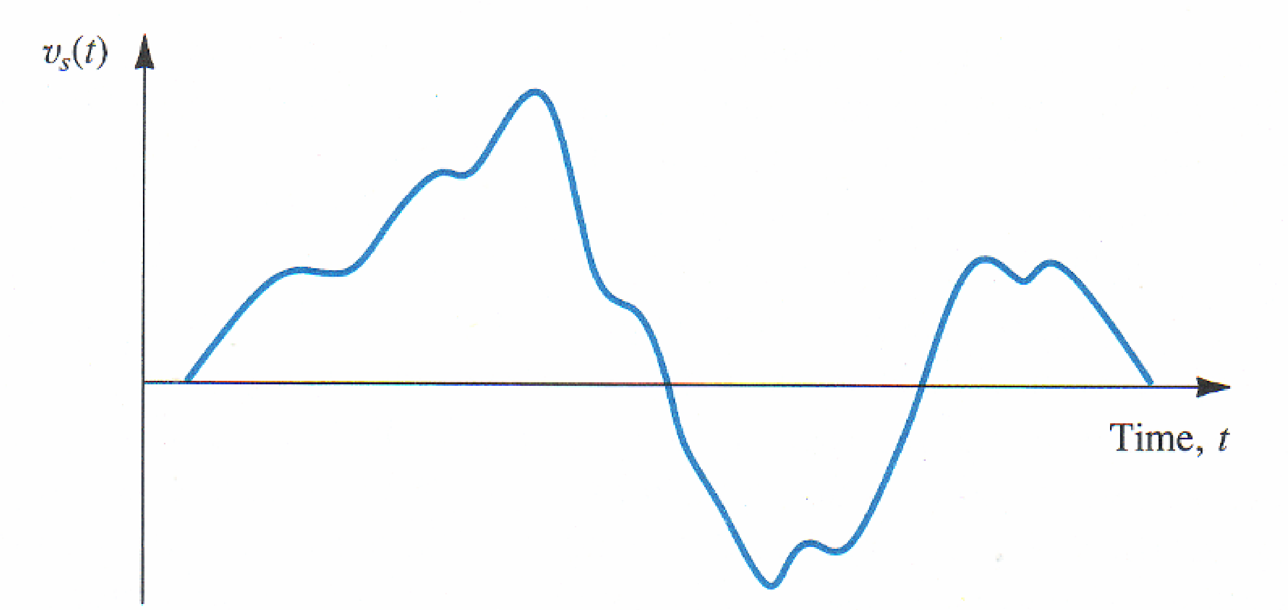
Progettazione elettronica Analogica

A.A. 2018/2019

Prof. Piero Cosseddu

Intro



Scopo del corso:

Capire come i segnai possono essere trattati

un trasduttore trasforma un segnale esterno (per esempio la voce) in un segnale elettrico, che deve poter essere poi elaborato e reso leggibile

Intro

Per essere leggibile dovrà essere ripulito

Filtrato, amplificato etc…

Può essere digitalizzato, ulteriormente trattato, trasferito e poi riconvertito in un qualcosa che un operatore può univocamente comprendere

Grafico, scala numerica, video, suono….etc

La base, ovviamente sono i circuiti, che devono aiutarci a svolgere queste funzioni

Tensioni e Correnti

Se consideriamo un circuito elettrico, normalmente NON SCORRE corrente

Perché?

Devo **creare una differenza di potenziale**, per esempio, devo avere uno strumento che crei tra due punti del circuito una differenza di potenziale.

Se ciò accade, induco un movimento di cariche

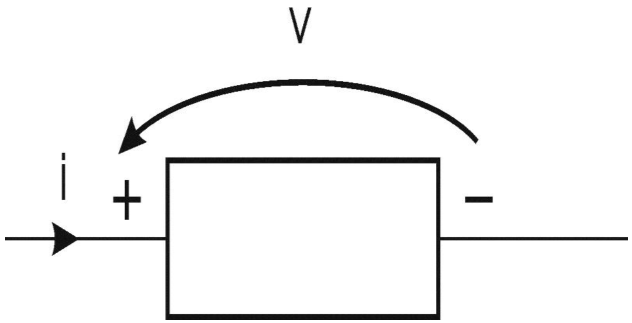
Un esempio utile può essere il considerare due contenitori collegati con un tubo

Se sono allo stesso livello, stessa energia potenziale gravitazionale, NON SCORRE acqua

Per far scorrere acqua devo creare un dislivello

Tensioni e Correnti

Che cosa si intende per tensione?



La tensione, o differenza di potenziale, può essere definita come la diminuzione di energia che subisce un'unità di carica quando viene portata dal terminale + al terminale – di un elemento

unità di misura: Volt, pari a Joule su Coulomb [V]=[J/C]

La tensione (o differenza di potenziale) può essere infatti di valore negativo.

Riassunto della puntata precedente

Che cosa si intende per corrente?

La corrente elettrica è un flusso di carica elettrica, tipicamente quantità di carica che attraversa la sezione del mio conduttore nell'unità di tempo.

La corrente è convenzionalmente definita come il **flusso di carica positiva**, anche se sappiamo, nel caso della conduzione metallica, che la corrente è causata dal flusso di elettroni con carica negativa nella direzione opposta.

L'unità di misura della corrente elettrica nel Sistema Internazionale è **l'Ampere (A)**, che equivale a Coulomb al secondo **([A]=[C/s]**).

Elementi circuitali: il Resistore

Ordini di grandezza

Nome	moltiplicatore	simbolo
Tera	10^{12}	T
Giga	10^{9}	G
Mega	10^{6}	M
Kilo	10^{3}	k
Milli	10^{-3}	m
Micro	10^{-6}	m
Nano	10^{-9}	n
Pico	10^{-12}	p
Femto	10^{-15}	f

Tensioni e Correnti

Devo creare una differenza di energia potenziale gravitazionale

Le molecole d'acqua si muoveranno verso il punto con minore energia potenziale, verso il basso.

Quanto velocemente dipende da come è fatto il tubo.

Quanto velocemente si muovono le cariche dipende da come è fatto il filo elettrico

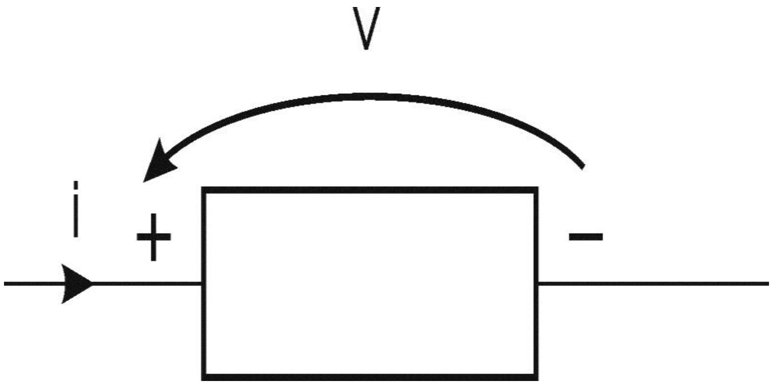
Materiale → resistività

Geometria → resistenza

Tensioni e Correnti - convenzioni

Se la corrente entra nel nodo 1 e esce nel nodo 2

La tensione punta da nodo 2 a nodo 1



Casa significa?

Il potenziale del nodo 1 è maggiore del potenziale del nodo 2

In quel tratto ho perso, dissipato, energia

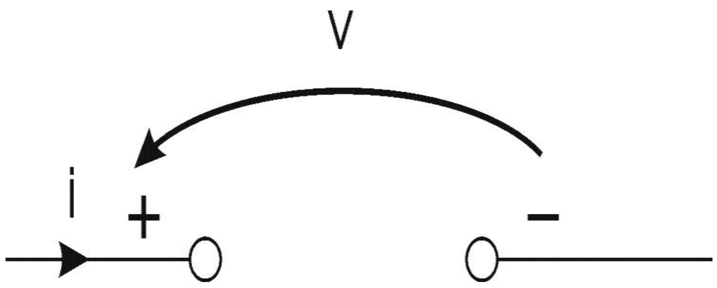
Come?

Per esempio sotto forma di calore

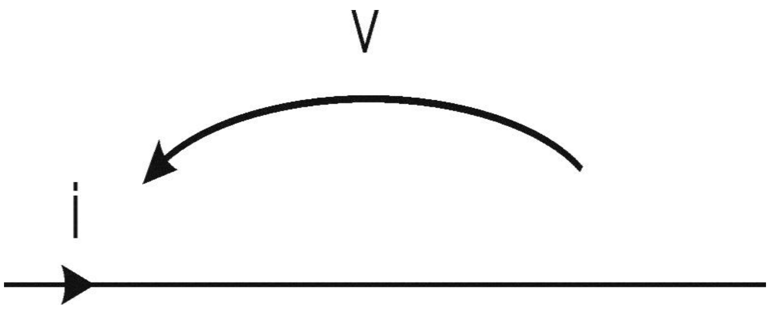
Elementi circuitali: il Resistore

Circuito Aperto e Corto Circuito

$R = \infty \Omega$



$R = 0\ \Omega$



Tensioni e Correnti - convenzioni

Dobbiamo stabilire delle convenzioni.

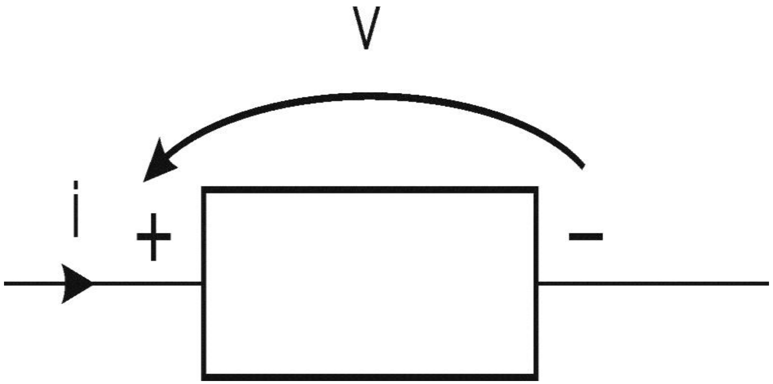
Cosa è un nodo?

Il nodo è un punto del circuito in cui convergono più rami

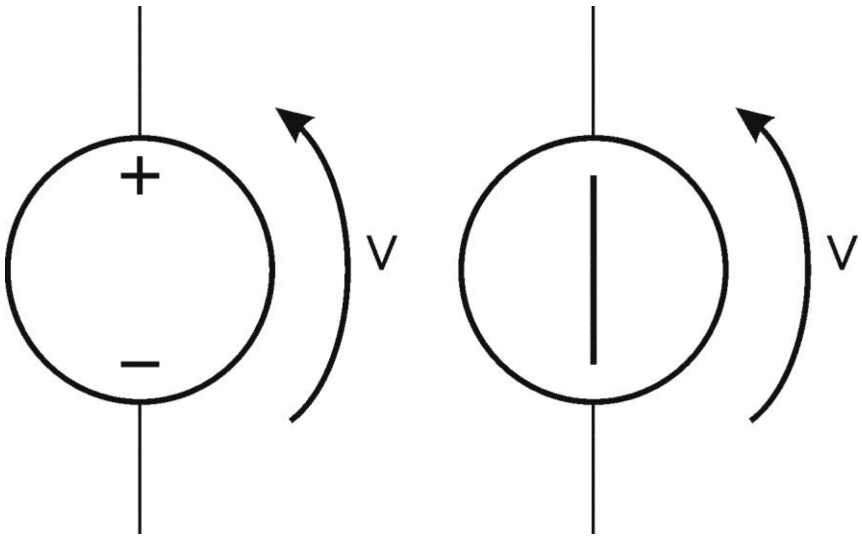
Convenzione degli utilizzatori

Vale per tutti i componenti passivi, ovvero per quei componenti che dissipano energia

Se la corrente entra in un nodo, la tensione punta verso quel nodo!

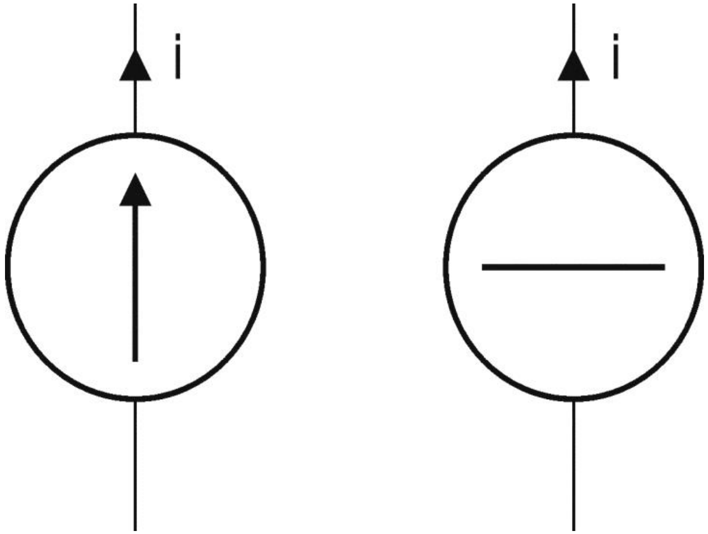


Elementi circuitali: il Generatore di Tensione



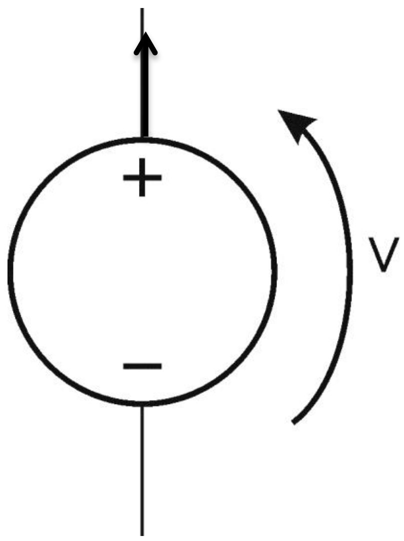
Un generatore di tensione ideale è un componente ai cui capi è sempre presente la tensione nominale, qualunque sia il carico collegato.

Elementi circuitali: il Generatore di Corrente



Un generatore di tensione ideale è un componente che è in grado di erogare una corrente nominale, costante, qualunque sia il carico collegato.

Tensioni e Correnti - convenzioni



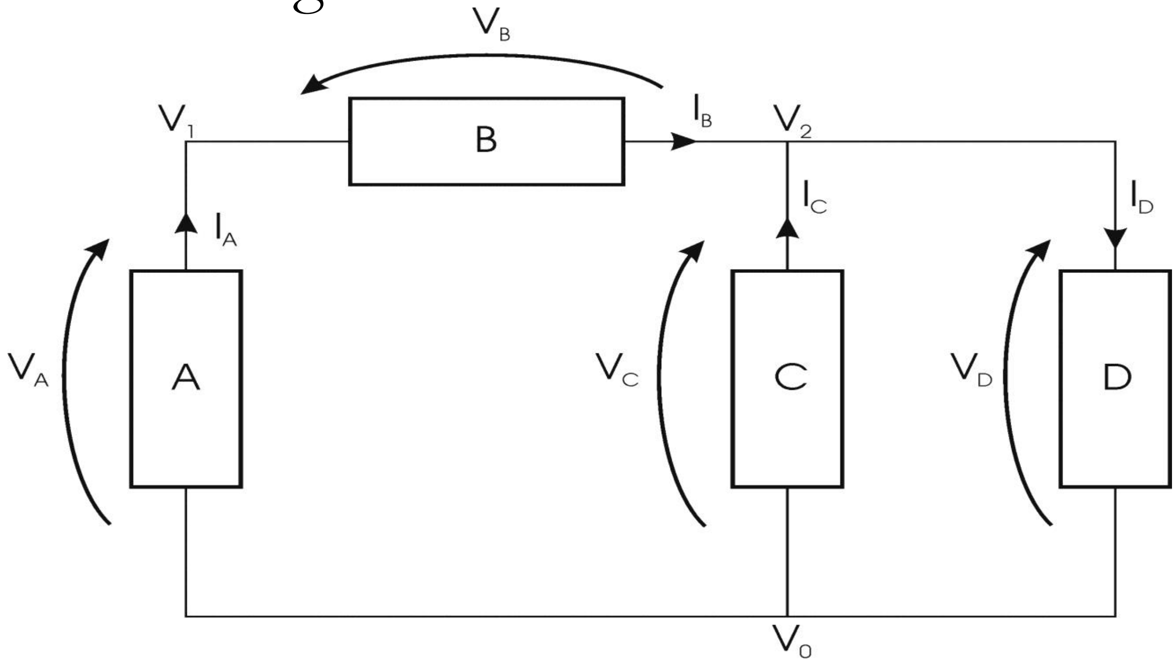
Secondo la convenzione dei generatori, la corrente positiva se esce dal morsetto ad un potenziale maggiore, indicato col + e entra nel morsetto ad un potenziale inferiore, indicato con il -

Le leggi di Kirchhoff

Leggi di Kirchhoff

- Cosa è un nodo?

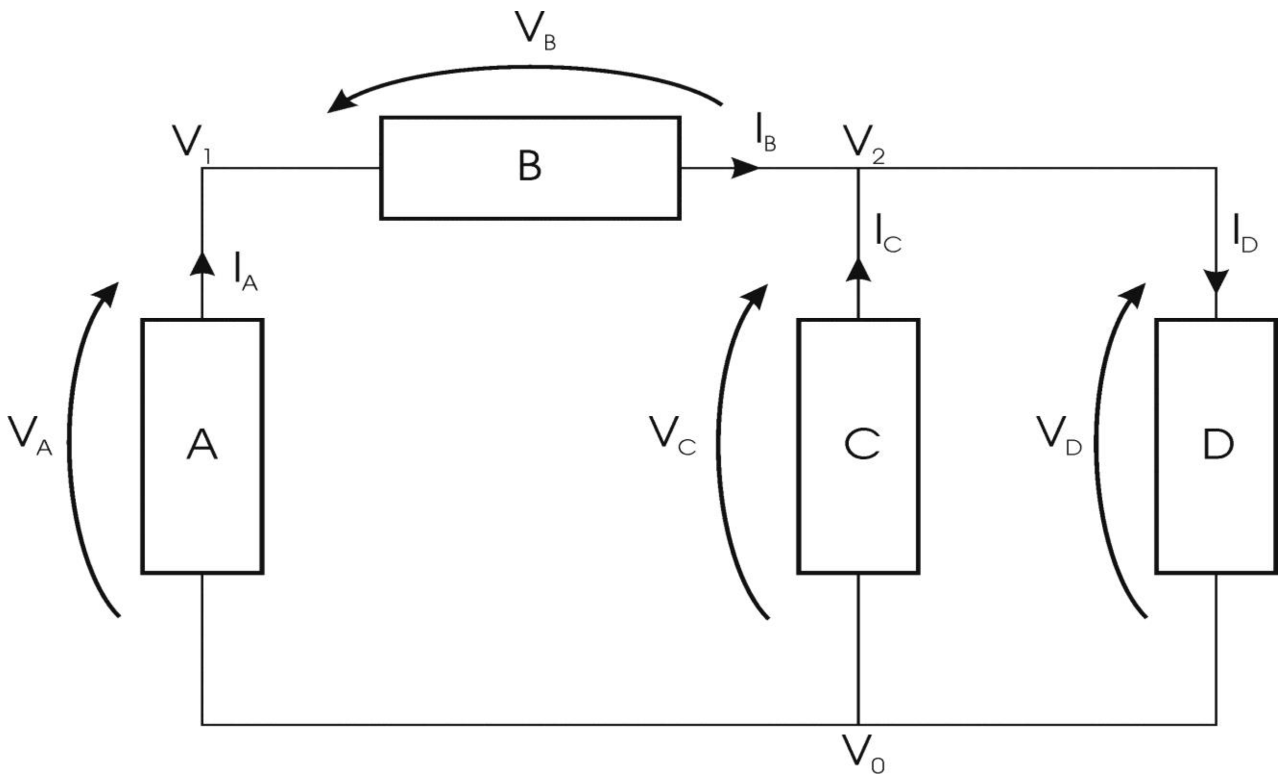
- Cosa è una maglia?



- Il nodo è un punto del circuito in cui convergono più di due rami
- Una maglia è un percorso chiuso di una rete elettrica che, partendo da un nodo, torna al nodo stesso senza attraversare uno stesso ramo due volte

Leggi di Kirchhoff

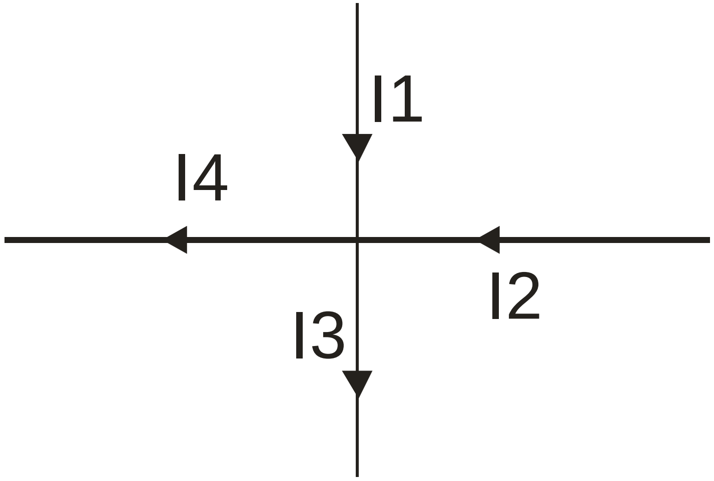
- Quanti nodi e quante maglia ci sono in questo circuito?



- Se ho due elementi in serie, tra di loro NON c'è un nodo!

Prima legge di Kirchhoff – Legge sulle correnti in un nodo (KCL)

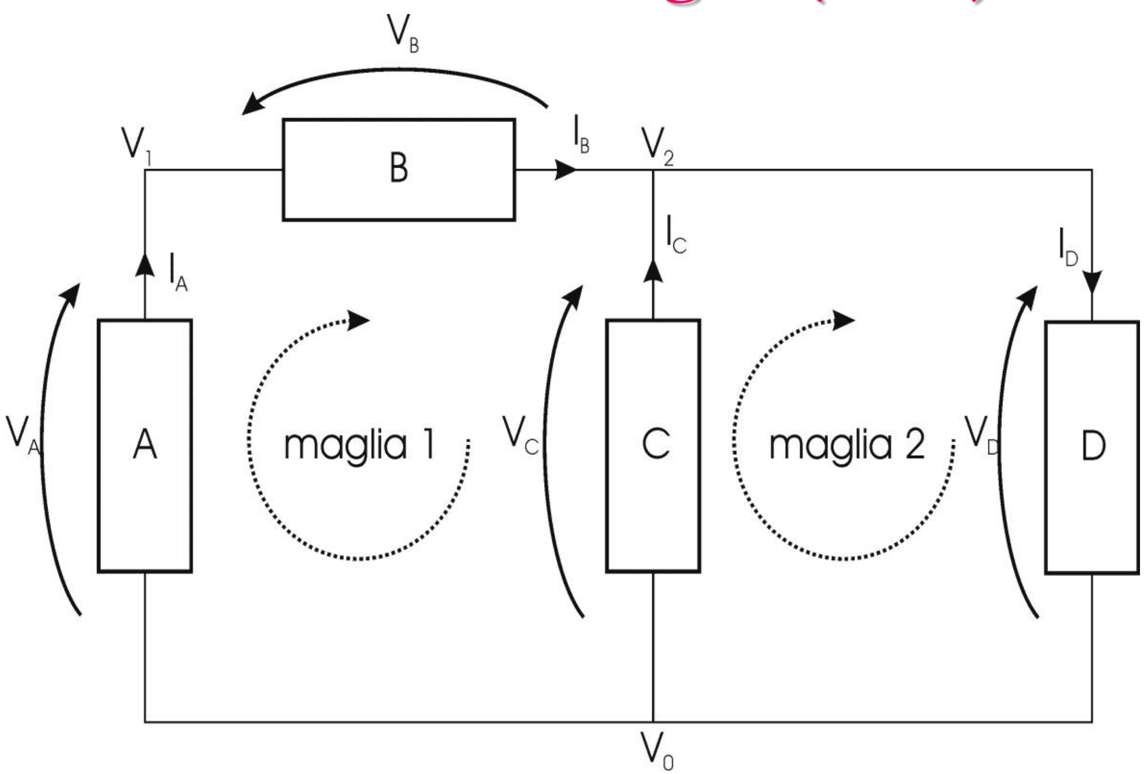
Il primo principio di Kirchhoff sulle correnti dice che **la somma algebrica delle correnti ad un nodo è nulla.**
Per somma algebrica si intende che vengono considerate positive le correnti entranti e negative quelle uscenti (o viceversa, è una convenzione, se uso una o l'altra il risultato NON CAMBIA)



$$I1+I2-I3-I4=0$$

Seconda legge di Kirchhoff

Legge delle tensioni in una maglia (KVL)



La legge di Kirchhoff sulle tensioni dimostra che, in condizioni stazionarie, la somma algebrica delle differenze di potenziale sui lati di una maglia è pari a zero

Leggi di Kirchhoff

Se due elementi sono in serie (condividono in maniera esclusiva un terminale) vengono attraversati dalla stessa corrente

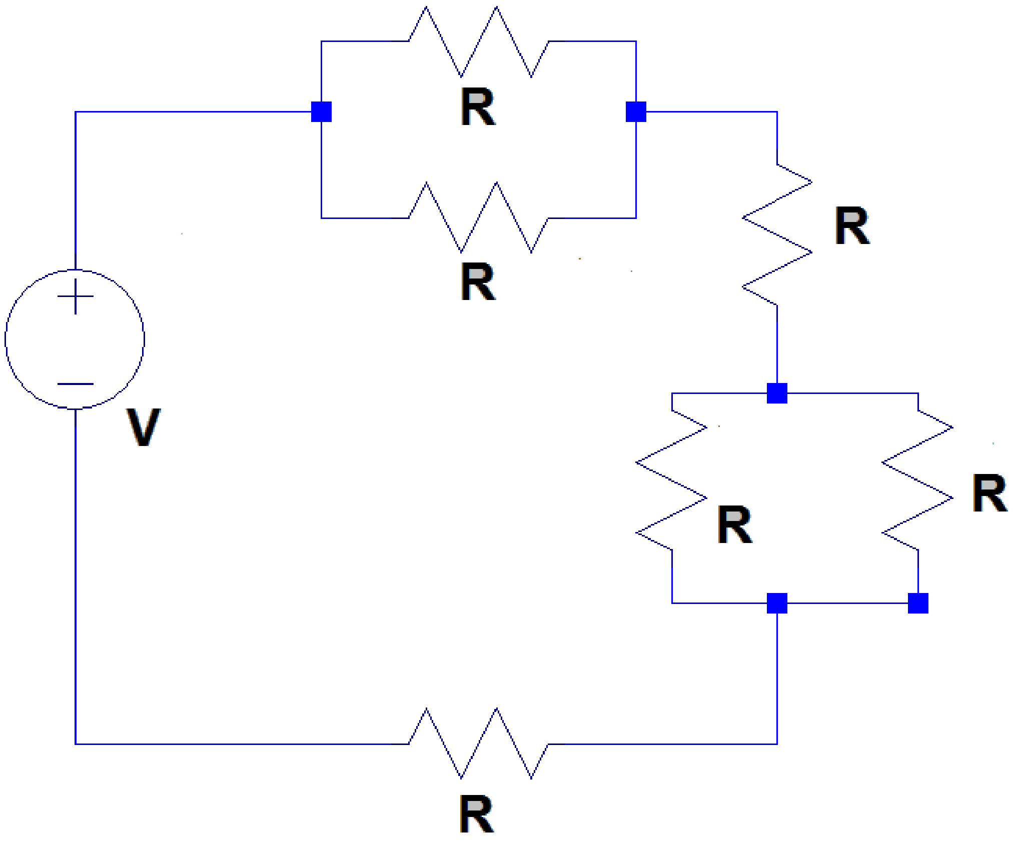
Se due elementi sono in parallelo (condividono entrambi i terminali) ai loro capi cade la stessa differenza di potenziale

Vediamo qualche esempio

Esercizio

Consideriamo questo circuito:

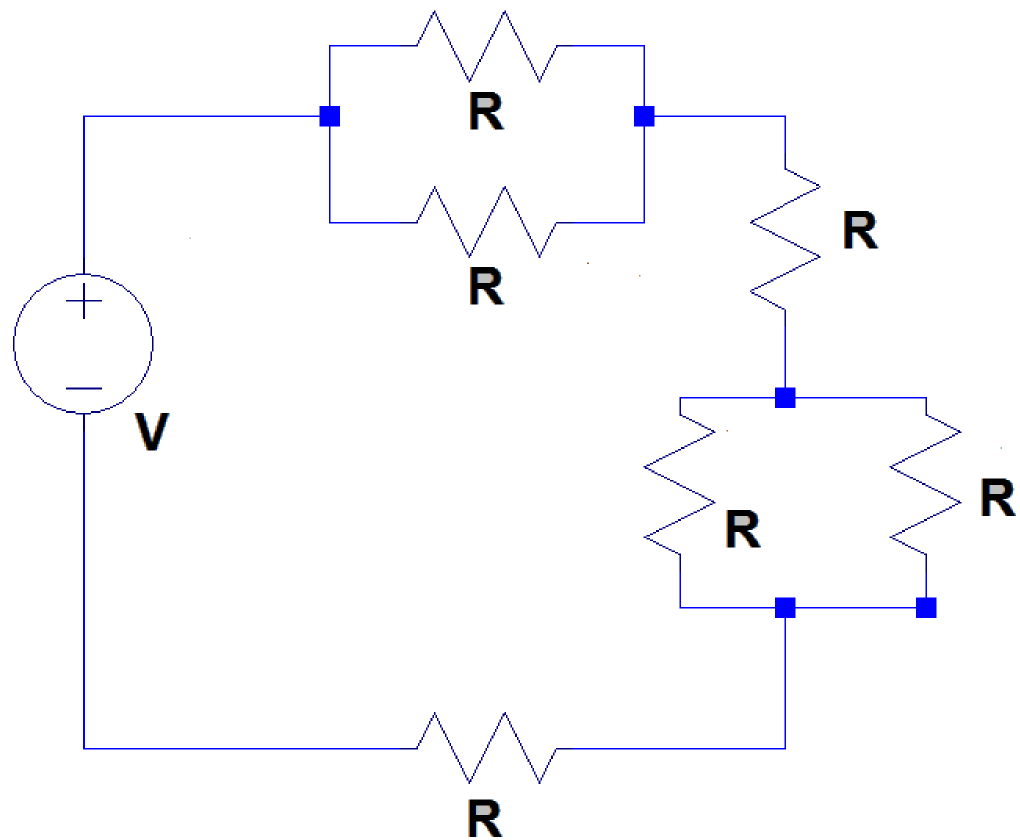
V= 12 V



Supponiamo che tutte le R siano uguali, determinare la V_R in basso e la R eq del circuito

Esercizio

Consideriamo questo circuito:



V= 12 V

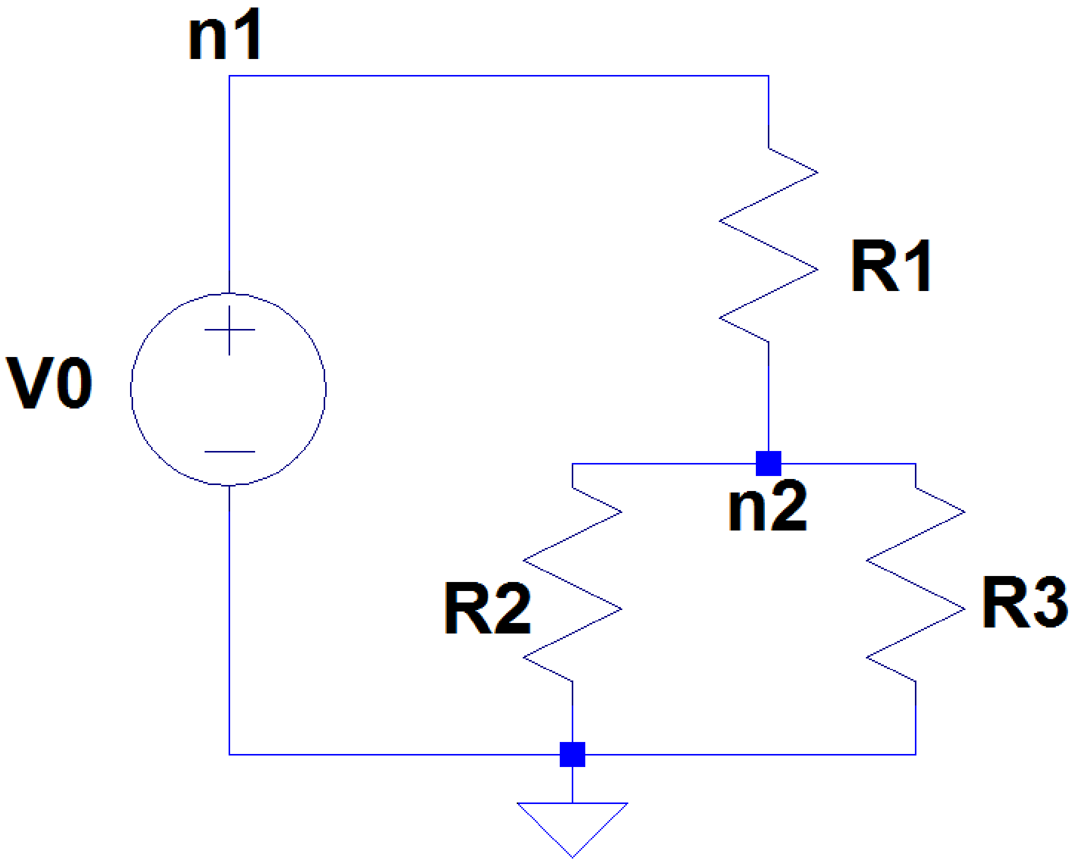
Come posso modificare le R per fare in modo che quella tensione valga 4V?

Supponiamo che tutte le R1=R4= 1MOhm siano uguali, e Rout= 1kOhm

Vediamo due soluzioni

Esercizio

Riprendiamo in considerazione questo circuito:

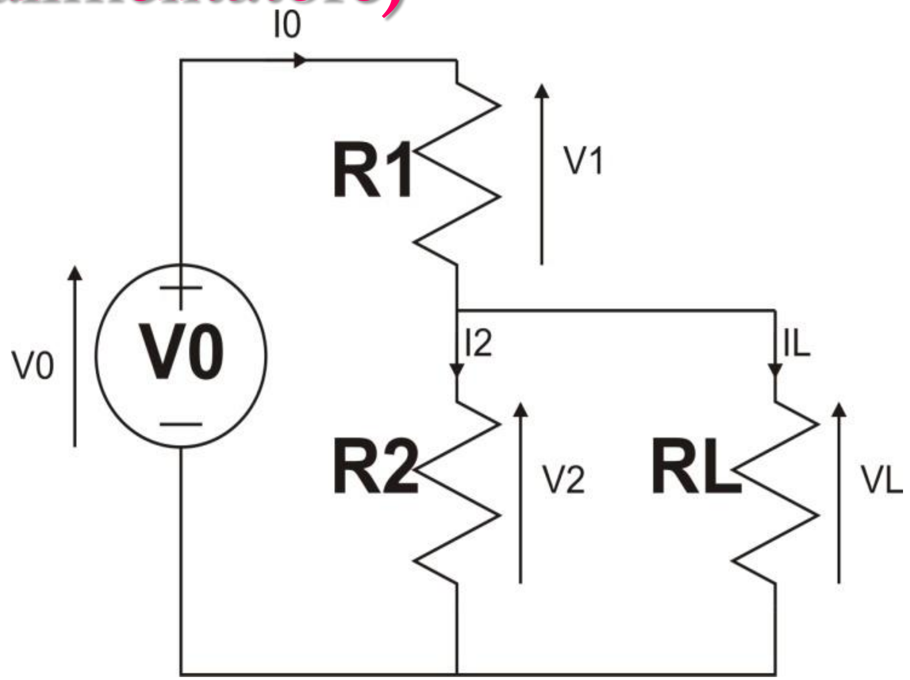


Esempi

A noi però interessa progettare!

Per esempio, potrebbe servirci, partendo da una determinata alimentazione, che sarà imposta dal generatore di tensione del nostro circuito

- **alimentare una parte del circuito (un carico)**,
- **con una determinata tensione (differente da quella fornita dall'alimentatore)**



Esempi

Si supponga, per esempio, di dover alimentare un circuito a 3 volt e di avere a disposizione una pila da 9 volt.

Basterebbe scegliere R1 pari al doppio di R2

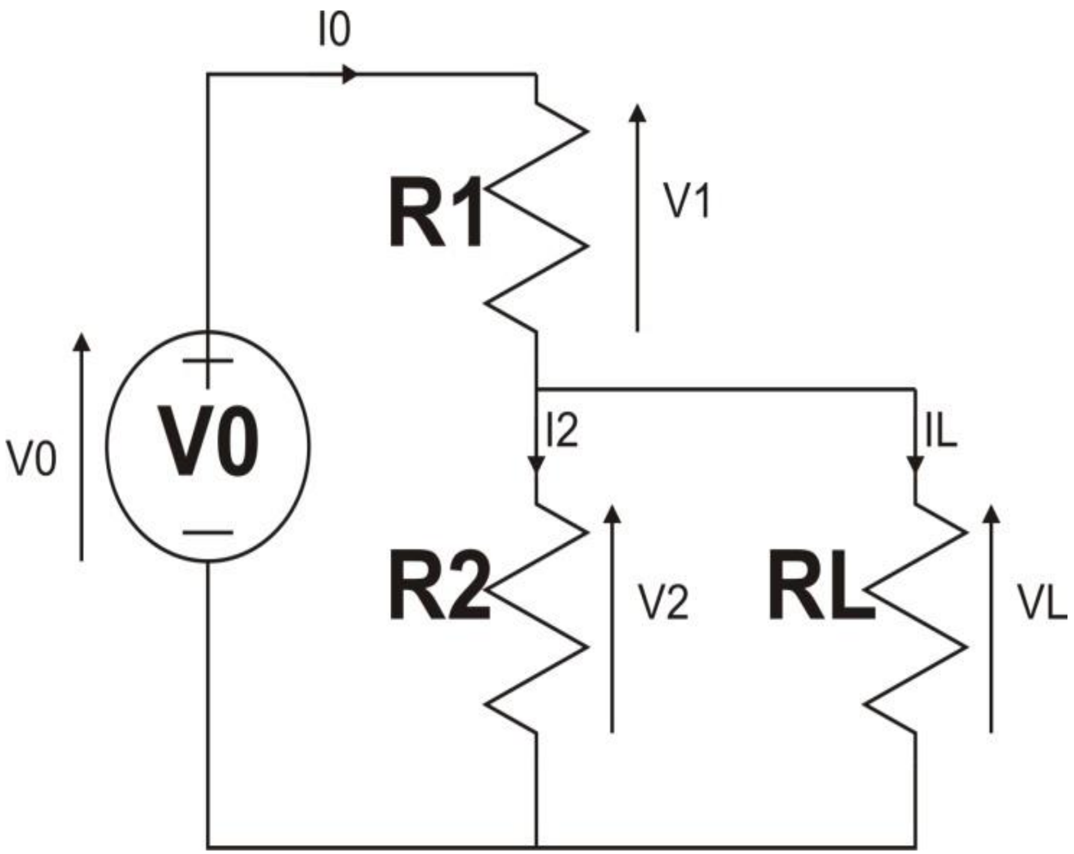
Quale valore di resistenza deve avere?

In teoria qualsiasi, però occorre ricordarsi che la resistenza del carico R_L, influenzerà come la tensione si distribuisce nel circuito!

$R_2 << R_L$

Di modo che nel parallelo R2//RL, quest'ultima possa essere trascurata!

Esempi



Proviamo a fare qualche esempio numerico per capire meglio

Supponiamo che R_L = 1 MOhm

Esempi

$$V_2 = V_0 \frac{R_2 // R_L}{R_1 + R_2 // R_L}$$

$R_1 = 2R$, $R_2 = R$

$$V_2 = V_0 \frac{\dfrac{R_2 R_L}{R_2 + R_L}}{R_1 + \dfrac{R_2 R_L}{R_2 + R_L}} = V_0 \frac{R_2 R_L}{R_1 R_2 + R_1 R_L + R_2 R_L}$$

$$V_2 = V_0 \frac{R_2 R_L}{R_1 R_2 + R_1 R_L + R_2 R_L} = V_0 \frac{R R_L}{2R^2 + 2R R_L + R R_L} = V_0 \frac{R_L}{2R + 3R_L} = V_0 \frac{1}{3 + 2\dfrac{R}{R_L}}$$

Il denominatore deve essere circa pari a 3, basterebbe quindi, come detto che $R_L >> R$

Attenzione!
Uno potrebbe pensare che diminuendo molto R ottengo un risultato migliore → SBAGLIATO perché?

Esempi

La corrente I_0 che scorre nella maglia dipende da R!!!

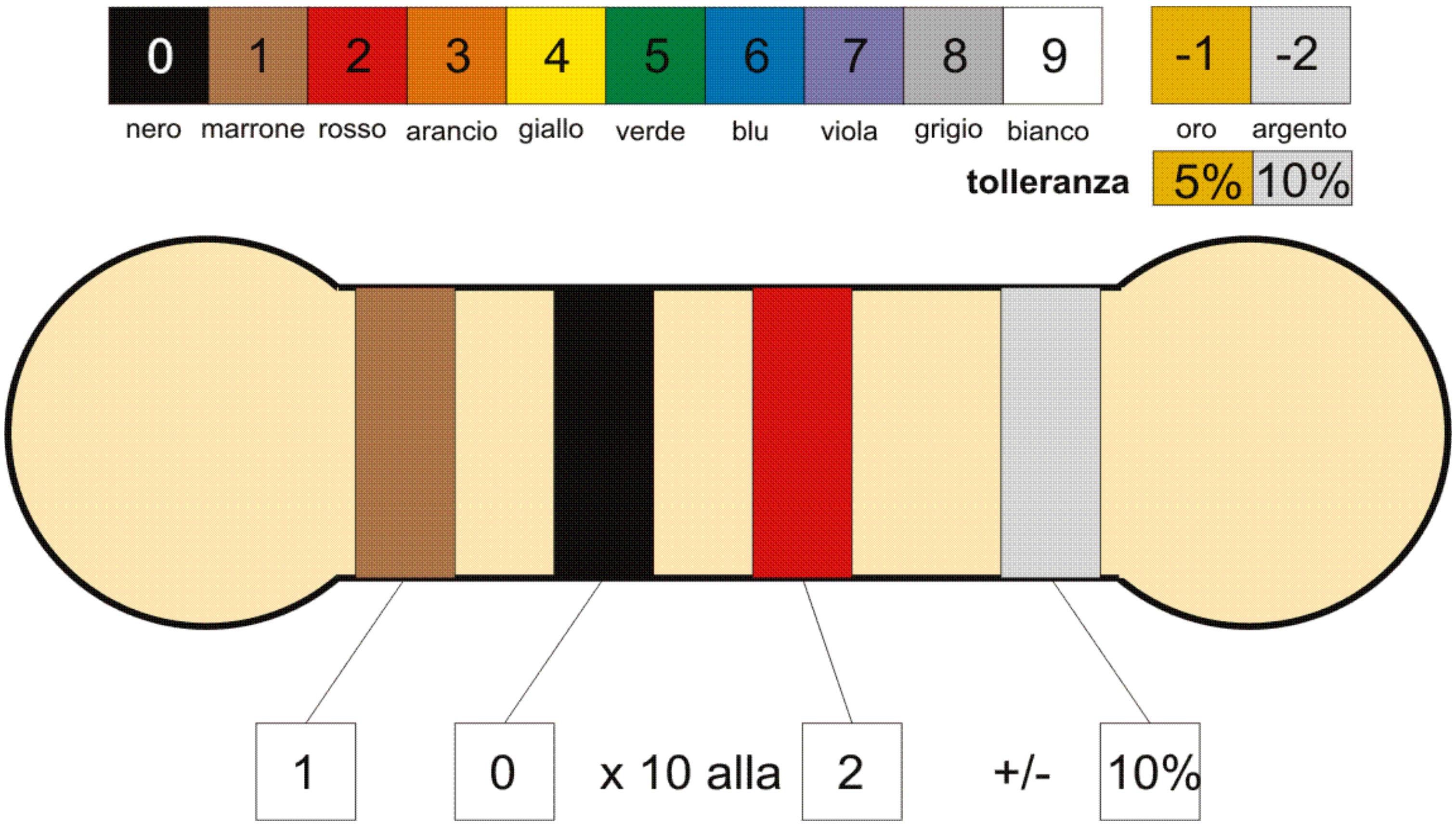
Se diminuisco troppo R, la corrente I_0 che scorre nella maglia sarebbe troppo elevata!

Quale sarebbe la conseguenza?

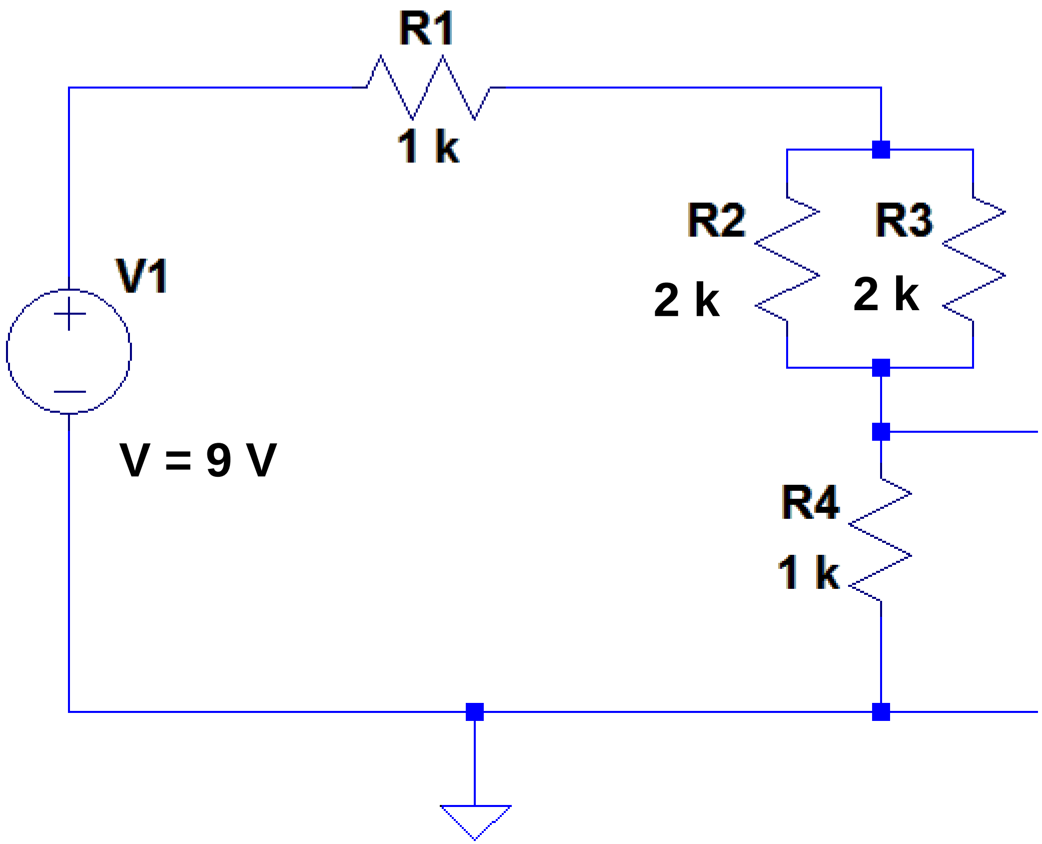
Se ho una pila come generatore di tensione, la sua durata dipende dalla corrente fornita al circuito

Maggiore è la corrente, minore è la durata della pila!

Resistenze Reali, tolleranza



Il resistore disegnato in figura avrà quindi un valore di resistenza di 1000 ohm, con una **tolleranza del 10%**, cioè di 100 ohm, quindi potrà avere (a seconda delle caratteristiche del processo di fabbricazione) un **valore compreso tra 900 e 1100 ohm**



Determinare la tensione ai capi del resistore R4

Generatore di tensione e corrente reale

Generatore di tensione e corrente reale

Nella realtà i generatori si comportano in maniera differente rispetto a quanto visto

Facciamo un esempio pratico, provate ad accendere la vostra macchina con delle batterie stilo

Batteria stilo → 1.5 V
Batteria Auto → 12 V

Uso batterie stilo, ma ovviamente l'auto non si accende, perchè?

Generatore di tensione e corrente reale

Perché quella batteria non è in grado di alimentare quel carico!

In sostanza, **sto richiedendo** al mio alimentatore la stessa tensione, ma **molta più corrente**

Se la mia batteria non può fornirmi corrente a sufficienza, la macchina non parte!

Nella realtà i generatori di tensione vengono modellati come un **generatore ideale con in serie una resistenza, R_S**

generalmente R_S è piccola, perché, quando attraversata da corrente deve produrre una caduta di tensione piccola

Generatore di tensione e corrente reale

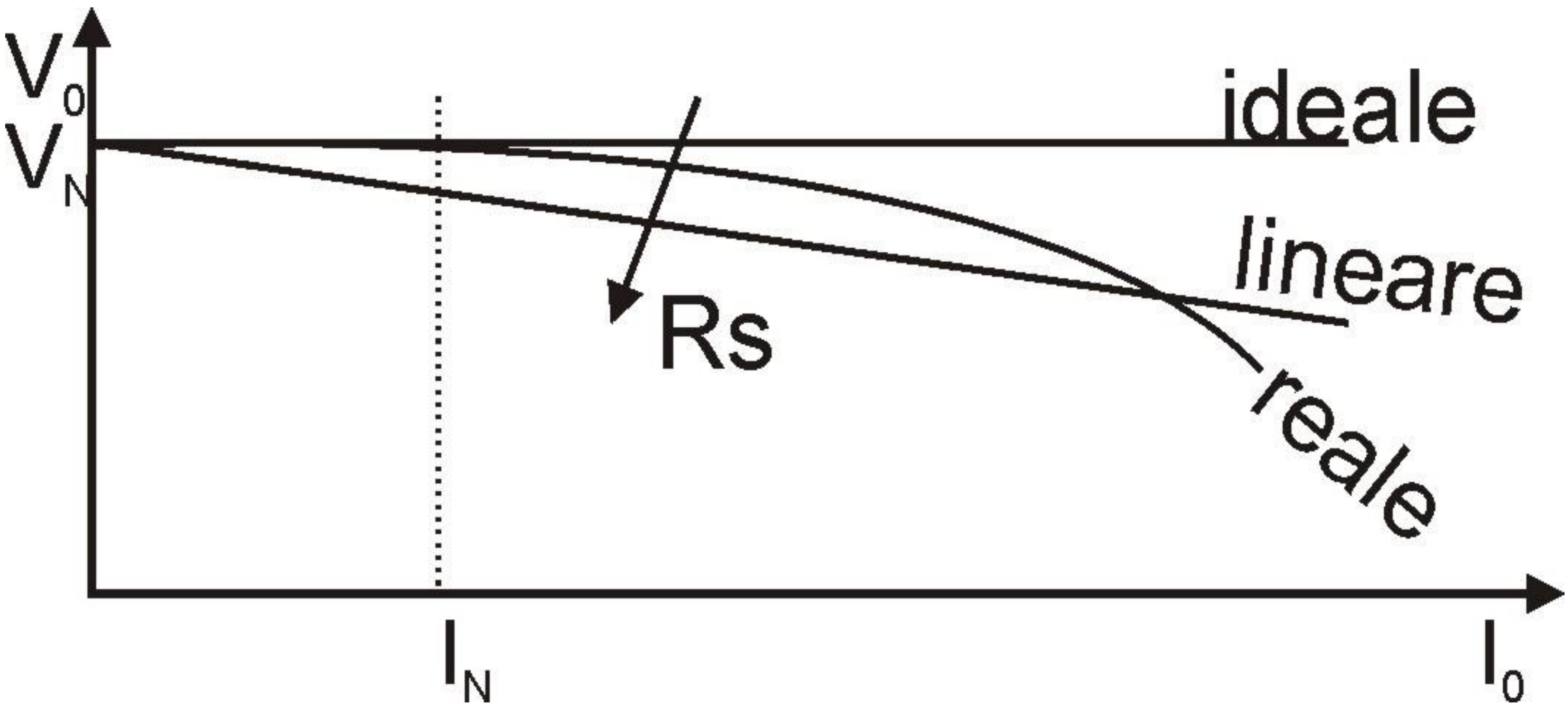
Se però la corrente che viene richiesta al generatore è troppo elevata, la **caduta di tensione** che sempre uguale a **RxI** può diventare confrontabile con quella nominale dell'alimentatore

Risultato

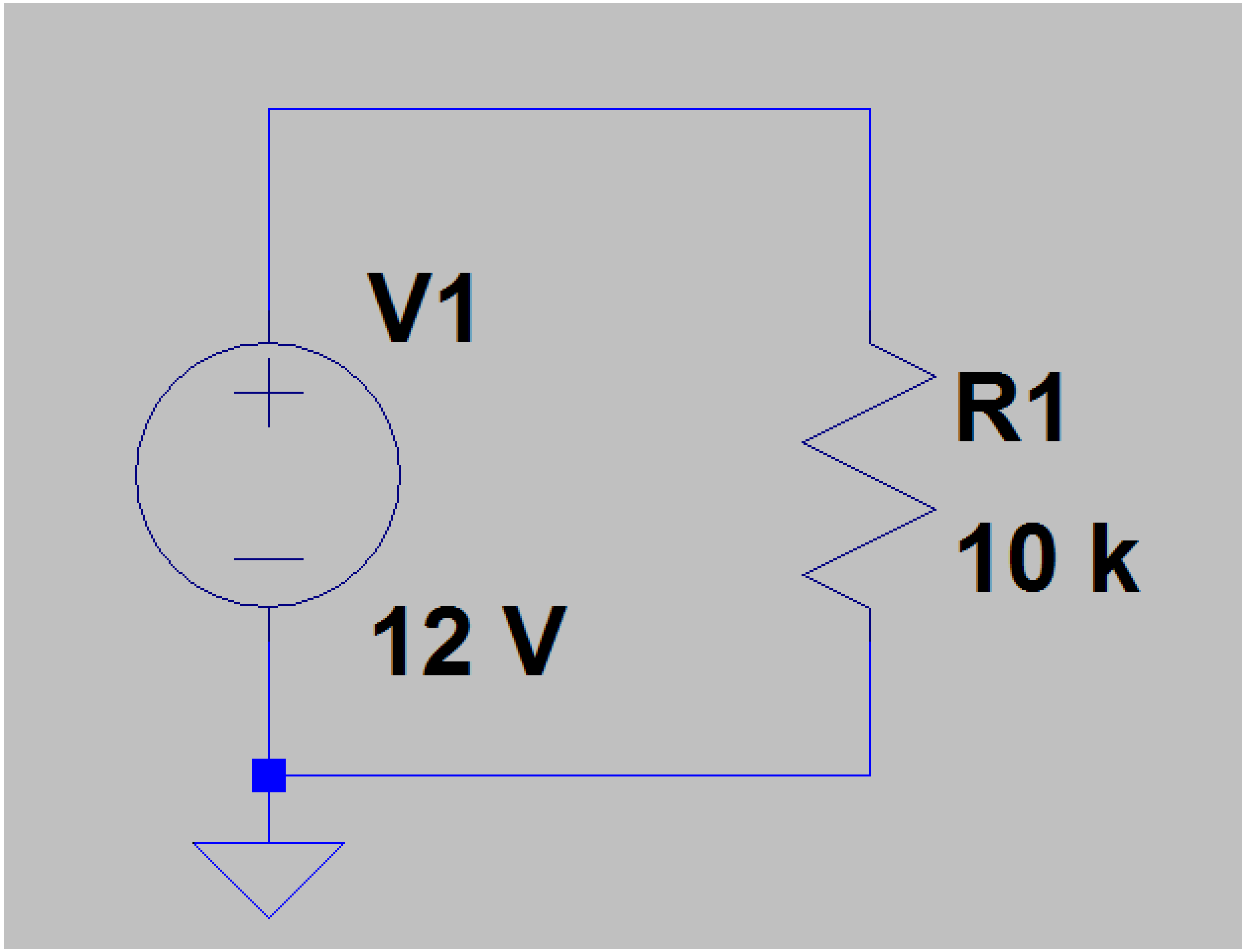
Non ho più a disposizione la tensione nominale, ma una molto più bassa

N.B.
È un modello, ovvero un modo per descrivere fisicamente un fenomeno sperimentale

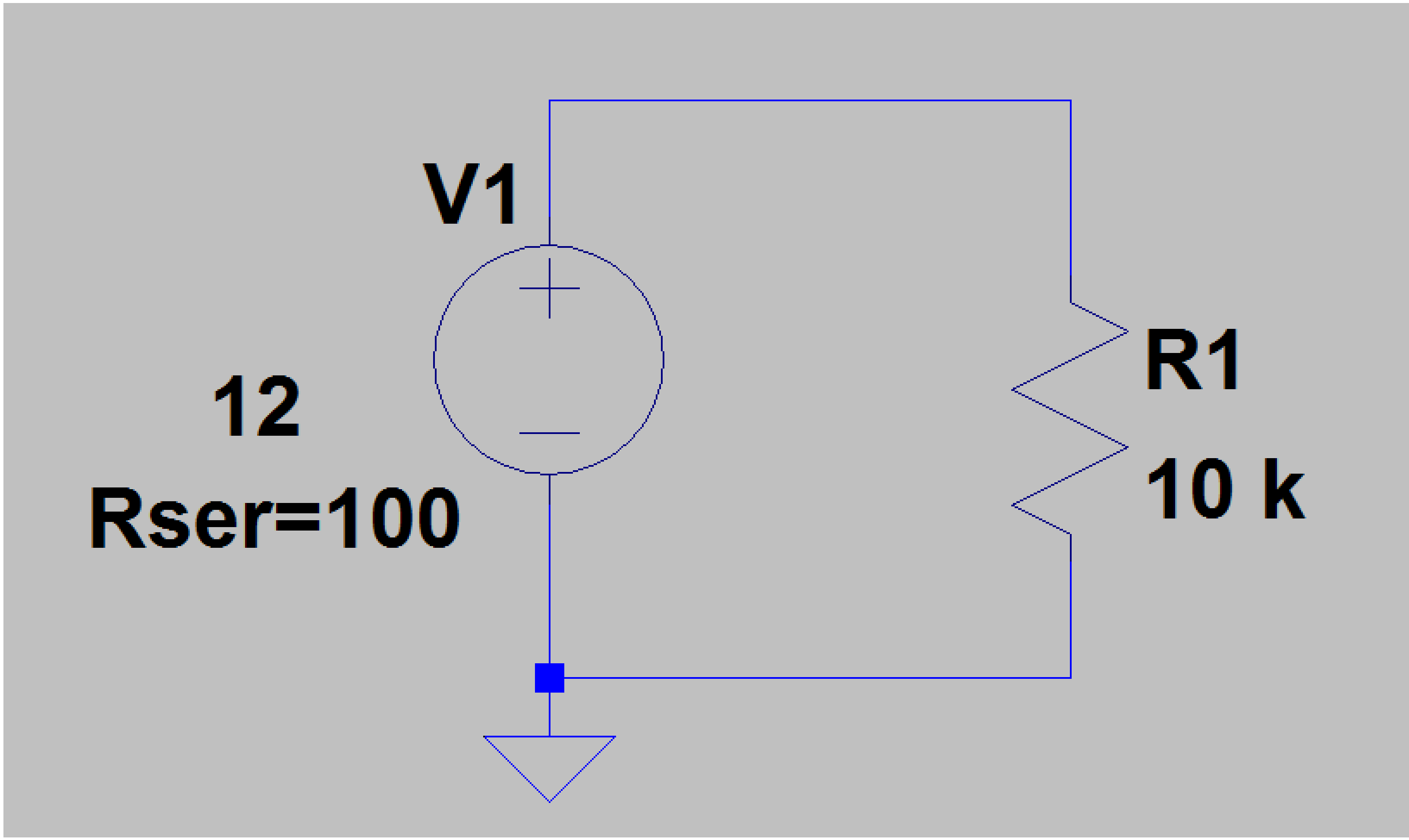
Generatore di tensione reale



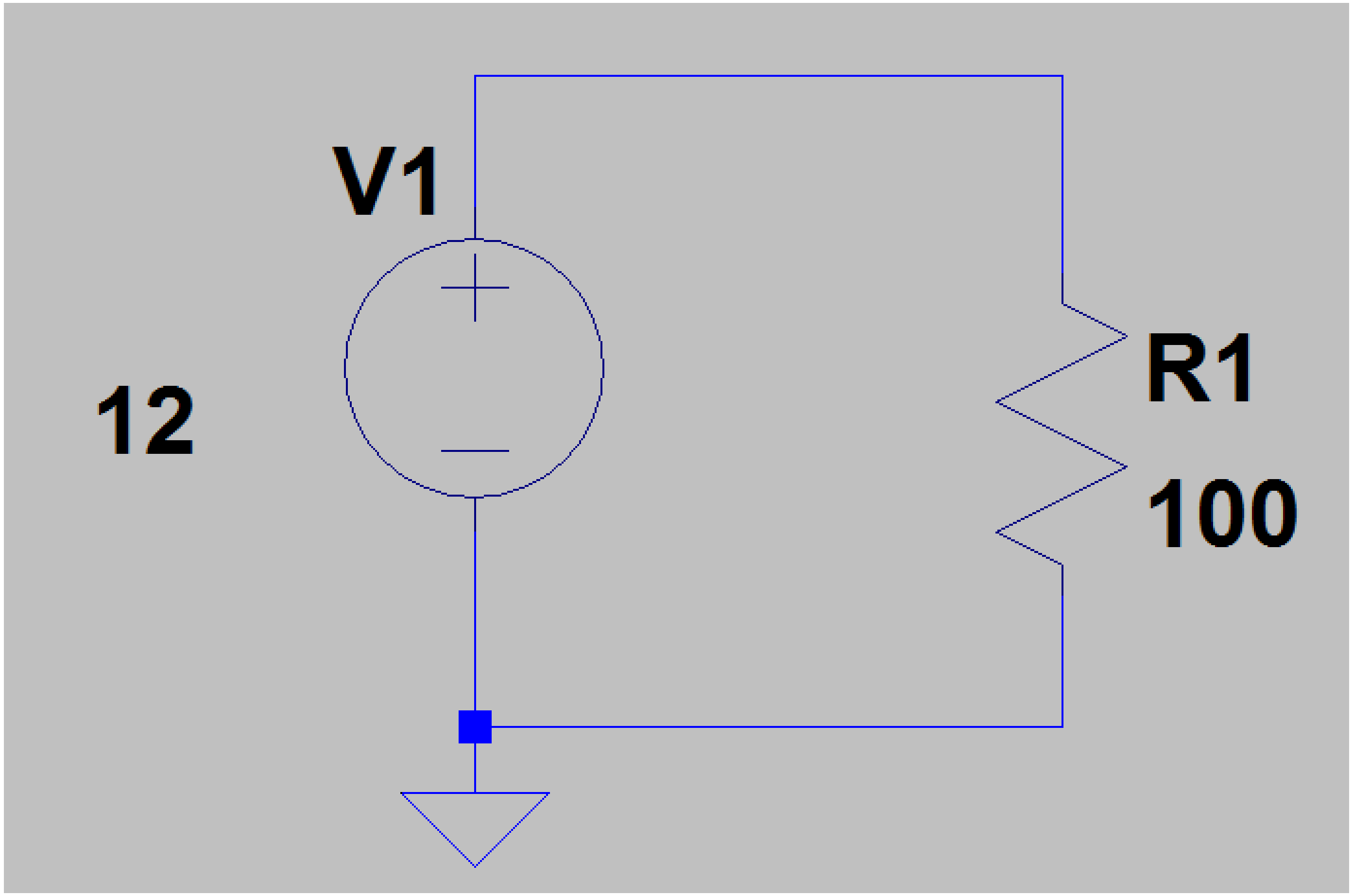
Esercizio



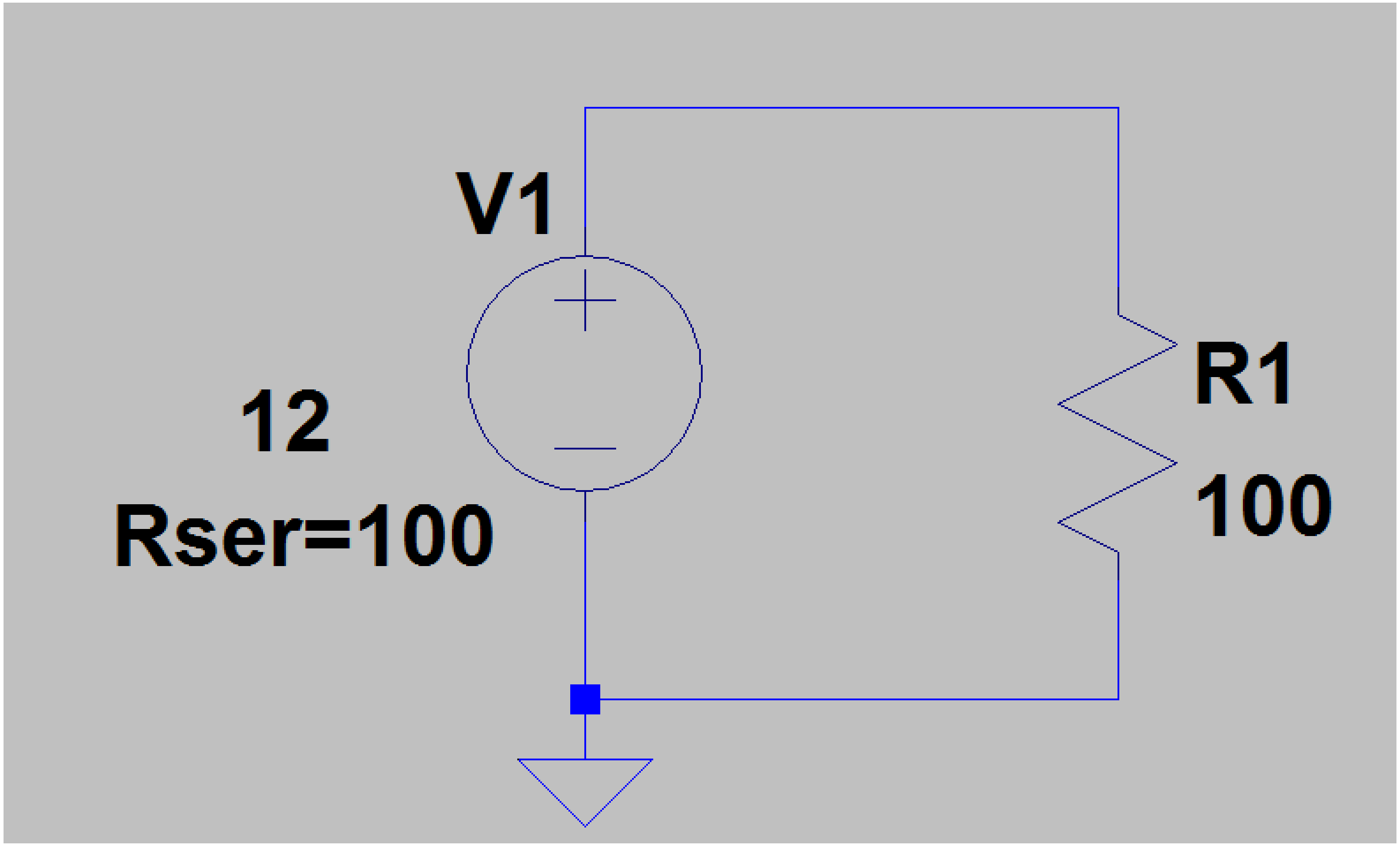
Esercizio



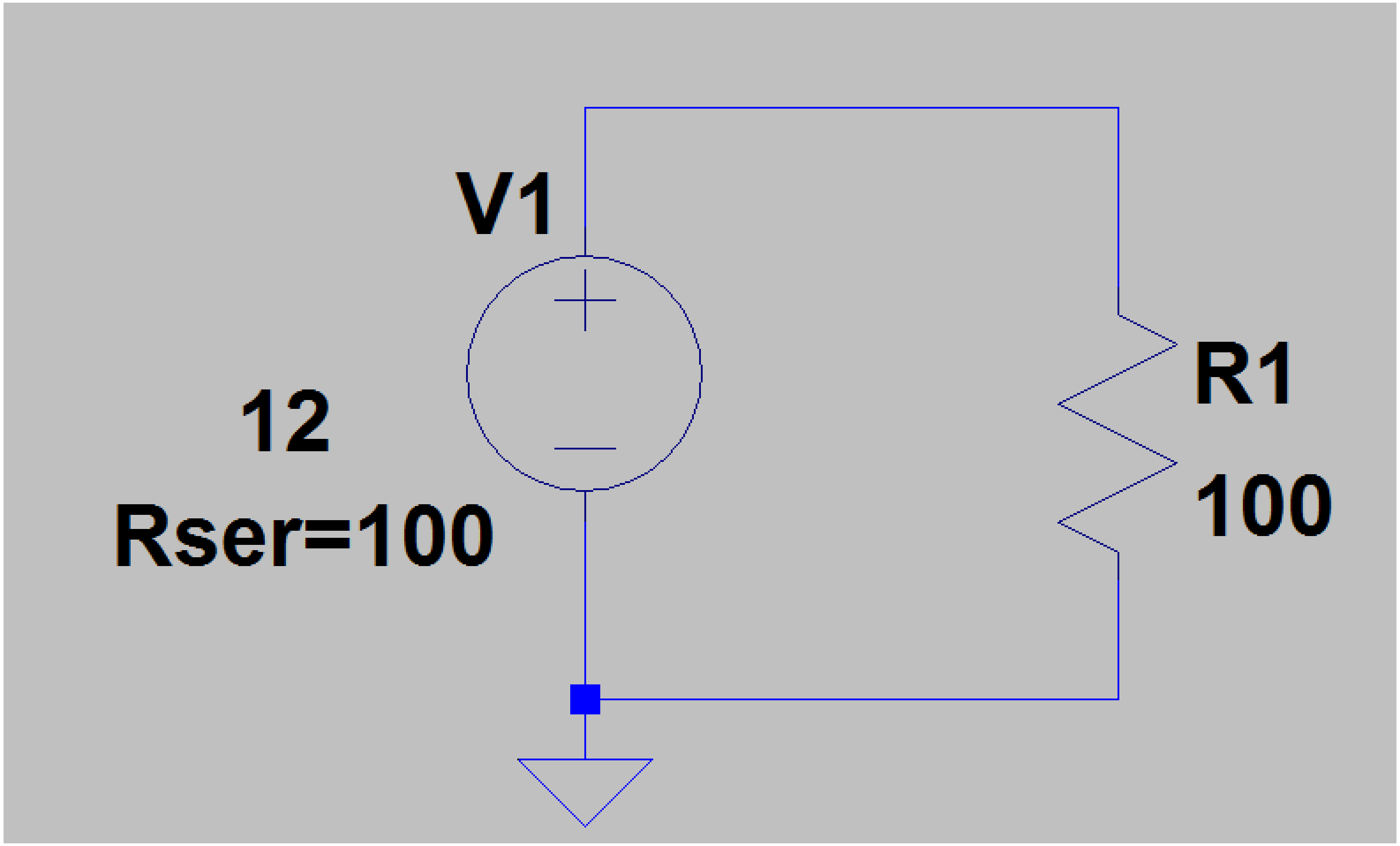
Esercizio



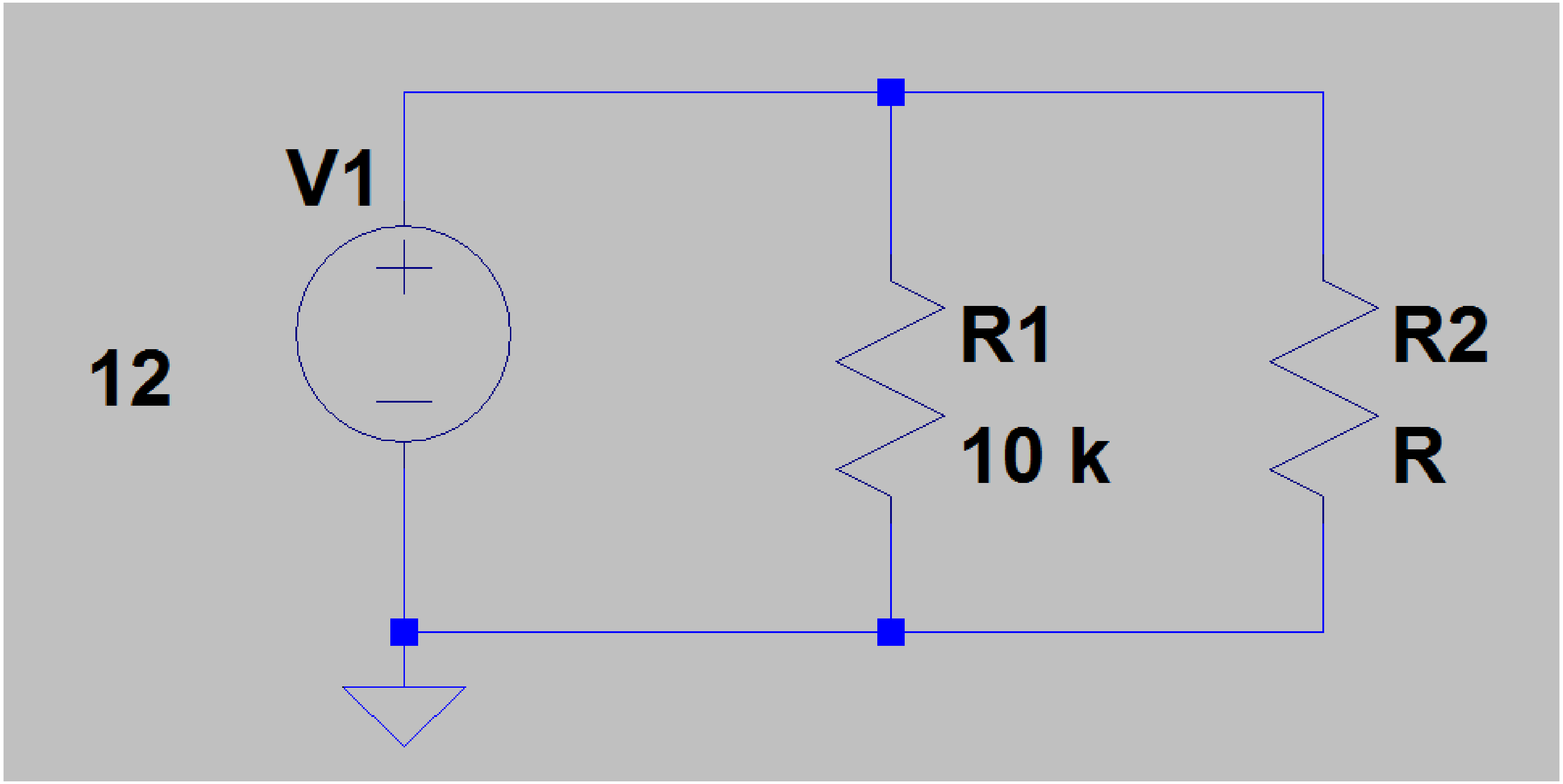
Esercizio



Esercizio



Esercizio



Caso 1
Rser= 0 Ω, R = 10 k Ω oppure R=100 Ω

Caso 2
Rser= 100 Ω, R = 10 k Ω oppure R=100 Ω

Esercizio

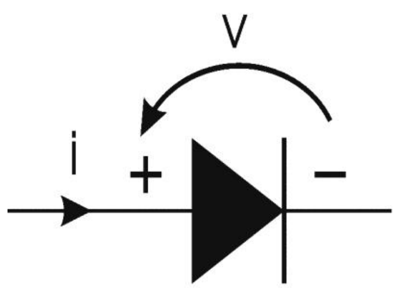
Cosa succede se in un circuito con sole resistenze applico una tensione sinusoidale?

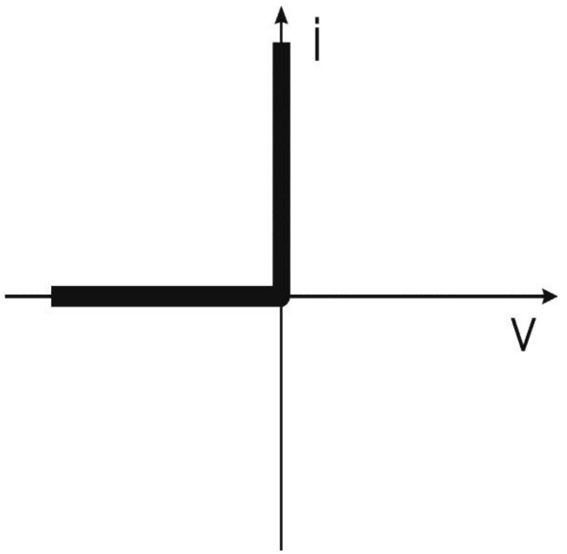
Il resistore NON TIENE MEMORIA!!!!

Per cui la regola del partitore vale istante per istante qualunque sia in quel momento il valore puntuale della tensione

Il Diodo

Il Diodo



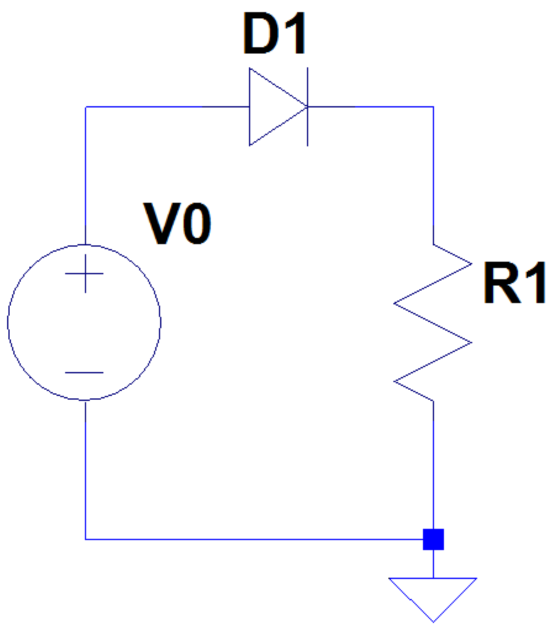


Il diodo è un componente elettronico non lineare a due terminali.

La sua funzione ideale è quella di permettere il flusso di corrente elettrica in una direzione e bloccarlo nell'altra.

Il simbolo circuitale del diodo esprime chiaramente questa funzione: il triangolo indica la direzione permessa per il flusso di corrente elettrica (considerato convenzionalmente di cariche positive), mentre la barra ne indica il blocco nell'altra direzione.

Il Diodo



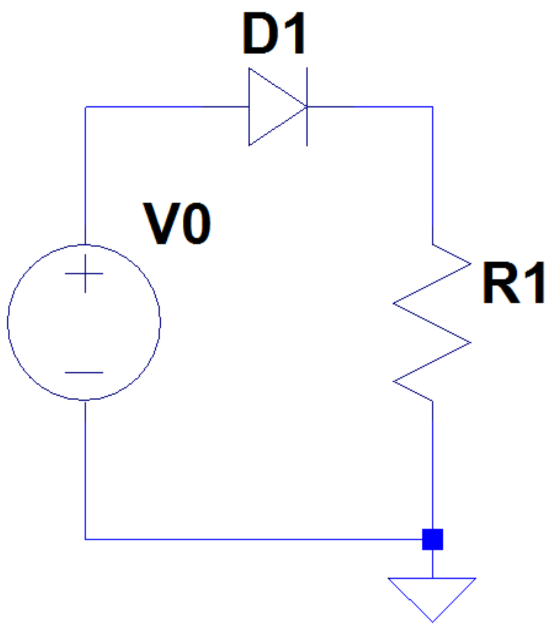
Si vuole trovare la tensione ai capi di R1 al variare di V0.

Supponiamo di sostituire D1 con un filo. **Se V0 ha un valore positivo**, la corrente attraversa D1 da sinistra a destra, quindi nella direzione della freccia, in tal caso **il diodo non oppone alcuna resistenza al passaggio della corrente**, la tensione ai capi del diodo è nulla quindi la tensione ai capi di R1 è la stessa di V0.

Se V0 avesse valore negativo, la corrente nel filo che sostituisce il diodo fluirebbe in direzione opposta alla freccia, **il diodo si opporrebbe** quindi al flusso di corrente in quella direzione (R=infinito come se fosse un interruttore aperto), quindi **non passa alcuna corrente su D1** e quindi neanche su R1.

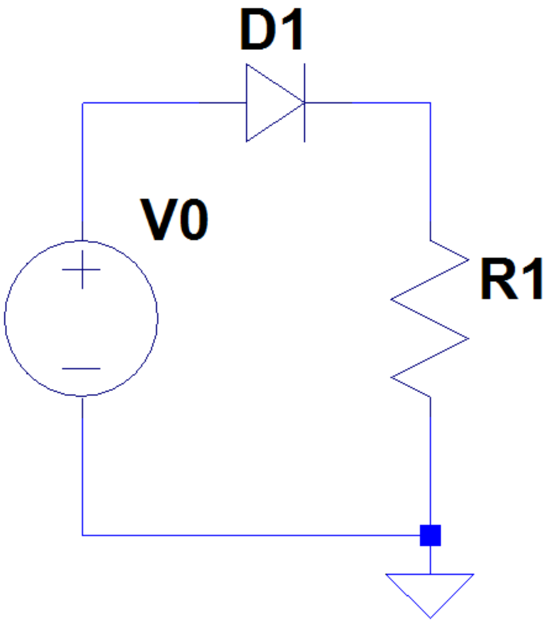
La tensione ai capi di R1 è nulla (per la legge di ohm VR1= R1 x I).

Il Diodo



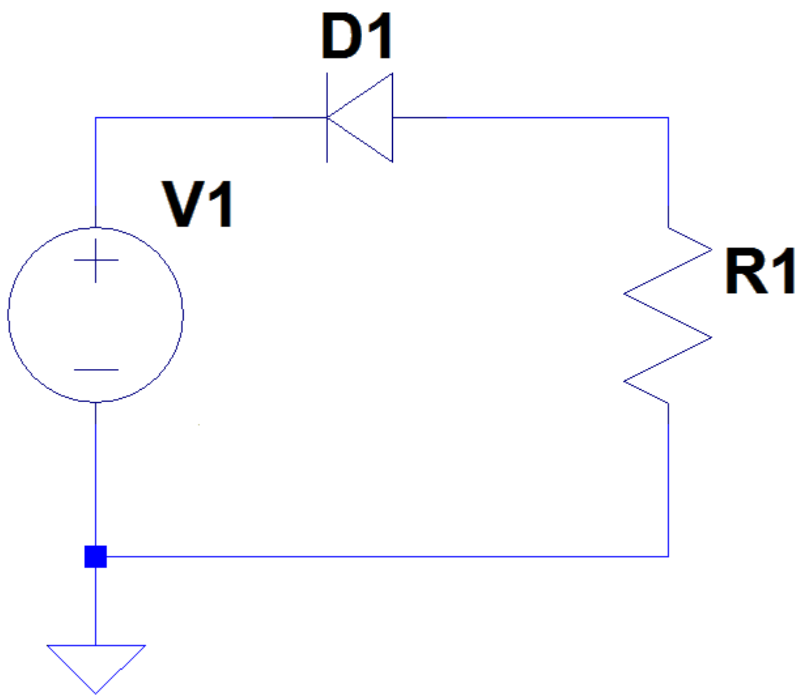
Disegnare il grafico di

- Id vs V0
- VR vs V0
- Vd vs V0



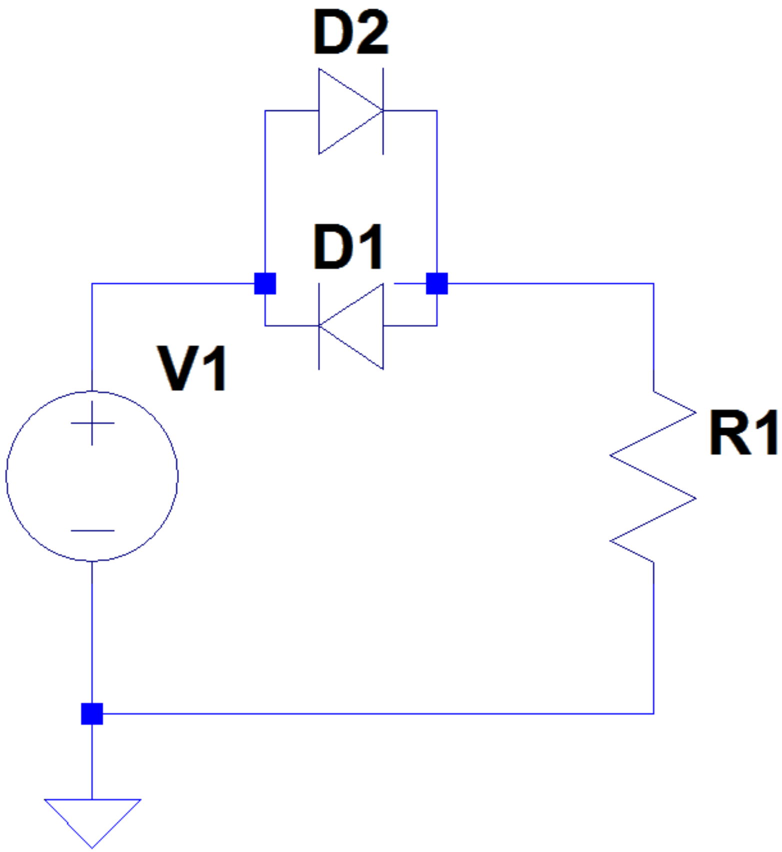
Come varia Vd se applico una tensione sinusoidale con ampiezza pari a 5 V?

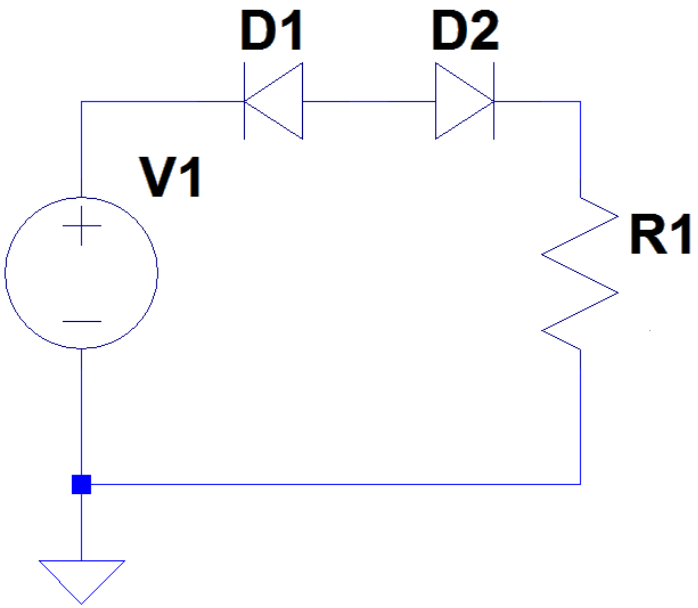
Il Diodo



Cosa succede in questo caso?

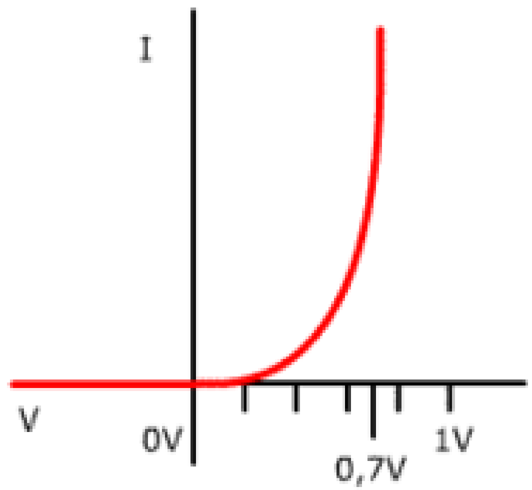
E ora?

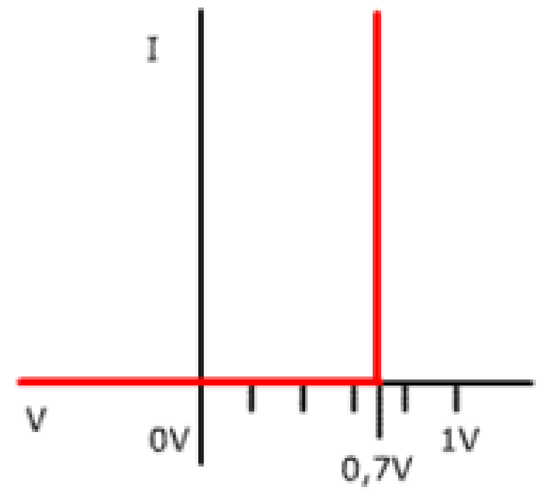




Il Diodo

$$I = I_S\,(e^{\frac{qV_D}{kT}} - 1)$$





In realtà la corrente che scorre in un diodo è descritta da una relazione più complessa.

La corrente aumenta esponenzialmente all'aumentare della tensione

Is viene chiamata corrente di saturazione inversa e ha un valore molto piccolo (10^{-9} – 10^{-12} A) e dipende dalle proprietà intrinseche e geometriche del diodo

Cosa succede se V>0?

Cosa succede se V<0?

Il Diodo

La figura sulla sinistra una caratteristica simile a quella descritta dall'equazione precedente e sulla destra un modello nuovamente on-off, ma che **tiene conto almeno della caduta sul diodo dovuta a caratteristiche dei semiconduttori**.

Per il silicio questa soglia è circa **0.6/0.7 Volt** (dipende dal materiale con cui è fatto il diodo).

Da un punto di vista operativo il modello semplificato si usa così:

Assumiamo che il diodo sia collegato in un circuito tra il nodo A e il nodo B (dove ad A è collegata la base del triangolo del simbolo del diodo e a B la barretta).

Il Diodo

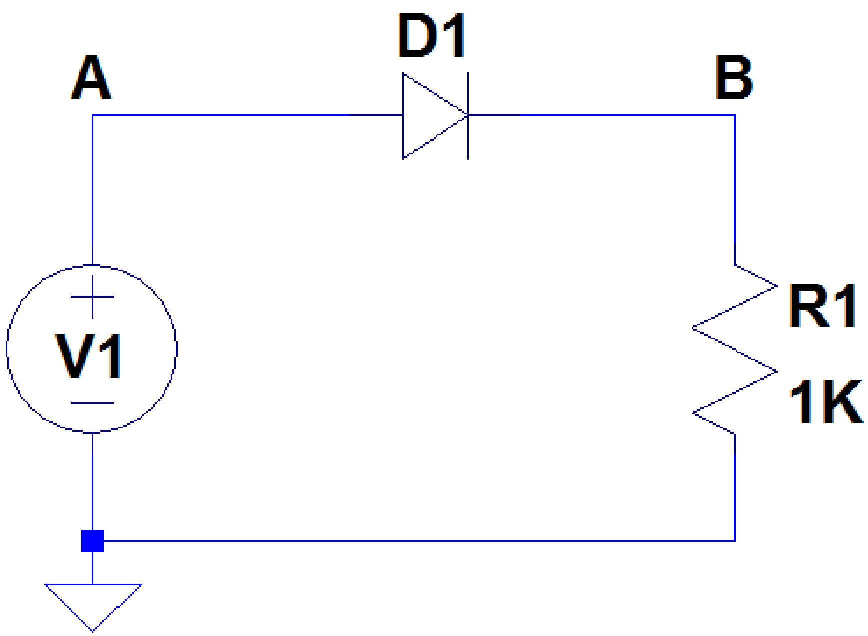
Se in questo nuovo circuito:

1. **la tensione VA è maggiore di VB di almeno 0.6 volt**, quando io ricollegherò il diodo **nel diodo fluirà corrente** e VA-VB sarà 0.6 volt qualunque siano gli altri componenti del circuito.

2. la tensione **VA è minore di VB oppure la differenza VA –VB è minore di 0.6 volt**, quando io ricollegherò il diodo nel diodo **NON fluirà corrente** e VA e VB continueranno ad avere lo stesso valore che si aveva con il diodo assente.

Il Diodo

Proviamo ora a considerare questo circuito



Determinare anche in questo caso come variano I, VR1 e VD in funzione di V0

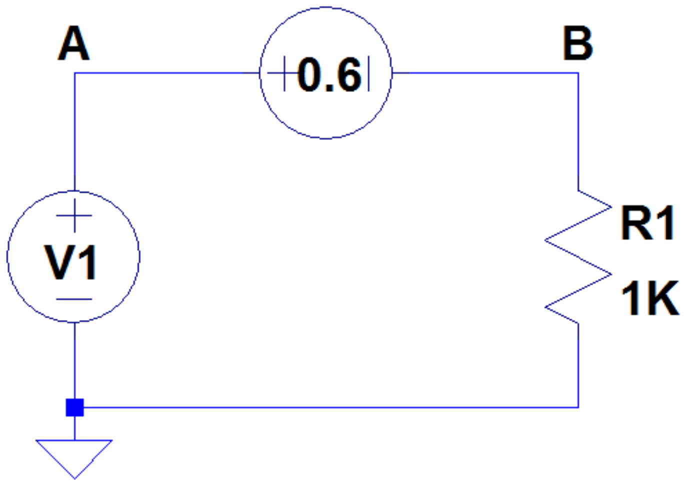
Il Diodo

Consideriamo VD>0.6

In tal caso il diodo è in conduzione, quando conduce corrente può essere modellato come un generatore di tensione di 0.6 volt.

KVL: V1-0.6-VR1=0 -> VR1=V1-0.6

OHM: IR1=VR1/R1

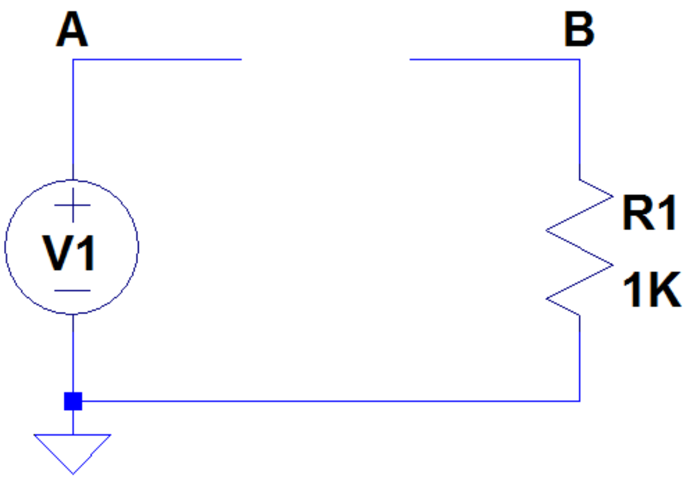


Il Diodo

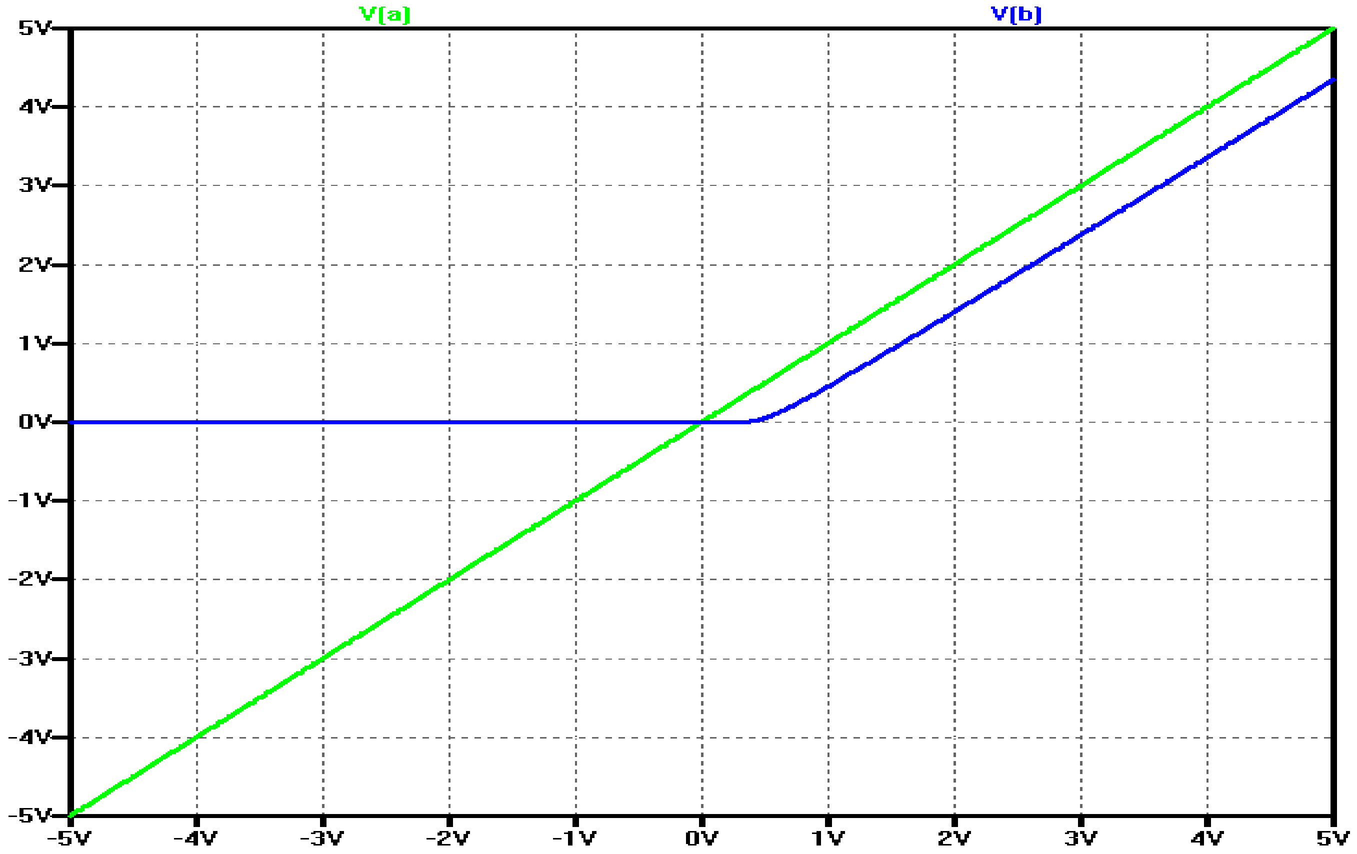
Consideriamo VD<0.6

In tal caso il diodo non è in conduzione e può essere sostituito con un circuito aperto quindi la corrente è nulla.

OHM: VR1=R1 x 0 = 0



Il Diodo



Il Diodo

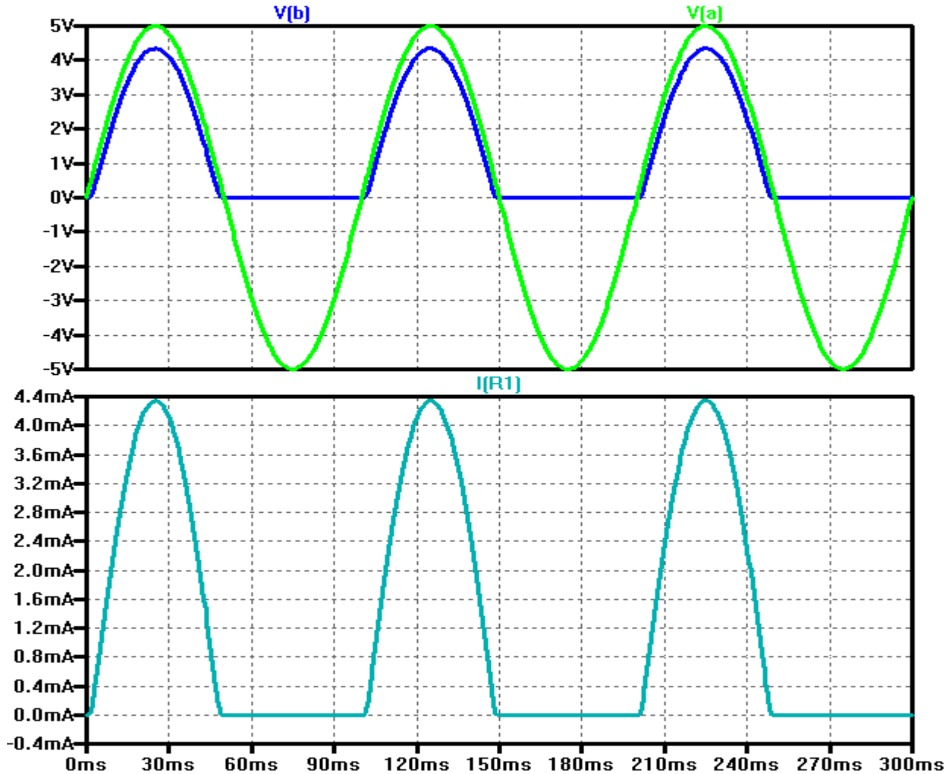
E se applico una tensione sinusoidale?

0 < V0 < 0.6 → interdizione

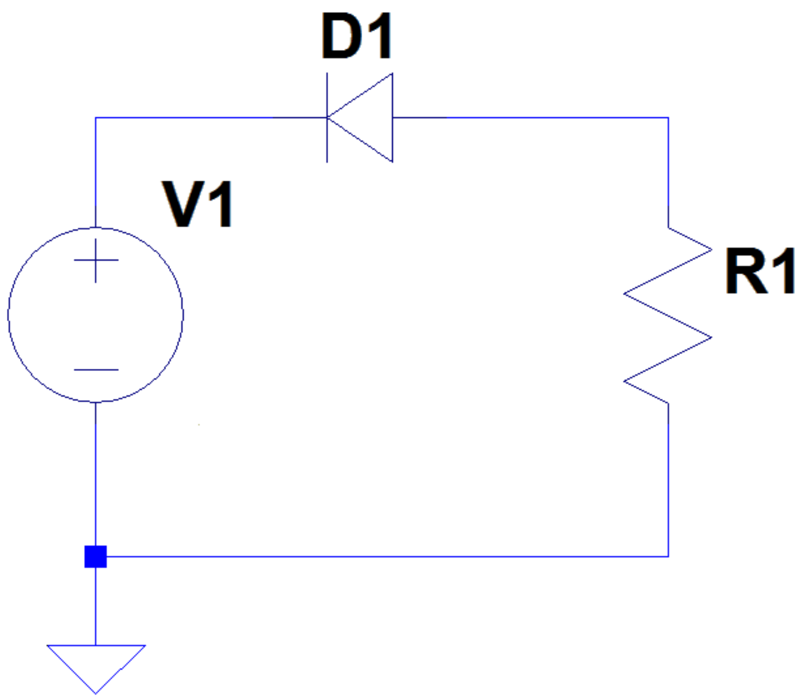
0.6 < V0 < 5V → conduzione

In conduzione vale come prima VR= V0 – 0.6V

VD = cost. = 0.6V

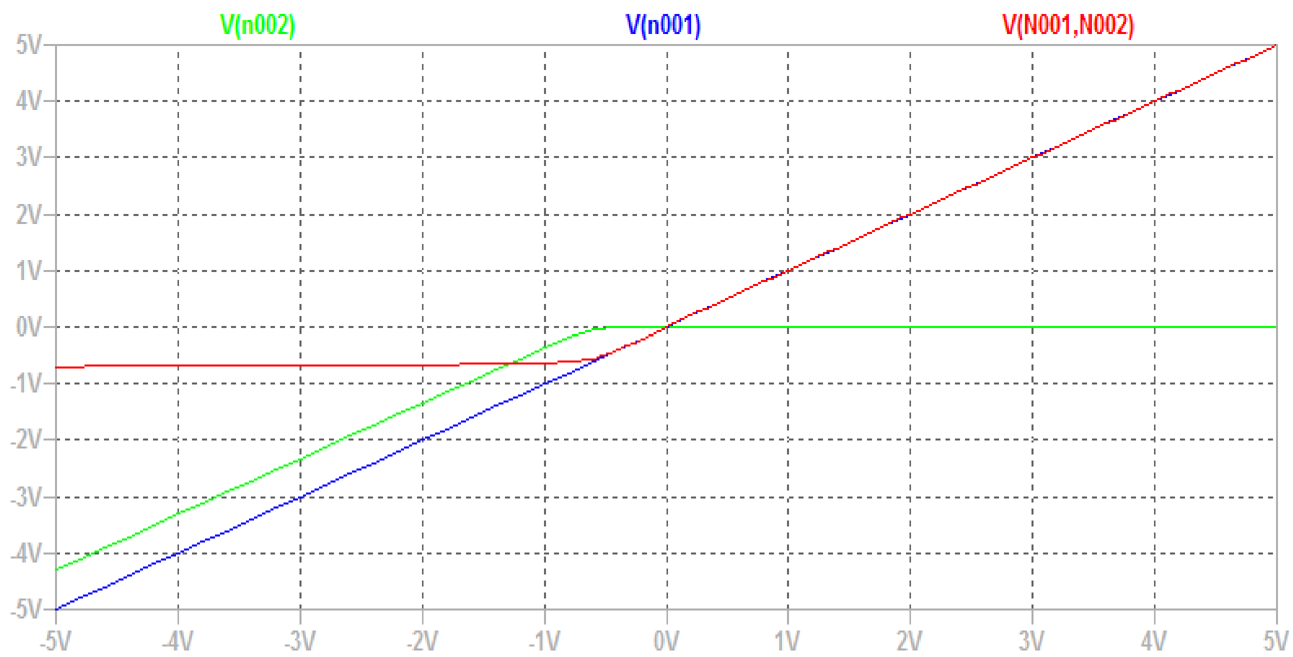


Il Diodo



Cosa succede in questo caso?

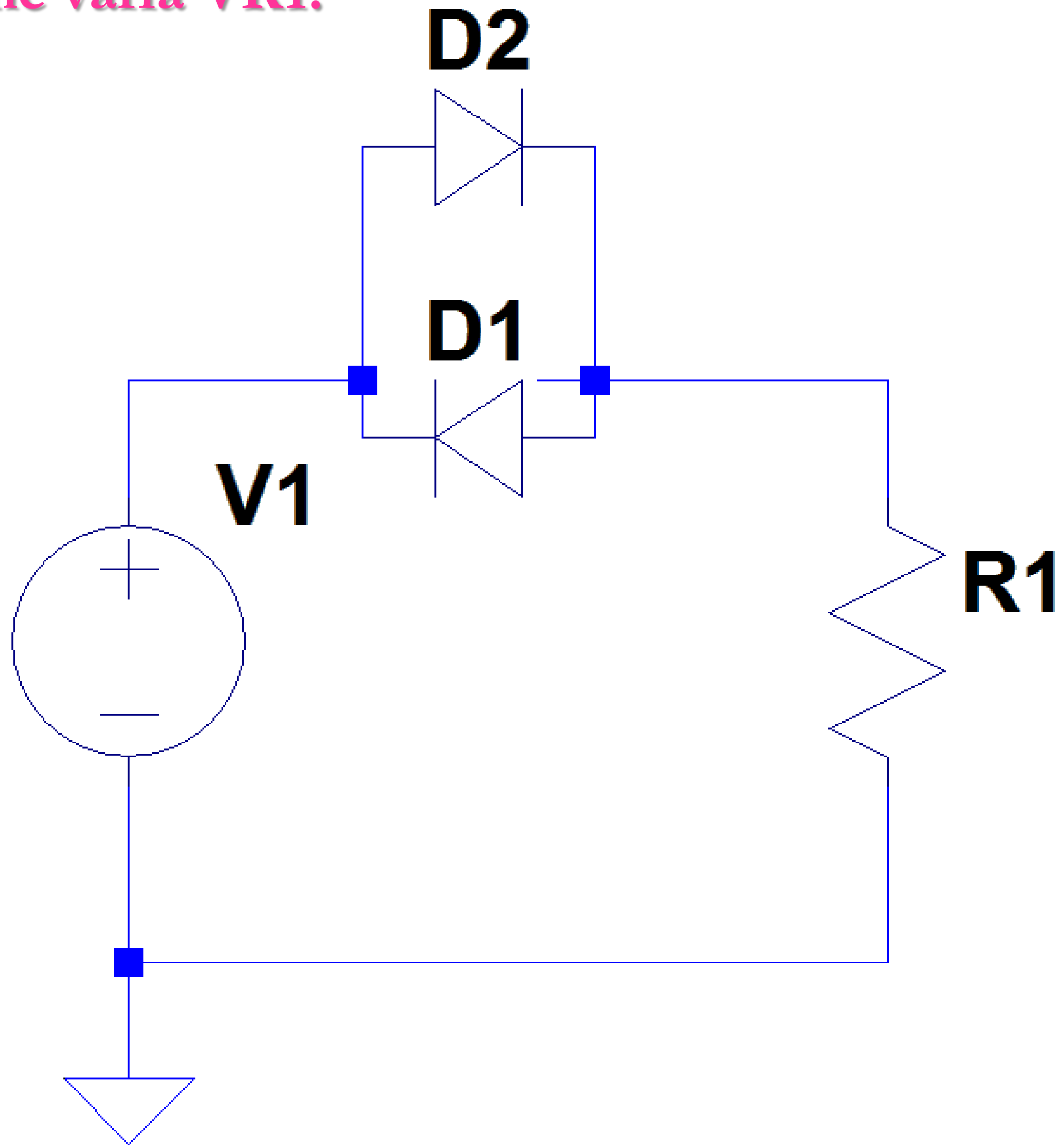
Il Diodo



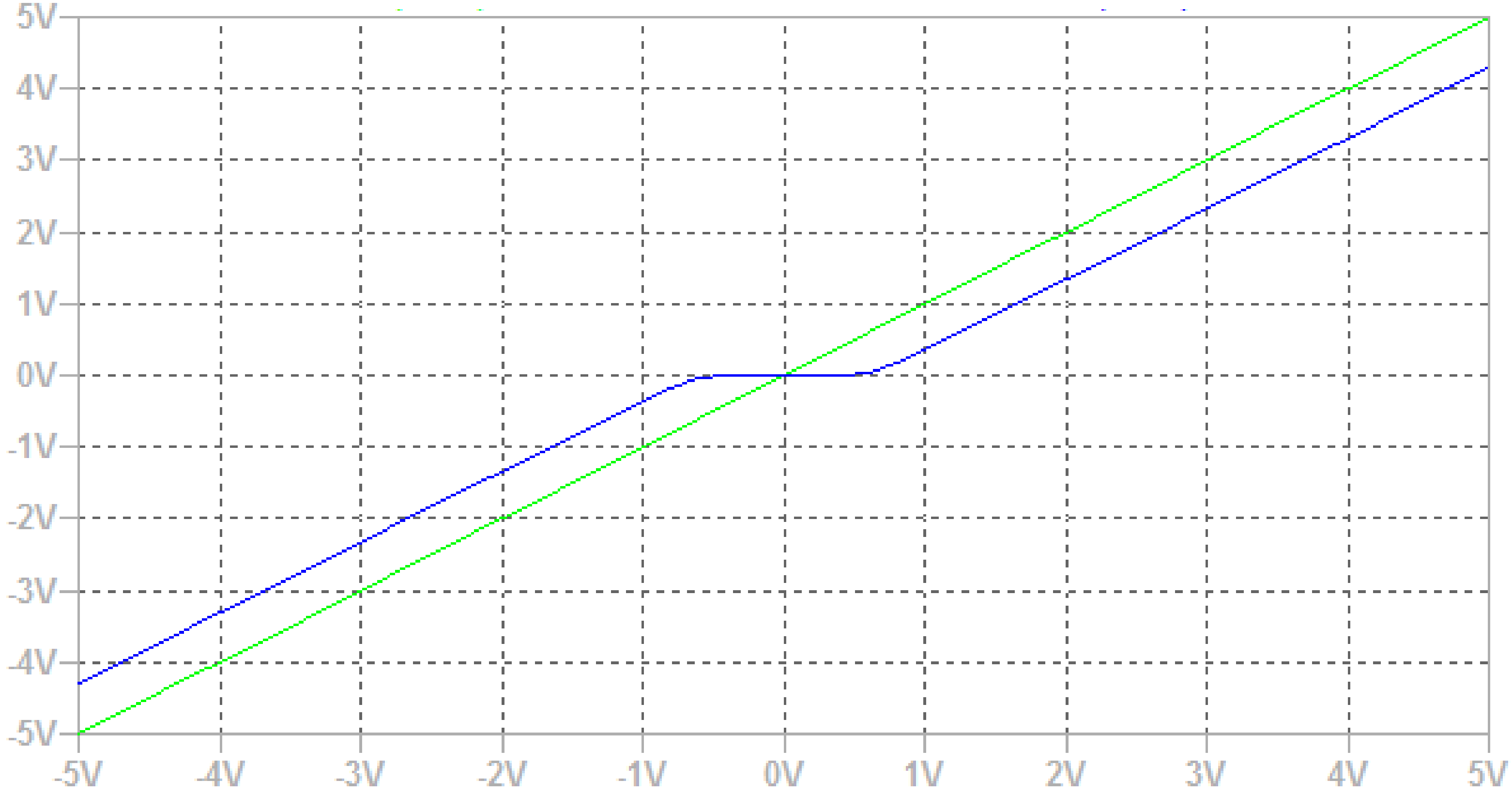
V(n002)
V(n001)
V(N001,N002)
5V
4V
3V
2V
1V
0V
-1V
-2V
-3V
-4V
-5V
-5V
-4V
-3V
-2V
-1V
0V
1V
2V
3V
4V
5V

Il Diodo

E ora, come varia VR1?



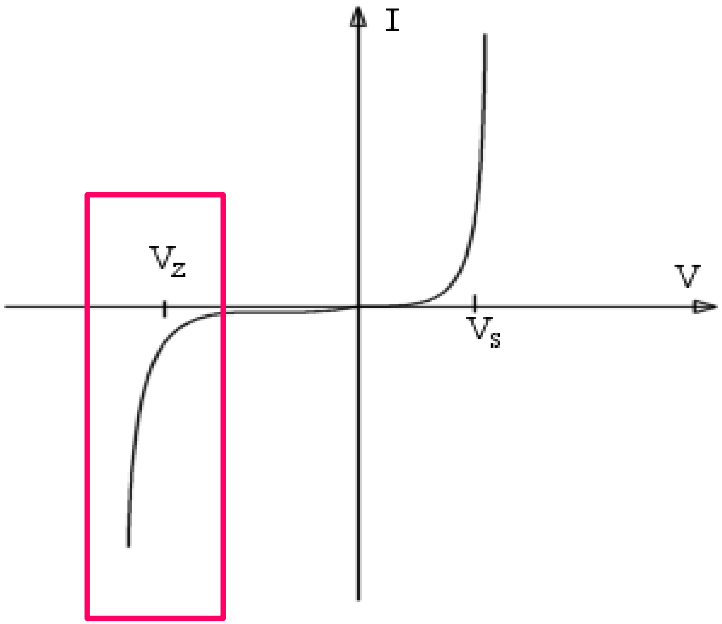
E ora?



Il Diodo ZENER

Il Diodo Zener

Sfrutta la caratteristica di breakdown del diodo. Parlando del diodo abbiamo detto che se la corrente è opposta alla direzione "consentita" essa viene bloccata.

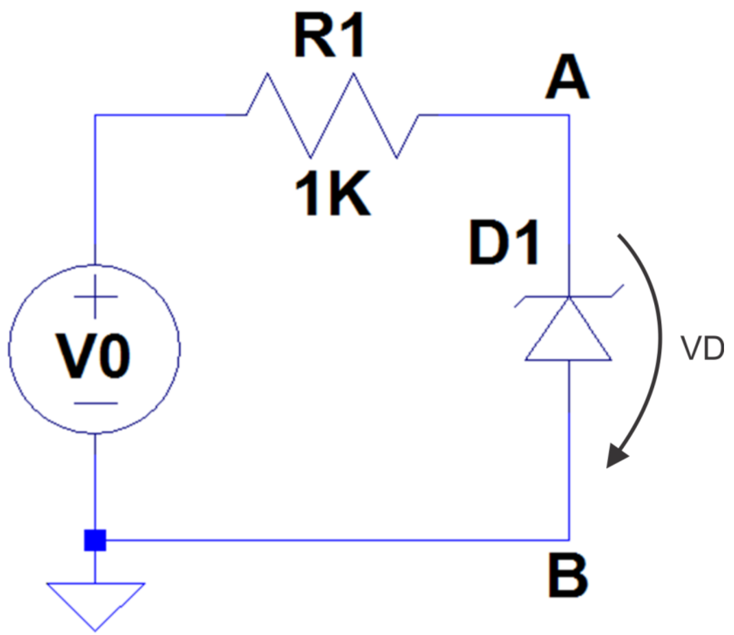


Esiste un limite fisico oltre il quale questo non può più essere vero: se viene superata la tensione di breakdown il diodo non riesce più ad opporsi al passaggio di corrente.

Il diodo Zener è sviluppato proprio per funzionare nella zona di breakdown perchè in quel punto la caratteristica I/V è molto "verticale". In pratica quando la tensione ai capi raggiunge Vz il diodo zener si fa attraversare da correnti inverse anche intense (è dimensionato per non avere rottura in queste condizioni a differenza del diodo normale). **L'effetto è che in questa condizione anche se la corrente aumenta la tensione rimane praticamente costante e pari a Vz.**

Il Diodo Zener

Analizziamo il segute circuito, in cui abbiamo utilizzato un diodo Zenere: BZX84C6V2L, che ha una tensione Vz di 6.2 Volt.



- **Consideriamo il diodo in conduzione (quindi per VD>0.6)**
- **Consideriamo il diodo interdetto e non ancora in zona zener (quindi per -Vz<VD<0.6)**
- **Diodo in zona zener (VD<-Vz)**

Il Diodo Zener

Diodo in conduzione (quindi per VD>0.6)

Il diodo fa passare la corrente quindi D1 può essere modellato come un generatore di tensione da 0.6 volt (quindi VAB=-0.6).
In tal caso la corrente nel circuito fluirà nel circuito.

KVL: V0-VR1-VAB=0 -> V0-VR1+0.6=0 -> VR1=V0+0.6
OHM: I=(V0+0.6)/R1 (assumendo come verso di I quello in uscita al generatore V0)

Il Diodo Zener

Diodo interdetto e non ancora in zona zener (quindi per -Vz<VD<0.6)

In tal caso la corrente viene bloccata dallo Zener. Tale condizione va valutata rimuovendo diodo zener (e lasciando i due terminali non collegati, oppure si può immaginare un resistore infinito), che quindi non viene attraversato dalla corrente.

KVL: V0-VR1-VAB=0 -> VAB=V0-VR1 ma VR1 è nulla perchè la corrente è assunta nulla nel diodo (e quindi anche nel resistore in serie) quindi VAB=V0, I=0.

Si hanno quindi due sottocondizioni, la prima con zener non in conduzione, la seconda con zener in conduzione inversa (cioè con corrente in direzione opposta alla freccia sul simbolo)

Il Diodo Zener

Diodo in zona zener (VD<-Vz)

In tal caso VAB=Vz per definizione di diodo zener in conduzione inversa

KVL= V0-VR1-VAB=0 -> VR1=V0-VAB=V0-Vz

OHM: I=(V0-Vz)/R1

Le tre zone sono per il momento individuate da intervalli che dipendono da VD (VD>0.6, -Vz<VD<0.6, VD<-Vz), questi intervalli vanno riportati ad espressioni dipendenti da V0.

Il modo più semplice per fare questo è ricavare una relazione tra V0 e VD in zona di interdizione.

Lo abbiamo già fatto, abbiamo trovato che in tale zona V0=VAB e per come abbiamo disegnato VD VAB=-VD quindi VD=-V0.

Grafico di V_{AB} e di I al variare di V_0 tra -10 e 10V

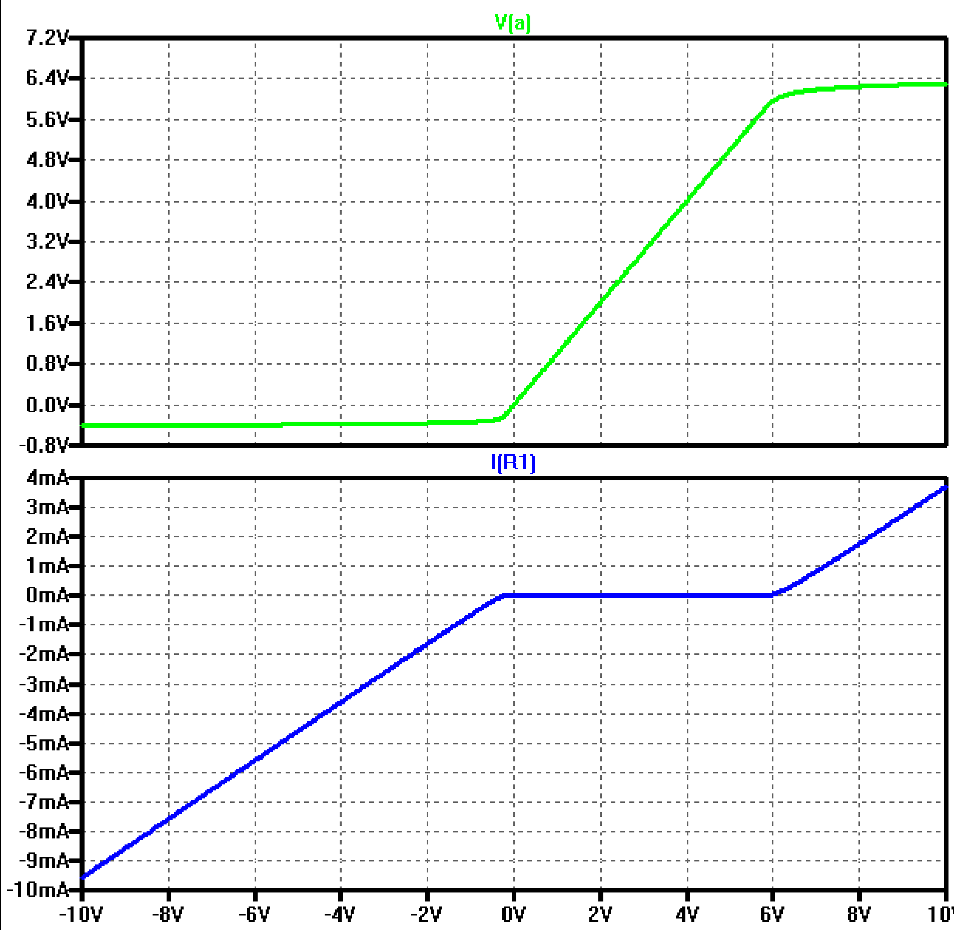
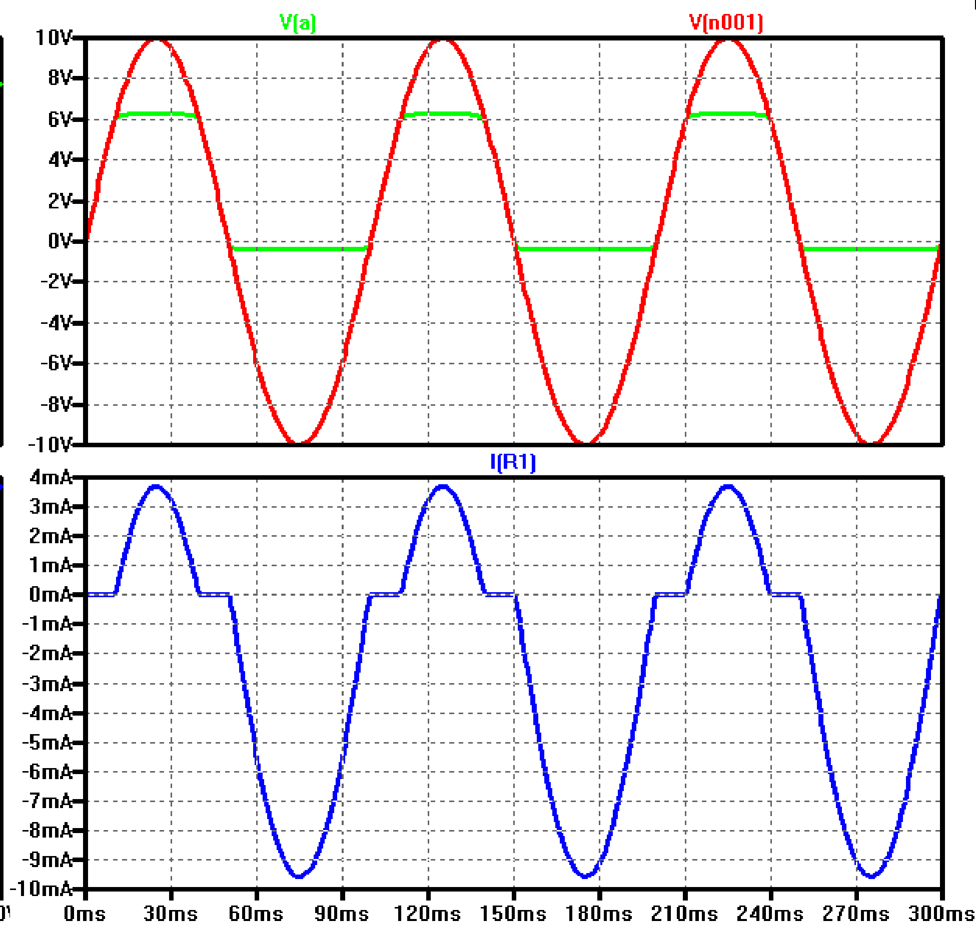
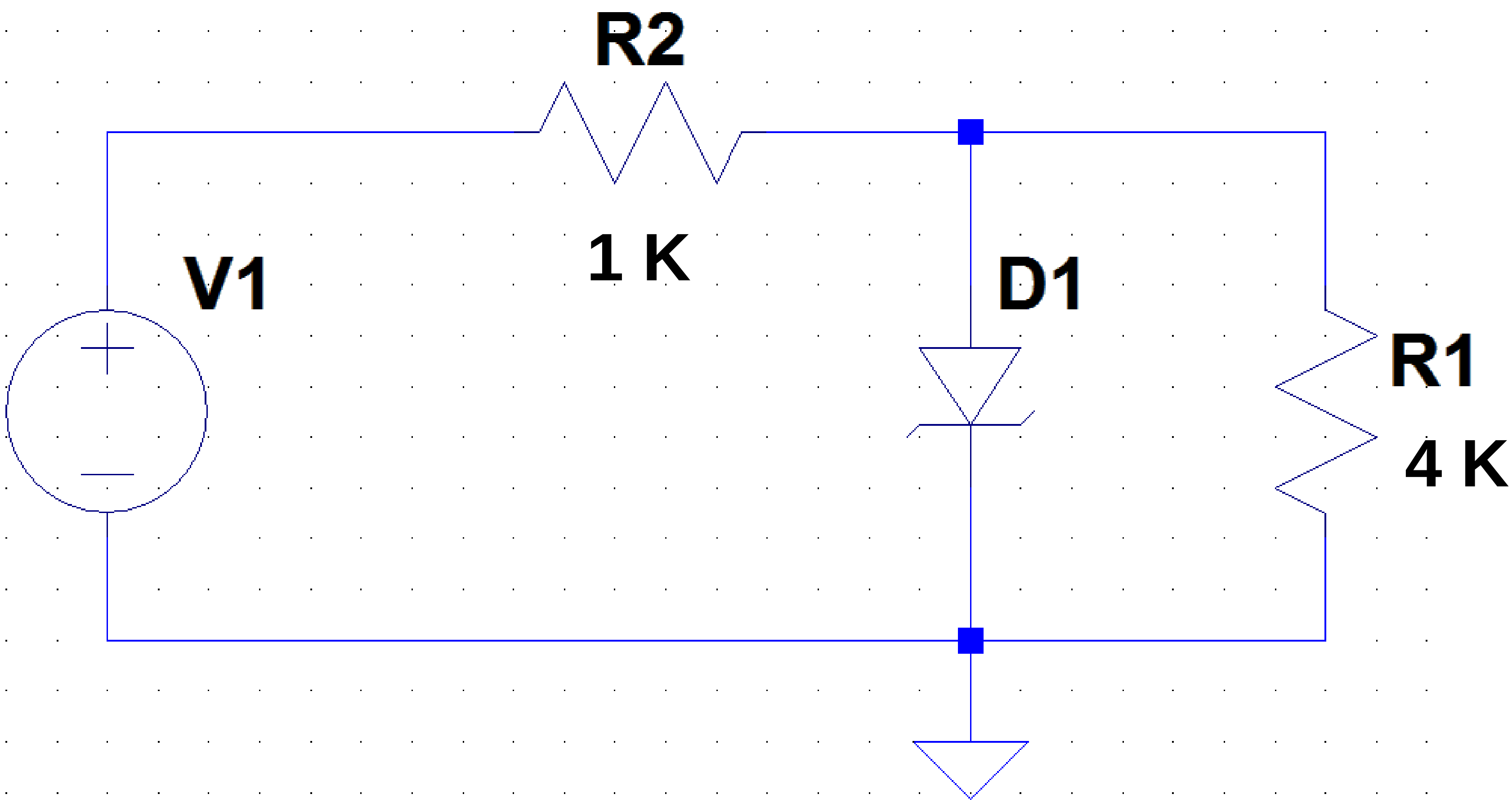


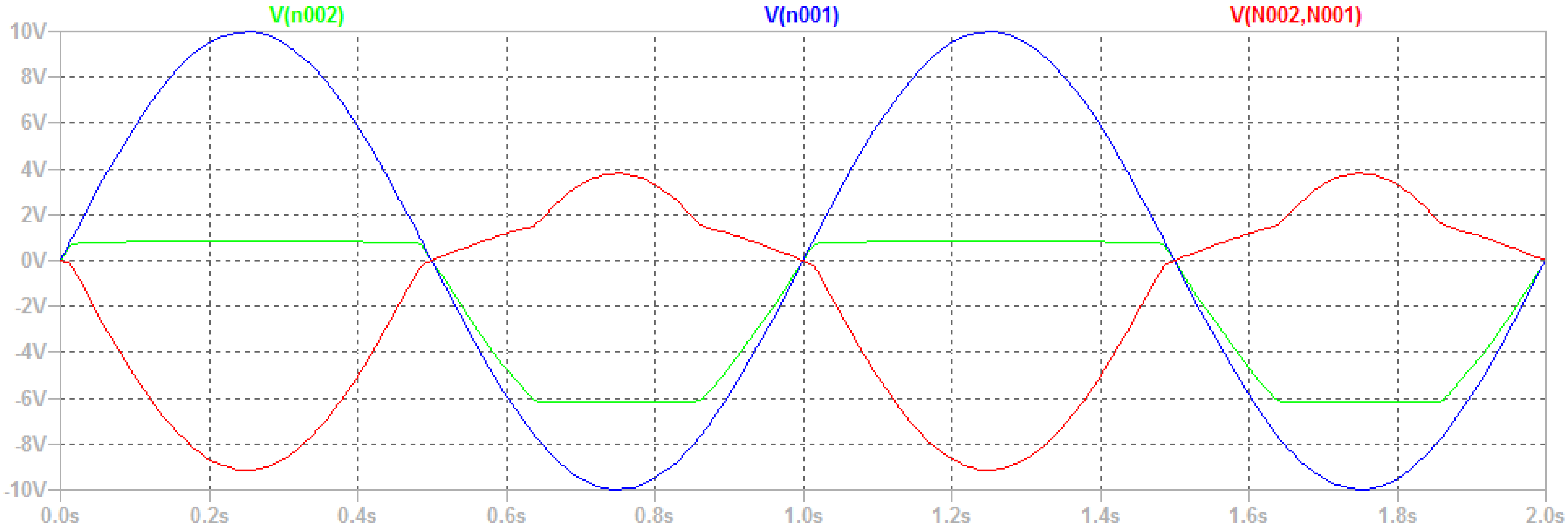
Grafico nel tempo di V_{AB} e di I immaginando una V_0 (indicata con Vn001) sinusoidale



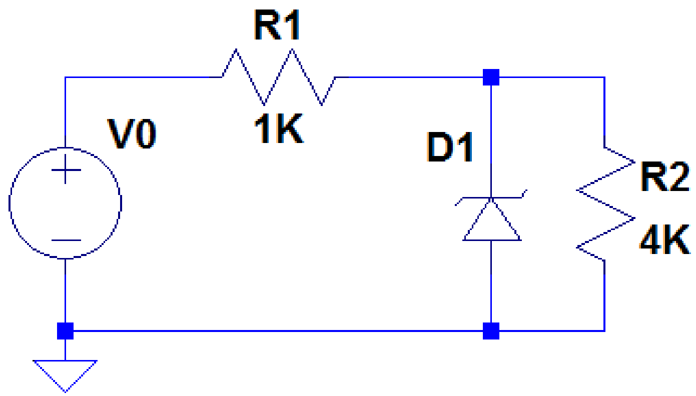
Il Diodo Zener

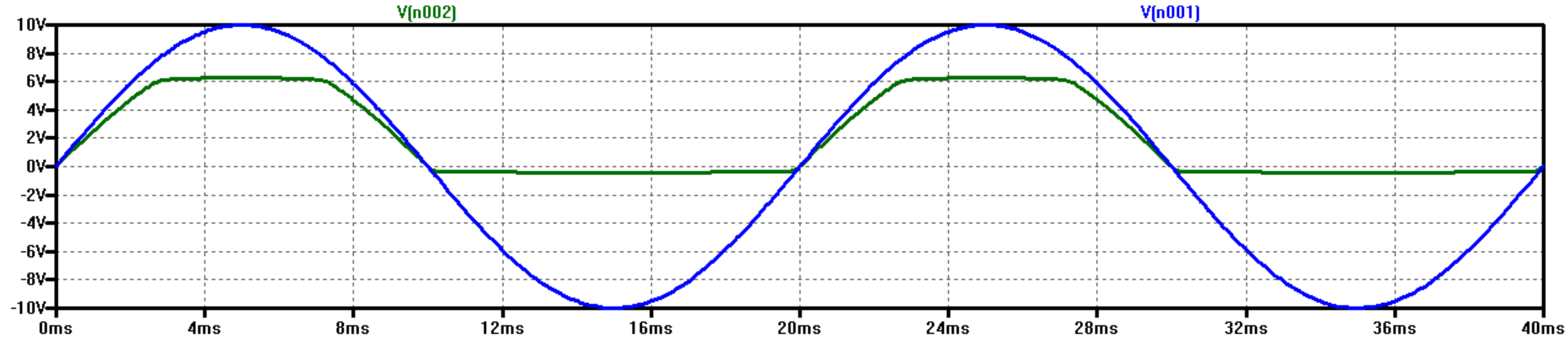


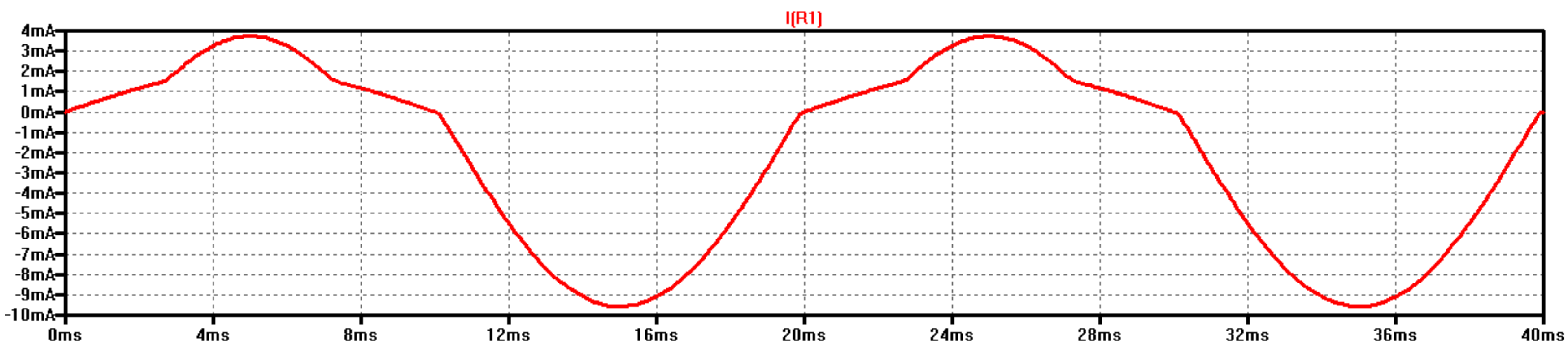
Il Diodo Zener



Il Diodo Zener

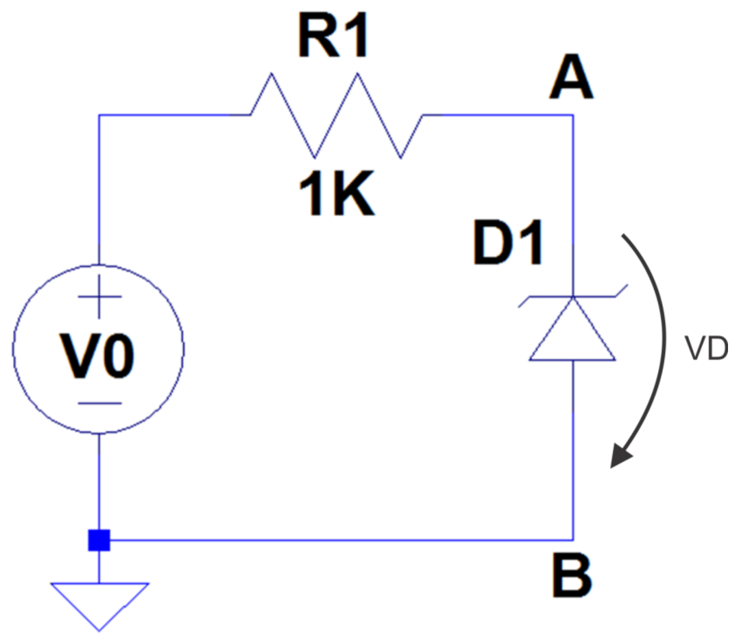






Riassunto della puntata precedente

Analizziamo il segute circuito, in cui abbiamo utilizzato un diodo Zenere: BZX84C6V2L, che ha una tensione Vz di 6.2 Volt.



- **Consideriamo il diodo in conduzione (quindi per VD>0.6)**
- **Consideriamo il diodo interdetto e non ancora in zona zener (quindi per -Vz<VD<0.6)**
- **Diodo in zona zener (VD<-Vz)**

Riassunto della puntata precedente

Diodo in conduzione (quindi per VD>0.6)

Il diodo fa passare la corrente quindi D1 può essere modellato come un generatore di tensione da 0.6 volt (quindi VAB=-0.6).
In tal caso la corrente nel circuito fluirà nel circuito.

KVL: V0-VR1-VAB=0 -> V0-VR1+0.6=0 -> VR1=V0+0.6
OHM: I=(V0+0.6)/R1 (assumendo come verso di I quello in uscita al generatore V0)

Riassunto della puntata precedente

Diodo interdetto e non ancora in zona zener (quindi per -Vz<VD<0.6)

In tal caso la corrente viene bloccata dallo Zener. Tale condizione va valutata rimuovendo diodo zener (e lasciando i due terminali non collegati, oppure si può immaginare un resistore infinito), che quindi non viene attraversato dalla corrente.

KVL: V0-VR1-VAB=0 -> VAB=V0-VR1 ma VR1 è nulla perchè la corrente è assunta nulla nel diodo (e quindi anche nel resistore in serie) quindi VAB=V0, I=0.

Si hanno quindi due sottocondizioni, la prima con zener non in conduzione, la seconda con zener in conduzione inversa (cioè con corrente in direzione opposta alla freccia sul simbolo)

Riassunto della puntata precedente

Diodo in zona zener (VD<-Vz)

In tal caso VAB=Vz per definizione di diodo zener in conduzione inversa

KVL= V0-VR1-VAB=0 -> VR1=V0-VAB=V0-Vz

OHM: I=(V0-Vz)/R1

Le tre zone sono per il momento individuate da intervalli che dipendono da VD (VD>0.6, -Vz<VD<0.6, VD<-Vz), questi intervalli vanno riportati ad espressioni dipendenti da V0.

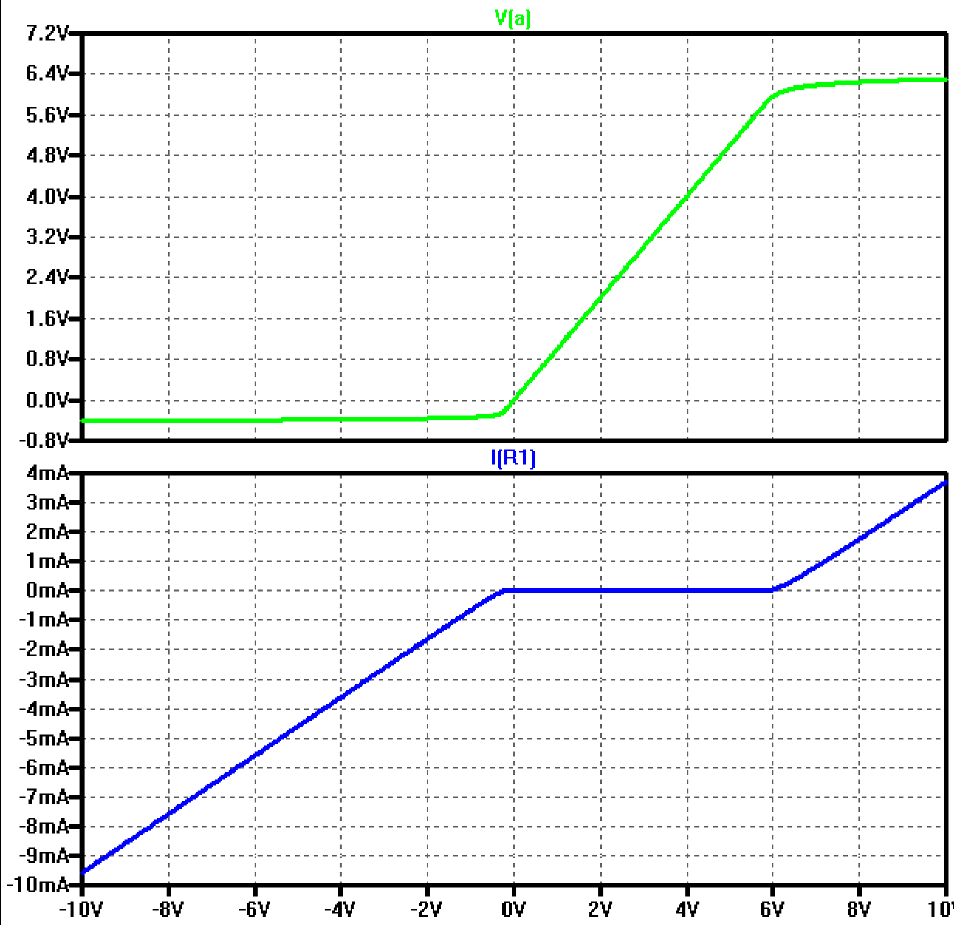
Il modo più semplice per fare questo è ricavare una relazione tra V0 e VD in zona di interdizione.

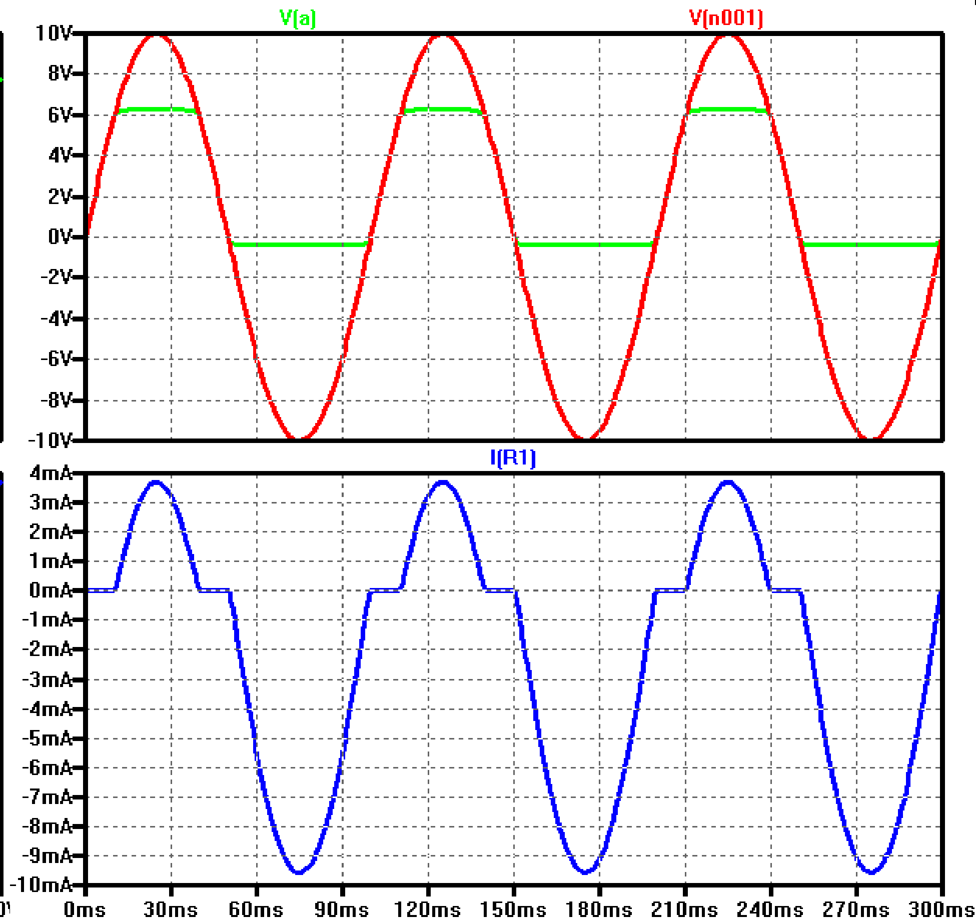
Lo abbiamo già fatto, abbiamo trovato che in tale zona V0=VAB e per come abbiamo disegnato VD VAB=-VD quindi VD=-V0.

Riassunto della puntata precedente

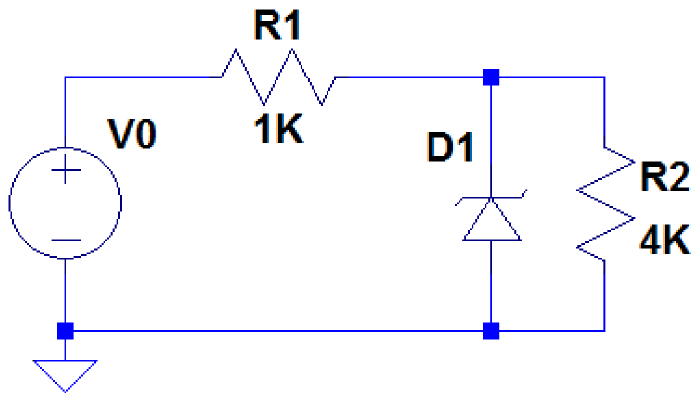
Grafico di VAB e di I al variare di V0 tra -10 e 10V

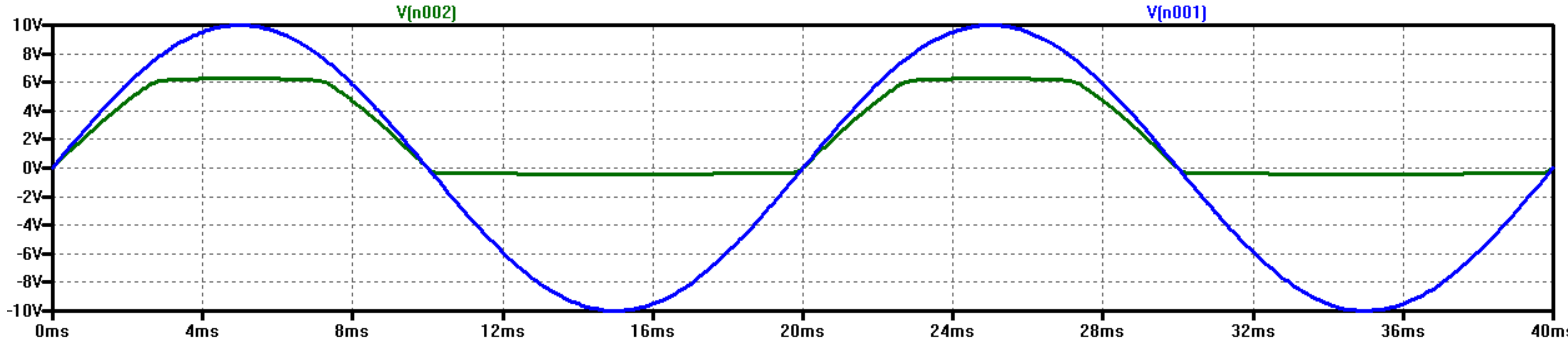
Grafico nel tempo di VAB e di I immaginando una V0 (indicata con Vn001) sinusoidale

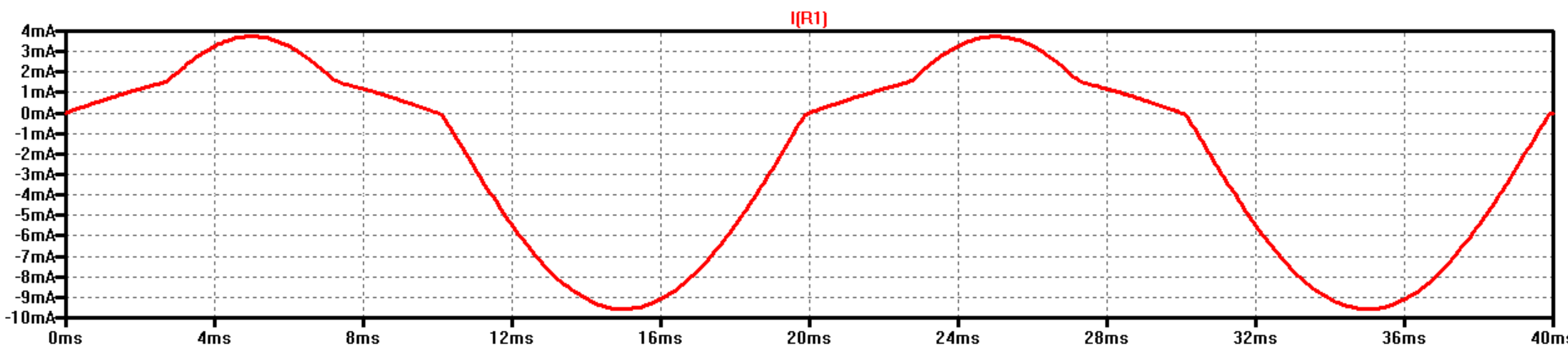




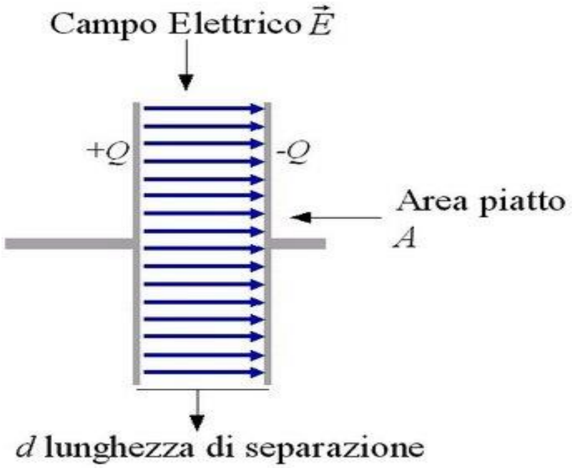
Riassunto della puntata precedente







Il condensatore



$$C = \frac{Q}{V}$$

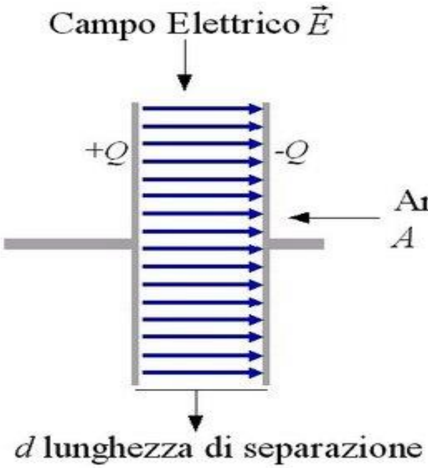
$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d}$$

Se applico una differenza di potenziale tra le armature, le cariche si separano e formano un campo elettrico all'interno del dielettrico

Le cariche positive sono uguali a quelle negative e il loro valore assoluto lo chiamiamo Q

La carica è proporzionale alla tensione applicata e la costante di proporzionalità è una caratteristica di quel particolare condensatore, e si chiama capacità e si misura in Farad

Il condensatore



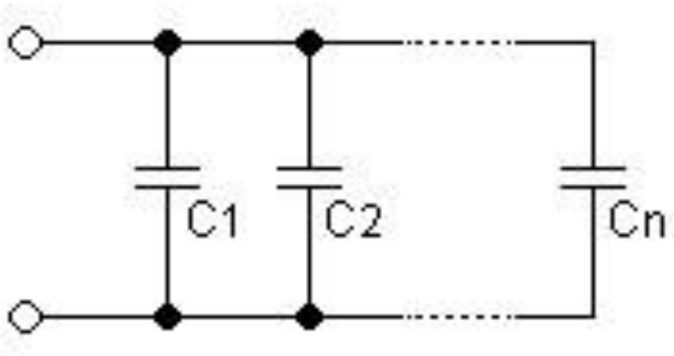
$$C = \frac{Q}{V}$$

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d}$$

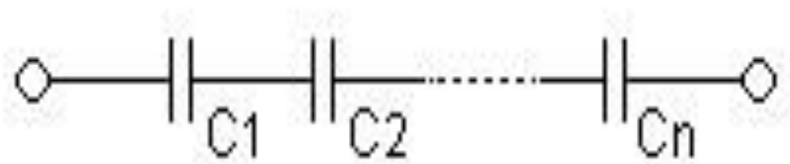
Gli elettroni non riescono a passare direttamente da una piastra all'altra attraverso il dielettrico, proprio per le qualità di isolante del materiale utilizzato.
Quando viene applicata una differenza di potenziale a un condensatore. nel dielettrico si assiste al fenomeno della polarizzazione: le molecole si dispongono a formare un dipolo elettrico che consente il passaggio della corrente nel condensatore.

Matematicamente, tale corrente è data dall'espressione: $I = \frac{dQ}{dt} = C\,\frac{dV}{dt}$

Il condensatore

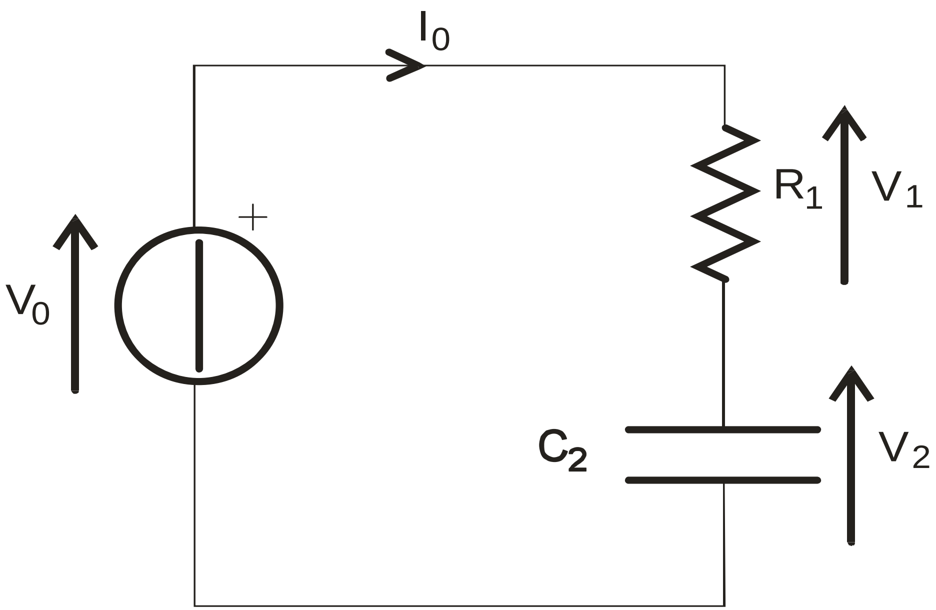


$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_n$$



$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$

Il condensatore



Il circuito può essere risolto mettendo a sistema le relazioni che legano corrente e tensione nei componenti passivi:

$$V_1 = I_0 R_1$$

$$I_0 = C_2 \frac{dV_2}{dt}$$

$$V_0 = V_1 + V_2$$

Il condensatore

Supponendo la tensione sul condensatore nulla all'instante 0-, si ottiene:

$$V_2 = V_0\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{R_1C_2}\right)\right)$$

Il prodotto RC è dimensionalmente un tempo e viene spesso chiamato costante di tempo e indicato con τ.

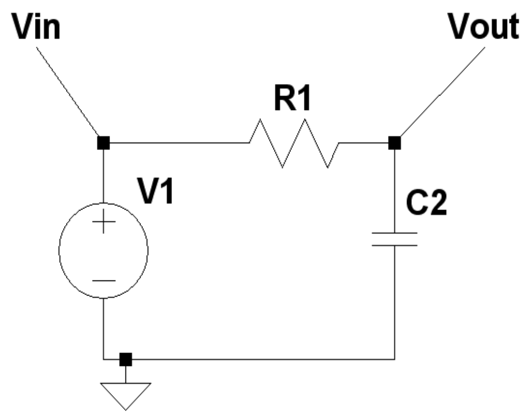
Dopo un tempo τ, l'esponenziale diventa 0.368 (ricordiamo che e=2.71828), quindi la tensione ai capi del condensatore è a circa il 63%.

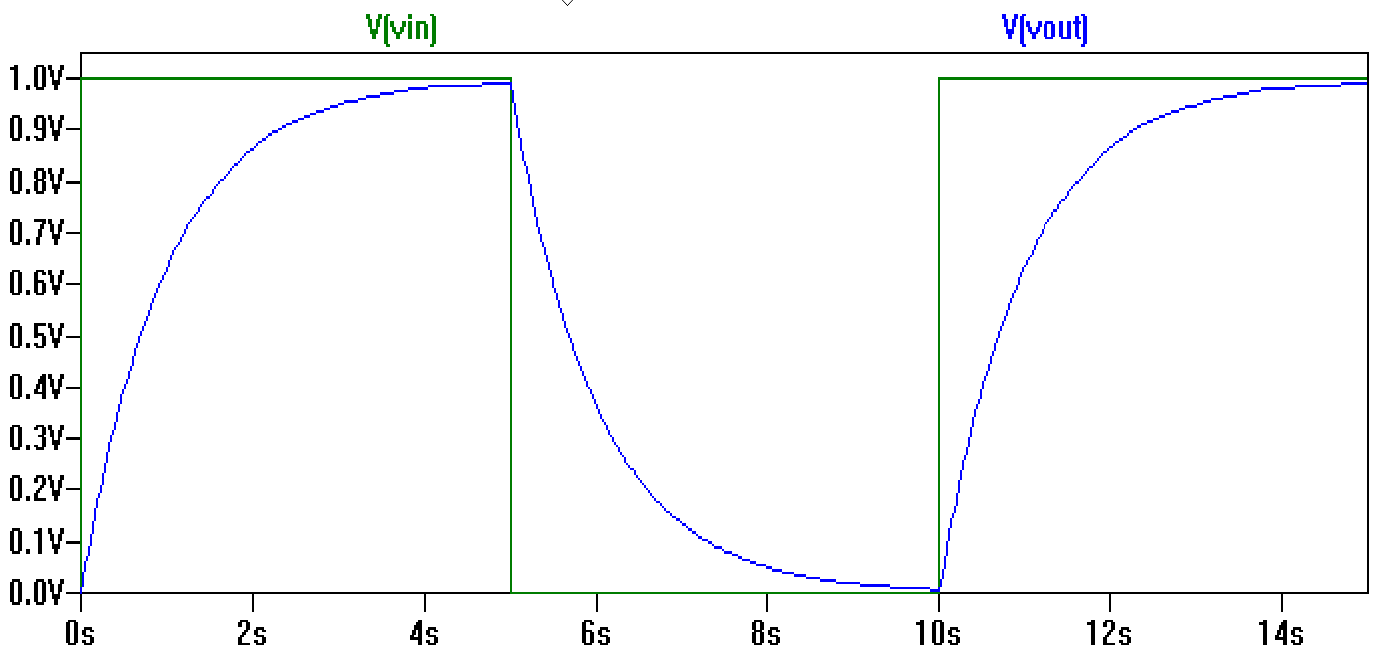
Quando t diventa 3 volte τ, l'esponenziale diventa 0.05, quindi dopo 3 τ la carica del condensatore è completa al 95%.

Quando t diventa 5 volte t, l'esponenziale diventa 0.0067, quindi dopo 5t la carica del condensatore è completa al 99.3%. .

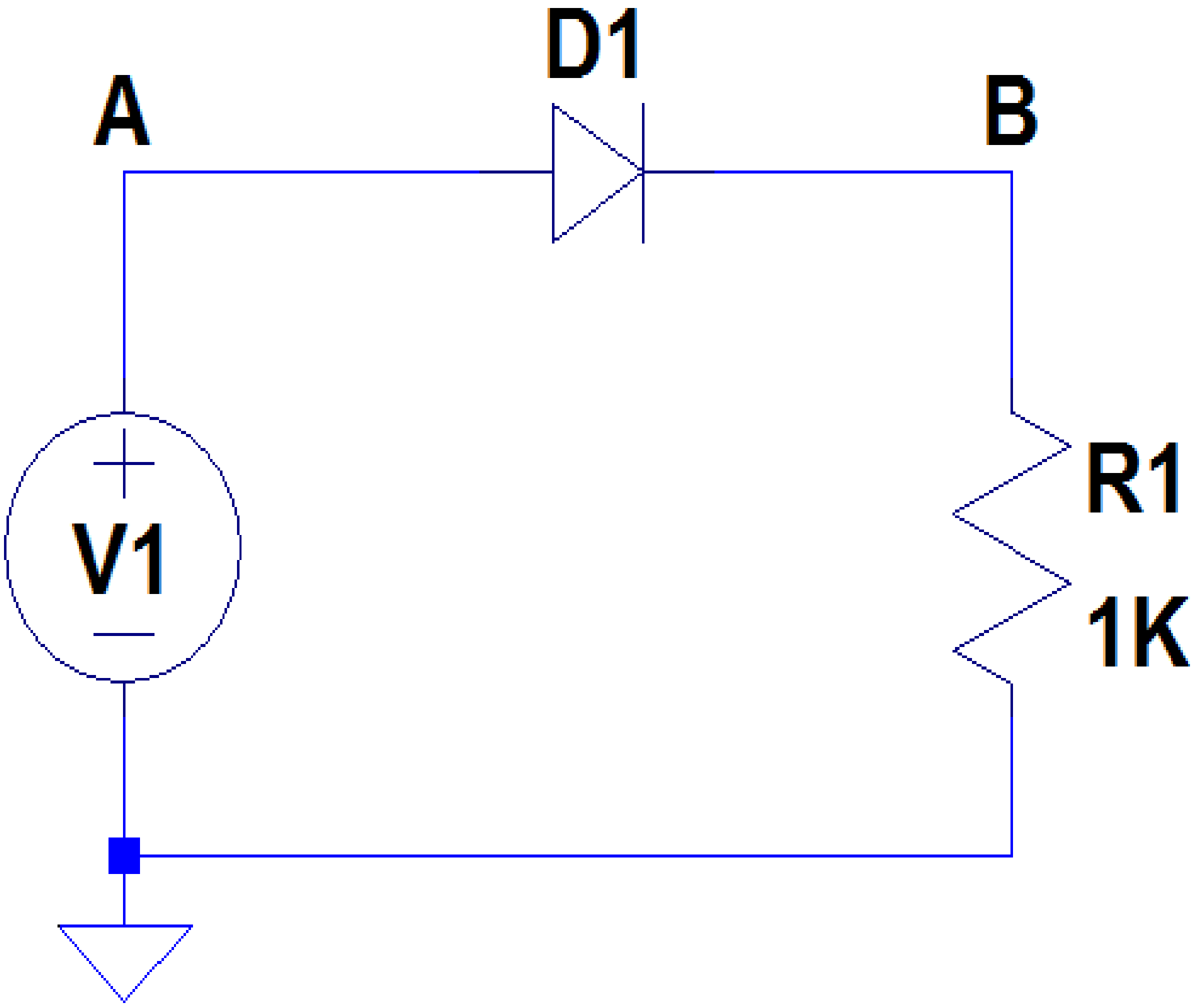
Carica e scarica del condensatore

Quindi, nella pratica, si assume il condensatore completamente carico dopo 3 τ (in alcuni casi 5 τ). Si assume carico al 60% dopo τ

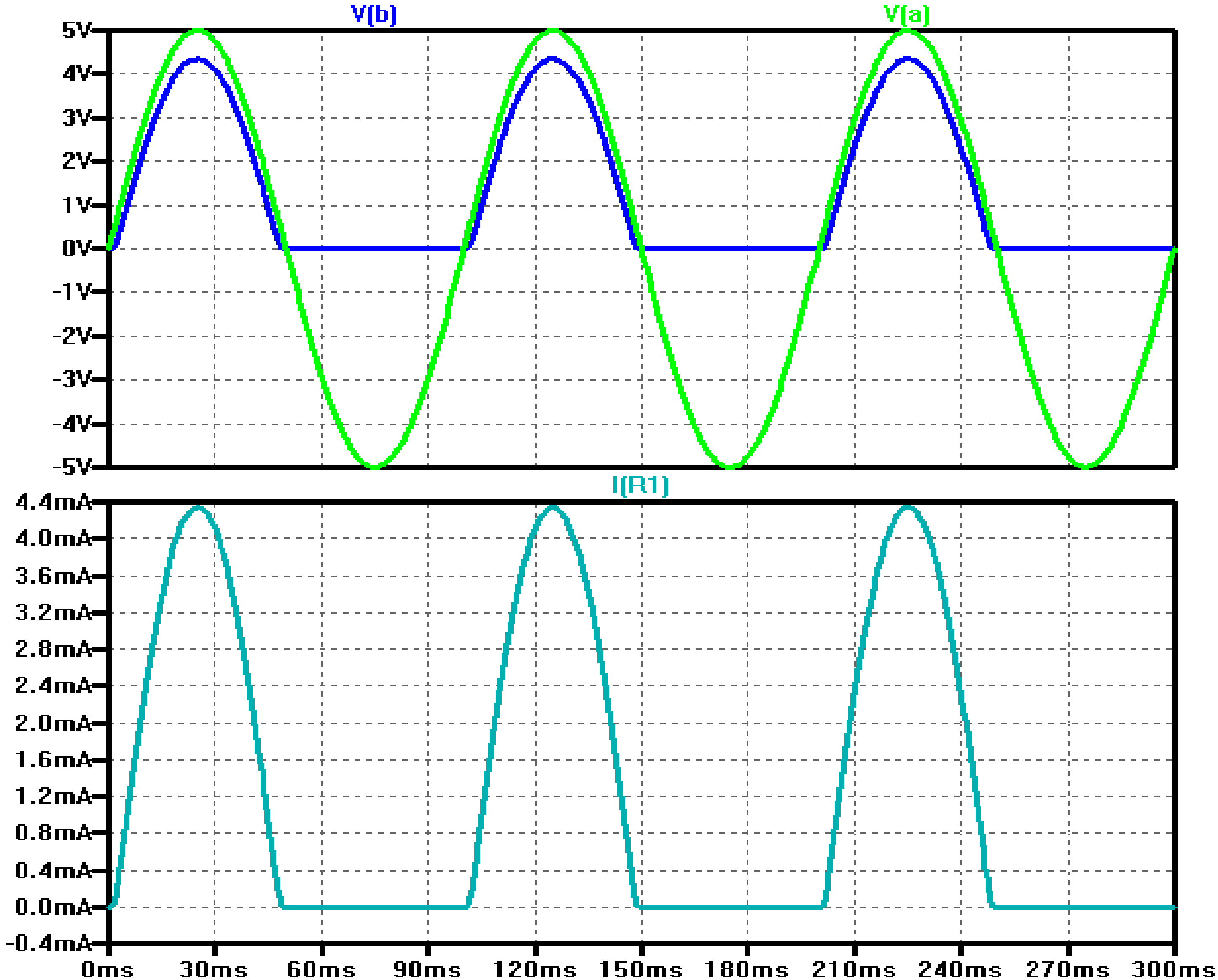




Raddrizzatore



Raddrizzatore

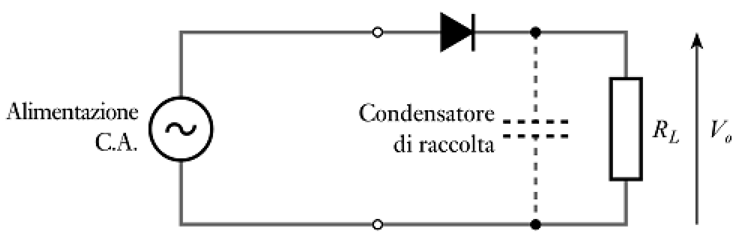


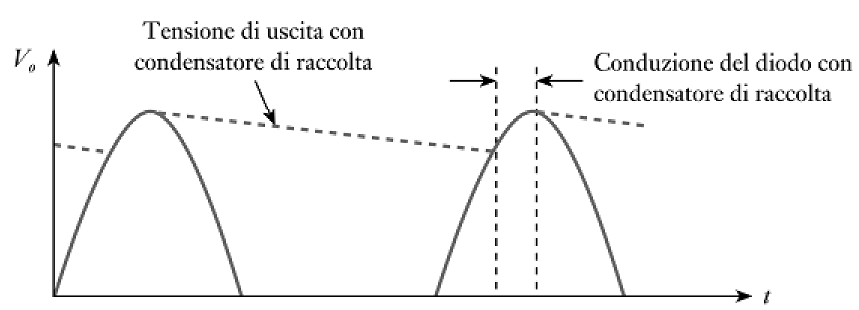
Alimentatori

Raddrizzatore con condensatore di filtro

la polarizzazione diretta permette la carica sul condensatore, che, in inversa, quando il diodo non conduce corrente, **si scarica sulla resistenza**

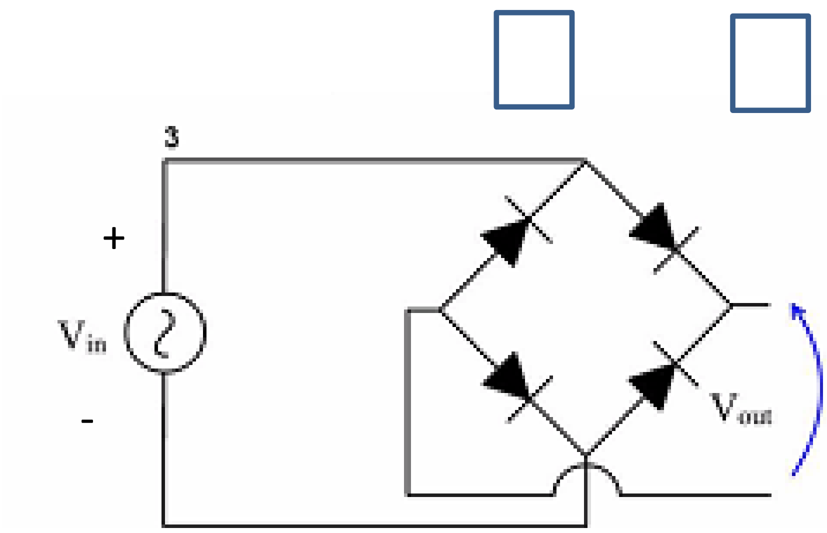
Raddrizzatore a semplice semi-onda

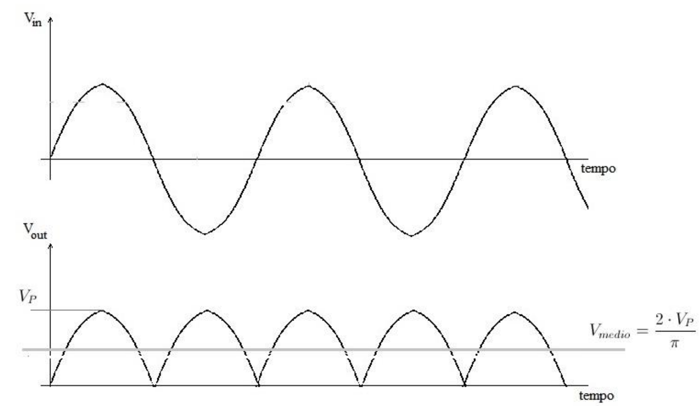




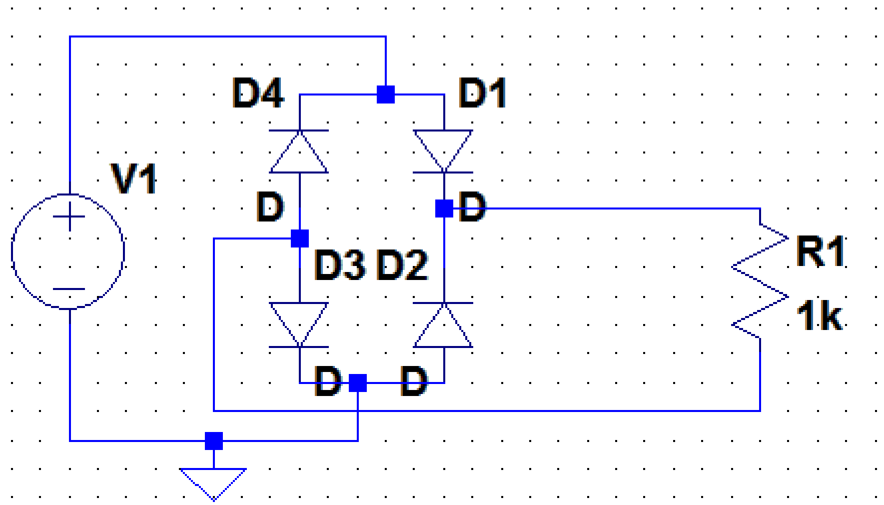
Alimentatori

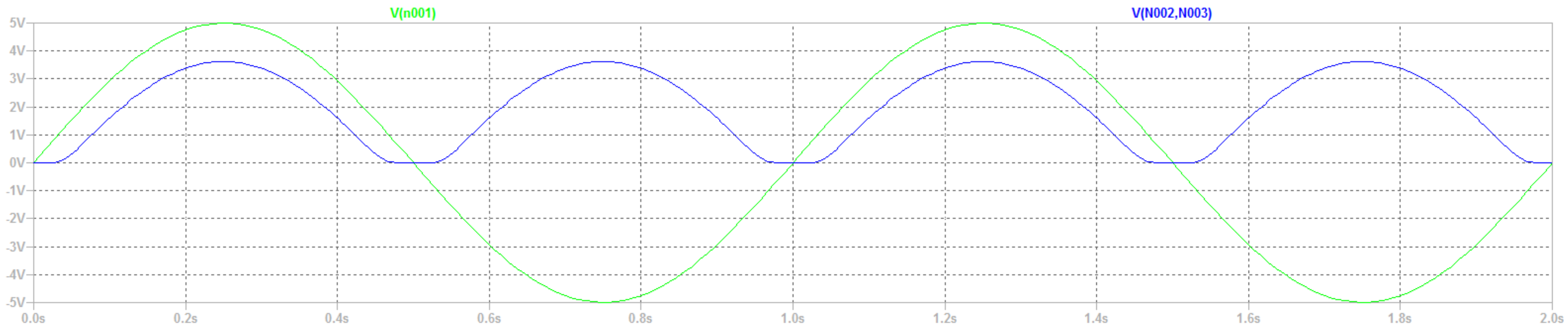
Raddrizzatore a ponte di Graetz (o a doppia semionda) che ribalta in uscita le creste negative del segnale sinusoidale in ingresso (ne ottiene matematicamente il modulo).



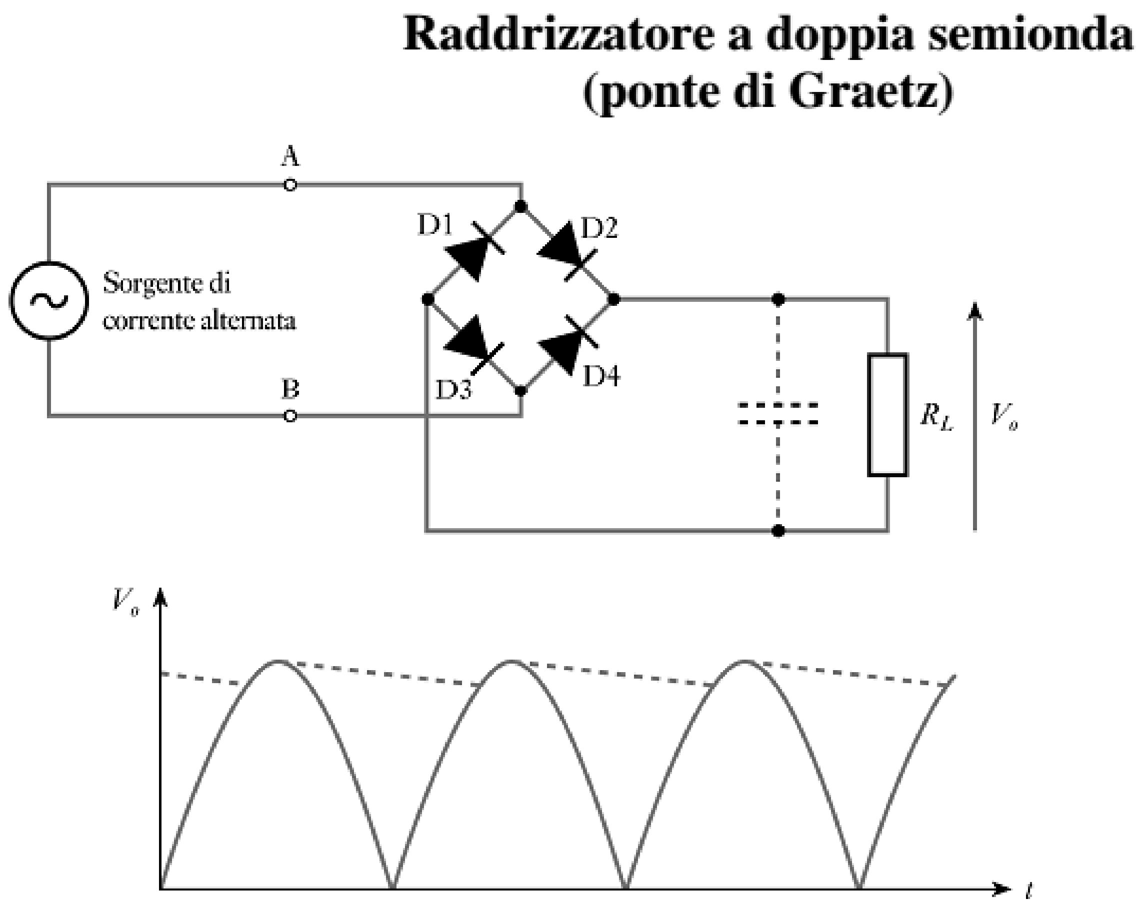


Raddrizzatore a doppia semionda

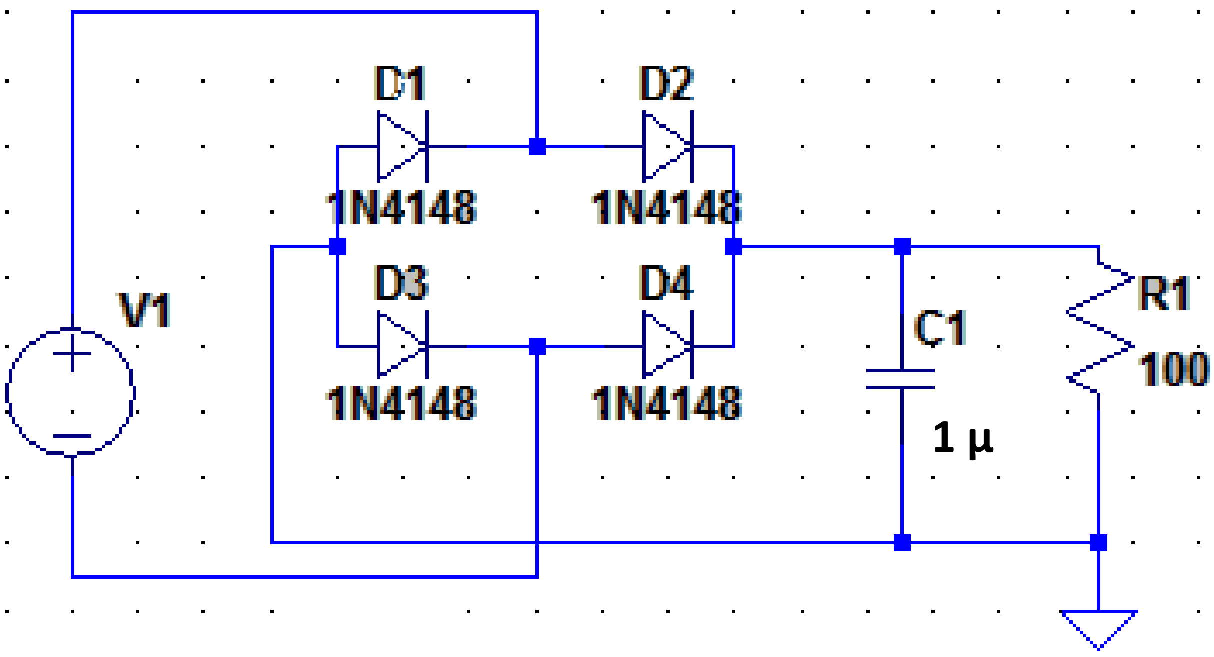


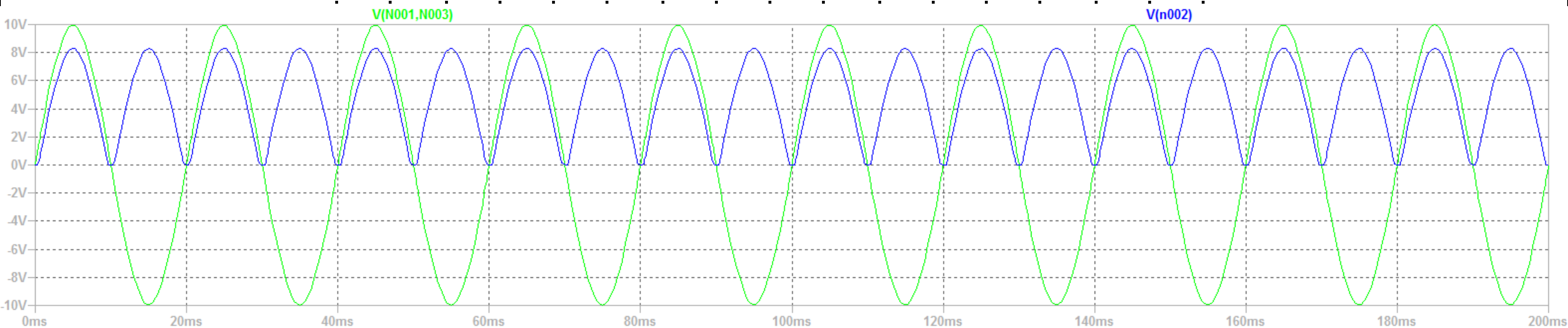


Raddrizzatore a doppia semionda

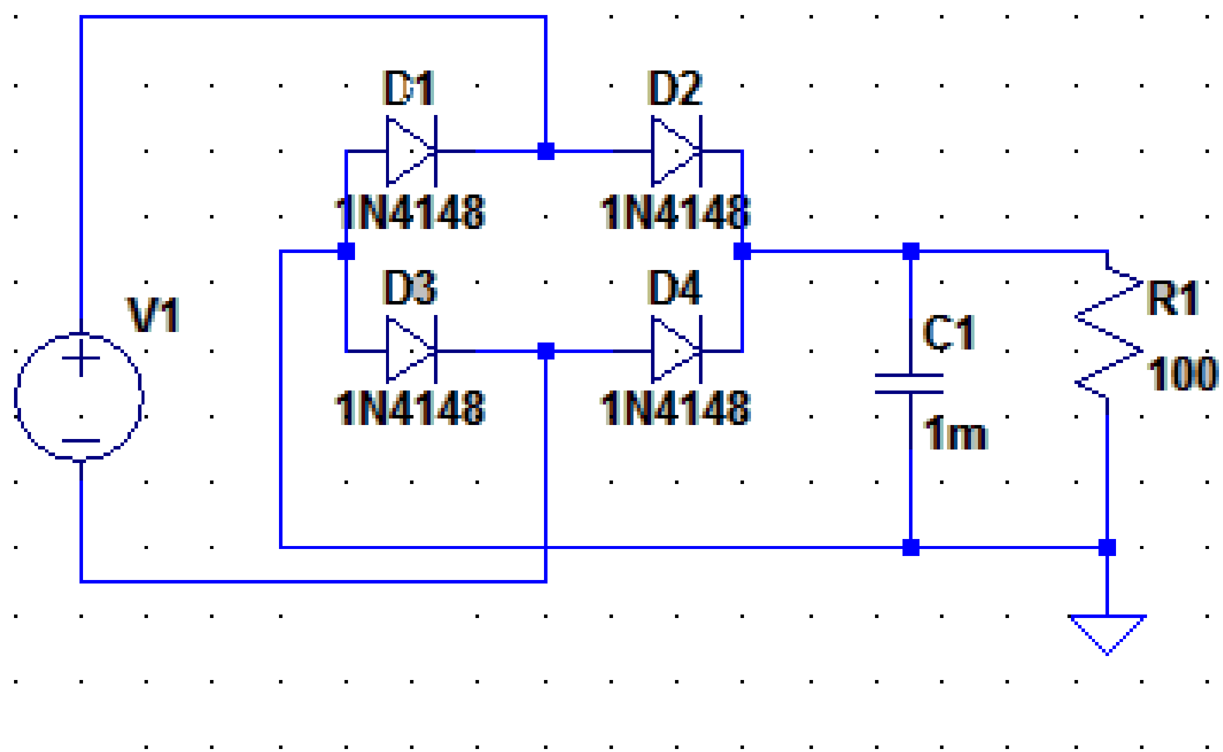


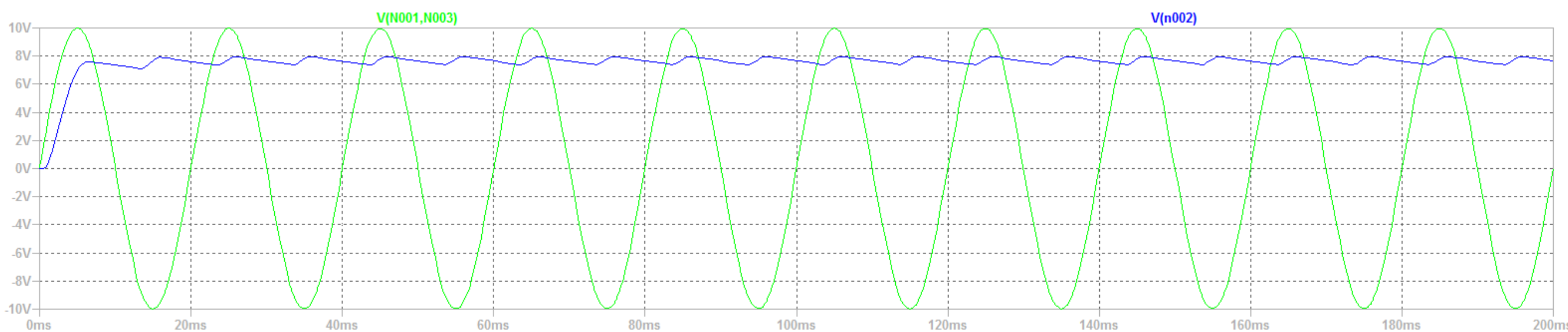
Raddrizzatore a doppia semionda



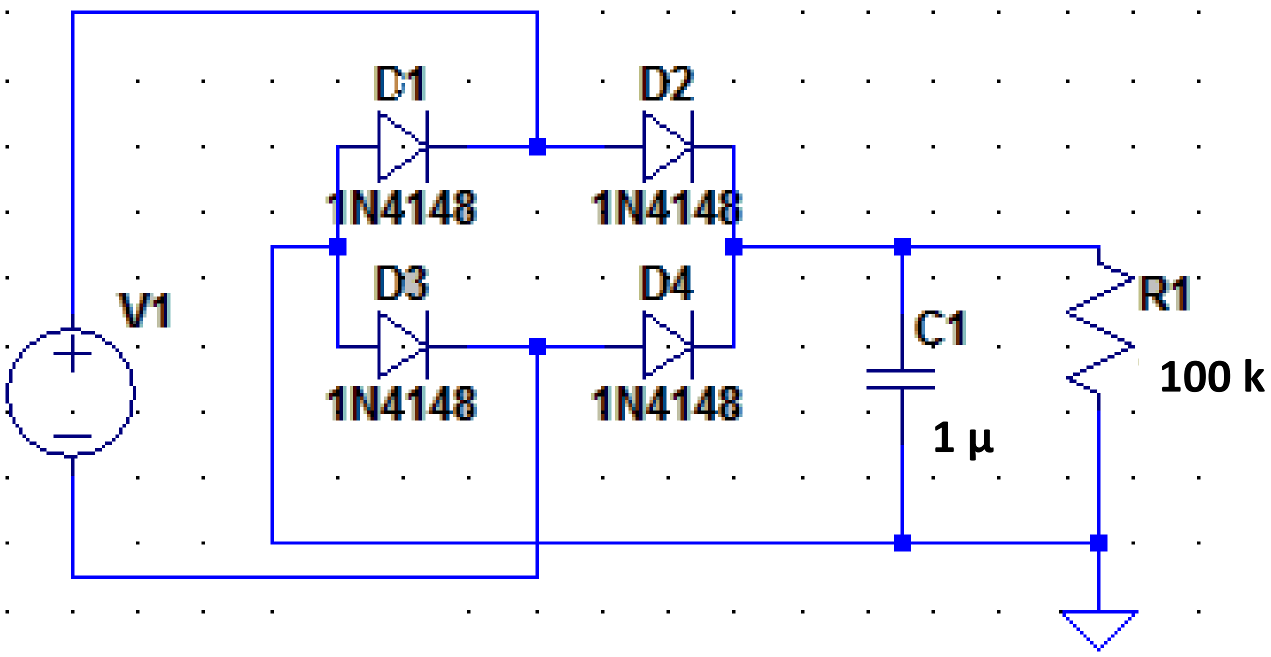


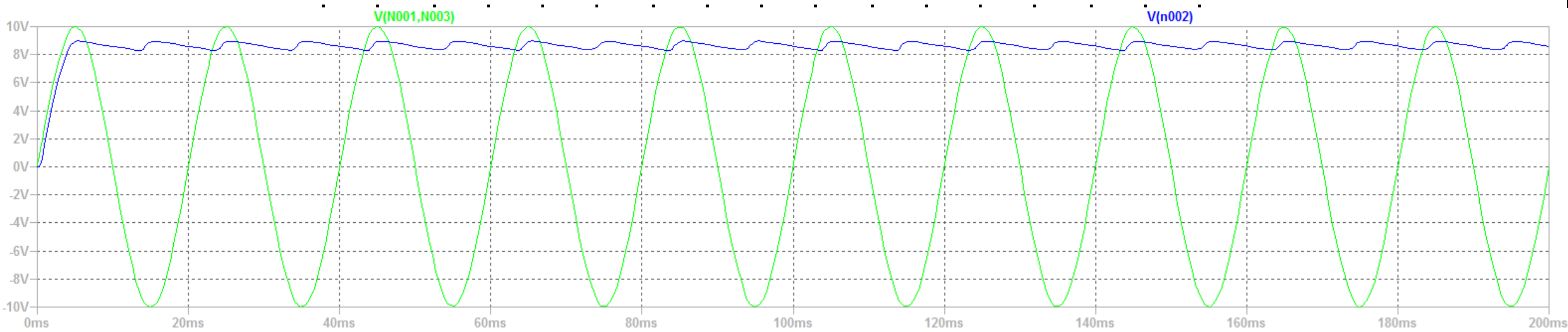
Raddrizzatore a doppia semionda



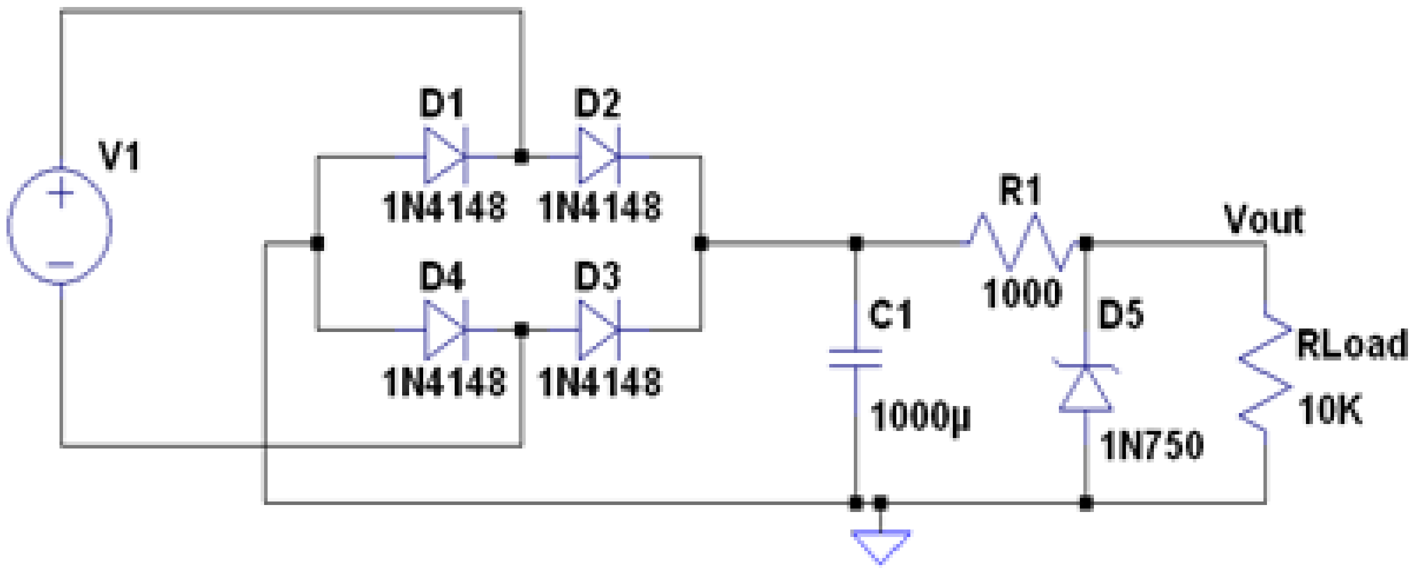


Raddrizzatore a doppia semionda





Raddrizzatore a doppia semionda



Amplificatori

Amplificatore

Generatore

- Solo forza lavoro: es. batteria
- Informazione: es. altoparlante, oppure biopotenziale

Un biopotenziale a tutti gli effetti un segnale elettrico con una sua forma d'onda, che in genere ha **bassa tensione e bassa potenza**

Questi segnali **per poter essere letti, necessitano di essere amplificati**

Amplificatore

Generalmente viene indicato come un triangolo.

Non ci preoccupiamo di come realmente sia fatto al suo interno. Lo tratteremo come una **black box** che svolge alcune funzioni e gode di alcune proprietà.

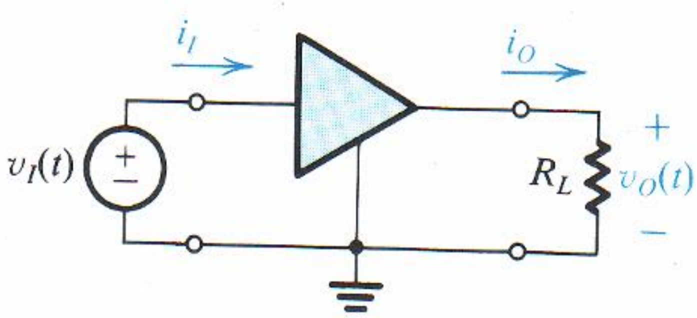
Amplificatore di tensione (esistono anche quelli di corrente)

Prende in ingresso un segnale, una tensione, e la trasforma in una tensione maggiore, amplificata

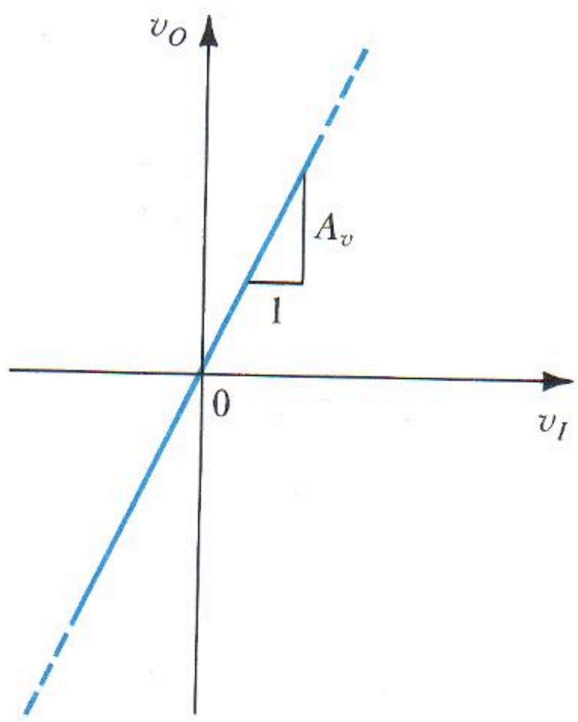
N.B. Il tutto viene fatto spendendo forza lavoro, ovvero, il mio amplificatore dovrà essere egli stesso alimentato da un generatore, vedremo come.

Amplificatore

In generale, il grafico che lega la tensione in uscita v_O con quella in ingresso v_I sarà una retta con coefficiente angolare maggiore di 1 (maggiore di quello della bisettrice del I e III quadrante).



(a)



(b)

Amplificatore

Un amplificatore, **NON È UN COMPONENTE PASSIVO**, ma deve utilizzare un'energia supplementare.

Questa energia gli deve arrivare da un'**ALIMENTAZIONE** vera e propria, che **non porta**, cioè, **"informazione", ma solo energia.**

Tutto questo viene rappresentato con un simbolo che prevede altri due ingressi, quelli di alimentazione.

Non è possibile avere in uscita un segnale v_O che esca dai limiti (rails in inglese) determinati dalla tensione di alimentazione (cioè $V- < v_O < V+$).

L'AMPLIFICATORE È UN COMPONENTE LINEARE

Supponiamo di avere in ingresso una sinusoide di ampiezza V_0, in uscita avremo una sinusoide di ampiezza AxV_0

L'ampiezza viene amplificata di un fattore A, guadagno del mio amplificatore

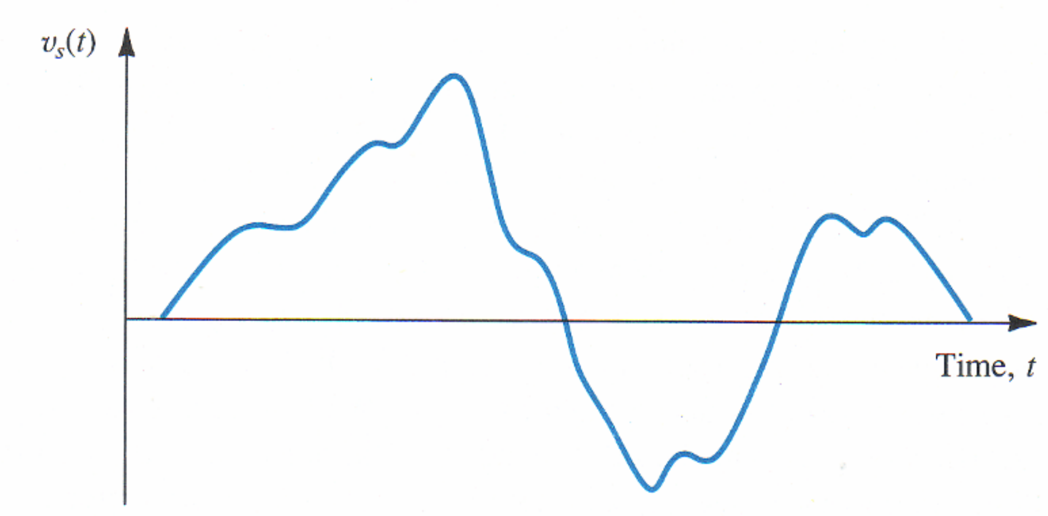
Considereremo sistemi lineari in cui se ho in ingresso due segnali $V_1 + V_2$,
L'uscita sarà data dalla somma delle due uscite amplificate

$Vout= AxV1 + AxV_2$

Sovrapposizione degli effetti

Amplificatori

Questo è fondamentale perché noi sappiamo che un segnale generico, può avere una forma, spettro, qualsiasi



Ma sappiamo anche che tale spettro può essere visto come la somma di più sinusoidi (Fourier)

A noi basta sapere come il nostro sistema risponde ad un segnale sinusoidale per poter descrivere l'uscita di quel sistema avente in ingresso una qualsiasi segnale

Per la sovrapposizione degli effetti in sistemi lineari se di un sistema riusciamo a valutare la risposta ad una sinusoide qualsiasi la sua frequenza, ampiezza e fase,

Potremo trovare la risposta a qualsiasi segnale.

Amplificatore rail to rail

Visto che, in linea di principio, il segnale v_I potrebbe essere sinusoidale centrato intorno al riferimento di massa (0 Volt), **si ha l'esigenza di avere un'alimentazione che fornisca tensioni anche al di sotto dello 0**.

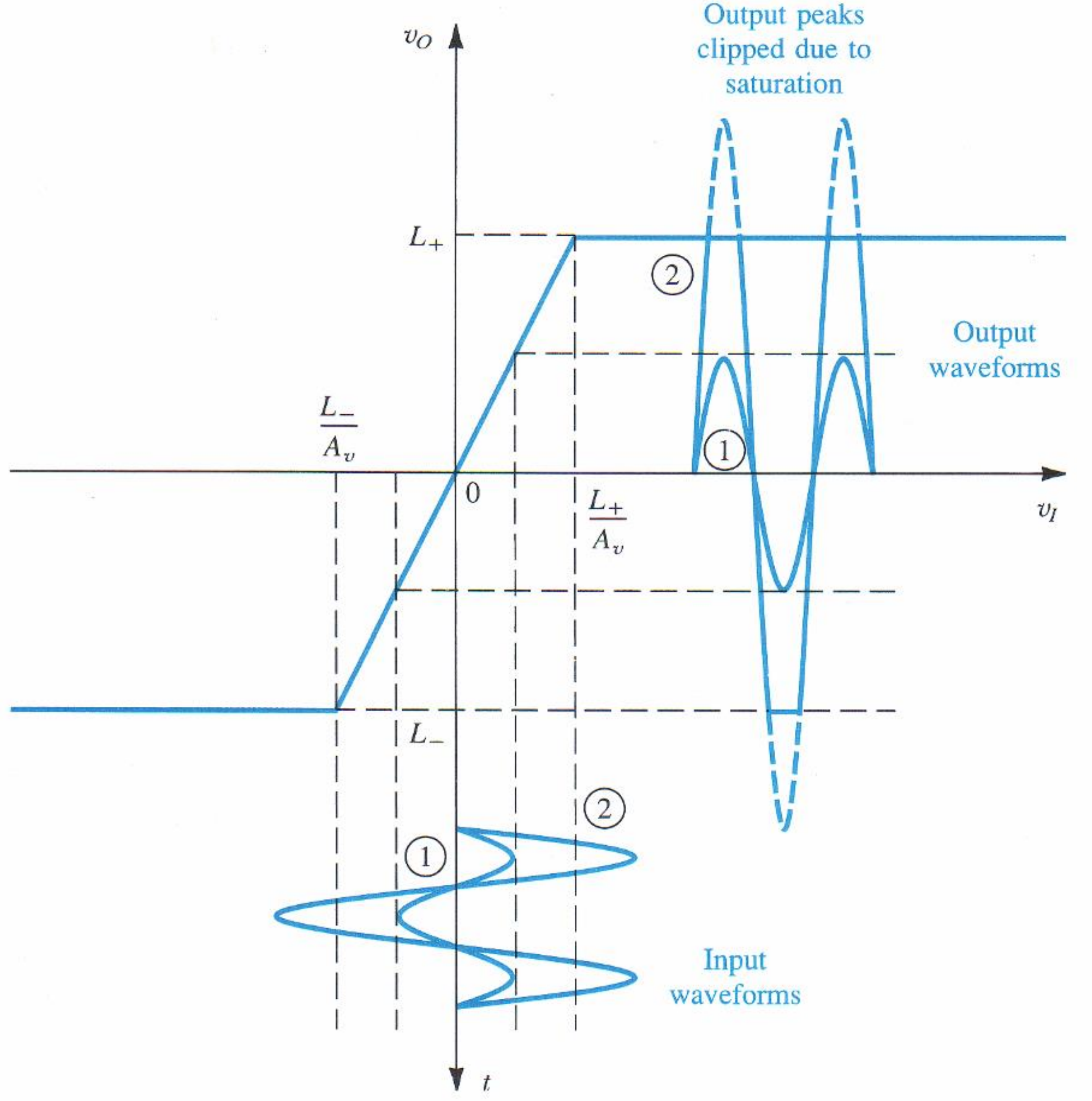
Per questo motivo è necessario utilizzare una **tensione di alimentazione chiamata duale**

Amplificatore rail to rail

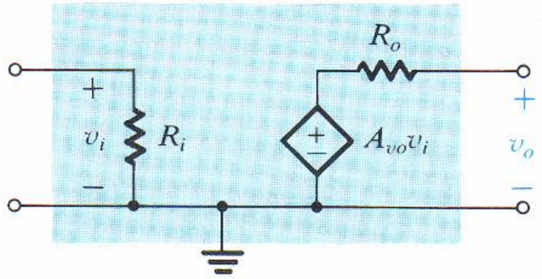
La presenza di una tensione di alimentazione non infinita impedisce alla tensione di uscita di raggiungere qualsiasi valore. Quindi, **la caratteristica di un amplificatore reale non è una retta, ma una retta saturata**, come quella rappresentata in figura.

Se l'amplificazione è eccessiva, i segnali in uscita presentano un **taglio in ampiezza** (clipping in inglese)

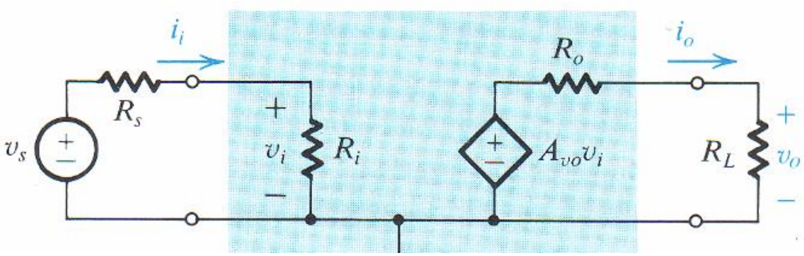
Amplificatore rail to rail



Rappresentazione di un amplificatore



(a)



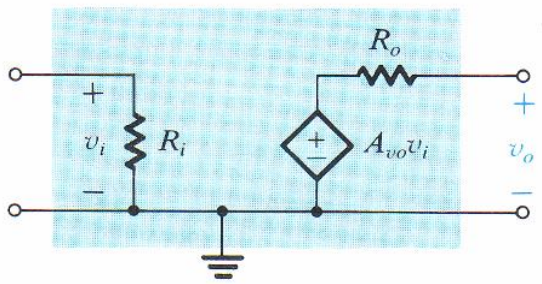
Il simbolo romboidale rappresenta un **generatore pilotato in tensione**, un generatore, cioè, che genera una tensione in uscita proporzionale a un'altra tensione (v_i in questo caso), tramite un **coefficiente di proporzionalità** (A_{vO} in questo caso).

Per rappresentare l'amplificatore inserito in un circuito, **è necessario aggiungere un generatore di tensione** (con la sua resistenza in serie) **e un carico**, rappresentabile con una resistenza R_L.

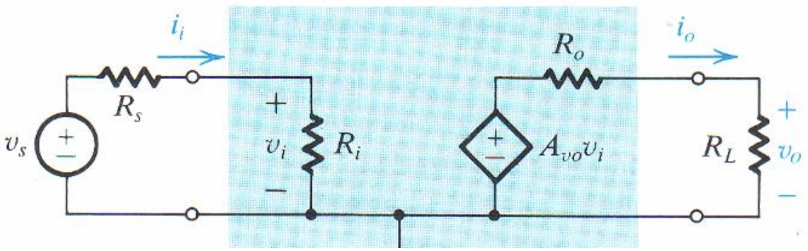
Questo modello, ovviamente, non prevede nessun effetto di saturazione.

Approssimazione accettabile se si verifica in altro modo che non si esca mai dalla zona di linearità, per l'ampiezza dei segnali considerati.

Rappresentazione di un amplificatore



(a)



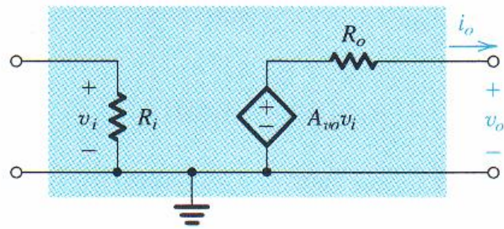
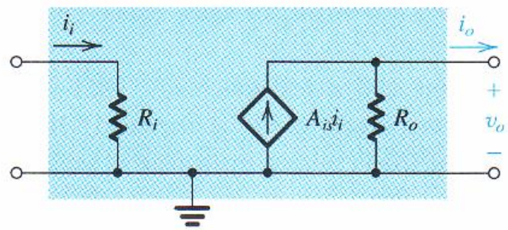
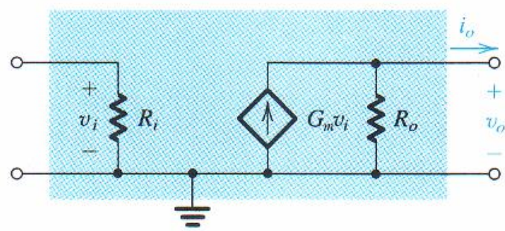
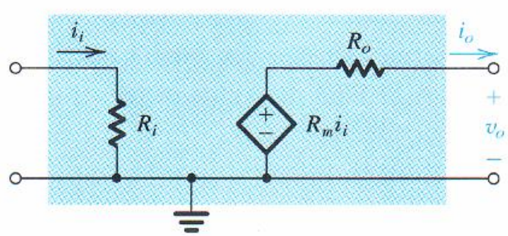
In un generatore reale, inoltre sarà presente

- una resistenza in ingresso Rin
- una resistenza in uscita, in serie al mio ideale generatore controllato Rout

Idealmente:

- Rin = 0 → Iin = 0
- Rout = ∞ → Vout=VL

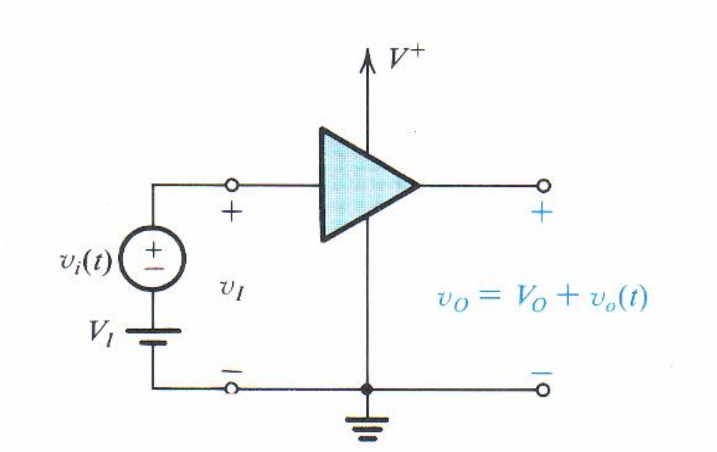
Classificazione degli amplificatori

Type	Circuit Model	Gain Parameter	Ideal Characteristics
Voltage Amplifier		Open-Circuit Voltage Gain $A_{vo} \equiv \left.\frac{v_o}{v_i}\right\rvert_{i_o = 0}$ (V/V)	$R_i = \infty$ $R_o = 0$
Current Amplifier		Short-Circuit Current Gain $A_{is} \equiv \left.\frac{i_o}{i_i}\right\rvert_{v_o = 0}$ (A/A)	$R_i = 0$ $R_o = \infty$
Transconductance Amplifier		Short-Circuit Transconductance $G_m \equiv \left.\frac{i_o}{v_i}\right\rvert_{v_o = 0}$ (A/V)	$R_i = \infty$ $R_o = \infty$
Transresistance Amplifier		Open-Circuit Transresistance $R_m \equiv \left.\frac{v_o}{i_i}\right\rvert_{i_o = 0}$ (V/A)	$R_i = 0$ $R_o = 0$

Alimentatori non duali

Non tutti gli amplificatori hanno una alimentazione duale

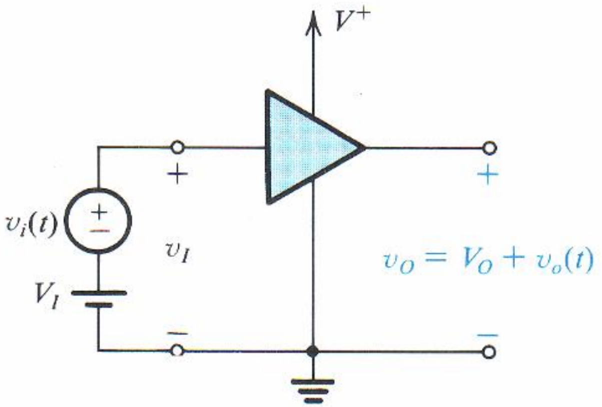
In alcuni casi uno dei due pin di alimentazione è a massa

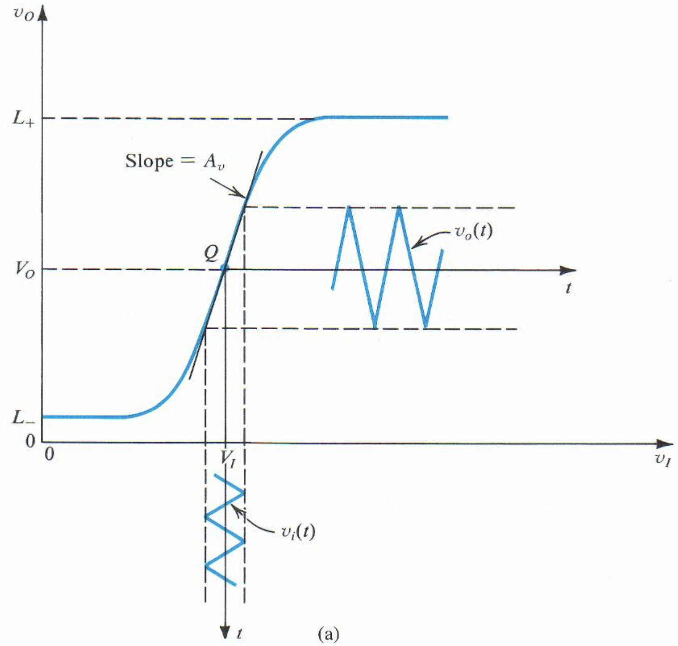


Amplificatore

Ciò significa che io mi devo mettere nelle condizioni in cui il mio segnale amplificato non venga tagliato

Se si decide di avere una tensione non duale ma singola, è necessario **“spostare” il segnale a una tensione chiamata di polarizzazione**, che permetta al segnale di **centrarsi nella zona di linearità** e non essere tagliato dalla saturazione.

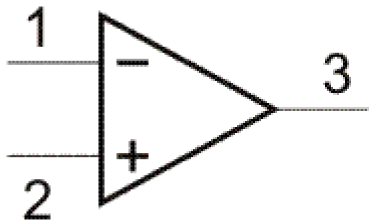


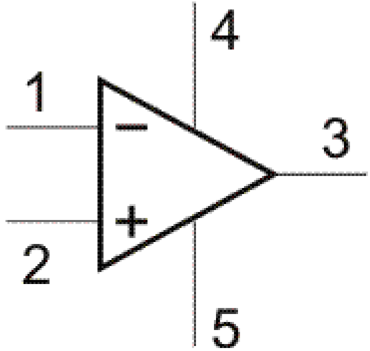


Amplificatori Operazionali

Configurazione invertente e non invertente

Amplificatori Operazionali



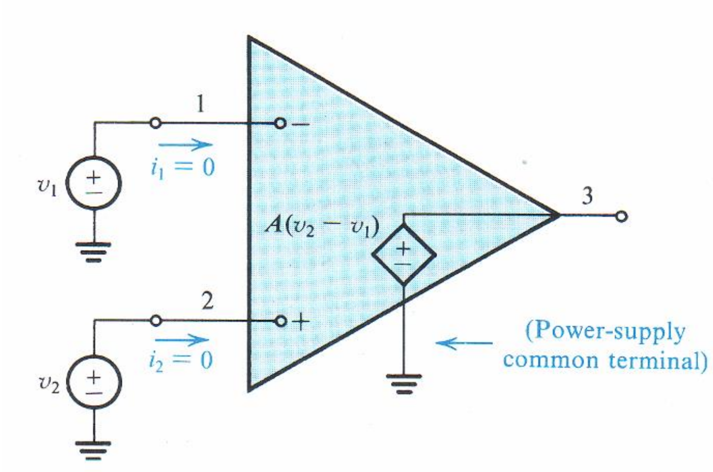


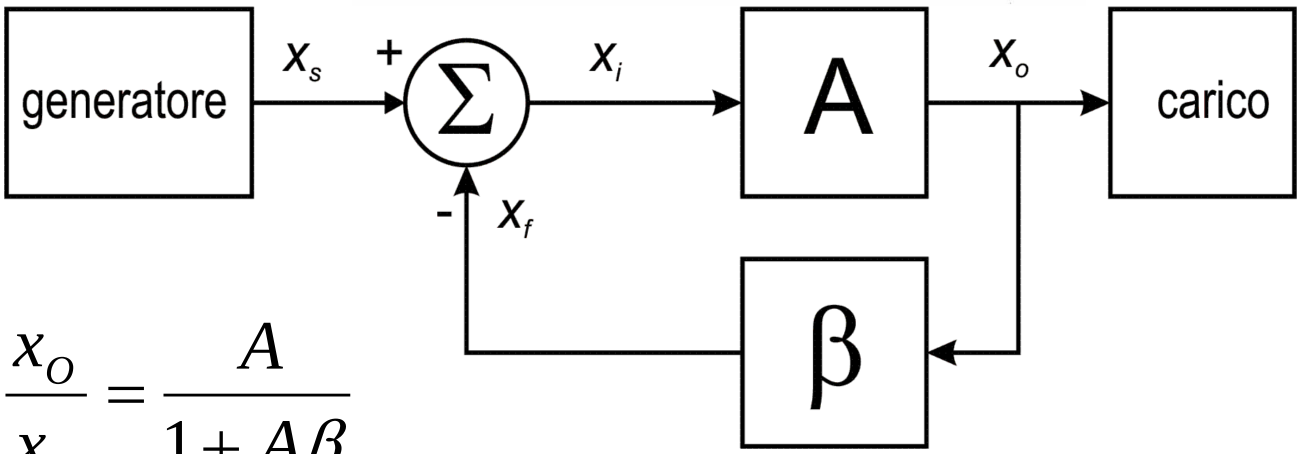
Componente a tre terminali (*ingresso invertente* -, *ingresso non-invertente* +) che **genera in uscita una tensione verso massa** (se il circuito è alimentato dualmente la massa è intesa come il potenziale medio tra quello di 4 e 5)

La tensione in uscita è data da:
prodotto tra la differenza di potenziale tra i due terminali di ingresso (positiva se la tensione sul terminale + è maggiore) **e il guadagno A** (chiamato anche ***guadagno ad anello aperto***) che in un operazionale ideale si può assumere infinito.

$$\boldsymbol{V_{out} = A(V_+ - V_-)}$$

Amplificatori Operazionali



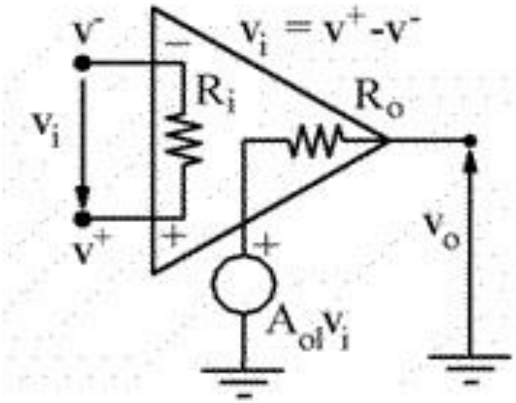


$$A_f \equiv \frac{x_O}{x_S} = \frac{A}{1 + A\beta}$$

Se Aβ è molto più grande di 1

$$A_f \cong \frac{1}{\beta}$$

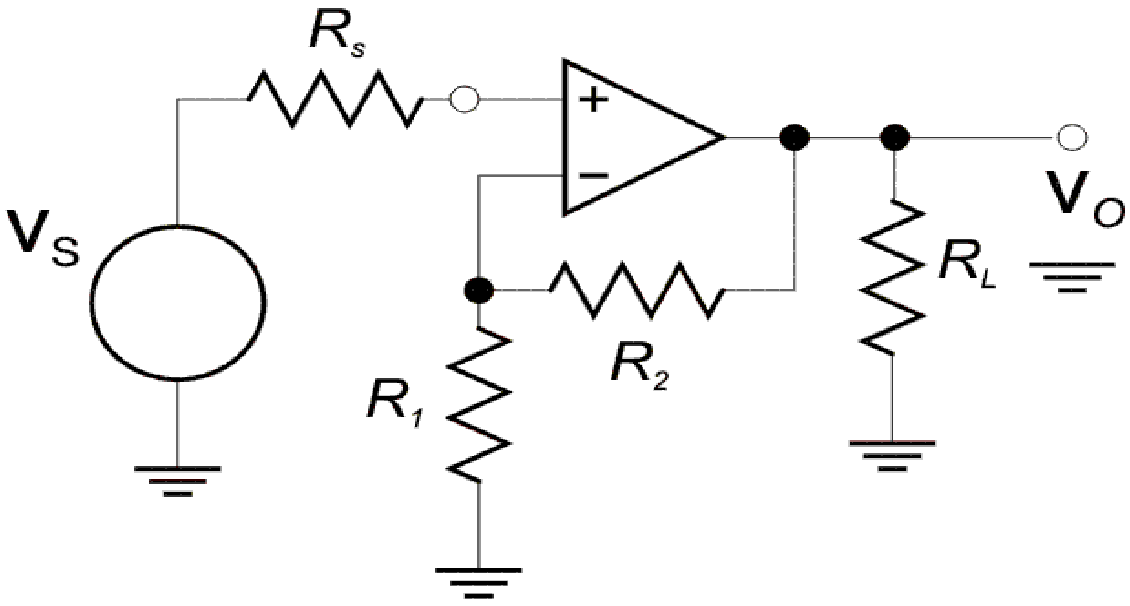
Amplificatori Operazionali



- A molto grande, idealmente infinito.
- Ri molto grande, idealmente infinita
- Rout molto piccola, idealmente 0
- Sistema Stabile
  - *Ad un ingresso finito deve corrispondere un'uscita finita*
  - $V_{out} = A(V_+ - V_-)$
  - *Se A tende ad infinito,* $(V_+ - V_-)$ *deve tendere a zero*

L'azione dell'operazionale di fatto è quindi rivolta ad **azzerare la differenza tra le tensioni in ingresso**

Sistema retroazionato



$$\beta = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$A_f \cong \frac{R_1 + R_2}{R_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

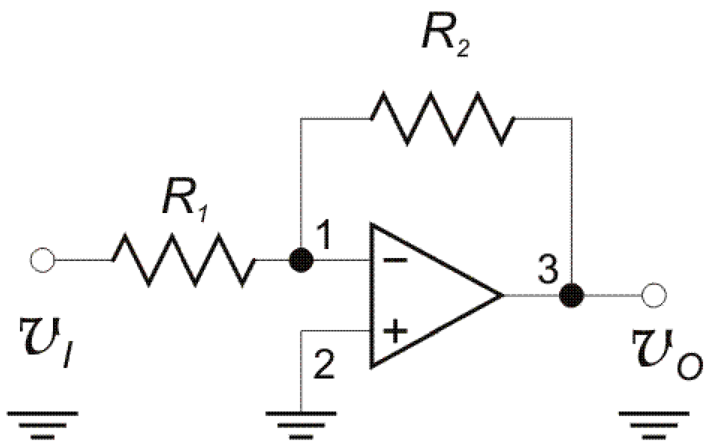
$$V_{out} = V_s\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$

Amplificatori Operazionali:

Configurazione invertente

Configurazione invertente

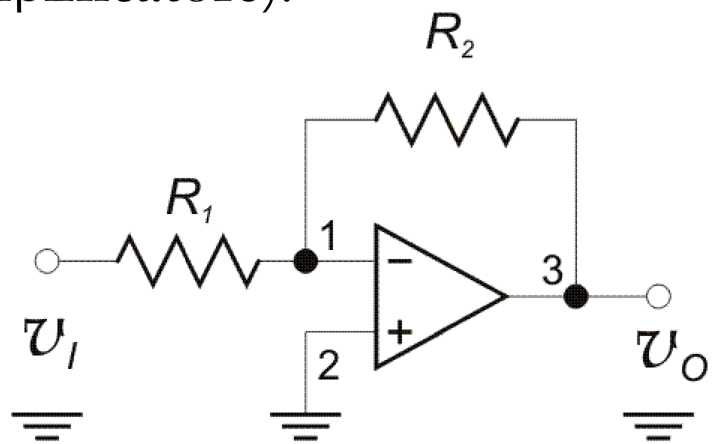
Supponiamo di avere un operazionale ideale, in particolare, con guadagno ad anello aperto infinito e resistenza di ingresso infinita (cioè corrente nulla in ingresso all'amplificatore).



Provate a risolvere questo circuito e a trovare il guadagno

Configurazione invertente

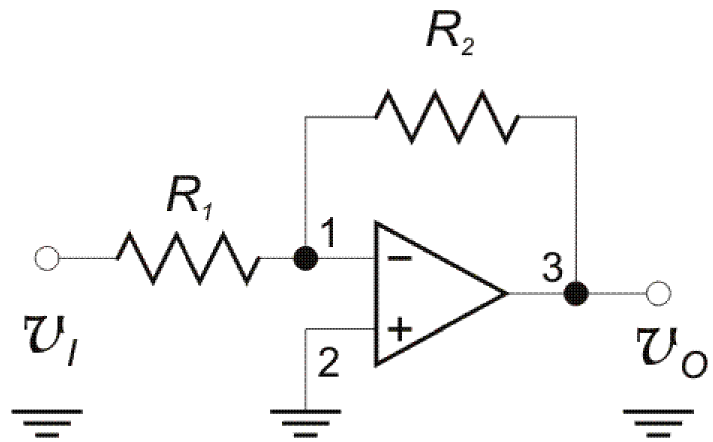
Supponiamo di avere un operazionale ideale, in particolare, con guadagno ad anello aperto infinito e resistenza di ingresso infinita (cioè corrente nulla in ingresso all'amplificatore).



Se si suppone di avere guadagno infinito e v_0 finita, bisogna supporre che v_2-v_1 sia circa nulla, cioè di avere sul terminale 1 quella che viene chiamata **massa virtuale**.

R_1 è quindi attraversata da una i_1 ricavata da v_1/R_1.
Tale corrente non può far altro che proseguire su R_2, visto che abbiamo assunto la **corrente in ingresso all'operazionale nulla**.

Configurazione invertente



Se faccio la KVL ottengo che $-V_{R2} - V_{out}=0$

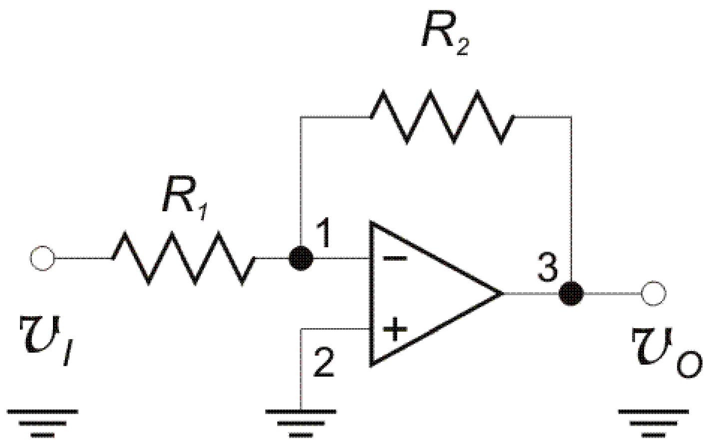
Ma anche

$V_{in}-V_{R1} =0$

$V_{in}= V_{R1}$

$i_1= V_{in}/R_1$

Configurazione invertente



Dalla KCL al nodo 1 so che $i_1=i_2$

$-V_{R2} - V_{out}=0 \rightarrow V_{out}=- V_{R2}$

$V_{out}=- V_{R2}=-i_2R_2$

$V_{out}=-(V_{in}/R_1)R_2$

Configurazione invertente

Si ricava perciò la relazione:

$$v_{out} = -\frac{v_{in}}{R_1} R_2$$

e quindi quella del guadagno

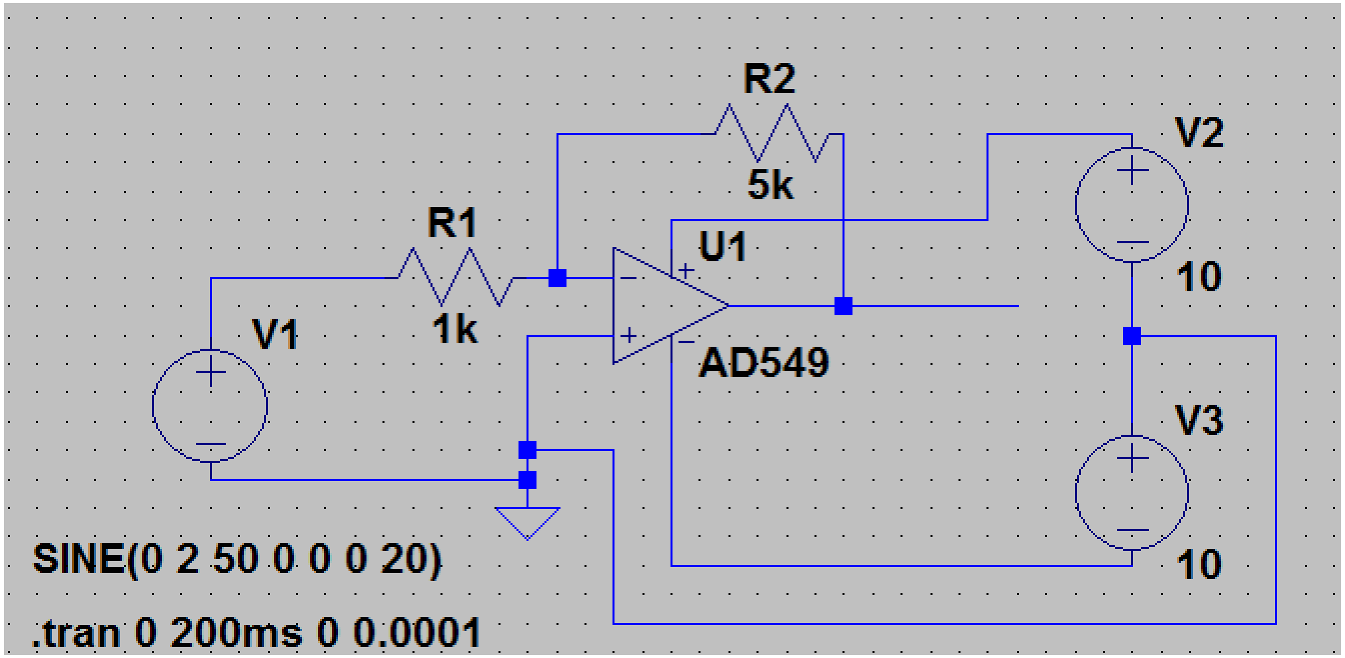
$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = -\frac{R_2}{R_1}$$

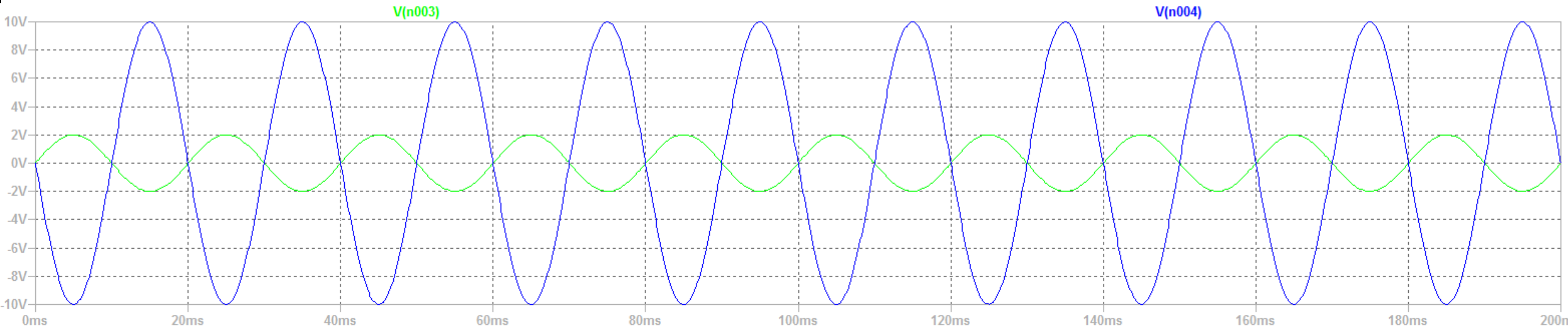
si tenga conto che per azzerare il nodo 1, l'operazionale (non potendo assorbire corrente sul nodo 1) si limita a variare la tensione al nodo 3.

- **Il segnale in uscita è opposto in segno all'ingresso**
- **Posso amplificare (R_2>R_1) o deamplificare (R_2<R_1)**

Configurazione invertente

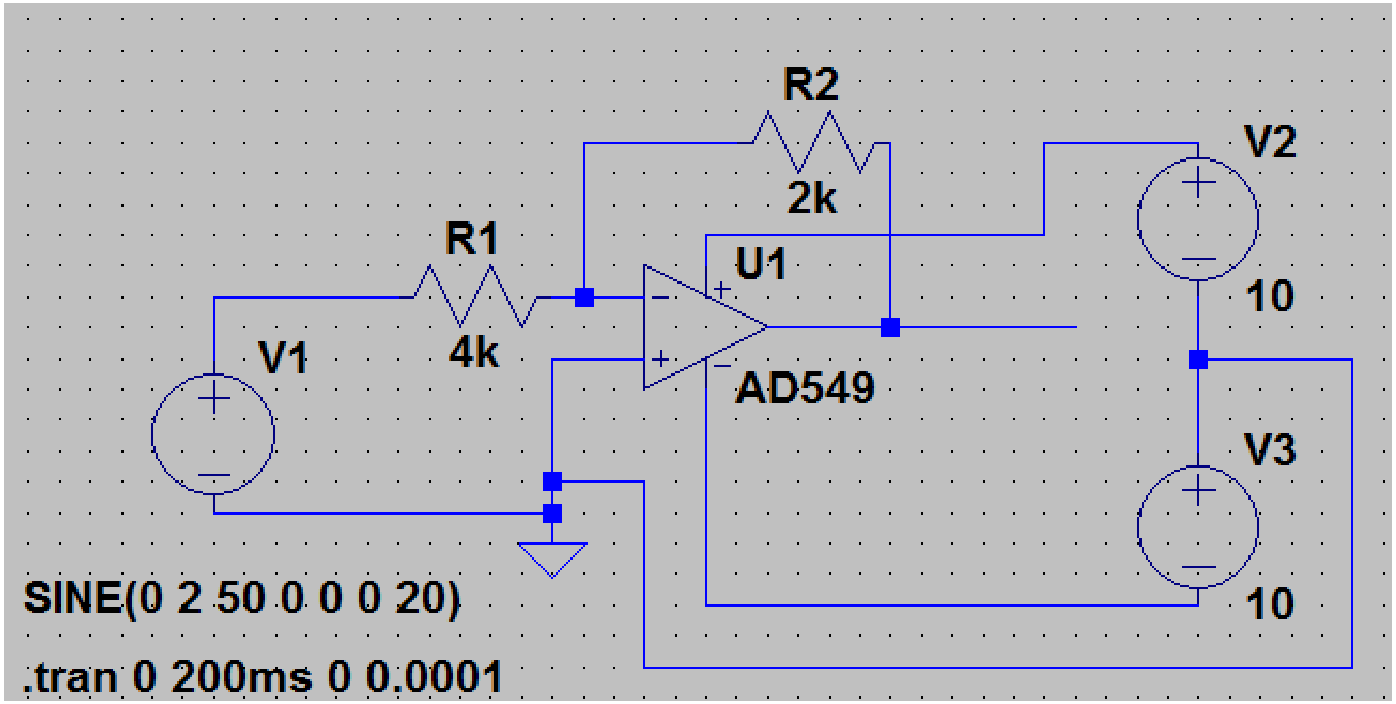
Provare a realizzare un amplificatore in configurazione invertente con guadagno Af = -5, utilizzando un amplificatore duale rail to rail

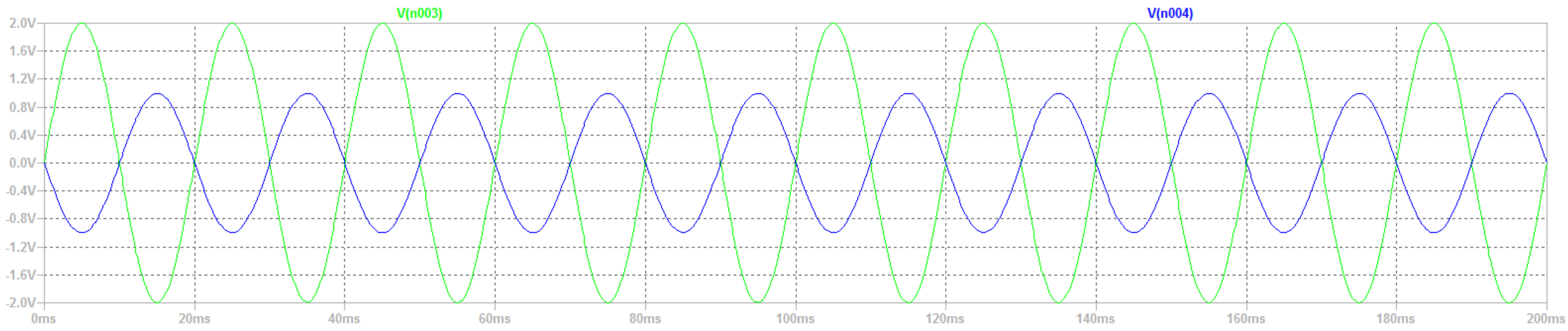




Configurazione invertente

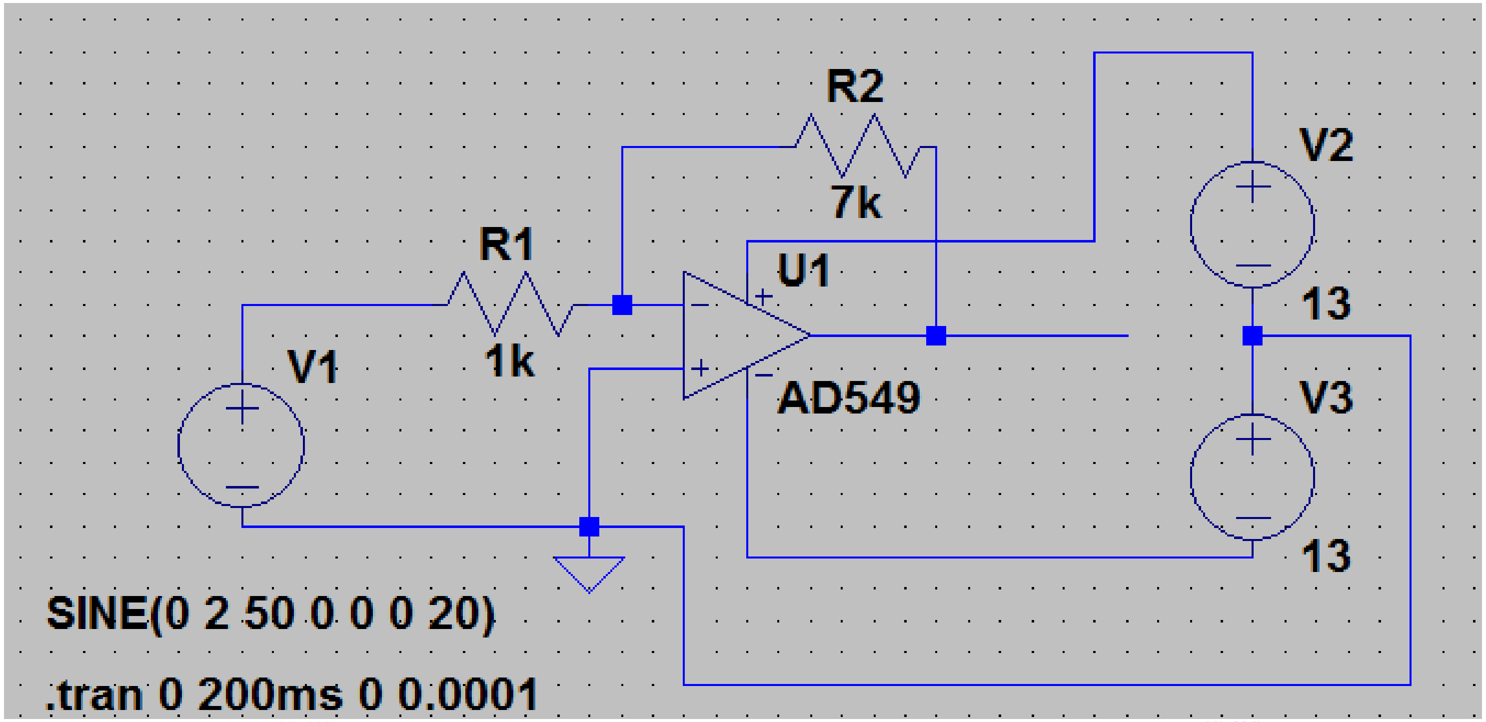
Provare a realizzare un deamplificatore in configurazione invertente

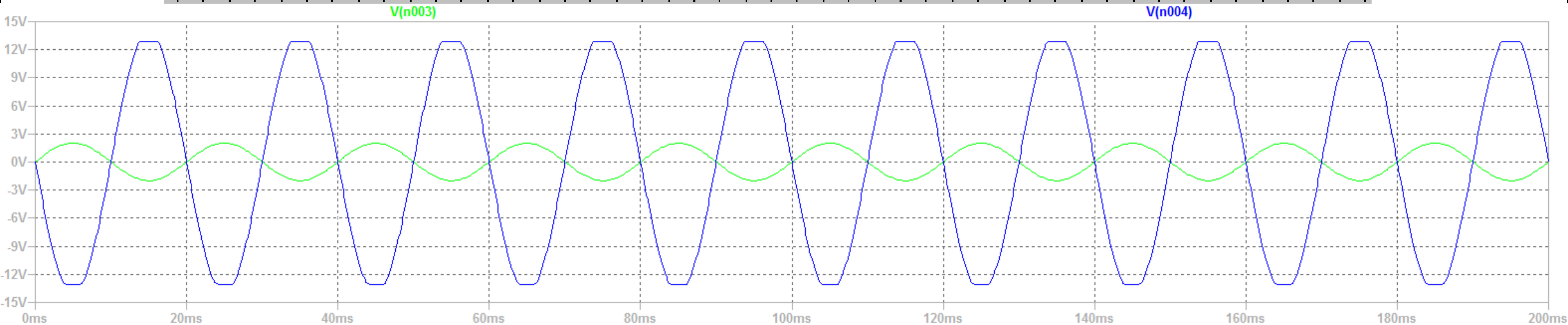




Configurazione invertente

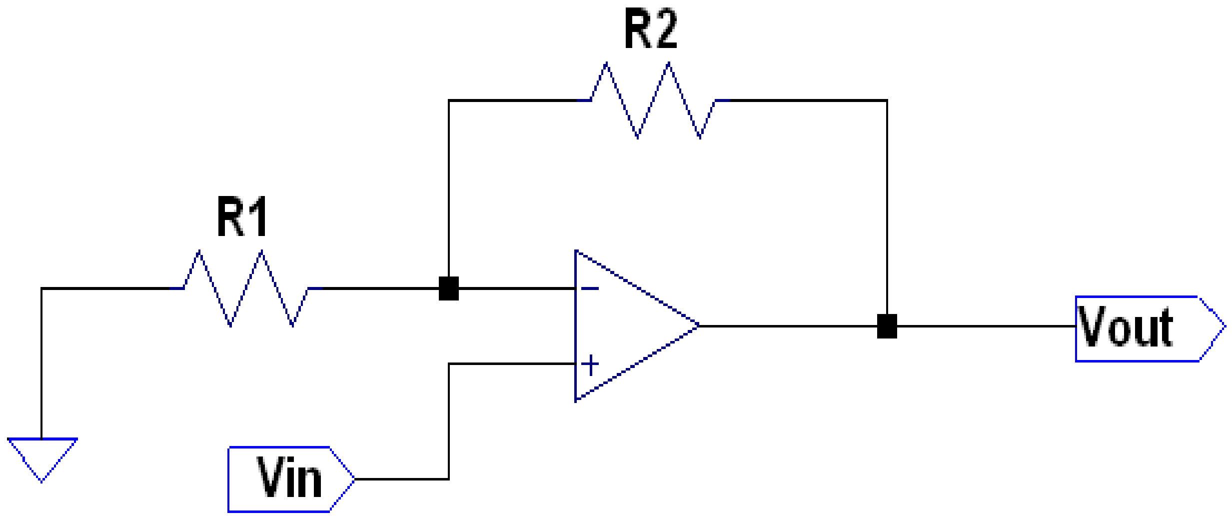
Utilizzare la stessa Vin, e realizzare un amplificatore con guadagno Af=-7, considerare un amplificatore duale rail to rail (13V)





Configurazione non invertente

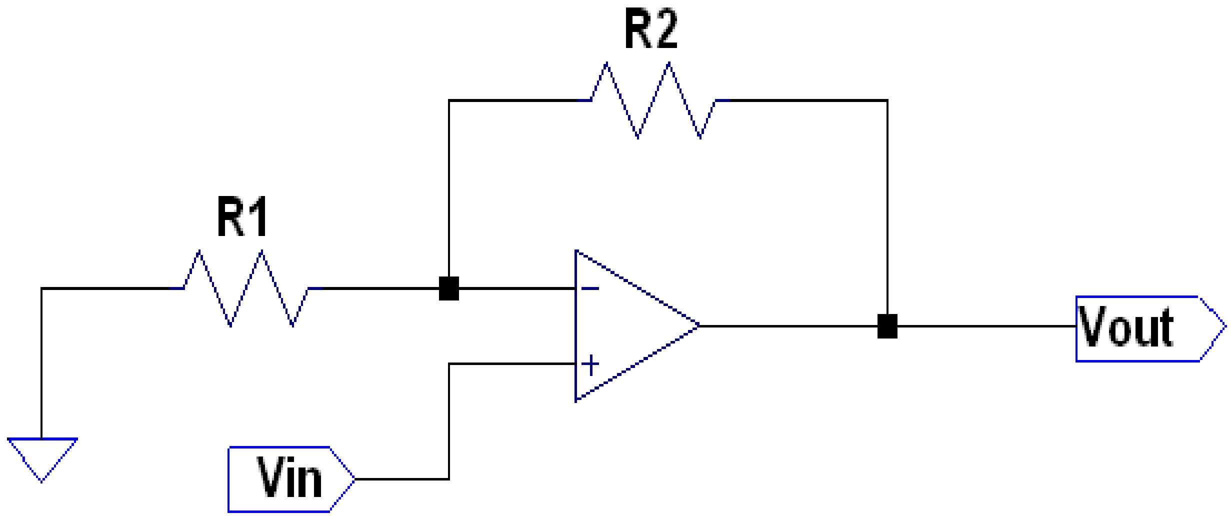
Configurazione non invertente



In questo caso, l'alimentazione è collegata al terminale positivo (anche indicato non invertente)

Provare a fare lo stesso ragionamento con questo circuito

Configurazione non invertente



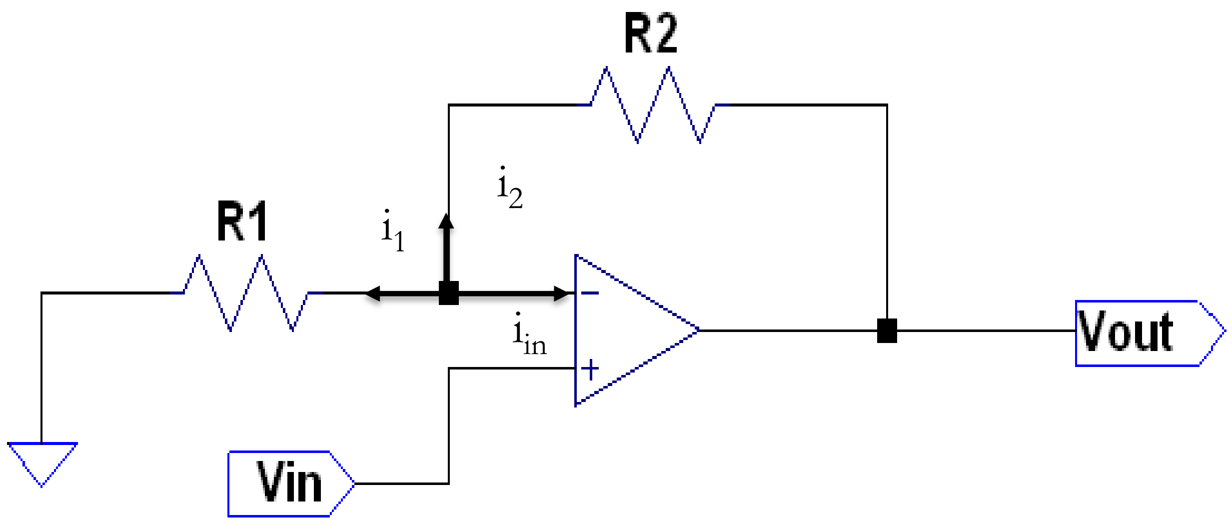
Il segnale di uscita non ha una inversione di ingresso rispetto a quello in ingresso.

Le tensioni sono tutte riferite a massa.

La relazione ingresso-uscita può essere ottenuta considerando il guadagno in anello aperto dell'operazionale tanto elevato da richiedere, per avere una V_{out} finita, una tensione differenziale circa nulla.

In tali condizioni la tensione sul terminale – di ingresso deve essere pari a V_{in}

Configurazione non invertente



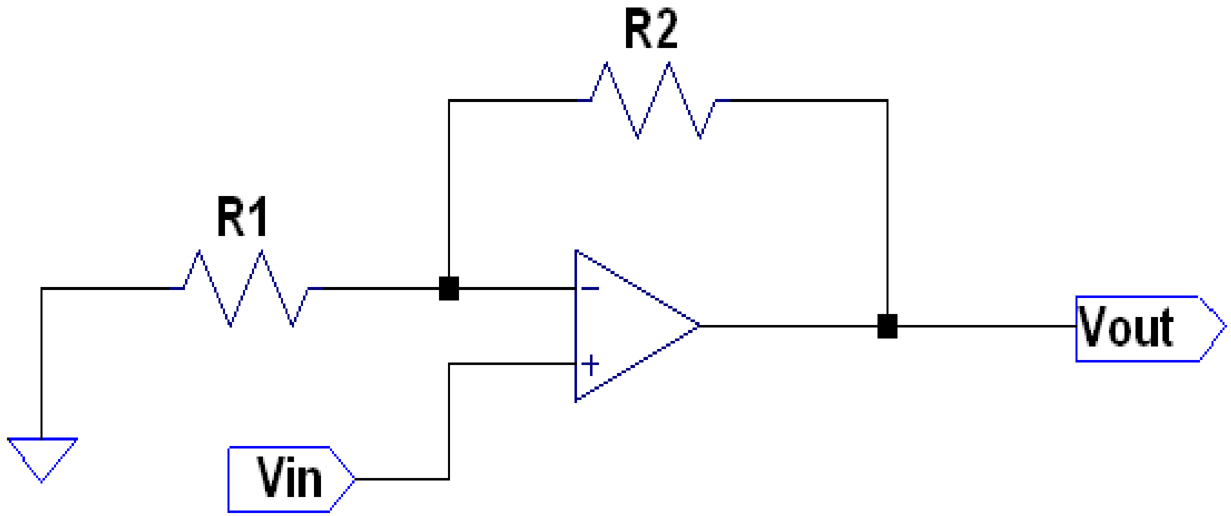
Considerando la resistenza in ingresso all'operazionale idealmente infinita, si ha:

$$\frac{V_{in}}{R_1} = I_1$$

Dalla KCL trovo

$$I_1 = -I_2$$

Configurazione non invertente



Faccio la KVL sulla seconda maglia e trovo

$$V_{in} - V_2 - V_{out} = 0$$

$$V_2 = R_2 I_2 = -R_2 I_1$$

$$V_2 = V_{out} = V_{in} - R_2 I_2$$

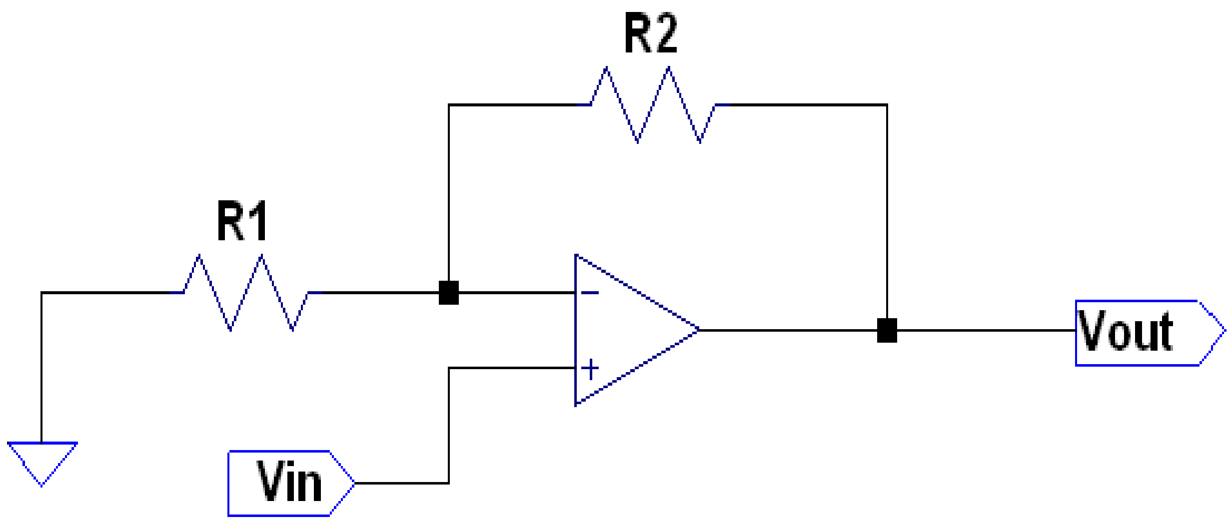
$$V_{out} = V_{in} + R_2 i_1$$

$$\frac{V_{in}}{R_1} = I_1$$

$$V_{out} = V_{in} + R_2 \frac{V_{in}}{R_1}$$

$$\boxed{V_{out} = V_{in}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Configurazione non invertente



Metodo più semplice:

$$\frac{V_{in}}{R_1} = I_1 = I_2 = \frac{V_{out} - V_{in}}{R_2}$$

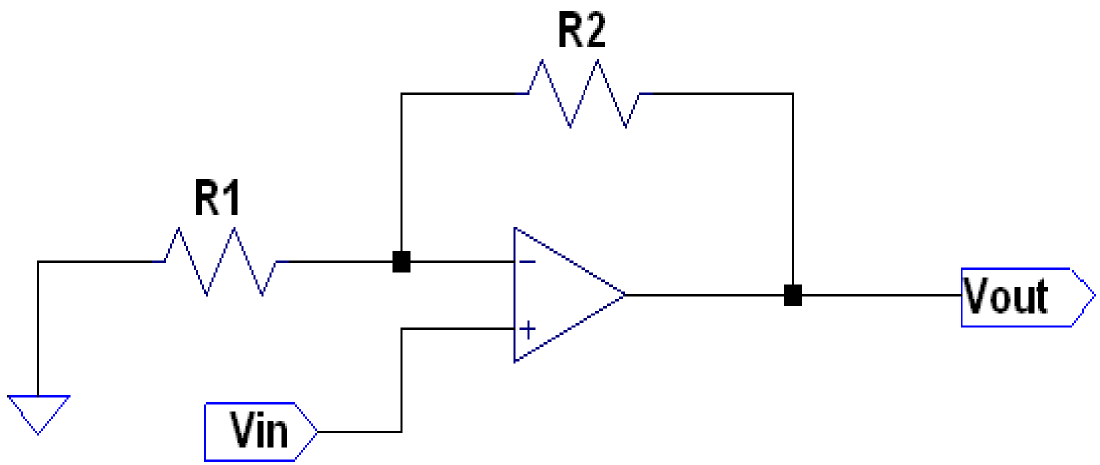
$$R_1 V_{out} - R_1 V_{in} = R_2 V_{in}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R_2 + R_1}{R_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

Caratteristiche principali della configurazione non-invertente sono:

- *guadagno positivo e sempre maggiore di 1*
- *resistenza in uscita idealmente nulla (quella dell'operazionale)*
- *resistenza in ingresso idealmente infinita (quella dell'operazionale)*

Configurazione non invertente



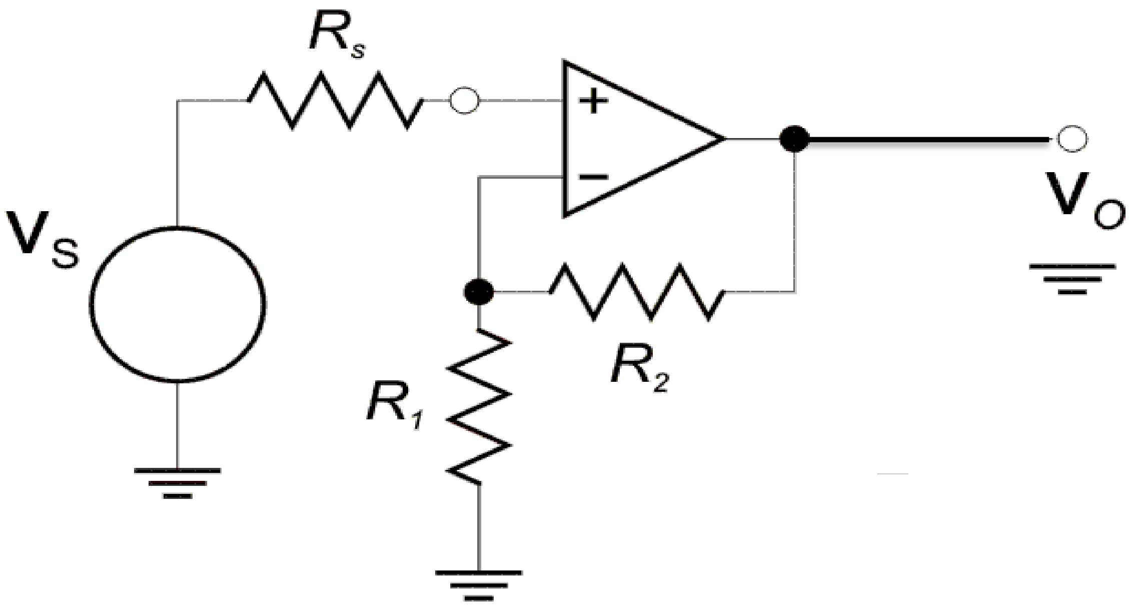
$$V_{in}(1+\frac{R_2}{R_1}) = V_{out}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = 1+\frac{R_2}{R_1}$$

- **Il segnale in uscita è in fase (non c'è il segno meno) con l'ingresso**
- **Posso solo amplificare**

Configurazione non invertente

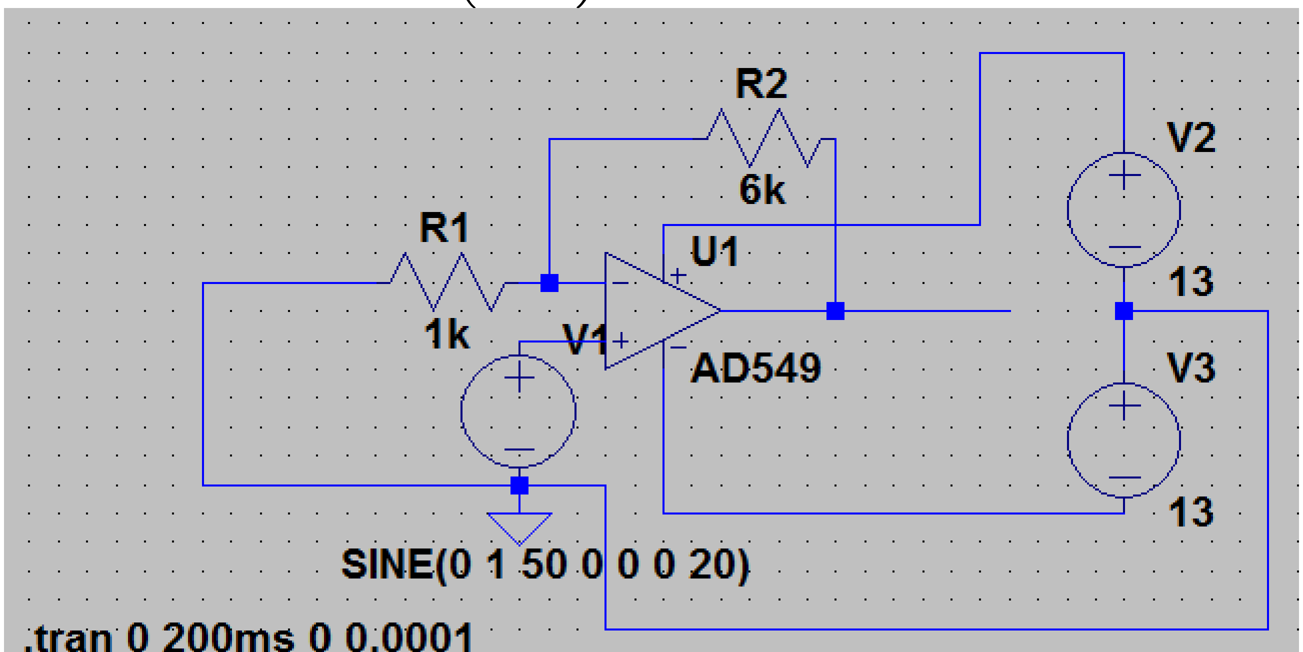
È lo stesso circuito che abbiamo visto nella lezione precedente

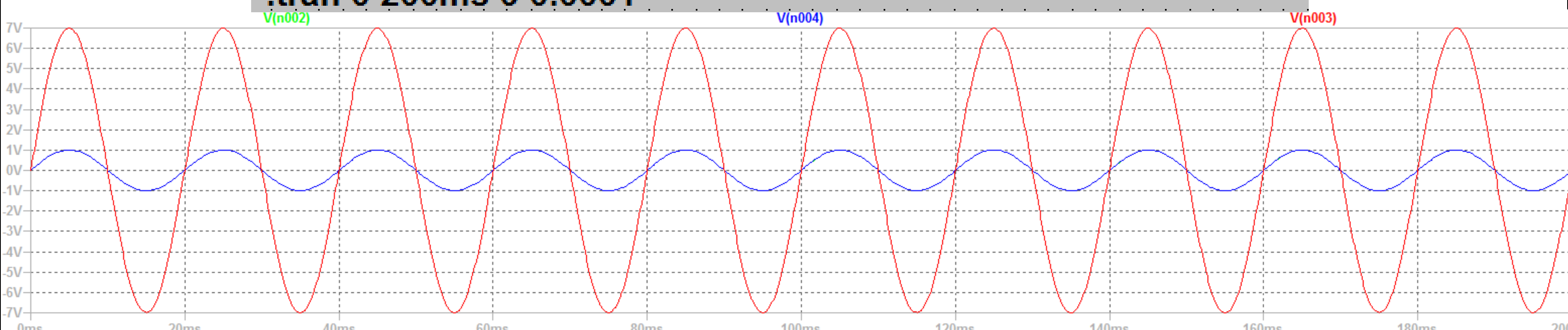


Esercizio

Vin inusioidale, freq. 50 Hz e Ampiezza 1V

Realizzare un amplificatore con guadagno Af = 7, considerare un amplificatore duale rail to rail (13V)

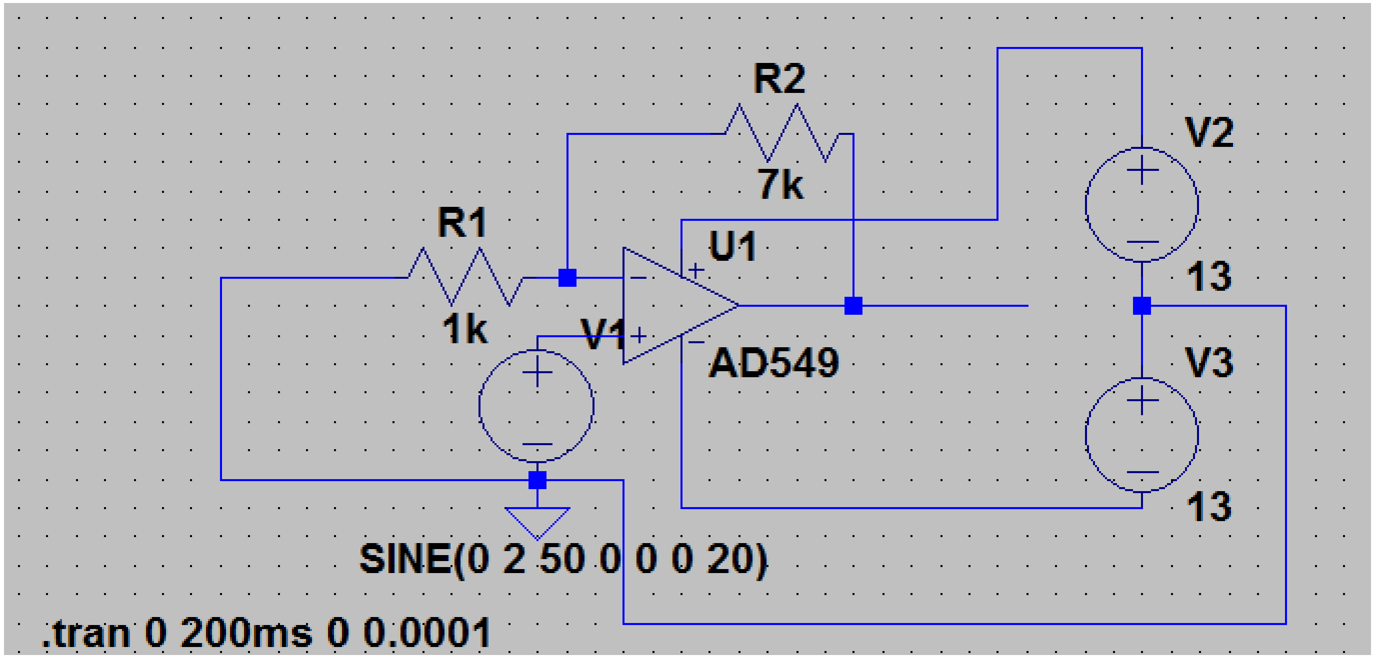




Esercizio

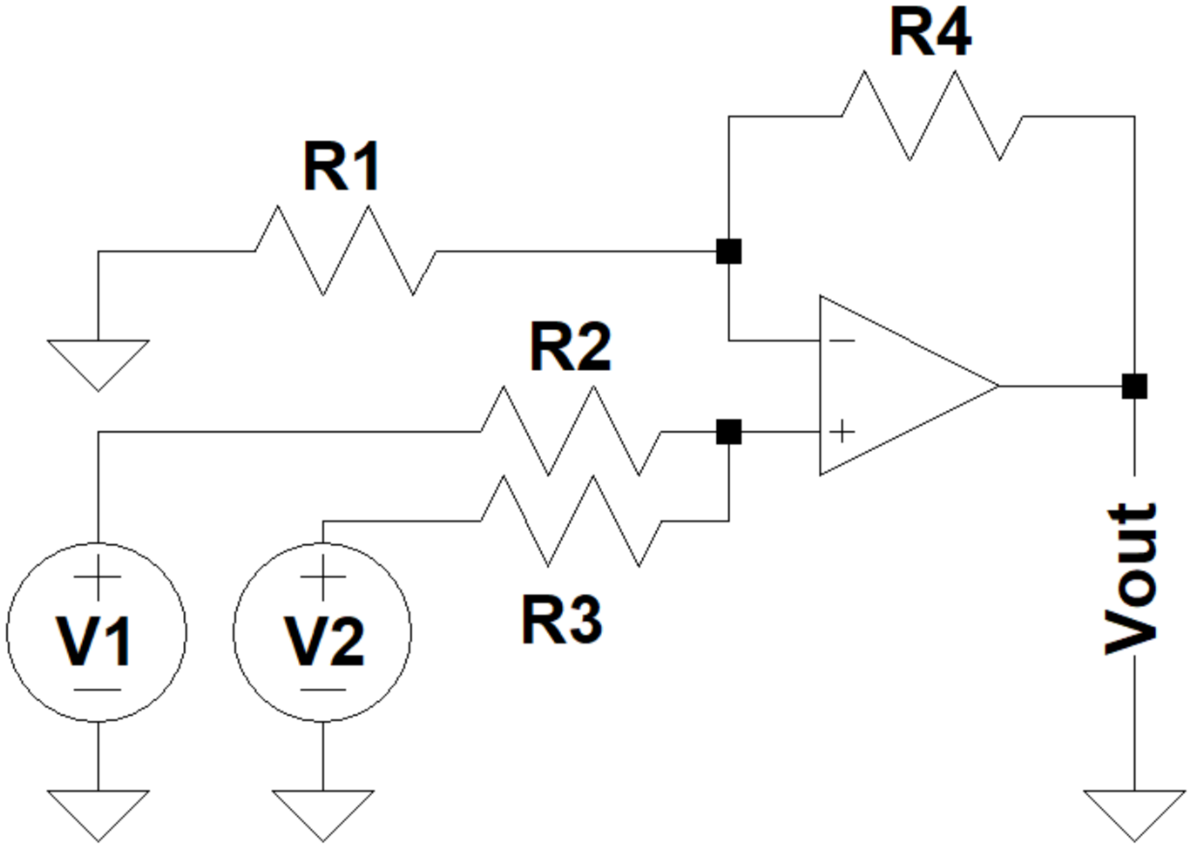
Vin sinusioidale, freq. 50 Hz e Ampiezza 2V

Realizzare un amplificatore con guadagno Af = 8, considerare un amplificatore duale rail to rail (13V)



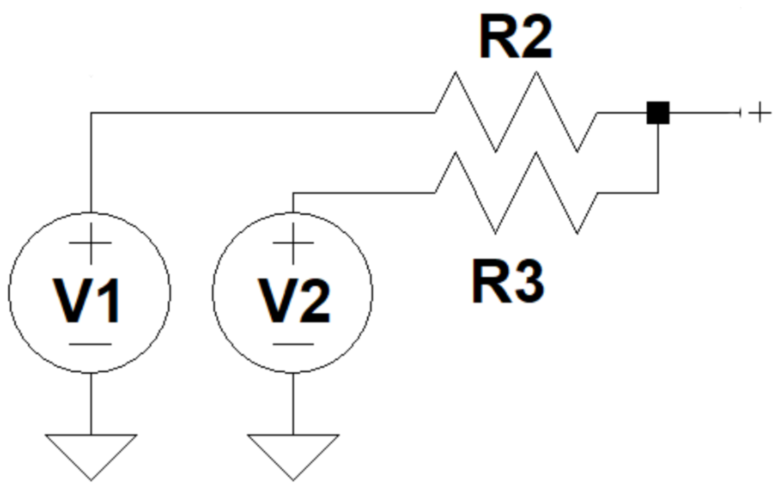
Esercizio

Analizzare il circuito riportato in figura



Esercizio

Come prima cosa consideriamo questo pezzo del circuito.
È facile arrivare alle seguenti relazioni



$$V_+ = V_1\left(\frac{R_3}{R_2+R_3}\right) + V_2\left(\frac{R_2}{R_2+R_3}\right)$$

Questo sottocircuito può essere risolto sia mettendo a sistema la KVL, KCL e le leggi di ohm per i due resistori sia con la sovrapposizione degli effetti.

Esercizio

Occorre ora notare che R4 e R1 formano una configurazione non-invertente, da cui possiamo dire che la tensione V+ trovata precedentemente verrà amplificata di un fattore $\left(1+\frac{R_4}{R_1}\right)$

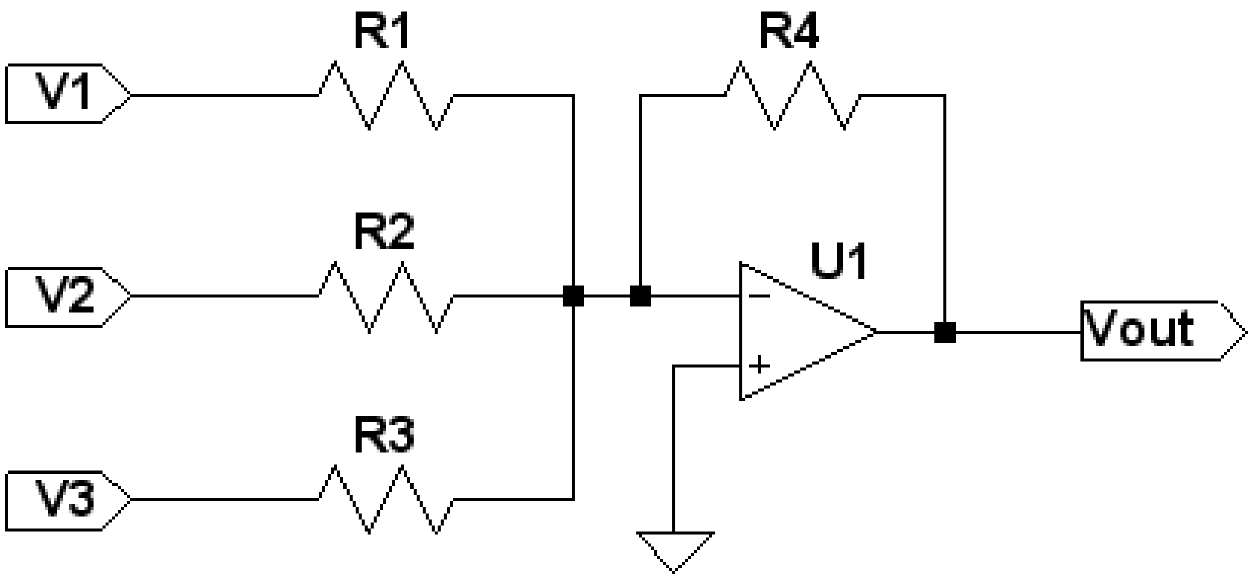
$$V_{out} = V_+\left(1+\frac{R_4}{R_1}\right) = \left(1+\frac{R_4}{R_1}\right)\left[V_1\left(\frac{R_3}{R_2+R_3}\right)+V_2\left(\frac{R_2}{R_2+R_3}\right)\right]$$

Si provi per esempio a vedere quanto vale Vout per
R tutte uguali ad 1kΩ
e

R1=1kΩ
R2=2kΩ
R3=3kΩ
R4=9kΩ

Il sommatore invertente

Esempio: il sommatore invertente



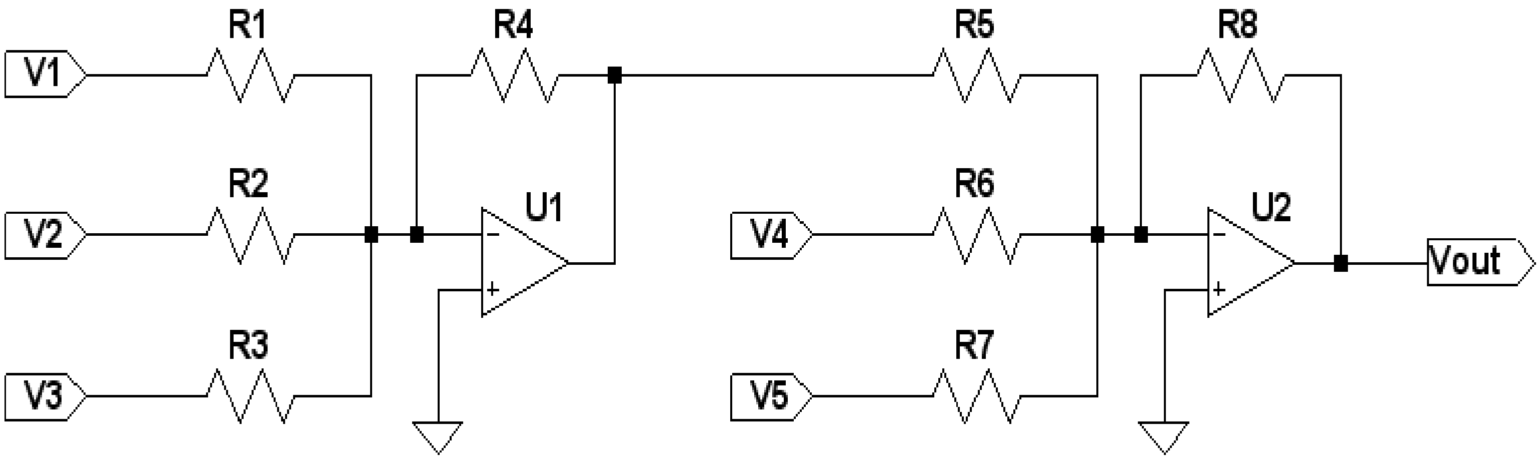
$$i_4 = i_1 + i_2 + i_3$$

$$-\frac{Vout}{R_4} = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3}$$

Quindi V_{out} è la somma delle tensioni in ingresso V_i pesate da un coefficiente moltiplicativo pari a $-R_4/R_i$

Esercizio

Possono essere combinati sommatori in cascata per permettere la somma con coefficienti positivi e negativi.



Provate ad analizzare questo circuito

$$Vout_1 = -\left(\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3}\right) \cdot R_4 \qquad Vout_1 = Vin_5$$

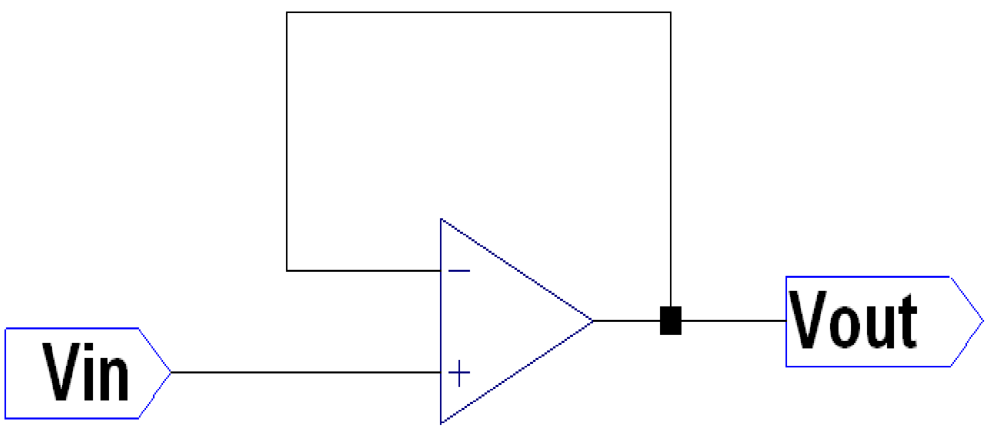
$$-\frac{Vout_2}{R_8} = \left(\frac{V_1}{R_1 R_5} + \frac{V_2}{R_2 R_5} + \frac{V_3}{R_3 R_5}\right) + \frac{V_4}{R_6} + \frac{V_5}{R_7}$$

Inseguitore di tensione

Esempio: inseguitore di tensione

La caratteristica della configurazione non-invertente di avere **resistenza in ingresso idealmente infinita** e di avere **resistenza in uscita idealmente nulla**, la rende la configurazione ideale per realizzare stadi **adattatori di impedenza** (cioè generatori ad alta impedenza, come possono essere i sensori di interesse biomedicale, con carichi a bassa impedenza).

Per tale utilizzo è stata realizzata la configurazione chiamata inseguitore di tensione:

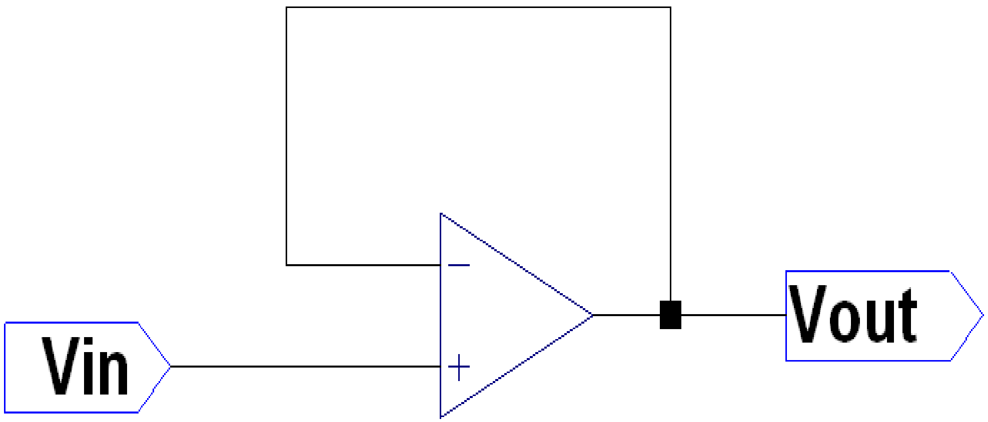


Caso particolare della configurazione non-invertente con R_2 nulla, quindi con guadagno unitario.

Esempio: inseguitore di tensione

L'operazionale funziona per fare in modo che la differenza di tensione V e V- sia uguale a zero

Ciò significa che Vout=Vin



Cosa succede se inserisco una resistenza sul ramo di retroazione?

Nulla, la I in ingresso all'operazionale è nulla, per cui su quel ramo non può scorrere corrente

Di conseguenza V_{R2} è nulla e il circuito è uguale al precedente

Vout=Vin

Esempio: inseguitore di tensione

A cosa serve un inseguitore di tensione?

La corrente richiesta al generatore è nulla!
Quel generatore può essere scarso, con una Rs altissima, magari il nostro generatore di biopotenziale

In uscita ottengo invece lo stesso segnale, ma con una Rs uguale a zero

Generatore di tensione pilotato in tensione, con una resistenza serie pari a 0

Alimentazione singola e saturazione dell’uscita

Alimentatori ad alimentazione singola

Gli alimentatori ad alimentazione duale devono avere i terminali di alimentazione collegati a +V e –V, dove V può essere in un range di valori che possono andare, a seconda del modello, da 1-2 Volt fino a 15-20 Volt.

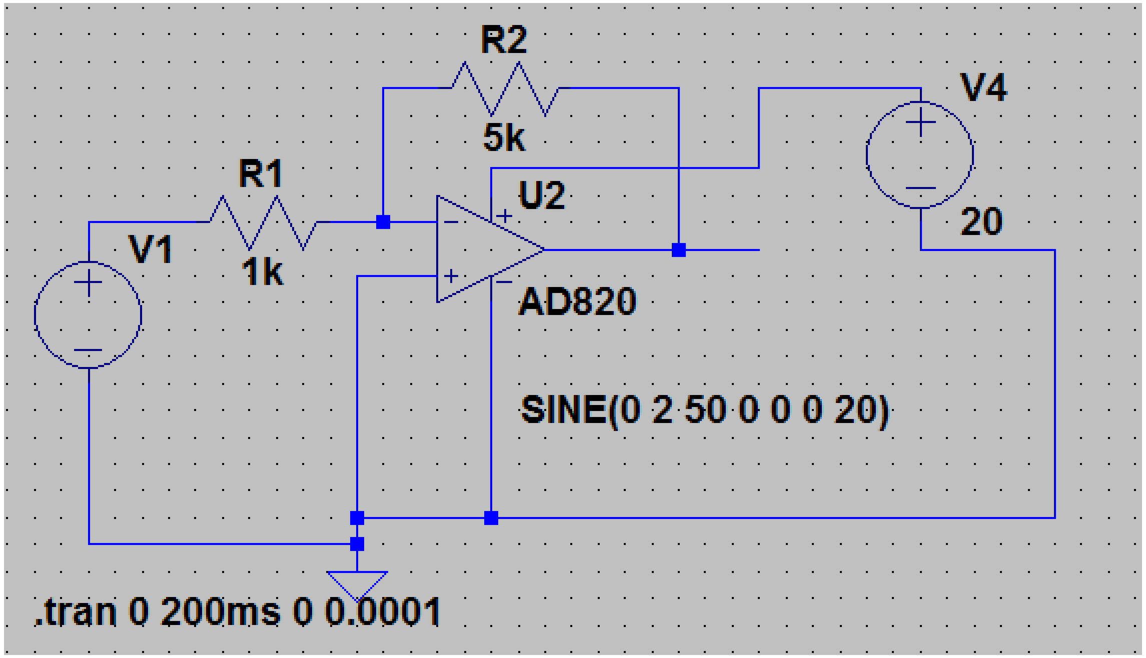
Quelli ad alimentazione singola hanno il **terminale negativo a massa** e il **positivo a una tensione che può andare da 1-2 volt fino a 30-40 volt**, a seconda del modello.

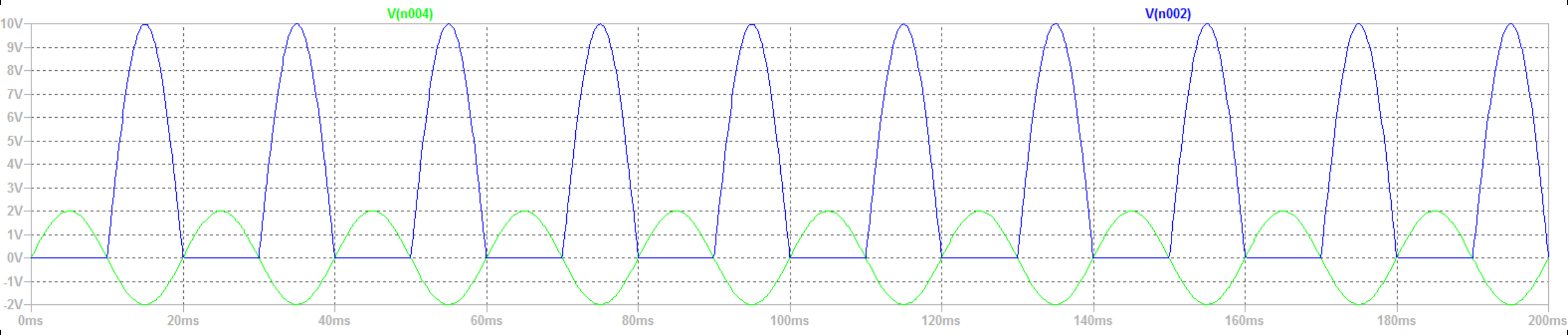
La tensione di alimentazione costituisce un limite invalicabile per il range di tensioni in uscita (saturazione), quindi se si sceglie una tensione singola, si deve sapere che la tensione in uscita non potrà essere negativa.

Perciò, se si trattano **segnali sinusoidali** sarà necessario creare un **riferimento di tensione più elevato** di massa intorno al quale si deve muovere il segnale di uscita

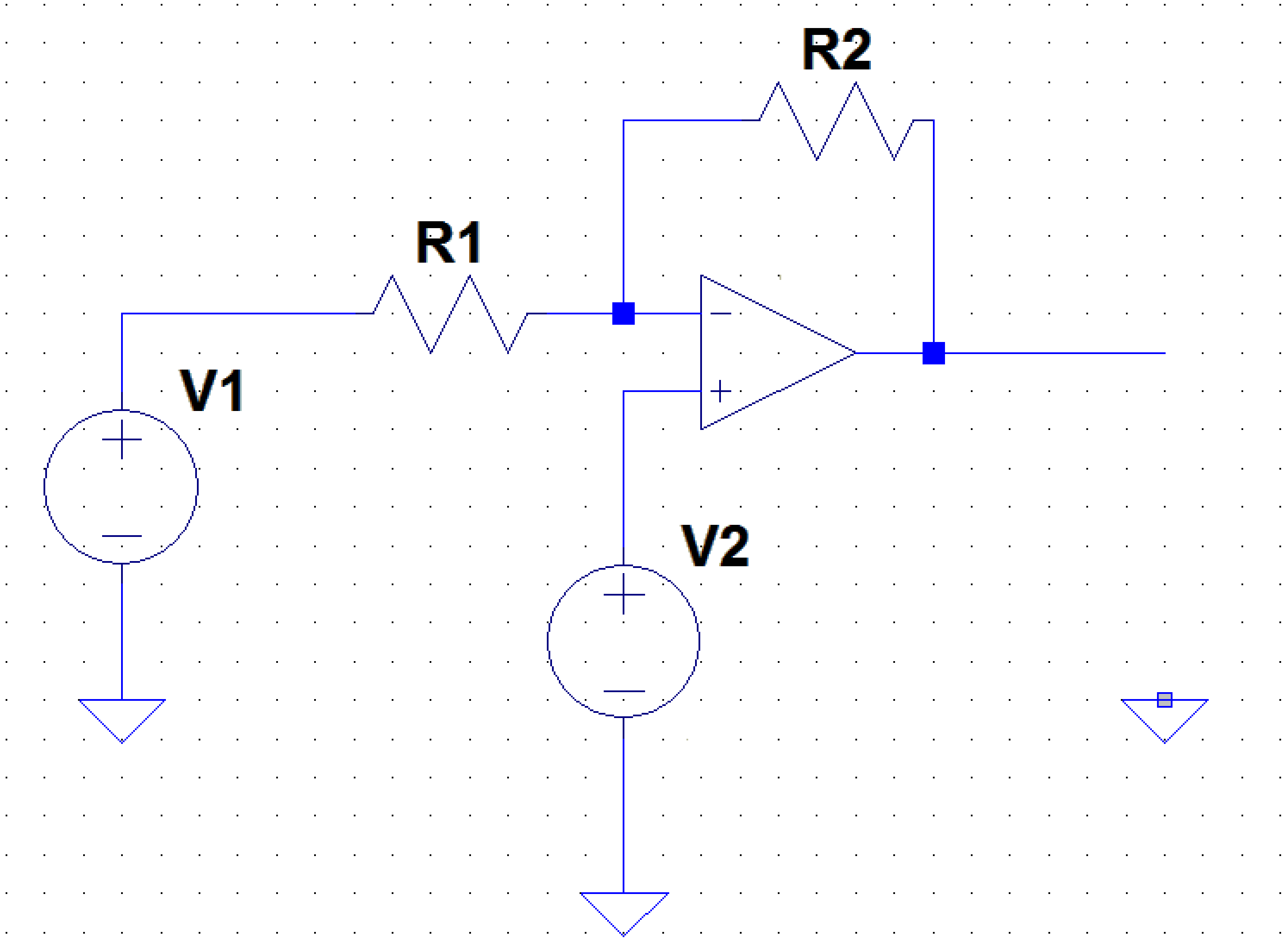
Esempio 2: traslazione della tensione media

Ho un ingresso V_1 sinusoidale con ampiezza 2V, ho una configurazione invertente, ma un operazionale single!

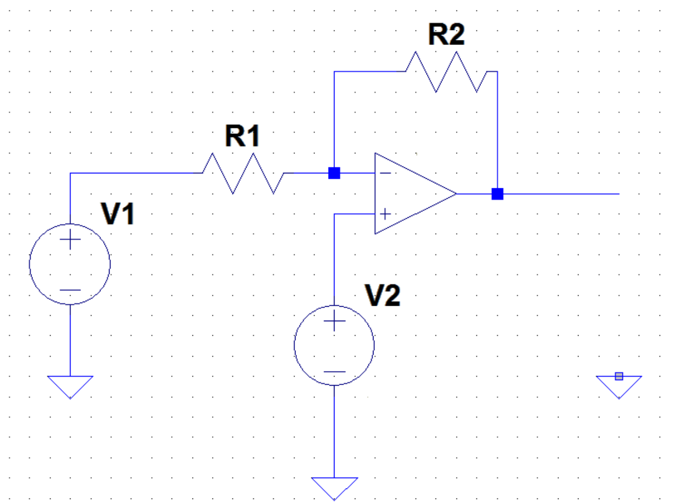




Esempio 1



Esempio 1



Se $V_2 = 0$, ho una configurazione invertente, da cui

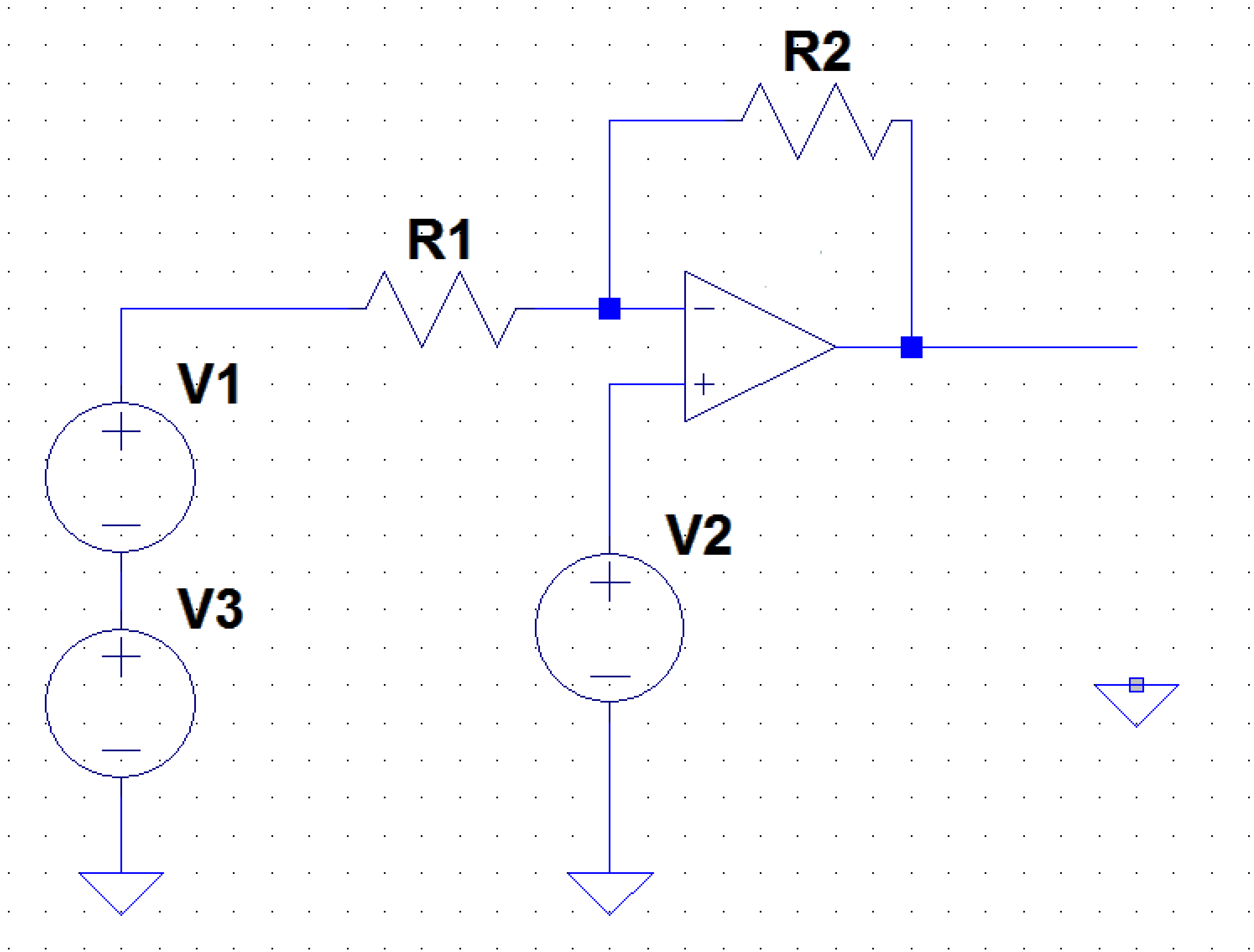
$$V_{out1} = V_1\left(-\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Se $V_1 = 0$, ho una configurazione non invertente, da cui

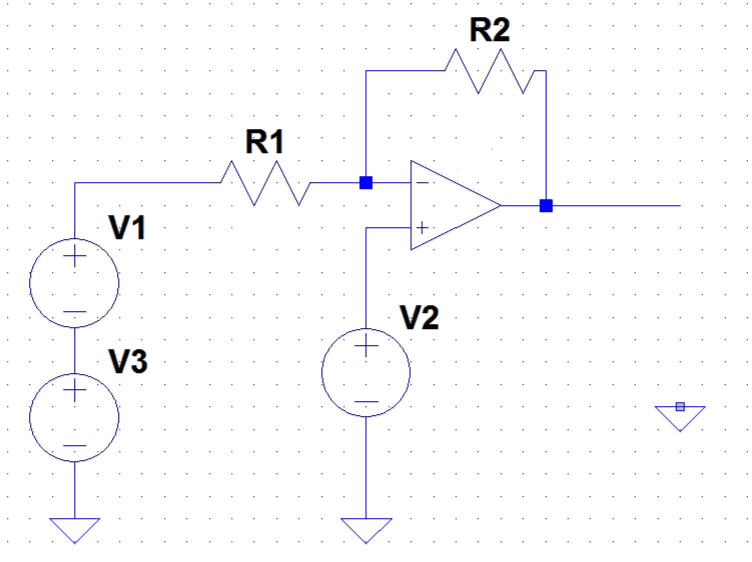
$$V_{out1} = V_2\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$V_{out} = V_1\left(-\frac{R_2}{R_1}\right)+V_2\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Esempio 2: traslazione della tensione media



Esempio 2: traslazione della tensione media



Se V_2 e $V_3 = 0$, ho una configurazione invertente, da cui

$$V_{out1} = V_1\left(-\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Se V_1 e $V_2 = 0$, ho una configurazione invertente, da cui

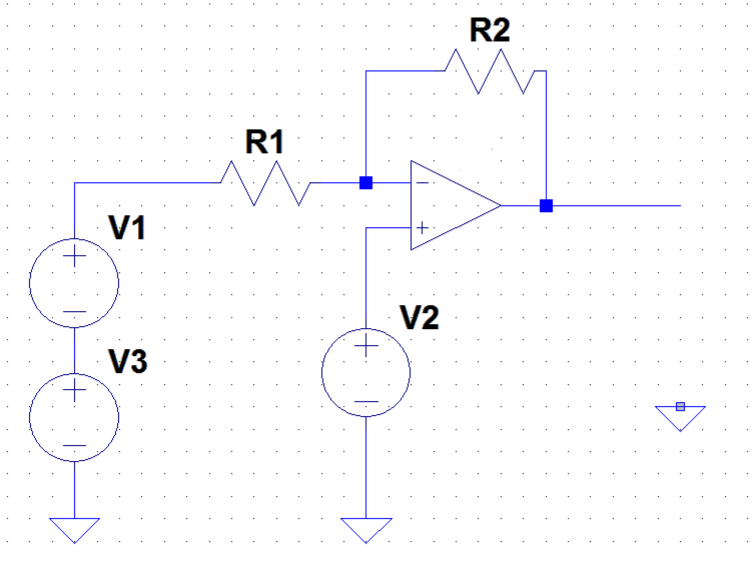
$$V_{out2} = V_3\left(-\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Se V_1 e $V_3 = 0$, ho una configurazione non invertente, da cui

$$V_{out1} = V_2\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$V_{out} = V_1\left(-\frac{R_2}{R_1}\right) + V_2\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right) + V_3\left(-\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Esempio 2: traslazione della tensione media



Cosa succede se $V_2 = V_3$?

$$V_{out} = V_1\left(-\frac{R_2}{R_1}\right) + V_2\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right) + V_3\left(-\frac{R_2}{R_1}\right)$$

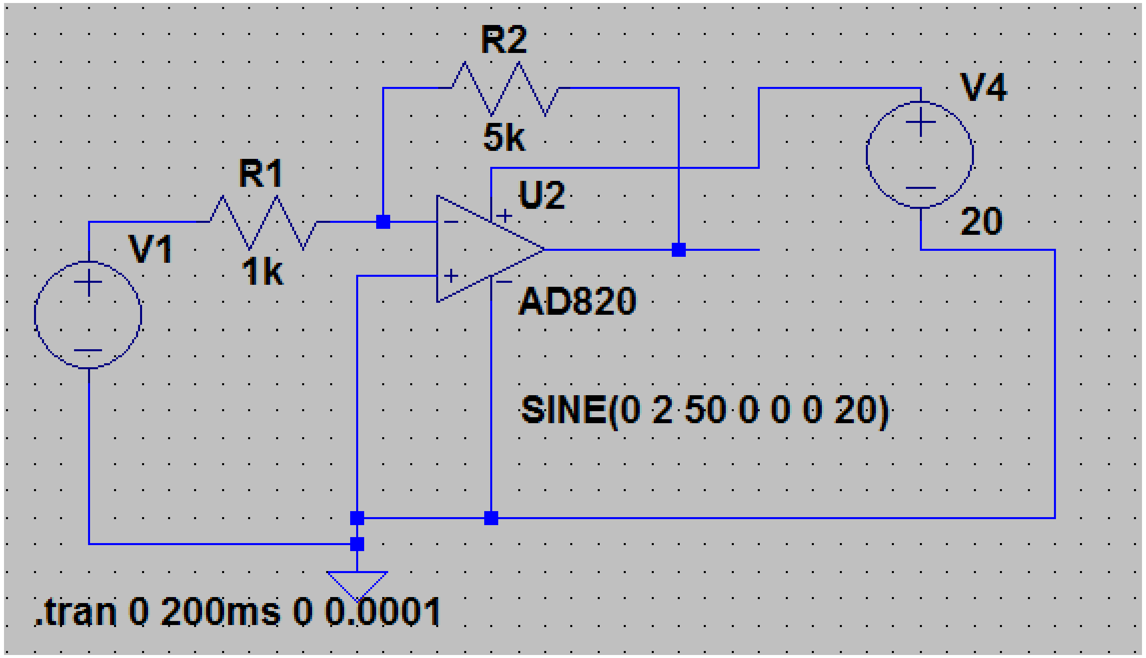
$$V_{out} = V_1\left(-\frac{R_2}{R_1}\right) + V_2 + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)(V_2 - V_3)$$

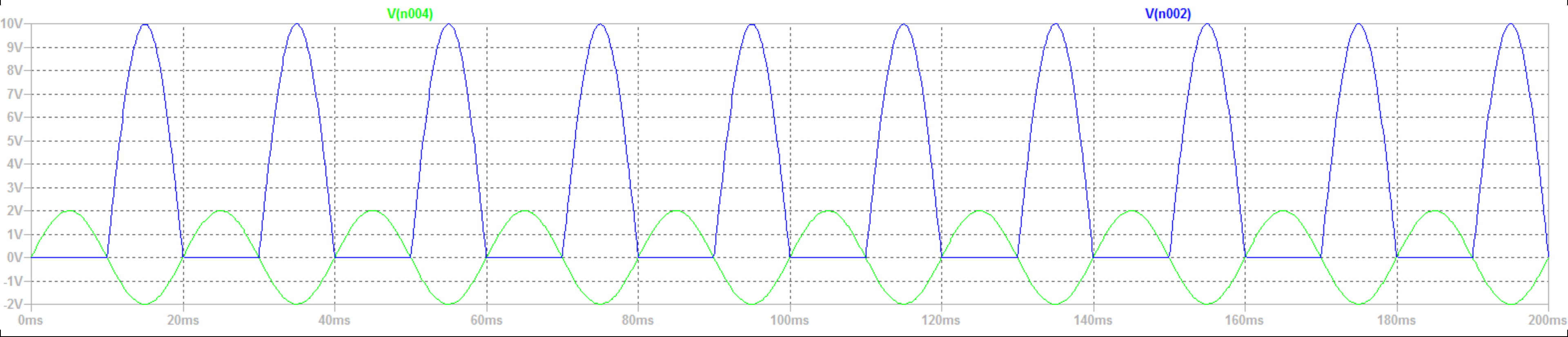
$$V_{out} = V_1\left(-\frac{R_2}{R_1}\right) + V_2$$

Ho amplificato la V_1 e ho traslato l'uscita di un valore pari a V_2

Esempio 2: traslazione della tensione media

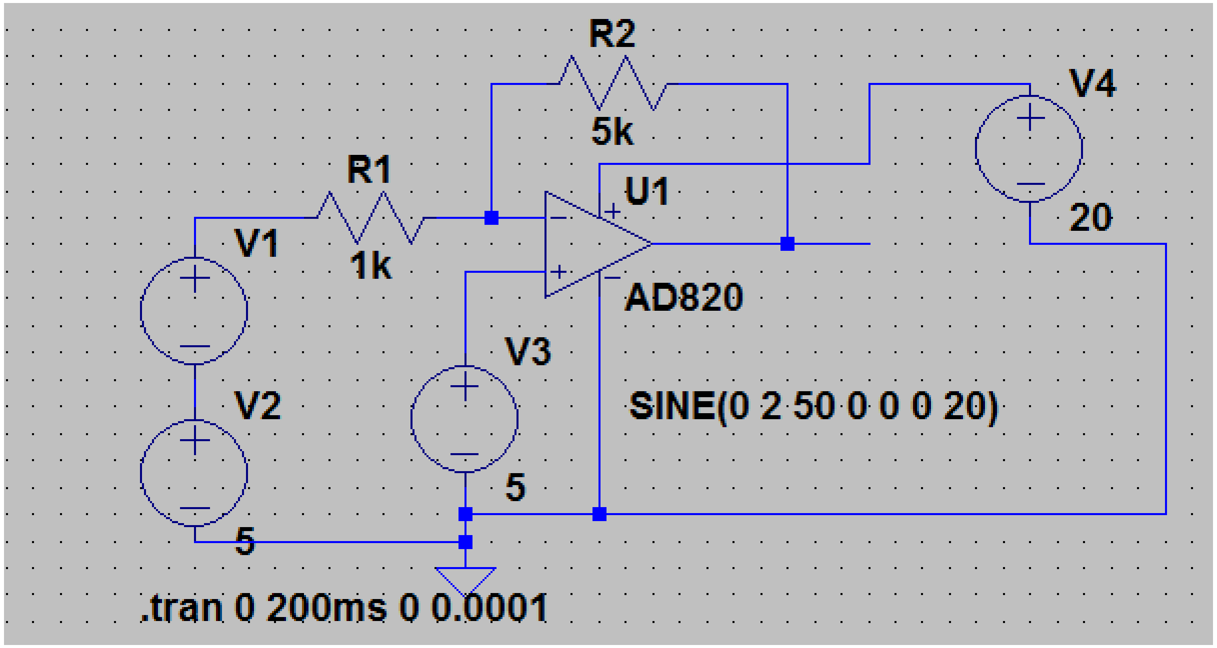
Riconsideriamo l'esempio di prima.
Ho un ingresso V_1 sinusoidale con ampiezza 2V, ho una configurazione invertente, ma un operazionale single!

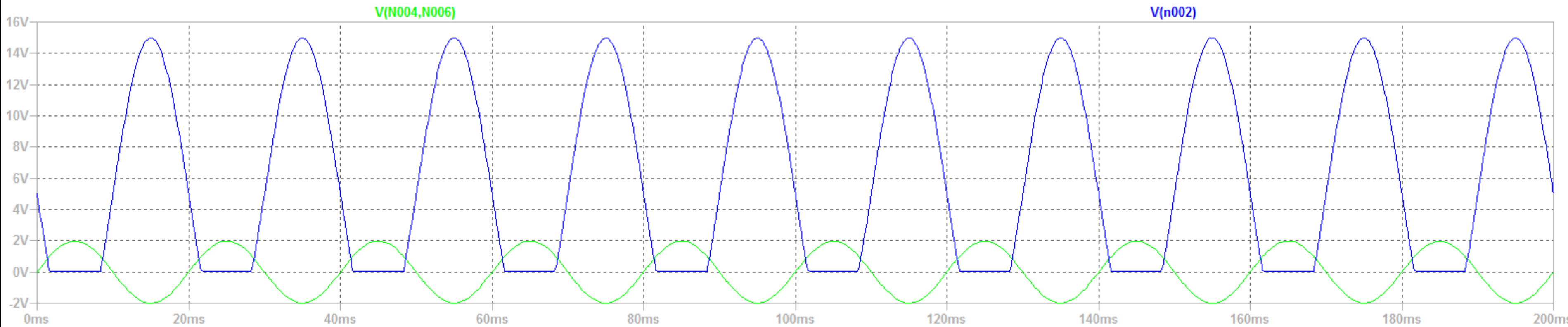




Esempio 2: traslazione della tensione media

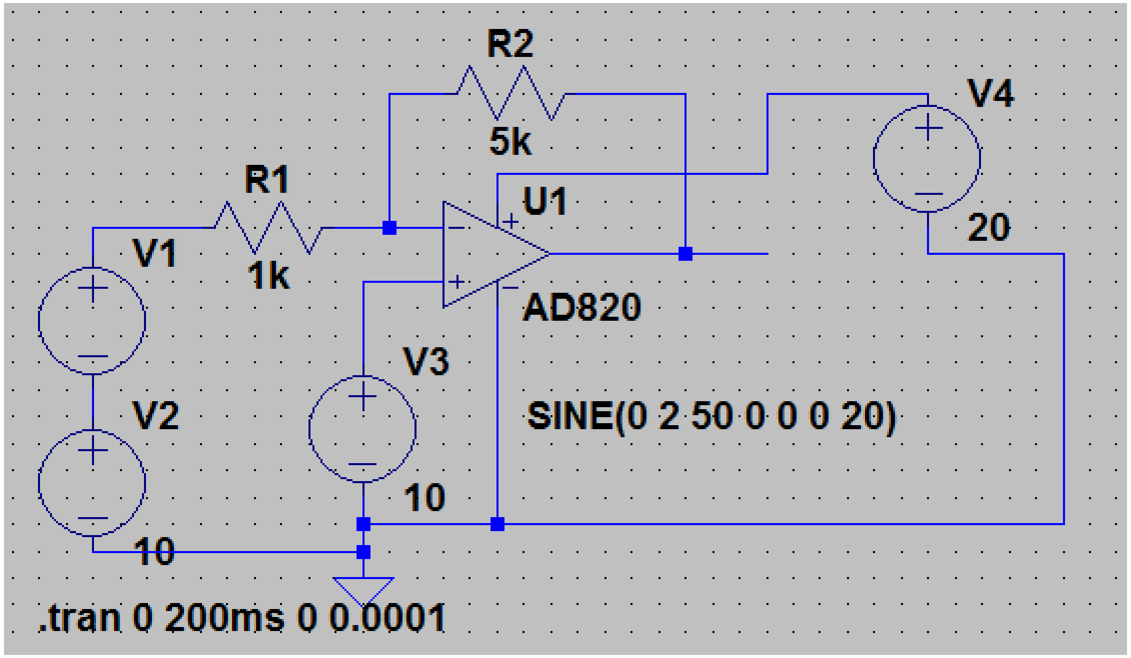
Provare a disegnare Vout, con V_{in} sinusoidale di ampiezza 2V, Frequenza 50 Hz, caso 1 $V_2 = V_3 = 5$ V; caso 2 $V_2 = V_3 = 10$ V

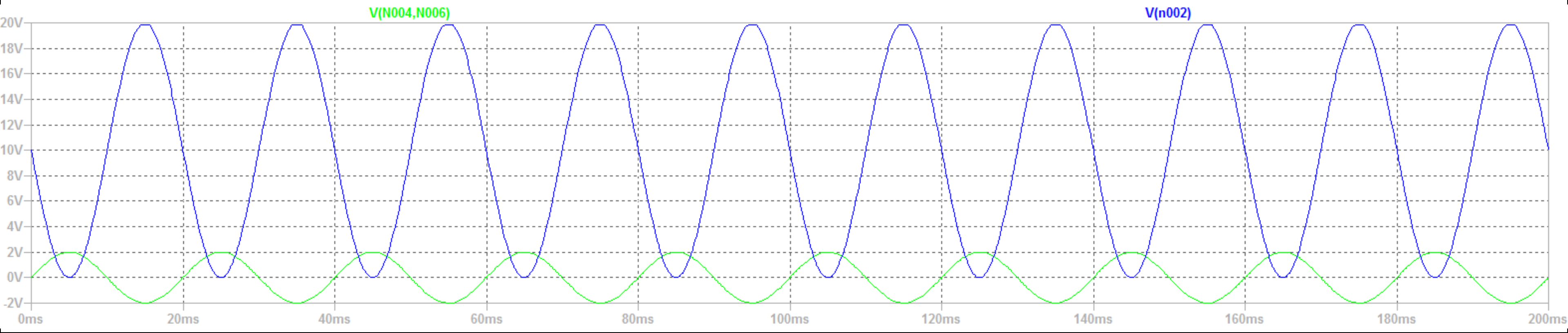




Esempio 2: traslazione della tensione media

Provare a disegnare Vout, con V_{in} sinusoidale di ampiezza 2V, Frequenza 50 Hz, caso 1 $V_2 = V_3 = 5$ V; caso 2 $V_2 = V_3 = 10$ V



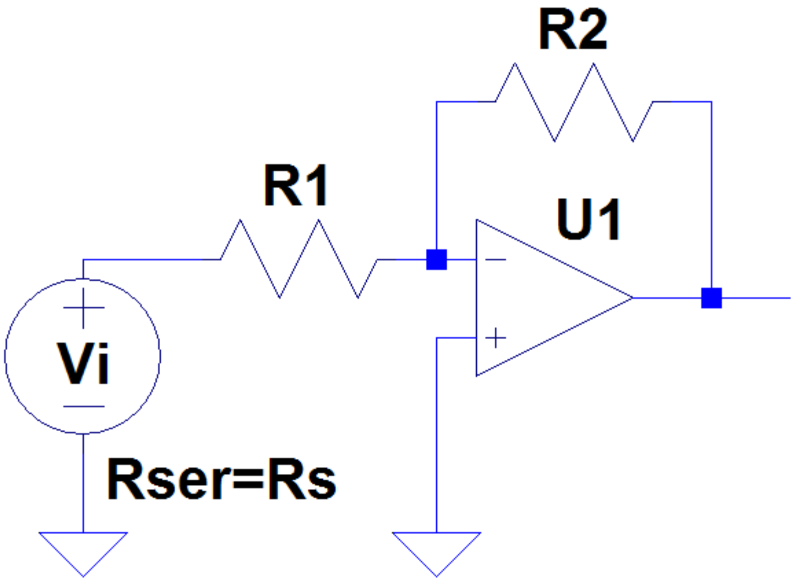


Aspetti progettuali

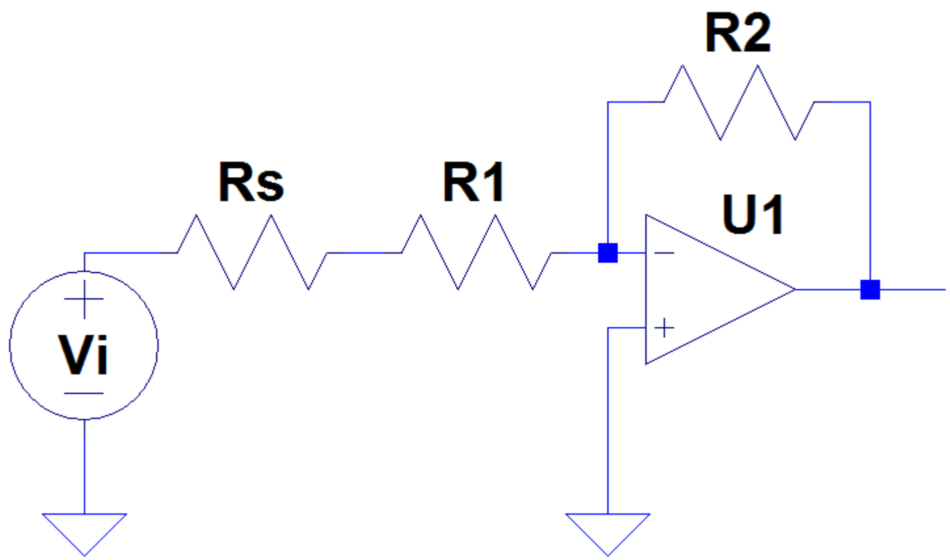
Resistenza in ingresso: Configurazione invertente

Consideriamo un amplificatore operazionale in configurazione invertente. Cosa succede se il generatore Vi non è ideale, ma ha una Rs diversa da zero?

Il circuito iniziale, riportato qui sotto, diventa → →



Aspetti progettuali per circuiti con amplificatori operazionali



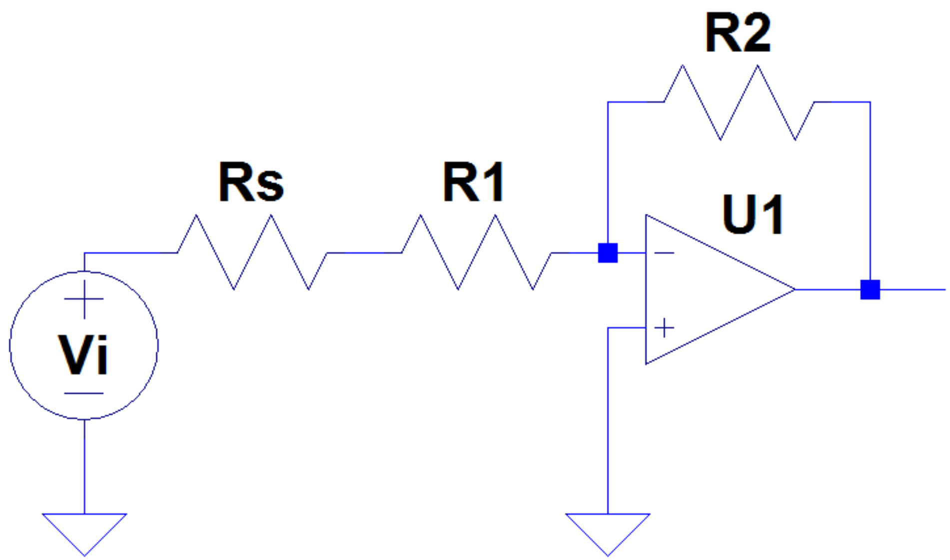
Rs e R1 sono in serie, per cui possono essere rappresentate da una resistenza equivalente Req=Rs +R1

Segue che:

$$\frac{Vout}{Vi} = -\frac{R2}{(R1 + Rs)}$$

Dimensionare il circuito in maniera tale da avere un guadagno pari a -10, considerando Rs=1kΩ

Aspetti progettuali per circuiti con amplificatori operazionali



Rs e R1 sono in serie, per cui possono essere rappresentate da una resistenza equivalente Req=Rs +R1

Segue che:

$$\frac{Vout}{Vi} = -\frac{R2}{(R1 + Rs)}$$

Attenzione!!! Rs in realtà è solamente un componente aggiunto per modellare il generatore NON ideale!

È assolutamente sbagliato utilizzare quindi quest'ultima formula in modo diretto per dimensionare i componenti di un amplificatore che deve amplificare il segnale di un generatore non ideale.

Si deve partire proprio dal concetto che **Rs è un valore "inaffidabile"** nella formula quindi **deve essere reso trascurabile** in fase di progetto

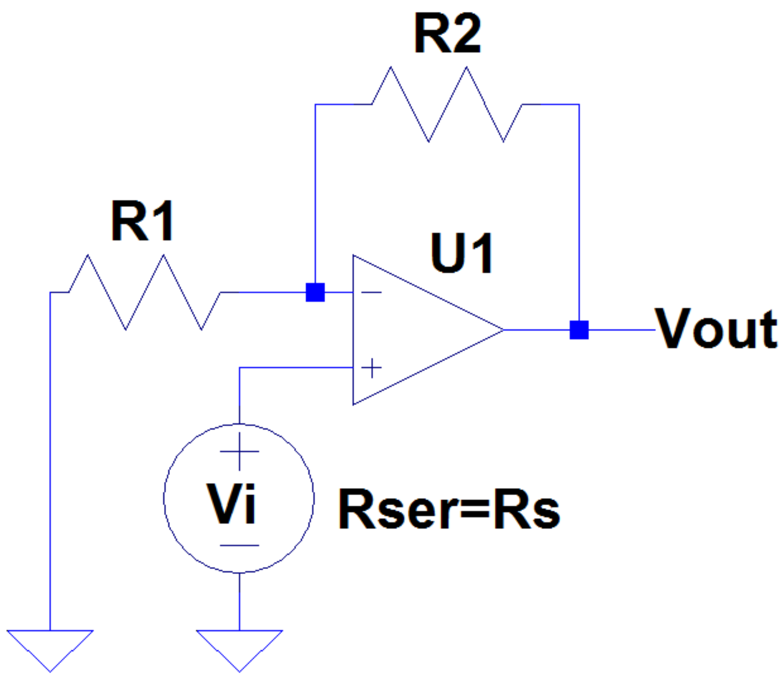
Se il progetto richiede un guadagno – G
progetteremo i componenti per avere R2/R1 ancora pari a G,
ma R1 deve essere molto maggiore (100 volte?) di Rs.

In tal modo l'effetto di Rs (e ogni sua approssimazione) è trascurabile!

Resistenza in ingresso: Configurazione non invertente

Consideriamo un amplificatore operazionale in configurazione non invertente. Cosa succede se il generatore Vi non è ideale, ma ha una Rs diversa da zero?

Il circuito iniziale, riportato qui sotto, diventa → →



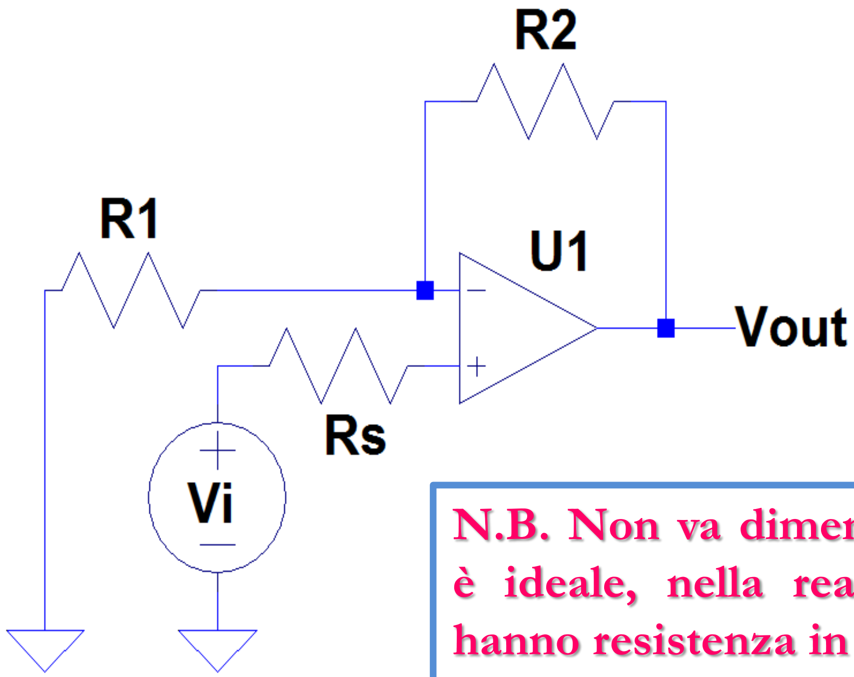
Resistenza in ingresso: Configurazione non invertente

Per l’idealità dell’operazionale non può fluire corrente sugli ingressi + e -

Quindi nessuna corrente attraversa Rs e quindi ai capi del resistore Rs c’è una **Vs nulla!**

La KVL nella maglia Vi/Vs/V+ porta quindi a dire che Vi=V+ quindi Rs non ha alcun effetto su Vout che sarà come sempre dato da:

$$\frac{Vout}{Vi} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$



N.B. Non va dimenticato che questa analisi è ideale, nella realtà gli operazionali non hanno resistenza in ingresso infinita e quindi I+ e I- non sono nulli

Resistenza di uscita

Si suppone che il nostro amplificatore operazionale abbia una resistenza in uscita nulla, sia quindi in grado di erogare qualsiasi corrente.

Questo non è ovviamente possibile.

Questo fenomeno viene modellato come se l'operazionale fosse un generatore di tensione dipendente dalla tensione di ingresso all'operazionale e una resistenza serie.

Saturazione della tensione in uscita

Un amplificatore reale, per poter funzionare, deve essere alimentato

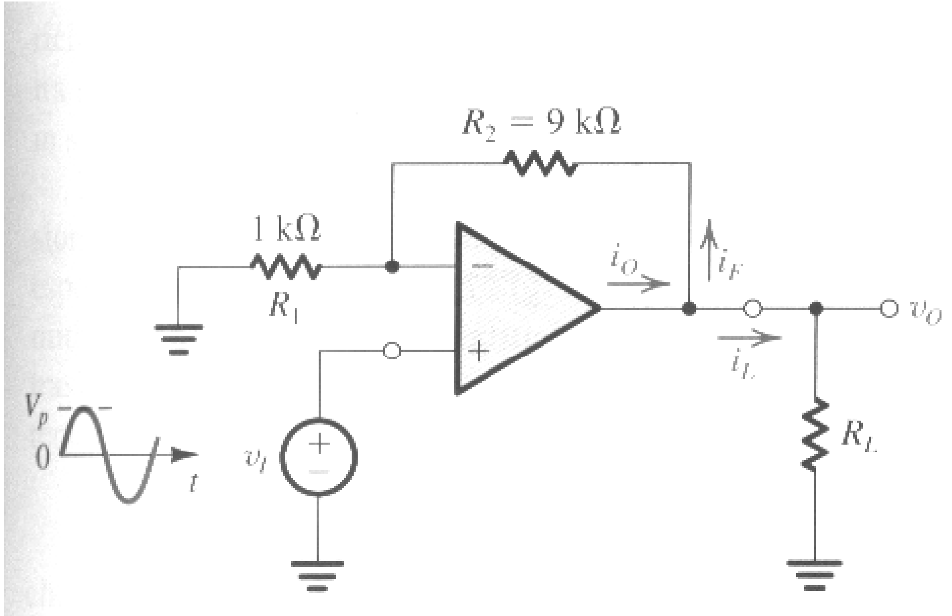
Per esempio, gli amplificatori operazionali classici venivano alimentati con una tensione duale +15V, -15V

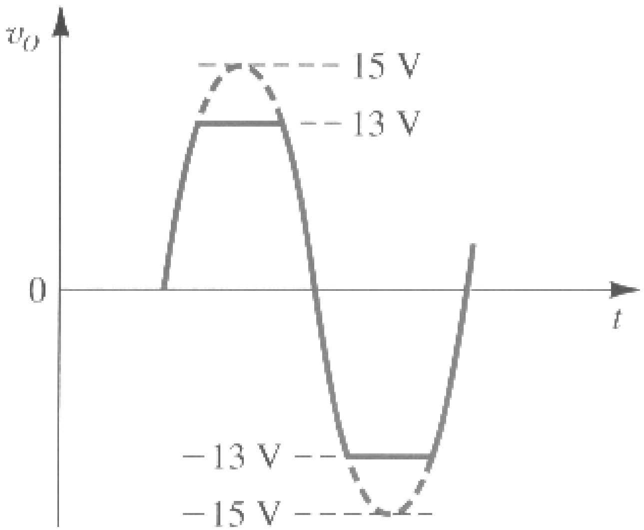
In queste condizioni, la tensione di uscita non può superare tali limiti e, nella pratica, si ha che la tensione di uscita non può superare +13V, -13V

Gli operazionali odierni spessissimo funzionano a tensioni molto meno elevate e spesso non duali

Quando a V_{in} e V_{out} è concesso di raggiungere i limiti della tensione di alimentazione si dice che sono rail-to-rail (in ingresso e/o in uscita), altrimenti c'è un margine di circa un volt sui due limiti

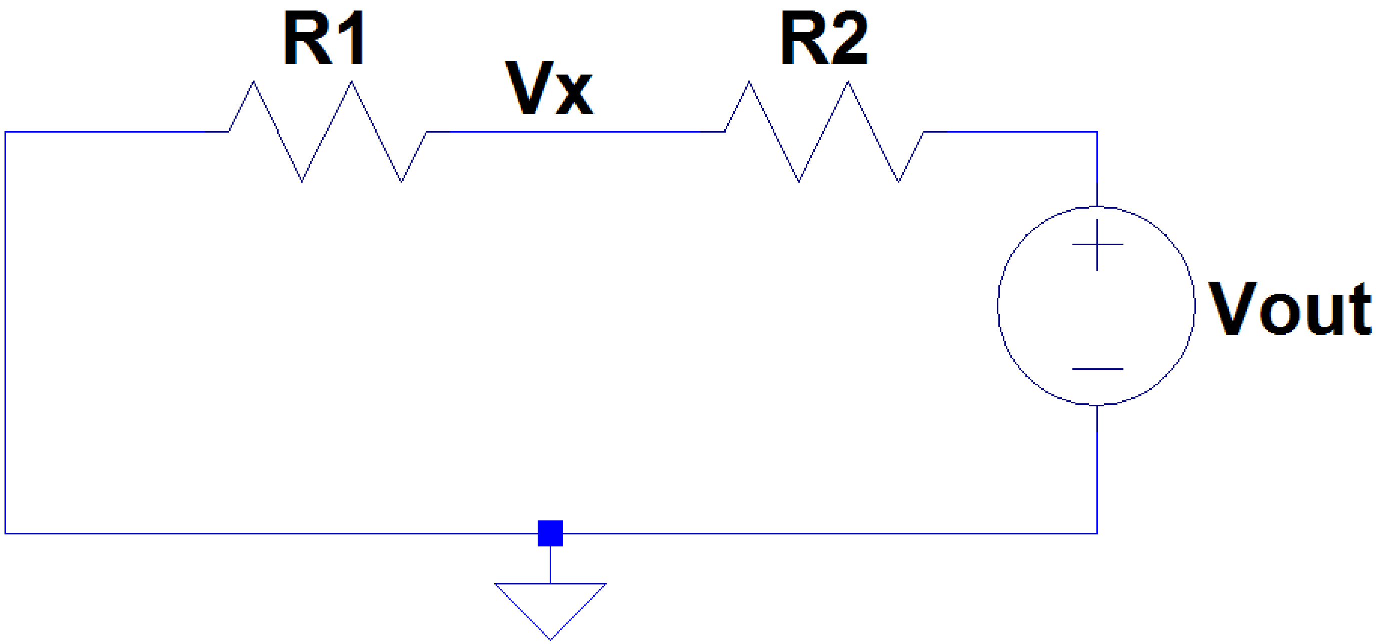
Saturazione della tensione in uscita





Quando l'operazionale va in saturazione, **non è più in grado di mantenere a zero la differenza di potenziale** tra i due terminali di ingresso

Saturazione della tensione in uscita



considieriamo la configurazione non invertente

quando l'operazionale non è in saturazione verifichiamo che la tensione sul terminale – (che chiameremo Vx) di ingresso sarà pari a Vi

$$Vx = \boxed{Vout}\frac{R1}{R1 + R2} = \boxed{Vin\left(1 + \frac{R2}{R1}\right)}\frac{R1}{R1 + R2} = Vin$$

Saturazione della tensione in uscita.

Ma se siamo in saturazione:

$$Vx = \boxed{Vout}\frac{R1}{R1+R2} = \boxed{Vsat}\frac{R1}{R1+R2}$$

Quindi, per una V_{in} che porta l'operazionale in saturazione, non è più vero che la differenza di potenziale tra i nodi di ingresso è nulla ma è data da:

$$Vin - Vsat\frac{R1}{R1+R2}$$

Effetto di un guadagno ad anello aperto finito

Configurazione invertente

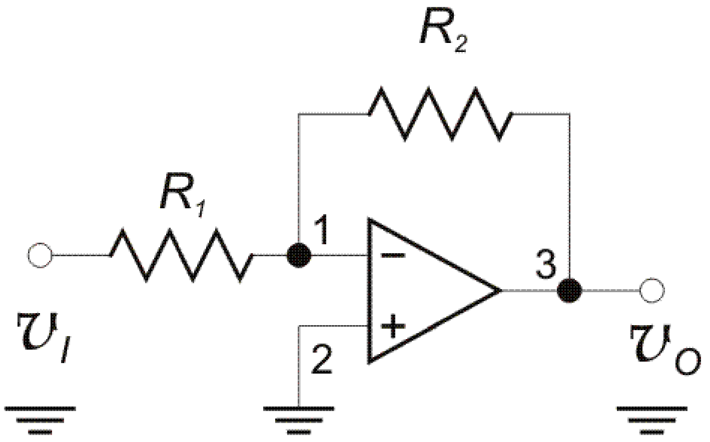
Se si rinuncia alla supposizione di guadagno ad anello aperto (chiamato comunemente A) infinito, si ha una differenza di potenziale tra i terminali di ingresso pari a **v_0/A**.

La corrente che fluisce in R_1 e, cambiata di segno, in R_2 diventa quindi:

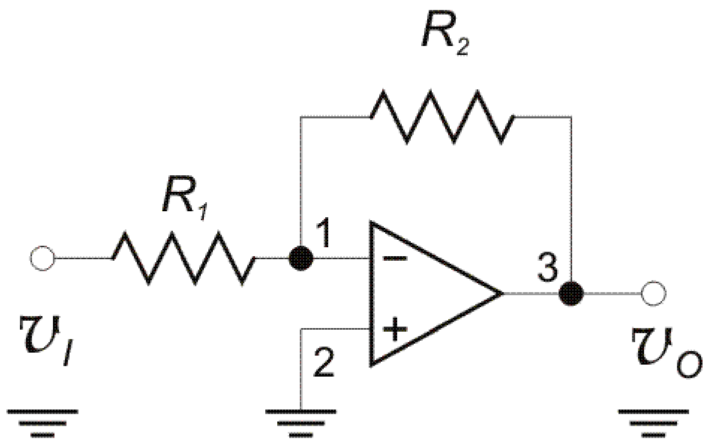
$$v_O = A(V_+ - V_-)$$

$$v_I - i_1 R_1 - (-v_O / A) = 0$$

$$i_1 = \frac{v_I - (-v_O / A)}{R_1}$$



Configurazione invertente



La differenza di potenziale tra il nodo 1 e il nodo 2 (massa) è:

$$v_I - (-v_O / A)$$

Se faccio la KVL alla maglia trovo: $$i_1 = \frac{v_I - (-v_O / A)}{R_1}$$

Da cui, facendo la KVL alla maglia esterna si ottiene la tensione di uscita:

$$v_O = -\frac{v_O}{A} - \frac{v_I + v_O / A}{R_1} R_2$$

Effetto di un guadagno ad anello aperto finito

In definitiva si ottiene che il guadagno in questo caso è pari a:

$$G = -\frac{R_2 / R_1}{1 + \left[(1 + R_2 / R_1) / A \right]}$$

$$\boxed{v_O = -\frac{v_O}{A} - \frac{v_I + v_O / A}{R_1} R_2}$$

È facile notare che **se A tende all'infinito, G tende a –R_2/R_1**

Per la precisione, perché valga questa approssimazione è sufficiente che $1 + R_2/R_1 << A$, cioè di fatto che il **rapporto tra le resistenze sia molto minore del guadagno in anello aperto**.

Limite della corrente di uscita

Un altro limite di un operazionale reale è la massima corrente in uscita.

L'operazionale non raggiungerà mai una tensione in uscita che lo costringa ad erogare una corrente superiore a quella che riesce ad erogare.

Questo limite può essere modellato con la presenza di una resistenza in uscita all'operazionale reale.

N.B. il caso è molto simile al caso di un generatore di tensione reale (resistenza in serie).

Se al mio dispositivo viene richiesta una corrente troppo elevata, lui non è in grado di fornirmi la stessa tensione nominale (caduta di tensione nella resistenza serie)

Slew Rate

La variazione dei segnali in uscita non può essere istantanea. Se la variazione richiesta in uscita è ampia non è trascurabile, si parla dello "slew rate" di un operazionale, che si definisce come segue:

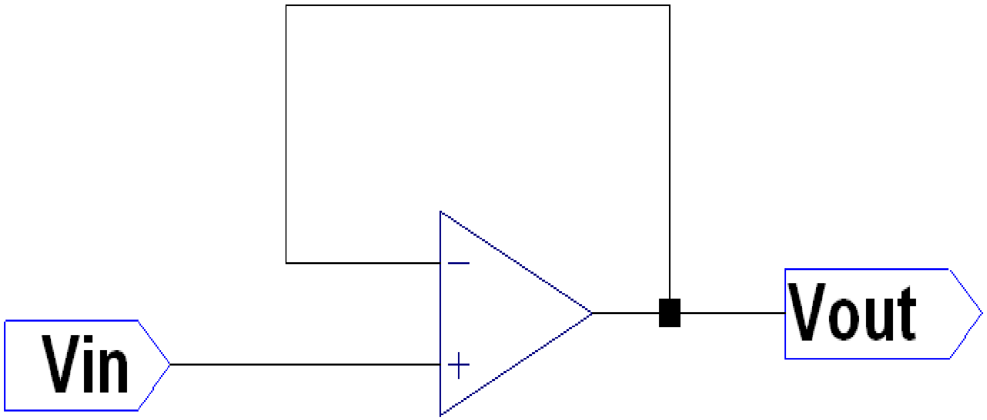
$$SR = \left.\frac{dv_{out}}{dt}\right|_{\max}$$

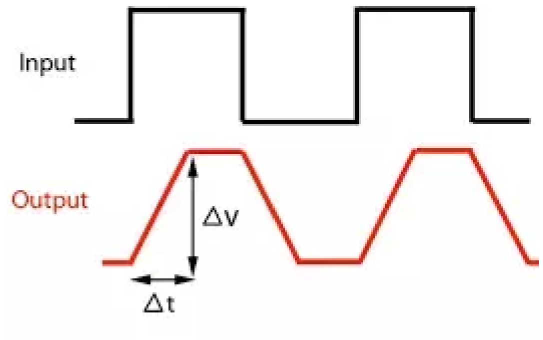
Tale quantità è comunemente indicata in V/ms.

Se si suppone di avere in ingresso un segnale che varia istantaneamente (cioè un gradino di tensione), in uscita si avrà una rampa con pendenza data dallo slew rate.

La ragione fisica che determina lo slew rate è legata alle capacità interne del dispositivo ed esiste una relazione con la sua risposta in frequenza.

Slew Rate: esempio





La ragione fisica che determina lo slew rate è legata alle capacità interne del dispositivo ed esiste una relazione con la sua risposta in frequenza.

Tensione di offset

Se l'operazionale fosse ideale, si avrebbe tensione nulla in uscita quando i terminali + e – di ingresso sono alla stessa tensione.

Nella realtà, per imprecisioni nel processo di fabbricazione, la tensione presente in questa condizione (per esempio nella configurazione ad inseguitore di tensione) non è nulla.

Tale tensione viene chiamata tensione di offset (e comunemente indicata come VIO), che **può essere in linea teorica corretta inserendo generatori di tensione in serie ad un terminale**, ma di fatto viene corretta **dimensionando opportunamente i circuiti** per limitarne l'effetto o **scegliendo operazionali a bassissima tensione di offset.**

Un elemento critico della tensione di offset è la sua **dipendenza dalla temperatura di funzionamento del circuito**

Corrente di polarizzazione

La corrente di ingresso di un operazionale (input bias current, comunemente indicata con IIB) non è nulla (o si può dire che resistenza di ingresso non è infinita).

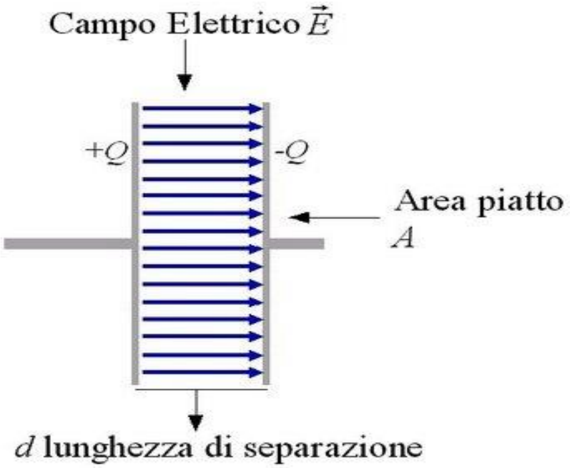
Questa corrente, in una configurazione retroazionata, determina un passaggio di corrente supplementare in R2 che incide sulla tensione di uscita, specie quando R2 è grande.

Per operazionali realizzati con **dispositivi a effetto campo**, tali correnti sono però **piccolissime**

Trasformata di Laplace

Diagrammi di Bode

Il condensatore



$$C = \frac{Q}{V}$$

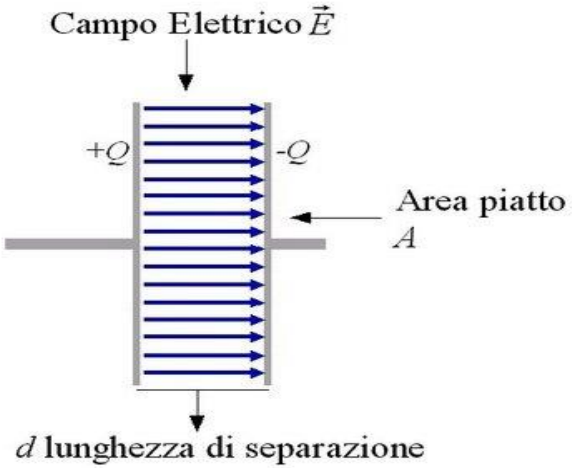
$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d}$$

Se applico una differenza di potenziale tra le armature, le cariche si separano e formano un campo elettrico all'interno del dielettrico

Le cariche positive sono uguali a quelle negative e il loro valore assoluto lo chiamiamo Q

La carica è proporzionale alla tensione applicata e la costante di proporzionalità è una caratteristica di quel particolare condensatore, e si chiama capacità e si misura in Farad

Il condensatore



$$C = \frac{Q}{V}$$

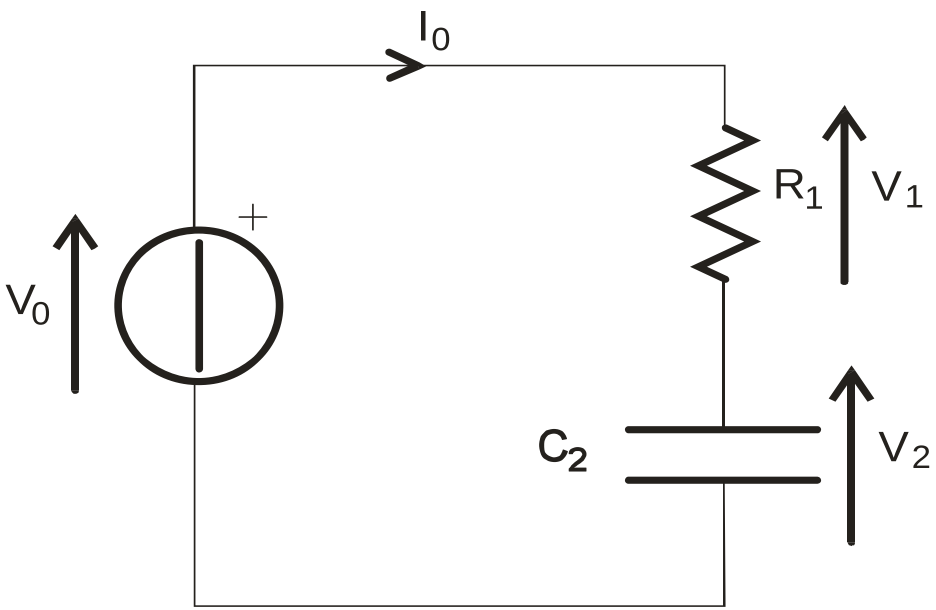
$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d}$$

Gli elettroni non riescono a passare direttamente da una piastra all'altra attraverso il dielettrico, proprio per le qualità di isolante del materiale utilizzato.

Quando viene applicata una differenza di potenziale a un condensatore. nel dielettrico si assiste al fenomeno della polarizzazione: le molecole si dispongono a formare un dipolo elettrico che consente il passaggio della corrente nel condensatore.

Matematicamente, tale corrente è data dall'espressione: $I = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dV}{dt}$

Il condensatore



Il circuito può essere risolto mettendo a sistema le relazioni che legano corrente e tensione nei componenti passivi:

$$V_1 = I_0 R_1$$

$$I_0 = C_2 \frac{dV_2}{dt}$$

$$V_0 = V_1 + V_2$$

Il condensatore

Supponendo la tensione sul condensatore nulla all'instante 0-, si ottiene:

$$V_2 = V_0\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{R_1C_2}\right)\right)$$

Il prodotto RC è dimensionalmente un tempo e viene spesso chiamato costante di tempo e indicato con τ.

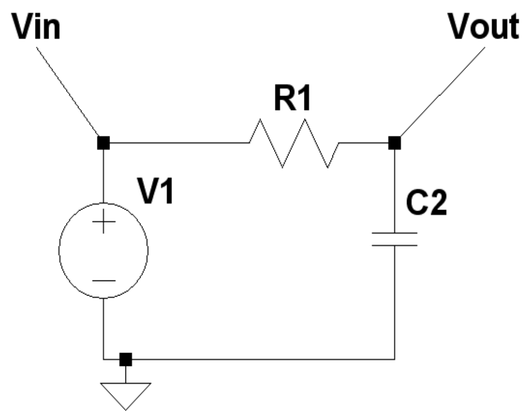
Dopo un tempo τ, l'esponenziale diventa 0.368 (ricordiamo che e=2.71828), quindi la tensione ai capi del condensatore è a circa il 63%.

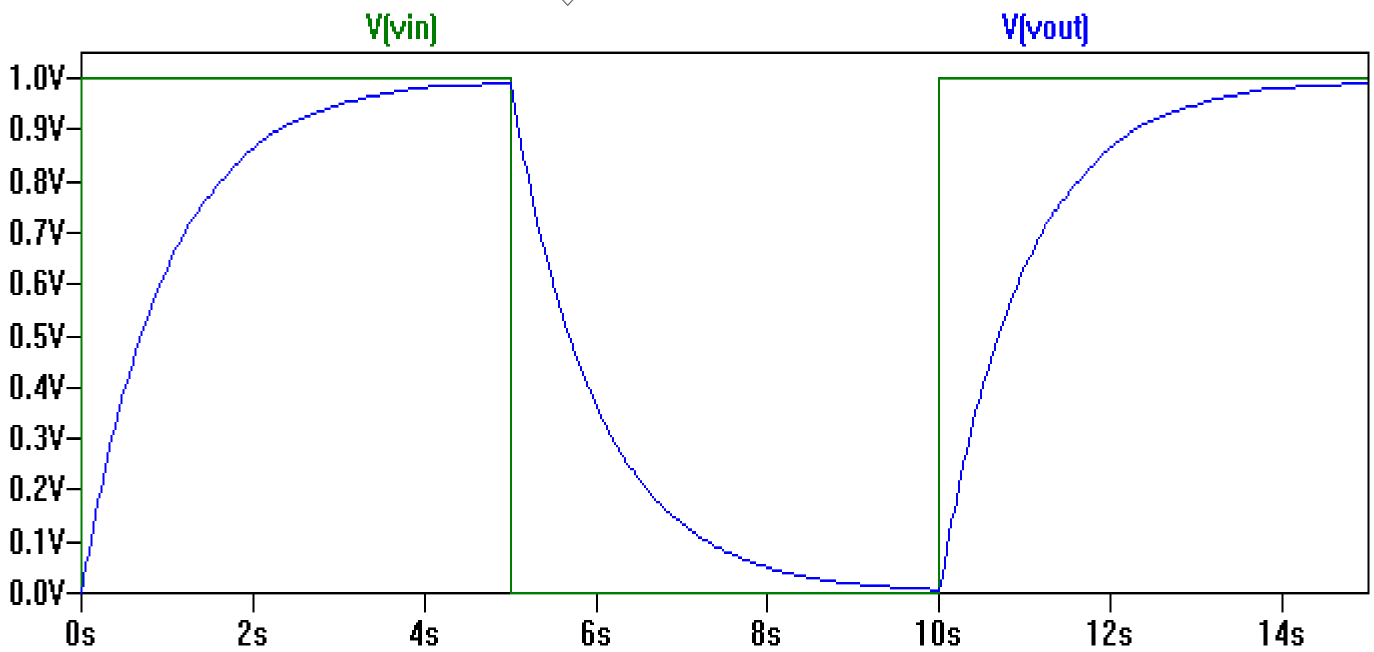
Quando t diventa 3 volte τ, l'esponenziale diventa 0.05, quindi dopo 3 τ la carica del condensatore è completa al 95%.

Quando t diventa 5 volte t, l'esponenziale diventa 0.0067, quindi dopo 5t la carica del condensatore è completa al 99.3%. .

Carica e scarica del condensatore

Quindi, nella pratica, si assume il condensatore completamente carico dopo 3 τ (in alcuni casi 5 τ). Si assume carico al 60% dopo τ





Regime sinusoidale

L'energia elettrica può essere fornita in continua o in alternata.
Nel primo caso la tensione è costante, nel secondo caso è sinusoidale. Nelle nostre case l'energia elettrica arriva come segnale elettrico sinusoidale di valore efficace 220V di tensione e frequenza 50Hz (cioè 50 cicli al secondo, negli USA e in altri paesi 110V e 60Hz).

Si definisce il **valor medio di un segnale periodico** x(t) la quantità:

$$\bar{X} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$

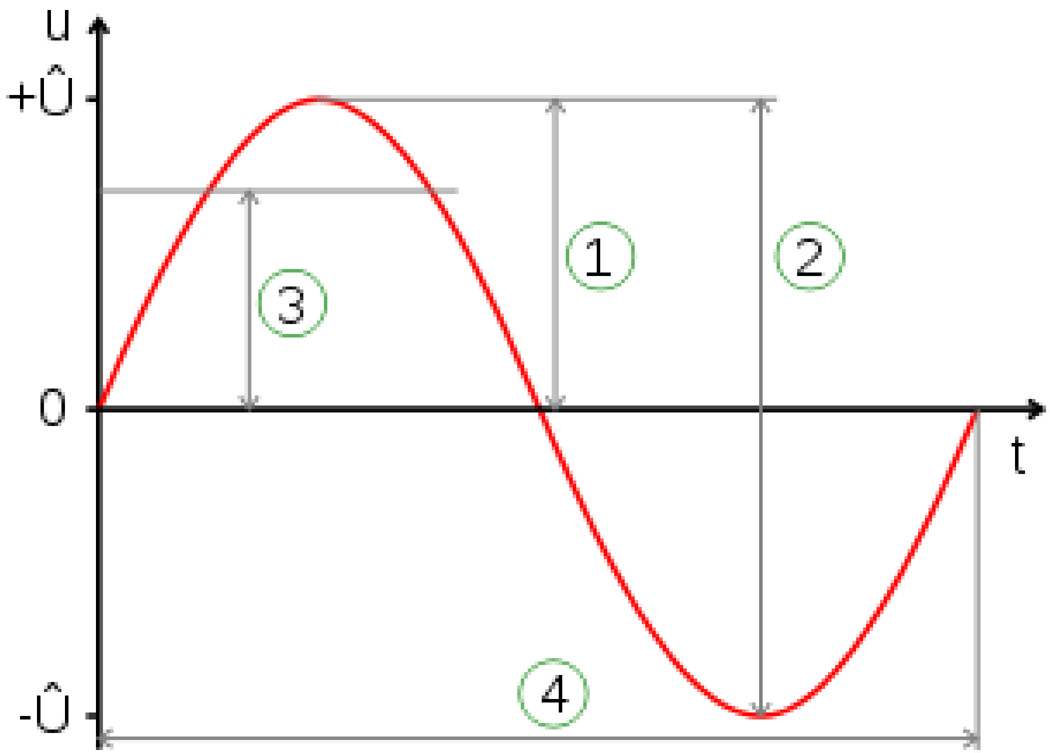
dove T è il periodo in secondi (può essere definito come il reciproco della frequenza).
Si definisce **valore efficace di un segnale periodico** x(t) la quantità:

$$X = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt}$$

Fisicamente, il valore efficace di una grandezza equivale a quel valore che, in regime di tensione continua, svilupperebbe la stessa potenza

Regime sinusoidale

Consideriamo il seguente segnale sinusoidale



Definiamo:

1. tensione di picco
2. tensione picco picco
3. valore efficace
4. periodo

Regime sinusoidale

Definisco x(t) come un generico segnale sinusoidale:

$$x(t) = X_p \cos(\omega t + \varphi)$$

con $\boldsymbol{X_p}$ **valore di picco** (ampiezza della sinusoide), $\boldsymbol{\omega}$ **pulsazione** (in radianti/sec), che si può ottenere dalla formula $\omega = 2\pi f$, con **f frequenza** (cicli/sec) e $\boldsymbol{\varphi}$ **la fase**.

Due segnali

$x(t) = X_p \cos(\omega t + \varphi)$ e $x_1(t) = X_{p1} \cos(\omega t + \varphi_1)$

(quindi con la stessa ω o frequenza) si dicono sfasati e la quantità $\boldsymbol{\varphi_1 - \varphi_0}$ **viene definita sfasamento** di $x_1(t)$ rispetto a $x_0(t)$.

Se lo sfasamento è nullo, i due segnali si dicono in fase.

Regime sinusoidale

Definisco x(t) come un generico segnale sinusoidale:

$$x(t) = X_p \cos(\omega t + \varphi)$$

con **X_p valore di picco** (ampiezza della sinusoide), **ω pulsazione** (in radianti/sec), che si può ottenere dalla formula $\omega = 2\pi f$, con **f frequenza** (cicli/sec) e **φ la fase**.

Per un segnale sinusoidale $x(t)$ così definito si ha:

$$\bar{X} = 0$$

$$X = {X_p}/{\sqrt{2}}$$

Rappresentazione vettoriale

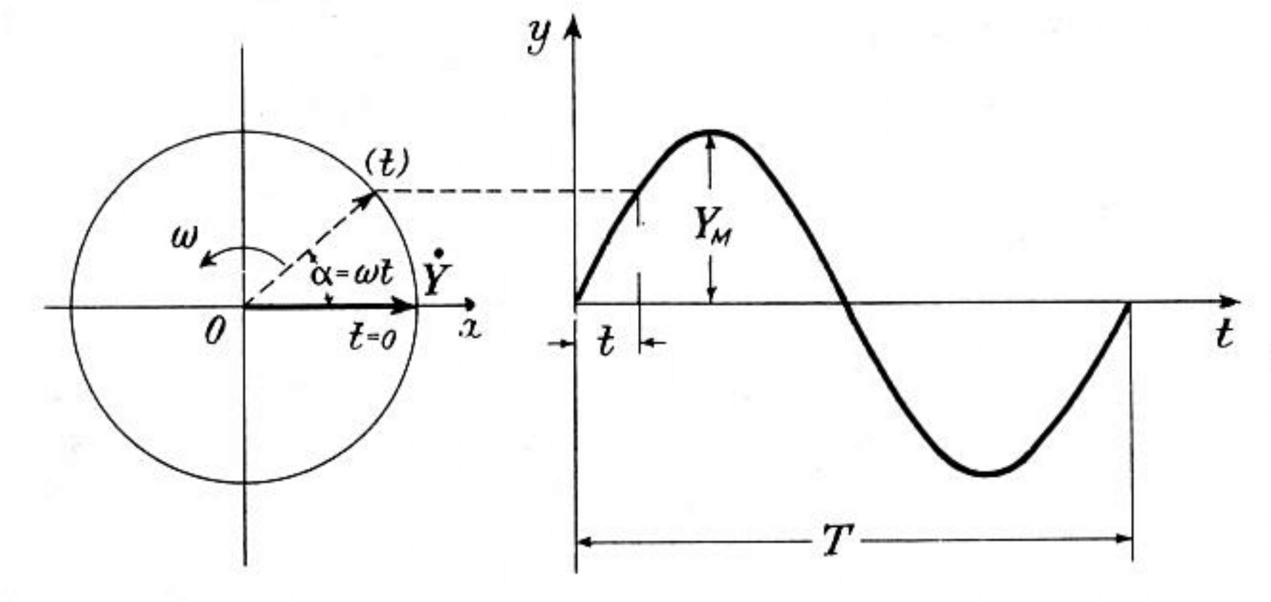
Consideriamo un generico segnale sinusoidale:

$$y = Y_M \sin(\omega t + \varphi)$$

Esso può essere immaginato come generato dalla rotazione di un vettore di lunghezza Y_M, alla velocità ω.

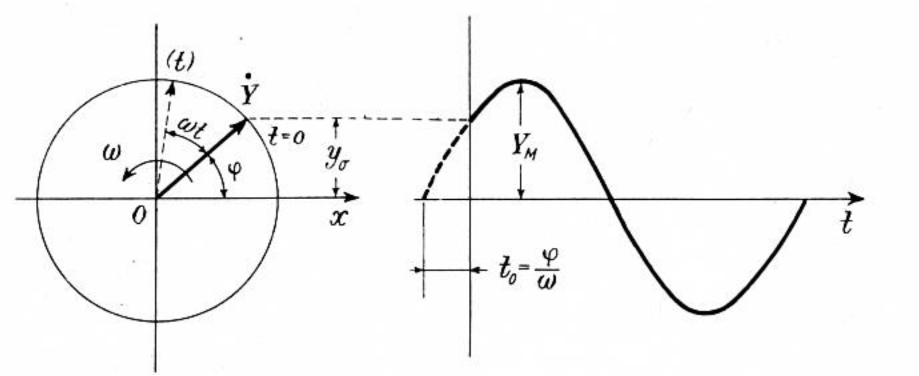
La sinusoide rappresenta l'andamento dell'ordinata del vettore.

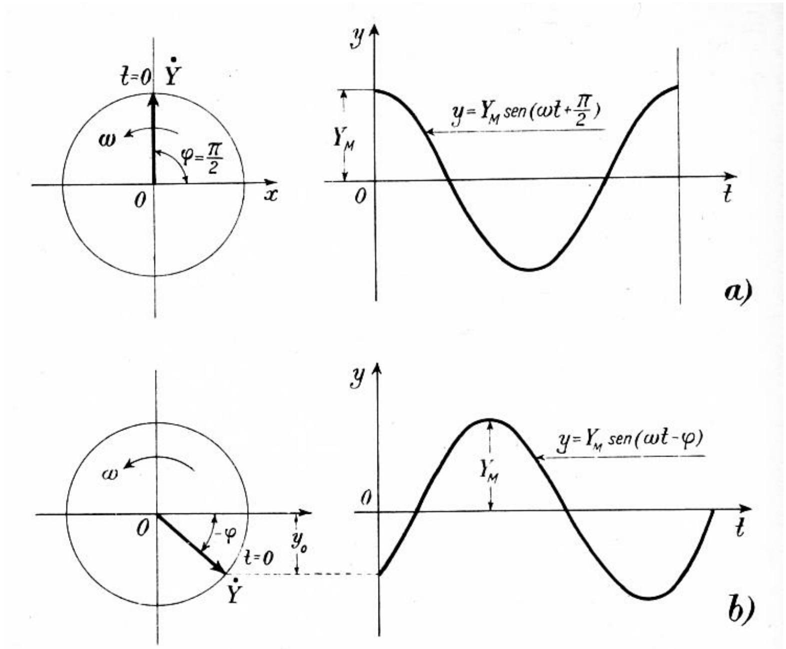
Nel caso di $\varphi = 0$ si ha:



Circuiti resistenze-condensatori in regime sinusoidale

Nel caso di φ≠0 si ha:



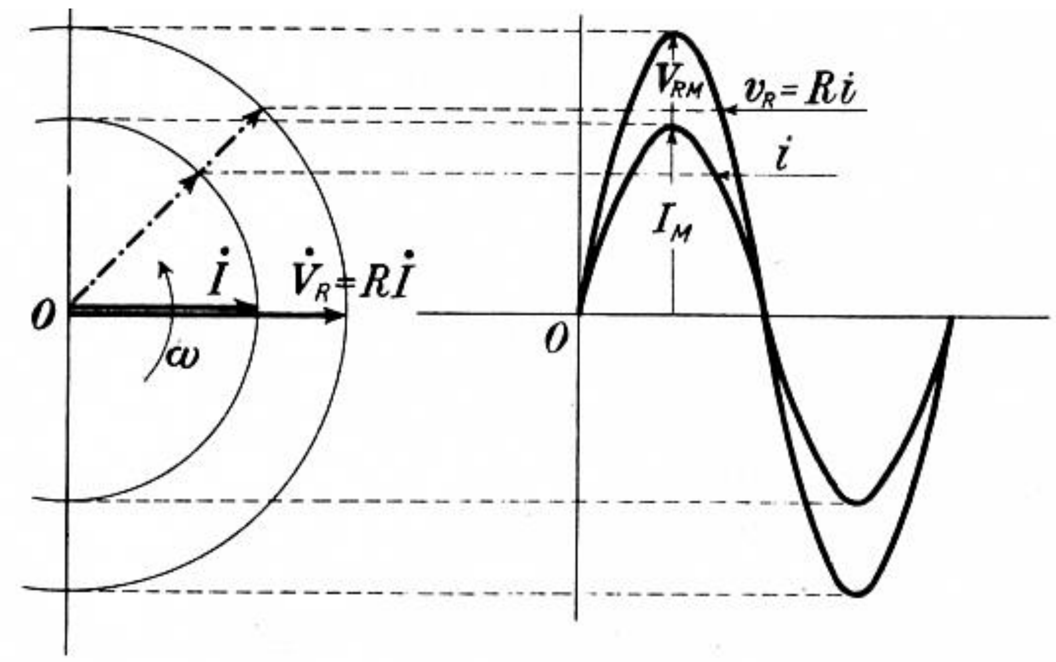


Circuiti resistenze-condensatori in regime sinusoidale

Relazione di fase per un circuito completamente <u>RESISTIVO</u>

Ricordiamoci che in ogni istante, la corrente in un resistore è data dalle legge di Ohm e quindi è direttamente proporzionale alla tensione ai suoi capi.

Perciò, se la tensione è sinusoidale, lo è anche la corrente (con ampiezza determinata da R). **Corrente e tensione sono in fase tra loro. Cambia l'ampiezza, ma non la fase e la frequenza o pulsazione**



Circuiti resistenze-condensatori in regime sinusoidale

Relazione di fase per un circuito completamente CAPACITIVO

Per un condensatore vale la relazione:

$$i = C\,\frac{dv}{dt}$$

se $v_c = V_M\, sin\, \omega t$

$$\frac{dv_c}{dt} = \omega\, V_M \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

quindi:

$$i = \omega\, C\, V_M \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

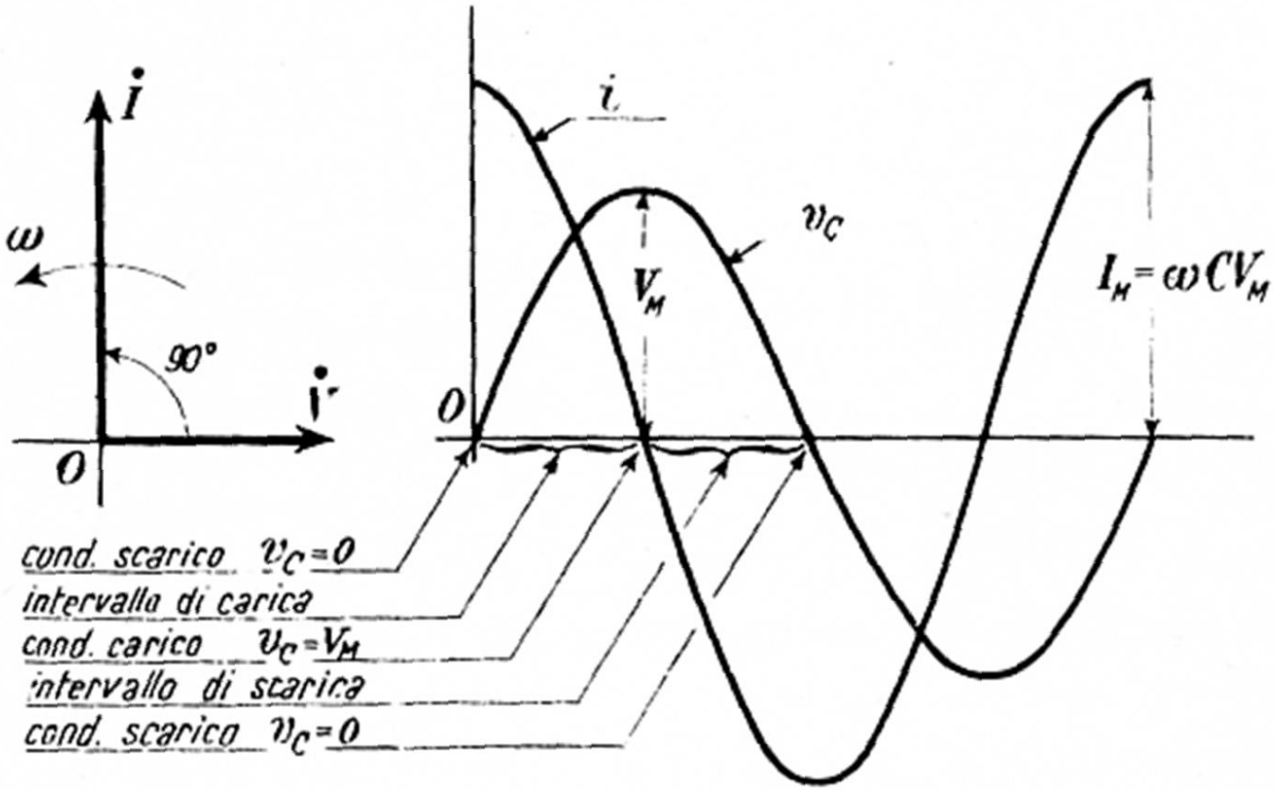
Si vede, quindi, che **la corrente è ancora sinusoidale**, **sfasata di un quarto di periodo e con ampiezza data da**:

$$I_M = \omega\, C\, V_M = \frac{V_M}{\frac{1}{\omega\, C}}$$

Circuiti resistenze-condensatori in regime sinusoidale

Corrente e tensione in un capacitore possono essere quindi graficati come segue:

Cambia l'ampiezza, cambia la fase NON cambia la frequenza o pulsazione



L'impedenza Z

Possiamo ora definire una nuova grandezza chiamata impedenza e che indicheremo con Z

Questa grandezza lega la tensione alla corrente secondo la relazione

V=ZI

Z= Re + jIm

Per un resistore, tale grandezza coincide con il valore della resistenza.

Per un capacitore, utilizzando la relazione appena ricavata prima, si può dire che vale in modulo $^1/_{\omega C}$ (chiamata talvolta reattanza capacitiva).

Come numero complesso:

$$I_M = \omega\ C\ V_M = \frac{V_M}{\frac{1}{\omega\ C}}$$

$$Z_c = \frac{1}{j\omega C}$$

L'impedenza Z

In sostanza, quando abbiamo a che fare con un circuito che lavora in regime di tensione o corrente alternata, posso rappresentare le mie grandezze elettriche, tensione e corrente come dei vettori sul piano complesso

Il rapporto tra i due vettori

$V/I = Z = Re + jIm$

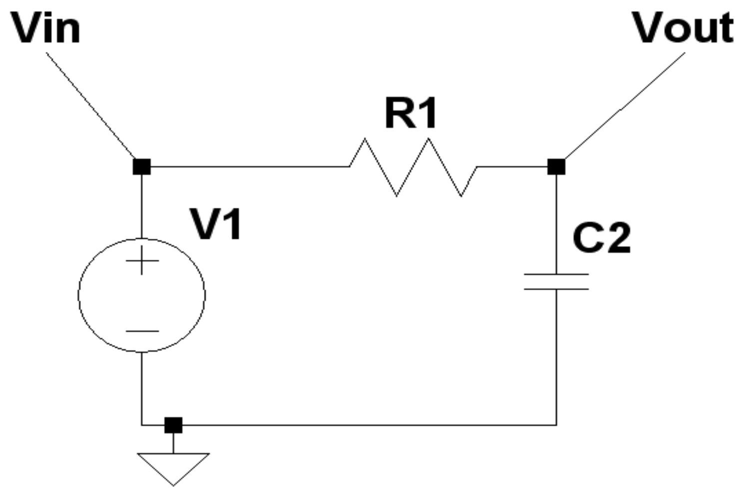
È l'impedenza, che è un numero complesso.

La parte reale dell'impedenza è in genere associata ai componenti dissipativi (resistenze)

La parte immaginaria a quelli che accumulano/rilasciano energia, capacitori e induttori

Circuito resistore capacità

Si consideri una serie composta da una resistenza e una capacità. Entrambe sono attraversate dalla stessa corrente



La relazione tra corrente e tensione può essere valutata considerando come impedenza equivalente della serie la quantità:

$$Z_{eq} = R + \frac{1}{j\omega C}$$

che determina quindi ampiezza e sfasamento della corrente rispetto alla tensione.

Circuito resistore capacità

In sostanza, posso trattare il mio condensatore come se fosse un resistore, a patto di considerare la sua impedenza.

In un circuito, se ho dei componenti in serie, l'impedenza equivalente uguale alla somma delle impedenze dei singoli componenti.

- **La resistenza ha una impedenza a sola parte reale pari a R**
- **Il condensatore ha una impedenza a sola parte immaginaria pari in modulo a $^{1}/_{\omega C}$**

Il rapporto tra modulo della tensione del generatore e corrente del generatore è dato dal modulo di Z_{eq}, mentre lo sfasamento è dato dalla fase di Z_{eq}

Circuito resistore capacità

Come si calcolano modulo e fase di un numero complesso?

X=a + jb

$$\left|X\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\angle X = \arctan g\left(\frac{b}{a}\right)$$

Trasformata di Laplace

Diagrammi di Bode

Sistemi lineari, tempo-invarianti

I circuiti elettrici possono essere visti come sistemi caratterizzabili dalla loro risposta ai segnali.

Un sistema può essere definito come:

- **lineare** (se vale il principio di sovrapposizione e di proporzionalità) o **non lineare**
- **tempo invariante** (se uno spostamento nel tempo dell'ingresso genera un uguale spostamento dell'uscita) o **tempo variante**
- **deterministico** (produce sempre la stessa uscita, dato lo stesso input) o **stocastico**

I circuiti elettrici di nostro interesse possono essere visti come **sistemi lineari tempo-invarianti (LTI systems), analogici e deterministici** (non tenendo conto di limitazioni di range delle tensioni e dell'invecchiamento dei componenti).

Sistemi lineari, tempo-invarianti

- **lineare** (se vale il principio di sovrapposizione e di proporzionalità) o **non lineare**
  - $X_1(t) \rightarrow O(x(t)) \rightarrow Y_1(t)$
  - $X_2(t) \rightarrow O(x(t)) \rightarrow Y_2(t)$
  - $aX_1(t) + bX_2(t) \rightarrow O(ax_1(t) + b(x_2(t))$
  - $aO(ax_1(t)) + bO(x_2(t)) \rightarrow aY_1(t)+b\ Y_2(t)$

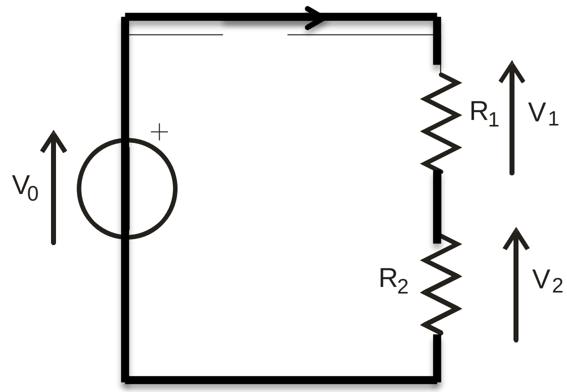
- **tempo invariante** (se uno spostamento nel tempo dell'ingresso genera un uguale spostamento dell'uscita)
  - $X_1(t) \rightarrow O(t) \rightarrow Y_1(t)$
  - $X_1(t-\tau) \rightarrow O(t-\tau) \rightarrow Y_1(t-\tau)$

Definiamo inoltre h(t) la risposta del sistema ad un ingresso impulsivo (impulso di Dirac)

$$\delta(t) \rightarrow O(\delta(t)) \rightarrow h(t)$$

Funzione di trasferimento e diagramma di Bode

Partiamo dal circuito più semplice che possiamo immaginare, il seguente partitore di tensione



Se consideriamo V_0 come tensione di ingresso e V_2 come tensione di uscita, la relazione ingresso/uscita può essere facilmente scritta come il rapporto tra V_2 e V_0.

In questo caso, la relazione ingresso/uscita è costante ed è data dalla legge del partitore di tensione.
Questo vale per qualsiasi segnale in ingresso avente qualsiasi frequenza e forma.

Funzione di trasferimento e diagramma di Bode

Il circuito che abbiamo visto è senza memoria (l'uscita dipende soltanto dal valore che si ha in quell'istante in ingresso).

Quelli che comprendono condensatori sono con memoria e possono essere modellati a parametri concentrati (la variabile di stato è la carica o la tensione sul condensatore).

Per analizzare questo tipo di sistemi viene comunemente utilizzata **l'analisi nel dominio di Laplace** attraverso la funzione di trasferimento del sistema e l'analisi dei suoi poli e zeri nel piano complesso.

La trasformata di Laplace

La trasformata di Laplace di una funzione f(t), definita per tutti i numeri reali $t \geq 0$, è la funzione F(s), così definita:

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt.$$

Con s numero complesso $s = \sigma + j\omega$

Date le funzioni f(t) e g(t), e le loro rispettive trasformate F(s) e G(s):

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \qquad g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

Nome della funzione	Dominio del tempo $x(t)=\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$	Dominio trasformato $X(s)=\mathcal{L}\{x(t)\}$	Regione di convergenza per sistemi causali
Impulso di Dirac	$\delta(t)$	1	all s
Gradino unitario	$1\cdot u(t)$	$\frac{1}{s}$	$s>0$
Esponenziale decrescente	$e^{-\alpha t}\cdot u(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$s>-\alpha$
Saturazione esponenziale a 1	$(1-e^{-\alpha t})\cdot u(t)$	$\frac{\alpha}{s(s+\alpha)}$	$s>0$
Seno	$\sin(\omega t)\cdot u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$s>0$
Coseno	$\cos(\omega t)\cdot u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$s>0$
seno iperbolico	$\sinh(\alpha t)\cdot u(t)$	$\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$	$s>\|\alpha\|$
Coseno iperbolico	$\cosh(\alpha t)\cdot u(t)$	$\frac{s}{s^2-\alpha^2}$	$s>\|\alpha\|$
Seno con inviluppo esponenziale decrescente	$e^{-\alpha t}\sin(\omega t)\cdot u(t)$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$	$s>-\alpha$
Coseno con inviluppo esponenziale decrescente	$e^{-\alpha t}\cos(\omega t)\cdot u(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$	$s>-\alpha$

Linearità	$\mathcal{L}\left\{af(t)+bg(t)\right\} = aF(s)+bG(s)$
Differenziazione	$\mathcal{L}\{f'\} = s\mathcal{L}\{f\} - f(0)$ $\mathcal{L}\{f''\} = s^2\mathcal{L}\{f\} - sf(0) - f'(0)$ $\mathcal{L}\left\{f^{(n)}\right\} = s^n\mathcal{L}\{f\} - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
Integrazione	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} = \mathcal{L}\left\{u(t)*f(t)\right\} = \frac{1}{s}F(s)$
Scalamento	$\mathcal{L}\left\{f(at)\right\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
Teorema del valore iniziale	$f(0^+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$
Teorema del valore finale	$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$ con tutti i poli con parte reale negativa
Shift in frequenza	$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} = F(s-a)$ $\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s-a)\right\} = e^{at}f(t)$
Shift nel tempo	$\mathcal{L}\left\{f(t-a)u(t-a)\right\} = e^{-as}F(s)$ $\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-as}F(s)\right\} = f(t-a)u(t-a)$
Convoluzione	$\mathcal{L}\{f(t)*g(t)\} = F(s)\cdot G(s)$

Un sistema LTI può essere analizzato nel dominio del tempo ricavando quella che viene chiamata la risposta all'impulso h(t).

Prendendo un generico ingresso x(t), l'uscita del sistema y(t) è data dalla convoluzione tra x(t) e h(t).

Un sistema LTI è completamente descritto dalla sua risposta all'impulso h(t)

Se conosco la risposta all'impulso posso ricavarmi la risposta del mio sistema a qualsiasi segnale

La trasformata di Laplace

L'operazione di convoluzione può essere semplificata passando dal dominio del tempo al dominio di Laplace.

In tal caso H(s) è la funzione di trasferimento e prendendo un generico ingresso X(s), la trasformata dell'uscita Y(s) può essere ottenuta dal prodotto di H(s)X(s).

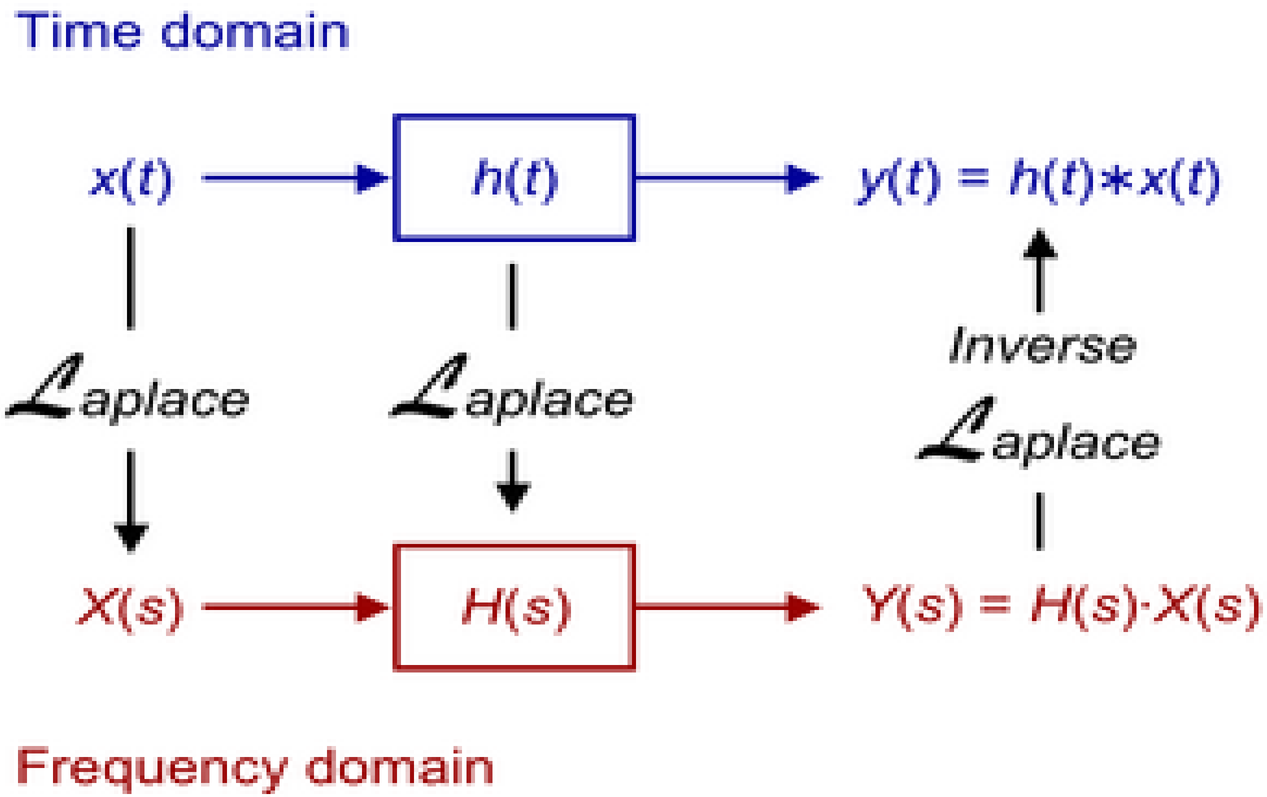
La convoluzione si trasforma in un prodotto nel dominio di Laplace

Un sistema LTI è completamente descritto dalla sua funzione di trasferimento H(s)
Se conosco H(s) posso ricavarmi la risposta del mio sistema a qualsiasi segnale

La trasformata di Laplace

X(s) è la trasformata di Laplace di x(t), Y(s) è quella di y(t) e H(s) è quella di h(t).

Ci si può muovere tra i due domini, scegliendo la strada che ci risulta più semplice per lo specifico circuito.



La trasformata di Laplace

Per capire l'importanza di questo approccio partiamo dalla relazione che lega la corrente e la tensione in un condensatore.

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

Supponendo v(0)=0 (si potrà eventualmente riconsiderare questo vincolo utilizzando la sovrapposizione degli effetti) si ottiene nel dominio di Laplace:

$$I(s) = CsV(s)$$

Se vogliamo trovare un equivalente della legge di Ohm nel dominio di Laplace per un condensatore potremmo scrivere (parlando di impedenza Z al posto di resistenza R):

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)}$$

E quindi l'impedenza di un condensatore nel dominio di Laplace è definita come:

$$Z(s) = \frac{1}{sC}$$

Flash Back

Per un capacitore, utilizzando la relazione appena ricavata, si può dire che vale in modulo $^1/_{\omega C}$ (chiamata talvolta reattanza capacitiva).

Come numero complesso:

$$Z_c = \frac{1}{j\omega C}$$

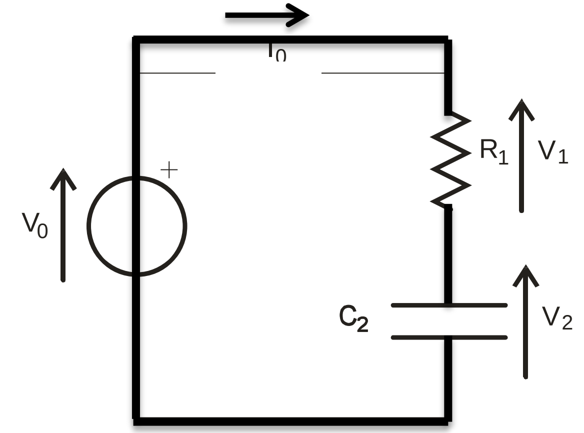
Abbiamo appena dimostrato che nel dominio di Laplace l'impedenza di un condensatore nel dominio di Laplace è definita come:

$$Z(s) = \frac{1}{sC}$$

s= jω

La trasformata di Laplace

Consideriamo adesso il seguente circuito RC



Se consideriamo V_0 come ingresso del sistema e V_2 come uscita dello stesso

Voglio ricavare la relazione che li lega nel dominio di Laplace.

Vista la linearità della trasformata si possono applicare le leggi di Kirchhoff anche ai segnali trasformati, quindi:

$$V_1(s) = R_1 I_0(s) \qquad V_2(s) = \frac{I_0(s)}{sC_2}$$

$$Vo(s) = \frac{I_0(s)}{sC_2} + R_1 I_0(s)$$

$$I_0(s) = \frac{V_0(s)}{R_1 + \dfrac{1}{sC_2}}$$

Segue che

$$V_2(s) = \frac{V_0(s)}{R_1 + \dfrac{1}{sC_2}} \cdot \frac{1}{sC_2}$$

E quindi

$$\frac{V_2(s)}{V_0(s)} = \frac{1}{sC_2R_1 + 1}$$

Avremmo potuto ottenere lo stesso risultato anche utilizzando la regola del partitore generalizzato alle impedenze:

$$\frac{V_2(s)}{V_0(s)} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad \text{con} \quad Z_1 = R_1 \quad \text{e} \quad Z_2 = \frac{1}{sC_2}$$

La trasformata di Laplace

Seguendo la definizione di sistema LTI e di funzione di trasferimento si può quindi avere:

$$H(s) = \frac{1}{sC_2R_1 + 1}$$

Se lo scopo fosse quello di ricavare l'uscita Y e non semplicemente quello di analizzare il sistema basterebbe utilizzare la relazione:

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

La trasformata di Laplace

Supponiamo il condensatore scarico all’istante 0^-.

Possiamo, per esempio, ricavare Y per l’ingresso a gradino utilizzato nell’esempio sull’analisi temporale dello stesso circuito:

x(t) è quindi 1·u(t) e quindi X(s)=1/s

Pertanto: $$Y(s) = \frac{1}{s(sC_2R_1 + 1)}$$

Saturazione esponenziale a 1	$(1 - e^{-\alpha t}) \cdot u(t)$	$\frac{\alpha}{s(s+\alpha)}$	$s > 0$

Allora:

$$y(t) = (1 - e^{-C_2R_1t})u(t)$$

che corrisponde al risultato ottenuto nella analisi nel dominio del tempo!

La trasformata di Laplace

Il nostro interesse però non è quello di ricavare la risposta nel tempo ma quello di **caratterizzare il sistema in frequenza**.

Questo può essere fatto analizzando semplicemente i **poli e gli zeri della funzione di trasferimento**.

Analisi di poli e zeri

Il nostro interesse però non è quello di ricavare la risposta nel tempo ma quello di **caratterizzare il sistema in frequenza**.

Questo può essere fatto analizzando semplicemente i **poli e gli zeri della funzione di trasferimento**

La funzione di trasferimento può essere descritta come un rapporto di polinomi (a coefficienti reali) nella variabile s (complessa).

Vengono definiti zeri le radici del polinomio al numeratore, e poli le radici del polinomio al denominatore.

Per le proprietà dei polinomi, si può quindi scrivere una generica funzione di trasferimento come:

$$H(s) = \frac{(s-z_1)(s-z_2)(s-z_3)\cdots(s-z_M)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)\cdots(s-p_N)}$$

M è l'ordine del numeratore, N è quello del denominatore

Analisi di poli e zeri

Un generico polo, $p_i = \delta_i + j\omega_i$ è

- reale se ω_i è nullo
- semplice se nessun altro p_j è identico a esso
- multiplo di ordine 2 se c'è un altro p_j di valore identico
- di ordine 3 se ce ne sono altri 2 identici

Visto che i coefficienti del polinomio sono reali, se p_i non è reale (cioè ω_i non è nullo), deve esistere un altro polo p_j con ω_j identico e di segno opposto, cioè deve esiste un complesso coniugato.

Anche i poli complessi coniugati possono essere presenti più volte e quindi multipli.

Analisi di poli e zeri

In base alla tipologia dei poli è possibile stabilire se la risposta all'impulso (l'antitrasformata di H(s), h(t) risposta all'impulso), all'infinito, tende a un valore limitato o tende a divergere.
Dalla tabella delle trasformate notevoli si può ricavare che, all'infinito:

- **se $\delta_i < 0$ la risposta all'impulso h(t) tende a zero**. In particolare, se i poli sono reali, si ha un esponenziale decrescente (se il polo è semplice) o moltiplicato per una potenza di t (se il polo è multiplo). Se i poli sono complessi coniugati, si ha una sinusoide decrescente con inviluppo esponenziale decrescente (se semplici) o moltiplicato per una potenza di t (se multipli).
- **se $\delta_i > 0$ la risposta all'impulso h(t) tende a divergere.** In particolare, si hanno le stesse risposte precedenti ma con inviluppi esponenziali crescenti.
- **se $\delta_i = 0$ la risposta all'impulso h(t) prevede diverse situazioni (tutte comunque al limite dell'instabilità o oltre).** Se il polo è in zero ed è semplice, si ha un gradino 1u(t), se è multiplo, si ha una potenza di t (quindi rampa, parabola), comunque crescente e divergente.

Analisi di poli e zeri

Si può affermare quindi che **se i poli hanno tutti parte reale negativa, il sistema è stabile** (nel senso che la risposta non cresce all'infinito con un ingresso limitato in ampiezza)

Se la parte reale di almeno un polo è nulla, si possono avere risposte che perdurano all'infinito nonostante l'ingresso si sia azzerato

Se la parte reale di almeno un polo è maggiore di zero, il sistema è instabile

In base ai poli e zeri è possibile anche determinare la **risposta in frequenza** di un sistema realizzando quello che viene chiamato il **diagramma di Bode**

Diagramma di Bode

La funzione di trasferimento H(s) può essere utilizzata per valutare la risposta in uscita del sistema quando è soggetto a uno specifico segnale, moltiplicandola per la trasformata dell'ingresso e anti trasformando il risultato.

Sappiamo che ogni segnale può essere scomposto in una somma di sinusoidi, quindi ci interessa vedere qual è l'ampiezza della sinusoide che si ottiene all'uscita di un circuito che ha un ingresso sinusoidale.

A tale scopo, quello che importa è **conoscere H(jω)** (Laplace diventa quindi la trasformata di Fourier):

- il modulo di questa funzione complessa ci dirà l'ampiezza della risposta
- la sua fase ci dirà quanto sarà sfasata la sinusoide in uscita rispetto a quella in ingresso.

Diagramma di Bode

A cosa ci serve conoscere H(ω)?

Se ad un sistema applico un ingresso, con un determinata ampiezza e pulsazione e fase iniziale, otterrò in uscita un segnale con la stessa pulsazione, ma con ampiezza e fase differenti

$X(\omega) = A \cdot \mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$
$Y(\omega) = A_1 \cdot \mathrm{sen}(\omega t + \varphi_1)$

Conoscere la sua espressione ci permette di valutare l'andamento della funzione di trasferimento al variare della pulsazione

In altri termini possiamo stabilire come varia l'uscita al variare della pulsazione del segnale di ingresso

Diagramma di Bode

A cosa ci serve conoscere H(ω)?

$X(\omega) = A \cdot \mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$
$Y(\omega) = A_1 \cdot \mathrm{sen}(\omega t + \varphi_1)$

$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$

Esisteranno pulsazioni per le quali il segnale è amplificato, oppure attenuato

Esisteranno delle pulsazioni in cui il segnale è in fase oppure sfasato rispetto all'ingresso

Se conosciamo l'andamento di ampiezza e fase di H(ω) possiamo valutare tutto questo a priori, in base allo schema del nostro circuito

Diagramma di Bode

Il primo passo analizzare la H(s)

$$H(s) = 100\frac{s+1}{s^2+110s+1000} = 100\frac{s+1}{(s+10)(s+100)}$$

E portarla nella seguente forma in cui tutti i termini costanti sono uguali a 1

$$H(s) = 100\frac{s+1}{10\cdot\left(1+\frac{s}{10}\right)100\cdot\left(1+\frac{s}{100}\right)}$$

$$H(s) = 0.1\frac{s+1}{\left(1+\frac{s}{10}\right)\cdot\left(1+\frac{s}{100}\right)}$$

Diagramma di Bode

La relazione precedente può essere facilmente trasformata nel dominio di Fourier considerando un s esclusivamente immaginario pari a jω (con questa trasformazione andiamo a vedere risposte a sinusoidi di ampiezza 1 e frequenza f=/2p) e trasformato in modulo/fase

$$H(j\omega) = 0.1 \frac{j\omega + 1}{\left(1 + j\frac{\omega}{10}\right) \cdot \left(1 + j\frac{\omega}{100}\right)}$$

Si compone quindi di 4 termini:

- un termine costante (0.1)
- uno zero (per s=-1)
- due poli (uno in -10, l'altro -100).

Diagramma di Bode

Per rendere facile fare un disegno di H(ω), bisogna trasformare l'operazione di moltiplicazione dei vari termini in qualcosa di più semplice.

Si può osservare che se si esprime l'ampiezza in scala logaritmica, la moltiplicazione dei termini risulta una somma, per la famosa regola (log a b = log a+ log b).

La ampiezza verrà descritta in decibel
$V[dB]=20 \log_{10} V$

Con i logaritmi i prodotti diventano somme e i rapporti diventano differenze

Il problema quindi si riduce al saper disegnare ognuno dei termini individuati, **separare modulo e fase, sommare graficamente i moduli gli uni con gli altri e fare lo stesso con le fasi**.

Diagramma di Bode

$H(s) = H(j\omega) = K$

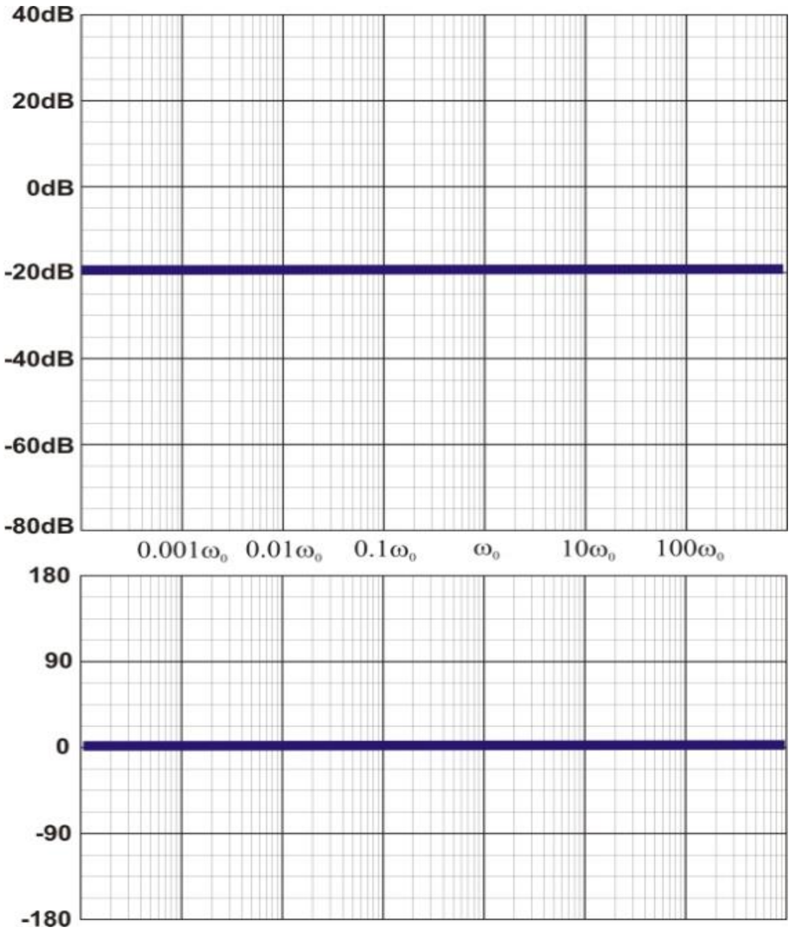
Termine costante

Ampiezza: $|H(j\omega)| = |K|$

K= 0.1

$$20\log_{10}|H(j\omega)| =$$

$$20\log_{10} 0.1 = -20dB$$



Fase:

Costante, nulla se K positivo

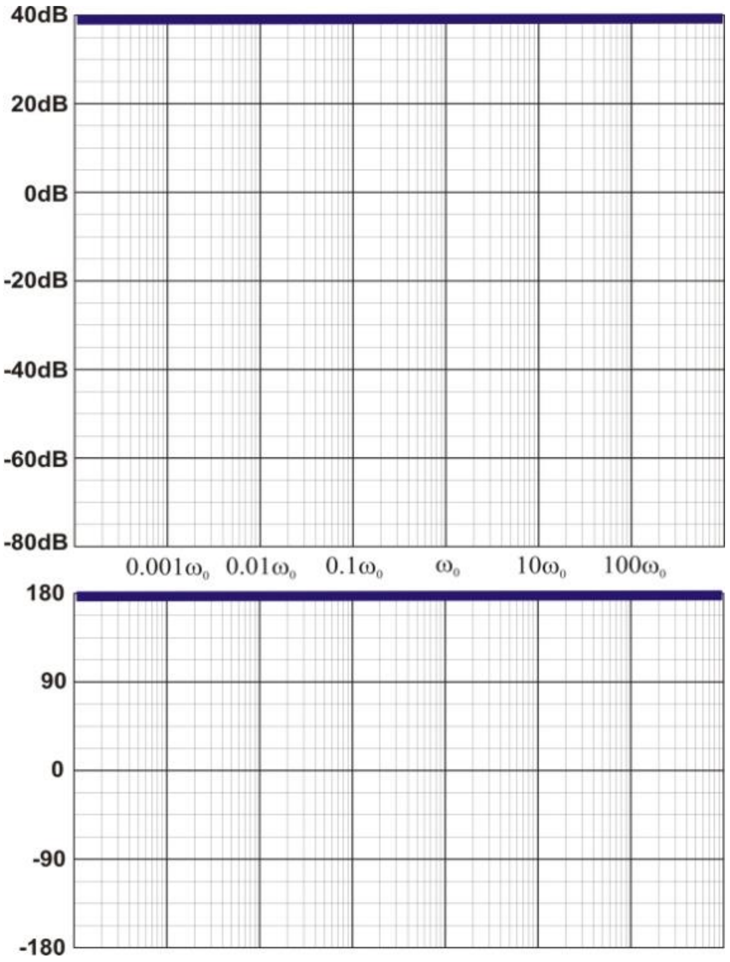
180gradi (p) se K negativo

Diagramma di Bode

K= -100

Ampiezza

$$20\log_{10} 10^2 = 40dB$$



Fase:

180°

Diagramma di Bode

Polo singolo reale

$$H(s) = \frac{1}{1+\frac{s}{\omega_0}} \qquad H(j\omega) = \frac{1}{1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{1}{\left(1+j\dfrac{\omega}{10}\right)}}$$

Ampiezza

$$|H(j\omega)| = \left|\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}\right| \; in\ dB = 20\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}\right) = -20\log_{10}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)$$

Può essere studiata per tre diverse condizioni:

N.B.
se il polo/zero lo abbiamo per s = -x
$\omega_0 = x$

Diagramma di Bode

$\omega \ll \omega_0$	$\lvert H(j\omega)\rvert = -20\log_{10}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right) \approx -20\log_{10}(1) = 0$
$\omega = \omega_0$	$\lvert H(j\omega)\rvert = -20\log_{10}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right) \approx -20\log_{10}(\sqrt{2})$ $= -3.01dB$
$\omega \gg \omega_0$	$\lvert H(j\omega)\rvert = -20\log_{10}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)$ $\approx -20\log_{10}\left(\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right) = -20\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$

Diagramma di Bode

Si può approssimare con una retta che vale 0 fino alla frequenza di taglio ω_0 e da quel punto in poi avrà una pendenza che diminuisce di 20dB a decade.

Nella realtà, n ω_0 la curva vera si discosta di -3dB da quella approssimata.

Diagramma di Bode: Fase

$$\angle H(j\omega) = -\angle\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

Può essere studiata nelle tre condizioni

$\omega \ll \omega_0$.	$\omega = \omega_0$	$\omega \gg \omega_0$
$\angle H(j\omega) \approx -\arctan(0) = 0° = 0 \text{ radians}$	$\angle H(j\omega) = -\arctan(1) = -45° = -\frac{\pi}{4} \text{ radians}$	$\angle H(j\omega) \approx -\arctan(\infty) = -90° = -\frac{\pi}{2} \text{ radians}$

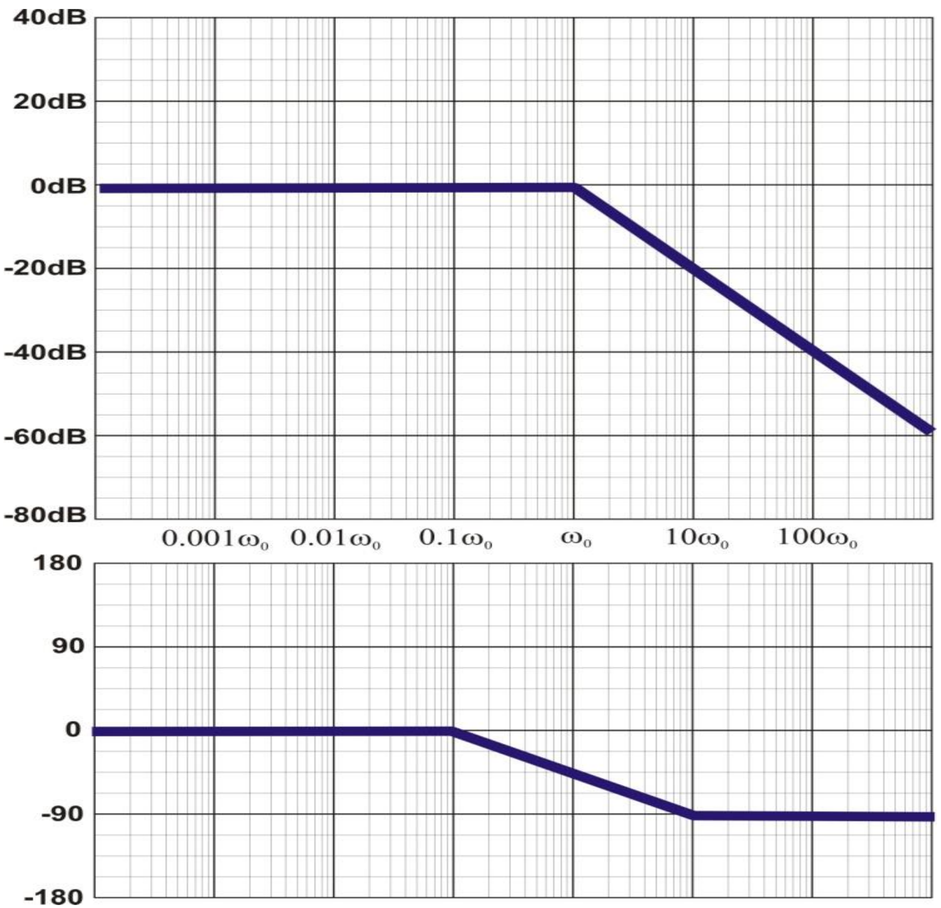
Nella pratica, fino 0.1 ω_0 vale 0 gradi, poi decresce linearmente passando in ω_0 a -45 gradi e torna costante a 10 ω_0 con il valore -90gradi

La fase inizia a decrescere una decade prima di ω_0 e ritorna costante una decade dopo ω_0, con pendenza -45°/decade

Diagramma di Bode: Riassumendo

Ampiezza:

- Retta che vale 0 fino alla frequenza di taglio ω_0
- Da quel punto in poi avrà una pendenza che diminuisce di 20dB a decade.



Fase

- Nella pratica, fino 0.1 ω_0 vale 0 gradi,
- decresce linearmente passando in ω_0 a -45 gradi/decade
- Ridiventa costante a 10 ω_0 con il valore -90 gradi

Diagramma di Bode

Zero singolo reale

$$H(s) = 1 + \frac{s}{\omega_0} \qquad H(j\omega) = 1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0} \qquad H(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{1}$$

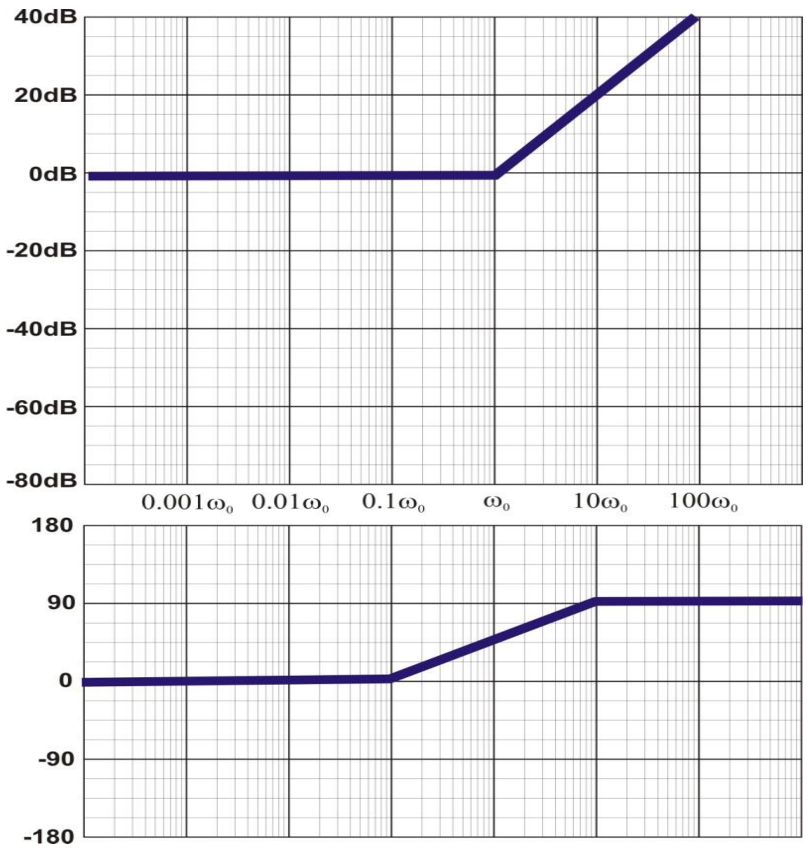
Nel caso di uno zero reale la procedura è la stessa del polo, ma con pendenze cambiate di segno (20dB/decade per l'ampiezza, e da 0 a 90gradi per la fase)

Provate a fare i conti!

Diagramma di Bode: Riassumendo

Ampiezza:

- Retta che vale 0 fino alla frequenza di taglio ω_0
- Da quel punto in poi avrà una pendenza che aumenta di 20dB a decade.



Fase

- Nella pratica, fino 0.1 ω_0 vale 0 gradi,
- aumenta linearmente passando in ω_0 a +45 gradi/decade
- Ridiventa costante a 10 ω_0 con il valore +90 gradi

Diagramma di Bode: Riassumendo

Polo in zero	Zero in zero
Ampiezza	Ampiezza
$H(s) = \frac{1}{s} \qquad H(j\omega) = \frac{\omega_0}{j\omega} = -j\frac{\omega_0}{\omega}$ $\lvert H(j\omega)\rvert = \left\lvert -j\frac{\omega_0}{\omega}\right\rvert = \frac{\omega_0}{\omega}$ Questa funzione è rappresentata da una linea retta con una pendenza costante di -**20dB per decade**, che passa per 0 dB a 1rad/sec e a -20dB a 10 rad/sec.	H(s)=s $H(j\omega) = j\frac{\omega}{\omega_0}$ Questa funzione è rappresentata da una linea retta con una pendenza costante di **20dB per decade**, che passa per 0 dB a 1rad/sec e a 20dB a 10 rad/sec.
Fase	Fase
$\angle H(j\omega) = \angle -j\frac{\omega_0}{\omega} = -90°$	La fase è di 90°

Diagramma di Bode: Riassumendo

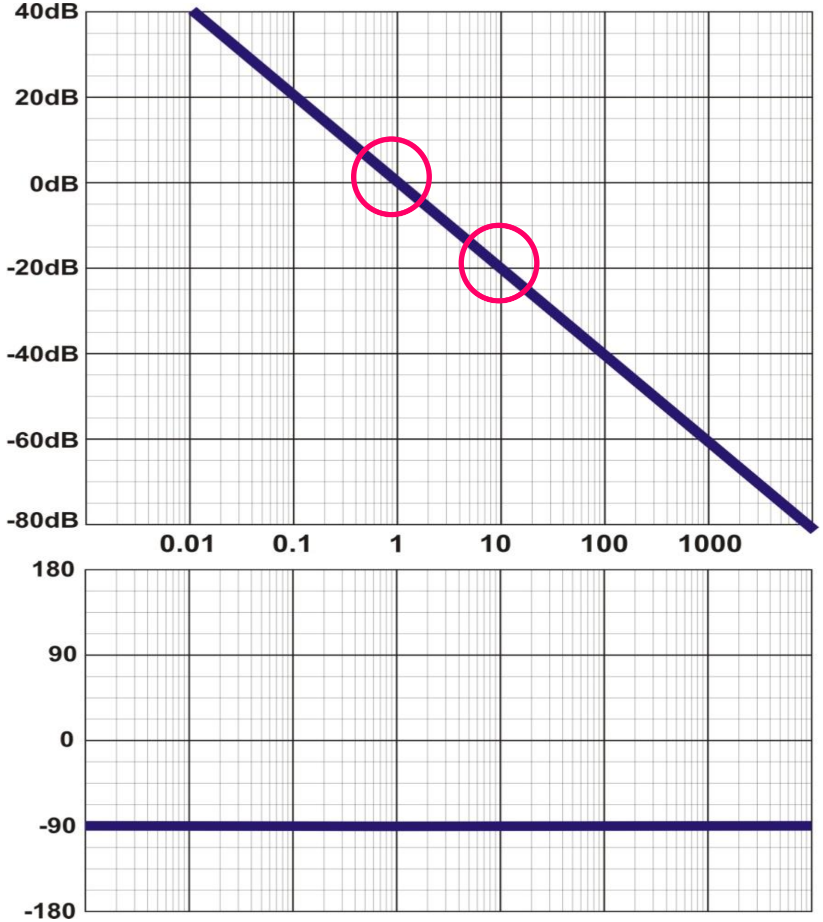


Diagramma di Bode

1) **Costante pari a 0.1**

2) **Zero per s=-1 → $\omega_0 = 1$**

3) **Polo per s=-10 → $\omega_0 = 10$**

4) **Polo per s=-100 → $\omega_0 = 100$**

$$H(j\omega) = 0.1 \frac{j\omega + 1}{\left(1 + j\frac{\omega}{10}\right)\cdot\left(1 + j\frac{\omega}{100}\right)}$$

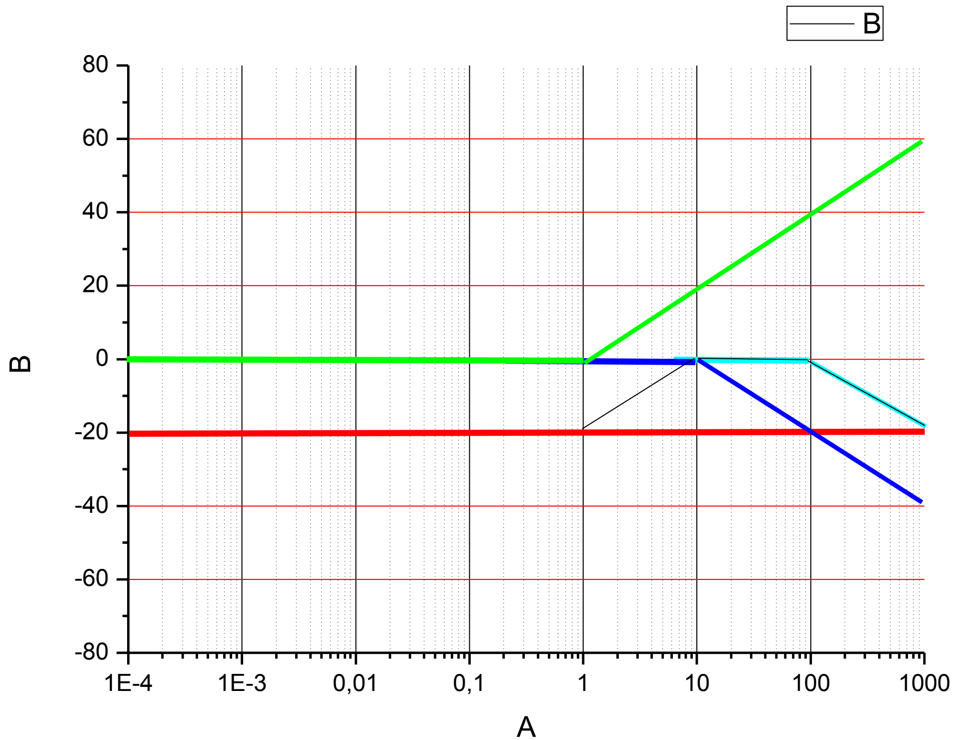


Diagramma di Bode

Tracciare il diagramma di BODE della funzione

$$H(s) = 100\frac{s+1}{s^2+110s+1000} = 100\frac{s+1}{(s+10)(s+100)}$$

$$H(s) = 0.1\frac{s+1}{\left(1+\frac{s}{10}\right)\cdot\left(1+\frac{s}{100}\right)}$$

$$H(j\omega) = 0.1\frac{j\omega+1}{\left(1+j\frac{\omega}{10}\right)\cdot\left(1+j\frac{\omega}{100}\right)}$$

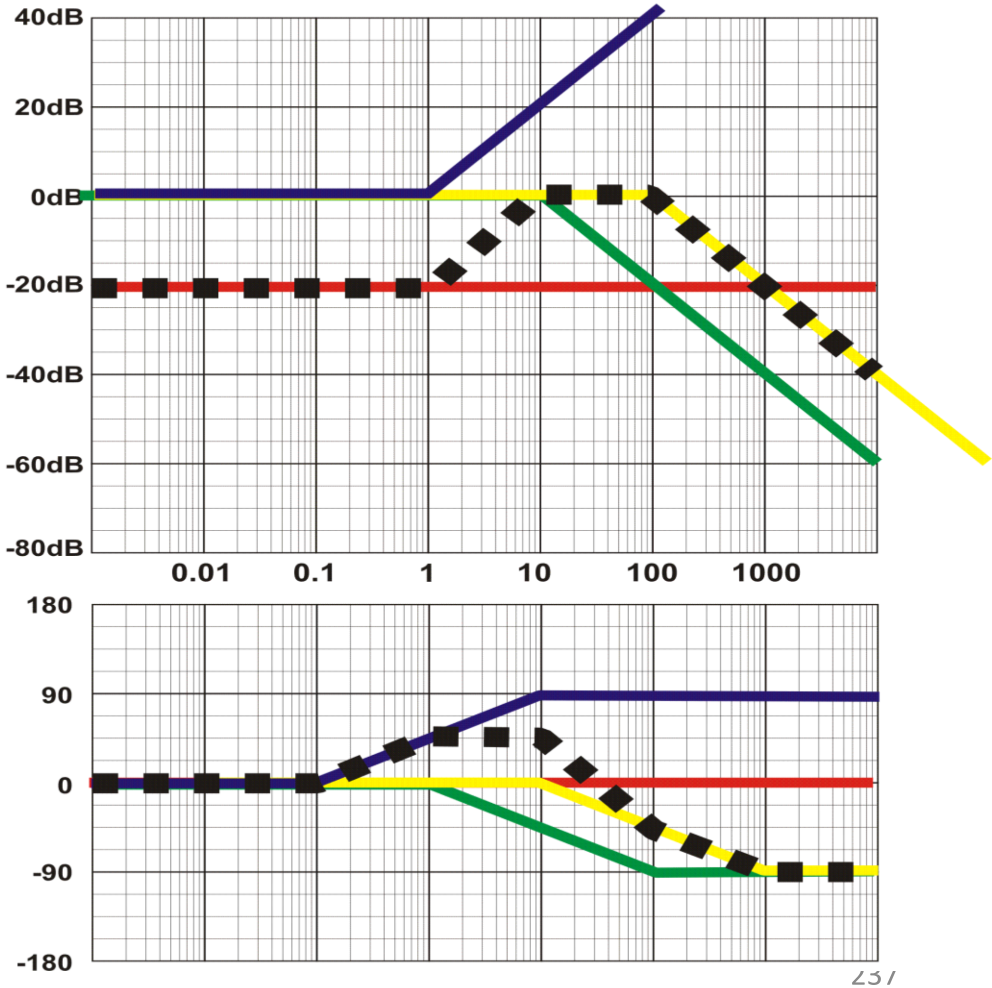


Diagramma di Bode

$$H(j\omega)=10\frac{s+100}{(s+1)\cdot(s+10)}$$

$$H(j\omega)=10\frac{100\cdot\left(1+\frac{j\omega}{100}\right)}{(1+j\omega)\cdot 10\cdot\left(1+\frac{j\omega}{10}\right)}$$

$$H(j\omega)=100\frac{\left(1+\frac{j\omega}{100}\right)}{(1+j\omega)\cdot\left(1+\frac{j\omega}{10}\right)}$$

1) **Costante pari a 100**
2) **Zero per ω=100**
3) **Polo per ω=1**
4) **Polo per ω=10**

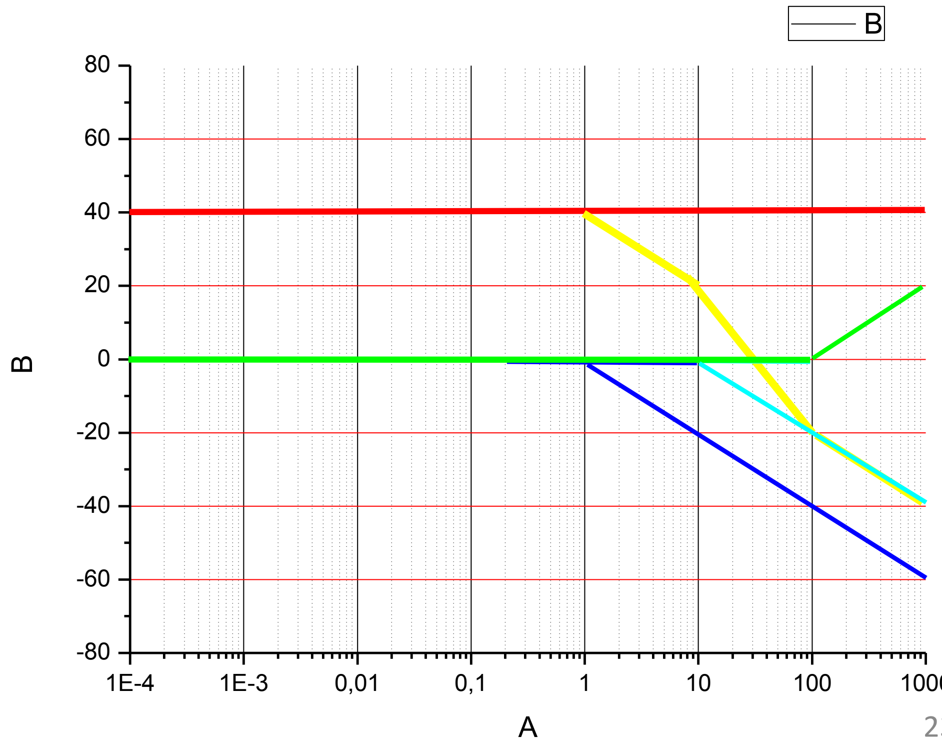


Diagramma di Bode

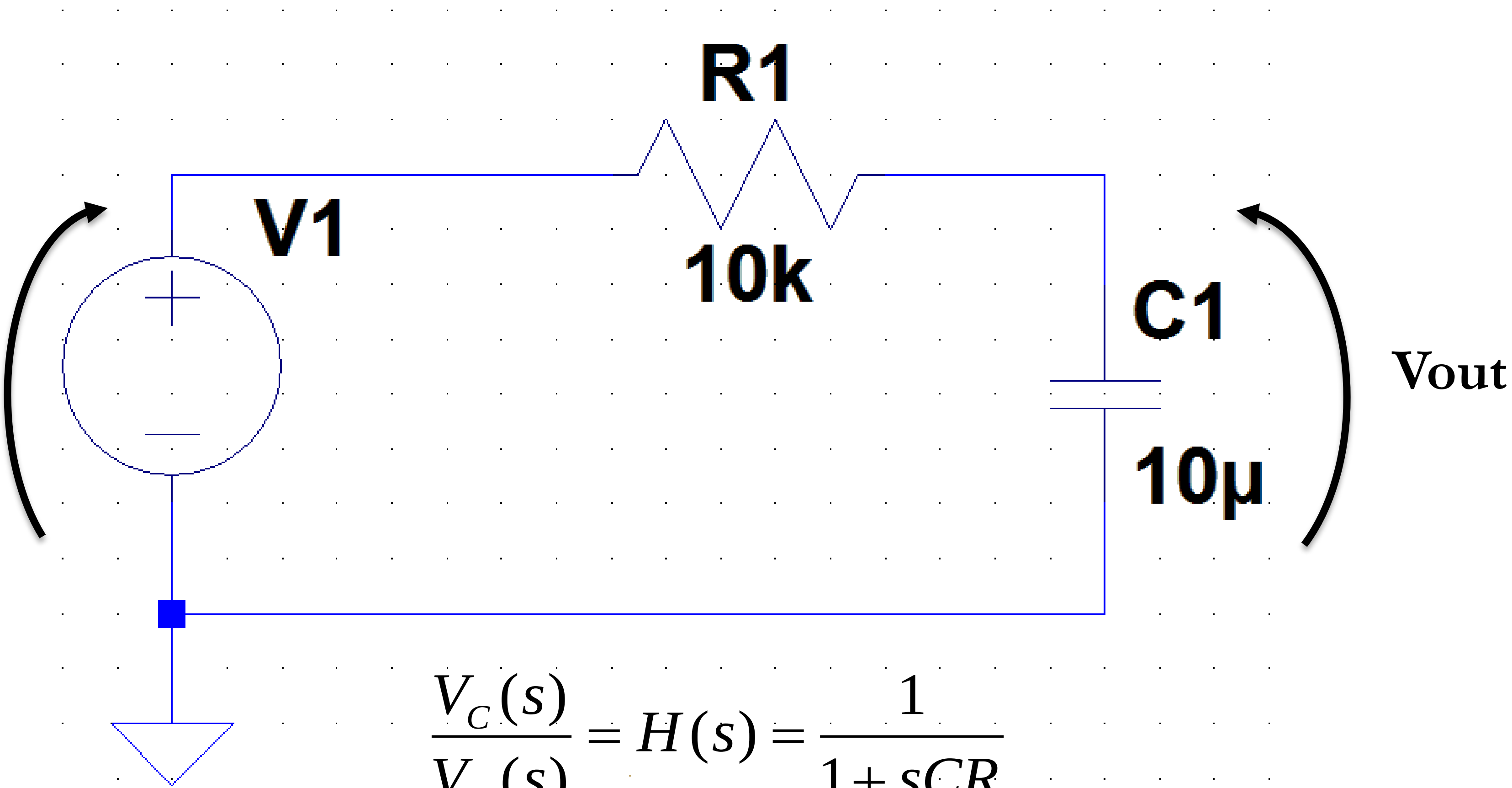
Tracciare il diagramma di BODE delle seguenti funzioni (per casa)

$$H(s) = \frac{1000 \cdot (s + 0.1)}{s^2 + 11s + 100}$$

$$H(s) = \frac{5 \cdot (s + 4)}{s^2 + 15s + 50}$$

Diagramma di Bode

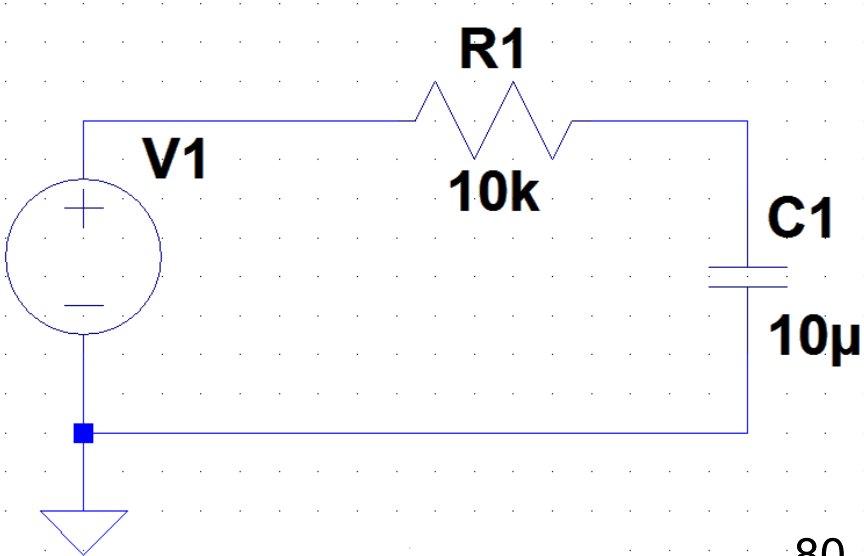
Tracciare il diagramma di BODE dei seguenti circuiti:



$$\frac{V_C(s)}{V_{in}(s)} = H(s) = \frac{1}{1+sCR}$$

$$\frac{V_C(s)}{V_{in}(s)} = H(s) = \frac{1}{1+sCR}$$

Diagramma di Bode



$$\frac{V_C(s)}{V_{in}(s)} = H(s) = \frac{1}{1+sCR}$$

$$\frac{V_C(s)}{V_{in}(s)} = H(s) = \frac{1}{1+sCR}$$

$$H(s) = \frac{1}{1+10s}$$

Ho un polo per s = -10
Per ω_0=10 rad/sec

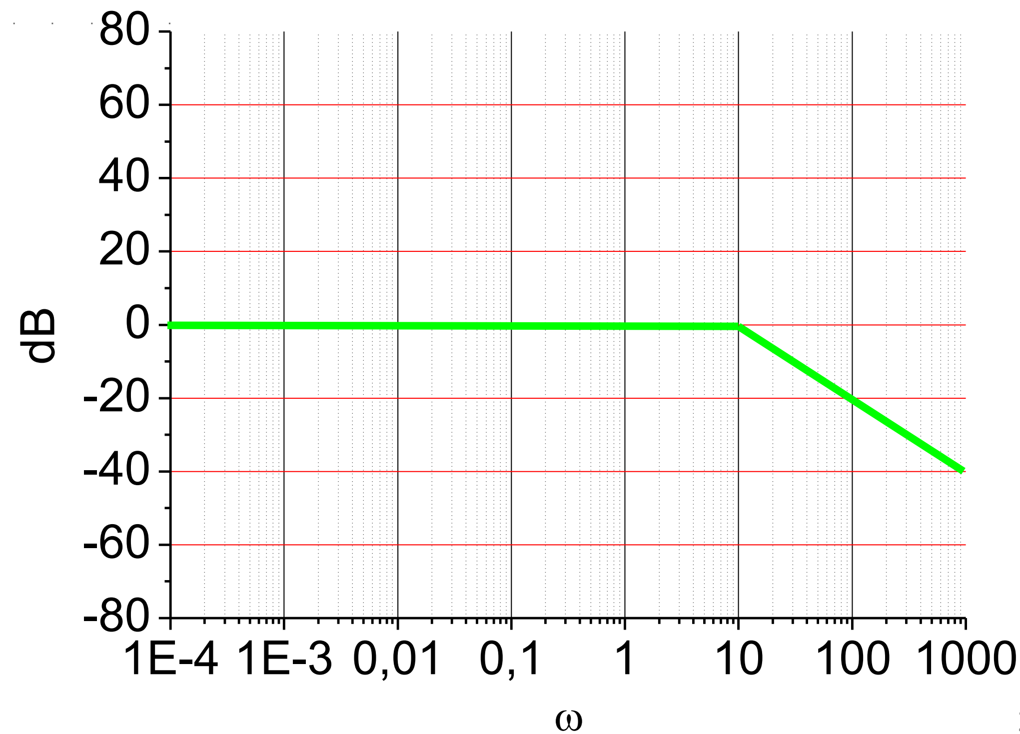
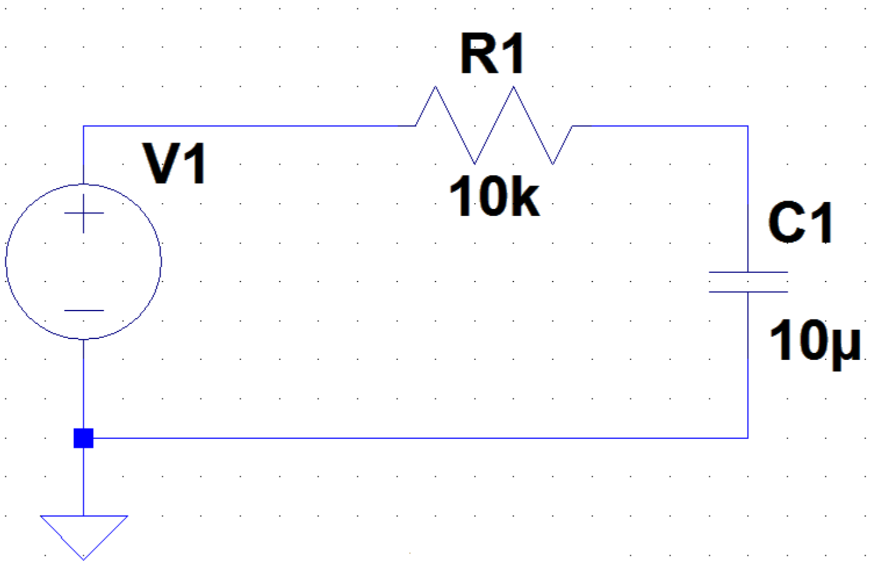
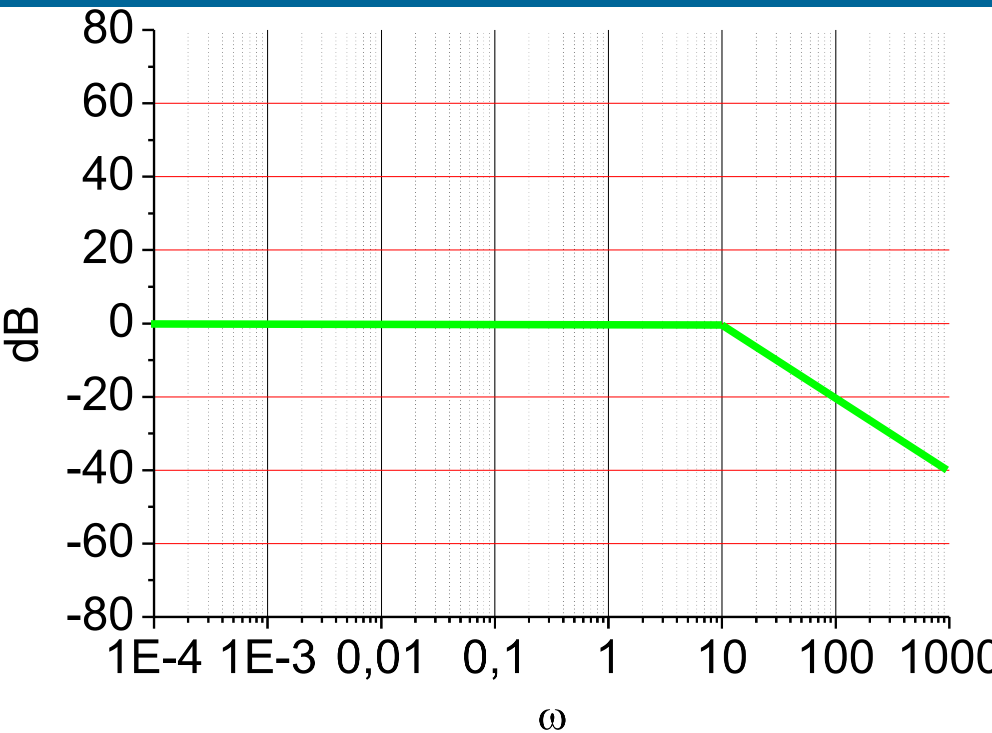


Diagramma di Bode





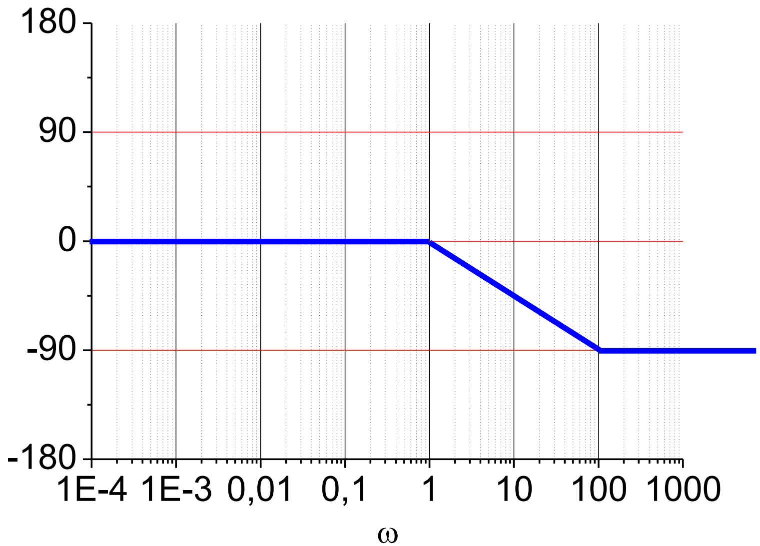
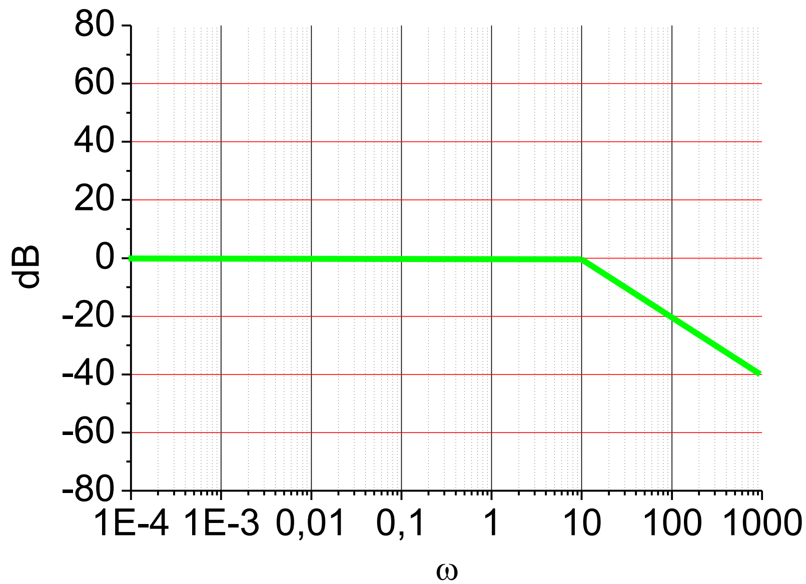


Diagramma di Bode



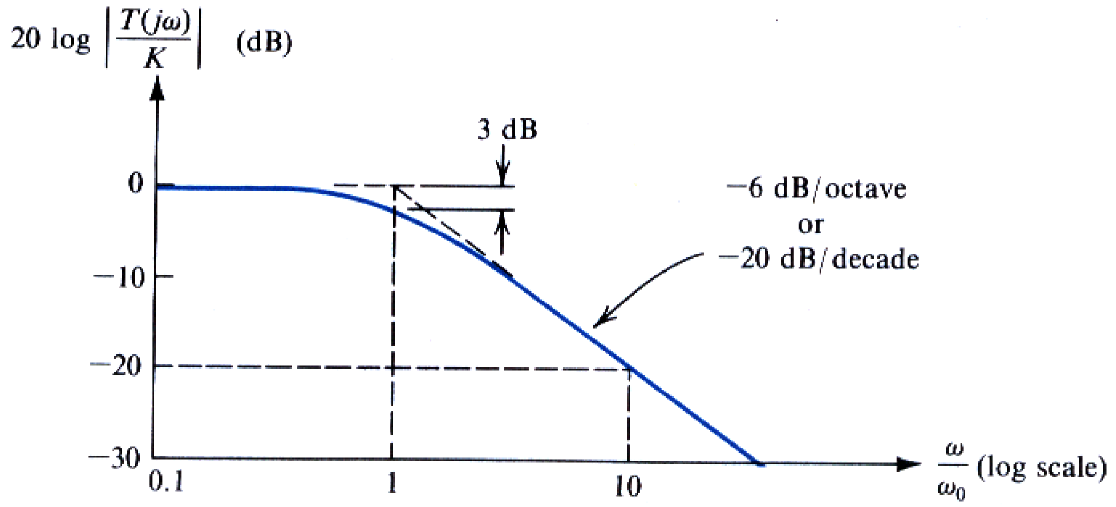
Se mando in ingresso a questo circuito una sinusoide con pulsazione superiore a 10 rad/sec, l'uscita è attenuata, e all'aumentare della pulsazione si attenua sempre di più

Non faccio passare alcune frequenze → Filtro

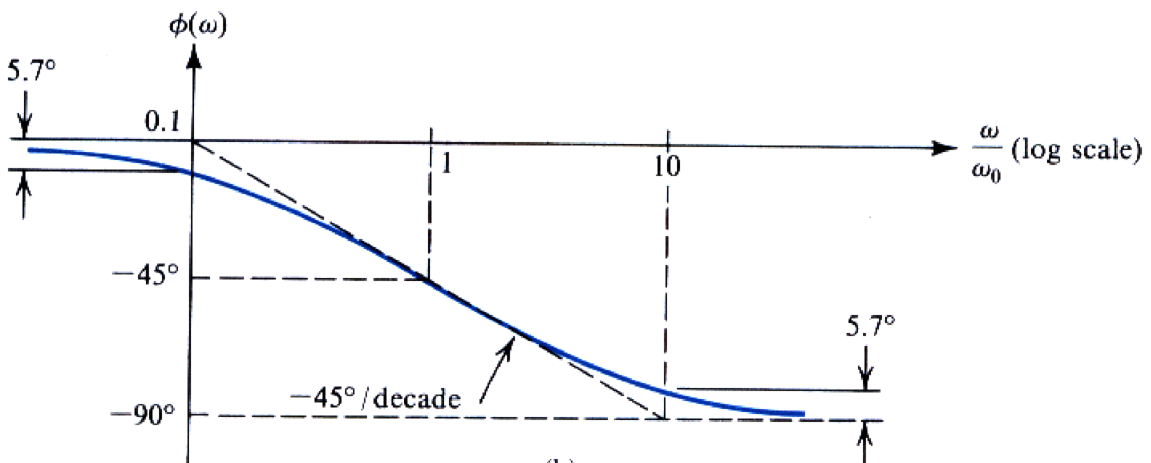
Orecchio (20Hz – 12/20 kHz)

Diagramma di Bode

Nella realtà i diagrammi di Bode sono leggermente differenti, lo vedremo nelle simulazioni



(a)



(b)