Università degli Studi di Cagliari

Esercitazione
Matematica Generale e Finanziaria

Corso di Laurea in Economia e Gestione dei Servizi Turistici

Limiti e continuità

A cura del dott. Nicola Sanna

La retta reale estesa

- Per velocizzare la trattazione del problema del calcolo dei limiti e per semplificare molte scritture è utile ampliare l'insieme dei numeri reali, aggiungendo due ulteriori elementi che chiameremo, anche se in maniera impropria, ancora "punti".

- Attenzione però: non useremo mai per questi due elementi la dicitura "numero", in quanto, come vedremo, il loro comportamento nei confronti delle operazioni elementari è alquanto strano.

La retta reale estesa

- **Definizione**
- Chiameremo retta reale estesa, l'insieme

$$\tilde{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$$

- cioè l'insieme dei numeri reali a cui siano stati aggiunti altri due elementi, o punti, detti rispettivamente *–infinito* e +*infinito*, per i quali stabiliremo le regole di seguito elencate per quanto riguarda l'ordine e le operazioni fondamentali.
  - Nella retta reale estesa a volte (ma non sempre!!) potremo attribuire un segno anche allo zero, con delle regole che vedremo in seguito:
    - se saremo interessati a questa scelta indicheremo con 0_+ uno "zero positivo", con 0_- uno "zero negativo".

Ordine nella retta reale estesa

- Per ogni numero reale a, si pone, per definizione,

$$-\infty < a < +\infty$$

  - ovvero $-\infty$ precede tutti i numeri reali
    - è una specie di “primo elemento”
  - mentre $+\infty$ segue tutti i numeri reali
    - è una specie di “ultimo elemento”

Operazioni nella retta reale estesa

- Le operazioni elementari in uso tra i numeri reali possono essere estese, entro certi limiti, ad operazioni coinvolgenti anche i nuovi simboli di $\pm\infty$, nel modo indicato qui di seguito.
- Segnaliamo che, scrivendo ∞, intendiamo riferirci indifferentemente al simbolo $+\infty$ o $-\infty$.
- Tutte le volte che serve ed è possibile, si deve inoltre applicare la usuale "regola dei segni" per quanto riguarda il prodotto e il quoziente.

Operazioni nella retta reale estesa

1) Per ogni numero reale *a*, $a \pm (+\infty) = \pm\infty$
2) Per ogni numero reale *a*, $a \pm (-\infty) = \mp\infty$
3) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.
4) $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.
5) Per ogni numero reale *a* diverso da *0*, $a \cdot (\infty) = \infty$
(con la regola dei segni)
6) $(\infty) \cdot (\infty) = \infty$ (con la regola dei segni).
7) Per ogni numero reale *a*, anche *0*, $\frac{a}{\infty} = 0$
8) Per ogni numero reale *a* diverso da 0, $\frac{a}{0} = \infty$
(con la regola dei segni).
9) Per ogni numeri reale a (anche 0), $\frac{\infty}{a} = \infty$
(con la regola dei segni).

Operazioni nella retta reale estesa

- Osserviamo che non abbiamo definito le operazioni nei casi seguenti:

1) Somma di $(+\infty)$ e $(-\infty)$
   - e analoghe che si ottengono usando le regole dei segni
   - diremo brevemente che abbiamo escluso dalle regole di calcolo il caso $\infty - \infty$
2) Prodotto tra 0 e ∞:
   - diremo brevemente che abbiamo escluso dalle regole di calcolo il caso $0 \cdot \infty$
3) Quoziente tra 0 e 0:
   - diremo brevemente che abbiamo escluso dalle regole di calcolo il caso $\frac{0}{0}$
4) Quoziente tra ∞ e ∞:
   - diremo brevemente che abbiamo escluso dalle regole di calcolo il caso $\frac{\infty}{\infty}$

- Chiameremo queste situazioni forme di indecisione o anche forme indeterminate

Introduzione

- Il concetto di limite è fondamentale nella matematica moderna e nel calcolo infinitesimale.
- Sia data la funzione

Insieme immagine della funzione

$$f : A \to B$$

Dominio della funzione

$$A \subseteq R, B \subseteq R$$

Intorno di un punto

- La definizione di limite si basa sul concetto di intorno di un punto.
- Preso un punto

$$a \in R$$

- Si dice intorno di *a* un intervallo I che contenga il punto *a* al suo interno.
  - In genere si prende il punto *a* al centro dell'intervallo.

$$I = (a - \delta, a + \delta) \quad \text{con}\, \delta \in R^+$$

Intorno di un punto

- Intorno destro (a è estremo sinistro)

$$[a, a+\delta)$$

- Intorno sinistro (a è estremo destro)

$$(a-\delta, a]$$

- Intorno di infinito (M è un numero reale)

$$(M, +\infty) \qquad (-\infty, M)$$

Obbiettivo

- Descrivere il comportamento della funzione nelle vicinanze di un punto fissato x_0
- Dove $x_0 \in A$
- Oppure è un suo estremo

Un primo approccio al concetto di limite

Consideriamo la seguente funzione:

$$\boxed{y = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}}$$

Il cui dominio è dato da tutti i numeri reali, escluso *1*.

Ci proponiamo di studiare il comportamento della funzione in prossimità di questo numero.

$\boxed{\text{Ossia sostituiamo al posto della } x \text{ valori } \textit{vicini} \text{ a } \textit{1}.}$

Un primo approccio al concetto di limite

$$\boxed{y = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}}$$

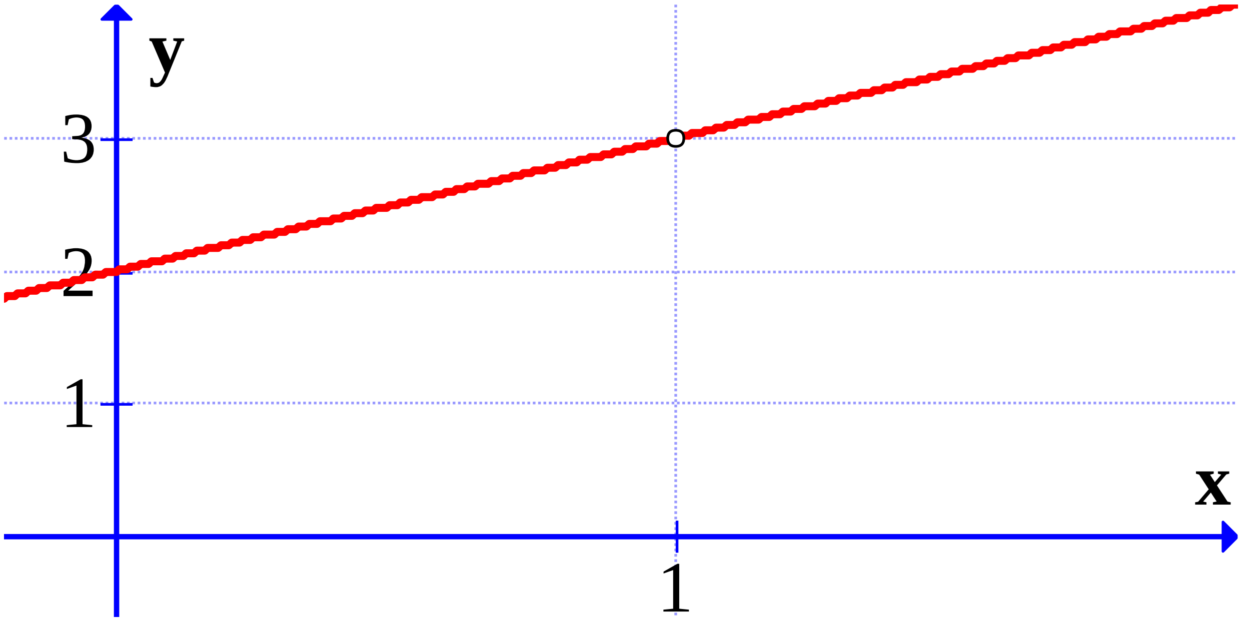
Possiamo scrivere $$y = \frac{(x-1)(x+2)}{x-1}$$

Quindi la funzione è equivalente, per $x \neq 1$

alla funzione di equazione $y = x + 2$

Un primo approccio al concetto di limite

Risulta facile costruire il grafico di $y=x+2$ per $x \neq 1$



Nel punto $x=1$ la funzione non esiste.

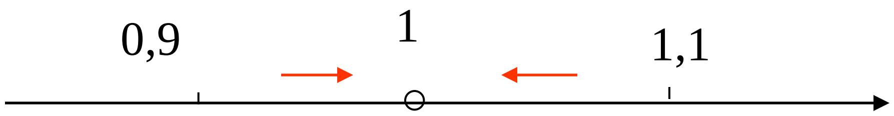
Per $x= 0$, $y= 2$

Per valori di x molto vicini a 1 la funzione si avvicina a 3.

Lo possiamo vedere meglio costruendo la tabella dei valori che assume la funzione quando la x si avvicina a 1

Un primo approccio al concetto di limite

Sostituiamo al posto della *x* valori che si avvicinano sempre di più a 1 per difetto e per eccesso.



x	y
0,9	2,9
0,99	2,99
0,999	2,999
⋮	⋮
1	∄
⋮	⋮
1,0001	3,0001
1,001	3,001
1,01	3,01
1,1	3,1

Dalla tabella si evince che avvicinandoci **sia da sinistra che da destra** a 1, il corrispondente valore di y si avvicina a 3 (*rispettivamente per difetto e per eccesso*)

In simboli $$\lim_{x \to 1} f(x) = 3$$

si legge

Il limite per *x* che tende a 1 di *f(x)* è 3.

La lezione di Dindiot

Definizione di convergenza al finito

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

- Se per ogni intorno di ℓ

$$V_\ell$$

- Esiste un opportuno intorno di x_0

$$I_{x_0}$$

- Tale che

$$f(x) \in V_\ell \ se \ x \in I_{x_0} \quad \text{in cui } x \neq x_0$$

Definizione mediante intervalli utile perché unica qualunque sia x_0 assegnato (un numero reale o $+\infty, -\infty$) o sia ℓ un numero reale o $+\infty, -\infty$.

Punto di accumulazione

- In matematica il concetto di **punto di accumulazione** è uno dei concetti principali dell'analisi matematica e della topologia.
- Dato un punto x sulla retta reale ed un sottoinsieme A di questa retta, si dice che x è un punto di accumulazione per A se ogni intorno di x contiene punti di A distinti da x.
- Intuitivamente questo significa che se facciamo uno zoom su x continuiamo a vedere punti di A (diversi da x) a qualsiasi livello di ingrandimento.

Seconda definizione di convergenza al finito

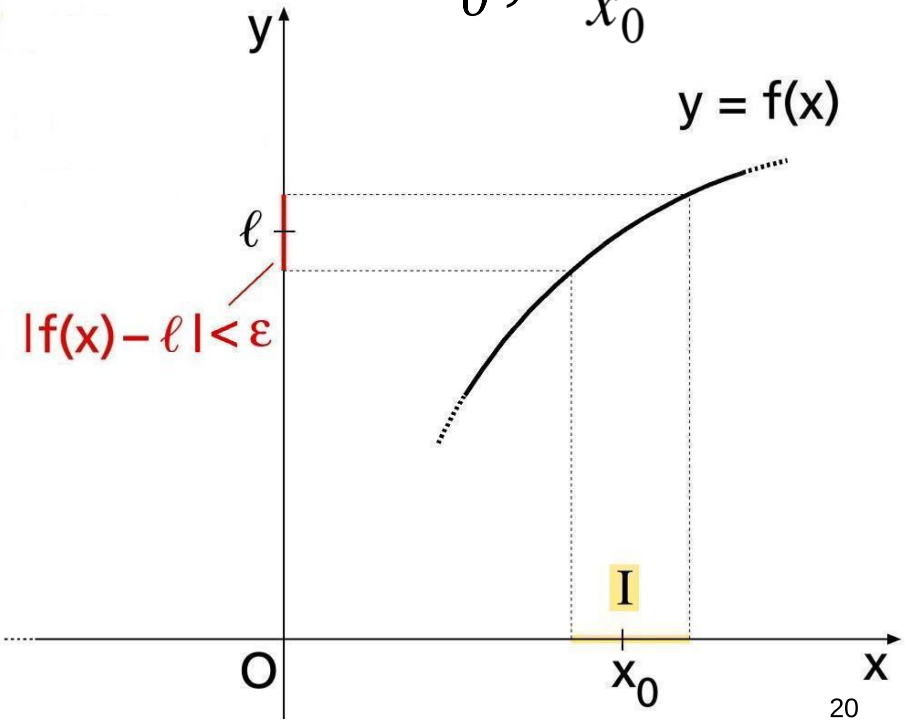
- Data una funzione *f(x)*, con x_0 punto di accumulazione per il dominio, si dice che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

- se per ogni ε>0 esiste un intorno di x_0, I_{x_0}
- tale che:

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$$\forall x \in I_{x_0} \quad x \neq x_0$$



Attenzione

$$\left| f(x) - \ell \right| < \varepsilon$$

Per definizione del valore assoluto

$$\begin{cases} \text{se } f(x) - \ell \geq 0 \\ f(x) - \ell < \varepsilon \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{se } f(x) - \ell < 0 \\ -f(x) + \ell < \varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{se } f(x) \geq \ell \\ f(x) < \varepsilon + \ell \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{se } f(x) < \ell \\ f(x) > \ell - \varepsilon \end{cases}$$

$$\ell \leq f(x) < \varepsilon + \ell \qquad \ell - \varepsilon < f(x) < \ell$$

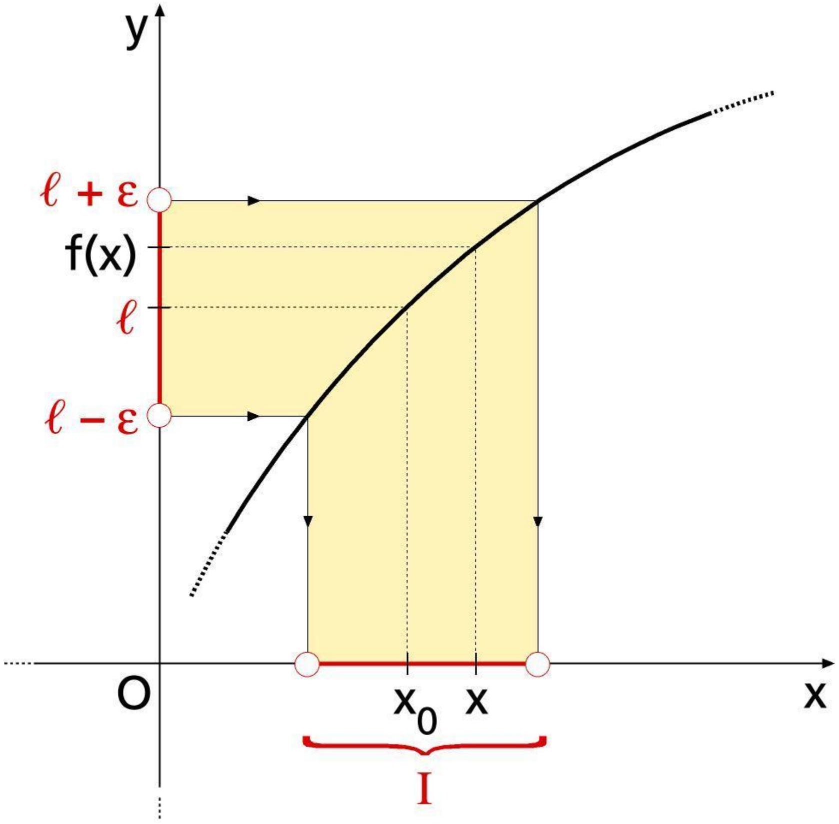
$$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$$

Significato della definizione

- Fissiamo nel grafico un ε>0.
- Individuiamo un intorno di x_0 , I_{x_0}
- tale che:

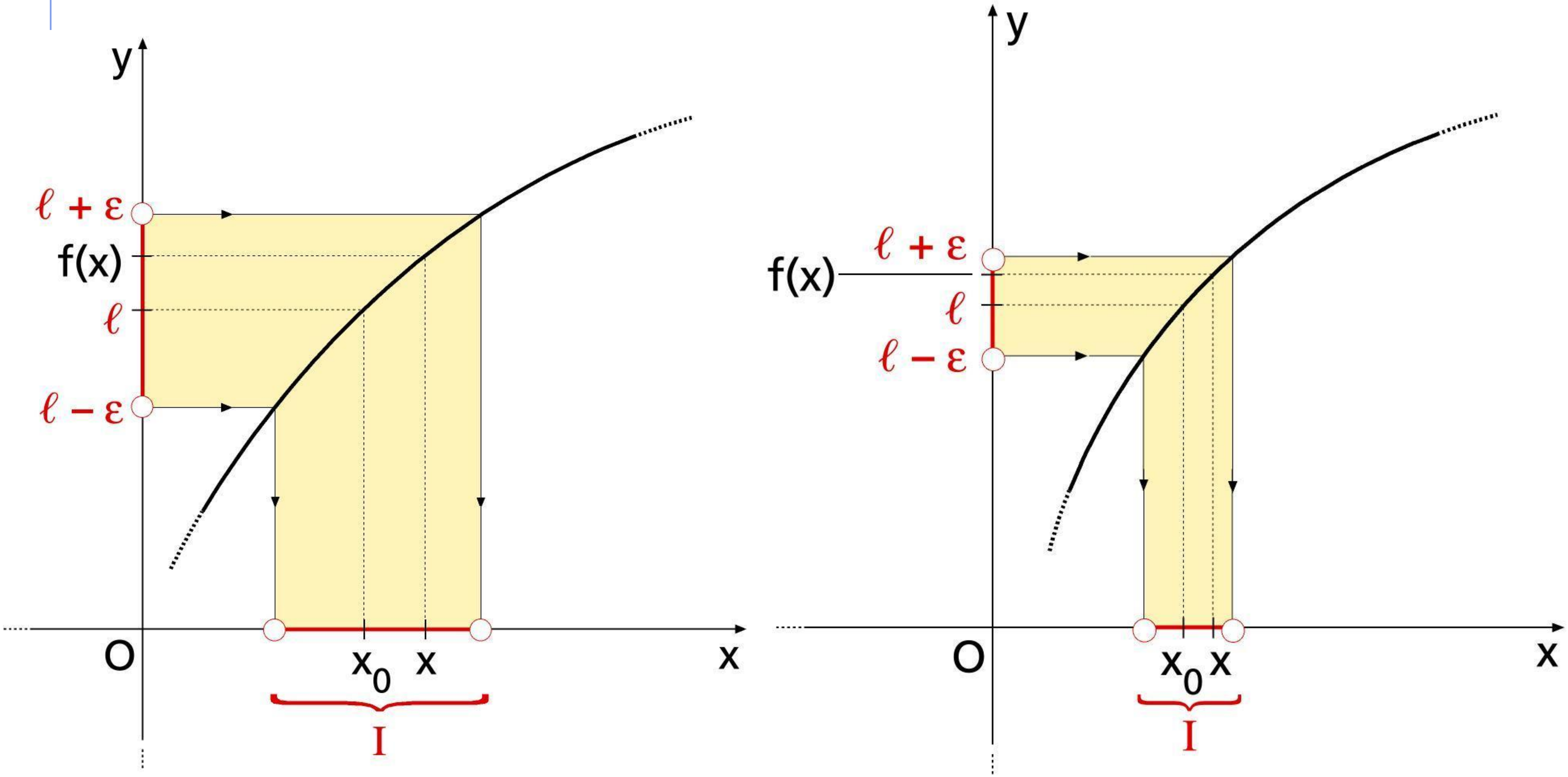
$$f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$$

$$\forall x \in I_{x_0} \quad x \neq x_0$$



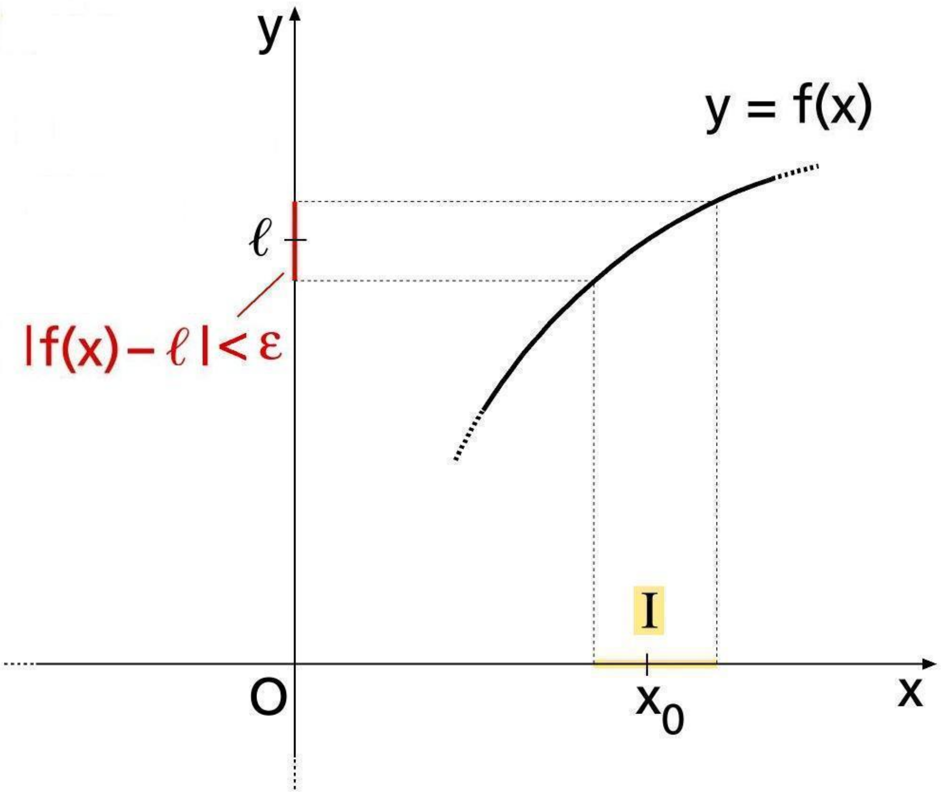
Significato della definizione

- Se riduciamo ε siamo costretti a scegliere un intorno di x_0 più piccolo.



Significato della definizione

- Più piccolo scegliamo ε, più piccolo diventa l'intorno di x_0.
- In ogni caso troviamo sempre un intorno di x_0 tale che per ogni x di quell'intorno $f(x)$ è molto vicino a ℓ.



Esempio 1

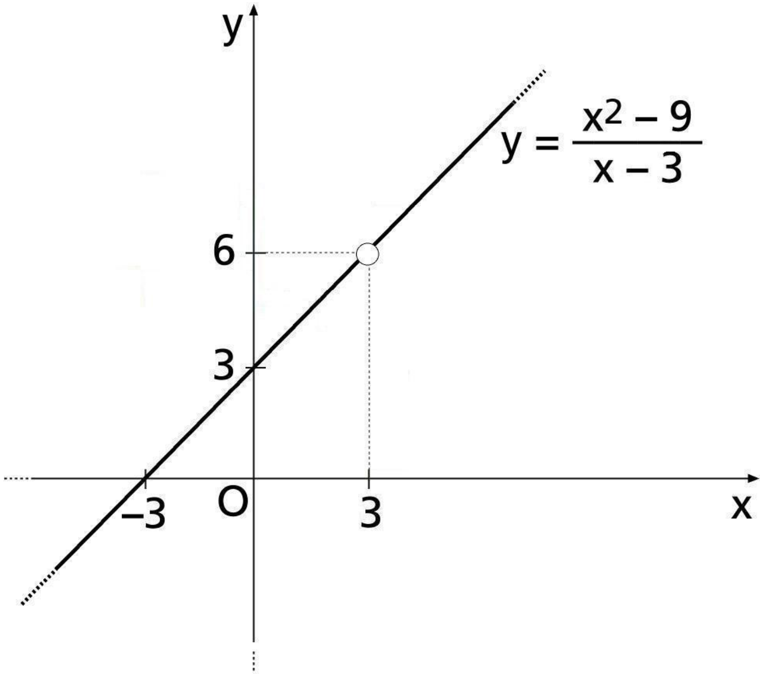
Verifichiamo che $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6.$

- Tracciamo il grafico $y = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$.
- Proviamo che scelto $\varepsilon > 0$,

esiste un intorno I di 3 per ogni x

del quale (escluso al più 3) vale:

$$\left| \frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6 \right| < \varepsilon$$



Esempio 1

$$\left| \frac{x^2-9}{x-3} - 6 \right| < \varepsilon \rightarrow |x-3| < \varepsilon \wedge x \neq 3 \rightarrow$$

$$3 - \varepsilon < x < 3 + \varepsilon \wedge x \neq 3$$

In conclusione:

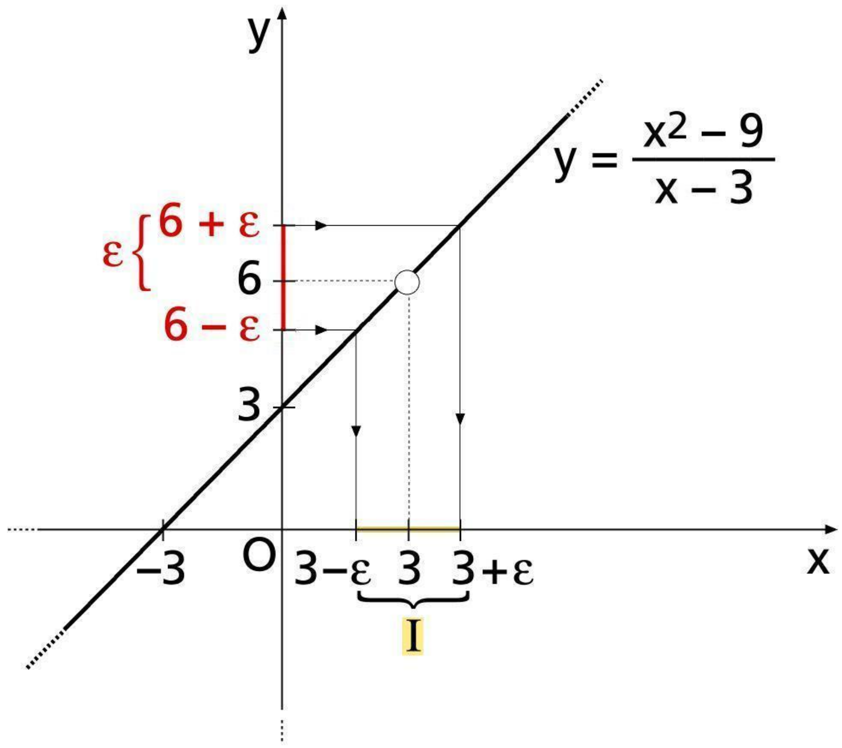
considerato l'intorno di 6:

$]6 - \varepsilon\, ; 6 + \varepsilon\, [$

esiste l'intorno I di 3:

$I = \;]3 - \varepsilon\, ; 3 + \varepsilon\, [$

i cui punti x $(x \neq 3)$ hanno



Terza definizione di convergenza al finito

- Si dice che $f(x)$ **converge** (o tende) **al limite** ℓ per x che tende ad x_0, e si scriverà $f(x) \to \ell$ per $x \to x_0$ oppure

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

Se $\forall \varepsilon > 0$ è possibile determinare un δ_ε tale che per ogni x tale che valga la $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$ si ha $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Osservazione

- Poiché

$$|f(x)-\ell|<\varepsilon \Leftrightarrow \ell-\varepsilon<f(x)<\ell+\varepsilon$$

e

$$|x-x_0|<\delta_\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad x_0-\delta_\varepsilon<x<\delta_\varepsilon+x_0$$

$$x \neq x_0$$

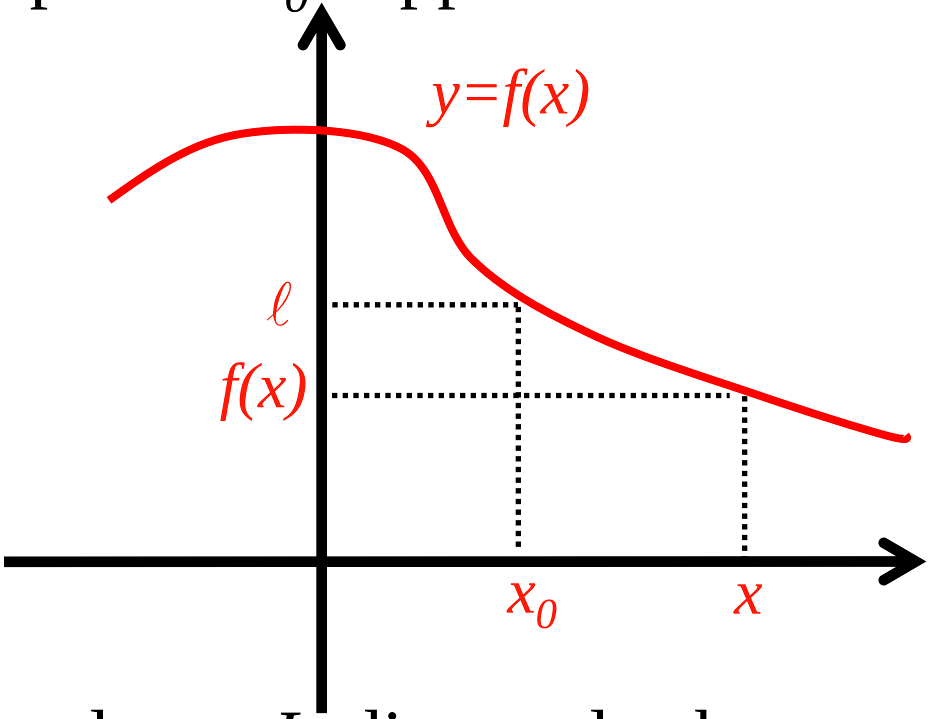
allora

$$V_\ell=(\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon) \text{ e } I_{x_0}=(x_0-\delta_\varepsilon,x_0+\delta_\varepsilon)$$

Definizione di convergenza al finito

- Si dice che $f(x)$ **converge** (o tende) **al limite** ℓ per x che tende ad x_0 **da destra** (cioè per valori superiori ad x_0), e si scriverà $f(x) \to \ell$ per $x \to x_0^+$ oppure

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$$



- Se $\forall \varepsilon > 0$ esiste un intorno destro I_+ di x_0 tale che per ogni x di I_+ diverso da x_0 risulta: $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Definizione di convergenza al finito

- Si dice che $f(x)$ **converge** (o tende) **al limite** ℓ per x che tende ad x_0 **da sinistra** (cioè per valori inferiori ad x_0), e si scriverà $f(x)\to\ell$ per $x\to x_0^-$ oppure

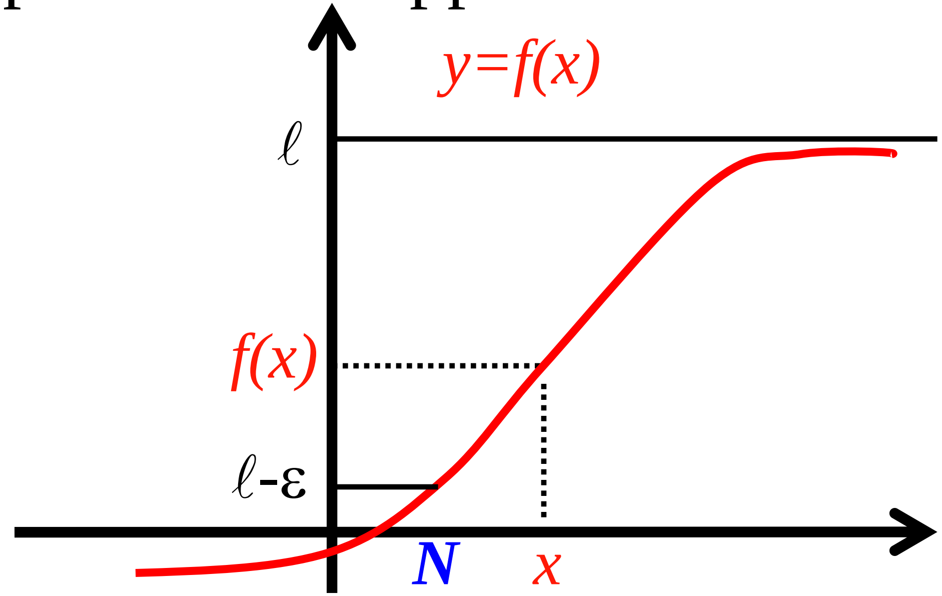
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\ell$$

- Se $\forall\varepsilon>0$ esiste un intorno sinistro I_- di x_0 tale che per ogni x di I_- diverso da x_0 risulta: $|f(x)-\ell|<\varepsilon$.

Definizione di convergenza all'infinito

- Sia *f(x)* definita in un insieme illimitato superiormente.
- Si dice che *f(x)* **converge al limite** ℓ per *x* che tende ad $+\infty$, e si scriverà $f(x)\to\ell$ per $x\to+\infty$ oppure

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell$$



Se quanto più grandi diventano i valori della *x* tanto più i corrispondenti valori della *f(x)* si avvicinano ad ℓ. Cioè se $\forall\varepsilon>0$ è possibile determinare un ***N*** tale che per ogni *x*>***N*** si ha <u>definitivamente</u> $|f(x)- l|<\varepsilon$.

Definizione di convergenza all'infinito

- In tal caso, si dice che *f(x)* ha, per *x* che tende ad +∞**,** un **asintoto** **orizzontale** di equazione $y=\ell$.
  - esempio

f(x)=1/x

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

- **Analogo discorso nel caso di -∞**

Osservazione

Dalla definizione si evince che, per verificare l'esistenza del limite finito di una funzione per x che tende all'infinito, bisogna vedere se le soluzioni della disequazione $|f(x)-l|<\varepsilon$ è soddisfatta per tutti i valori di x che superano in valore assoluto un valore N prefissato, se questo non avviene il limite non è verificato.

Esempio

Vogliamo verificare che

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

per verificare questo limite dobbiamo risolvere questa disequazione

$$\left|\frac{x+1}{x} - 1\right| < \varepsilon;$$

e constatare che è soddisfatta per valori di x che superano i valore assoluto un numero N molto grande.

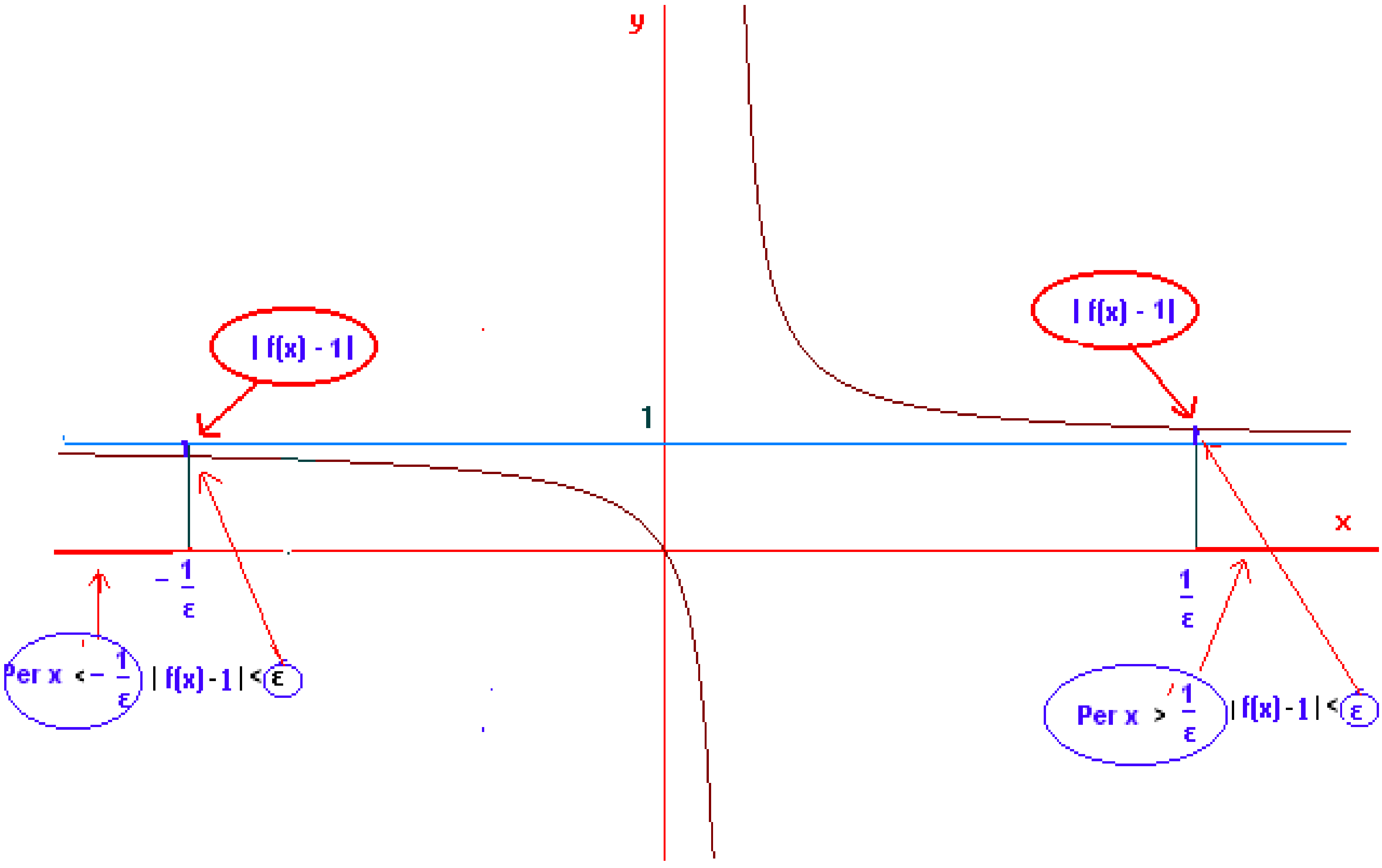
$$\left|\frac{x+1}{x} - 1\right| < \varepsilon; \quad \left|\frac{x+1-x}{x}\right| < \varepsilon; \quad \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \quad |x| > \frac{1}{\varepsilon}$$ **le cui soluzioni**

si ottengono unendo le soluzioni delle seguenti disequazioni :

$$x > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{ed } x < -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Essendo ε molto piccolo $\frac{1}{\varepsilon} = N$ è molto grande.

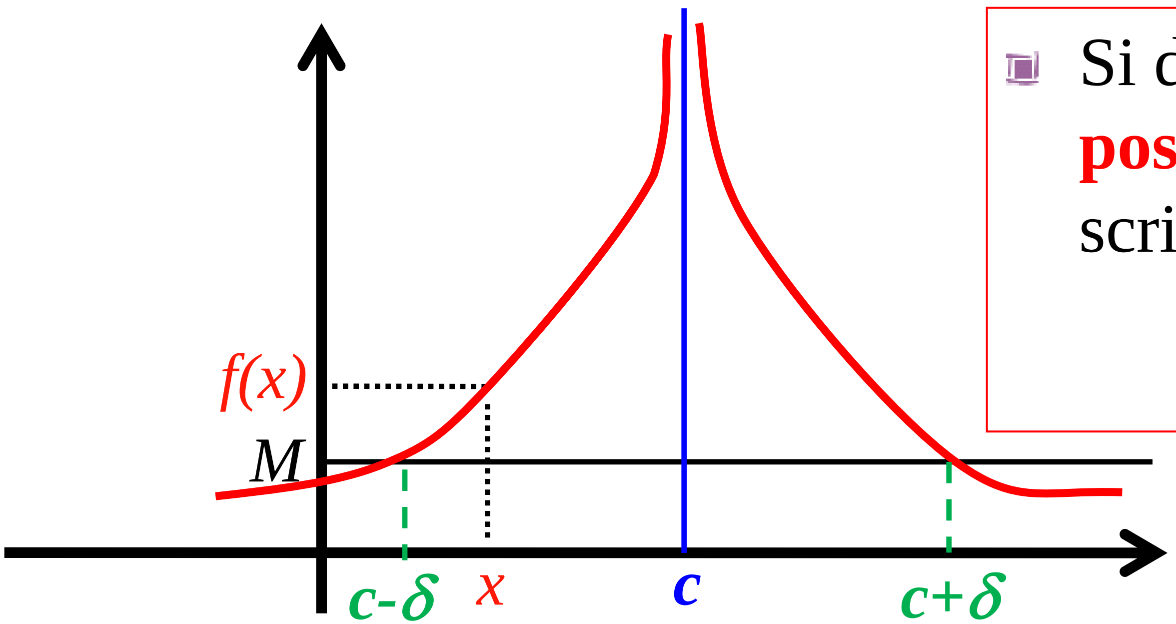
Esempio



y
x
1
| f(x) - 1 |
| f(x) - 1 |
$-\frac{1}{\varepsilon}$
$\frac{1}{\varepsilon}$
Per x $< -\frac{1}{\varepsilon}$ | f(x) - 1 | < ε
Per x $> \frac{1}{\varepsilon}$ | f(x) - 1 | < ε

Divergenza al finito (1)

- Si dice che *f(x)* **diverge** (o tende) a $+\infty$ per *x* che tende ad *c* ,se quanto più *x* si avvicina ad *c* , i valori della *f(x)* diventano sempre più grandi.
- Cioè se $\forall M>0$ è possibile determinare un δ tale che per ogni *x* tale che valga la $0<|x-c|<\delta$ sia verificata la seguente : $|f(x)|>M$.

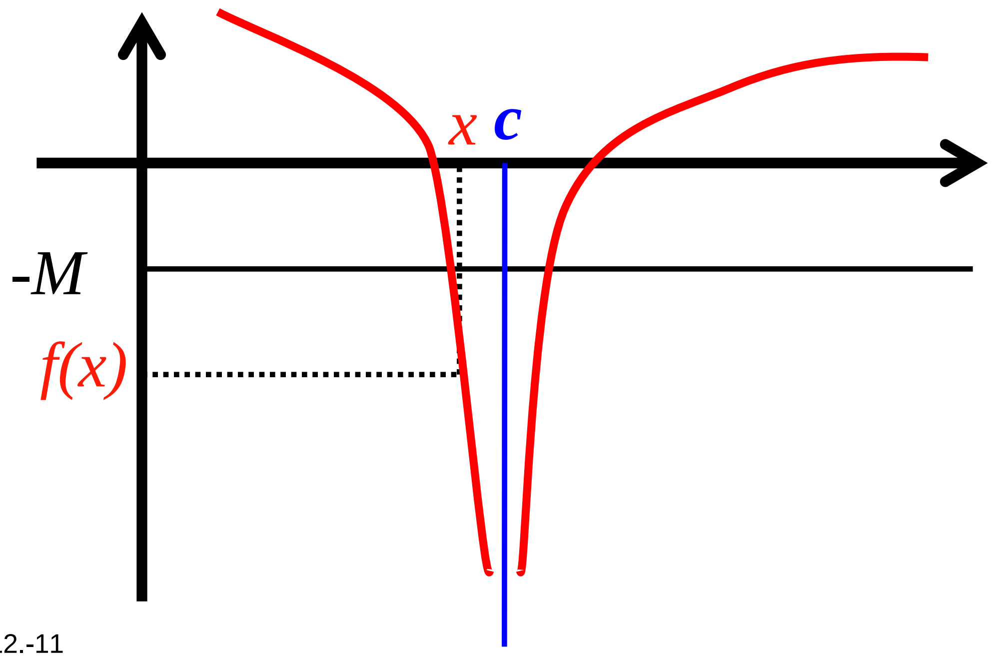


- Si dice che *f(x)* **diverge positivamente** in *c* e si scriverà:

$$\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$$

Divergenza al finito (2)

- Si dice che $f(x)$ **diverge** (o tende) a **-∞** per x che tende ad c , se quanto più x si avvicina ad c, i valori della $f(x)$ diventano sempre più piccoli e il suo limite è **-∞** .
- Cioè se $\forall M>0$ è possibile determinare un δ tale che per ogni x tale che valga la $0<|x-c|<\delta$ sia verificata la seguente: $|f(x)|>M$.



- Si dice che $f(x)$ **diverge negativamente** in c e si scriverà:

$$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$$

Divergenza al finito

- In generale si dice che *f(x)* **diverge** in *c* se il suo modulo |*f(x)*| diverge positivamente.

- In tutti i tre casi si dice che *f(x)* ha una **asintoto** **verticale** in *c*.
  - Esempio:

f(x)=1/(x^2)

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Osservazione

Dalla definizione si evince che, per verificare l'esistenza del limite infinito di una funzione in un punto, bisogna vedere se le soluzioni della disequazione $|f(x)|>M$ comprendono un intorno completo del punto in cui si vuole verificare il limite, se questo non avviene il limite non è verificato.

Si deve inoltre aggiungere che, se si verifica solo la disequazione $f(x)>M$, allora si ha che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

Se si verifica solo la disequazione $f(x)<-M$, allora si ha che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

E s e m p i o 1

Vogliamo verificare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x} = \infty$$

per verificare questo limite dobbiamo risolvere questa disequazione

$$\left|\frac{x+1}{x}\right| > M$$ **le cui soluzioni si ottengono risolvendo le seguenti**

disequazioni $\frac{x+1}{x} > M; \qquad \frac{x+1}{x} < -M$

la prima soddisfatta per

$$0 < x < \frac{1}{M-1}$$ **intorno destro di 0**

la seconda soddisfatta

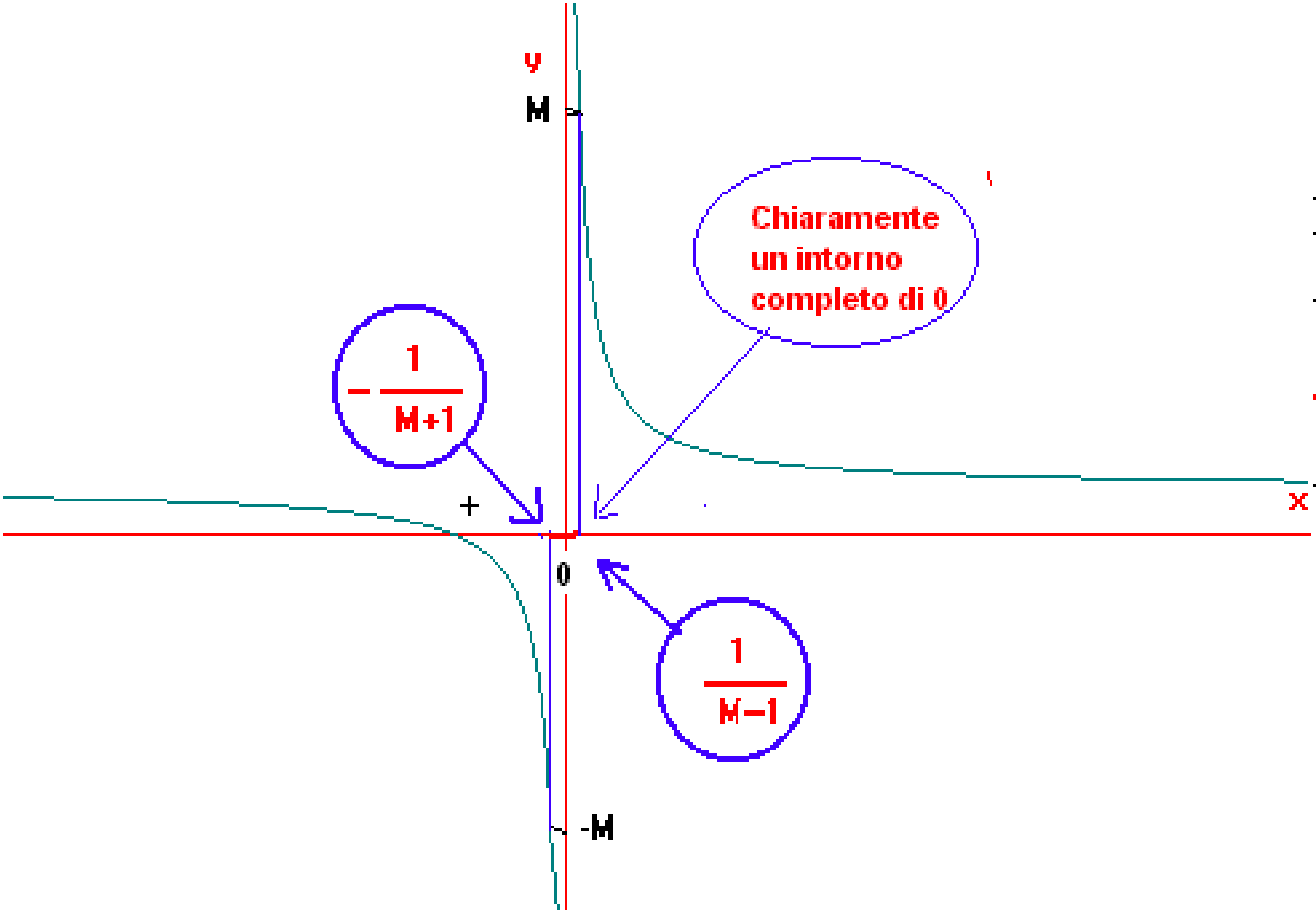
$$-\frac{1}{M+1} < x < 0$$ **intorno sinistro di 0**

Uniti formano l'intervallo

$$-\frac{1}{M+1} < x < \frac{1}{M-1}$$

Chiaramente un intorno completo di 0.

Esempio 1


y
M
Chiaramente
un intorno
completo di 0
$-\frac{1}{M+1}$
+
x
0
$\frac{1}{M-1}$
-M

Esempio 2

Vogliamo verificare che

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$ per verificare questo limite dobbiamo risolvere

questa disequazione $\frac{1}{(x-1)^2} > M$.

Se le soluzioni comprendono un intorno completo di 1, il limite è verificato.

Risoluzione: $$\frac{1-M(x^2-2x+1)}{(x-1)^2} > 0$$

Il denominatore per $x \neq 1$ è sempre positivo (>0)

Vediamo il numeratore $1 - Mx^2 + 2Mx - M > 0 \quad Mx^2 - 2Mx + M - 1 < 0$

Equazione associata: $Mx^2 - 2Mx + M - 1 = 0$

Soluzioni

$$x = \frac{2M \pm \sqrt{4M^2 - 4M^2 + 4M}}{2M} = \frac{2M \pm \sqrt{4M}}{2M} = \frac{M \pm \sqrt{M}}{M} =$$

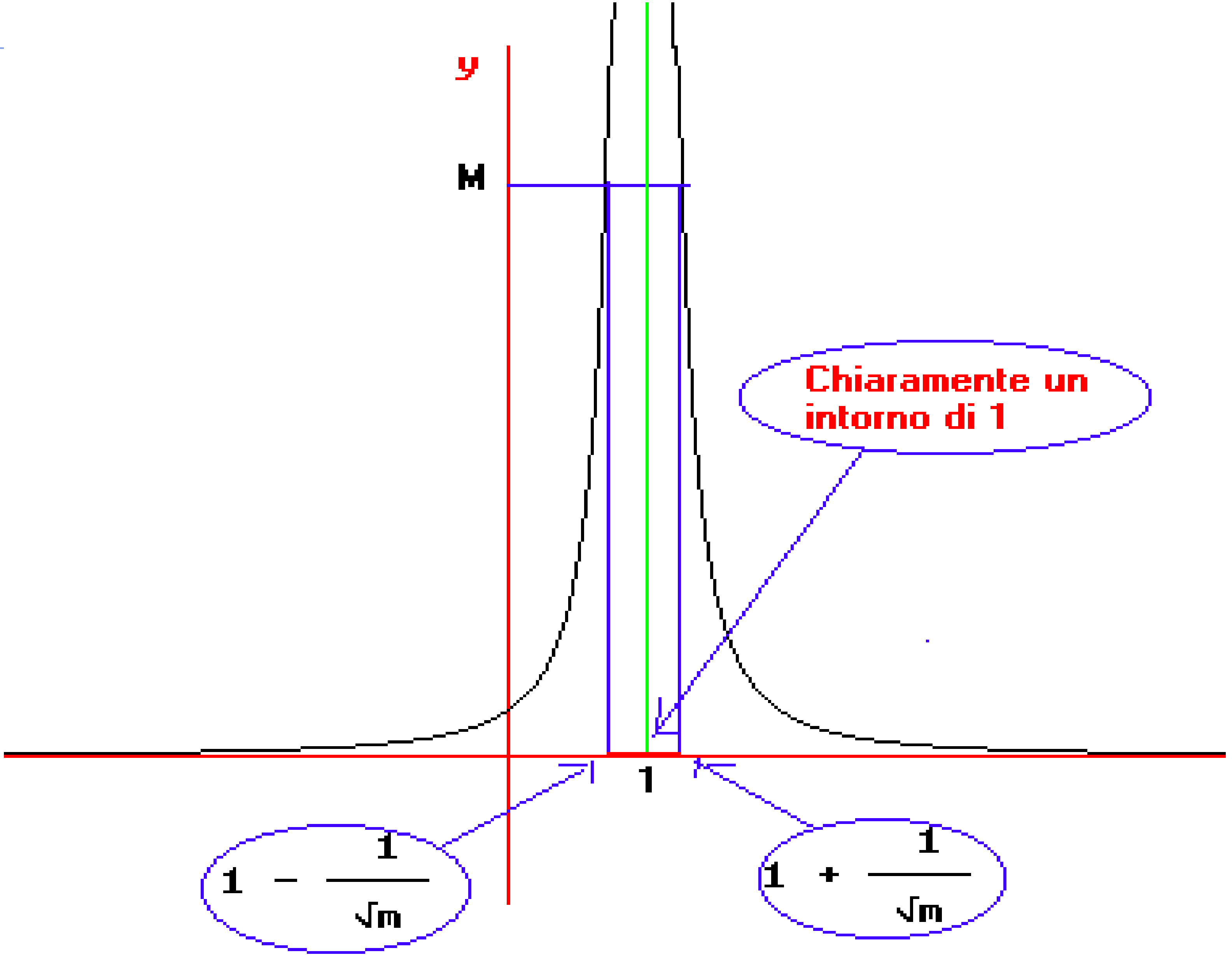
$$= \frac{M}{M} \pm \frac{\sqrt{M}}{M} = 1 \pm \sqrt{\frac{M}{M^2}} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{M}}$$

La disequazione è soddisfatta dal seguente intervallo: $1 - \frac{1}{\sqrt{M}} < x < 1 + \frac{1}{\sqrt{M}}$

Chiaramente un intorno completo di 1.

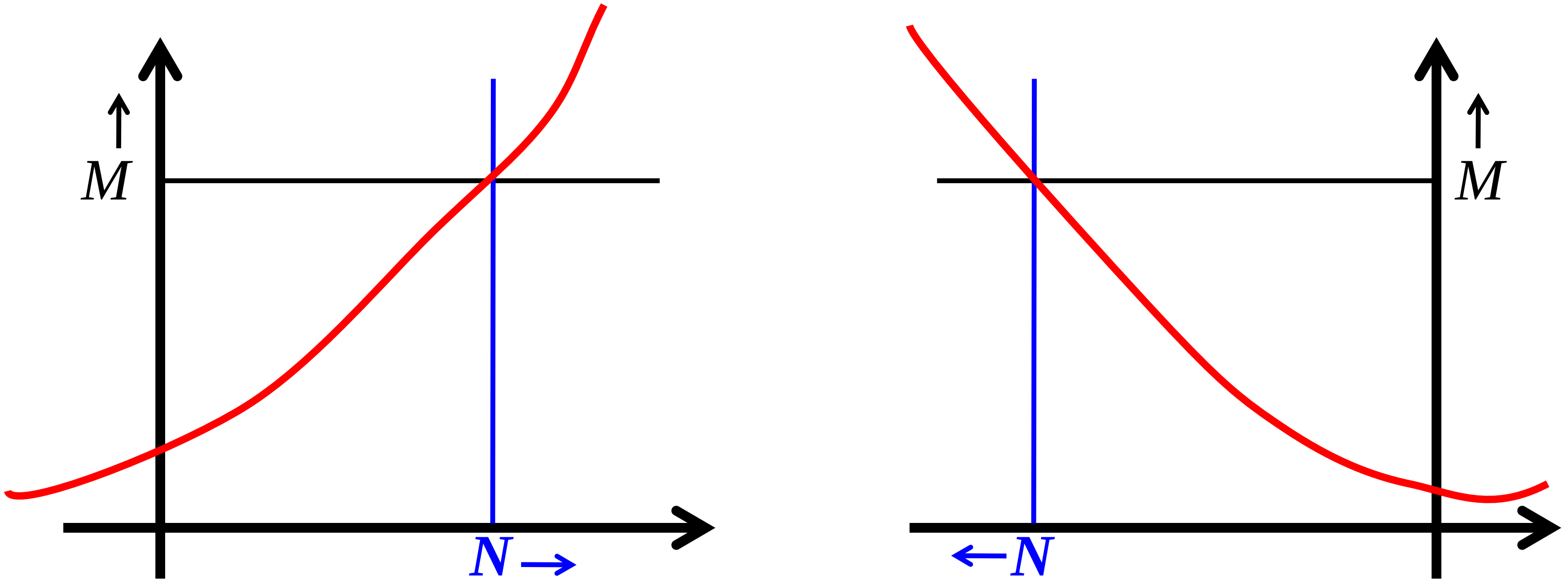
Nota il valore 1 va escluso perchè annulla il denominatore.

Esempio 2

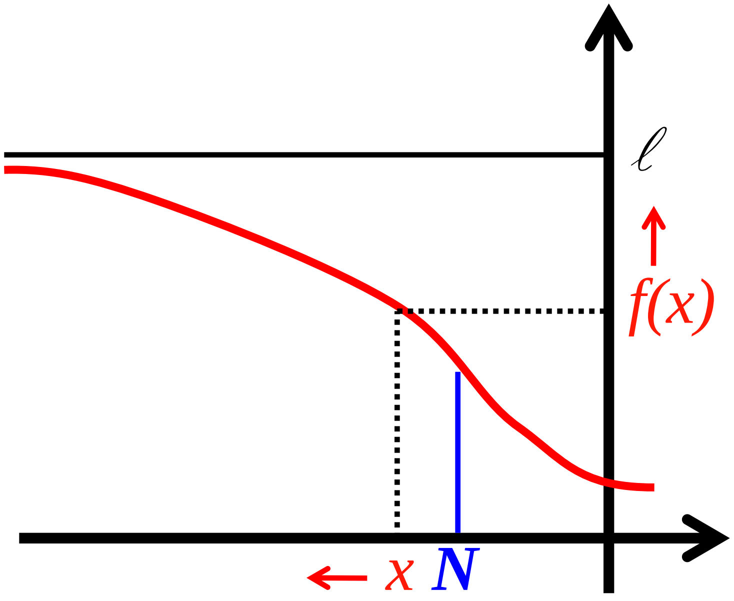


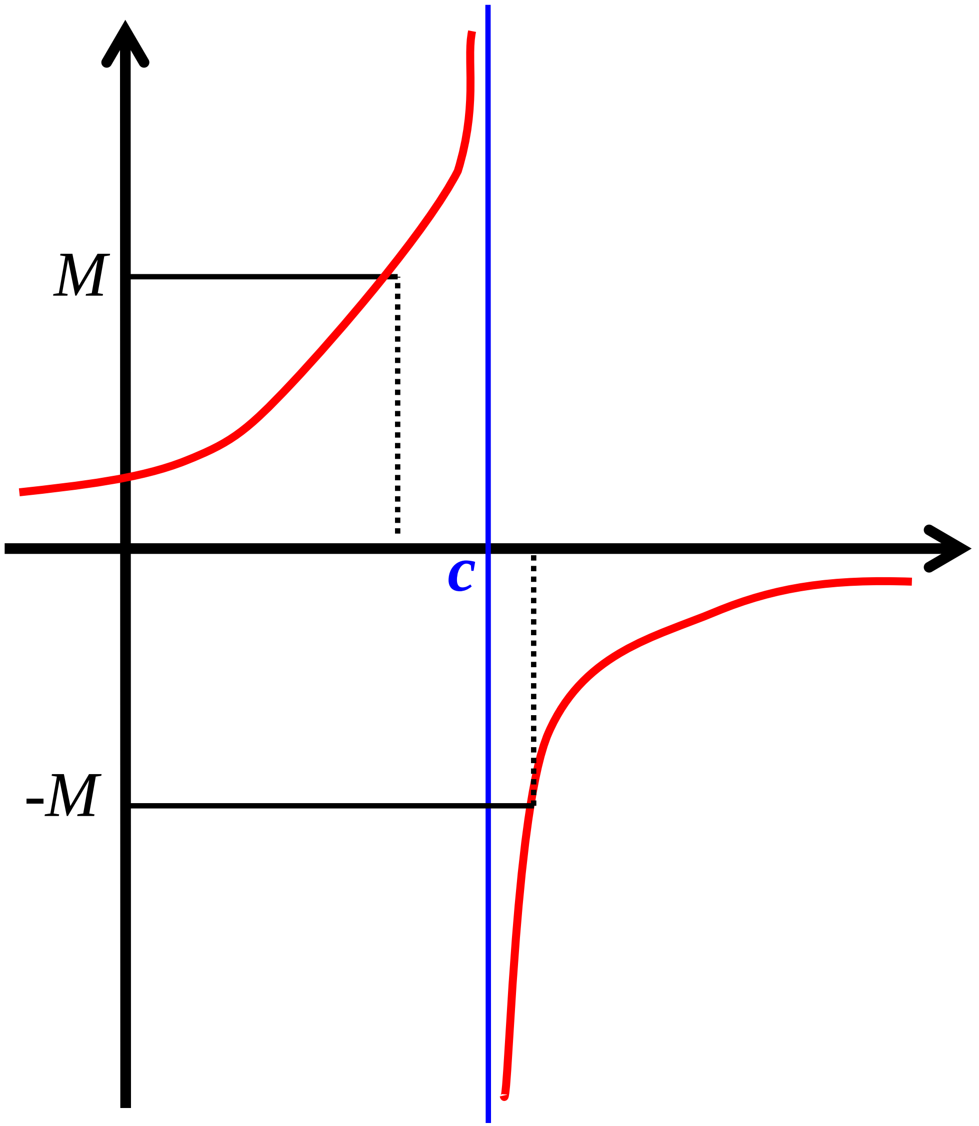
Divergenza all'infinito

- Per i limiti del tipo $f(x) \to \pm\infty$ per $x \to \pm\infty$ si procede in modo analogo ai casi già visti.

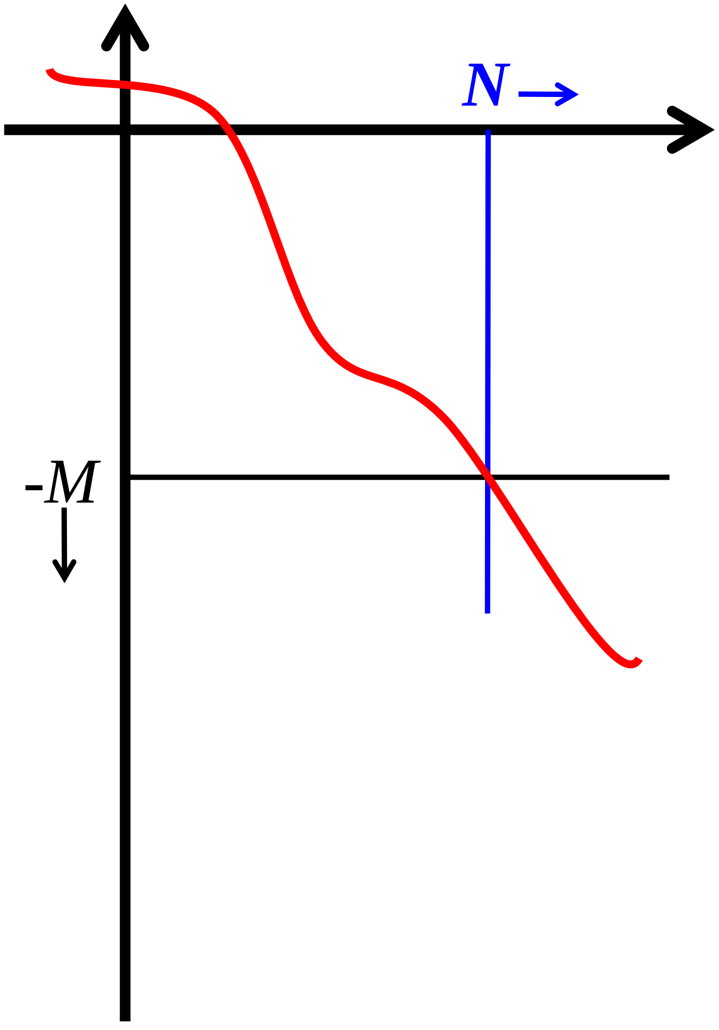


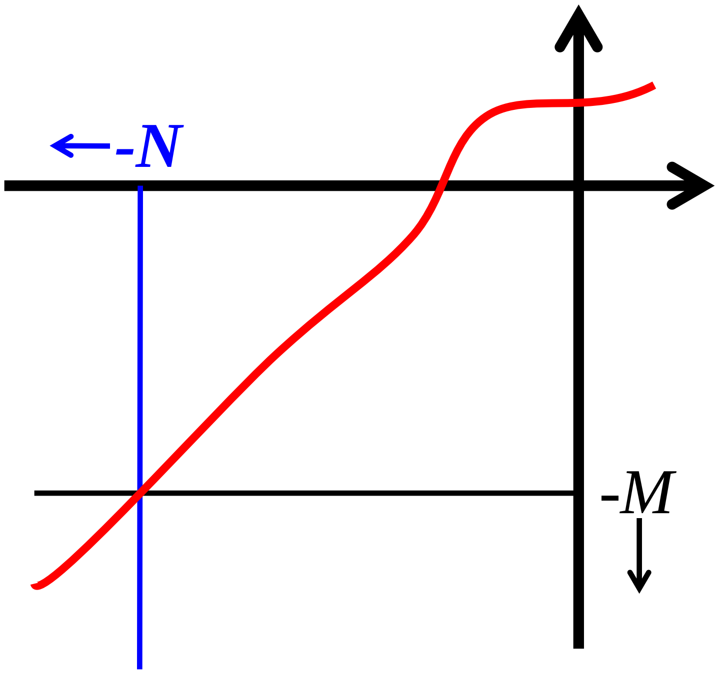
Esempi:





Esempi:





Osservazione

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$	$V=(M,+\infty)$ e $I=(x_0-\delta_M, x_0+\delta_M)$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$	$V=(-\infty, M)$ e $I=(x_0-\delta_M, x_0+\delta_M)$
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\ell$	$V=(\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$ e $I=(N_\varepsilon,+\infty)$
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\ell$	$V=(\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$ e $I=(-\infty, N_\varepsilon)$
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$	$V=(M,+\infty)$ e $I=(N_M,+\infty)$
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$	$V=(-\infty, M)$ e $I=(N_M,+\infty)$
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$	$V=(M,+\infty)$ e $I=(-\infty, N_M)$
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$	$V=(-\infty, M)$ e $I=(-\infty, N_M)$

Cenni sulle proprietà dei limiti

- **Teorema dell'unicità del limite:**
  - *Se una funzione f(x), per* $x \to c$, *ammette limite, questo è unico.*

- **Teorema della permanenza del segno:**
  - *Se una funzione f(x), per* $x \to c$, *ammette limite* ℓ, *non nullo, allora esiste un intorno del punto c per il quale, escluso il punto c, la funzione f(x) assume valori dello stesso segno del suo limite.*

Cenni sulle proprietà dei limiti

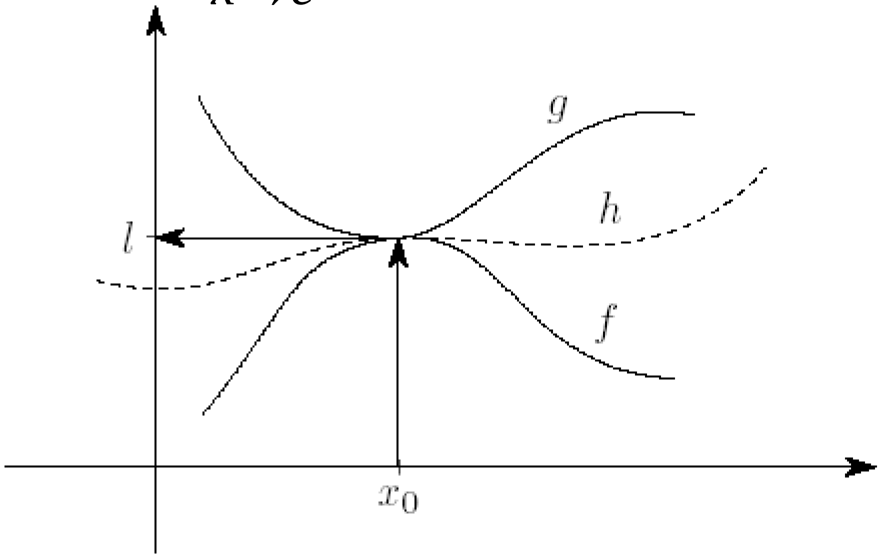
- **Criterio del confronto:**
  - *Se le tre funzioni f(x),h(x) e g(x) sono definite nello stesso intervallo, eccettuato al più un punto c di questo, e se per ogni x risulta:*

    f(x) ≤ h(x) ≤ g(x)

E se inoltre è: $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = \ell$

Allora risulta che:

$$\lim_{x \to c} h(x) = \ell$$



Il teorema dei due carabinieri

Infinitesimo

- In generale si dice che *f(x)* è **un infinitesimo per** $x \to c$ (o per $x \to \infty$) quando risulta:

$$\lim_{x \to c} f(x) = 0$$

- Oppure:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

Cenni sulle proprietà dei limiti

- In generale è difficoltoso risolvere le disequazioni per determinare gli intorni.

Operazioni sui limiti

- Se risulta: $\lim_{x\to c} f(x) = l \quad , \quad \lim_{x\to c} g(x) = m$

- Con l e m numeri, allora si ha:

$$1) \quad \lim_{x\to c}[f(x)+g(x)] = l + \mathrm{m}$$

$$2) \quad \lim_{x\to c}[f(x)-g(x)] = l - \mathrm{m}$$

$$3) \quad \lim_{x\to c}[f(x)\cdot g(x)] = l \cdot \mathrm{m}$$

$$4)\ \text{Se}\ \ \mathrm{m} \neq 0, \quad \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$$

$$5) \quad \lim_{x\to c}|f(x)| = |l|$$

Operazioni sui limiti

$$6)\ \text{Se è}\ \lim_{x\to c} f(x) = l \quad , \lim_{x\to c} g(x) = \infty$$
$$\text{oppure}: \lim_{x\to c} f(x) = +\infty , \lim_{x\to c} g(x) = +\infty$$
$$\text{oppure}: \lim_{x\to c} f(x) = -\infty , \lim_{x\to c} g(x) = -\infty$$

Allora il limite della somma è, rispettivamente, ∞ ,+∞ ,-∞

$$7)\ \text{Se è}\ \lim_{x\to c} f(x) = l \neq 0 , \lim_{x\to c} g(x) = \infty$$
$$\text{oppure}: \lim_{x\to c} f(x) = \infty \quad , \lim_{x\to c} g(x) = \infty$$
$$\text{risulta}: \lim_{x\to c} [f(x) \cdot g(x)] = \infty$$

Operazioni sui limiti

$$8)\ \text{Se è}\ \lim_{x\to c} f(x)=\infty\,,\ \lim_{x\to c} g(x)=m$$

$$\text{risulta}:\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$$

$$9)\ \text{Se è}\ \lim_{x\to c} f(x)=l\,,\ \lim_{x\to c} g(x)=\infty$$

$$\text{risulta}:\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

$$10)\ \text{Se è}\ \lim_{x\to c} f(x)=l\neq 0\,,\ \lim_{x\to c} g(x)=0$$

con $g(x)\neq 0$ in un intorno del punto c, allora risulta : $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$

Forme indeterminate

- Nulla si può dire, senza altri studi, sulle seguenti forme:

$$\frac{0}{0} \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty} \quad ; \quad \pm\infty\mp\infty \quad ; \quad 0\cdot\infty \quad ; \quad (0)^0 \quad ; \quad (\infty)^0 \quad ; \quad (1)^\infty$$

- Più precisamente:

$a)\ \lim_{x\to c}[f(x)+g(x)]$, quando è :

$\lim_{x\to c} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to c} g(x) = -\infty$

$b)\ \lim_{x\to c}[f(x)\cdot g(x)]$, quando è :

$\lim_{x\to c} f(x) = 0,\ \lim_{x\to c} g(x) = \infty$

$c)\ \lim_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, quando è :

$\lim_{x\to c} f(x) = 0,\ \lim_{x\to c} g(x) = 0$

$d)\ \lim_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, quando è :

$\lim_{x\to c} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to c} g(x) = \infty$

Utilità dei limiti nello studio di funzione

- Dopo aver dato le varie definizioni di limite, vediamo a cosa servono i limiti nello studio di funzioni.
- Essenzialmente il calcolo dei limiti ci serve per conoscere il comportamento della funzione, che si sta studiando, agli estremi del campo di esistenza.
  - Cioè, dopo che noi abbiamo trovato gli intervalli che formano il campo di esistenza, dobbiamo vedere come si comporta la funzione avvicinandosi a gli estremi di detti intervalli.
  - Dobbiamo vedere se la funzione tende ad un valore finito o se ha un andamento asintotico.

Calcolo dei limiti

- Abbiamo dato il concetto di limite, abbiamo visto come si possa verificare l’esistenza oppure no di un limite in un punto o all’infinito.
- Vediamo ora come si opera, normalmente, per calcolare un limite.

Calcolo dei limiti

- Come prima operazione si sostituisce, nell' espressione della funzione, ad x il valore per cui si deve trovare il limite e si vede cosa capita.
- I casi, che si possono presentare, si possono assimilare, nella maggior parte delle volte, a questi tre:

1) Il calcolo si può fare senza nessun problema: il valore trovato è proprio il limite cercato.
2) Nel calcolo entrano, come operandi, 0 (zero) o ∞ (infinito), ma ciononostante,occorre calcolare il limite.
3) Nel calcolo si presenta una forma indeterminata, ed allora si cerca qualche artificio per cercare il valore del limite.

Limiti notevoli

- In generale vediamo il modo di andare all'infinito (cioè per $x \to +\infty$) dei logaritmi, delle potenze, dell'esponenziale e del fattoriale.
- Si può osservare come
  - il logaritmo vada all'infinito più lentamente di qualsiasi potenza,
  - questa più lentamente di qualsiasi esponenziale (ovviamente con base maggiore di 1),
  - e infine quest'ultimo più lentamente del fattoriale.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log x)^{\beta}}{x^{\alpha}}=0, \text{con } \alpha>0, \beta\in R}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\beta}}{a^{x}}=0, \text{con } \alpha>1, \beta\in R}$$

Limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{a}{x}}=e^a$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

Limiti di funzioni polinomiali

- Siano *P(x)* e *Q(x)* due polinomi di grado rispettivamente n e m.
- Cioè supponiamo che sia:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$$

$$\text{e } Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x^1 + b_0$$

$$\text{con } \; a_i, b_k \in R, 0 \le i \le n, 0 \le k \le m$$

Limiti di funzioni polinomiali

- Consideriamo il seguente limite:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0 & \text{se } n < m \\ \infty & \text{se } n > m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{se } n = m \end{cases}$$

Limiti di funzioni polinomiali

- **Attenzione** nel caso ***n>m*** bisogna controllare se il segno dell'infinito è positivo o negativo, mediante la regola del prodotto dei segni del numeratore e denominatore.

Limiti di forma immediata

- I limiti di **forma immediata** sono tutti quei limiti per i quali con la semplice sostituzione si ottiene subito il risultato.
- A tale proposito, prima dei relativi esempi, daremo la seguente tabella riassuntiva di tutti i casi di limiti di forma immediata.

Limiti di forma immediata

$\frac{0^+}{+n} = 0^+$	$\frac{0^+}{-n} = 0^-$	$\frac{0^-}{+n} = 0^-$	$\frac{0^-}{-n} = 0^+$
$\frac{0^+}{+\infty} = 0^+$	$\frac{0^+}{-\infty} = 0^-$	$\frac{0^-}{+\infty} = 0^-$	$\frac{0^-}{-\infty} = 0^+$

In cui $n>0$

Limiti di forma immediata

$\dfrac{+n}{0^+} = +\infty$	$\dfrac{+n}{0^-} = -\infty$	$\dfrac{-n}{0^+} = -\infty$	$\dfrac{-n}{0^-} = +\infty$
$\dfrac{+n}{+\infty} = 0^+$	$\dfrac{+n}{-\infty} = 0^-$	$\dfrac{-n}{+\infty} = 0^-$	$\dfrac{-n}{-\infty} = 0^+$

In cui $n>0$

Limiti di forma immediata

$\frac{+\infty}{0^+} = +\infty$	$\frac{+\infty}{0^-} = -\infty$	$\frac{-\infty}{0^+} = -\infty$	$\frac{-\infty}{0^-} = +\infty$
$\frac{+\infty}{+n} = +\infty$	$\frac{+\infty}{-n} = -\infty$	$\frac{-\infty}{+n} = -\infty$	$\frac{-\infty}{-n} = +\infty$

In cui $n>0$

Limiti di forma immediata

$(\pm\infty)+(+n)=\pm\infty$	$(\pm\infty)+(-n)=\pm\infty$
$(+\infty)+(+\infty)=+\infty$	$(-\infty)+(-\infty)=-\infty$
$(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$	$(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$
$(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$	$(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$
$(+\infty)\cdot(+n)=+\infty$	$(-\infty)\cdot(+n)=-\infty$
$(+\infty)\cdot(-n)=-\infty$	$(-\infty)\cdot(-n)=+\infty$

In cui $n>0$

Limiti di forma immediata

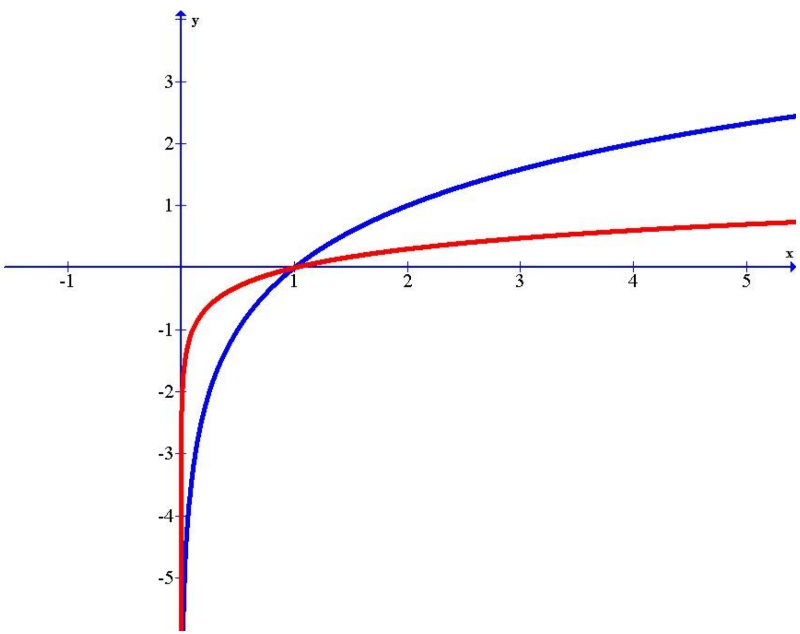
$(+\infty)^{+\infty} = +\infty$	$(+\infty)^{-\infty} = 0^{+}$
$(0^{+})^{+\infty} = 0^{+}$	$(0^{+})^{-\infty} = +\infty$

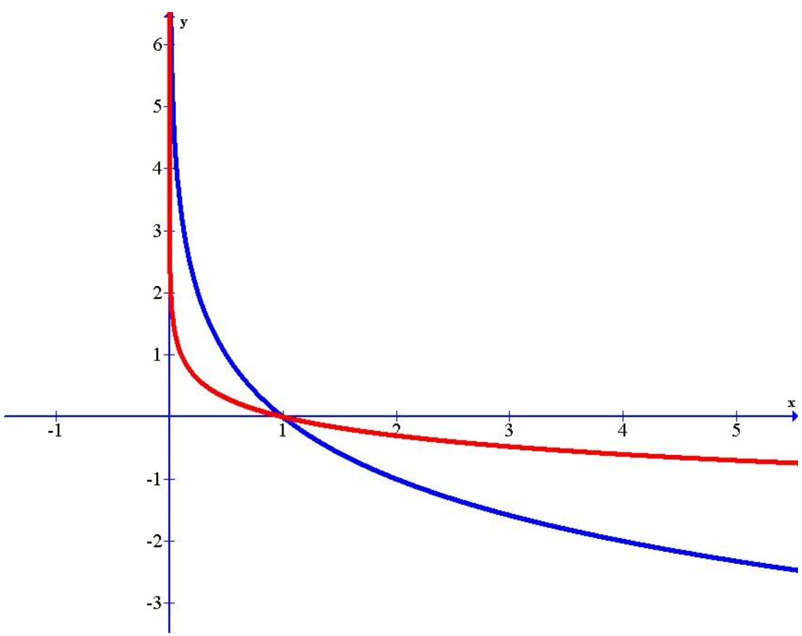
Limiti di forma immediata

Se n è pari	Se n è dispari
$(\pm\infty)^n = +\infty$	$(\pm\infty)^n = \pm\infty$
$\sqrt[n]{+\infty} = +\infty$	$\sqrt[n]{\pm\infty} = \pm\infty$

Limiti di forma immediata

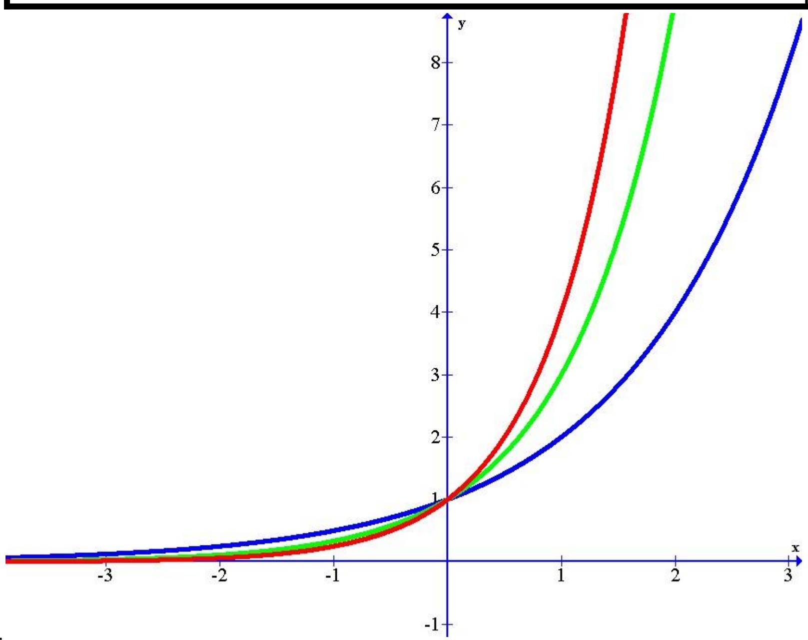
Se $a>1$	Se $0<a<1$
$\log_a\left(0^+\right)=-\infty$	$\log_a\left(0^+\right)=+\infty$
$\log_a\left(+\infty\right)=+\infty$	$\log_a\left(+\infty\right)=-\infty$

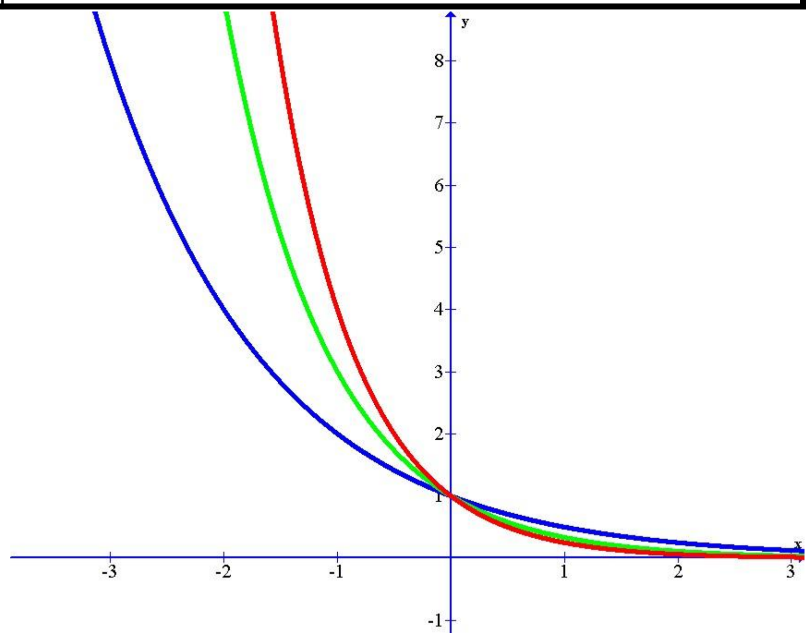




Limiti di forma immediata

Se $a>1$	Se $0<a<1$
$a^{-\infty} = 0^+$	$a^{-\infty} = +\infty$
$a^{+\infty} = +\infty$	$a^{+\infty} = 0^+$





Limiti di forma immediata

Esempi:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x-2}\right)=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x-2}\right)=0 \qquad \lim_{x\to 2^-}\left(\frac{1}{x-2}\right)=-\infty \qquad \lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{x-2}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{-2}\right)=+\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(x^2+2x-5\right)=+\infty \qquad \lim_{x\to 2^-}\left(\frac{1}{x-2+3x^2}\right)=+\frac{1}{12}$$

$$\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{x-5}{3x}\right)=-\frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to+1}\left(x^2+2x-5\right)=-2 \qquad \lim_{x\to 2^-}\left(\frac{2-x}{x-2+3x^2}\right)=0$$

Limiti di forma immediata

1° Caso:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{P^n(x)}{Q^m(x)} = \frac{0}{0}}$$

- Tale tipo di limite si risolve applicando i metodi della scomposizione (il tutto per arrivare a semplificare).

Es. $$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \frac{0}{0} \longrightarrow \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x-2) = -1$$

Limiti di forma immediata

2° Caso:

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{P^n(x)}{Q^m(x)} = \frac{\infty}{\infty}}$$

- Il fatto di non indicare i relativi segni per il termine (∞), indica che questo può assumerli indifferentemente tutti).
- Tale tipo di limite si risolve mediante raccoglimento a fattor comune , sia al numeratore che al denominatore , della variabile di grado massimo.

Limiti di forma immediata

Esempio:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 3x + 4}{-x^3 - x} = \frac{+\infty}{-\infty}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3\left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right)}{x^3\left(-1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3}}{-1 - \frac{1}{x^2}} = 0$$

Limiti di forma immediata

3° Caso:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt[r]{P^n(x)}}{Q^m(x)} = \frac{0}{0}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{P^n(x)}{\sqrt[r]{Q^m(x)}} = \frac{0}{0}}$$

- Tale tipo di limite si risolve applicando le operazioni della razionalizzazione di radicali.
- (Anche in questo caso è evidente che si arriva poi a semplificare).

Limiti di forma immediata

Esempi:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x-2}}{x-1}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x-2}}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{2x-2}}{\sqrt{2x-2}}=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)}{(x-1)\sqrt{2x-2}}=\lim_{x\to1}\frac{2}{\sqrt{2x-2}}=\infty$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}\cdot\frac{\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}{\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{2x-1-1}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to1}\frac{2}{\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}=1$$

Limiti di forma immediata

4° Caso:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[r]{P^n(x)}}{Q^m(x)}=\frac{\infty}{\infty}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{P^n(x)}{\sqrt[r]{Q^m(x)}}=\frac{\infty}{\infty}}$$

- Tale tipo di limite si risolve con il raccoglimento a fattor comune della variabile di grado massimo.

Limiti di forma immediata

Es. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-4}}{1-x}=\frac{+\infty}{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2(1-\frac{4}{x^2})}}{1-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}{1-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}{x\left(\frac{1}{x}-1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}{\left(\frac{1}{x}-1\right)}=-1$$

Limiti di forma immediata

5° Caso: $$\boxed{\lim_{x\to\infty} P^n(x) = (\pm\infty \mp \infty)}$$

- Tale limite si risolve evidenziando la variabile di grado massimo.

$$\lim_{x\to-\infty} \left(x^2 - 3x - 4 + x^3\right) = +\infty - \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3} + 1\right) = -\infty$$

Limiti di forma immediata

6° Caso:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \sqrt[r]{P^n(x)} \pm Q^m(x) = (\pm\infty \mp \infty)}$$

- Tale tipo di limite si risolve applicando le operazioni di razionalizzazione
- È essenziale ricondurre alla forma (∞/ ∞) .

Limiti di forma immediata

Es. $$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-2x}-x = (+\infty-\infty)$$

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-2x}-x)\cdot\frac{(\sqrt{x^2-2x}+x)}{(\sqrt{x^2-2x}+x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2-2x-x^2)}{(\sqrt{x^2-2x}+x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{(\sqrt{x^2-2x}+x)} =$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{(\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}+x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{(x\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}\right)}+x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x(\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}\right)}+1)} = -1$$

Limiti di forma immediata

7° Caso:

$$\boxed{0\cdot\infty \quad , \quad \infty\cdot 0}$$

- Tali tipi di forme indeterminate si affrontano inizialmente col ricondurle alle forme

$$\frac{0}{0} \quad , \quad \frac{\infty}{\infty}$$

Limiti di forma immediata

a) Se si vuole ottenere la forma 0/0 sarà sufficiente dividere ***numeratore*** e ***denominatore*** , della forma iniziale , per il termine che tende a infinito.

$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln x = (0 \cdot \infty) \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{x \cdot \ln x}{1} = (0 \cdot \infty) \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x \cdot \ln x}{\ln x}}{\frac{1}{\ln x}} =$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\frac{1}{\ln x}} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Limiti di forma immediata

b) Se si vuole ottenere la forma ∞/ ∞ sarà sufficiente dividere ***numeratore*** e ***denominatore*** , della forma iniziale , per il termine che tende a zero.

$$\lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln x = (0 \cdot \infty) \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{x \cdot \ln x}{1} = (0 \cdot \infty) \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{x \cdot \ln x}{x}}{\dfrac{1}{x}} =$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

Limiti di forma immediata

8° Caso: $\boxed{f(x)^{g(x)}}$

- Trasformazione (secondo definizione logaritmica) della funzione composta in funzione esponenziale di base prefissata .
- (Di solito la base dei logaritmi Neperiani *e = 2,71…*)
- Successivamente la riconduzione alle forme 0/0 e ∞/ ∞.

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

Limiti di forma immediata

Oppure si utilizzano alcune forme notevoli conosciute .

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x} = e$$

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x\to+\infty}\log_a\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \log_a e$$

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = 1$$

$$\lim_{x\to0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e$$

$$\lim_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{a^{x}-1}{x} = \ln a$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{x} = 1$$

Limiti di forma immediata

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x - 1}{x} = +\infty \quad (a > 1)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x - 1}{x} = 0 \quad (0 < a < 1)$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{a^x - 1}{x} = 0 \quad (a > 1)$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{a^x - 1}{x} = -\infty \quad (0 < a < 1)$$

Esercizi

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - x^2}{e^{2x} + \ln x} = ?$$

- Risultato: 0

Esercizi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1-x^2}=?\quad,\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{1-x^2}=?$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2}{1-x^2}=?\quad,\lim_{x\to1^+}\frac{x^2}{1-x^2}=?$$

- Risultato: -1, -1 , +∞ , -∞

Esercizi

$$\lim_{x \to 4^-} \sqrt{\frac{x}{4-x}} = ?$$

- Risultato: $+\infty$

Esercizi

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{2(3-x)}{3(2-x)^2}=?\quad \lim_{x\to 2^+}\frac{2(3-x)}{3(2-x)^2}=?$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{2(3-x)}{3(2-x)^2}=?\quad \lim_{x\to +\infty}\frac{2(3-x)}{3(2-x)^2}=?$$

- Risultato: $+\infty$, $+\infty$, 0, 0

Esercizi

$$\lim_{x \to 1^-} \ln(1-x) = ?$$

$$\lim_{x \to -\infty} \ln(1-x) = ?$$

- Risultato: -∞, +∞

Esercizi

$$\lim_{x \to -1^+} \log(4 - 4x^2) = ?$$

$$\lim_{x \to +1^-} \log(4 - 4x^2) = ?$$

- Risultato: $-\infty$, $-\infty$

Esercizi

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x+1}{3x-1}}=?\qquad \lim_{x\to\frac{1}{3}^{+}}\sqrt{\frac{x+1}{3x-1}}=?$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x+1}{3x-1}}=?$$

- Risultato: $\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty,\frac{1}{\sqrt{3}}$

Continuità in un punto

- Il concetto di continuità è importante per l'analisi matematica.
- Deriva dal concetto di limite.
- **Definizione** $\boxed{f : A \to B}$ $\quad A \subseteq R, B \subseteq R$
- Sia data una funzione *f*, di dominio *A*, e sia x_0 un punto di accumulazione per *A*, appartenente a *A*.
- La funzione *f* si dice continua in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Osservazione

- È come dire che una funzione è continua se il calcolo del limite si può fare semplicemente sostituendo x_0 al posto di x nell'espressione della funzione: una bella facilitazione, se si riesce a scoprire a priori quali sono le funzioni continue!

Osservazione

- La continuità di una funzione deve sottostare ad alcune condizioni:

$x_0 \in A$ punto di accumulazione per A

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

Deve esistere il limite

$$f(x_0) = \ell$$

Continuità

- Data una funzione *f(x)*, si dice che è continua se la definizione di continuità in x_0 è verificata per ogni punto del dominio.

$$f : A \to B$$

La funzione è detta continua se per ogni x_0 in A si ha:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

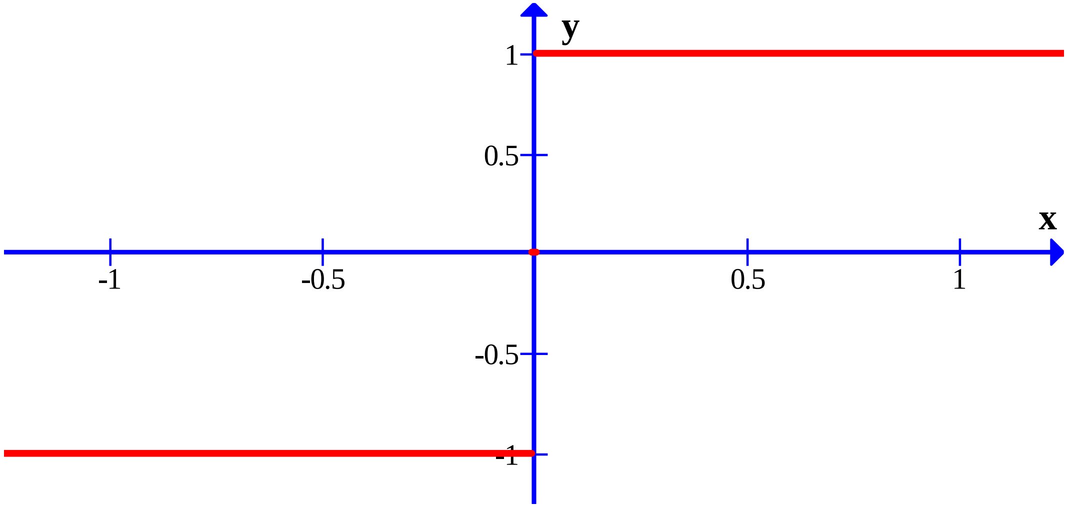
Osservazione

- Si dimostra, non senza qualche difficoltà, che tutte le funzioni elementari che abbiamo considerato sono continue in tutti i punti del loro dominio.
- È parimenti possibile dimostrare che anche le altre funzioni elementari che non abbiamo considerato sono continue in tutti i punti del loro dominio:
  - si tratta di tutte le funzioni polinomiali, razionali fratte, contenenti radicali, potenze con esponente di vario tipo, esponenziali, logaritmiche, trigonometriche, e quelle che si ottengono per somma, sottrazione, prodotto, quoziente e composizione di queste in tutti i modi possibili.

Osservazione

- Per ottenere funzioni non continue, al livello del nostro corso, bisogna ricorrere alle funzioni definite a pezzi, come la funzione, detta funzione segno o signum, definita come segue:

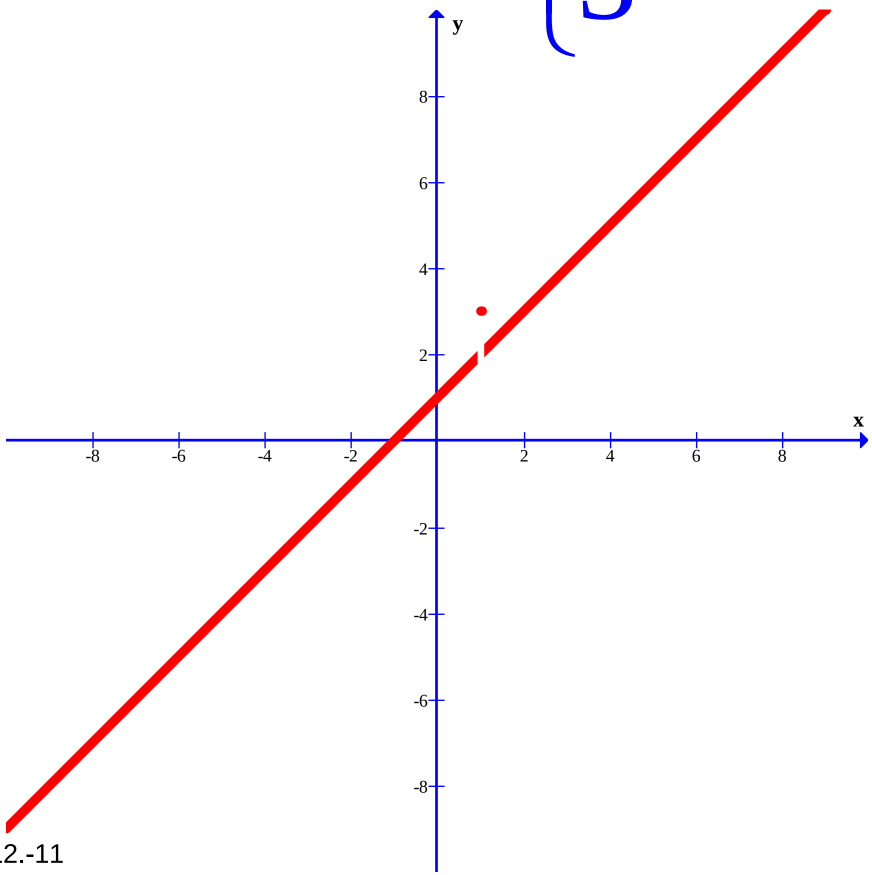
$$y=\begin{cases}-1 & \text{se} \quad x<0\\ 0 & \text{se} \quad x=0\\ 1 & \text{se} \quad x>0\end{cases}$$



- Questa funzione non è continua nel punto *0* del suo dominio.
- In primissima approssimazione si può dire che una funzione è continua se il suo grafico non presenta “strappi”
  - l’affermazione andrebbe però precisata in dettaglio, ma ciò esula dagli scopi di questo corso.

Esempio

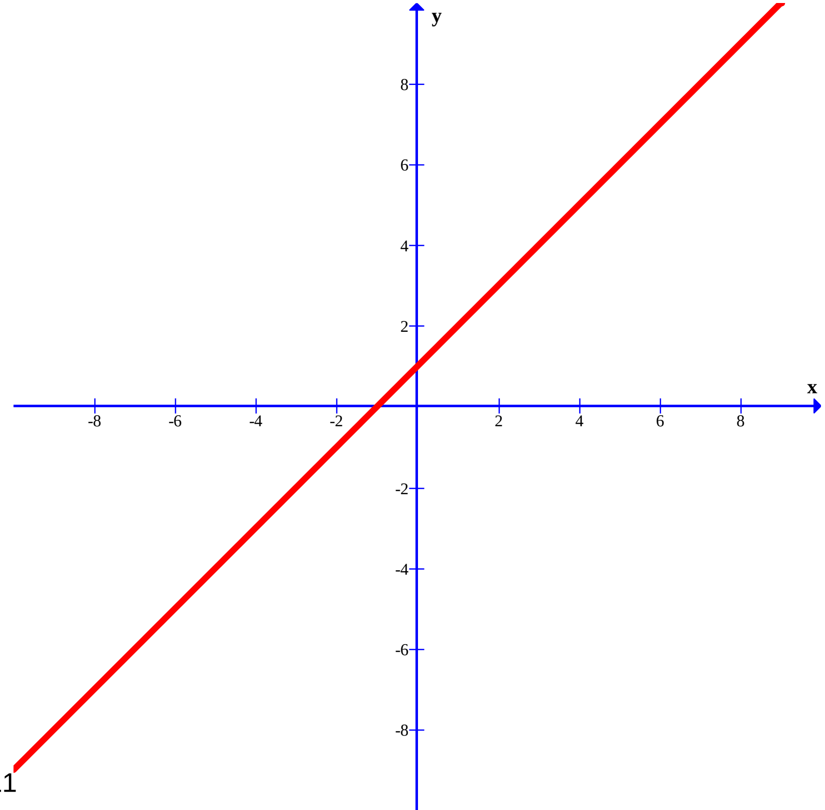
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{quando } x \neq 1 \\ 3 & \text{quando } x = 1 \end{cases}$$



- Non è continua in $x=1$.

Esempio

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{quando } x\neq 1\\ 2 & \text{quando } x=1\end{cases}$$

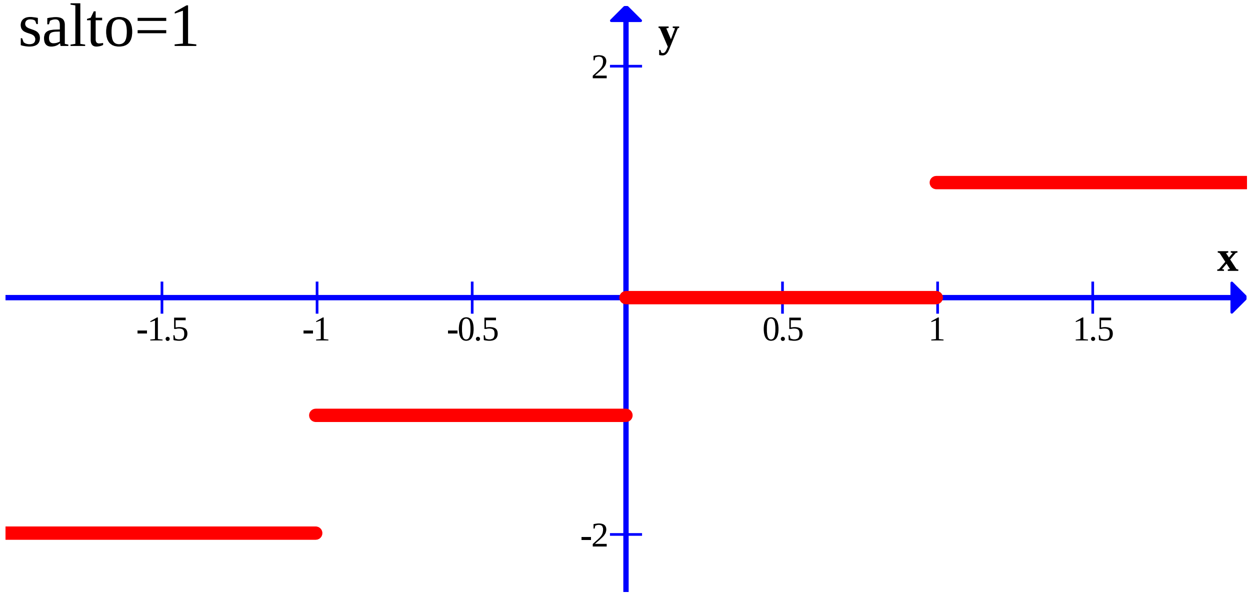


- È continua in $x=1$.

La lezione di Dindiot

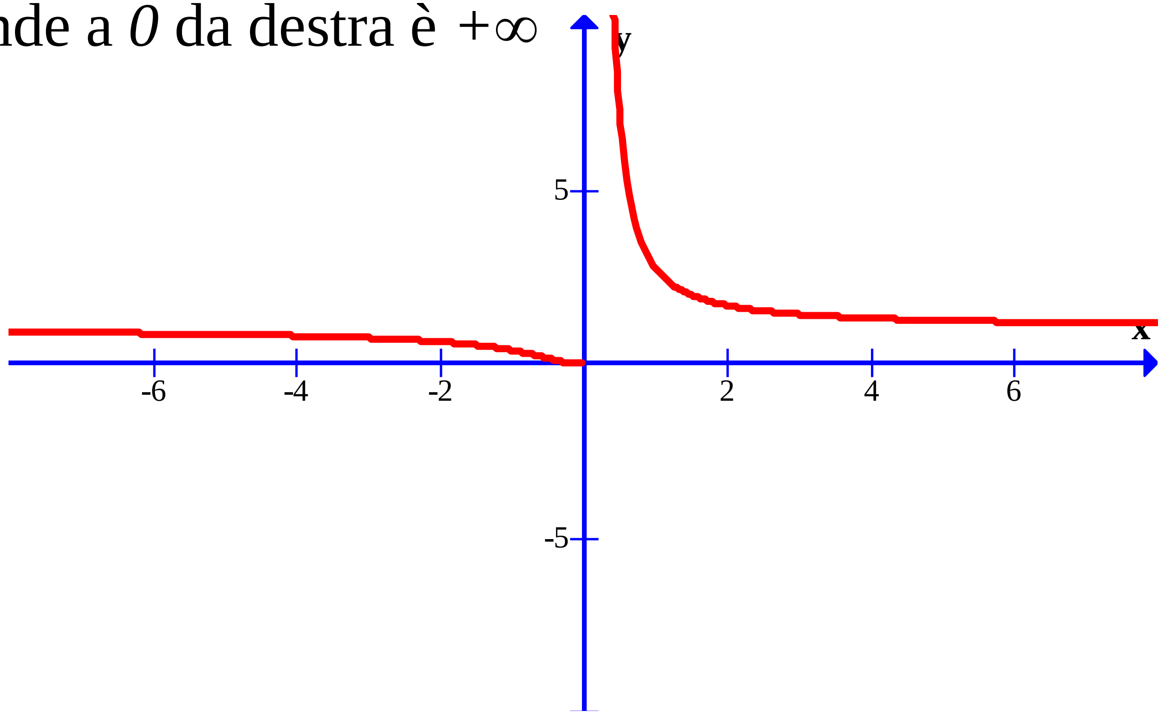
Punti di discontinuità o singolari

- *1^a^* **specie:**
  - *se in quel punto esistono finiti i limiti destro e sinistro e sono diversi*
- La differenza dei 2 limiti si chiama **salto**
  - Esempio la funzione *f(x)=[x]* (parte intera di *x*)
    - per ogni *x* intera ha una discontinuità di *1^a^* specie con salto=1



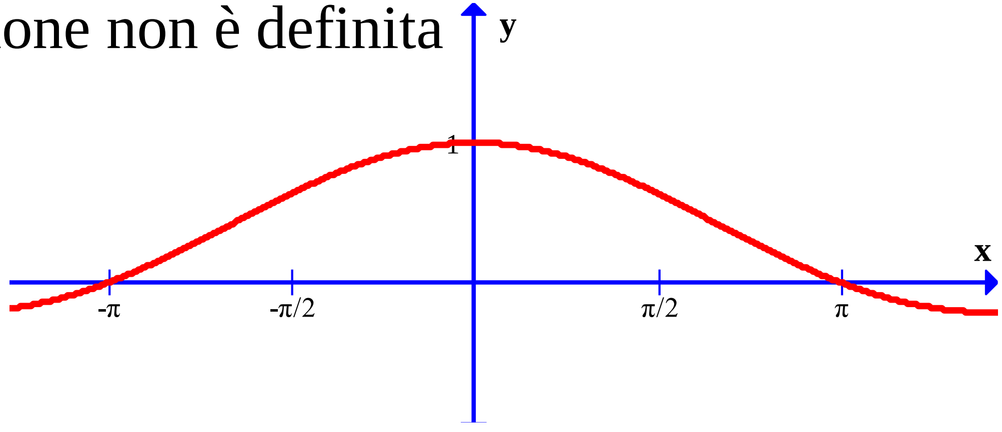
Punti di discontinuità

- ***2ª* specie:**
  - *quando in quel punto non esiste uno dei 2 limiti destro o sinistro o se esiste è $\pm\infty$*
  - Esempio la funzione $f(x)=e^{1/x}$
    - ha in $x=0$ una discontinuità di *2ª* specie perché il limite per x che tende a 0 da destra è $+\infty$



Punti di discontinuità

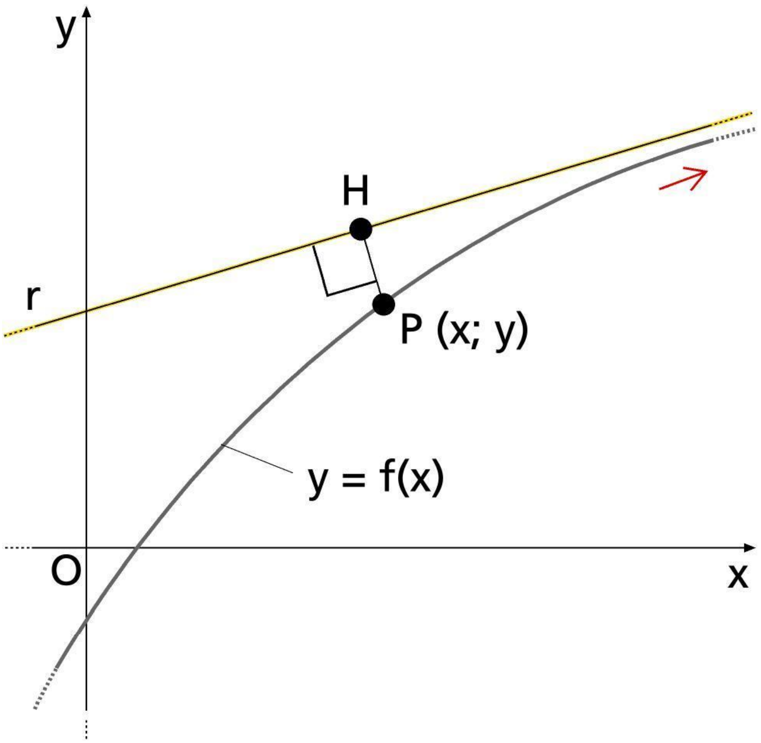
- ***3**^{a}* **specie:**
  - *se esiste il limite finito della funzione il quel punto, ma in essa non è definita o, se è definita, il suo valore non è uguale al valore del limite.*
- In questo caso la discontinuità si dice anche **eliminabile**
  - Esempio la funzione $f(x)=sen(x)/x$
    - ha in 0 una discontinuità di 3^a specie infatti per $x=0$ esiste il limite, ma la funzione non è definita



La ricerca degli asintoti di una funzione

- La retta *r* è detta asintoto del grafico della funzione $f(x)$ se:

la distanza $\overline{PH}$,di un generico punto $P(x; f(x))$ da tale retta, tende a zero quando l'ascissa o l'ordinata del punto tendono ad infinito, cioè:



$$\overline{PH} \to 0 \quad \text{per} \quad x \to \infty$$

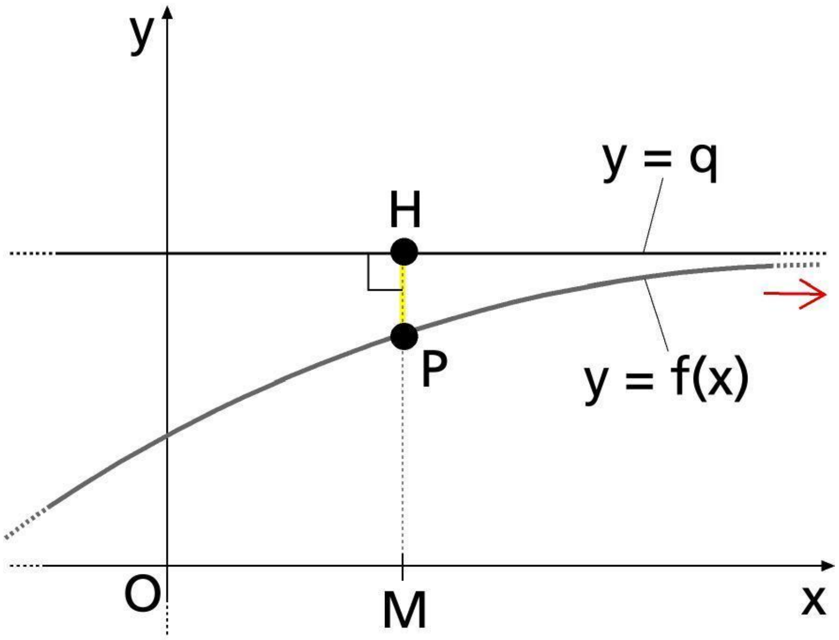
$$\text{oppure per} \quad f(x) \to \infty$$

L'asintoto orizzontale

- Data la funzione $y = f(x)$, se:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = q$$

si dice che la retta $y = q$ è *asintoto orizzontale* del grafico della funzione.

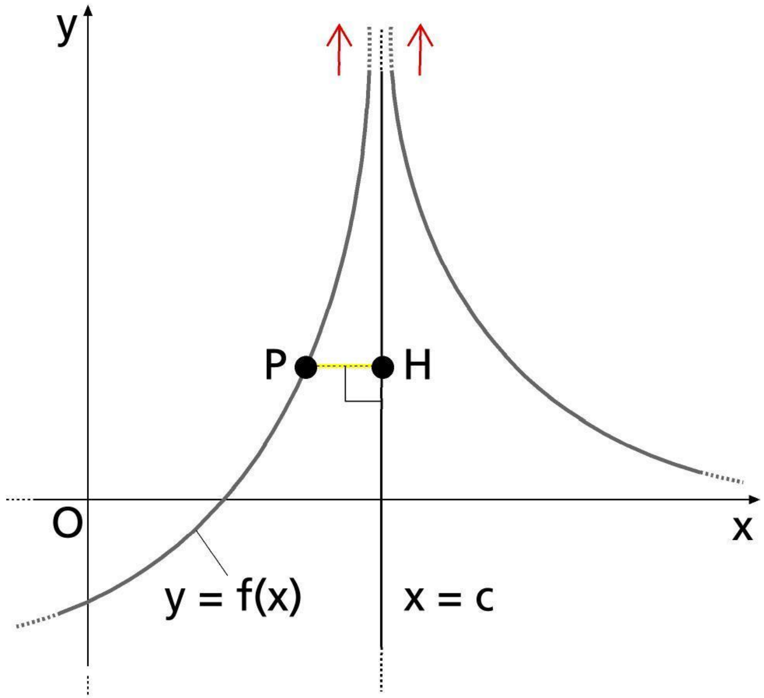


L'asintoto verticale

- Data la funzione $y = f(x)$, se:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty$$

si dice che la retta $x = c$
è *asintoto verticale* del
grafico della funzione.



L’asintoto obliquo

- Data la funzione $y = f(x)$, se:

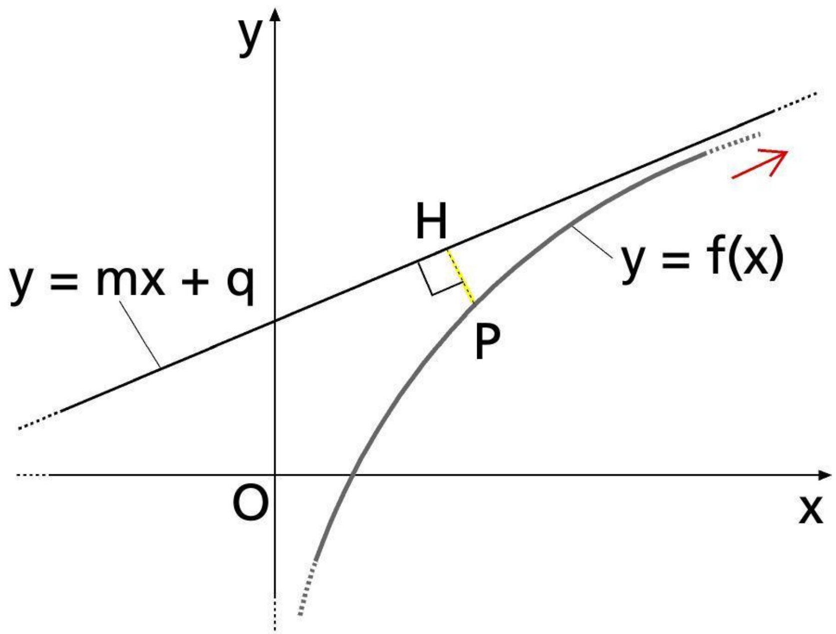
$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$$

si dice che la retta

$y = mx + q$ è

asintoto obliquo del

grafico della funzione.



$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}; \qquad q = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx].$$