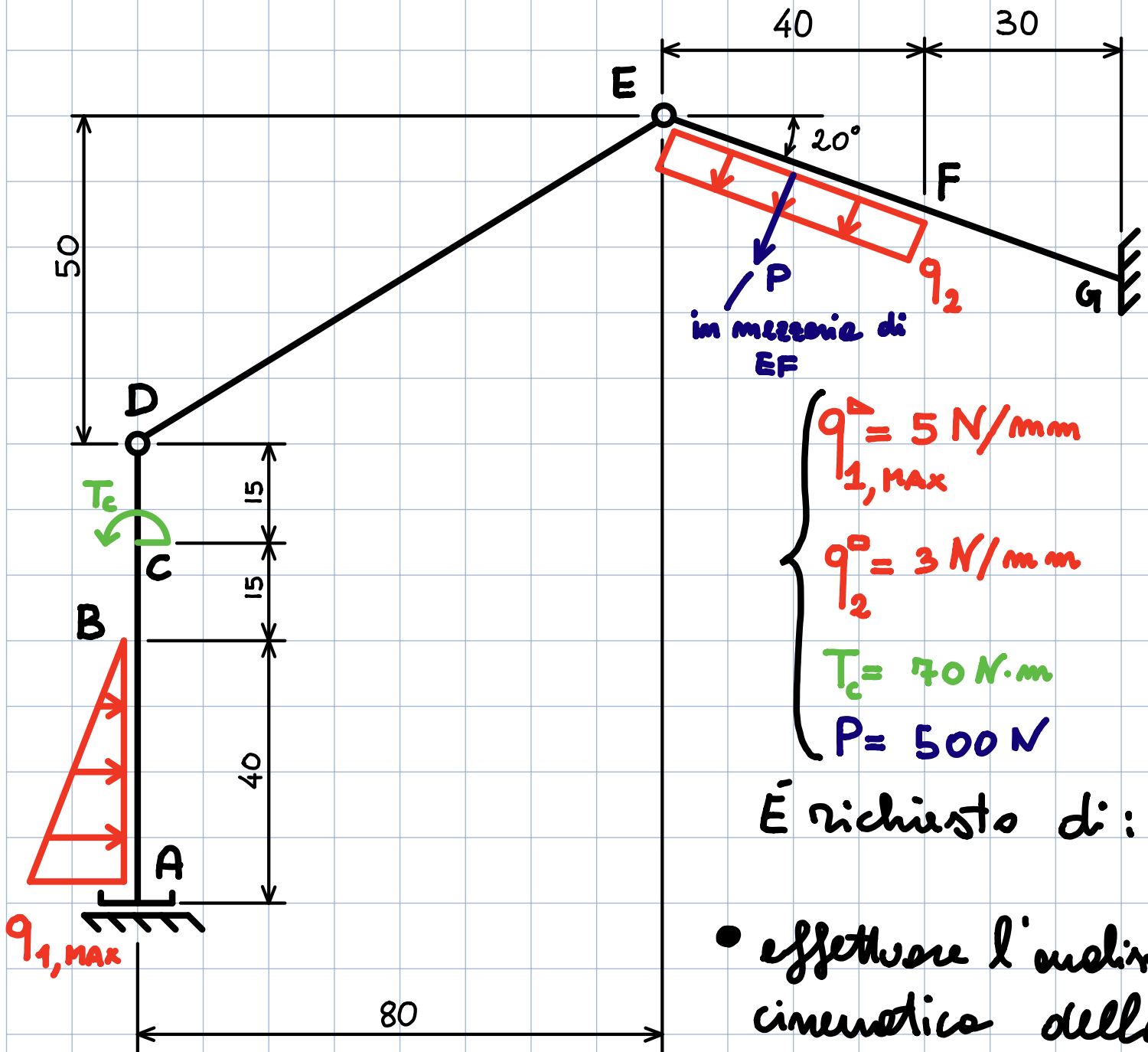


2020/05/22

A cura di P. M. Santucci

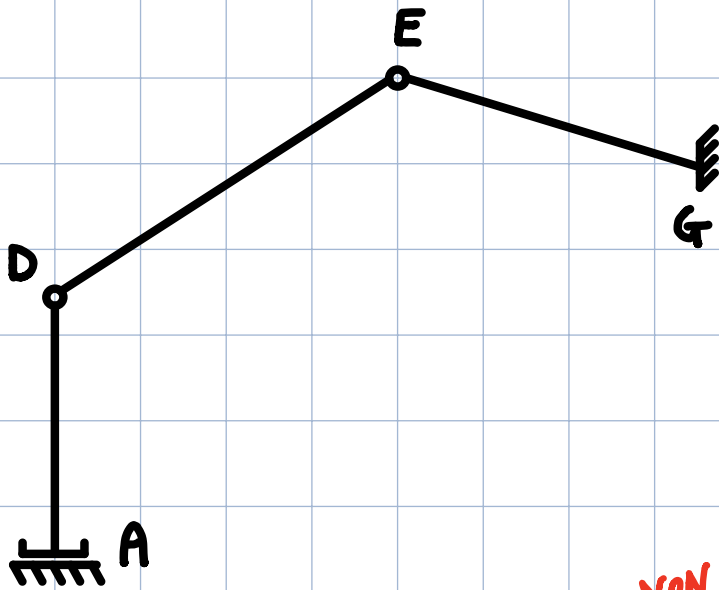


$$\left\{ \begin{array}{l} q_1^{\Delta} = 5 \text{ N/mm} \\ q_{1,MAX} \\ q_2^{\square} = 3 \text{ N/mm} \\ T_c = 70 \text{ N}\cdot\text{m} \\ P = 500 \text{ N} \end{array} \right.$$

È richiesto di:

- effettuare l'analisi cinematica della struttura;
- calcolare le reazioni vincolari interne ed esterne;
- calcolare e disegnare le azioni interne;

• Analisi cinematica



BILANCIO DEI VINCOLI

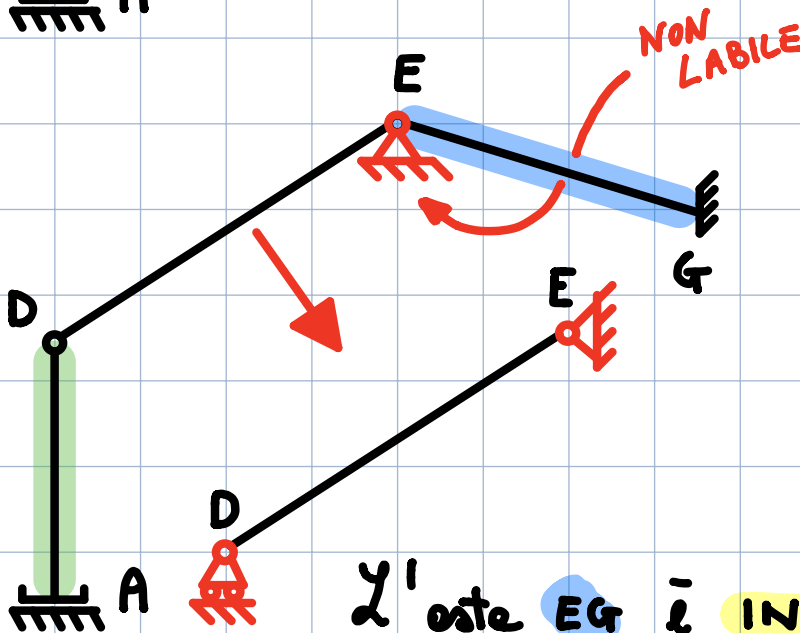
n° aste : 3

GDL : $3 \cdot n = 3 \cdot 3 = 9$

G D V

A	2
D	$2(m-1) = 2$
E	$2(m-1) = 2$
G	3
Tot:	9

STRUTTURA ISOSTATICA

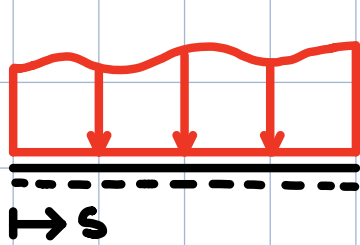


L'oste EG è INCASTRATA in G quindi è sicuramente FISSA. Quindi la cerniera E può essere sostituita da una cerniera e tena. L'oste AD è vincolata a tena tramite un pattino: è noto che questo può essere smunto porimenti ad una cerniera

e tena posta all'infinito nella direzione normale al piano di scorrimento del pattino A. La struttura ADE risulta quindi essere un arco a tre cerniere non allineate: la struttura è NON LABILE

- Reazioni vincolari

Addendum 1: CARICHI DISTRIBUITI



$$q = q(s)$$

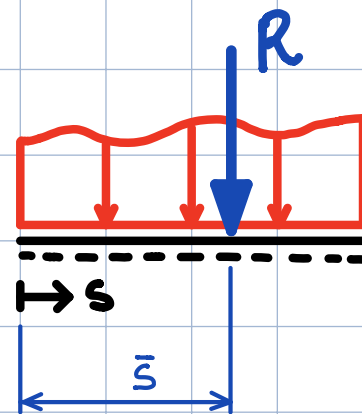
Sia $q = q(s)$ una funzione che definisce

la distribuzione del carico rispetto alle coordinate univariante s che descrive l'asse della trave.

In generale il risultante del carico può essere definito come in (a).

$$R = \int_l q(s) ds \quad (a)$$

lunghezza del tratto di trave su cui insiste il carico $q(s)$



$$q = q(s)$$

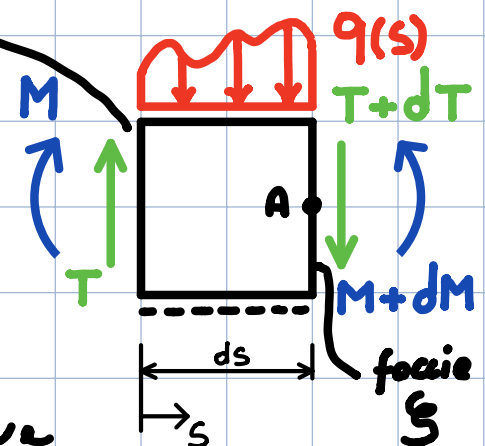
$$\bar{s} = \frac{\int_l s q(s) ds}{R} \quad (b)$$

Il punto della trave ove pone il risultante risulta coincidere con il baricentro della funzione di carico (b).

faccie χ

- Approccio differenziale:

Suppongo di voler calcolare le azioni interne in un punto A, posto su una sezione ξ della trave



che si trova ad una distanza infinitesima ds da una sezione X ove siano note le azioni T_0 e M_0 . Essendo la lunghezza su cui agisce il carico infinitesimo pensiamo anzitutto che il suo risultante passi nel punto di coordinate $\frac{ds}{2}$.

Equilibrio alla trazione verticale:

$$T - q(s) ds - (T + dT) = 0$$

$$-q(s) ds - dT = 0$$

$$\frac{dT}{ds} = -q(s) \rightarrow \int dT = -\int q(s) ds \rightarrow T - T_0 = -\int q(s) ds$$

Equilibrio alla rotazione \curvearrowright

$$M + dM + \underbrace{(q(s) ds) \left(\frac{ds}{2}\right)}_{O(ds^2) \text{ TRASCURO}} - T ds - M = 0$$

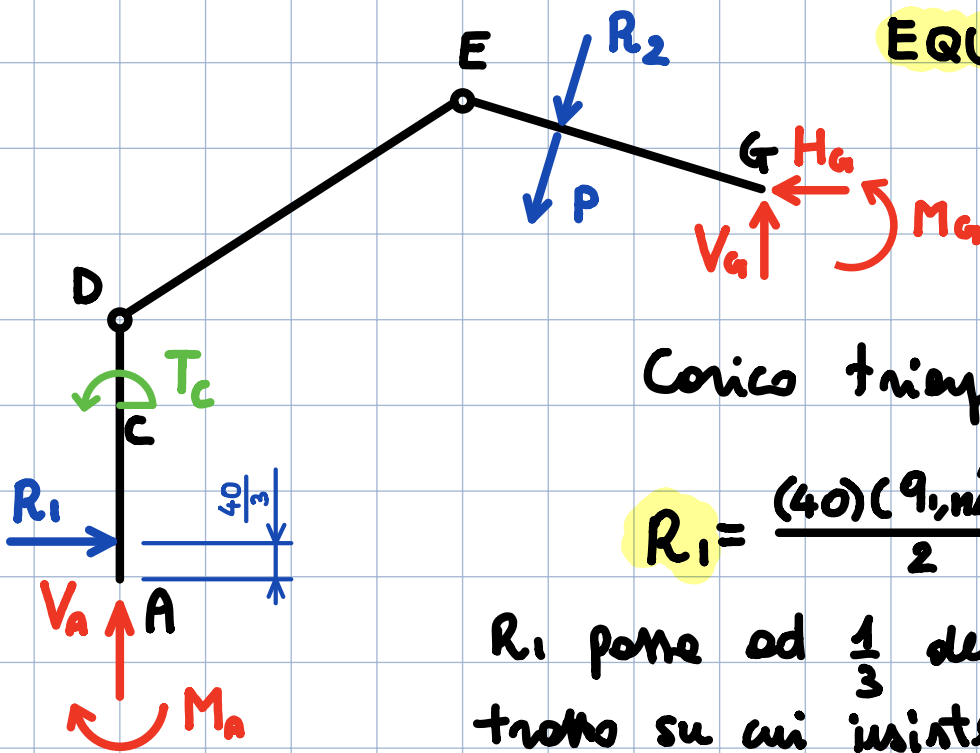
$$dM - T ds = 0$$

$$\frac{dM}{ds} = T \rightarrow \int dM = \int T ds \rightarrow M - M_0 = \int T ds$$

T_0 ed M_0 sono i valori che taglio e momento assumono rispettivamente nella faccia X .

fine addendum 1

EQUILIBRIO GLOBALE



Carico triangolare:

$$R_1 = \frac{(40)(9,1 \frac{5N/mm}{2})}{2} = 100N$$

R_1 pone ad $\frac{1}{3}$ dell' altezza del tratto su cui insiste, ovvero \overline{AB} .

Carico rettangolare:

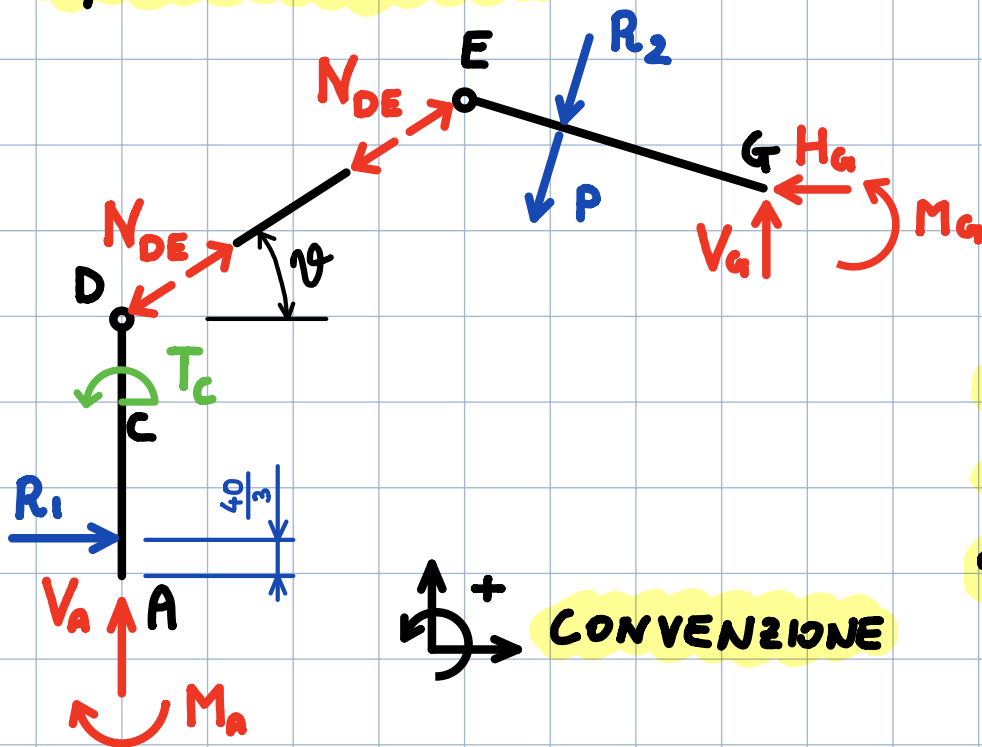
$$R_2 = 9_2(L_{EF}) \quad L_{EF} = \frac{40}{\cos(20^\circ)} = 42.567 \text{ mm}$$

$$R_2 = 127.701N$$

È evidente che, a fronte di 3 sole equazioni di equilibrio, abbiamo da determinare 5 incognite: il sistema non è quindi determinato.

Devo memorizzare lavorare con gli equilibri possibili: l'asta DE è una BIELLA SCARICA, caratterizzata dalle sole azioni nodali. È bene sfruttare tale proprietà.

Equilibri parziali



Portiamo con l'oste AD, peichi prevede 3 sole reazioni incognite; posso quindi considerare totalmente.

CONVENZIONE

$$\vartheta = \arctan\left(\frac{50}{80}\right) = 32.005^\circ$$

ASTA \overline{AD}

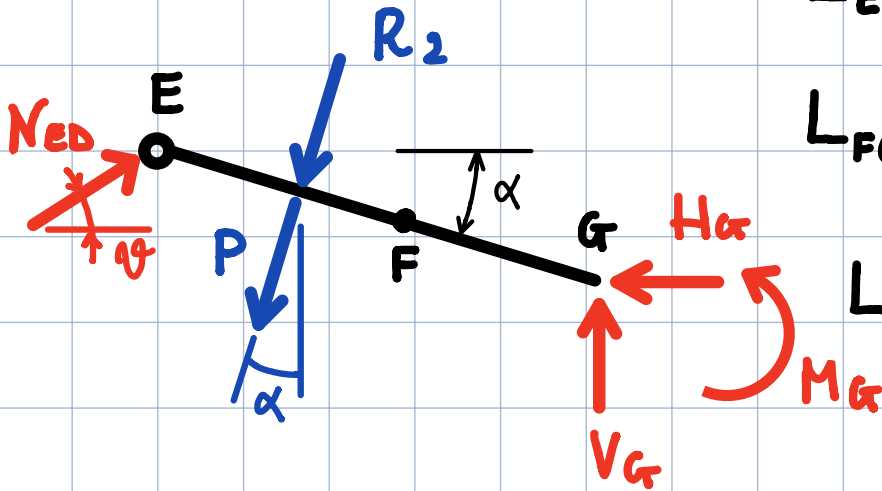
$$\begin{aligned} \rightarrow R_1 - N_{DE} \cos(\vartheta) &= 0 \\ N_{DE} &= \frac{R_1}{\cos(\vartheta)} = \frac{100}{\cos(\vartheta)} = 120.302 \text{ N} \\ \uparrow V_A - N_{DE} \sin(\vartheta) &= 0 \\ V_A &= N_{DE} \sin(\vartheta) = 66.877 \text{ N} \\ \curvearrowright D) T_c + R_1 (L_{DB} + \frac{2}{3} L_{AB}) - M_A &= 0 \\ M_A &= T_c + R_1 (30 + \frac{2}{3} 40) = \\ &= 70 \text{ E}3 + 100 (30 + \frac{2}{3} 40) = \\ &= 75666.7 \text{ Nmm} \end{aligned}$$

ASTA EG $\alpha = 20^\circ$

$$L_{EF} = \frac{40}{\cos(\alpha)} = 42.569 \text{ mm}$$

$$L_{FG} = \frac{30}{\cos(\alpha)} = 31.925 \text{ mm}$$

$$L_{EG} = L_{EF} + L_{FG} = 74.492 \text{ mm}$$



$$\rightarrow N_{DE} \cos(\vartheta) - R_2 \sin(\alpha) - P \sin(\alpha) - H_G = 0$$

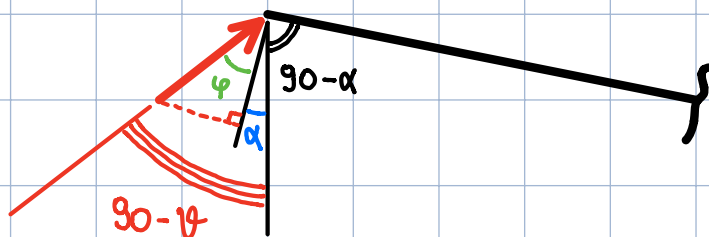
$$\begin{aligned} H_G &= -P \sin(\alpha) - R_2 \sin(\alpha) + N_{DE} \cos(\vartheta) = \\ &= -500 \sin(\alpha) - 127.701 \sin(\alpha) + 120.302 \cos(\vartheta) = \\ &= -114.686 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\uparrow N_{DE} \sin(\vartheta) - P \cos(\alpha) - R_2 \cos(\alpha) + V_G = 0$$

$$\begin{aligned} V_G &= P \cos(\alpha) + R_2 \cos(\alpha) - N_{DE} \sin(\vartheta) = \\ &= 500 \cos(\alpha) + 127.701 \cos(\alpha) - 120.302 \sin(\vartheta) = \\ &= 522.969 \text{ N} \end{aligned}$$

$\curvearrowright G$) (suggerimento: proietto N_{DE} secondo la direzione parallela // e perpendicolare \perp alla trave)

$$\begin{aligned} \varphi &= 90 - \vartheta - \alpha = \\ &= 37.995^\circ \end{aligned}$$

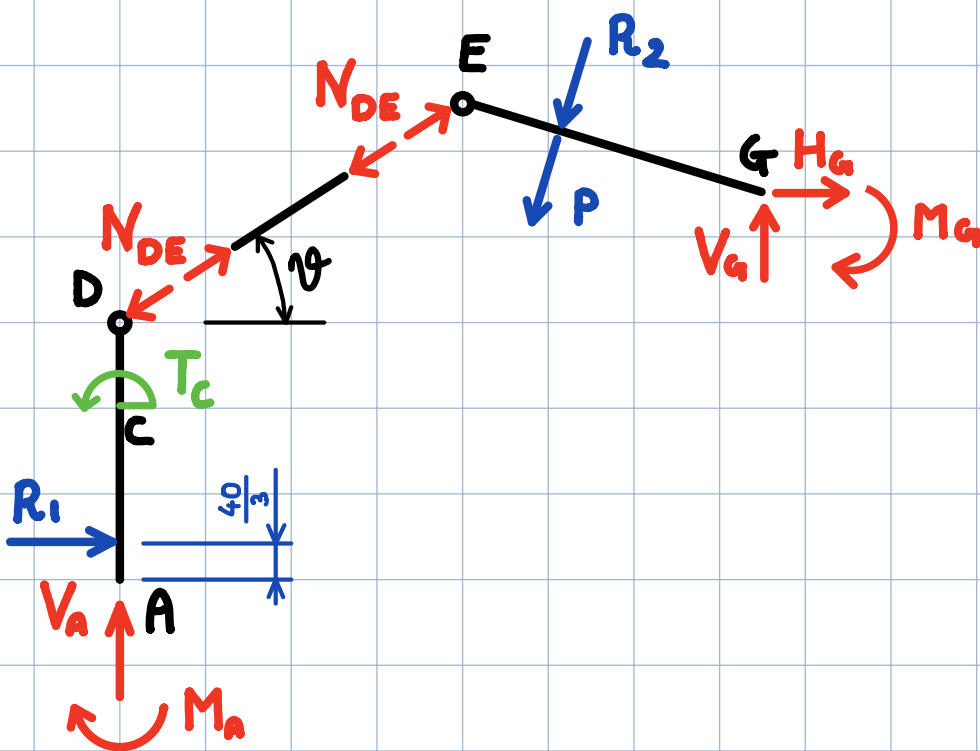


$$\curvearrowleft G) -N_{DE} \cos(\varphi) + P \left(L_{FG} + \frac{L_{EF}}{2} \right) + R_2 \left(L_{FG} + \frac{L_{EF}}{2} \right) + M_G = 0$$

$$M_G = N_{DE} \cos(\varphi) - P \left(L_{FG} + \frac{L_{EF}}{2} \right) - R_2 \left(L_{FG} + \frac{L_{EF}}{2} \right) = -26337 \text{ Nmm}$$

Si rende quindi necessario cambiare il segno di M_G e H_G , invertendo contemporaneamente il loro verso.

SCHEMA RIASSUNTIVO



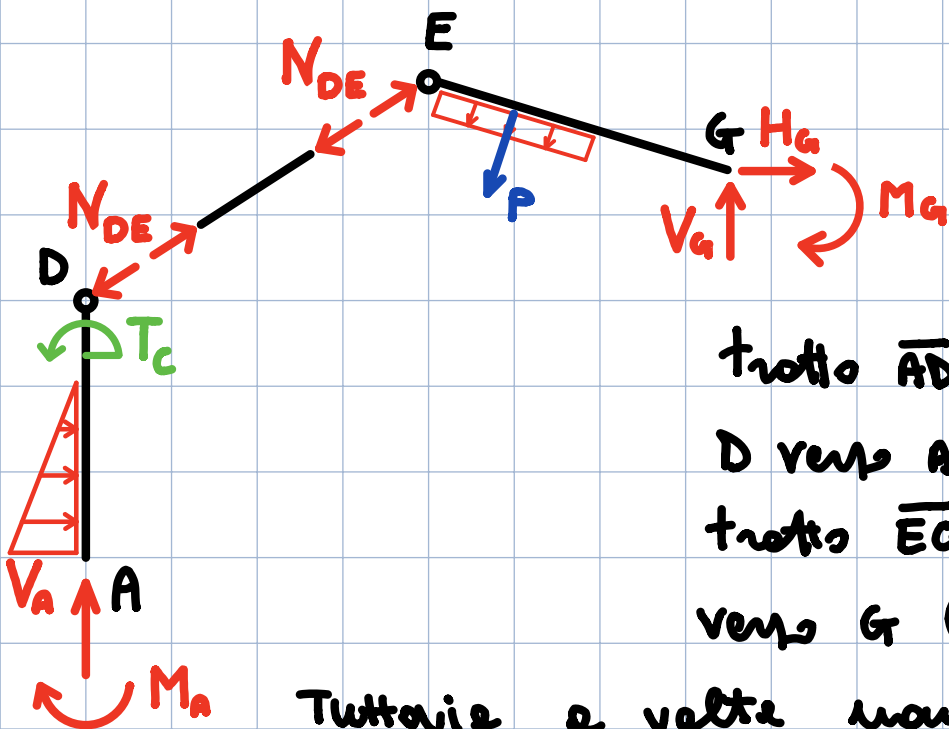
$$\begin{aligned} V_A &= 66.877 \text{ N} \\ M_A &= 75666.7 \text{ Nmm} \\ N_{DE} &= 120.302 \text{ N} \\ H_G &= 114.686 \text{ N} \\ V_G &= 522.969 \text{ N} \\ M_G &= 26337 \text{ Nmm} \end{aligned}$$

• Calcolo delle azioni interne

Premessa: è sempre consigliabile scegliere la strada più conveniente per due valide ragioni.

- 1) si risparmia tempo
- 2) è meno probabile fare errori

In questo caso, fatti di aver individuato la biella scissa, pensavo evitare di studiare l'oste DE nel dettaglio, in quanto sappiamo che presenterà la sola azione normale di compressione.



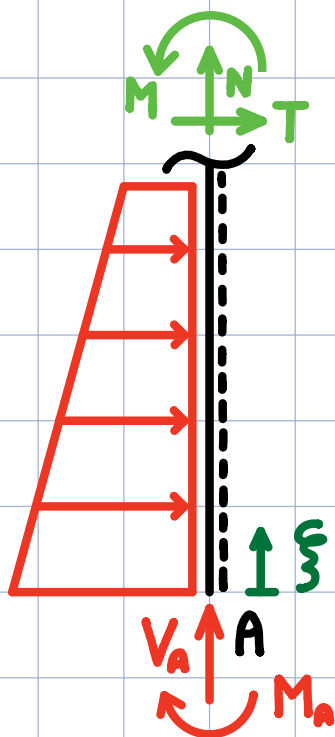
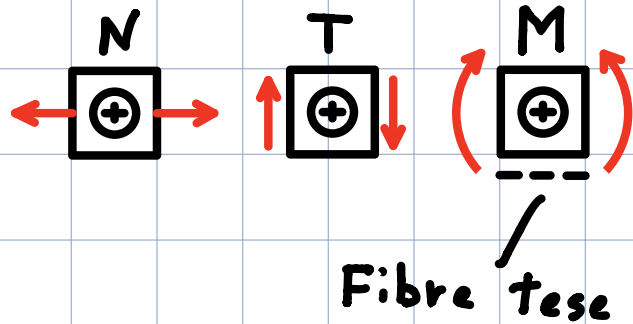
La strada migliore sarebbe studiare il

tratto \overline{AD} partendo da D verso A ($D \rightarrow A$) e il tratto \overline{EG} partendo da E verso G ($E \rightarrow G$).

Tuttavia a volte non è possibile scegliere la strada più comoda:

mettiamoci nei guai e studiamo il tratto \overline{AD} e partire da A verso D ($A \rightarrow D$).

TRATTO AB



Cerchiamo la funzione che definisce il conico.

$$q(\xi) = a + b\xi \quad \text{LINEARE}$$

$$q(0) = q_1^{\text{MAX}} = a \longrightarrow a = 5 \text{ N/mm}$$

$$q(L_{AB}) = 0 = a + b(L_{AB})$$

$$b = -\frac{a}{L_{AB}} = -\frac{5}{40} \text{ N/mm}^2$$

$$q(\xi) = 5 - \left(\frac{5}{40}\right)\xi \quad \text{— funzione del conico}$$

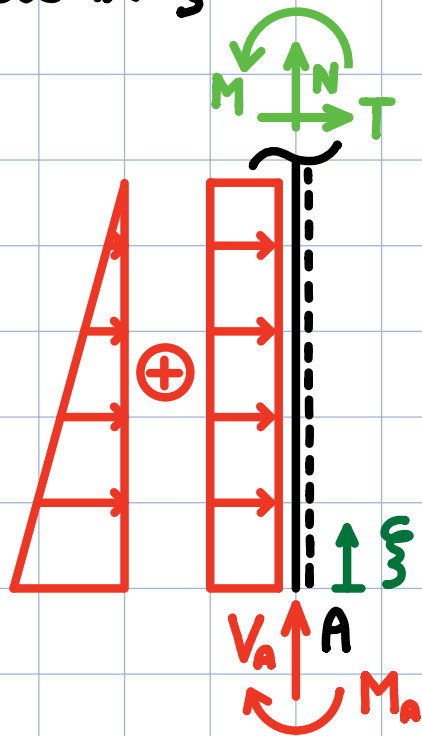
Abbiamo due strade

1) il metodo differenziale

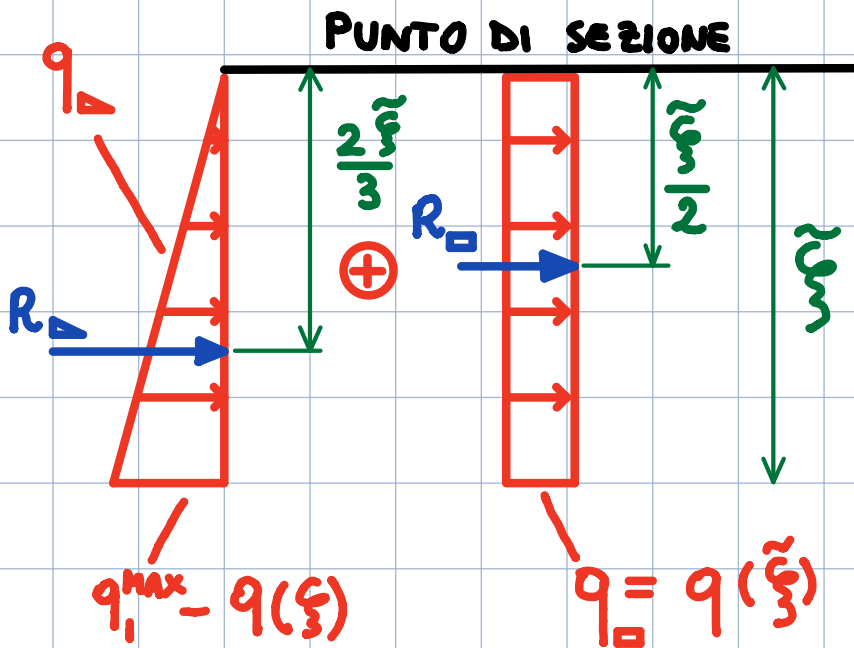
2) il metodo diretto

Iniziamo con il metodo diretto

Sezione in $\tilde{\xi}$



Siamo in campo elastico, quindi sfruttiamo il principio di sovrapposizione degli effetti:



$$R_{\square} = \frac{q_1^{\max} - q(\tilde{\xi})}{2} \tilde{\xi}$$

$$R_{\square} = q(\tilde{\xi}) \tilde{\xi}$$

$$0 < \tilde{\xi} < L_{AB}$$

$$N_{AB} = -V_A = -66.879 \text{ N}$$

$$T_{AB}(\tilde{\xi}) = - \underbrace{\left[5 - \frac{\tilde{\xi}}{8}\right] \tilde{\xi}}_{R_{\square}} - \underbrace{\frac{5 - \left[5 - \frac{\tilde{\xi}}{8}\right]}{2} \tilde{\xi}}_{R_{\triangle}} = -5\tilde{\xi} + \frac{\tilde{\xi}^2}{16}$$

$$T_{AB}(0) = 0 \quad T_{AB}(L_{AB}) = -100 \text{ N}$$

$$T_{AB} = 0 \text{ in } \tilde{\xi} = 0 \text{ e } \tilde{\xi} = 80 \text{ mm}$$

$$\frac{dT_{AB}}{d\tilde{\xi}} = -5 + \frac{\tilde{\xi}}{8}$$

fuori intervallo (scarto)

$$\frac{dT_{AB}}{d\xi} = 0 \text{ in } \xi = 40 \text{ mm} \quad \text{punto stazionario}$$

$$\frac{d^2T_{AB}}{d\xi^2} = \frac{1}{8} > 0 \text{ in } \xi = 40 \quad T_{AB} \text{ è MINIMO} \\ (\text{funzione convessa})$$

$$M_{AB}(\xi) = - \left\{ \left[5 - \frac{\xi}{8} \right] \xi \right\} \frac{\xi}{2} - \left\{ \frac{5 - \left[5 - \frac{\xi}{8} \right]}{2} \xi \right\} \frac{2\xi}{3} +$$

$$+ M_A = 75666.7 + \frac{5\xi^2}{2} + \frac{5\xi^3}{48}$$

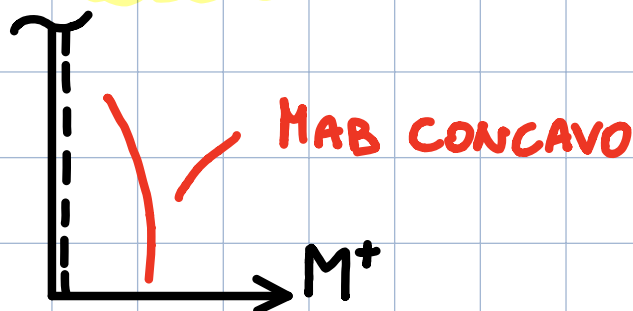
$$M_{AB}(0) = 75666.7 \text{ Nmm} \quad M_{AB}(L_{AB}) = 73000 \text{ Nmm}$$

$$\frac{dM_{AB}}{d\xi} = -5\xi + \frac{\xi^2}{16} \equiv T_{AB}$$

M_{AB} è STAZIONARIO in $\xi = 0$ o $\xi = 80 \text{ mm}$ (fuori int.).

$$\frac{d^2M_{AB}}{d\xi^2} = -5 + \frac{\xi}{8} \text{ in } \xi = 0 \quad \left. \frac{d^2M_{AB}}{d\xi^2} \right|_0 = -5 < 0$$

Il momento è concavo e il momento massimo in $\xi = 0$ il suo valore MASSIMO.



Metodo differenziale

Per come ho scritto prima le relazioni posso applicarle direttamente (MASSIMA ATENZIONE AI SEGNI).

$$T_{AB} - T_0 = - \int_0^{\xi} q(\xi) d\xi = - \int_0^{\xi} \left[5 - \frac{\xi}{8} \right] d\xi =$$
$$= -5\xi + \frac{\xi^2}{16}$$

ϕ
NON CI SONO FORZE TAGLIANTI IN $\xi = 0$

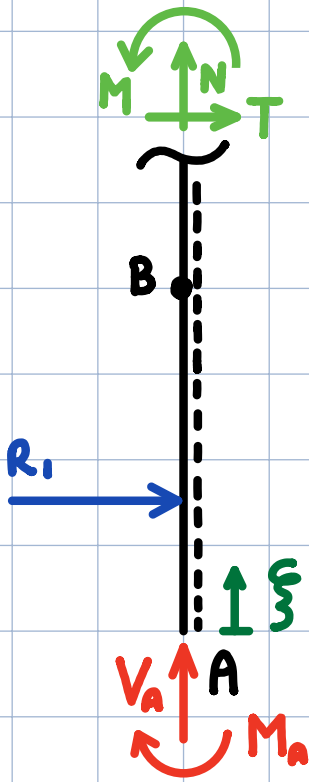
$$M_{AB} - M_0 = \int_0^{\xi} T(\xi) d\xi = \int_0^{\xi} \left[-5\xi + \frac{\xi^2}{16} \right] d\xi =$$
$$M_0 = M_A = -\frac{5\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{48}$$

$$M_{AB} = M_A - \frac{5\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{48}$$

Le espressioni sono identiche, solo che in questo caso il metodo differenziale si rivela estremamente più **RAPIDO**.

TRATTO BC

$$L_{AB} < \xi < L_{AB} + L_{BC}$$



$$N_{BC} = -V_A = -66.877 \text{ N}$$

$$T_{BC} = -R_1 = -100 \text{ N}$$

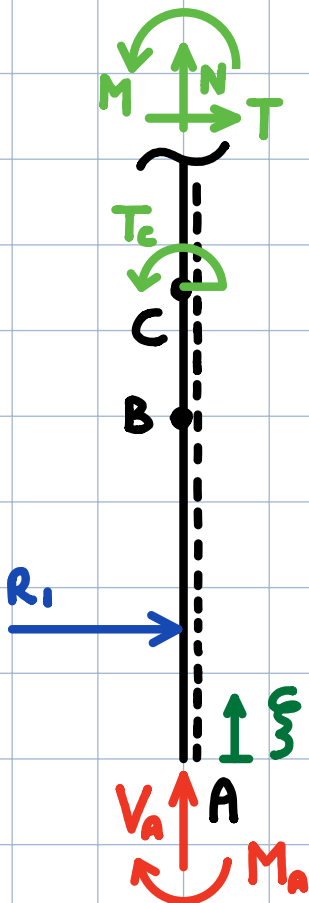
$$M_{BC} = M_A - R_1 \left(\xi - \frac{L_{AB}}{3} \right) = 75666.7 - 100 \left(\xi - \frac{40}{3} \right)$$

$$M_{BC}(L_{AB}) = 73000 \text{ Nmm}$$

$$M_{BC}(L_{AB} + L_{BC}) = 71500 \text{ Nmm}$$

TRATTO CD

$$L_{AB} + L_{BC} < \xi < L_{AD}$$



$$N_{CD} = -V_A = -66.877 \text{ N}$$

$$T_{CD} = -R_1 = -100 \text{ N}$$

$$M_{CD} = M_A - R_1 \left(\xi - \frac{L_{AB}}{3} \right) - T_C$$

$$M_{CD} = 75666.7 - 100 \left(\xi - \frac{40}{3} \right) - 70000$$

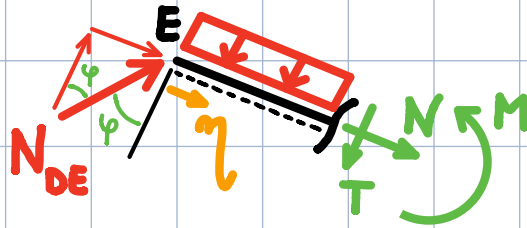
$$M_{CD}(L_{AB} + L_{BC}) = 1500 \text{ Nmm}$$

$$M_{CD}(L_{AD}) = \emptyset$$

TRAVE EG

TRATTO EF \rightarrow Devo studiarlo in due parti:
perch  oltre al carico distribuito   presente
la forza P in maniera

$$0 < \eta < \frac{L_{EF}}{2}$$



$$N'_{EF} = -N_{DE} \sin(\varphi) =$$
$$= -74.056 \text{ N}$$

$$T'_{EF} = N_{DE} \cos(\varphi) - q\eta$$

$$T'_{EF}(\emptyset) = 94.806 \text{ N}$$

$$T'_{EF}(L_{EF}/2) = 30.955 \text{ N}$$

$$T'_{EF} = \emptyset \text{ in } \eta = 31.602 \text{ mm} \rightarrow \text{fuori intervallo}$$

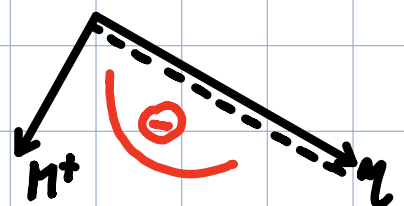
$$M'_{EF} = N_{DE} \cos(\varphi) \eta - \frac{q\eta^2}{2}$$

$$M'_{EF}(\emptyset) = \emptyset \quad M'_{EF}(L_{EF}/2) = 1338.33 \text{ Nmm}$$

$$\frac{dM'_{EF}}{d\eta} = N_{DE} \cos(\varphi) - 3\eta = \emptyset \text{ in } \eta = 31.602 \text{ mm}$$

(fuori int.)

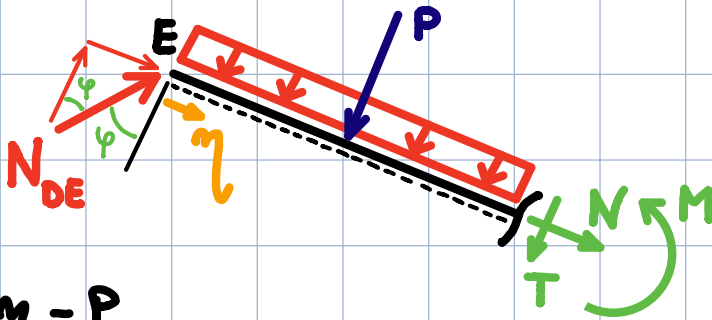
$$\frac{d^2M'_{EF}}{d\eta^2} = -3 < \emptyset \rightarrow \text{f. CONCAVA}$$



$$\frac{L_{EF}}{2} < \eta < L_{EF}$$

$$N_{EF}'' = -N_{DE} \sin(\varphi)$$

$$= -74.056 \text{ N}$$



$$T_{EF}'' = N_{DE} \cos(\varphi) - q\eta - P$$

$$T_{EF}''(L_{EF}/2) = -469.045 \text{ N} \quad T_{EF}''(L_{EF}) = -532.895 \text{ N}$$

$$T_{EF}'' = 0 \text{ in } \eta = -135.065 \text{ fuori int.}$$

$$M_{EF}'' = N_{DE} \cos(\varphi)\eta - q \frac{\eta^2}{2} - P \left(\eta - \frac{L_{EF}}{2} \right)$$

$$M_{EF}''(L_{EF}/2) = 1338.33 \text{ Nmm}$$

$$M_{EF}''(L_{EF}) = -9324.1 \text{ Nmm}$$

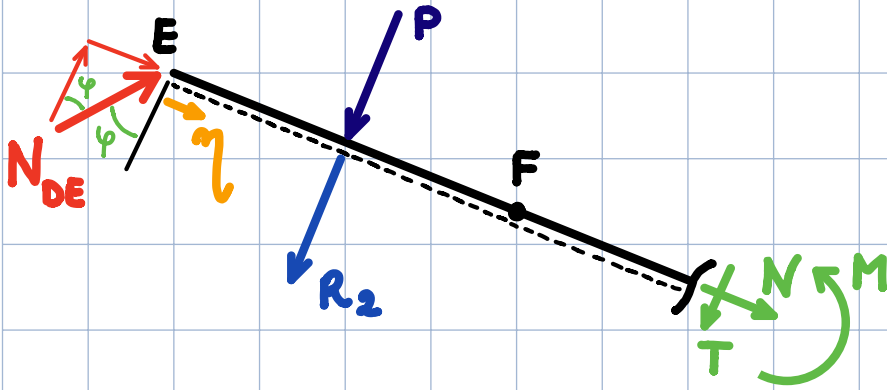
$$M_{EF}'' = 0 \text{ in } \eta = 24.111 \text{ mm}$$

$$\frac{dM_{EF}''}{d\eta} = N_{DE} \cos(\varphi) - P - 3q\eta$$

$$\frac{d^2 M_{EF}''}{d\eta^2} = -3 < 0 \rightarrow \text{f. CONCAVA}$$

NB: sia nelle pinnole che nelle ricorde metà del tratto EF il momento non è stazionario. È necessario tenere a mente questo fatto per il corretto tracciamento dei diagrammi.

TRATTO FG



$$L_{EF} < \eta < L_{EG}$$

$$N_{FG} = -N_{DE} \sin(\varphi) = -94.056 \text{ N}$$

$$T_{FG} = N_{DE} \cos(\varphi) - (P + R_2) = -532.895 \text{ N}$$

$$M_{FG} = N_{DE} \cos(\varphi) \eta - (P + R_2) \left(\eta - \frac{L_{EF}}{2} \right) = 13359.7 - 532.895 \eta$$

$$M_{FG}(L_{EF}) = -9324.1 \text{ Nm}$$

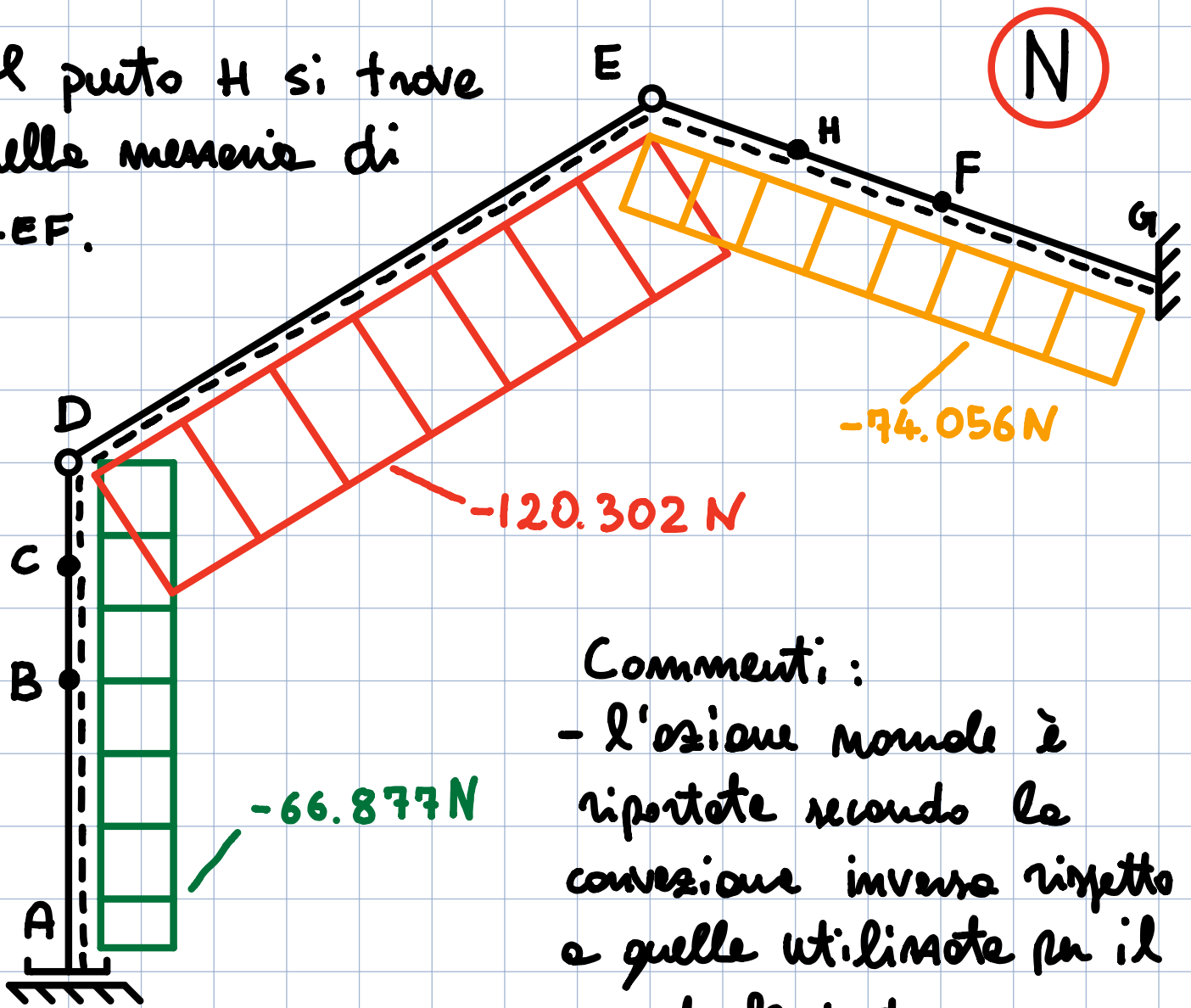
$$M_{FG}(L_{EG}) = -26337 \text{ Nm} \equiv M_G$$

È evidente che il momento non si annulla nell'intervallo FG in quanto ha lo stesso segno ai suoi estremi ed è definito da una funzione lineare.

Siano quindi pronti a tracciare i diagrammi delle azioni interne.

• Diagrammi delle azioni interne

Il punto H si trova
nella memoria di
LEF.

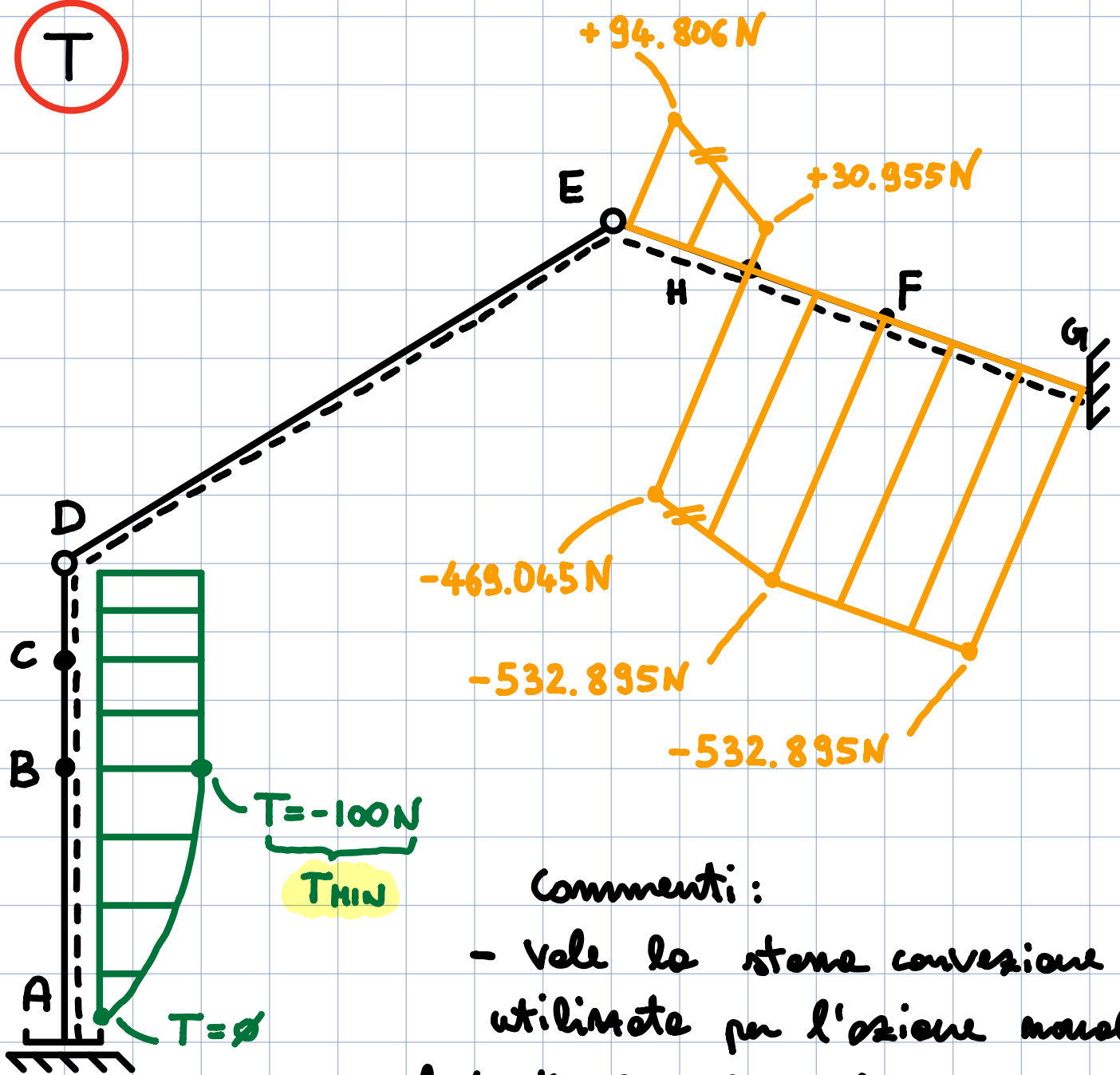


Commenti:

- l'azione normale è riportata secondo la convenzione inversa rispetto a quelle utilizzate per il metodo flettente.

- tutte le travi che compongono la struttura sono in uno stato di compressione.

T



Commenti:

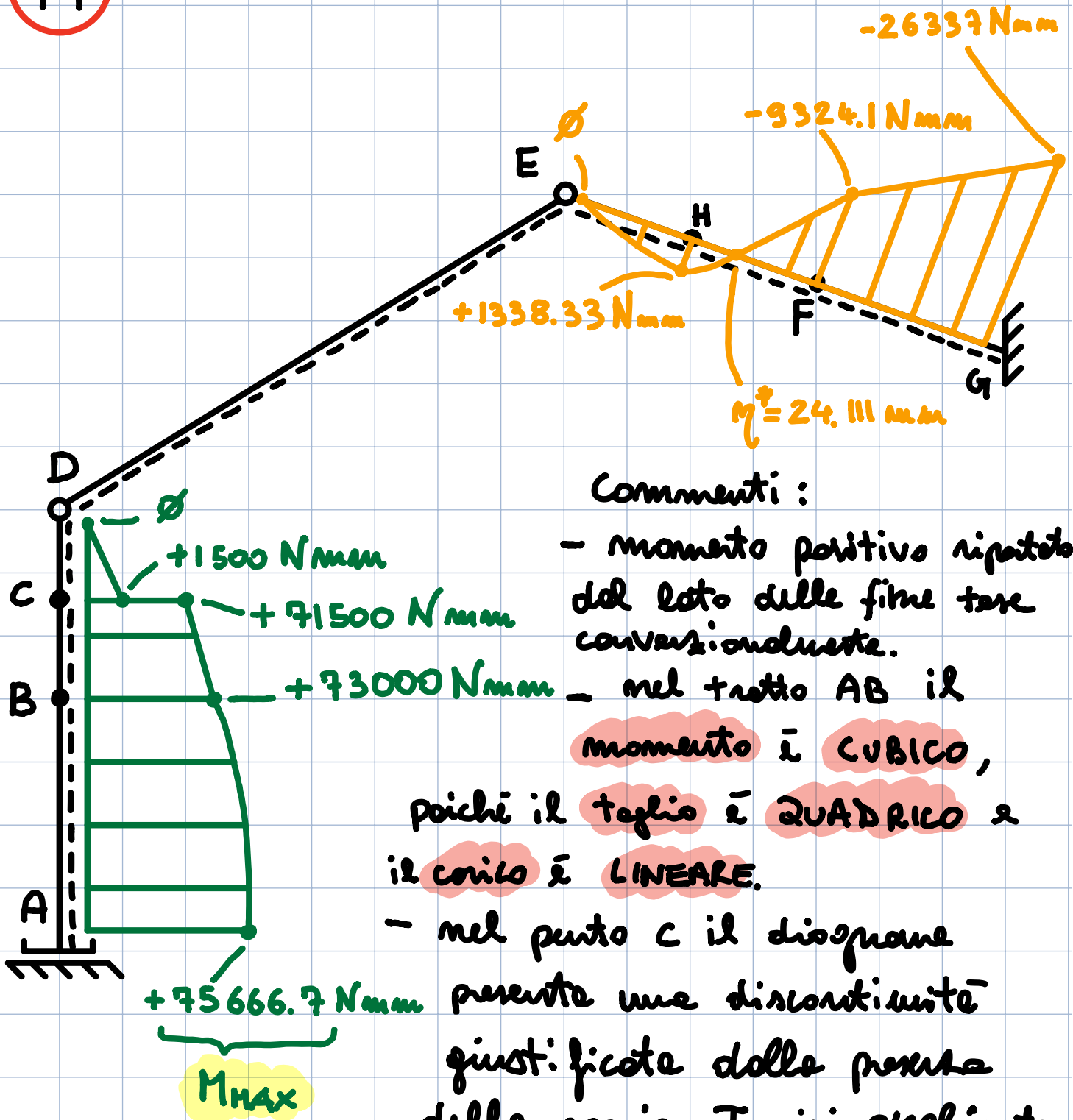
- Vale la stessa convenzione utilizzata per l'azione normale.

- nel tratto AB il taglio è una

QUADRILA, poiché il carico è di natura LINEARE.

- nel tratto EF il taglio è LINEARE poiché il carico distribuito è UNIFORME. È tuttavia presente una discontinuità in memoria di tale tratto, dovuta all'applicazione in questo punto del carico P. Difatti, la discontinuità è esattamente pari al valore assunto dal carico: $|-469.045| + |30.955| = 500 = P$

M



Commenti:

- momento positivo ripetuto dal lato delle fibre tese convassionduete.

- nel tratto AB il momento è CUBICO,

poiché il taglio è QUADRICO e il carico è LINEARE.

- nel punto C il diagramma presenta una discontinuità giustificata dalla presenza delle coppie T_c ivi applicate.

- nel tratto EH il momento è una QUADRICA e non ha punti di STAZIONARIETÀ in questo intervallo.

- nel tratto HF il momento è sempre una QUADRICA, non ha punti di STAZIONARIETÀ e si annulla in $M^* = 24.111 \text{ mm}$.

- nel tratto EF quindi il momento ha globalmente
la stessa **CONCAVITÀ**: è da notare che nel
punto H non si ha un **MINIMO LOCALE** per i
tratti EH e HF , pur rimanendo quest'ultimo
un **MINIMO GLOBALE** per l'intero tratto EF .

In definitiva il momento risulta essere
continuo (tranne in C dove è applicata una
coppia) e si annulla nelle cerniere D ed E .