LA TRASFORMATA DI LEGENDRE

prof. Antonio Greco
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Cagliari

11-12-2013

Indice

PREFAZIONE

Questa dispensa tratta alcuni aspetti della trasformazione di Legendre in modo più elementare rispetto ai testi in circolazione, che il Lettore potrà consultare per approfondire l'argomento.

SINTESI

La trasformazione di Legendre è un'operazione che fa passare da una data funzione convessa ad una altra funzione, ancora convessa, detta "trasformata", che può essere più adatta per determinati scopi.

Ad esempio, la trasformazione di Legendre in meccanica razionale fa passare dalla lagrangiana $L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ alla hamiltoniana $H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t)$.

Di conseguenza, le equazioni differenziali del moto (che sono del secondo ordine) diventano del primo ordine al prezzo di raddoppiare di numero.

È anche possibile ritornare indietro alla funzione data applicando la trasformazione inversa.

Una notevole proprietà della trasformazione di Legendre è che la sua trasformazione inversa è la medesima trasformazione: in altri termini, la trasformata della trasformata è la funzione iniziale.

TRASFORMATA DI LEGENDRE DI UNA FUNZIONE DI UNA VARIABILE

Seguiremo, inizialmente, un'impostazione ispirata al libro di Arnold [A]. Un'altra definizione della trasformata di Legendre sarà presentata a pag. 7.

Consideriamo una funzione $f \in C^2((a, b))$, con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, e supponiamo che sia strettamente analiticamente convessa, cioè

$$f''(x) > 0 \text{ per ogni } x \in (a, b).$$

Di conseguenza, la derivata prima $f'(x)$ è continua e strettamente crescente, quindi la sua immagine è un intervallo, che indichiamo con (c, d). Inoltre per ogni $m \in (c, d)$ esiste un unico punto $x_0 \in (a, b)$ tale che

$$m = f'(x_0). \tag{1}$$

Geometricamente, esiste un unico punto di tangenza $x_0 \in (a, b)$ dove la retta tangente al grafico di f ha per coefficiente angolare proprio m.

La trasformata di Legendre di f risponde alla domanda: dato m, quanto vale il termine noto q di quella retta?

Più precisamente, la trasformata di Legendre della funzione $f(x)$ è la funzione

$$f^*(m) = -q(m)$$

dove il segno meno garantisce che anche quest'ultima funzione è convessa.

ESEMPIO 1

Poniamo $f(x) = ax^2$, con $a \in (0, +\infty)$, e cerchiamo di esprimere $-q(m)$.

Fissato $m \in (-\infty, +\infty)$, il punto x_0 in cui il coefficiente angolare della retta tangente vale m è

$$x_0 = \frac{m}{2a}$$

e l'equazione di tale retta è

$$y = m\,(x - x_0) + \frac{m^2}{4a}.$$

Il termine noto è dunque

$$q = -m\,x_0 + \frac{m^2}{4a} = -\frac{m^2}{4a}.$$

Si conclude che la trasformata di Legendre di ax^2 è la funzione

$$f^*(m) = \frac{m^2}{4a}. \tag{2}$$

Si noti che quest'ultima funzione è ancora strettamente analiticamente convessa.

Ponendo $a = 1/2$ si trova, inoltre, che la trasformata di $x^2/2$ è ancora $x^2/2$: infatti la lettera che denota la variabile indipendente si può scegliere a piacere.

Sviluppando quest'ultima idea, cerchiamo ora la trasformata di $x^2/(4a)$: basta scrivere $1/(4a)$ al posto di a nella (2).

Così facendo, si trova che la trasformata di $x^2/(4a)$ è ax^2.

Si constata, dunque, che trasformando due volte la funzione ax^2 si riottiene la stessa funzione.

TRASFORMATA DI LEGENDRE DI UNA FUNZIONE DI N VARIABILI

Consideriamo un aperto connesso $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, ed una funzione $f \in C^2(\Omega)$ strettamente analiticamente convessa, cioè avente matrice hessiana $D^2 f(\boldsymbol{x})$ definita positiva per ogni $\boldsymbol{x} \in \Omega$.

Tali ipotesi, tramite il teorema dell'applicazione inversa, implicano che l'immagine della funzione $\nabla f(\boldsymbol{x})$ è un aperto connesso di $\mathbb{R}^N$, che indicheremo con B.

Inoltre, per ogni vettore $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_N) \in B$ esiste un unico punto $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$ tale che

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{p}. \tag{3}$$

Geometricamente, esiste un unico punto $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$ dove il piano tangente al grafico di f ha equazione della forma

$$z = \sum_{i=1}^{N} p_i\,x_i + q \tag{4}$$

La trasformata di Legendre di f risponde alla domanda: dato $\boldsymbol{p}$, quanto vale il termine noto q?

Più precisamente, la trasformata di Legendre della funzione $f(\boldsymbol{x})$ è la funzione

$$f^*(\boldsymbol{p}) = -q(\boldsymbol{p})$$

dove il segno meno garantisce che anche quest'ultima funzione è convessa.

ESEMPIO 2

Poniamo $f(\boldsymbol{x}) = a\,\|\boldsymbol{x}\|^2$, con $a \in (0, +\infty)$, e cerchiamo di esprimere $-q(\boldsymbol{p})$.

Fissato $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^N$, il punto $\boldsymbol{x}_0$ in cui l'equazione del piano tangente ha la forma (4) è

$$\boldsymbol{x}_0 = \frac{\boldsymbol{p}}{2a}$$

e l'equazione di tale piano è

$$z = \boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + \frac{\|\boldsymbol{p}\|^2}{4a}.$$

Il termine noto è dunque

$$q = -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x}_0 + \frac{\|\boldsymbol{p}\|^2}{4a} = -\frac{\|\boldsymbol{p}\|^2}{4a}.$$

Si conclude che la trasformata di Legendre di $a\,\|\boldsymbol{x}\|^2$ è la funzione

$$f^*(\boldsymbol{p}) = \frac{\|\boldsymbol{p}\|^2}{4a}.$$

Questo esempio è particolarmente significativo perché l'energia cinetica $\frac{1}{2}\,m\|\boldsymbol{v}\|^2$ di un punto materiale di massa m è una funzione della forma $a\,\|\boldsymbol{x}\|^2$ con $a = \frac{1}{2}\,m$ e $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}$.

L'energia cinetica, a sua volta, interviene nell'espressione della lagrangiana, che è proprio la funzione tipicamente soggetta a trasformazione di Legendre in meccanica.

ESEMPIO 3

Estendiamo l'esempio precedente considerando la forma quadratica $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\,A\,\boldsymbol{x}^T$, dove $\boldsymbol{x}$ è un vettore riga, $\boldsymbol{x}^T$ è il suo vettore trasposto (colonna), e A è una matrice simmetrica e definita positiva.

Indicate con a^{ij} le componenti della matrice A, possiamo scrivere

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}\,x_i\,x_j.$$

Con le usuali regole di derivazione, si trova

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}\,(\delta^{ik}\,x_j + x_i\,\delta^{jk})$$

essendo δ^{ij} il delta di Kronecker. Sfruttando la simmetria di A, si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = 2\,\sum_{i=1}^{N} a^{ki}\,x_i.$$

Quindi, fissato $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^N$, il punto $\boldsymbol{x}_0$ in cui l'equazione del piano tangente ha la forma (4) è dato da

$$\boldsymbol{x}_0^T = \frac{1}{2}\,A^{-1}\,\boldsymbol{p}^T$$

dove A^{-1} denota la matrice inversa di A. L'equazione del piano tangente in $\boldsymbol{x}_0$ è

$$z = \boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + \frac{1}{4}\,\boldsymbol{p}\,A^{-1}\,\boldsymbol{p}^T.$$

Il termine noto è dunque

$$q = -\frac{1}{4}\,\boldsymbol{p}\,A^{-1}\,\boldsymbol{p}^T.$$

Si conclude che la trasformata di Legendre di $\boldsymbol{x}\,A\,\boldsymbol{x}^T$ è la funzione

$$f^*(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{4}\,\boldsymbol{p}\,A^{-1}\,\boldsymbol{p}^T.$$

Relazione fra una funzione e la sua trasformata

Consideriamo un aperto connesso $A \subset \mathbb{R}^N$, ed una funzione $f \in C^2(A)$ avente matrice hessiana $D^2 f(\boldsymbol{x})$ definita positiva per ogni $\boldsymbol{x} \in A$.

Fissato un vettore $\boldsymbol{p}$ nell'immagine B dell'applicazione ∇f, cerchiamo il termine noto q dell'equazione del piano tangente (4).

Il punto di tangenza è l'unico punto $\boldsymbol{x}_0 \in A$ che soddisfa la (3).

L'equazione del piano tangente è pertanto

$$z = \boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + f(\boldsymbol{x}_0)$$

ed il termine noto è

$$q = -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x}_0 + f(\boldsymbol{x}_0).$$

Indicata con $f^*(\boldsymbol{p})$ la trasformata di Legendre di $f(\boldsymbol{x})$, possiamo quindi scrivere

$$f^*(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x}_0 - f(\boldsymbol{x}_0) \tag{5}$$

essendo $\boldsymbol{x}_0$ il punto individuato dalla (3). Questa relazione, molto usata in pratica, non fornisce, tuttavia, un'espressione esplicita di $f^*(\boldsymbol{p})$ perché resta da determinare $\boldsymbol{x}_0$.

L'espressione esplicita di $f^*(\boldsymbol{p})$, in generale, è difficile da trovare.

Alcuni casi significativi in cui vi si riesce sono descritti, ad esempio, nei paragrafi precedenti e nei testi [A], [FM] citati in bibliografia.

Cambiamento di variabili

Da ora in avanti scriveremo $\boldsymbol{x}$ in luogo di $\boldsymbol{x}_0$, per semplicità, cosicché la (3) diventa

$$\boldsymbol{p} = \nabla f(\boldsymbol{x}). \tag{6}$$

Derivando ambo i membri si trova

$$\left(\frac{\partial p_i}{\partial x_j}\right) = D^2 f(\boldsymbol{x})$$

dove il primo membro rappresenta la matrice jacobiana della funzione (6), ed il secondo membro è la matrice hessiana di f.

Essendo quest'ultima una matrice invertibile per ipotesi, il teorema della funzione inversa garantisce l'esistenza di una funzione $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p})$, inversa della (6), la cui matrice jacobiana è

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right) = (D^2 f(\boldsymbol{x}))^{-1}, \tag{7}$$

cioè la matrice inversa di $D^2 f(\boldsymbol{x})$. Si intende che il primo membro va calcolato in un punto $\boldsymbol{p}$, ed il secondo in un punto $\boldsymbol{x}$ legati fra loro dalla relazione (6).

La corrispondenza biunivoca istituita dalla (6) viene spesso chiamata "cambiamento di variabili": si badi che tale cambiamento dipende dalla particolare funzione f che si intende trasformare.

Per contro, i cambiamenti di variabili più familiari, come ad esempio il passaggio da coordinate cartesiane a coordinate polari, non dipendono dalla funzione considerata.

Gradiente ed Hessiana della trasformata di Legendre

Riscriviamo la relazione (5) come

$$\begin{aligned} f^*(\boldsymbol{p}) &= \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} - f(\boldsymbol{x}) \qquad (8)\\ &= \Big(\sum_{i=1}^N p_i\,x_i\Big) - f(x). \end{aligned}$$

Poiché sappiamo che $\boldsymbol{x}$ è una funzione di $\boldsymbol{p}$, ed è regolare, derivando rispetto a p_j troviamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^*}{\partial p_j} &= \sum_{i=1}^N \Big(\delta^{ij}\,x_i + p_i\,\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\Big)\\ &\quad -\sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial p_j}. \end{aligned}$$

Ricordando che $p_i = \partial f/\partial x_i$ per la (6), si conclude che

$$\frac{\partial f^*}{\partial p_j} = x_j$$

e, per l'arbitrarietà di j, possiamo scrivere

$$\nabla f^*(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{x}. \qquad (9)$$

Abbiamo dunque stabilito una relazione reciproca rispetto alla (6). Derivando ancora una volta, e tenendo conto della (7), si conclude che

$$D^2 f^*(\boldsymbol{p}) = (D^2 f(\boldsymbol{x}))^{-1}. \qquad (10)$$

Poiché la matrice $D^2 f(\boldsymbol{x})$ è definita positiva per ipotesi, ne segue che anche $D^2 f^*(\boldsymbol{p})$ lo è, e quindi la trasformata f^* è strettamente analiticamente convessa.

Definizioni alternative

La definizione adottata alle pagine 3 e seguenti è ispirata al libro di Arnold [A]. Spesso si utilizza, invece, la seguente definizione, suggerita dalla relazione (8).

Consideriamo un aperto connesso $A \subset \mathbb{R}^N$, ed una funzione $f \in C^2(A)$ avente matrice hessiana $D^2 f(\boldsymbol{x})$ definita positiva per ogni $\boldsymbol{x} \in A$.

Essendo $D^2 f$ definita positiva per ipotesi, la funzione

$$\boldsymbol{p} = \nabla f(\boldsymbol{x}) \qquad (11)$$

è iniettiva. In altri termini, indicata con B l'immagine di tale funzione, per ogni $\boldsymbol{p} \in B$ esiste un unico $\boldsymbol{x} \in A$ che soddisfa la (11), dunque resta definita una funzione $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p})$.

La trasformata di Legendre della funzione f è la funzione f^* data da

$$f^*(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}) - f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p})).$$

Questo approccio è quello seguito, ad esempio, nel testo di Fasano e Marmi [FM].

È anche possibile definire la trasformata di Legendre di funzioni prive delle derivate seconde, procedendo come nel libro di Brézis [B].

TRASFORMAZIONE INVERSA

Consideriamo un aperto connesso $A \subset \mathbb{R}^N$, ed una funzione $f \in C^2(A)$ avente matrice hessiana $D^2 f(\boldsymbol{x})$ definita positiva per ogni $\boldsymbol{x} \in A$.

Dalla (10) sappiamo che la funzione $f^*(\boldsymbol{p})$ è strettamente analiticamente convessa, dunque ammette a sua volta una trasformata di Legendre f^{**}.

Per la (9), i valori del gradiente ∇f^* sono i punti $\boldsymbol{x} \in A$, dunque denoteremo con $\boldsymbol{x}$ la variabile da cui dipende f^{**}, e scriveremo $f^{**}(\boldsymbol{x})$.

Per esprimere $f^{**}(\boldsymbol{x})$ applicheremo la relazione (8) alla funzione f^* in luogo di f. Tenendo conto della (9), la (8) porge

$$f^{**}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{p} - f^*(\boldsymbol{p}).$$

Abbiamo dunque ottenuto un'utile rappresentazione della funzione $f^{**}(\boldsymbol{x})$. Sostituendo in essa l'espressione di $f^*(\boldsymbol{p})$ data dalla (8), si giunge alla notevole conclusione che

$$f^{**}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}).$$

Dunque la trasformazione inversa della trasformazione di Legendre è la stessa trasformazione.

Si badi che vi sono semplici funzioni di una variabile che hanno la stessa proprietà: ad esempio $\varphi(x) = x$ ha la proprietà che $\varphi(\varphi(x)) = x$, come pure $\varphi(x) = 1/x$ e $\varphi(x) = -x+q$ per ogni $q \in \mathbb{R}$.

TRASFORMATA DI FUNZIONI CHE DIFFERISCONO PER UNA COSTANTE

Consideriamo un aperto connesso $A \subset \mathbb{R}^N$, ed una funzione $f \in C^2(A)$ avente matrice hessiana $D^2 f(\boldsymbol{x})$ definita positiva per ogni $\boldsymbol{x} \in A$.

Cerchiamo la trasformata di Legendre della funzione

$$g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + C,$$

essendo C una costante arbitraria. La matrice hessiana di g è uguale a quella di f, dunque è definita positiva. Pertanto la funzione g è trasformabile.

Al variare di $\boldsymbol{x}$ in A, il gradiente di $g(\boldsymbol{x})$ e quello di $f(\boldsymbol{x})$, essendo uguali, descrivono lo stesso insieme B.

Inoltre, per ogni $\boldsymbol{p} \in B$, il punto $\boldsymbol{x} \in A$ tale che $\nabla g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}$ è lo stesso punto dove $\nabla f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}$.

Applicando la relazione (8) alla funzione g, troviamo

$$g^*(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} - (f(\boldsymbol{x}) + C).$$

Confrontando quest'ultima relazione con la (8), si conclude che

$$g^*(\boldsymbol{p}) = f^*(\boldsymbol{p}) - C.$$

Dunque la somma di una costante C alla funzione f provoca la sottrazione della stessa costante alla trasformata di Legendre.

ESEMPIO 4

Consideriamo la funzione

$$L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = K(\dot{\boldsymbol{q}}) - V(\boldsymbol{q}, t) \qquad (12)$$

dove K è strettamente analiticamente convessa, e V è una funzione arbitraria.

Per il momento, il simbolo $\dot{\boldsymbol{q}} = (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N)$ denota N variabili indipendenti.

Solo alla fine di questa dispensa prenderemo in considerazione le derivate di $q_1, \ldots, q_N$ rispetto a t.

Fissate le variabili $\boldsymbol{q}, t$, il valore di $V(\boldsymbol{q}, t)$ resta costante, e possiamo applicare quanto visto nel paragrafo precedente.

Dunque la trasformata di Legendre di $L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ rispetto alle variabili $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N$ è la funzione

$$K^*(\boldsymbol{p}) + V(\boldsymbol{q}, t), \qquad (13)$$

dove K^* è la trasformata di Legendre di K.

TRASFORMATA RISPETTO AD ALCUNE VARIABILI

Estendiamo l'esempio precedente prendendo in considerazione una funzione L che dipende in modo arbitrario dalle variabili $(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$, e non ha necessariamente la forma (12).

Una qualunque funzione $L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ diventa una funzione delle sole variabili $(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N)$ se si pensano fissate tutte le altre.

Se, dunque, la funzione L è strettamente analiticamente convessa rispetto alle variabili $(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N)$ per ogni valore fissato di $(\boldsymbol{q}, t)$, essa è trasformabile.

La trasformata di Legendre, così ottenuta, dipende non solo dalle variabili $(p_1, \ldots, p_N)$, ma anche dai particolari valori che sono stati assegnati ai parametri $(\boldsymbol{q}, t)$, e perciò è una funzione di $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t)$.

Con riferimento alla meccanica, chiameremo tale funzione "hamiltoniana", e la indicheremo con $H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t)$. Chiameremo "lagrangiana" la funzione $L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$.

Derivate parziali dell'hamiltoniana

Fra l'hamiltoniana e la lagrangiana sussiste, in conseguenza della (8), la seguente relazione:

$$H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t) = \boldsymbol{p} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} - L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) \qquad (14)$$

a patto di prendere $\boldsymbol{p} = \nabla_{\dot{\boldsymbol{q}}} L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$, intendendosi con ciò che

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) \text{ per ogni } i. \qquad (15)$$

Per effetto della (9), sussiste inoltre la relazione

$$\nabla_{\boldsymbol{p}} H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t) = \dot{\boldsymbol{q}}. \qquad (16)$$

Le altre derivate parziali dell'hamiltoniana si trovano facilmente derivando la (14):

$$\nabla_{\boldsymbol{q}} H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t) = -\nabla_{\boldsymbol{q}} L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t), \qquad (17)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t) = -\frac{\partial L}{\partial t}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t).$$

Equazioni di Hamilton

Consideriamo ora una funzione $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(t)$ soddisfacente le equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (18)$$

dove $L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ è una funzione trasformabile rispetto alle variabili $\dot{q}_i$, e indichiamo con $H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t)$ la corrispondente hamiltoniana.

Sostituendo al secondo membro della (15) la funzione $\boldsymbol{q}(t)$ e la sua derivata $\dot{\boldsymbol{q}}(t)$, andiamo a definire la funzione

$$\boldsymbol{p}(t) = \nabla_{\dot{\boldsymbol{q}}} L(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), t).$$

In questo modo il punto $(\boldsymbol{p}(t), \boldsymbol{q}(t), t)$ è, per ogni t, proprio quello che la teoria sin qui svolta fa corrispondere al punto $(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), t)$.

Pertanto la relazione (16) continua a valere ponendo $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(t)$, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(t)$ e $\dot{\boldsymbol{q}} = \dot{\boldsymbol{q}}(t)$, cioè possiamo scrivere

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t) = \nabla_{\boldsymbol{p}} H(\boldsymbol{p}(t), \boldsymbol{q}(t), t). \qquad (19)$$

La derivata di $\boldsymbol{p}(t)$, invece, si legge dalla (18) e, vista la (17), è data da

$$\dot{\boldsymbol{p}}(t) = -\nabla_{\boldsymbol{q}} H(\boldsymbol{p}(t), \boldsymbol{q}(t), t). \qquad (20)$$

Le equazioni (19)-(20) costituiscono un sistema di $2N$ equazioni scalari del primo ordine, equivalenti alle (18) e dette equazioni di Hamilton in onore di Sir William Rowan Hamilton (1805–1865).

BIBLIOGRAFIA

[A] V.I. Arnold,
Mathematical methods of classical mechanics,
Springer-Verlag.

[B] H. Brézis,
Functional analysis, Sobolev spaces, and partial differential equations,
Springer.

[FM] A. Fasano, S. Marmi,
Meccanica analitica,
Boringhieri.