(n - \rho(A))$  (cioè,  $\infty^{n-\rho(A)}$  soluzioni) (se  $n = \rho(A)$ , esiste un'unica soluzione).

---

Notiamo subito che le eventuali incognite libere non necessariamente coincidono con  $x_{m+1}, \dots, x_n$  come avveniva nel caso particolare dei sistemi triangolari. Approfondiremo questo problema nella sezione 6.3, dove tratteremo i metodi generali di soluzione.

▷ Esercizio 6 ◁

**Testo**

Stabilire se il seguente sistema lineare è risolubile:

$$(6.2.23) \quad \begin{cases} x_1 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_4 + 3x_5 = 1 \end{cases}$$

### Soluzione

Abbiamo

$$(6.2.24) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ora il lettore, usando i metodi appresi nel capitolo 3, verificherà che

$$(6.2.25) \quad \rho(A) = 2 \quad , \quad \rho(A') = 3 \quad .$$

Poiché dunque risulta  $\rho(A) \neq \rho(A')$  si conclude, grazie a (6.2.22), che il sistema non è risolubile.  $\square$

$\triangleright$  Esercizio 7  $\triangleleft$

### Testo

Sia  $W$  il sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^5$  definito da

$$(6.2.26) \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Calcolare  $\dim W$ .

### Soluzione

Il sistema (6.2.26) è omogeneo e quindi risolubile. La  $\dim W$  coincide col numero di incognite libere: quindi, per il teorema di Rouché-Capelli,

$$(6.2.27) \quad \dim W = n - \rho(A) \quad ,$$

dove  $n = 5$  e la matrice dei coefficienti  $A$  è

$$(6.2.28) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ora il lettore dovrebbe verificare che  $\rho(A) = 2$ : sostituendo questa informazione in (6.2.27) si conclude che  $\dim W = 5 - 2 = 3$ .  $\square$

Concludiamo questo paragrafo con l'illustrazione di una famiglia di sistemi che sono risolubili e ammettono un'unica soluzione ( $\rho(A) = n$ ).

(6.2.29) **Sistemi di Cramer** : Si consideri

$$(6.2.30) \quad A \cdot X = B$$

nell'ipotesi

$$(6.2.31) \quad A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \det A \neq 0 \quad .$$

Questi sistemi lineari vengono chiamati *sistemi di Cramer* e, dato che  $\rho(A) = \rho(A') = n$ , ammettono un'unica soluzione. Formalmente, applicando  $A^{-1}$  a entrambi i membri di (6.2.30), deduciamo che la soluzione del sistema è data da

$$(6.2.32) \quad X = A^{-1} \cdot B \quad .$$

L'applicazione della formula (6.2.32) richiede il calcolo di  $A^{-1}$  e l'esecuzione di un prodotto di matrici: risulta invece più rapido utilizzare la regola seguente, che asserisce che l'unica soluzione del nostro sistema di Cramer è data da

$$(6.2.33) \quad X = {}^t \left[ \frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta} \right] \quad ,$$

dove  $\Delta = \det A$  (per ipotesi,  $\Delta \neq 0$ ) e  $\Delta_i$  indica il determinante della matrice quadrata di ordine  $n$ , ottenuta da  $A$  sostituendo la  $i$ -esima colonna col vettore  $B$ .

▷ Esercizio 8 ◁

### Testo

Determinare le soluzioni di

$$(6.2.34) \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

### Soluzione

Abbiamo

$$(6.2.35) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad .$$

Poiché  $\Delta = \det A = 3 \neq 0$  si tratta di un sistema di Cramer. L'unica sua soluzione, in virtù di (6.2.33), è data da

$$\begin{aligned}
 (6.2.36) \quad X = {}^t \left[ \frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta} \right] &= \frac{1}{3} {}^t \left[ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right] \\
 &= {}^t \left[ \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right]
 \end{aligned}$$

□

▷ Esercizio 9 ◁

**Testo**

Si consideri il sistema lineare

$$(6.2.37) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

- (i) Verificare che (6.2.37) è un sistema di Cramer e risolverlo usando la (6.2.33);  
 (ii) Verificare il risultato ottenuto in (i) mediante la (6.2.32).

**Soluzione**

(i) Abbiamo

$$(6.2.38) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si calcola  $\Delta = \det A = 4 \neq 0$ , quindi si tratta di un sistema di Cramer. Applicando la (6.2.33) otteniamo:

$$(6.2.39) \quad X = {}^t \left[ \frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}, \frac{\Delta_3}{\Delta} \right],$$

dove

$$(6.2.40) \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 4.$$

Sostituendo (6.2.40) e  $\Delta = 4$  in (6.2.39) si ottiene la soluzione

$$(6.2.41) \quad X = {}^t [1, 2, 1].$$

(ii) Bisogna calcolare  $A^{-1}$  mediante la formula (3.2.29) del capitolo 3. Si ottiene

$$(6.2.42) \quad A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{matrix} t \\ \left[ \begin{array}{ccc} \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{array} \right| & - \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \right| \\ - \left| \begin{array}{cc} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{array} \right| & - \left| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{array} \right| & - \left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right| \end{array} \right] \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{matrix} t \\ \left[ \begin{array}{ccc} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{array} \right] \end{matrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Ora, usando la (6.2.32), la soluzione è

$$(6.2.43) \quad X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

□

### 6.3 Risoluzione di sistemi nel caso generale: metodo di Cramer generalizzato e algoritmo di Gauss

In questo paragrafo affrontiamo il problema di determinare le soluzioni di un sistema lineare generale di tipo (6.0.3), ovviamente nel caso in cui esso sia risolubile (cioè, quando  $\rho(A) = \rho(A')$ ). Illustreremo due possibili procedure: la prima, nota col nome di *metodo di Cramer generalizzato*, consiste nel trasformare il sistema in modo da poter applicare opportunamente la (6.2.33). La

seconda, conosciuta come *algoritmo di Gauss*, è basata sull'uso delle trasformazioni elementari, introdotte nella sezione 3.4 del capitolo 3, per ricondursi ad un sistema triangolare.

(6.3.1) **Metodo di Cramer generalizzato** : Consideriamo il generico sistema lineare (6.0.2) e assumiamo che esso sia risolubile: quindi, per il teorema di Rouché-Capelli, possiamo dire che

$$(6.3.2) \quad \rho(A)(= \rho(A')) = p$$

per un certo  $p \leq \text{Min}\{m, n\}$ . In particolare, la matrice dei coefficienti  $A$  ammetterà un minore, di ordine  $p$ , non nullo. Questo minore individua  $p$  righe e  $p$  colonne di  $A$ : è lecito, ai fini della determinazione delle soluzioni, considerare *soltanto* le  $p$  equazioni corrispondenti alle  $p$  righe del minore di cui sopra (le altre equazioni si cancellano). Ora lavoriamo su queste  $p$  equazioni: spostiamo a destra dell'uguale le  $(n - p)$  incognite (nessuna incognita se  $p = n$ ) relative alle  $(n - p)$  colonne che *non* abbiamo usato per costruire il minore di ordine  $p$  di cui sopra. A questo punto abbiamo creato un sistema di Cramer di ordine  $p$ , con termine noto che dipende dalle  $(n - p)$  incognite (libere) che abbiamo portato a destra dell'uguale: poi la risoluzione è completabile mediante l'uso della regola (6.2.33). Illustriamo questo procedimento attraverso il seguente

▷ Esercizio 10 ◁

**Testo**

Determinare le soluzioni del sistema lineare (6.2.26).

**Soluzione**

Abbiamo già visto, nel corso dell'esercizio 7, che questo sistema è risolubile e ammette 3 incognite libere, in quanto  $\rho(A) = 2$ . Osservando, in (6.2.28), la matrice dei coefficienti  $A$ , vediamo che, ad esempio,  $R_1, R_2$  e  $C_1, C_2$  individuano un minore di ordine 2 non nullo: quindi, cancellando  $R_3$  e spostando a destra dell'uguale le incognite corrispondenti alle altre colonne (cioè  $x_3, x_4$  e  $x_5$ ), concludiamo che il sistema lineare (6.2.26) è equivalente al seguente

$$(6.3.3) \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = x_4 - 3x_5 \\ x_1 + x_2 = -x_3 - 2x_5 \end{cases} .$$

Ora, (6.3.3) è considerabile come un sistema di Cramer di ordine 2, con matrice dei coefficienti  $A$  e vettore dei termini noti  $B$  dati rispettivamente da

$$(6.3.4) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} x_4 - 3x_5 \\ -x_3 - 2x_5 \end{bmatrix} .$$

La soluzione, che ovviamente risulterà dipendente dalle incognite libere  $x_3, x_4$  e  $x_5$ , può essere determinata usando la (6.2.33): si ha

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

e quindi

$$\begin{aligned} (6.3.5) \quad X &= {}^t \left[ \frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta} \right] \\ &= {}^t \left[ \begin{vmatrix} x_4 - 3x_5 & 1 \\ -x_3 - 2x_5 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & x_4 - 3x_5 \\ 1 & -x_3 - 2x_5 \end{vmatrix} \right] \\ &= {}^t [x_3 + x_4 - x_5, -2x_3 - x_4 - x_5] \quad . \end{aligned}$$

In conclusione, l'insieme delle soluzioni di (6.2.26) è dato da

$$(6.3.6) \quad W = \{ {}^t [x_3 + x_4 - x_5, -2x_3 - x_4 - x_5, x_3, x_4, x_5] \in \mathbb{R}^5 : x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \} \quad .$$

□

Si noti che il sottospazio  $W$  in (6.3.6) ha dimensione 3, e quindi sono necessarie 3 incognite libere per parametrizzarlo. In molte situazioni, come in questo caso, la scelta per le incognite libere non è unica: però segnaliamo subito che questa scelta non è arbitraria. *In pratica, certe  $(n - p)$  incognite possono essere scelte come libere se e solo se dalle rimanenti  $p$  colonne si può estrarre un minore di ordine  $p$  non nullo ( $p = \rho(A) = \rho(A')$ ).*

(6.3.7) **Algoritmo di Gauss :** Ancora, partiamo da un sistema lineare generale come in (6.0.2), e assumiamo che esso sia risolubile, cioè che valga la (6.3.2). L'idea dell'algoritmo è quella di formalizzare il processo di trasformazione della matrice completa  $A'$  in una matrice triangolare superiore, come nella sequenza (3.4.5) del capitolo 3. Il sistema lineare così ottenuto risulta avere le stesse soluzioni del sistema di partenza, e ad esso è possibile applicare il metodo di sostituzione diretta relativo ai sistemi triangolari. Passiamo quindi alla descrizione delle operazioni da effettuare sulla matrice completa  $A'$ :

**Passo 1:** Questo passo consiste nella trasformazione della prima colonna in una colonna del tipo seguente:

$$(6.3.8) \quad {}^t [a_{11}, 0, \dots, 0] \quad , \quad \text{con } a_{11} \neq 0 \quad .$$

Se, in partenza, si avesse  $a_{11} = 0$ , bisognerebbe per prima cosa effettuare uno scambio di righe  $R_1 \longleftrightarrow R_j$ , con  $a_{j1} \neq 0$ . In questo modo è lecito assumere  $a_{11} \neq 0$ .

Nota: se  $C_1$  è nulla, bisogna fare uno scambio  $C_1 \longleftrightarrow C_j$ , con  $C_j$  non identicamente nulla: in questo caso, bisogna però anche, conseguentemente, invertire tra loro le posizioni di  $x_1$  e  $x_j$ .

Riassumendo, ci siamo messi nella condizione di avere  $a_{11} \neq 0$ . Dobbiamo quindi azzerare i coefficienti sotto  $a_{11}$ , operando come segue:

$$(6.3.9) \quad R_j \longrightarrow R_j - \left(\frac{a_{j1}}{a_{11}}\right)R_1 \quad j = 2 \dots m \quad .$$

**Passo 2:** Questo passo consiste nella trasformazione della seconda colonna in una colonna del tipo seguente:

$$(6.3.10) \quad {}^t[a_{12}, a_{22}, 0, \dots, 0] \quad , \quad \text{con } a_{22} \neq 0 \quad .$$

Si procede come all'inizio del passo 1, senza però usare  $R_1$  negli eventuali scambi di riga, per arrivare alla condizione  $a_{22} \neq 0$ . Poi si azzerano i coefficienti sotto  $a_{22}$  mediante

$$(6.3.11) \quad R_j \longrightarrow R_j - \left(\frac{a_{j2}}{a_{22}}\right)R_2 \quad j = 3 \dots m \quad .$$

**Passi successivi:** Si procede trattando in tutto  $p$  colonne come sopra e si arriva ad un sistema triangolare con  $p$  righe, equivalente al (cioè, avente le stesse soluzioni del) sistema di partenza. Si noti che, se  $p < m$ , le righe eccedenti danno luogo a delle identità  $0 = 0$  che possono ovviamente essere ignorate.

▷ Esercizio 11 ◁

**Testo**

Sia  $W$  il sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^5$  definito da

$$(6.3.12) \quad \begin{cases} x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

Determinare, mediante l'algoritmo di Gauss, una parametrizzazione di  $W$ , precisando il valore di  $\dim W$ .



### Soluzione

La matrice completa del sistema è

$$(6.3.13) \quad A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} .$$

Considerando  $C_1, C_3, C_4$  si verifica che  $\rho(A) = 3$ , per cui  $\dim W = n - \rho(A) = 2$ . Poiché  $a_{11} = 0$ , per prima cosa operiamo uno scambio di righe, ad esempio  $R_1 \leftrightarrow R_2$ , che ci conduce a

$$(6.3.14) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} .$$

Ora possiamo completare il passo 1 applicando (6.3.9):  $R_2$  non varia, mentre  $R_3 \rightarrow R_3 - R_1$ . Da (6.3.14) si ottiene quindi

$$(6.3.15) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} .$$

Per poter eseguire il passo 2, è necessario uno scambio di colonne in quanto  $C_2$  è nulla. Ad esempio, eseguiamo  $C_2 \leftrightarrow C_4$ : per ricordarci che ciò comporta il corrispondente scambio di incognite, scriveremo le varie incognite sopra le rispettive colonne

$$(6.3.16) \quad \begin{array}{cccccc} & x_1 & x_4 & x_3 & x_2 & x_5 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ora  $a_{22} \neq 0$ , per cui possiamo subito completare il passo 2 applicando (6.3.11), che in questo caso si riduce a  $R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2$ : così la (6.3.16) diventa:

$$(6.3.17) \quad \begin{array}{cccccc} & x_1 & x_4 & x_3 & x_2 & x_5 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Riassumendo, abbiamo ottenuto che il sistema (6.3.12) di partenza equivale al sistema triangolare con matrice completa  $A'$  data da (6.3.17), e cioè:

$$(6.3.18) \quad \begin{cases} x_1 + x_4 - 2x_3 - x_5 = 0 \\ -x_4 + x_3 + x_5 = 0 \\ 2x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Adesso, risolvendo per sostituzione diretta partendo dal basso, i passaggi sono:

$$(6.3.19) \quad \begin{cases} x_1 + x_4 - 2x_3 - x_5 = 0 \\ -x_4 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_3 = -\frac{1}{2}x_5 \end{cases},$$

poi

$$(6.3.20) \quad \begin{cases} x_1 + x_4 - 2x_3 - x_5 = 0 \\ x_4 = \frac{1}{2}x_5 \\ x_3 = -\frac{1}{2}x_5 \end{cases},$$

e infine

$$(6.3.21) \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_5 \\ x_4 = \frac{1}{2}x_5 \\ x_3 = -\frac{1}{2}x_5 \end{cases}.$$

Conclusione: l'insieme delle soluzioni di (6.3.12) (cioè, la parametrizzazione di  $W$ ) è

$$(6.3.22) \quad W = \left\{ \left[ -\frac{1}{2}x_5, x_2, -\frac{1}{2}x_5, \frac{1}{2}x_5, x_5 \right] \in \mathbb{R}^5 : x_2, x_5 \in \mathbb{R} \right\}.$$

□

Osserviamo che, nell'applicazione dell'algoritmo di Gauss a sistemi omogenei, come nell'esercizio precedente, si potrebbe lavorare su  $A$  (invece che su  $A'$ ) considerando implicitamente che l'ultima colonna di  $A'$  resta sempre nulla durante la sequenza.

Inoltre, se già, come nel caso dei sistemi omogenei, si sa che il sistema è risolubile, non è necessario calcolare preventivamente  $\rho(A)$ : infatti l'algoritmo conduce a una matrice triangolare con un numero di righe significative che necessariamente coinciderà con  $\rho(A)$ .

Concludiamo questa sezione con un ultimo esercizio in cui eseguiamo spedatamente la sequenza prevista dall'algoritmo di Gauss.

▷ Esercizio 12 ◁

**Testo**

Usare l'algoritmo di Gauss per risolvere

$$(6.3.23) \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 + 5x_7 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 + 2x_6 + x_7 = -3 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 + x_5 + 7x_6 + 7x_7 = 1 \end{cases}$$

### Soluzione

Abbiamo

(6.3.24)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 1 & 7 & 7 \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 1 & 7 & 7 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dall'esame di  $C_1, C_2, C_5$  si ricava

$$(6.3.25) \quad \rho(A) = 3 = \rho(A'),$$

per cui il sistema è risolubile, con  $n - \rho(A) = 7 - 3 = 4$  incognite libere. La sequenza dell'algoritmo parte con l'applicazione ad  $A'$  di  $R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$  e  $R_3 \rightarrow R_3 - 5R_1$ . Si ottiene

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & -3 & -4 & -9 & -17 \\ 0 & 6 & 2 & -4 & -4 & -8 & -18 & -34 \end{bmatrix}$$

Ora, per il passo 2, si esegue  $R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2$ : si ottiene

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & -3 & -4 & -9 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A questo punto,  $C_3 \leftrightarrow C_5$  ci conduce a

(6.3.26)

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_5 & x_4 & x_3 & x_6 & x_7 & \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & -3 & -2 & 1 & -4 & -9 & -17 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Quindi, esplicitando (6.3.26), concludiamo che il sistema di partenza (6.3.23) è equivalente al seguente sistema triangolare

$$(6.3.27) \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_5 + 2x_4 + 3x_6 + 5x_7 = 7 \\ 3x_2 - 3x_5 - 2x_4 + x_3 - 4x_6 - 9x_7 = -17 \\ 2x_5 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo dal basso per sostituzione diretta (le incognite libere sono  $x_4, x_3, x_6, x_7$ ) si ottiene

$$(6.3.28) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_6 - 2x_7 \\ x_2 = -\frac{17}{3} + \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_6 + 3x_7 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

In conclusione, l'insieme delle soluzioni di (6.3.23) è

$$(6.3.29) \quad \left\{ \begin{aligned} &{}^t \left[ \frac{4}{3} - \frac{4}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_6 - 2x_7, -\frac{17}{3} + \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_6 + 3x_7, \right. \\ &\left. x_3, x_4, 0, x_6, x_7 \right] \in \mathbb{R}^7 : x_3, x_4, x_6, x_7 \in \mathbb{R} \end{aligned} \right\}$$

□

Si può notare che, indipendentemente dal metodo scelto per risolvere il sistema (6.3.23), la  $x_5$  non avrebbe mai potuto comparire tra le incognite libere!

## 6.4 Basi ortonormali e metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt(\*)

Nel capitolo 1 abbiamo introdotto il prodotto scalare tra due vettori di  $\mathbb{R}^3$ : questo concetto, a differenza del prodotto vettoriale, si estende in modo naturale al caso di vettori di  $\mathbb{R}^n$ . Più precisamente, siano  $\vec{u} = {}^t[u_1, \dots, u_n]$  e  $\vec{v} = {}^t[v_1, \dots, v_n]$  due vettori di  $\mathbb{R}^n$ : definiamo il loro prodotto scalare mediante

$$(6.4.1) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + \dots + u_nv_n \quad (= \sum_{i=1}^n u_iv_i)$$

Questa operazione conserva le proprietà geometriche illustrate nel capitolo 1. In particolare

$$(6.4.2) \quad |\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} \quad (= \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2})$$

e, se  $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ :

$$(6.4.3) \quad (\vec{u} \perp \vec{v}) \iff (\vec{u} \cdot \vec{v} = 0)$$

---

**Definizione 3:** Sia  $W$  un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^n$ , con  $\dim W = p$ . Sia poi  $\mathcal{C} = \{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_p\}$  una base di  $W$ . Diremo che  $\mathcal{C}$  è una *base ortonormale* di  $W$  se

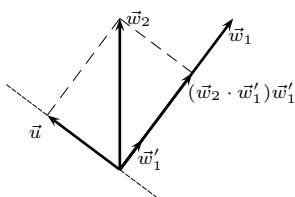
$$(6.4.4) \quad \vec{w}_i \cdot \vec{w}_j = \delta_{ij} \quad , \quad 1 \leq i, j \leq p,$$

dove  $\delta_{ij}$  è il simbolo di Kronecker introdotto nella (3.1.38) del capitolo 3.

La (6.4.4) esprime la richiesta che tutti i vettori di  $\mathcal{C}$  abbiano modulo 1 e siano inoltre a due a due ortogonali. Ad esempio, la base canonica  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$  di  $\mathbb{R}^n$  è una base ortonormale (verifica elementare). In generale possiamo dire che, in molte situazioni, disporre di una base ortonormale di un dato sottospazio  $W$  consente una più agevole descrizione di varie proprietà geometriche. Il *processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt* permette di costruire una base ortonormale  $\mathcal{C}' = \{\vec{w}'_1, \dots, \vec{w}'_p\}$  partendo da una base qualunque  $\mathcal{C} = \{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_p\}$ . La costruzione di  $\mathcal{C}'$  è la seguente:

$$\begin{aligned}
 (6.4.5) \quad \vec{w}'_1 &= \text{vers}(\vec{w}_1) \quad (= \frac{\vec{w}_1}{|\vec{w}_1|}) \\
 \vec{w}'_2 &= \text{vers}(\vec{w}_2 - (\vec{w}'_1 \cdot \vec{w}_2)\vec{w}'_1) \\
 &\vdots \\
 \vec{w}'_p &= \text{vers}(\vec{w}_p - \sum_{j=1}^{p-1} [(\vec{w}'_j \cdot \vec{w}_p)\vec{w}'_j])
 \end{aligned}$$

L'idea geometrica sottostante il procedimento (6.4.5) è importante: in pratica, per costruire  $\vec{w}'_1$  è sufficiente prendere il versore di  $\vec{w}_1$ . Invece, per  $\vec{w}'_2$ , prima di prendere il versore è necessario scartare l'eventuale componente di  $\vec{w}_2$  lungo la direzione di  $\vec{w}'_1$  (si veda la Figura 6.2). Al passo successivo si scarteranno le componenti di  $\vec{w}_3$  lungo  $\vec{w}'_1$  e  $\vec{w}'_2$ , e così via.



**Figura 6.2** – Ortonormalizzazione:  $\vec{w}'_2 = \text{vers}(\vec{u})$ , dove  $\vec{u} = \vec{w}_2 - (\vec{w}_2 \cdot \vec{w}'_1)\vec{w}'_1$ .

▷ **Esercizio 13** ◁

**Testo**

Sia  $W$  il sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$  definito da

$$(6.4.6) \quad x - 2y + z = 0 \quad .$$

Determinare una base ortonormale di  $W$ .

**Soluzione**

Abbiamo:  $n = 3$ ,  $\rho(A) = 1$ ,  $n - \rho(A) = 2$  incognite libere. Dunque  $\dim W = 2$  ( $W$  è un piano passante per l'origine). Risolvendo (6.4.6), abbiamo immediatamente una parametrizzazione di  $W$ :

$$(6.4.7) \quad W = \{ {}^t[2y - z, y, z] \in \mathbb{R}^3 : y, z \in \mathbb{R} \} \quad .$$

Assegnando alle 2 incognite libere rispettivamente i valori  $y = 1, z = 0$  e  $y = 0, z = 1$ , troviamo che una base di  $W$  è

$$(6.4.8) \quad \mathcal{C} = \{ \vec{w}_1, \vec{w}_2 \} \quad ,$$

dove

$$(6.4.9) \quad \vec{w}_1 = {}^t[2, 1, 0] \quad , \quad \vec{w}_2 = {}^t[-1, 0, 1] \quad .$$

Seguiamo ora il processo di ortonormalizzazione definito in (6.4.5):

$$(6.4.10) \quad \begin{aligned} \vec{w}'_1 &= \text{vers}(\vec{w}_1) = {}^t\left[\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right] \\ \vec{w}'_2 &= \text{vers}(\vec{w}_2 - (\vec{w}'_1 \cdot \vec{w}_2)\vec{w}'_1) = \text{vers}({}^t[-1, 0, 1] + {}^t\left[\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 0\right]) \\ &= \text{vers}({}^t\left[-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1\right]) \\ &= {}^t\left[-\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}\right] \end{aligned}$$

La base ortonormale richiesta è quindi  $\mathcal{C}' = \{ \vec{w}'_1, \vec{w}'_2 \}$ . □

▷ Esercizio 14 ◁

**Testo**

Sia  $W$  il sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^5$  definito dal sistema lineare omogeneo (6.3.12). Determinare una base ortonormale di  $W$ .

**Soluzione**

Nell'esercizio 11 sopra abbiamo ottenuto, in (6.3.22), le soluzioni di (6.3.12). Assegnando alle 2 incognite libere ( $\dim W = 2$ ) i valori  $x_2 = 1, x_5 = 0$  e  $x_2 = 0, x_5 = 1$ , otteniamo una base  $\mathcal{C} = \{ \vec{w}_1, \vec{w}_2 \}$  di  $W$ , con

$$(6.4.11) \quad \vec{w}_1 = {}^t[0, 1, 0, 0, 0] \quad , \quad \vec{w}_2 = {}^t\left[-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right] \quad .$$

Ortonormalizzando come in (6.4.5), si arriva facilmente alla base ortonormale richiesta  $\mathcal{C}' = \{\vec{w}'_1, \vec{w}'_2\}$ , dove

$$(6.4.12) \quad \vec{w}'_1 = \vec{w}_1 = {}^t[0, 1, 0, 0, 0] \quad , \quad \vec{w}'_2 = {}^t\left[-\frac{1}{\sqrt{7}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{2}{\sqrt{7}}\right] \quad .$$

□

## 6.5 Esercizi di riepilogo

▷ Esercizio 15 ◁

### Testo

Risolvere, se possibile, il seguente sistema lineare

$$(6.5.1) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_1 = 1 \end{cases}$$

### Soluzione

Abbiamo matrice dei coefficienti  $A$  e vettore dei termini noti  $B$  dati rispettivamente da

$$(6.5.2) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad .$$

*Nota:* per la costruzione di  $A$ , la terza equazione del sistema deve ovviamente essere letta come

$$2x_1 + x_2 = 1 \quad .$$

Si calcola  $\Delta = \det A = 2 \neq 0$ : si tratta di un sistema di Cramer che quindi ammette un'unica soluzione. Applicando la (6.2.33) otteniamo:

$$(6.5.3) \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \\ x_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ x_3 &= \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

In conclusione, l'unica soluzione del nostro sistema è  ${}^t[\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}]$ . □

▷ Esercizio 16 ◁

**Testo**

Determinare una rappresentazione parametrica del piano  $W$ , passante per l'origine di  $\mathbb{R}^3$ , definito da

$$(6.5.4) \quad 2x_1 - x_2 - 5x_3 = 0$$

e determinarne una base.

**Soluzione**

Trattando (6.5.4) come un sistema lineare omogeneo, con  $n - \rho(A) = 3 - 1 = 2$  incognite libere (ad esempio,  $x_2, x_3$ ) possiamo facilmente scrivere

$$(6.5.5) \quad W = \left\{ {}^t\left[\frac{1}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3, x_2, x_3\right] \in \mathbb{R}^3 : x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} .$$

La (6.5.5) è, in sostanza, la richiesta parametrizzazione di  $W$ . Se però vogliamo darle una forma più simile a quella di rappresentazione parametrica di una retta, descritta nel capitolo 2, possiamo chiamare  $s$  e  $t$  i 2 parametri liberi e riscrivere (6.5.5) come segue:

$$(6.5.6) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}s + \frac{5}{2}t \\ x_2 = s \\ x_3 = t \end{cases} \quad s, t \in \mathbb{R} .$$

Si noti che, ovviamente, trattandosi di un piano, sono necessari 2 parametri per una completa descrizione. Come già osservato in altri esercizi, una base  $\mathcal{C} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$  si ottiene dando ai parametri i valori  $s = 1, t = 0$  e  $s = 0, t = 1$ , che forniscono

$$(6.5.7) \quad \vec{w}_1 = {}^t\left[\frac{1}{2}, 1, 0\right] \quad , \quad \vec{w}_2 = {}^t\left[\frac{5}{2}, 0, 1\right] .$$

□

▷ Esercizio 17 ◁

**Testo (\*)**

Ortonormalizzare, usando il processo di Gram-Schmidt (6.4.5), la base  $\mathcal{C} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$  dell'esercizio precedente.



**Soluzione**

(Dettagli omessi): si ottiene  $\mathcal{C}' = \{\vec{w}'_1, \vec{w}'_2\}$ , con

$$(6.5.8) \quad \vec{w}'_1 = {}^t\left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right] \quad , \quad \vec{w}'_2 = {}^t\left[\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right] \quad .$$

□

▷ Esercizio 18 ◁

**Testo**

Risolvere, se possibile, il seguente sistema lineare

$$(6.5.9) \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

**Soluzione**

Abbiamo

$$(6.5.10) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad .$$

Quindi è facile verificare che  $\rho(A) = 2 = \rho(A')$ . Il sistema è pertanto risolubile e ammette  $n - \rho(A) = 4 - 2 = 2$  incognite libere, ad esempio  $x_3, x_4$ . Usando il metodo di Cramer generalizzato, riscriviamo (6.5.9) come

$$(6.5.11) \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -x_3 - x_4 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

che possiamo trattare come un sistema di Cramer di ordine 2, con

$$(6.5.12) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} -x_3 - x_4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad .$$

Ora,  $\Delta = \det A = 4$ , e

$$(6.5.13) \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} -x_3 - x_4 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-x_3 - x_4 + 1) \\ x_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 1 & -x_3 - x_4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}(1 + x_3 + x_4) \end{aligned}$$

In conclusione, l'insieme delle soluzioni di (6.5.9) è

$$(6.5.14) \quad W = \left\{ {}^t\left[\frac{1}{2}(1 - x_3 - x_4), \frac{1}{4}(1 + x_3 + x_4), x_3, x_4\right] \in \mathbb{R}^4 : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} \quad .$$

□

▷ Esercizio 19 ◁

**Testo**

Risolvere il sistema lineare (6.5.9) usando l'algoritmo di Gauss.

**Soluzione**

$$(6.5.15) \quad A' \begin{array}{c} R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Quindi (6.5.9) equivale a

$$(6.5.16) \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_2 - x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

Risolvendo ora mediante sostituzione diretta, partendo dalla seconda equazione, si riottiene (6.5.14). □

▷ Esercizio 20 ◁

**Testo**

Siano

$$(6.5.17) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} .$$

Stabilire quali, fra i seguenti sistemi lineari, sono risolvibili ( $X = {}^t[x_1, x_2, x_3, x_4]$ ):

$$(6.5.18) \quad (i) A \cdot X = B \quad ; \quad (ii) A \cdot X = C \quad ; \quad (iii) A \cdot X = D \quad .$$

**Soluzione**

Abbiamo  $\rho(A) = 2$ . Nei casi (6.5.18)(i), (ii) e (iii) si verifica rispettivamente  $\rho(A') = 2$ ,  $\rho(A') = 3$  e  $\rho(A') = 2$ . Quindi (6.5.18)(i) e (iii) sono risolvibili, con  $\infty^2$  soluzioni, mentre (6.5.18)(ii) non ammette soluzione. □

▷ Esercizio 21 ◁

**Testo**

Si consideri il sistema di Cramer  $A \cdot X = B$ , dove

$$(6.5.19) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Determinare l'unica soluzione.

**Soluzione**

(Calcoli omissi):  $X = {}^t[-\frac{3}{14}, -\frac{5}{14}, \frac{9}{14}]$ . □

▷ Esercizio 22 ◁

**Testo**

Determinare la soluzione del seguente sistema di Cramer a coefficienti in  $\mathbb{C}$ :

$$(6.5.20) \quad \begin{cases} (1+i)x - y = 1 \\ (1+i)x + y = 0 \end{cases}$$

**Soluzione**

Abbiamo

$$(6.5.21) \quad A = \begin{bmatrix} (1+i) & -1 \\ (1+i) & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si ha:  $\Delta = \det A = (2+2i) \neq 0$ , per cui

$$(6.5.22) \quad x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{(2+2i)} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{(2+2i)} = \frac{1}{4} - \frac{i}{4}$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{(2+2i)} \begin{vmatrix} (1+i) & 1 \\ (1+i) & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

In conclusione,  $X = {}^t[\frac{1}{4} - \frac{i}{4}, -\frac{1}{2}]$ . □

▷ Esercizio 23 ◁

**Testo**

Risolvere in  $\mathbb{C}$ :

$$(6.5.23) \quad \begin{cases} (1+i)x - 2iy = 1 \\ (2+i)x + y = 0 \end{cases}$$

**Soluzione**

(Calcoli omissi):  $X = {}^t[-\frac{1}{26}(1+5i), \frac{1}{26}(-3+11i)]$ . □

▷ Esercizio 24 ◁

**Testo**

Risolvere, se possibile,

(6.5.24)

$$(i) \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \quad (iii) \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

**Soluzione**

(Calcoli omissi):

(i)  $\{^t[x_4, -x_4, 1 - x_4, x_4] \in \mathbb{R}^4 : x_4 \in \mathbb{R}\}$ ;

(ii) Sistema non risolubile, perché  $\rho(A) = 2$ , ma  $\rho(A') = 3$ ;

(iii)  $\{^t[x_1, \frac{1}{2}(1 - x_1), -x_1] \in \mathbb{R}^3 : x_1 \in \mathbb{R}\}$ . □

## 6.6 Considerazioni conclusive

È importante rendersi conto che la notevole importanza teorica di un metodo come l'algoritmo di Gauss risiede nel fatto che esso consente, anche mediante l'implementazione in appositi programmi informatici, di risolvere sistemi di dimensioni arbitrariamente grandi.

Segnaliamo che i concetti da noi esposti in questo capitolo sono sostanzialmente estendibili al caso in cui  $\mathbb{R}$  viene sostituito da  $\mathbb{C}$ . Inoltre, tutto ciò non ha rilevanza solo nell'ambito della matematica pura, ma anche in svariati campi delle scienze applicate (studi sulle onde elettromagnetiche e meccanica quantistica, ad esempio), in cui si rende anche necessario considerare spazi vettoriali i cui elementi hanno un numero infinito di coordinate (spazi di Hilbert, dal nome del grande matematico che per primo, agli inizi del 900, ne iniziò uno studio sistematico).

# Capitolo 7

## Diagonalizzazione

### 7.0 Scopi del capitolo

Sia  $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ . Consideriamo una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definita da

$$(7.0.1) \quad f(X) = A \cdot X \quad ,$$

dove  $X = {}^t[x_1, \dots, x_n]$  e  $A \cdot X$  denota il prodotto di matrici. Le funzioni di tipo (7.5.10) sono dette *applicazioni lineari* e sono caratterizzate dalle due seguenti proprietà:

$$(7.0.2) \quad \begin{array}{ll} \text{(i)} & f(X + Y) = f(X) + f(Y) \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^n ; \\ \text{(ii)} & f(\lambda X) = \lambda f(X) \quad \forall X \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R} . \end{array}$$

In particolare, ne segue che, rispetto alla base canonica  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$  di  $\mathbb{R}^n$ , possiamo scrivere:

$$(7.0.3) \quad f(X) = x_1 f(\vec{e}_1) + \dots + x_n f(\vec{e}_n) \quad ,$$

da cui deduciamo che  $f$  è **interamente determinata** dalla conoscenza degli  $f(\vec{e}_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . D'altra parte, è anche immediato verificare che le coordinate di  $f(\vec{e}_i)$  sono date esattamente da  $C_i$ , la  $i$ -esima colonna di  $A$ . La situazione in cui risulta sicuramente *più semplice* studiare un'applicazione lineare è il caso in cui  $A$  è una matrice diagonale, cioè con  $a_{ij} = 0$  se  $i \neq j$ ,

diciamo

$$(7.0.4) \quad A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n.$$

Infatti, quando  $A$  ha la forma (7.0.4) è immediato constatare che

$$(7.0.5) \quad f(\vec{e}_i) = \lambda_i f(\vec{e}_i) \quad i = 1, \dots, n,$$

per cui la (7.0.3) diventa semplicemente

$$(7.0.6) \quad f(X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i f(\vec{e}_i) = {}^t[\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n] \quad .$$

Nasce quindi il seguente problema naturale:

(7.0.7) Sia  $f$  una generica applicazione lineare, come in (7.5.10). Ci poniamo la seguente domanda: esiste una base  $\mathcal{C} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  di  $\mathbb{R}^n$  tale che

$$(7.0.8) \quad f(\vec{v}_i) = \lambda_i f(\vec{v}_i) \quad (i = 1, \dots, n) ?$$

Ora, per semplificare la prima fase di studio di questo non facile capitolo, è possibile saltare il seguente paragrafo (\*), riprendendo direttamente dalla (7.0.17) sotto. D'altra parte, magari in una seconda fase, il lettore può riprendere le parti eventualmente omesse, al fine di acquisire meglio le motivazioni di questi argomenti e avere un quadro più completo.

(7.0.9) **Inizio (\*)** Cerchiamo di capire bene quale vantaggio deriverebbe dal riuscire a costruire una base  $\mathcal{C}$  con la proprietà richiesta in (7.0.8).

Esprimiamo un generico  $Y \in \mathbb{R}^n$  rispetto a  $\mathcal{C}$ , cioè scriviamo

$$(7.0.10) \quad Y = \sum_{i=1}^n y_i \vec{v}_i \quad .$$

In altre parole, le

$${}^t[y_1, \dots, y_n]$$

sono quindi le coordinate di  $Y$  rispetto a  $\mathcal{C}$ . Ora, da (7.0.8) e dalla linearità di  $f$  (cioè, dalla validità delle (7.0.2)), segue che

$$(7.0.11) \quad f(Y) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i y_i) \vec{v}_i \quad ,$$

che rappresenta una descrizione semplice e maneggevole per  $f$  (analoga a (7.0.6), ma rispetto a  $\mathcal{C}$ ). Indichiamo ora con

$$(7.0.12) \quad P = [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n] \in M_n(\mathbb{R})$$

la matrice le cui colonne sono le coordinate dei  $\vec{v}_i$  rispetto alla base canonica  $\mathcal{B}$ . Si può dimostrare che

$$(7.0.13) \quad \mathcal{C} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \text{ è base di } \mathbb{R}^n \iff \det P \neq 0 \quad .$$

Inoltre, dobbiamo esaminare il legame tra le coordinate di uno stesso vettore espresso rispetto a due basi diverse. Più precisamente, dalla relazione

$$(7.0.14) \quad \sum_{j=1}^n y_j \vec{v}_j = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$$

si possono ricavare le relazioni matriciali (pensarci, iniziando dal caso  $n = 2$ , o studiare l'esercizio 19 sotto)

$$(7.0.15) \quad \begin{aligned} \text{(i)} \quad & P \cdot Y = X \quad ; \\ \text{(ii)} \quad & Y = P^{-1} \cdot X \quad . \end{aligned}$$

Le (7.0.15) consentono di arrivare alla seguente conclusione: la (7.5.10) descrive  $f$  rispetto alla base canonica  $\mathcal{B}$ ; rispetto invece a un'altra base  $\mathcal{C} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ , l'espressione di  $f$  è (calcolata espressamente, a beneficio del lettore interessato, nell'esercizio 20 sotto)

$$(7.0.16) \quad f(Y) = (P^{-1} \cdot A \cdot P) \cdot Y \quad ,$$

dove  $P$  è la cosiddetta *matrice di passaggio* (o matrice del *cambio di base*) definita in (7.0.12). Confrontando ora (7.0.16) e (7.0.11), il lettore dovrebbe essere in grado di pervenire alla conclusione espressa al punto seguente.

**Fine(\*)**

(7.0.17) La possibilità di dare una risposta positiva alla domanda (7.0.7) è equivalente all'esistenza di una matrice invertibile  $P \in M_n(\mathbb{R})$  tale che

$$(7.0.18) \quad P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} .$$

Se tale  $P$  esiste, diremo che  $f$ , (o, più semplicemente,  $A$ ) è *diagonalizzabile*. Come riprenderemo nella sezione 7.1 sotto, i  $\vec{v}_i$  (cioè, le colonne di  $P$ ), saranno chiamati *autovettori* di  $A$ , mentre i  $\lambda_i$  sono detti *autovalori*.

Lo scopo di questo capitolo è spiegare, per prima cosa, come si calcolano gli autovalori e gli autovettori di  $A$ . Poi illustreremo il metodo per capire se una data matrice è diagonalizzabile e, in caso affermativo, porteremo a termine la costruzione completa di  $P$ .

Segnaliamo in questa introduzione che questi argomenti hanno un ruolo centrale in moltissimi settori della matematica, tra cui, ad esempio, lo studio dei sistemi di equazioni differenziali oppure la geometria delle coniche (capitolo 8). Una comprensione profonda di questi concetti richiederebbe un lavoro (al di là dei nostri obiettivi) di approfondimento del concetto di cambio di base accennato nel paragrafo (\*) sopra, unito ad uno studio sistematico delle applicazioni lineari. Qualcosa in questo spirito sarà presentato nell'altro paragrafo (\*), cioè la sezione 7.4, in cui introdurremo le matrici di rotazione. Per quanto riguarda invece quella che può essere una prima fase di studio, riteniamo importante che il lettore acquisti familiarità con i concetti che esporremo nelle sezioni 7.1, 7.2 e 7.3. La teoria ivi contenuta ha portata molto generale, ma i nostri esercizi si concentreranno soprattutto sui casi dimensionalmente più agevoli, cioè  $n = 2$  o  $n = 3$ . Infine, dopo avere studiato il resto del capitolo, consigliamo di rileggere tutta questa sezione introduttiva.

## 7.1 Autovalori e autovettori

Sia  $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ . Vogliamo fare un lavoro preparatorio all'eventuale costruzione di una matrice invertibile  $P$  che realizzi la (7.0.18). Le colonne di  $P$  devono soddisfare un'equazione del tipo

$$(7.1.1) \quad A \cdot X = \lambda X \quad , \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} .$$



La (7.1.1) può essere riscritta, usando la matrice identità  $I$  di ordine  $n$ , come

$$(7.1.2) \quad [A - \lambda I] \cdot X = \vec{0} \quad .$$

La teoria dei sistemi lineari (teorema di Rouché-Capelli) ci ha insegnato che (7.1.2) ammette soluzioni non nulle se e solo se

$$(7.1.3) \quad |A - \lambda I| = 0 \quad .$$

Posto  $P(\lambda) = |A - \lambda I|$ , si può osservare che  $P(\lambda)$  è un polinomio di grado  $n$  nella variabile  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;  $P(\lambda)$  è detto *polinomio caratteristico* di  $A$ . Le soluzioni in  $\mathbb{R}$  dell'equazione (7.1.3), cioè  $P(\lambda) = 0$ , sono dette *autovalori* di  $A$ . Quindi, se  $\lambda$  è un autovalore di  $A$ , si può definire

$$(7.1.4) \quad V_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^n : [A - \lambda I] \cdot X = \vec{0}\} \quad .$$

Dal capitolo 9, sappiamo che  $V_\lambda$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^n$ : scriveremo

$$(7.1.5) \quad m_g(\lambda) = \dim V_\lambda \quad .$$

Il numero naturale  $m_g(\lambda)$  è chiamato *molteplicità geometrica* dell'autovalore  $\lambda$ . Per quanto visto nel capitolo 9, sappiamo che

$$(7.1.6) \quad m_g(\lambda) = n - \rho(A - \lambda I) \quad .$$

In sostanza,  $m_g(\lambda)$  coincide col numero di incognite libere del sistema omogeneo (7.1.2), come prescritto dal teorema di Rouché-Capelli. Il sottospazio  $V_\lambda$  è detto *autospazio* associato all'autovalore  $\lambda$ ; i suoi elementi non nulli sono invece chiamati *autovettori* associati all'autovalore  $\lambda$ . Infine, ricordiamo che ogni autovalore  $\lambda$ , essendo una radice di  $P(\lambda)$ , cioè di un polinomio di grado  $n$ , ha una sua molteplicità algebrica, denotata  $m_a(\lambda)$ .

Questo è il momento di eseguire alcuni esercizi per prendere confidenza con questi concetti.

▷ Esercizio 1 ◁

**Testo**

Sia

$$(7.1.7) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \in M_2(\mathbb{R}) \quad .$$

(i) Determinare gli autovalori di  $A$ ;

- (ii) Per ogni autovalore  $\lambda$ , indicare  $m_a(\lambda)$  e  $m_g(\lambda)$ ;  
 (iii) Determinare una base degli eventuali autospazi.

**Soluzione**

(i) Il polinomio caratteristico è

$$(7.1.8) \quad P(\lambda) = |A - \lambda I| = \left| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| \\ = \left| \begin{matrix} (1-\lambda) & 1 \\ 0 & (1-\lambda) \end{matrix} \right| = (1-\lambda)^2 \quad .$$

Ne segue che  $A$  ha un unico autovalore  $\lambda_1 = 1$ .

(ii) Abbiamo

$$(7.1.9) \quad m_a(\lambda_1) = 2 \quad , \quad m_g(\lambda_1) = n - \rho(A - \lambda_1 I) = \\ = 2 - \rho \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 2 - 1 = 1 \quad .$$

(iii)  $V_{\lambda_1}$  è definito come l'insieme delle soluzioni di

$$(7.1.10) \quad [A - \lambda_1 I] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ,$$

cioè

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad .$$

Ora,  $\dim V_{\lambda_1} = 1$ , e una sua base è  $\{^t[1, 0]\}$ . □

▷ Esercizio 2 ◁

**Testo**

Ripetere le domande dell'esercizio precedente, con

$$(7.1.11) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \in M_2(\mathbb{R}) \quad .$$

**Soluzione**

(i) Il polinomio caratteristico è

$$(7.1.12) \quad P(\lambda) = |A - \lambda I| = \left| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| \\ = \left| \begin{matrix} (1-\lambda) & 1 \\ 1 & (1-\lambda) \end{matrix} \right| = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda(\lambda - 2) \quad .$$

Ne segue che  $A$  ha due autovalori,  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 = 2$ .

(ii) è evidente che  $m_a(\lambda_1) = 1$  e  $m_a(\lambda_2) = 1$ . Per quanto riguarda le molteplicità geometriche, abbiamo

$$(7.1.13) \quad \begin{aligned} m_g(\lambda_1) &= n - \rho(A - \lambda_1 I) = \\ &= 2 - \rho \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) = 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

e

$$(7.1.14) \quad \begin{aligned} m_g(\lambda_2) &= n - \rho(A - \lambda_2 I) = \\ &= 2 - \rho \left( \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right) = 2 - 1 = 1 \quad . \end{aligned}$$

(iii) Studio degli autospazi:  $V_{\lambda_1}$  è definito da

$$(7.1.15) \quad [A - \lambda_1 I] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ,$$

cioè

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \quad .$$

Ora,  $\dim V_{\lambda_1} = 1$ , e una sua base è

$$(7.1.16) \quad \{ {}^t[1, -1] \} \quad .$$

In modo simile, si vede che  $V_{\lambda_2}$  è definito da

$$(7.1.17) \quad \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \quad ,$$

per cui si trova che una base di  $V_{\lambda_2}$  è

$$(7.1.18) \quad \{ {}^t[1, 1] \} \quad .$$

□

Prima di procedere oltre, riteniamo che sia utile enunciare la seguente proprietà generale:

Se  $A \in M_n(\mathbb{R})$  e  $\lambda$  è un autovalore di  $A$ , allora

$$(7.1.19) \quad 1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) \quad .$$

In particolare, la (7.1.19) assicura che, se un autovalore, come nell'esercizio precedente, ha molteplicità algebrica 1, allora automaticamente anche la sua molteplicità geometrica vale 1.

▷ Esercizio 3 ◁

**Testo**

Sia

$$(7.1.20) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \quad .$$

Determinare gli autovalori di  $A$ .

**Soluzione**

Il polinomio caratteristico è

$$(7.1.21) \quad P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 \quad .$$

Poiché  $P(\lambda)$  non ha radici reali, questa matrice non ha autovalori. □

Nell'esempio precedente, si può notare che  $P(\lambda)$  ha 2 radici complesse non reali ( $\pm i$ ): la diagonalizzazione di matrici in  $\mathbb{C}$  tiene conto di queste radici non reali, ma per i nostri scopi è sufficiente illustrare il caso reale.

▷ Esercizio 4 ◁

**Testo**

Sia

$$(7.1.22) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \quad .$$

Determinare gli autovalori di  $A$ , indicando per ciascuno di essi la molteplicità algebrica e quella geometrica.

**Soluzione**

Il polinomio caratteristico è

$$(7.1.23) \quad P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - \lambda - 1) \quad .$$

Quindi abbiamo 3 autovalori distinti:

$$(7.1.24) \quad \lambda_1 = 0 \quad , \quad \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad , \quad \lambda_3 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad .$$

Per ciascuno di essi la molteplicità algebrica è ovviamente 1, e così pure quella geometrica, per (7.1.19). □

▷ Esercizio 5 ◁

**Testo**

Sia

$$(7.1.25) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \in M_2(\mathbb{R}) \quad .$$

Determinare gli autovalori di  $A$ , indicando per ciascuno di essi la molteplicità algebrica e quella geometrica.

**Soluzione**

Si trova:  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = 5$ , entrambi con molteplicità algebrica e geometrica 1. □

## 7.2 Criterio di diagonalizzabilità

Attraverso la (7.0.18) abbiamo definito il concetto di matrice diagonalizzabile. Il seguente criterio consente di stabilire sotto quali condizioni una matrice è diagonalizzabile.

(7.2.1) **Criterio di diagonalizzabilità:** Sia  $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ . Allora  $A$  è diagonalizzabile se e solo se sono soddisfatte le due proprietà seguenti:

(7.2.2) Tutte le radici di  $P(\lambda)$  sono reali;

(7.2.3) per ognuna di esse (autovalore), si ha  $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$ .

---

---

**Osservazione 1:** Se  $P(\lambda)$  ammette  $n$  radici reali distinte fra loro, allora  $A$  è diagonalizzabile. Infatti, in questo caso è ovvio che ogni autovalore abbia molteplicità algebrica 1, e quindi anche la sua molteplicità geometrica deve valere 1, per la (7.1.19).

---

---

---

---

**Osservazione 2:** Se  $A$  è diagonalizzabile, i numeri reali  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  che compaiono nella matrice a destra in (7.0.18) sono precisamente gli autovalori di  $A$ , ognuno contato un numero di volte pari alla propria molteplicità. Della costruzione della matrice diagonalizzante  $P$  ci occuperemo nella sezione 7.3 sotto.

---

---

▷ Esercizio 6 ◁

**Testo**

Stabilire quali, fra le matrici degli esercizi da 1 a 5 sopra, sono diagonalizzabili.

**Soluzione**

La matrice (7.1.7) soddisfa la (7.2.2). Ma  $m_a(\lambda_1) \neq m_g(\lambda_1)$ , quindi questa matrice non è diagonalizzabile.

La matrice (7.1.11) è diagonalizzabile per l'osservazione 1, e lo stesso ragionamento si applica anche alle matrici (7.1.22) e (7.1.25).

Invece, la (7.1.20) non è diagonalizzabile perché non soddisfa la (7.2.2). □

▷ Esercizio 7 ◁

**Testo**

Sia

$$(7.2.4) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \quad .$$

Stabilire se  $A$  è diagonalizzabile.

**Soluzione**

Il polinomio caratteristico è

$$(7.2.5) \quad P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} (2 - \lambda) & 0 & 0 \\ 6 & (1 - \lambda) & 6 \\ 0 & 0 & (2 - \lambda) \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2(1 - \lambda) \quad .$$

Quindi la (7.2.2) è soddisfatta, con due autovalori:

$$(7.2.6) \quad \lambda_1 = 2 \quad , \quad m_a(\lambda_1) = 2 \quad e \quad \lambda_2 = 1 \quad , \quad m_a(\lambda_2) = 1 \quad .$$

Per stabilire se  $A$  è diagonalizzabile, bisogna calcolare  $m_g(\lambda_1)$  (Il calcolo di  $m_g(\lambda_2)$  non è necessario, per la (7.1.19)). Abbiamo, da (7.1.6),

$$(7.2.7) \quad m_g(\lambda_1) = n - \rho(A - \lambda_1 I) = \\ = 3 - \rho \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 3 - 1 = 2$$

Quindi la (7.2.3) è soddisfatta e concludiamo che  $A$  è diagonalizzabile. □

▷ Esercizio 8 ◁

**Testo**

Sia

$$(7.2.8) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \in M_3(\mathbb{R}) \quad .$$

Stabilire se  $A$  è diagonalizzabile.

**Soluzione**

Il polinomio caratteristico è

$$(7.2.9) \quad P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} (2 - \lambda) & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \lambda) & 2 \\ 0 & 2 & (1 - \lambda) \end{vmatrix} = (2 - \lambda) [(1 - \lambda)^2 - 4]$$

da cui si ricava:

$$(7.2.10) \quad \lambda_1 = 2 \quad , \quad \lambda_2 = 3 \quad e \quad \lambda_3 = -1 \quad .$$

Ora,  $A$  è diagonalizzabile per l'osservazione 1 sopra. □

In realtà, la diagonalizzabilità della matrice  $A$  dell'esercizio precedente poteva essere affermata senza calcoli, in virtù della proprietà generale seguente,

che approfondiremo successivamente, nella sezione 7.4 sotto.

Sia  $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ . Allora

$$(7.2.11) \quad {}^t A = A \quad \Rightarrow \quad A \text{ diagonalizzabile .}$$

Detto a parole: **le matrici simmetriche sono diagonalizzabili.**

### 7.3 Diagonalizzazione

In questa sezione esaminiamo la costruzione della matrice diagonalizzante  $P$  in (7.0.18). Abbiamo già osservato in (7.0.12) che le colonne di  $P$  sono costituite da una base di  $\mathbb{R}^n$  formata da autovettori di  $A$ . Più precisamente, ad ogni autovalore  $\lambda_i$  dobbiamo far corrispondere un numero di colonne di  $P$  pari a  $m_g(\lambda_i)$ : queste colonne devono formare una base di  $V_{\lambda_i}$ . Si noti che non è importante l'ordine degli autovalori, ma c'è corrispondenza tra l'ordine delle colonne di  $P$  e la successione degli autovalori che compaiono nella matrice diagonale a destra in (7.0.18): ad esempio, supponiamo di scegliere come  $\lambda_1$  un autovalore con  $m_g(\lambda_1) = 2$ . Allora le prime due colonne di  $P$  saranno formate da una base di  $V_{\lambda_1}$ , e nella matrice diagonale a destra in (7.0.18) si avrà:  $a_{11} = a_{22} = \lambda_1$ . Poi, considerando tutti gli altri autovalori, si completa la costruzione di  $P$ .

▷ Esercizio 9 ◁

#### Testo

Sia  $A$  come in (7.1.11). Determinare, se possibile,  $P \in M_2(\mathbb{R})$  tale che

$$P^{-1} \cdot A \cdot P$$

sia diagonale.

#### Soluzione

Abbiamo già verificato, nell'esercizio 6, che  $A$  è diagonalizzabile, quindi la  $P$  richiesta esiste. Dall'esercizio 2 sappiamo che  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 2$ . Inoltre, da (7.1.16) e (7.1.18) vediamo che le basi degli autospazi associati sono rispettivamente  $\vec{v}_1 = {}^t[1, -1]$  e  $\vec{v}_2 = {}^t[1, 1]$ . Quindi, posto

$$(7.3.1) \quad P = [\vec{v}_1, \vec{v}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$



si ha

$$(7.3.2) \quad P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad .$$

Si noti che, se avessimo invertito l'ordine degli autovalori, ponendo

$$(7.3.3) \quad P = [\vec{v}_2, \vec{v}_1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

avremmo ottenuto

$$(7.3.4) \quad P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad .$$

□

▷ Esercizio 10 ◁

**Testo**

Sia  $A$  come in (7.2.4). Determinare, se possibile,  $P \in M_3(\mathbb{R})$  tale che  $P^{-1} \cdot A \cdot P$  sia diagonale.

**Soluzione**

Abbiamo già verificato, nell'esercizio 7, che  $A$  è diagonalizzabile, quindi la  $P$  richiesta esiste. Da (7.2.6) abbiamo 2 autovalori  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 1$ .

Studio di  $V_{\lambda_1}$ : l'autospazio  $V_{\lambda_1}$  è definito da

$$(7.3.5) \quad [A - \lambda_1 I] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ,$$

Questo sistema si riduce alla sola equazione significativa

$$(7.3.6) \quad 6x_1 - x_2 + 6x_3 = 0 \quad .$$

Dunque possiamo scrivere

$$(7.3.7) \quad V_{\lambda_1} = \{ {}^t[x_1, 6x_1 + 6x_3, x_3] \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_3 \in \mathbb{R} \} \quad .$$

Ora,  $\dim V_{\lambda_1} = 2$  e una sua base, come visto nel capitolo 6, può essere ottenuta assegnando alle incognite libere i valori  $x_1 = 1, x_3 = 0$  e poi  $x_1 = 0, x_3 = 1$ . Si ottengono rispettivamente

$$(7.3.8) \quad \vec{v}_1 = {}^t[1, 6, 0] \quad , \quad \vec{v}_2 = {}^t[0, 6, 1] \quad .$$

Questi 2 autovettori formeranno le prime due colonne di  $P$ .  
 Studio di  $V_{\lambda_2}$ : l'autospazio  $V_{\lambda_2}$  è definito da

$$(7.3.9) \quad [A - \lambda_2 I] \cdot X = \vec{0} \quad .$$

Questo sistema è dato da

$$(7.3.10) \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ 6x_1 + 6x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad .$$

Sappiamo che solo 2 equazioni sono significative, ad esempio la prima e la terza. Ne segue che la più semplice base di questo autospazio è  $\vec{v}_3 = {}^t[0, 1, 0]$ . In conclusione, la matrice

$$(7.3.11) \quad P = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

soddisfa

$$(7.3.12) \quad P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad .$$

□

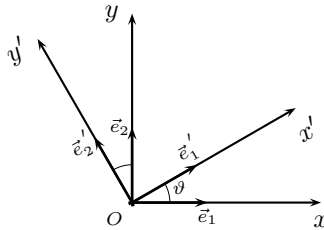
## 7.4 Matrici di rotazione e diagonalizzazione di matrici simmetriche

Una rotazione di un angolo  $\theta$  può essere visualizzata mediante la Figura 7.1:  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  sono i versori degli assi del sistema  $\vec{0}xy$ , mentre  $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$  sono i versori degli assi del sistema  $\vec{0}x'y'$ . Nel sistema  $\vec{0}xy$  possiamo scrivere:

$$(7.4.1) \quad \begin{cases} \text{(i)} & \vec{e}_1 = {}^t[1, 0] \quad , \quad \vec{e}_2 = {}^t[0, 1] \quad ; \\ \text{(ii)} & \vec{e}'_1 = {}^t[\cos \theta, \sin \theta] \quad , \quad \vec{e}'_2 = {}^t[-\sin \theta, \cos \theta] \quad . \end{cases}$$

Esplicitiamo ora il legame tra le coordinate  ${}^t[x, y]$  e le coordinate  ${}^t[x', y']$ . Usando la (7.4.1) (ii) nella seguente

$$(7.4.2) \quad x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = x'\vec{e}'_1 + y'\vec{e}'_2 \quad ,$$



**Figura 7.1** – Rotazione di un sistema di assi cartesiani in  $\mathbb{R}^2$ .

troviamo

$$(7.4.3) \quad x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = (x' \cos \theta - y' \sin \theta)\vec{e}_1 + (x' \sin \theta + y' \cos \theta)\vec{e}_2 ,$$

da cui

$$(7.4.4) \quad \begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases} .$$

La trasformazione (7.4.4) può essere riscritta in forma matriciale come segue:

$$(7.4.5) \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

dove

$$(7.4.6) \quad P = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} .$$

La matrice  $P$  soddisfa le due proprietà seguenti:

$$(7.4.7) \quad \begin{cases} \text{(i)} & {}^t P = P^{-1} ; \\ \text{(ii)} & \det P = 1 . \end{cases}$$

In generale, una matrice  $P \in M_n(\mathbb{R})$  che soddisfa la (7.4.7)(i) è detta *matrice ortogonale* (si scrive  $P \in \mathcal{O}(n)$ ). Se una  $P \in \mathcal{O}(n)$  soddisfa anche la (7.4.7)(ii) si dice che  $P$  è una *matrice ortogonale speciale* o, semplicemente, una *matrice di rotazione* (si scrive  $P \in \mathcal{SO}(n)$ ).

Queste matrici occupano un ruolo centrale in molti problemi geometrici (si veda il capitolo 8) e, come adesso illustriamo, nella diagonalizzazione delle

matrici simmetriche. Infatti, vale la seguente proprietà:

Sia

$$(7.4.8) \quad A \in M_n(\mathbb{R}) \quad , \quad {}^t A = A \quad .$$

Allora esiste  $P \in \mathcal{SO}(n)$  tale che

$$(7.4.9) \quad {}^t P \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad .$$

La costruzione di  $P$  avviene con un'unica differenza rispetto alla sezione 7.3: quando si scelgono le basi dei vari autospazi, non si possono prendere basi qualunque, ma bisogna scegliere *basi ortonormali*; in altre parole, si parte da una qualunque base di  $V_{\lambda_i}$ , e la si ortonormalizza mediante il processo di Gram-Schmidt illustrato nel capitolo 6. Il fatto sorprendente è che gli autospazi  $V_{\lambda_i}$  risultino anche a due a due ortogonali fra loro e di conseguenza le colonne di  $P$  formino una base ortonormale di  $\mathbb{R}^n$  costituita da autovettori.

▷ Esercizio 11 ◁

**Testo**

Sia  $A$  come in (7.1.11). Determinare  $P \in \mathcal{SO}(2)$  tale che

$$(7.4.10) \quad {}^t P \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad .$$

**Soluzione**

Poiché  ${}^t A = A$ , la  $P$  richiesta esiste. Ortonormalizzando le basi degli autospazi, già trovate in (7.1.16) e (7.1.18), otteniamo

$$(7.4.11) \quad P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad .$$

Con riferimento alla Figura 12.1 e a (7.4.6), possiamo dire che la base ortonormale, formata da autovettori, è ottenuta dalla base canonica mediante una rotazione di un angolo  $\theta = \frac{7}{4}\pi$ . □

---

**Osservazione 3:** Se, alla fine di questo processo di costruzione di  $P \in \mathcal{SO}(n)$ , si trovasse  $\det P = -1$ , sarebbe sufficiente scambiare due colonne di  $P$  per ottenere anche la (7.4.7)(ii) (oppure, si potrebbe moltiplicare per  $-1$  un'intera colonna).

---

▷ Esercizio 12 ◁

**Testo**

Sia  $A$  come in (7.2.8). Determinare  $P \in \mathcal{SO}(3)$  tale che

$$(7.4.12) \quad {}^tP \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} .$$

**Soluzione**

Poiché  ${}^tA = A$ , la  $P$  richiesta esiste. Abbiamo trovato, in (7.2.10), 3 autovalori reali e distinti:  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 3$  e  $\lambda_3 = -1$ . Studiamone i rispettivi autospazi.  $V_{\lambda_1}$  è definito da

$$(7.4.13) \quad [A - \lambda_1 I] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ,$$

cioè

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} .$$

Una base ortonormale di  $V_{\lambda_1}$  è

$$(7.4.14) \quad \vec{v}_1 = {}^t[1, 0, 0] .$$

Per  $V_{\lambda_2}$ , il sistema lineare omogeneo associato è

$$(7.4.15) \quad \begin{cases} -x_1 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} .$$

Studiando (7.4.15), si conclude rapidamente che una base ortonormale di  $V_{\lambda_2}$  è

$$(7.4.16) \quad \vec{v}_2 = {}^t[0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}] .$$

In modo analogo, lo studio di  $V_{\lambda_3}$  fornisce

$$(7.4.17) \quad \vec{v}_3 = {}^t[0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}] \quad .$$

Mettendo insieme (7.4.14), (7.4.16) e (7.4.17) concludiamo che

$$(7.4.18) \quad P = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

soddisfa

$$(7.4.19) \quad {}^tP \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad .$$

□

## 7.5 Matrici simili, invarianti e decomposizione di matrici

All'inizio del Capitolo abbiamo introdotto il concetto di applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . In particolare, se  $X = {}^t[x_1, \dots, x_n]$  sono le coordinate di un generico vettore rispetto alla base canonica, possiamo assumere che  $f$  sia definita da

$$(7.5.1) \quad f(X) = A \cdot X \quad ,$$

con  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Sia ora

$$(7.5.2) \quad P = [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n] \in M_n(\mathbb{R}) \quad \text{con} \quad \det(P) \neq 0 \quad .$$

Sappiamo che i vettori  $\vec{v}_i$  (le colonne di  $P$ ) formano una base, che chiamiamo  $\mathcal{C}$ , di  $\mathbb{R}^n$ . Inoltre, dette  $Y = {}^t[y_1, \dots, y_n]$  le coordinate di un generico vettore rispetto a questa base  $\mathcal{C}$ , abbiamo osservato che l'applicazione (7.5.1) rispetto alle coordinate  $Y$  risulta descritta da:

$$(7.5.3) \quad f(Y) = (P^{-1} \cdot A \cdot P) \cdot Y \quad .$$

In altre parole,  $A$  e  $P^{-1} \cdot A \cdot P$  descrivono la stessa applicazione, ma rispetto a basi diverse. Questo suggerisce di introdurre la seguente definizione.

**Definizione** Siano  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ . Diciamo che  $A$  e  $B$  sono *simili* se esiste una matrice invertibile  $P \in M_n(\mathbb{R})$  tale che

$$(7.5.4) \quad B = P^{-1} \cdot A \cdot P .$$

Applicando il Teorema di Binet a (7.5.4) è immediato concludere che, se due matrici  $A$  e  $B$  sono simili, allora  $\det(A) = \det(B)$ . In altre parole, il determinante di una matrice è *invariante* per similitudini e quindi, in virtù di (7.5.3), possiamo dire che il determinante è un invariante dell'applicazione lineare  $f$  (invariante ha il significato di: non dipende dalla base scelta per effettuare il calcolo. Infatti, il valore del determinante è collegato al rapporto di trasformazione dei volumi da parte di  $f$ ). Si noti anche che, se  $A$  è diagonalizzabile, allora il suo determinante coincide con il prodotto degli autovalori (ognuno contato un numero di volte pari alla sua molteplicità). Nella definizione seguente introduciamo un altro importante invariante di un'applicazione lineare.

**Definizione** Siano  $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ . Si definisce

$$(7.5.5) \quad \text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} .$$

$\text{Tr}(A)$  è chiamata la *traccia* di  $A$ .

Come il determinante, anche la traccia di  $A$  è invariante per similitudini e quindi, in virtù di (7.5.3), possiamo dire che la traccia è un invariante dell'applicazione lineare  $f$ . Si noti anche che, se  $A$  è diagonalizzabile, allora la sua traccia coincide con la somma degli autovalori (ognuno contato un numero di volte pari alla sua molteplicità).

In realtà, non è difficile verificare che il polinomio caratteristico di una matrice è esso stesso invariante per similitudini (pensarci come esercizio). Inoltre,

si può dimostrare (non immediato!!) che, data  $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ , la sua traccia e il suo determinante intervengono nel polinomio caratteristico  $P(\lambda)$  come segue:

$$(7.5.6) \quad P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \cdots + c_{n-1} \lambda + c_n$$

dove

$$c_1 = (-1)^{n-1} \text{Tr}(A) \quad \text{e} \quad c_n = \det(A) .$$

In particolare, se  $n = 2$ , allora

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \text{Tr}(A) \lambda + \det(A) ,$$

mentre se  $n = 3$  si ha:

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + \text{Tr}(A) \lambda^2 + c_2 \lambda + \det(A) ,$$

dove

$$(7.5.7) \quad c_2 = \frac{1}{2} [\text{Tr}(A^2) - (\text{Tr}(A))^2] .$$

Concludiamo questa sezione con alcune considerazioni relative alla possibilità di decomporre matrici e applicazioni lineari. La motivazione di questo risiede nel fatto che, in vari contesti ingegneristici e fisico-matematici, si descrive lo stato di sforzo di una struttura o di un mezzo attraverso un'applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dove, tipicamente, la matrice  $A$  in (7.5.1) è simmetrica. In particolare, quando l'applicazione lineare rappresenta il cosiddetto *tensore delle tensioni di Cauchy*, si usa la simbologia

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

per indicare la matrice simmetrica associata e si decompone

$$(7.5.8) \quad T = \bar{\sigma} \text{Id} + \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \bar{\sigma} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \bar{\sigma} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \bar{\sigma} \end{bmatrix} ,$$

dove

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3} \text{Tr}(T)$$



e  $\text{Id}$  è la matrice identità di ordine 3. Il termine  $\bar{\sigma}\text{Id}$  in (7.5.8) è detto *parte sferica* di  $T$ , mentre l'altro addendo a destra dell'uguale è chiamato *parte deviatorica* di  $T$ . La parte deviatorica si annulla in corrispondenza di uno *stato idrostatico* (unico autovalore con molteplicità tre) e misura quindi il discostamento da questo stato. Gli invarianti del tensore sono essenzialmente tre:  $I_3 = \det(T) = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ , dove  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  sono gli autovalori (reali, non necessariamente distinti) associati alla matrice simmetrica  $T$ . Poi,  $I_1 = \text{Tr}(T) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$  e infine, il terzo invariante,  $I_2 = -c_2$ , dove  $c_2$  è definito sopra in (7.5.7): è facile verificare che l'invariante  $c_2$ , in funzione degli autovalori, assume la seguente espressione:

$$I_2 = -c_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3$$

Un'altra utile decomposizione di una qualsiasi matrice quadrata è quella in *parte simmetrica* e *parte antisimmetrica*. Per spiegare questa decomposizione, ricordiamo che una matrice  $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$  si dice *simmetrica* se  ${}^tA = A$ , mentre si dice *antisimmetrica* se  ${}^tA = -A$ . Ora, data  $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ , poniamo:

$$(7.5.9) \quad A_{sym} = \frac{A + {}^tA}{2} \quad \text{e} \quad A_{anti-sym} = \frac{A - {}^tA}{2}.$$

Si verifica immediatamente che  $A_{sym}$  è simmetrica e  $A_{anti-sym}$  è antisimmetrica. Inoltre, un'altrettanto facile verifica fornisce la decomposizione di  $A$  in somma di una parte simmetrica e di una parte antisimmetrica, ovvero:

$$A = A_{sym} + A_{anti-sym}.$$

▷ Esercizio 13 ◁

**Testo** Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

Scrivere  $A$  come somma di una matrice simmetrica e di una matrice antisimmetrica.

**Soluzione**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

**Considerazioni conclusive sulle applicazioni lineari:** In generale, un'applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è definita da

$$(7.5.10) \quad f(X) = A \cdot X \quad ,$$

dove  $X = {}^t[x_1, \dots, x_n]$ ,  $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$  e  $A \cdot X$  denota il prodotto di matrici. Si definisce

$$(7.5.11) \quad \text{Ker}(f) = \left\{ X \in \mathbb{R}^n : f(X) = \vec{0} \right\} .$$

$\text{Ker}(f)$  è un sottospazio vettoriale del dominio  $\mathbb{R}^n$  detto *nucleo* dell'applicazione lineare  $f$ . Sappiamo dalla teoria dei sistemi lineari che la sua dimensione è uguale a  $n - \rho(A)$ . Un altro importante sottospazio vettoriale associato a  $f$  è:

$$(7.5.12) \quad \text{Im}(f) = \{ Y \in \mathbb{R}^m : \exists X \in \mathbb{R}^n \text{ tale che } f(X) = Y \} .$$

$\text{Im}(f)$  è un sottospazio vettoriale del codominio  $\mathbb{R}^m$  detto *immagine* dell'applicazione lineare  $f$ . Si verifica che la dimensione di  $\text{Im}(f)$  è uguale al rango di  $A$ , per cui si può concludere che

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = n .$$

Inoltre,  $f$  è *iniettiva* se e solo se  $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$  (ovvero,  $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$ ), mentre  $f$  è *surgettiva* se e solo se  $\dim(\text{Im}(f)) = m$ .

**Nel caso particolare in cui  $m = n$** , si può osservare che le tre affermazioni seguenti sono **equivalenti**:

- $f$  è iniettiva
- $f$  è surgettiva
- $f$  è bigettiva.

## 7.6 Esercizi di riepilogo

▷ Esercizio 14 ◁

**Testo**

Sia

$$(7.6.1) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \quad .$$

Stabilire se  $A$  è diagonalizzabile.**Soluzione**

Il polinomio caratteristico è

$$(7.6.2) \quad P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix} = -\lambda[\lambda^2 - 1] - \lambda = -\lambda^3 \quad .$$

Abbiamo quindi un unico autovalore  $\lambda_1 = 0$ , con  $m_a(\lambda_1) = 3$ . Ma  $m_g(\lambda_1) = n - \rho(A) = 3 - 2 = 1 \neq m_a(\lambda_1)$ , per cui  $A$  non è diagonalizzabile.

□

## ▷ Esercizio 15 ◁

**Testo**

Sia

$$(7.6.3) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \quad .$$

Stabilire se  $A$  è diagonalizzabile e, in caso affermativo, determinare  $P \in M_3(\mathbb{R})$  tale che  $P^{-1} \cdot A \cdot P$  risulti diagonale.**Soluzione**

Il polinomio caratteristico è

$$(7.6.4) \quad P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & (1 - \lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2(1 - \lambda) \quad .$$

Quindi la condizione (7.2.2) è soddisfatta con  $\lambda_1 = 0$ ,  $m_a(\lambda_1) = 2$ , e  $\lambda_2 = 1$ ,  $m_a(\lambda_2) = 1$ . Inoltre,  $m_g(\lambda_1) = 3 - \rho(A) = 2 = m_a(\lambda_1)$ , quindi possiamo concludere che  $A$  è diagonalizzabile.

Costruzione di  $P$ : le prime due colonne di  $P$  sono formate da una base dell'auto-spazio  $V_{\lambda_1}$ , definito da

$$(7.6.5) \quad A \cdot X = \vec{0}$$

che è equivalente alla sola equazione

$$x_3 = 0 \quad .$$

Allora, come base di  $V_{\lambda_1}$ , possiamo scegliere semplicemente  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ . L'altro autospazio,  $V_{\lambda_2}$ , è definito da

$$(7.6.6) \quad [A - \lambda_2 I] \cdot X = \vec{0}$$

che è equivalente al seguente sistema

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad .$$

Quindi

$$(7.6.7) \quad V_{\lambda_2} = \{^t[x_3, x_3, x_3] \in \mathbb{R}^3 : x_3 \in \mathbb{R}\} \quad .$$

Ne segue che una base di  $V_{\lambda_2}$  è  $\{^t[1, 1, 1]\}$ . In conclusione, la matrice

$$(7.6.8) \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

soddisfa

$$(7.6.9) \quad P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad .$$

▷ Esercizio 16 ◁

□

**Testo**

Sia

$$(7.6.10) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \quad .$$

Stabilire se  $A$  è diagonalizzabile.

### Soluzione

Il polinomio caratteristico è

$$(7.6.11) \quad P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 + 1) \quad .$$

Poiché non tutte le radici di  $P(\lambda)$  sono reali (abbiamo infatti le radici complesse coniugate  $\pm i$ ), la prima condizione del criterio di diagonalizzabilità non è soddisfatta e quindi  $A$  non è diagonalizzabile. □

▷ Esercizio 17 ◁

### Testo

Sia

$$(7.6.12) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \quad .$$

Stabilire se  $A$  è diagonalizzabile e, in caso affermativo, determinare  $P \in M_3(\mathbb{R})$  tale che  $P^{-1} \cdot A \cdot P$  risulti diagonale.

### Soluzione

${}^t A = A$ , quindi, per (7.2.11),  $A$  è diagonalizzabile. Per costruire  $P$ , iniziamo con il calcolo degli autovalori:

$$(7.6.13) \quad P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 1) \quad .$$

Quindi abbiamo tre autovalori reali e distinti

$$(7.6.14) \quad \lambda_1 = 0 \quad , \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 1 \quad .$$

Ognuno di essi ha quindi molteplicità algebrica e geometrica pari a 1. Ne segue che i tre autospazi associati agli autovalori in (7.6.14) hanno tutti dimensione uno. Il sistema lineare omogeneo che definisce  $V_{\lambda_1}$  è:

$$(7.6.15) \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \quad .$$

Quindi la corrispondente colonna di  $P$  è  $\vec{v}_1 = {}^t[0, 0, 1]$ .  $V_{\lambda_2}$  è definito da

$$(7.6.16) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases},$$

che porta a  $\vec{v}_2 = {}^t[1, -1, 0]$ . Infine,  $V_{\lambda_3}$  è definito da

$$(7.6.17) \quad \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{cases}$$

che fornisce  $\vec{v}_3 = {}^t[1, 1, 0]$ . In conclusione,

$$(7.6.18) \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

soddisfa

$$(7.6.19) \quad P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Notiamo che, nel contesto della sezione 7.4, se avessimo scelto basi ortonormali degli autospazi, avremmo potuto realizzare la (7.6.19) con una matrice ortogonale speciale. Più specificamente, avremmo trovato che

$$(7.6.20) \quad P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

soddisfa

$$(7.6.21) \quad {}^tP \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

▷ Esercizio 18 ◁

**Testo (\*)**

Sia  $P \in \mathcal{O}(n)$ . Verificare che

$$(7.6.22) \quad \det P = \pm 1.$$

**Soluzione**

Nella sezione 7.4 abbiamo visto che  $P \in \mathcal{O}(n)$  se e solo se  $P$  è una matrice quadrata che soddisfa la (7.4.7)(i). Ricordando il teorema di Binet illustrato nel capitolo 3), e osservando che  $\det({}^tP) = \det P$ , possiamo scrivere la seguente sequenza:

$$(7.6.23) \quad {}^tP = P^{-1} \quad \Rightarrow \quad {}^tP \cdot P = I \quad \Rightarrow \quad \det({}^tP \cdot P) = \det I \\ \Rightarrow \quad \det({}^tP) (\det P) = 1 \quad \Rightarrow \quad (\det P)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \det P = \pm 1 \quad .$$

□

▷ Esercizio 19 ◁

**Testo (\*)**

Scrivere la relazione inversa delle (7.4.4).

**Soluzione**

Dato che (7.4.4) equivale a (7.4.5), deduciamo che

$$(7.6.24) \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Ora

$$(7.6.25) \quad P^{-1} = {}^tP = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad .$$

Sostituendo la (7.6.25) nella (7.6.24) e calcolando si ottiene

$$(7.6.26) \quad \begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' = x (-\sin \theta) + y \cos \theta \end{cases}$$

□

▷ Esercizio 20 ◁

**Testo (\*)**

Verificare che la (7.0.15)(i) è equivalente a (7.0.14).

**Soluzione**

Indichiamo con  $v_{i,j}$  la  $i$ -esima componente (rispetto a  $\mathcal{B}$ ) del vettore  $\vec{v}_j$ . In altre parole, stiamo dicendo

$$(7.6.27) \quad P = [v_{i,j}] \quad .$$

Eseguendo il prodotto di matrici (7.0.15)(i) si ha:

$$(7.6.28) \quad x_k = \sum_{j=1}^n y_j v_{k,j} \quad k = 1, \dots, n,$$

da cui

$$(7.6.29) \quad \sum_{k=1}^n x_k \vec{e}_k = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n y_j v_{k,j} \vec{e}_k = \sum_{j=1}^n y_j \vec{v}_j$$

dove, nell'ultima uguaglianza, abbiamo (lecitamente) scambiato l'ordine delle  $\sum$  e usato

$$\sum_{k=1}^n v_{k,j} \vec{e}_k = \vec{v}_j \quad .$$

Ma la (7.6.29) è esattamente (7.0.14). Infine, la (7.0.15)(ii) segue da (7.0.15)(i) applicando ad entrambi i suoi membri  $P^{-1}$ . □

▷ Esercizio 21 ◁

**Testo (\*)**

Verificare la (7.0.16).

**Soluzione**

Usando la (7.0.15)(i), trasformiamo

$$(7.6.30) \quad A \cdot X \rightarrow A \cdot P \cdot Y \quad .$$

Quest'ultimo risultato è però espresso rispetto alle coordinate  $X$ . Quindi, usando ora la (7.0.15)(ii), si converte  $A \cdot P \cdot Y$  dalle coordinate  $X$  alle coordinate  $Y$ , ottenendo  $(P^{-1} \cdot A \cdot P) \cdot Y (= f(Y))$ . □

▷ Esercizio 22 ◁

**Testo**

Dire quale fra le seguenti matrici è diagonalizzabile:

$$(7.6.31) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad ;$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad ; \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad .$$



**Soluzione** (Calcoli omessi)

Solo  $A$  risulta diagonalizzabile. □

▷ Esercizio 23 ◁

**Testo**

Sia

$$(7.6.32) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \quad .$$

Stabilire se  $A$  è diagonalizzabile e, in caso affermativo, determinare  $P \in M_3(\mathbb{R})$  tale che  $P^{-1} \cdot A \cdot P$  risulti diagonale.

**Soluzione**

Si trova  $\lambda_1 = 0$ , con  $m_a(\lambda_1) = 2 = m_g(\lambda_1)$ ; e  $\lambda_2 = 1$ , con  $m_a(\lambda_2) = 1 = m_g(\lambda_2)$ . Poi si costruisce

$$(7.6.33) \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad .$$

□

▷ Esercizio 24 ◁

**Testo**

Sia

$$(7.6.34) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \quad .$$

Determinare, se possibile,  $P \in M_3(\mathbb{R})$  tale che

$$(7.6.35) \quad P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad .$$

**Soluzione**

Dato che  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 1$  e  $\lambda_3 = 3$  risultano essere i tre autovalori (reali e distinti) di  $A$ , si conclude che la  $P$  richiesta esiste. Studiando i relativi autospazi si arriva

a

$$(7.6.36) \quad P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 11 \\ 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} .$$

□

▷ Esercizio 25 ◁

**Testo**

Sia

$$(7.6.37) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) .$$

Stabilire se  $A$  è diagonalizzabile.

**Soluzione**

Si trova  $\lambda_1 = 0$ , con  $m_a(\lambda_1) = 1$ , e  $\lambda_2 = 0$ , con  $m_a(\lambda_2) = 2$ . Ma

$$(7.6.38) \quad \begin{aligned} m_g(\lambda_2) &= n - \rho(A - \lambda_2 I) = \\ &= 3 - \rho \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 3 - 2 = 1 , \end{aligned}$$

per cui  $A$  non è diagonalizzabile.

□

## 7.7 Considerazioni conclusive

Un'importante applicazione della teoria della diagonalizzazione consente uno studio geometrico completo delle coniche in  $\mathbb{R}^2$ . In particolare, nel capitolo 8 vedremo che ogni conica non degenera equivale ad uno dei tre casi canonici (ellisse, iperbole, parabola), a condizione di individuare un'opportuna rotazione (eventualmente seguita da una traslazione) degli assi cartesiani di riferimento. Questa rotazione viene appunto determinata *diagonalizzando una matrice simmetrica di ordine due associata alla conica*.

In molte situazioni di interesse matematico e fisico è necessario considerare la diagonalizzabilità di matrici  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . In questo caso, l'unica sostanziale modifica rispetto alla teoria da noi illustrata è la seguente: sono autovalori tutte le radici del polinomio caratteristico (anche quelle complesse non reali), e la condizione di diagonalizzabilità si riduce alla sola richiesta  $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$  per ogni autovalore  $\lambda$ .

Per approfondimenti sugli argomenti di questo capitolo citiamo Greco *et al.* [6], Abate [1], Betti [2] e Robbiano [9]. Concludiamo segnalando che le nozioni apprese attraverso lo studio dei capitoli 3, 6 e 7 risulteranno fondamentali per poter affrontare proficuamente lo studio dei tensori degli sforzi e delle deformazioni, usati in meccanica dei fluidi e in scienza delle costruzioni per definire lo stato tenso-deformativo in ogni punto di un determinato mezzo o struttura.

# Capitolo 8

## Coniche e quadriche

### 8.0 Introduzione

Una *conica* in  $\mathbb{R}^2$  è il luogo di punti  $\gamma$  definito da un'equazione di secondo grado in  $x, y$ , cioè

$$(8.0.1) \quad \gamma : \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad ,$$

con l'ipotesi che  $a_{11}, a_{12}, a_{22}$  non siano tutti nulli. La matrice simmetrica

$$(8.0.2) \quad A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

è detta *matrice della conica*  $\gamma$ . La sua sottomatrice quadrata (anch'essa simmetrica)

$$(8.0.3) \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

è detta *matrice della parte quadratica di*  $\gamma$ . È facile verificare che l'equazione (8.0.1) è equivalente a

$$(8.0.4) \quad [x, y, 1] \cdot A' \cdot {}^t[x, y, 1] = 0 \quad .$$

Inoltre,

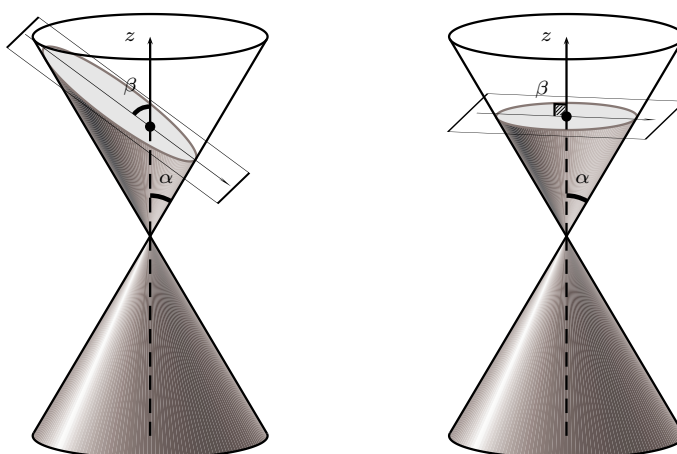
$$(8.0.5) \quad [x, y] \cdot A \cdot {}^t[x, y] = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

(in (8.0.4) e (8.0.5)  $\cdot$  indica il prodotto righe per colonne di matrici).

In questo capitolo mostreremo che le principali caratteristiche geometriche delle coniche possono essere determinate attraverso l'applicazione della teoria della diagonalizzazione alla matrice simmetrica  $A$ . Segnaliamo, per completezza culturale, che queste figure geometriche derivano il loro nome dal fatto che sono altresì caratterizzabili come le intersezioni, in  $\mathbb{R}^3$ , tra un piano e il cono di equazione

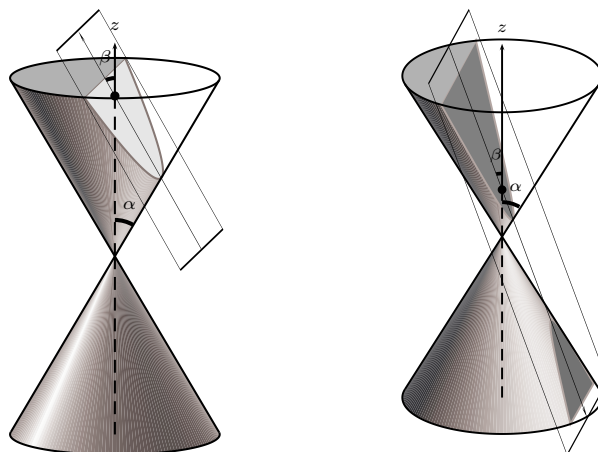
$$(8.0.6) \quad z^2 = x^2 + y^2 \quad .$$

Ad illustrazione di ciò, si vedano la Figura 8.1 e la Figura 8.2.



**Figura 8.1** – L'ellisse ottenuta come sezione di un cono:  $\alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$  (a sinistra).  
La circonferenza ottenuta come sezione di un cono:  $\beta = \frac{\pi}{2}$  (a destra).

Le *quadriche* sono superfici in  $\mathbb{R}^3$  definite da un'equazione di secondo grado in  $x, y, z$  (la (8.0.6) è un esempio di quadrica degenera). Per queste superfici è disponibile una teoria equivalente a quella che illustreremo per le coniche ma, dato che le matrici di rotazione in dimensione tre hanno un significato più complesso e meno intuitivo, non la tratteremo e ci limiteremo a descrivere le quadriche in forma canonica.



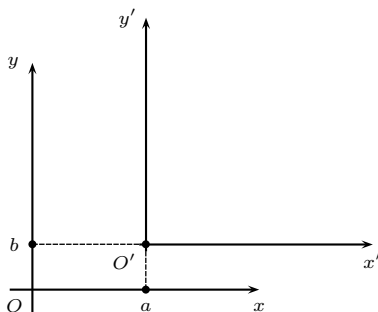
**Figura 8.2** – La parabola ottenuta come sezione di un cono:  $\beta = \alpha$  (a sinistra).  
L'iperbole ottenuta come sezione di un cono:  $0 < \beta < \alpha$  (a destra).

## 8.1 Cambiamenti di sistema di riferimento in $\mathbb{R}^2$

Una traslazione di assi (si veda la Figura 8.3) è semplicemente esprimibile mediante

$$(8.1.1) \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad ,$$

dove  ${}^t[a, b]$  sono le coordinate di  $O'$  nel sistema  $Oxy$ .



**Figura 8.3** – Traslazione del sistema di riferimento.

Nel capitolo 7, cui rimandiamo per le notazioni e i dettagli, abbiamo imparato a descrivere le rotazioni di assi. In particolare, ricordiamo ora che l'espressione del cambio di coordinate del sistema  $Oxy$ , corrispondente ad una rotazione di un angolo  $\theta$  in senso antiorario, è la seguente:

$$(8.1.2) \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad ,$$

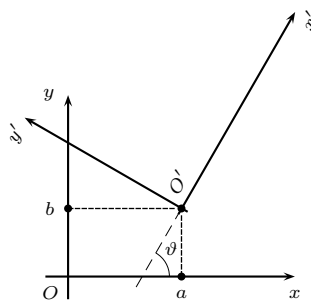
dove  $P$  è la matrice di rotazione

$$(8.1.3) \quad P = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad .$$

Poiché  $P^{-1} = {}^tP$ , l'inversa di (8.1.2) è

$$(8.1.4) \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = {}^tP \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad .$$

Nello studio delle coniche può risultare necessario combinare insieme traslazioni e rotazioni: ciò dà luogo alle cosiddette roto-traslazioni, visualizzabili nella Figura 8.4.



**Figura 8.4** – Roto-traslazione.

In formule, la descrizione analitica della roto-traslazione della Figura 8.4 è:

$$(8.1.5) \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$(8.1.6) \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = {}^tP \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + {}^tP \cdot \begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix}$$

## 8.2 Generalità sulle coniche e caso $a_{12} = 0$

Le coniche, definite attraverso l'equazione (8.0.1) (oppure, (8.0.4)), si dividono in due sottofamiglie:

(8.2.1) Coniche *degeneri*, se  $\det A' = 0$ ;

(8.2.2) Coniche *non degeneri*, se  $\det A' \neq 0$ .

Le coniche degeneri non presentano un vero interesse geometrico e possono essere studiate con semplici ragionamenti algebrici *ad hoc*, come illustrato nell'esercizio seguente:

▷ Esercizio 1 ◁

### Testo

Studiare la conica  $\gamma$  definita da

$$(8.2.3) \quad x^2 + y^2 + 2xy - x - y = 0 \quad .$$

### Soluzione

La matrice di  $\gamma$  è:

$$(8.2.4) \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \quad .$$

La matrice  $A'$  ha due colonne uguali, quindi  $\det A' = 0$  e  $\gamma$  pertanto è degenera. Riscriviamo la (8.2.3) come

$$(8.2.5) \quad (x + y)^2 - (x + y) = 0$$

e, con un ulteriore passaggio,

$$(8.2.6) \quad (x + y)(x + y - 1) = 0 \quad .$$

Ora, da (8.2.6) è facile concludere che  $\gamma$  è costituita dall'unione di due rette parallele  $r_1$  e  $r_2$ , di equazioni rispettivamente

$$(8.2.7) \quad r_1 : x + y = 0; \quad r_2 : x + y - 1 = 0.$$

□



Altri casi degeneri che possono presentarsi sono:

$$(8.2.8) \quad \begin{array}{ll} \text{(i)} & x^2 = 0 ; \\ \text{(ii)} & x y = 0 ; \\ \text{(iii)} & x^2 + y^2 = 0 ; \\ \text{(iv)} & x^2 + 1 = 0 . \end{array}$$

In queste situazioni  $\gamma$  è rispettivamente: (i) una retta  $r$  (l'asse  $y$ ) contata due volte; (ii) l'unione di due rette incidenti (gli assi); (iii) un punto (l'origine); (iv) l'insieme vuoto.

Una teoria sistematica per trattare lo studio delle coniche degeneri è disponibile, ma non presenta particolare interesse geometrico ed è pertanto omessa. Da ora in avanti ci occuperemo invece delle coniche *non* degeneri. In forma canonica, esse sono di tre tipi, di cui già conosciamo le caratteristiche geometriche: *ellisse, iperbole e parabola*.

**(8.2.9) Il risultato principale nella teoria delle coniche consiste nel fatto che ogni conica non degenera è equivalente a una di queste tre, a condizione di operare una opportuna roto-traslazione.**

Per illustrare il procedimento necessario conviene separare due casi: il caso  $a_{12} = 0$ , in cui è sufficiente una semplice traslazione; e il caso  $a_{12} \neq 0$ , in cui è necessario operare anche un'opportuna rotazione, determinabile usando la teoria della diagonalizzazione delle matrici simmetriche. Vediamo ora i dettagli.

**(8.2.10) Caso  $a_{12} = 0$ .** L'individuazione della traslazione opportuna avviene per via puramente algebrica, mediante il metodo di completamento dei quadrati che illustriamo attraverso l'esercizio seguente:

▷ Esercizio 2 ◁

**Testo**

Studiare la conica  $\gamma$  definita da

$$(8.2.11) \quad x^2 + 2y^2 - 2x - 8y + 8 = 0 \quad .$$

### Soluzione

Per prima cosa, si verifica facilmente che  $\det A' \neq 0$ , per cui  $\gamma$  è non degenere. Ora, si riscrive la (8.2.11), aggiungendo e sottraendo quantità uguali con l'intento di formare dei quadrati:

$$(8.2.12) \quad (x^2 - 2x + 1) - 1 + 2(y^2 - 4y + 4) - 8 + 8 = 0$$

che equivale a

$$(8.2.13) \quad (x - 1)^2 + 2(y - 2)^2 = 1 \quad .$$

Da (8.2.13) si deduce immediatamente che l'opportuna traslazione cercata è

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad ,$$

cioè

$$(8.2.14) \quad \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y - 2 \end{cases} \quad .$$

Sostituendo la (8.2.14) nella (8.2.13) si conclude che l'equazione di  $\gamma$ , nel sistema di riferimento traslato  $Ox'y'$ , è

$$(8.2.15) \quad x'^2 + 2y'^2 = 1$$

o, ancora,

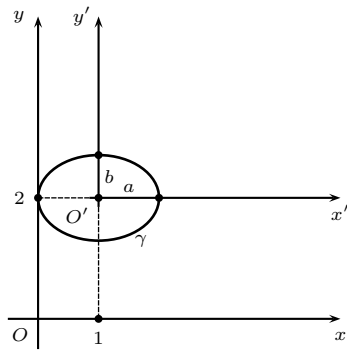
$$(8.2.16) \quad x'^2 + \frac{y'^2}{(1/\sqrt{2})^2} = 1$$

che (nel sistema  $Ox'y'$ ) rappresenta un'ellisse canonica con semiassi  $a = 1$ ,  $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . La situazione può essere agevolmente visualizzata attraverso la Figura 8.5.

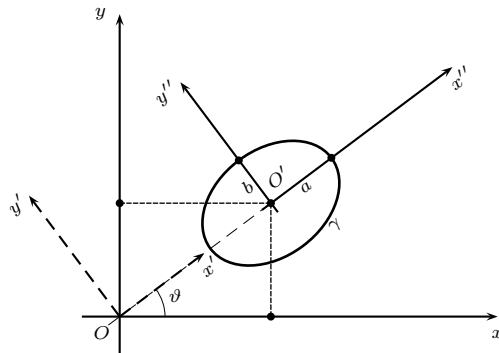
□

## 8.3 Caso $a_{12} \neq 0$ : rotazione degli assi e conclusioni

Prima di passare all'aspetto puramente analitico conviene visualizzare la situazione geometrica esaminando la Figura 8.6.



**Figura 8.5** – Esempio di ellisse canonica in un sistema di riferimento traslato.



**Figura 8.6** – Ellisse canonica in un sistema ruotato e traslato.

Si può pensare che l'ellisse  $\gamma$  di Figura 8.6 sia descritta da un'equazione come in (8.0.1), con  $a_{12} \neq 0$ . Ma, nel riferimento  $O'x''y''$ , l'equazione di  $\gamma$  sarà

$$(8.3.1) \quad \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1 \quad .$$

Il problema è quindi il seguente: individuare la roto-traslazione che consente di passare da (8.0.1) a (8.3.1). Per prima cosa bisogna individuare gli assi tratteggiati in Figura 8.6: ciò corrisponde a determinare il buon angolo di rotazione  $\theta$ , in modo che si azzeri il coefficiente  $a_{12}$ . Analiticamente, ciò significa costruire la *matrice ortogonale speciale*  $P$  (vedi capitolo 7) che diagonalizza la matrice simmetrica  $A$ . Fatto questo, si concluderà poi individuando la traslazione necessaria come spiegato nell'analisi del caso  $a_{12} = 0$ .

Illustriamo ora più dettagliatamente i passi del procedimento. Partendo da  $A$ , costruiamo la matrice di rotazione  $P \in \mathcal{SO}(2)$  tale che

$$(8.3.2) \quad {}^tP \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad ,$$

dove  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  sono gli autovalori (reali, ma non necessariamente distinti) di  $A$ . Ora effettuiamo il cambio di coordinate (8.1.2), la cui versione trasposta (usando  ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$ ) è

$$(8.3.3) \quad [x, y] = [x', y'] \cdot {}^tP \quad .$$

Sostituendo (8.1.2) e (8.3.3) nella (8.0.5) si ottiene che la parte quadratica dell'equazione diventa

$$(8.3.4) \quad [x', y'] \cdot {}^tP \cdot A \cdot P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = [x', y'] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \\ = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 \quad .$$

Completando poi la sostituzione si ottiene che ora la (8.0.1) equivale a:

$$(8.3.5) \quad \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a_{13}[\cos \theta x' - \sin \theta y'] + 2a_{23}[\sin \theta x' + \cos \theta y'] + a_{33} = 0 \quad .$$

Osserviamo che la (8.3.5) presenta  $a_{12} = 0$ : quindi si può completare lo studio col metodo di completamento dei quadrati che consente di determinare

l'eventuale traslazione necessaria.

Adesso è importante applicare il nostro lavoro teorico allo studio di un caso concreto.

▷ Esercizio 3 ◁

**Testo**

Studiare la conica  $\gamma$  definita da

$$(8.3.6) \quad 2x^2 + 4xy + 5y^2 + 4x + 13y - \frac{1}{4} = 0 \quad .$$

**Soluzione**

La matrice della conica  $\gamma$  è:

$$(8.3.7) \quad A' = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & \frac{13}{2} \\ 2 & \frac{13}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad .$$

Poiché  $\det A' \neq 0$ ,  $\gamma$  è non degenera. Dato che  $a_{12} = 2 \neq 0$ , dobbiamo operare una rotazione di assi diagonalizzando la matrice della parte quadratica di  $\gamma$ , cioè

$$(8.3.8) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad .$$

Svolgendo i calcoli secondo il procedimento illustrato nel capitolo 12 si trova che gli autovalori di  $A$  sono  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 6$ , e

$$(8.3.9) \quad {}^tP \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad ,$$

con

$$(8.3.10) \quad P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \quad .$$

Esplicitando il relativo cambio di coordinate (8.1.2) si ottiene

$$(8.3.11) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}[2x' + y'] \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}[-x' + 2y'] \end{cases} \quad .$$

Ora possiamo trasformare la (8.3.6) per esprimere  $\gamma$  in funzione delle coordinate  $x', y'$ . Senza calcoli, possiamo subito scrivere il risultato relativo alla parte quadratica, che è il seguente:

$$(8.3.12) \quad 2x^2 + 4xy + 5y^2 = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = x'^2 + 6y'^2 \quad .$$

Poi, usando (8.3.11) in (8.3.6), completiamo la trasformazione dell'equazione di  $\gamma$  ottenendo (verificarlo è utile)

$$(8.3.13) \quad x'^2 + 6y'^2 - \sqrt{5}x' + 6\sqrt{5}y' - \frac{1}{4} = 0 \quad .$$

Utilizzando ora il metodo di completamento dei quadrati in (8.3.13) possiamo determinare la traslazione conclusiva: l'equazione (8.3.13) di  $\gamma$  equivale a

$$(8.3.14) \quad \left[ x' - \frac{\sqrt{5}}{2} \right]^2 + 6 \left[ y' + \frac{\sqrt{5}}{2} \right]^2 = 9$$

o, ancora,

$$(8.3.15) \quad \frac{[x' - \frac{\sqrt{5}}{2}]^2}{3^2} + \frac{[y' + \frac{\sqrt{5}}{2}]^2}{(\sqrt{\frac{3}{2}})^2} = 1 \quad .$$

Ora si conclude introducendo le coordinate traslate

$$(8.3.16) \quad \begin{cases} x'' = x' - \frac{\sqrt{5}}{2} \\ y'' = y' + \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases} \quad .$$

Rispetto a queste coordinate l'equazione (8.3.15) di  $\gamma$  si presenta nella forma canonica richiesta:

$$(8.3.17) \quad \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1 \quad ,$$

con  $a = 3$ ,  $b = \sqrt{\frac{3}{2}}$ .

Concludiamo questo esercizio osservando che la trasformazione che lega le coordinate  $x, y$  di partenza alle coordinate finali  $x'', y''$  è la roto-traslazione

$$(8.3.18) \quad \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = {}^t P \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sqrt{5}/2 \\ -\sqrt{5}/2 \end{bmatrix} \quad ,$$

dove  $P$  è la matrice di rotazione (8.3.10).

□

▷ Esercizio 4 ◁

**Testo**

Studiare la conica  $\gamma$  definita da

$$(8.3.19) \quad 2x^2 - 4xy - y^2 - 4x + 10y - 13 = 0 \quad .$$

**Soluzione** (Traccia)

La conica  $\gamma$  è non degenere. Gli autovalori di  $A$  sono  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = -2$ . La rotazione diagonalizzante risulta essere

$$(8.3.20) \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad .$$

L'equazione finale di  $\gamma$  è

$$(8.3.21) \quad \frac{x''^2}{2^2} - \frac{y''^2}{(\sqrt{6})^2} = 1 \quad ,$$

ottenuta dopo la traslazione

$$(8.3.22) \quad \begin{cases} x'' = x' - \frac{3}{\sqrt{5}} \\ y'' = y' - \frac{4}{\sqrt{5}} \end{cases} \quad .$$

Da (8.3.21) vediamo che  $\gamma$  è un'iperbole.

□

▷ Esercizio 5 ◁

**Testo**

Studiare la conica  $\gamma$  definita da

$$(8.3.23) \quad 9x^2 + 24xy + 16y^2 - 20x + 15y = 0 \quad .$$

**Soluzione** (Traccia)

La conica  $\gamma$  è non degenere e risulta essere una parabola di equazione

$$(8.3.24) \quad x'^2 + y' = 0 \quad ,$$

dove le coordinate  $x', y'$  sono legate alle coordinate  $x, y$  di partenza dalla rotazione

$$(8.3.25) \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} .$$

□

I metodi fin qui illustrati consentono uno studio completo di qualunque conica. D'altra parte, è giusto segnalare che, in molte situazioni pratiche, l'esplicitazione della roto-traslazione che conduce alla forma canonica di  $\gamma$  può richiedere calcoli anche lunghi e complessi. Quindi, se si vuole ottenere solo un numero più limitato di informazioni su  $\gamma$  si può tenere conto di quanto segue:

(8.3.26) Supponiamo  $\det A' \neq 0$  (cioè,  $\gamma$  non degenere). Allora

- (i)  $\det A > 0 \Rightarrow \gamma$  è un'ellisse;
- (ii)  $\det A < 0 \Rightarrow \gamma$  è un'iperbole;
- (iii)  $\det A = 0 \Rightarrow \gamma$  è una parabola.

Si noti che le (8.3.26) sono una semplice conseguenza del fatto che  $\det A = \lambda_1 \lambda_2$ .

## 8.4 Quadriche

Le quadriche sono superfici in  $\mathbb{R}^3$  definite da un'equazione di secondo grado in  $x, y, z$ . Come per le coniche, è disponibile una teoria di riduzione a forma canonica basata sulla diagonalizzazione della matrice simmetrica, di ordine tre, associata alla parte quadratica dell'equazione. Concettualmente l'approccio è analogo a quello illustrato per le coniche e quindi omettiamo di descriverlo in dettaglio.

La forma canonica delle quadriche è una delle due seguenti ( $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ ):

$$(8.4.1) \quad \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = \delta \quad ;$$

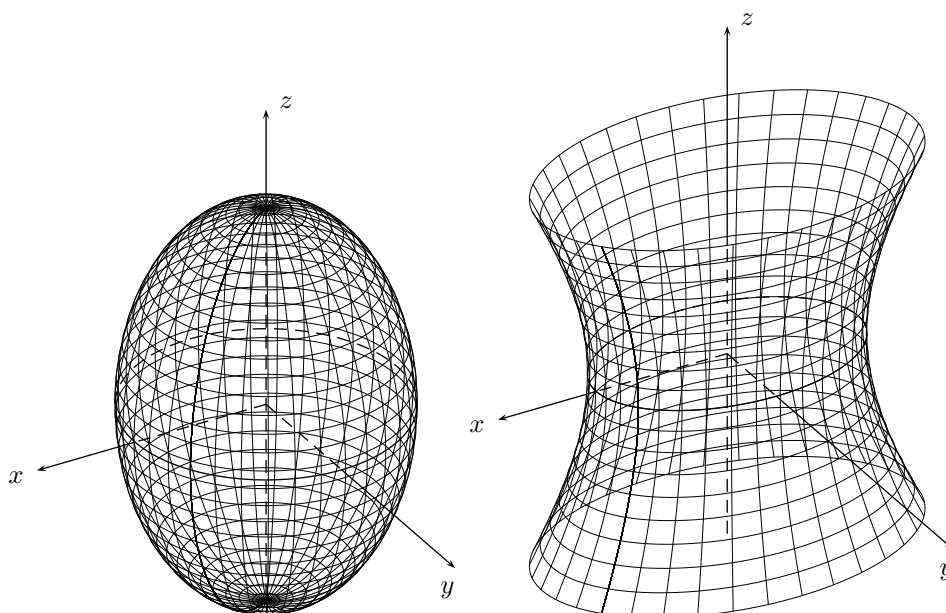
$$(8.4.2) \quad \alpha x^2 + \beta y^2 = 2\delta z \quad .$$



Se tutti i coefficienti in (8.4.1) o (8.4.2) sono non nulli, allora la quadrica è *non degenera*. Questa è la situazione geometricamente più interessante e ora presentiamo una breve illustrazione dei relativi casi, che sono:

$$(8.4.3) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (\text{ellissoide});$$

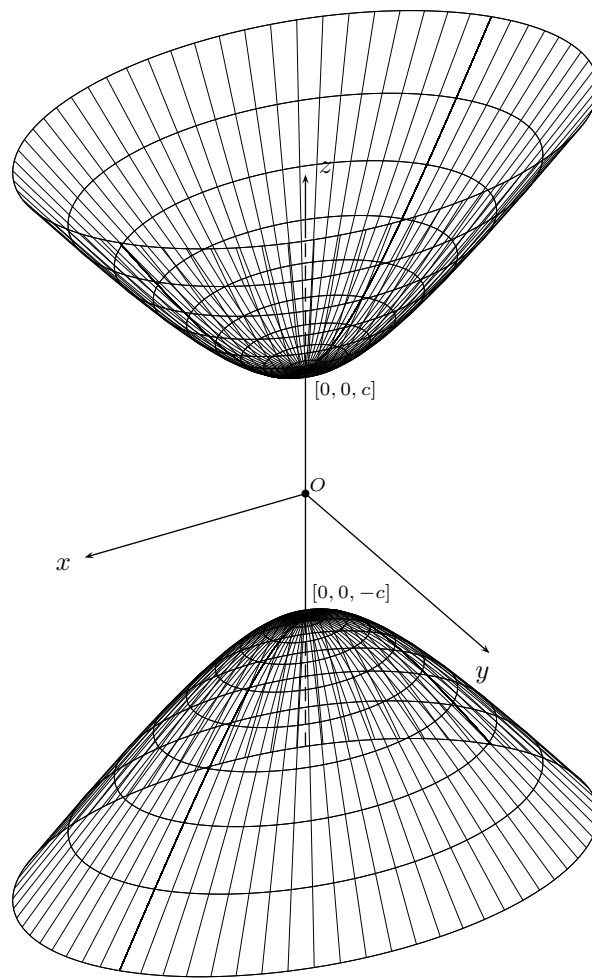
$$(8.4.4) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (\text{iperboloide a 1 falda});$$



**Figura 8.7** – Ellissoide di rotazione (*a sinistra*) e iperboloide a una falda (*a destra*).

Nella Figura 8.7 (*a sinistra*) è rappresentato un ellissoide di rotazione attorno all'asse  $z$  (con  $a = b$  e  $c > a$  in (8.4.3)). Nella Figura 8.7 (*a destra*) è invece raffigurata la regione di un iperboloide a una falda compresa tra due piani  $z \pm h$ . Si può notare che le intersezioni di questo iperboloide con i piani del tipo  $z = c$  sono ellissi, mentre le sue intersezioni con i piani  $x = c$  sono iperboli.

$$(8.4.5) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (\text{iperboloide a 2 falde}).$$



**Figura 8.8** – Iperboloide a due falde.

L'iperboloide a due falde è invece unione di due superfici disgiunte, come visualizzabile in Figura 8.8.

E poi, da (8.4.2),

$$(8.4.6) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \quad (\text{paraboloide ellittico});$$

$$(8.4.7) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \quad (\text{paraboloide iperbolico}).$$

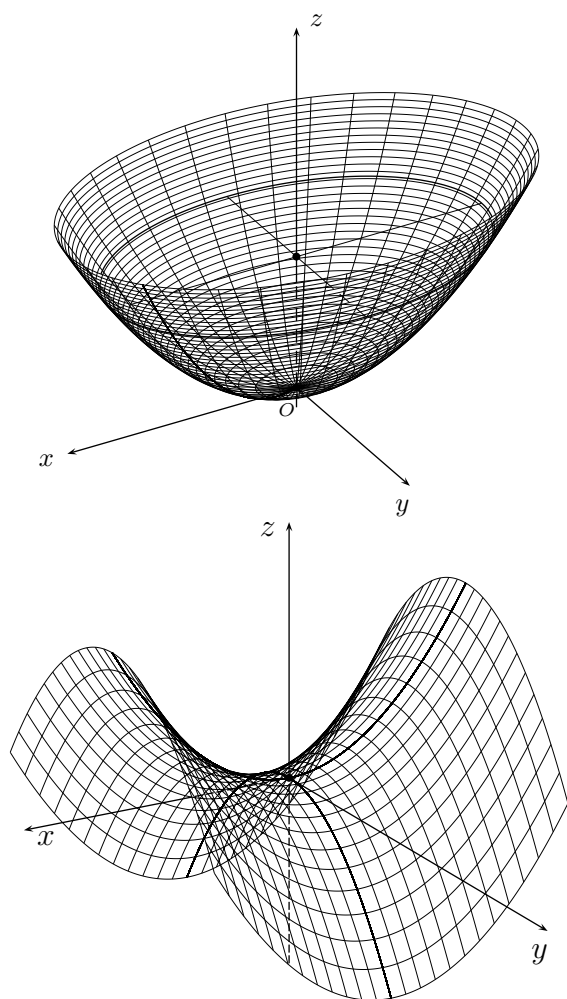
Il paraboloide ellittico è illustrato nella Figura 8.9 (*sopra*).

Le intersezioni del paraboloide ellittico con i piani  $z = c$  sono ellissi, mentre quelle con i piani del tipo  $x = c$  oppure  $y = c$  sono parabole.

Il paraboloide iperbolico, per la sua forma particolare, è anche detto *paraboloide a sella*. Una sua porzione è illustrata nella Figura 8.9 (*sotto*).

## 8.5 Considerazioni conclusive

Lo studio delle quadriche è, ovviamente, intimamente collegato a quello delle superfici in  $\mathbb{R}^3$ : ad esempio, l'iperboloide ad una falda è un esempio di *superficie rigata* (si veda [5]). Gli argomenti di questo capitolo sono ampiamente illustrati, ad esempio, in [6], [7] e [3].



**Figura 8.9** – Paraboloide ellittico (*sopra*) e paraboloide a sella (*sotto*).

# Bibliografia

- [1] M. Abate. *Geometria*. McGraw-Hill, 1996.
- [2] R. Betti. *Lezioni di geometria (1)*. Zanichelli, 2002.
- [3] R. Betti. *Lezioni di geometria (2)*. Zanichelli, 2002.
- [4] E. Cresci. *Le curve celebri. Invito alla storia della matematica attraverso le curve piane più affascinanti*. F. Muzzio Editore, 2006.
- [5] M.P. doCarmo. *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice Hall, 1976.
- [6] S. Greco e P. Valabrega. *Lezioni di geometria (1)*. Levrotto e Bella, 1999.
- [7] S. Greco e P. Valabrega. *Lezioni di geometria (2)*. Levrotto e Bella, 1999.
- [8] E. Giusti. *Piccola storia del calcolo infinitesimale dall'antichità al novecento*. Ist. Editoriali e Poligrafici, 2007.
- [9] L. Robbiano. *Algebra lineare: per tutti*. Springer Italia, 2006.

# Indice analitico

- algoritmo di Gauss, 149
- area di un parallelogramma, 15
- argomento di  $z$ , 53
- ascissa curvilinea, 100
- assi cartesiani, 5
- autospazio, 167
- autovalori, 167
- autovettori, 167
  
- base di un sottospazio vettoriale, 137
- base ortonormale, 154
  
- cambiamento di base (matrice del),  
165
- cerchio osculatore, 107
- cilindro, 121
- combinazione lineare, 136
- complemento algebrico, 77
- coniche, 194
- coniche in forma polare, 118
- coniugato di  $z \in \mathbb{C}$ , 49
- coordinate di un punto, 5
- coordinate polari, 53
- curvatura di una curva, 107
- curve in  $\mathbb{R}^3$ , 99
  
- determinante di matrici, 75
- diagonale principale, 67
- diagonalizzabilità (criterio di), 171
- diagonalizzazione (applicazioni), 199
- distanza tra due punti, 5
  
- disuguaglianza triangolare, 8
- divisione di polinomi, 58
  
- elica cilindrica, 100, 108, 109, 112
- ellissoide, 207
- equazione di un piano, 19
- esponenziale complesso, 53
  
- fascio di piani, 20, 29
- forma trigonometrica, 53
- formula di de Moivre, 54
- formule di Frenet, 111
  
- grafico di un campo scalare, 127
  
- incognite libere, 139, 142, 143
- indice di riga o colonna, 66
- indipendenza lineare, 137
- iperboloide, 207
  
- linee coordinate, 126
- lunghezza d'arco, 101
  
- matrice, 65
- matrice antisimmetrica, 95
- matrice completa, 142
- matrice dei coefficienti, 134
- matrice di rotazione, 177
- matrice diagonale, 74, 163
- matrice diagonalizzabile, 166
- matrice identità, 74
- matrice inversa, 81

matrice invertibile, 81  
 matrice ortogonale, 177  
 matrice quadrata di ordine  $n$ , 66  
 matrice simmetrica, 69  
 matrice trasposta, 68  
 matrice triangolare, 67  
 meridiani e paralleli, 123  
 metodo di Cramer generalizzato, 148  
 minore di ordine  $p$ , 84  
 modulo di un numero complesso, 49  
 molteplicità algebrica, 58, 167  
 molteplicità geometrica, 167  
  
 normale principale, 107  
 numeri complessi, 48  
  
 operazioni elementari, 88  
 orlare un minore, 86  
 ortonormalizzazione, 154  
  
 paraboloidi, 209  
 parametrizzazione di una superficie,  
 120  
 parte immaginaria di  $z \in \mathbb{C}$ , 49  
 parte reale di  $z \in \mathbb{C}$ , 49  
 piano osculatore, 110  
 piano tangente  $T_P S$ , 126  
 polinomio, 57  
 polinomio caratteristico, 167  
 prodotto di matrici, 71  
 prodotto misto, 16  
 prodotto scalare, 10, 71, 154  
 prodotto vettoriale, 14, 80  
 proiezione di un vettore, 12  
 punto medio, 5  
  
 quadriche, 195, 206  
  
 rango di una matrice, 84  
  
 rappresentazione parametrica, 24, 98  
 regola del parallelogramma, 8  
 retta in  $\mathbb{R}^3$ , 22  
 rette e sistemi lineari, 133  
 riparametrizzazione di curve, 102  
 rotazione degli assi, 176, 197  
 roto-traslazioni, 197  
  
 sfera, 21, 122  
 simbolo di Kronecker, 74  
 sistema lineare, 133  
 sistema lineare omogeneo, 134  
 sistemi lineari di Cramer, 145  
 sistemi lineari triangolari, 139  
 somma di matrici, 69  
 somma di vettori, 8  
 sottomatrice, 84  
 sottospazi vettoriali, 135  
 spazio vettoriale, 134  
 spirale di Archimede, 117  
 superfici di rotazione, 130  
 superfici in  $\mathbb{R}^3$ , 119  
  
 teorema di Binet, 91  
 teorema di Kronecker, 87  
 teorema di Laplace, 78  
 teorema di Rouché-Capelli, 143  
 teorema fondamentale dell'algebra, 59  
 termini noti, 134  
 terna destrorsa, 16  
 toro, 131  
 torsione, 110  
 trasformazioni elementari, 88  
 traslazione degli assi, 196  
 triedro di Frenet, 110  
  
 versore, 8  
 versore tangente, 106  
 vettore, 5

vettore direzionale, 19  
vettore nullo, 7, 135  
vettore tangente, 98  
vettore velocità, 98  
volume di un parallelepipedo, 17