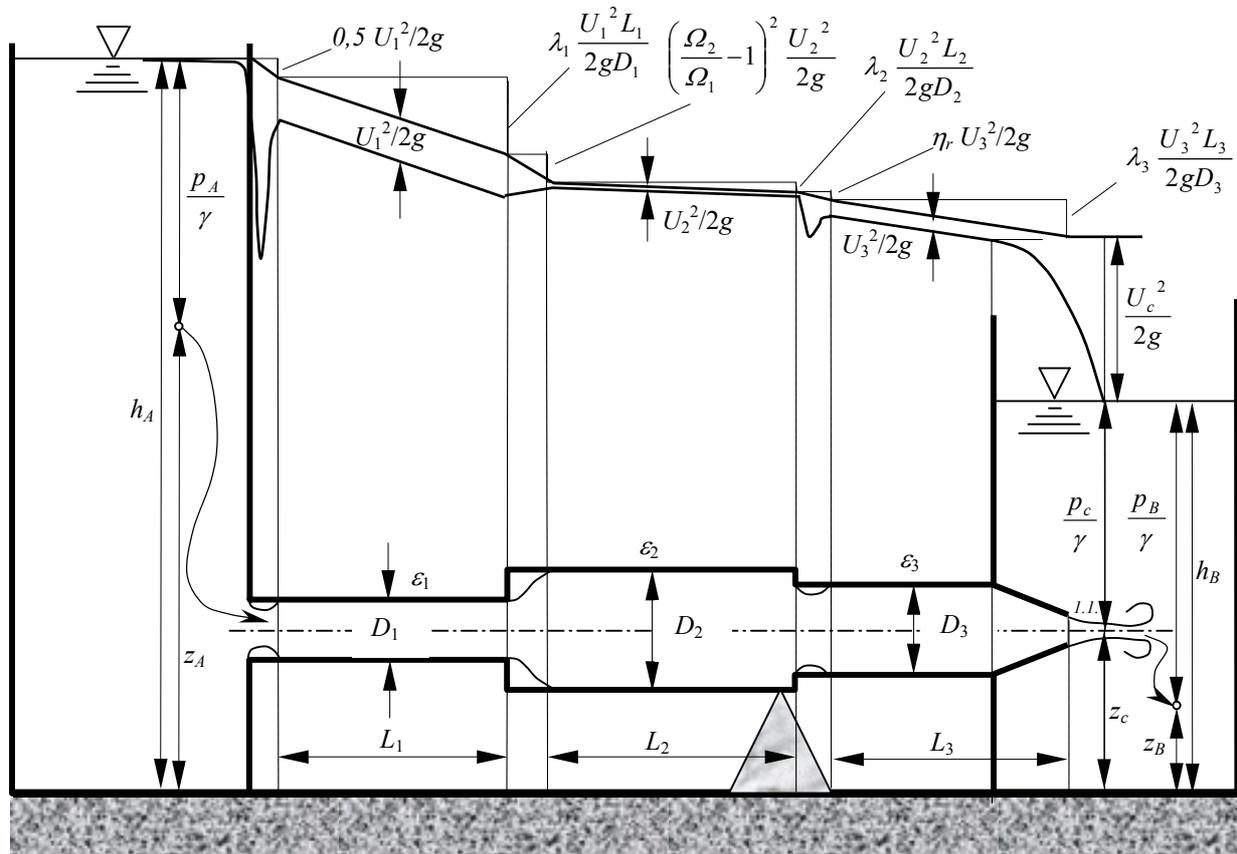


Andrea Balzano

# Dispense di IDRAULICA

per gli allievi ingegneri civili del nuovo ordinamento



Università degli Studi di Cagliari  
Facoltà di Ingegneria  
Dipartimento di Ingegneria del Territorio

Gennaio 2009



*Gli esercizi di Idraulica sono semplicissimi: bisogna usare sempre l'equazione del moto e l'equazione di continuità.*

G. R. Asproni

*Gli esami non finiscono mai.*

E. De Filippo



## ***Prefazione alla prima edizione***

Queste dispense raccolgono in forma ordinata i contenuti delle lezioni del corso semestrale di Idraulica per allievi ingegneri edili-architetti ed ingegneri edili specialisti della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Cagliari, costituente il primo modulo del Corso Integrato di Idraulica e Costruzioni Idrauliche.

La disponibilità di dispense viene generalmente sempre accolta con favore dagli studenti di corsi universitari, sia perché costituiscono un preciso riscontro delle lezioni che consente di alleggerire notevolmente l'attività di amanuensi cui essi devono altrimenti dedicarsi, a discapito della stessa comprensione verbale del docente e della possibilità di interagire con esso con richieste di chiarimenti – in parole povere: perdendo un po' il filo del discorso; sia perché talora il docente presenta alcuni argomenti in forma che ritiene preferibile, magari solo da un punto di vista puramente didattico, rispetto a quanto reperibile nei libri di testo indicati per lo studio della materia e la preparazione dell'esame; sia perché, più banalmente, lo studente tende naturalmente a guardare con certa simpatia alle dimensioni generalmente ridotte delle dispense rispetto a quelle dei testi indicati, magari con l'intento di omettere senz'altro la consultazione di questi ultimi.

Sebbene l'autore non abbia la minima pretesa che queste dispense, come tutte le dispense, possano essere assimilabili, per completezza ed organicità, ai libri di testo in passato adottati per i corsi annuali, egli è stato tuttavia indotto a redigerle affinché possano costituire il riferimento principale degli allievi per la preparazione dell'esame, in considerazione della scarsità di testi attagliati alle esigenze della didattica nel nuovo ordinamento degli studi: in particolare, per quanto riguarda lo specifico corso cui sono destinate, all'insegnamento dell'Idraulica in 50 ore comprensive di lezioni ed esercitazioni ed alla necessità di completare la preparazione dell'esame in tempi tali da consentire allo studente di sostenerlo nella sessione immediatamente successiva al termine del corso. I più completi libri di testo disponibili vengono comunque indicati per maggiori chiarimenti od approfondimenti: oltre ai testi di Cenedese, Citrini-Nosedà e Marchi-Rubatta, anche le dispense del Prof. C.A. Fassò, di cui in molti, da studenti, abbiamo apprezzato il carattere esauriente e rigoroso e la dovizia di puntualizzazioni ed esempi.

Le premesse della recente riforma universitaria indicavano, particolarmente per quanto riguarda le facoltà tecniche come Ingegneria, l'obiettivo di coniugare una maggiore preparazione pratico-professionale dei neolaureati con la solida formazione culturale tradizionalmente fornita, almeno in senso tecnico, da tale Facoltà, nonché con un accorciamento sensibile dei tempi necessari al conseguimento della laurea. Ora, anche a voler veramente porre mano ai tanti difetti dell'università italiana, rendendola simile, per esempio, alle celebrate università anglosassoni, con la laurea di primo livello non si potrebbe che produrre quel che si sa bene essere il laureato di primo livello statunitense o britannico: un tecnico dotato di abilità alquanto limitate, inclusive magari di addestramento intensivo all'uso di software per l'esecuzione di compiti specifici, privo di una solida cultura ingegneristica ad ampio spettro, il cui lavoro deve essere necessariamente coordinato da tecnici di formazione superiore – fra l'altro, nel contesto di una organizzazione del lavoro professionale più marcatamente industriale di quanto non avvenga, di norma, in Italia.

Rinunciando quindi al conseguimento dei mirabili obiettivi della riforma, perché impossibili da conseguire a parere dell'autore, e non essendo concepibile che uno studente che supera l'esame di Idraulica non possieda una sufficiente abilità nella soluzione dei principali problemi di tipo applicativo, necessitando a tale scopo di adeguata attività esercitativa, seppure a malincuore ci si vede costretti a limitare i contenuti culturali del corso, riducendo le trattazioni teoriche a ciò che è veramente essenziale per la comprensione dei concetti fondamentali, ma soprattutto – aspetto che l'autore non si stanca mai di portare all'attenzione degli studenti e che viene evidenziato, ove occorra, anche in queste dispense – per la stessa corretta applicazione dei metodi pratici.

Seppure conservando, rispetto agli anni passati, l'uso della notazione per componenti con la convenzione di Einstein a vantaggio della sintesi, a partire dall'A.A. 2005-2006 si abbandonerà il procedimento di deduzione delle equazioni in forma locale dalle forme globali lagrangiane, seguendo invece il procedimento inverso, basato sulla formulazione delle leggi della meccanica per volumi elementari, per i quali risulta generalmente più chiaro il significato fisico delle operazioni che vengono condotte – particolarmente nel caso degli studenti del ramo Edile, che non sostengono durante il loro corso di studi un esame di Meccanica Razionale.

In considerazione del tempo limitato a disposizione del docente, alcuni (pochi) concetti vengono illustrati dichiaratamente per via euristica, peraltro sempre con indicazione dei riferimenti a trattazioni più complete. Talvolta, si rinuncia invece alla sintesi per qualche maggiore puntualizzazione che, sebbene possa apparire superflua, perché scontata, e perciò inopportuna nell'ambito di un libro di testo, tale non risulta dalla esperienza pratica dell'autore. Il tutto, sperabilmente, senza rinunciare ad un sostanziale rigore scientifico generale della trattazione.

A proposito dei riferimenti bibliografici indicati per maggiori chiarimenti ed approfondimenti, si richiama l'attenzione dello studente sulla necessità di verificare accuratamente, allorché consultasse uno di tali testi, anche le convenzioni ivi adottate, confrontandole con quelle utilizzate nel corso e rendendosi così conto del motivo di eventuali differenze nelle formule cui si perviene nei vari casi. Le differenze più rilevanti quanto alle convenzioni adottate nei testi indicati verranno comunque richiamate anche in queste dispense in note a piè di pagina.

Più in generale, si sconsiglia vivamente lo studente di convincersi di aver preparato un certo argomento del corso per il fatto di saper ripetere i vari passaggi riportati nelle dispense, qualora non sia in grado di spiegarne il significato – illustrato peraltro con maggiore profusione di dettagli nelle lezioni, che servono proprio a questo, e che si invita perciò caldamente a seguire – essendo in tal caso preferibile approfittare del ricevimento studenti. Tale eventualità potrà tuttavia essere più frequente il primo anno successivo alla stesura delle dispense, questa volta per colpa dell'autore, perché inevitabilmente le prime edizioni sono sempre affette da un certo numero di refusi, che l'autore prega quindi vivamente gli studenti di segnalargli, a più forte ragione insistendo sulla raccomandazione di non prendere per buona un'equazione solo "perché c'è scritto nelle dispense". Tutti i procedimenti seguiti hanno una precisa logica, che lo studente deve comprendere; eventuali eccezioni imposte dalla mancanza di tempo verranno esplicitamente segnalate nel testo.

Infine, sempre nell'intento di agevolare la preparazione dell'esame da parte dello studente, il primo capitolo delle dispense è dedicato, oltre che alla presentazione di alcune nozioni introduttive, al richiamo di tutte le nozioni preliminari necessarie allo studio della materia, che dovrebbero essere già (ben) note allo studente dai corsi precedenti. A tale proposito, ed anche sulla scorta della sconcertante verifica quotidiana della diffusa tendenza a sostenere gli esami in ordine esattamente inverso a quello dettato dal buon senso – peraltro facilmente eliminabile mediante sane propedeuticità obbligatorie, che però sono state incomprensibilmente abolite – si rimarca che tali richiami devono intendersi come tali, piuttosto che come un Bignami delle relative materie, le cui lezioni sono impartite, ovviamente, ben meglio che dall'autore, dai titolari dei relativi corsi, ed i cui esami si presume siano stati superati con successo dallo studente che si presenta all'esame di Idraulica. L'intento è unicamente quello di dotare lo studente di un riferimento che riduca al minimo la necessità di consultazione di altri testi, almeno per tali nozioni già acquisite, che vengono inoltre riproposte nel medesimo formalismo utilizzato nel resto delle dispense.

Affrontare la materia avendo chiari in mente i principi fondamentali della Fisica ne renderà più agevole lo studio. Rinunciare a consolidare, ove necessario, le nozioni di base per inseguire una data di esame a tutti i costi, produce in genere tempo perso e frustrazione nello studente.

La verifica della preparazione media in sede di esame consentirà di valutare l'efficacia di tale lavoro, magari per apportare successivamente – oltre alle inevitabili correzioni di refusi – qualche effettiva correzione di tiro. La pratica di sottoporre il corso al giudizio anonimo degli studenti consentirà inoltre all'autore di verificare il gradimento degli studenti anche per questo materiale didattico, del che anche verrà tenuto conto. Per quanto riguarda, però, eventuali rimostranze (già riscontrate in passato), del tipo "la materia è pesante" o "vorremmo terminare la lezione mezz'ora prima", oltre a ricordare l'aforisma di Albert Einstein: "*Things should be as simple as possible, but not simpler*" (perché altrimenti si perde il significato delle cose di cui si sta parlando), si può solo invitare lo studente a considerare attentamente che, sul fatto che l'acqua sia questa sostanza liquida (talora), viscosa, insidiosa e sfuggente, sede di moti talvolta laminari, più spesso turbolenti e caotici, o – come il noto comico R. Pozzetto diceva, in chiave surreale e stralunata, a proposito del mare – semovibile, il povero autore davvero non può farci niente!

Andrea Balzano

Cagliari, gennaio 2006

## ***Prefazione alla seconda edizione***

Questa seconda edizione delle dispense è stata predisposta per il corso di Idraulica 1 – prima parte – da impartire agli allievi ingegneri civili strutturisti del corso di laurea triennale ed agli allievi ingegneri civili specialisti in possesso del titolo di laurea triennale in ingegneria edile.

A prima vista, il corso sembrerebbe presentare alcuni seri inconvenienti, peraltro determinati da scelte assunte dagli organismi accademici competenti in anni passati, nei quali l'autore teneva un corso di Idraulica per un corso di studi differente da quello di Ingegneria Civile.

Il corso ha la durata di 60 ore per cinque crediti: dieci ore in più rispetto al corso per allievi ingegneri-architetti, per il quale era stata predisposta la prima stesura delle dispense, per gli stessi crediti del vecchio corso. Se qualcuno dice, come effettivamente dice di questi tempi, che il metodo dei crediti non va bene anche per il modo in cui esso viene applicato, non si fa certo fatica a credergli.

Lo studente potrà forse essere interessato al motivo di tale anomalia. Riferire qui, nei dettagli, il contenuto delle sedute degli organi accademici competenti sulle questioni didattiche, nelle quali l'autore ha posto il problema della corretta assegnazione di crediti al corso, sarebbe tuttavia fuori luogo – anche se forse piuttosto istruttivo. Ciò che l'autore si sente di affermare è che non vi è alcun motivo sensato, che risponda al concetto genuino di credito formativo quale misura dell'impegno richiesto allo studente per la preparazione dell'esame. D'altro canto, l'autore non ricorda di avere sentito, nelle medesime sedi istituzionali, interventi dei rappresentanti degli studenti a tale proposito, per cui si è sentito, in definitiva, privo di un valido motivo per insistere ulteriormente nelle sue rimostranze (anzi, sulla base del principio di rappresentanza democratica cui sono informati gli organi accademici, si dovrebbe proprio dire che la categoria degli studenti è soddisfatta così).

Il numero di crediti non sarebbe però il solo inconveniente. Nella prefazione alla prima edizione veniva fatto riferimento alla sciagurata scelta di eliminare le propedeuticità degli esami. Si è riusciti a fare di meglio: si è abolita la propedeuticità della docenza, includendo nello stesso semestre i corsi di Meccanica Razionale, Scienza delle Costruzioni e Idraulica. L'autore confessa di non aver realizzato tale situazione tempestivamente, ma la cosa non fa alcuna differenza: il manifesto non sarebbe stato modificabile se non con larghissimo anticipo sull'inizio del corso, in tempi nei quali questo non era ancora stato attribuito all'autore, né l'operazione sarebbe potuta essere comunque realisticamente fattibile, non essendovi scadenze di legge o interessi specifici in gioco che potessero motivare gli organismi competenti a farsi carico del problema. D'altro canto, l'autore ritiene decisamente al di là delle sue capacità impartire l'insegnamento dell'Idraulica senza fare uso delle nozioni fondamentali delle due materie menzionate.

Il lettore si domanderà, a questo punto, il perché del condizionale riferito ai difetti del corso. Il motivo è semplice: gli inconvenienti esistono, ma si sono elisi vicendevolmente, o quasi. Infatti, la necessità di fornire in continuazione spiegazioni su concetti che gli studenti non possedevano, in quanto sarebbero stati impartiti loro in tempi successivi ed in altri corsi (principalmente i due richiamati in precedenza), ha determinato, oltre ad una certa frammentarietà del corso, una notevole perdita di tempo. Come conseguenza, il programma svolto in 60 ore ha superato in misura molto meno che proporzionale quello svolto, nei corsi di Idraulica tenuti dall'autore in anni precedenti, in sole 50 ore. Un animo sofista potrebbe quindi argomentare che 5 crediti si siano rivelati, a posteriori, proporzionati all'impegno richiesto allo studente, in quanto proporzionati all'estensione del programma svolto.

Naturalmente, gli studenti potranno obiettare di aver dovuto perdere dieci ore inutilmente, di 60 passate ad ascoltare discorsi non sempre comprensibili (a parte i limiti dell'autore come didatta), perché riferiti a concetti di cui essi erano, per i motivi detti in precedenza, sprovvisti. Di più, e non senza ragione a rigor di logica, potrebbero sostenere che, essendo state impegnate 60 ore di lezione del carico totale di lavoro corrispondente a 5 crediti, la parte rimanente di lavoro da svolgere per lo studio della materia dovrebbe essere inferiore a quella prevista per il vecchio corso di 50 ore per gli stessi 5 crediti, se si vuole che il carico totale rimanga invariato – il che dovrebbe comportare, logicamente, una *riduzione* dei contenuti del nuovo corso rispetto al vecchio. Il tutto, senza voler considerare la difficoltà della materia, oggettiva e ben nota, della quale peraltro l'autore non si bea affatto. Ma tutte queste considerazioni, in fin dei conti, non hanno alcuna importanza. Gli interessi

degli studenti sono un ottimo argomento, da usare all'occorrenza, quando essi coincidono con gli interessi del docente che se ne fa portatore – aumentando, oltretutto, di molto l'eleganza dell'eloquio, perché trasudante disinteresse. Ciò che conta è che la forma sia salva, perché la forma è ciò che conta veramente, in generale, in questa nostra Università italiana (con o senza l'On. Gelmini, o l'On. Berlinguer, al ministero).

Tant'è. Perciò, a maggior ragione e, questa volta, fuori da ogni ironia, l'autore si sente di concludere raccomandando vivamente agli studenti di procedere allo studio dell'Idraulica soltanto una volta sostenuti con successo gli esami di Meccanica Razionale e Scienza delle Costruzioni, o, quanto meno, avendo proceduto allo studio ed alla assimilazione di tali due materie.

Andrea Balzano

Cagliari, gennaio 2009

## INDICE

1. RICHIAMI DI NOZIONI NOTE ED ALTRE NOZIONI INTRODUTTIVE.....	1
1.1 Richiami di Analisi Matematica.....	1
1.1.1 Funzioni di una variabile. Derivate, differenziali e sviluppi in serie. ....	1
1.1.2 Integrazione di funzioni di una variabile.....	3
1.1.3 Equazioni differenziali ordinarie.....	4
1.1.4 Funzioni di più variabili. Derivate, differenziali e sviluppi in serie.....	5
1.1.5 Integrazione di funzioni di più variabili.....	7
1.2 Richiami di Analisi Vettoriale e Tensoriale.....	8
1.2.1 Generalità.....	8
1.2.2 Operazioni fra vettori.....	9
1.2.3 Tensori.....	13
1.2.4 Campi scalari, vettoriali e tensoriali. Operatori differenziali.....	15
1.3 Richiami di Meccanica.....	18
1.3.1 Misura delle grandezze fisiche.....	18
1.3.2 Schematizzazione dello spazio fisico nella Meccanica Newtoniana. Il punto materiale	21
1.3.3 Cinematica.....	22
1.3.4 Statica.....	23
1.3.5 Dinamica.....	29
2. PROPRIETÀ FISICHE DEI FLUIDI.....	37
2.1 Schema di mezzo continuo.....	37
2.2 Definizione di fluido.....	38
2.3 Sforzi nei fluidi. Forze di superficie.....	41
2.4 Densità e peso specifico. Forze di volume.....	43
2.5 Viscosità.....	45
2.5.1 Fluidi newtoniani.....	46
2.5.2 Fluidi non newtoniani.....	47
2.6 Tensione superficiale.....	49
2.7 Tensione di vapore.....	50
2.8 Comprimibilità.....	51
2.9 Assorbimento dei gas nei liquidi.....	52
3. IDROSTATICA.....	55
3.1 Introduzione.....	55
3.2 Stato di sforzo in un punto.....	55
3.3 Equazione indefinita dell'idrostatica.....	57
3.4 Equazione globale dell'idrostatica.....	59
3.5 Fluidi pesanti, isotermi, omogenei e incompressibili. Legge di Stevin.....	61
3.6 Principio di Pascal.....	64
3.7 Fluidi non miscibili sovrapposti.....	66
3.8 Aeriformi.....	67
3.9 Strumenti di misura della pressione.....	67
3.10 Spinte su superfici.....	73

3.10.1 Spinte su superfici piane. ....	73
3.10.2 Spinte su superfici di forma qualunque. ....	78
4. IDROCINEMATICA. ....	91
4.1 Generalità. ....	91
4.2 Campi di velocità e traiettorie. ....	91
4.3 Punti di vista Euleriano e Lagrangiano. ....	93
4.4 Cenni all'analisi del campo di moto nell'intorno di un punto. ....	95
4.5 Classificazione dei moti. ....	96
4.6 Linee di corrente e linee di fumo. ....	97
4.7 Flussi attraverso superfici. ....	99
4.8 Principio di conservazione della massa. Equazioni di continuità. ....	101
4.8.1 Equazione di continuità in forma locale. ....	102
4.8.2 Equazione di continuità in forma globale. ....	104
5. EQUAZIONI FONDAMENTALI DELLA DINAMICA DEI FLUIDI. ....	105
5.1 Generalità. ....	105
5.2 Stato di sforzo in un punto. Teorema di Cauchy. ....	106
5.3 Simmetria del tensore degli sforzi. ....	109
5.4 Equazione indefinita del moto. ....	111
5.5 Legge costitutiva dei fluidi newtoniani. ....	112
5.6 Equazione di Navier-Stokes. ....	116
5.7 Equazione globale del moto. ....	118
5.7.1 Forma generale. ....	118
5.7.2 Forma per un fluido viscoso. ....	119
5.8 Analisi locale del moto di una particella lungo la sua traiettoria. ....	120
5.8.1 Distribuzione della quota piezometrica nel piano normale alla traiettoria. ....	122
5.8.2 Teorema di Bernoulli. ....	122
5.9 Turbolenza. ....	125
5.9.1 Evidenze sperimentali. ....	125
5.9.2 Analisi statistica della turbolenza. ....	127
5.9.3 Equazioni per le quantità medie. ....	130
5.9.4 Significato fisico del numero di Reynolds. ....	132
6. CORRENTI FLUIDE. ....	135
6.1 Definizioni. ....	135
6.2 Equazione di continuità per le correnti. ....	136
6.3 Potenza di una corrente in una sezione. ....	138
6.4 Estensione del Teorema di Bernoulli alle correnti. ....	140
6.5 Strumenti di misura della portata. ....	143
7. CORRENTI IN PRESSIONE. ....	147
7.1 Generalità. ....	147
7.2 Moto uniforme nelle condotte in pressione. ....	148
7.3 Leggi di resistenza al moto uniforme. ....	152
7.3.1 Formula di Darcy-Weisbach. ....	152
7.3.2 Formule pratiche. ....	157

7.4 Perdite distribuite nel moto stazionario non uniforme .....	160
7.5 Perdite di carico localizzate.....	160
7.5.1 Perdita di Borda o per brusco allargamento .....	161
7.5.2 Perdita di imbocco.....	164
7.5.3 Perdita per brusco restringimento .....	166
7.5.4 Perdite in tronchi divergenti (Figura 84).....	167
7.5.5 Perdite nelle curve (Figura 85).....	167
7.6 Progetto e verifica delle condotte in pressione.....	168
7.7 Lunghe condotte.....	173
7.7.1 Generalità.....	173
7.7.2 Progetto e verifica di una condotta congiungente due serbatoi.....	175
7.7.3 Verifica di una rete di lunghe condotte con un nodo interno .....	177
8. MACCHINE IDRAULICHE .....	181
8.1 Definizioni.....	181
8.2 Determinazione del punto di funzionamento di una pompa.....	183
8.3 Verifica delle massime depressioni in un impianto di pompaggio.....	186
8.4 Calcolo della portata massima convogliabile da una pompa.....	189
8.5 Cenni ai criteri di progettazione degli impianti di pompaggio.....	189
9. CORRENTI A SUPERFICIE LIBERA .....	191
9.1 Generalità .....	191
9.2 Moto uniforme .....	192
9.3 Caratteristiche energetiche della corrente in una sezione. Stato critico .....	197
9.4 Caratteristiche cinematiche delle correnti a pelo libero .....	200
9.4.1 Propagazione delle perturbazioni.....	200
9.4.2 Classificazione delle correnti .....	201
9.4.3 Classificazione degli alvei.....	201
9.5 Profili di moto permanente.....	203
9.5.1 Equazione differenziale dei profili di moto permanente .....	203
9.5.2 Profili di moto permanente in alvei prismatici.....	204
9.5.3 Alvei a debole pendenza .....	206
9.5.4 Alvei a forte pendenza.....	209
9.5.5 Alvei declivi a pendenza critica .....	210
9.5.6 Alvei a pendenza nulla ed alvei acclivi.....	212
9.6 Tracciamento dei profili di moto permanente .....	214
9.6.1 Generalità .....	214
9.6.2 Cause perturbatrici e condizioni al contorno.....	214
9.6.3 Sezioni di controllo. Transizione spontanea per lo stato critico.....	216
9.6.4 Condizioni al contorno in alvei terminali.....	218
9.7 Risalto idraulico .....	221
9.7.1 Descrizione fenomenologica e criterio per la localizzazione del risalto .....	221
9.7.2 Profondità a monte o a valle del risalto nota a priori .....	223
9.7.3 Profondità coniugate entrambe incognite.....	225
10. FORONOMIA.....	227

10.1 Generalità .....	227
10.2 Efflusso da luce di fondo in parete sottile .....	227
10.3 Efflusso da luce in parete sottile verticale.....	229
10.4 Efflusso da luce in parete sottile rigurgitata.....	231
10.5 Efflusso da una paratoia piana verticale in parete sottile .....	233
10.6 Stramazzo in parete sottile .....	235
10.7 Stramazzo a larga soglia.....	236

## CAPITOLO PRIMO

### 1. RICHIAMI DI NOZIONI NOTE ED ALTRE NOZIONI INTRODUTTIVE

#### 1.1 Richiami di Analisi Matematica

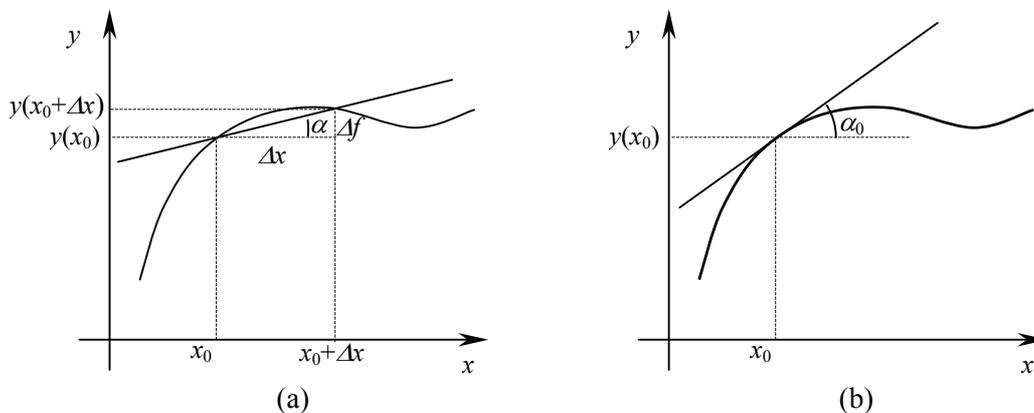
##### 1.1.1 Funzioni di una variabile. Derivate, differenziali e sviluppi in serie.

Una funzione di una variabile,  $f(x)$ , si dice derivabile nel punto  $x_0$  se esiste, finito, il seguente limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0). \quad (1)$$

Tale limite è la *derivata* della funzione  $f$  nel punto  $x_0, f'(x_0)$ . Con riferimento allo schema di Figura 1a, detta  $y$  la variabile dipendente definita dalla funzione  $f, y = f(x)$ , il valore del rapporto incrementale rappresenta la tangente trigonometrica dell'angolo  $\alpha$  che la retta passante per i punti  $(x_0, y(x_0))$  e  $(x, y(x))$ , con  $x = x_0 + \Delta x$ , forma rispetto all'asse delle ascisse. Nel passaggio al limite, la retta tende alla tangente nel punto  $x_0$  alla curva rappresentativa della funzione  $f(x)$  e gli incrementi delle variabili indipendente e dipendente,  $\Delta x$  e  $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$ , tendono a zero e risultano perciò quantità infinitesime denominate *differenziali*, indicati con  $dx$  e  $df$  (o  $dy$ ) rispettivamente. La derivata viene pertanto indicata anche con la notazione simbolica (ma espressiva del significato dell'operazione)  $df/dx$  o  $dy/dx$ . Conseguisce immediatamente dall'esistenza del limite (1) che la funzione debba essere *continua* nel punto  $x_0$  (condizione necessaria per la derivabilità):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$



**Figura 1. Rappresentazione grafica del significato geometrico (a) del rapporto incrementale e (b) della derivata di una funzione di una variabile.**

Dalla (1) consegue anche che una funzione derivabile in un punto  $x_0$  può essere espressa in un intorno sufficientemente ristretto di tale punto come:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x - x_0) \cong f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad (2)$$

in cui  $\varepsilon$  è l'errore dell'approssimazione espressa dal terzo membro della (2), infinitesimo per  $x$  tendente ad  $x_0$ . Il differenziale della funzione nel punto  $x_0$  può quindi esprimersi come:

$$df = f'(x_0)dx \quad (3)$$

Sulla base della (1) si definiscono la derivata seconda:

$$f''(x_0) = \frac{d(f')}{dx} = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

e, in generale, le derivate di ordine  $n$ :

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left( \frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} \right).$$

Sulla base del significato della derivata prima di una funzione, un valore positivo della derivata prima significa che la funzione è crescente. Inoltre, poiché la derivata seconda è la derivata della derivata prima, un valore positivo della derivata seconda denota una derivata prima crescente (la rappresentazione grafica della funzione ha la concavità rivolta verso l'alto); un valore negativo una derivata prima decrescente (concavità rivolta verso il basso).

Vari teoremi dell'Analisi presuppongono la continuità di una funzione e delle sue derivate fino ad un determinato ordine. Salvo differente indicazione, di volta in volta si assumeranno sempre soddisfatte tali condizioni, pur senza darne una dettagliata descrizione. Volendo evitare tali dettagliate specificazioni, funzioni di questo tipo vengono genericamente definite *regolari*.

Una funzione regolare può essere espressa mediante uno sviluppo in serie attorno ad un punto  $x_0$  del tipo (*serie di Taylor*):

$$f(x) = f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} (x-x_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=x_0} (x-x_0)^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{x=x_0} (x-x_0)^3 + \dots =$$

$$f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x=x_0} (x-x_0)^n \quad , \quad (4)$$

che, in un intorno del punto  $x_0$  sufficientemente ristretto, può essere approssimato dalla (2). Si parla allora di sviluppo in serie di Taylor arrestato al primo ordine; per  $x \rightarrow x_0$  la corrispondente variazione della funzione è il suo differenziale, espresso dalla (3), e l'errore  $\varepsilon$  di cui alla espressione (2) è dato dal resto della serie di Taylor che si ottiene sommando i termini di ordine  $n \geq 2$  della (4).

Un operatore  $\Phi$  definito su un dominio di una variabile  $w$  si dice *lineare* se, dati due valori qualunque della variabile,  $w_1$  e  $w_2$ , e una costante  $c$ , si ha:

$$\Phi(w_1 + w_2) = \Phi(w_1) + \Phi(w_2)$$

$$\Phi(cw) = c\Phi(w) \quad (5)$$

La derivata è un operatore lineare. Date due funzioni regolari,  $f$  e  $g$ , e una costante  $c$ , si ha infatti:

$$\frac{d(f+g)}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} \quad (6)$$

$$\frac{d(cf)}{dx} = c \frac{df}{dx} \quad (7)$$

Sono operatori lineari le derivate di qualunque ordine.

Inoltre, valgono le seguenti regole per l'esecuzione delle derivate del prodotto di due funzioni:

$$\frac{d(f \cdot g)}{dx} = g \frac{df}{dx} + f \frac{dg}{dx} \quad (8)$$

del rapporto di due funzioni, deducibile dalla (8):

$$\frac{d(f/g)}{dx} = \frac{g(df/dx) - f(dg/dx)}{g^2}$$

e di una funzione di funzione:

$$\frac{df[g(x)]}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} \quad (9)$$

Si omettono le espressioni delle derivate delle funzioni più comuni, per le quali si rimanda ai testi di Analisi. A titolo di esempio, si illustra il calcolo della derivata della funzione di funzione  $z=1/y=y^{-1}$ , con  $y=cx$ , dove  $c$  è una costante. Ricordando che, data la funzione  $z=f(y)=y^n$ , si ha  $z'=ny^{n-1}$ , mentre  $y'=c$ , per la funzione  $z(y(x))$  si ha pertanto:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{y} \right) = \frac{dy^{-1}}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{cx} \right) = \frac{d(cx)^{-1}}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = [(-1) \cdot y^{-2}] \cdot c = -\frac{c}{(cx)^2} = -\frac{1}{cx^2} \quad (10)$$

L'esempio (10) mostra che le sole regole (8) e (9) possono essere utilizzate per l'esecuzione della derivata sia del prodotto che del rapporto di due funzioni. In generale, sulla base di tali regole, può essere eseguita la derivazione di una funzione quantunque complessa.

### 1.1.2 Integrazione di funzioni di una variabile.

Una funzione di una variabile,  $f(x)$ , raffigurata in Figura 2, si dice *integrabile* nell'intervallo  $[a, b]$ , dove  $a$  e  $b$  sono due numeri fissi assegnati, se esiste, finito, il seguente limite (*integrale definito*):

$$\int_a^b f(\xi) d\xi = \lim_{\max\{\delta_i\} \rightarrow 0} \sum_i f(\xi_i) \delta_i \quad (11)$$

in cui  $\xi_i$  è un qualunque valore della variabile  $x$  interno al generico intervallo  $\delta_i$  e la quantità  $f(\xi_i)\delta_i$  rappresenta l'area della superficie rettangolare campita in tratteggio. L'integrale definito (11) rappresenta pertanto l'area sottesa fra la curva  $y=f(x)$  e l'asse delle ascisse nell'intervallo  $[a, b]$  (*dominio di integrazione*), campita uniformemente in Figura 2a.

Il valore numerico dell'integrale definito è dato da:

$$\int_a^b f(\xi) d\xi = [\Theta(x)]_a^b = \Theta(b) - \Theta(a) \quad ,$$

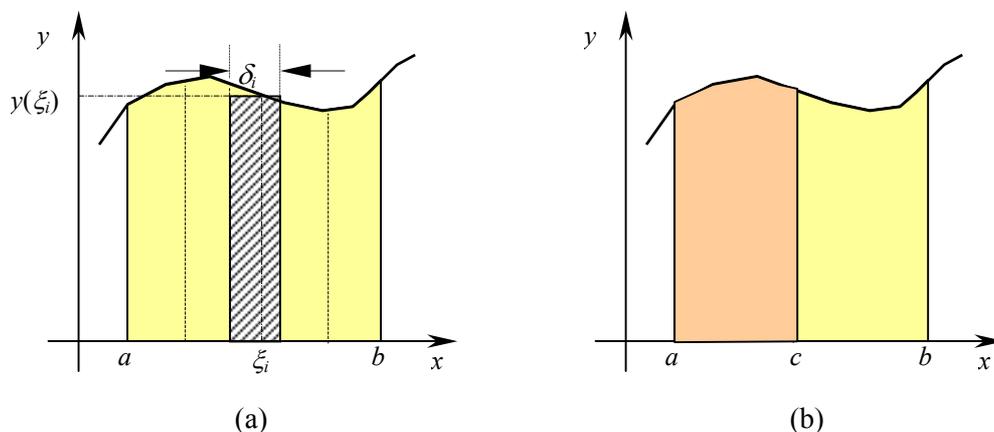


Figura 2. Rappresentazione grafica (a) della definizione di integrale definito e (b) della proprietà additiva dell'operatore.

in cui  $\Theta(x)$  è una *funzione primitiva* di  $f(x)$ , tale cioè che  $f(x) = d\Theta(x)/dx$ .

Data una funzione primitiva, sono tali anche tutte le funzioni che differiscono da essa per una costante. Tutte le primitive di una funzione  $f$  sono quindi date da:

$$F(x) + c = \int f(\xi) d\xi ,$$

detto *integrale indefinito* della funzione  $f$ , in cui  $F(x)$  è la *funzione integrale* di  $f$  rispetto al punto  $x_0$ :

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi , \quad (12)$$

in cui  $x_0$  si intende fisso ed  $x$  variabile. La derivata di una funzione integrale del tipo (12) è pertanto pari alla funzione integranda valutata in  $x$ ,  $f(x)$ :

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

Sebbene l'operazione di integrazione risulti, generalmente, di meno agevole esecuzione rispetto all'operazione di derivazione, le condizioni per l'integrabilità di una funzione (cioè, per l'esistenza del limite (11)) sono *meno restrittive* di quelle per la sua derivabilità, non essendo richiesta, in particolare, la continuità della funzione.

L'integrale è un operatore lineare. Date due funzioni integrabili,  $f$  e  $g$ , ed una costante  $c$ , si ha infatti:

$$\int_a^b [f(\xi) + g(\xi)] d\xi = \int_a^b f(\xi) d\xi + \int_a^b g(\xi) d\xi , \quad (13)$$

$$\int_a^b cf(\xi) d\xi = c \int_a^b f(\xi) d\xi .$$

L'integrale gode della *proprietà additiva*, secondo la quale, dato un valore  $x=c$  appartenente all'intervallo  $[a, b]$ , si ha (vedi Figura 2b):

$$\int_a^b f(\xi) d\xi = \int_a^c f(\xi) d\xi + \int_c^b f(\xi) d\xi . \quad (14)$$

Inoltre, si ha:

$$\int_a^b f(\xi) d\xi = - \int_b^a f(\xi) d\xi \quad (15)$$

### 1.1.3 Equazioni differenziali ordinarie

Si definisce *equazione differenziale ordinaria di ordine  $n$*  una equazione contenente una funzione incognita  $y(x)$  e sue derivate di ordine massimo  $n$ , del tipo:

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Le soluzioni (dette anche *integrali*) di una equazione differenziale di ordine  $n$  dipendono da  $n$  *costanti di integrazione* arbitrarie, determinabili mediante idonee *condizioni al contorno*. Il tipo più semplice di equazioni differenziali ordinarie, che è anche l'unico cui verrà qui fatto riferimento, è del primo ordine a *variabili separabili*, nella forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{w(y)}. \quad (16)$$

Tale equazione viene risolta determinando gli integrali indefiniti ottenibili, per l'appunto, separando le variabili fra primo e secondo membro:

$$\int g(\xi)d\xi = \int w(\eta)d\eta .$$

Essendo gli integrali indefiniti determinati a meno di una costante, la soluzione dello specifico problema in oggetto rappresentato dalla (16) si ottiene imponendo una idonea condizione al contorno, anch'essa espressiva del particolare problema in esame, atta a determinare il valore della costante di integrazione.

#### 1.1.4 Funzioni di più variabili. Derivate, differenziali e sviluppi in serie.

Si dice *derivata parziale* di una funzione di  $n$  variabili,  $f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{n-1}, x_n)$ , rispetto alla variabile  $x_i$  la derivata *ordinaria* – ossia, del tipo (1) – della funzione dell'unica variabile  $x_i$  che si ottiene per valori costanti delle variabili rimanenti:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{1_0}, \dots, x_{i-1_0}, x_i, x_{i+1_0}, \dots, x_{n_0}) = \lim_{x_i \rightarrow x_{i_0}} \frac{f(x_{1_0}, \dots, x_{i-1_0}, x_i, x_{i+1_0}, \dots, x_{n_0}) - f(x_{1_0}, \dots, x_{i-1_0}, x_{i_0}, x_{i+1_0}, \dots, x_{n_0})}{x_i - x_{i_0}}$$

Analogamente a quanto visto per il caso di una funzione di una variabile, sono definibili le derivate di ordine superiore, anche *miste*, risultanti cioè da derivazioni successive rispetto a variabili differenti, del tipo:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_i^{k_i} \dots \partial x_{n-1}^{k_{n-1}} \partial x_n^{k_n}} \quad (17)$$

con  $k_1 + k_2 + \dots + k_i + k_{n-1} + k_n = k$ .

Nel caso di funzioni di più variabili, l'attributo di regolarità riguarda la continuità delle derivate parziali fino all'ordine che interessa per il caso specifico. In generale, nello scrivere una derivata di ordine superiore di una funzione di più variabili, la sequenza dei differenziali delle variabili indipendenti che figura a denominatore dell'espressione formale della derivata deve riflettere precisamente l'ordine delle derivazioni successive; cambiando l'ordine di derivazione può infatti ottenersi un risultato differente. Nel caso di una funzione regolare, invece, non è rilevante l'ordine nel quale si effettuano le derivazioni successive, avendosi, ad esempio:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} ,$$

ed analoghe espressioni per le derivate di ordine superiore. La scrittura (17) costituisce pertanto una forma generale per le sole funzioni regolari.

Il *differenziale totale* di una funzione regolare  $f$  di  $n$  variabili corrispondente all'insieme degli  $n$  differenziali delle  $n$  variabili indipendenti,  $dx_1, dx_2, \dots, dx_i, \dots, dx_{n-1}, dx_n$ , è dato da:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} dx_{n-1} + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n . \quad (18)$$

Tale insieme di differenziali delle variabili indipendenti identifica uno spostamento lungo una direzione,  $s$ , e secondo un certo verso, nello spazio delle stesse variabili. La corrispondente *derivata direzionale* della funzione  $f$  nella direzione  $s$  è data da:

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} \frac{dx_{n-1}}{ds} + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{ds},$$

in cui  $ds$  rappresenta lo spostamento nella direzione identificata dalle componenti lungo gli assi coordinati,  $dx_1, dx_2, \dots, dx_i, \dots, dx_{n-1}, dx_n$ . In un consueto sistema di riferimento ortogonale, nel quale si ha  $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_i^2 + \dots + dx_{n-1}^2 + dx_n^2$  e  $dx_i = ds \cos(x_i \wedge s)$ , la derivata lungo la direzione  $s$  è esprimibile come:

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cos(x_1 \wedge s) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_i} \cos(x_i \wedge s) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cos(x_n \wedge s). \quad (19)$$

L'operatore derivata parziale gode delle medesime proprietà (6)-(9) della derivata ordinaria.

Si osservi che una funzione del tipo:

$$y = f(x_1(t), x_2(t), x_3(t), t)$$

è, in definitiva, una funzione della sola variabile indipendente  $t$  e se ne può quindi calcolare la corrispondente derivata ordinaria. Per chiarire come debba effettuarsi tale operazione, in considerazione della dipendenza da  $t$  anche attraverso le  $x_i$ , conviene considerare la funzione:

$$y = f(x_1(t_1), x_2(t_2), x_3(t_3), t) = g(t_1, t_2, t_3, t).$$

A norma della (18), e ricordando la regola per il calcolo della derivata di una funzione di funzione, equazione (9), il differenziale della funzione è dato da:

$$\begin{aligned} dy &= \frac{\partial g}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial g}{\partial t_2} dt_2 + \frac{\partial g}{\partial t_3} dt_3 + \frac{\partial g}{\partial t} dt = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt_1} dt_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt_2} dt_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt_3} dt_3 + \frac{\partial f}{\partial t} dt \end{aligned}$$

Nel caso particolare in cui  $t_1 = t_2 = t_3 = t$ , che qui interessa, la cercata derivata ordinaria della funzione  $f$  rispetto alla variabile indipendente  $t$  è data quindi da:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt_1} \frac{dt_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt_2} \frac{dt_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt_3} \frac{dt_3}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{dt}{dt} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned} \quad (20)$$

Anche le funzioni di più variabili sono sviluppabili in serie di Taylor, esprimibile nella forma sintetica, e simbolica:

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = f(x_{1_0}, \dots, x_{i_0}, \dots, x_{n_0}) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_i - x_{i_0}) \right)^k \quad (21)$$

in cui la potenza della sommatoria fra parentesi va sviluppata analogamente alla potenza di un polinomio, intendendo però gli esponenti contenuti in tale sviluppo come ordini di derivazione per quanto riguarda le derivate rappresentate, nella (21), dal termine  $\partial f / \partial x_i$ . A titolo di esempio, lo

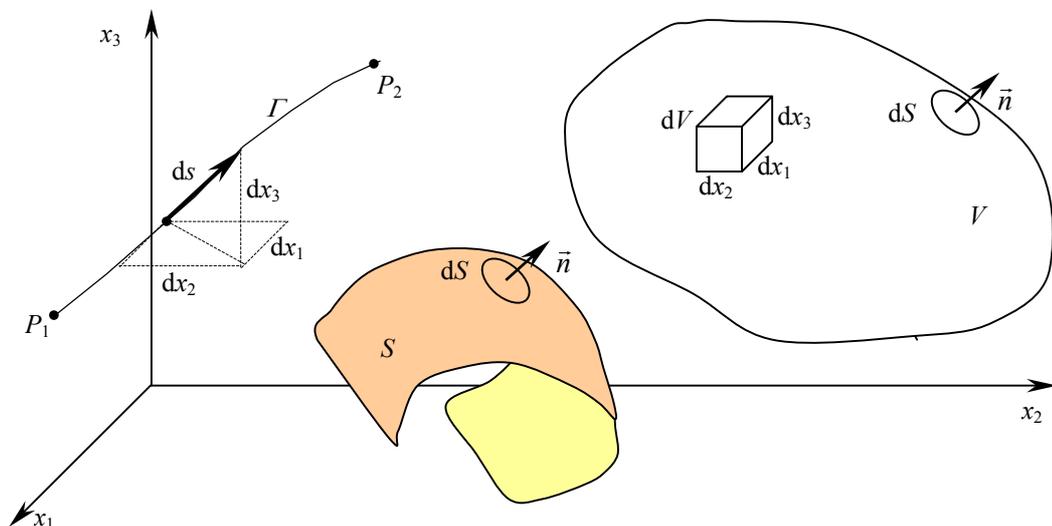
sviluppo in serie di Taylor di una funzione di due variabili si scrive per esteso, fino al terzo ordine, come di seguito riportato:

$$\begin{aligned}
 f(x_1, x_2) = & f(x_{1_0}, x_{2_0}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 - x_{1_0}) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_2 - x_{2_0}) + \\
 & \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1 - x_{1_0})^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_2 - x_{2_0})^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1 - x_{1_0})(x_2 - x_{2_0}) \right] + \\
 & \frac{1}{6} \left[ \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3}(x_1 - x_{1_0})^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3}(x_2 - x_{2_0})^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}(x_1 - x_{1_0})^2(x_2 - x_{2_0}) + \right. \\
 & \left. + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2}(x_1 - x_{1_0})(x_2 - x_{2_0})^2 \right] + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i - x_{i_0}) \right)^k
 \end{aligned}$$

Come per una funzione di una variabile, in un intorno del punto  $(x_{1_0}, \dots, x_{i_0}, \dots, x_{n_0})$  sufficientemente ristretto una funzione di più variabili può essere approssimata mediante uno sviluppo in serie di Taylor arrestato al primo ordine. Per incrementi delle variabili indipendenti tendenti a zero, la variazione della funzione è data dal suo differenziale, espresso dalla (18).

### 1.1.5 Integrazione di funzioni di più variabili.

D'ora in avanti restringeremo il discorso allo spazio euclideo a tre dimensioni, nell'ambito del quale sono descrivibili i fenomeni fisici di interesse del corso, mediante gli strumenti della Meccanica classica (newtoniana). Inoltre, considereremo sempre gli usuali sistemi di riferimento ortogonali destri, le cui tre coordinate indicheremo con i simboli  $x_1, x_2, x_3$  (Figura 3).



**Figura 3. Schema rappresentativo degli integrali di linea, di superficie e di volume.**

In tale spazio fisico si definiscono, in termini sostanzialmente analoghi a quelli espressi dalla (11), gli *integrali di linea*:

$$\int_{P_1}^{P_2} f(x_1, x_2, x_3) ds \quad (22)$$

di superficie:

$$\int_S f(x_1, x_2, x_3) dS$$

e di volume:

$$\int_V f(x_1, x_2, x_3) dV .$$

Anche gli integrali di linea, di superficie e di volume possiedono le proprietà di linearità ed additiva (13)-(14). In particolare, mentre per gli integrali di linea la proprietà additiva si esprime in modo formalmente identico alla (14), con riferimento ad un punto  $P_0$  intermedio a  $P_1$  e  $P_2$  nella curva  $\Gamma$  di Figura 3, più in generale essa può esprimersi nella forma:

$$\int_{I_U} f(x_1, x_2, x_3) dI = \int_{I_1} f(x_1, x_2, x_3) dI + \int_{I_2} f(x_1, x_2, x_3) dI + \dots + \int_{I_n} f(x_1, x_2, x_3) dI, \quad (23)$$

in cui il dominio di integrazione  $I_U$  è un insieme (curva, superficie o volume) dato dall'unione degli  $n$  sottoinsiemi  $I_i$ :  $I_U = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_i \cup \dots \cup I_n$ .

Di notevole importanza per le applicazioni nella fisica matematica sono le *formule di Gauss*. Data una funzione regolare  $f(x_1, x_2, x_3)$ , si ha:

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x_i} dV = \int_S f \cos(x_i \wedge n) dS, \quad (24)$$

per una qualunque delle tre coordinate, identificata dal pedice  $i$ , in cui  $S$  è la superficie di contorno del volume  $V$ ,  $n$  rappresenta la direzione di un segmento orientato di lunghezza unitaria (*versore*), localmente normale alla superficie  $S$  – ossia, normale, punto per punto, alla corrispondente areola  $dS$  – e rivolto verso l'esterno, detto *normale esterna* ed indicato con il simbolo  $\vec{n}$ .

Nel prosieguo, verrà sempre adottata la convenzione di considerare la normale esterna ad una data faccia di una superficie (adottare la convenzione opposta comporterebbe un cambiamento di segno a secondo membro della (24)<sup>1</sup>). Si osservi che, qualora si consideri una superficie chiusa, come nelle formule di Gauss, cosa si intenda con l'attributo "esterna" riferito alla normale non richiede ulteriori precisazioni, perché reso evidente dalla presenza del volume racchiuso dalla superficie: la normale è rivolta verso l'esterno del volume. Quando invece si tratterà di integrali esterni a superfici non chiuse, occorrerà precisare (ed avere chiaro) a quale delle due facce della superficie ci si stia riferendo (per esempio, la faccia di colore più scuro della superficie riportata in Figura 3), la normale esterna essendo quel versore che, considerato come spostamento di un osservatore, lascia alla vista dell'osservatore la faccia prescelta.

## 1.2 Richiami di Analisi Vettoriale e Tensoriale

### 1.2.1 Generalità

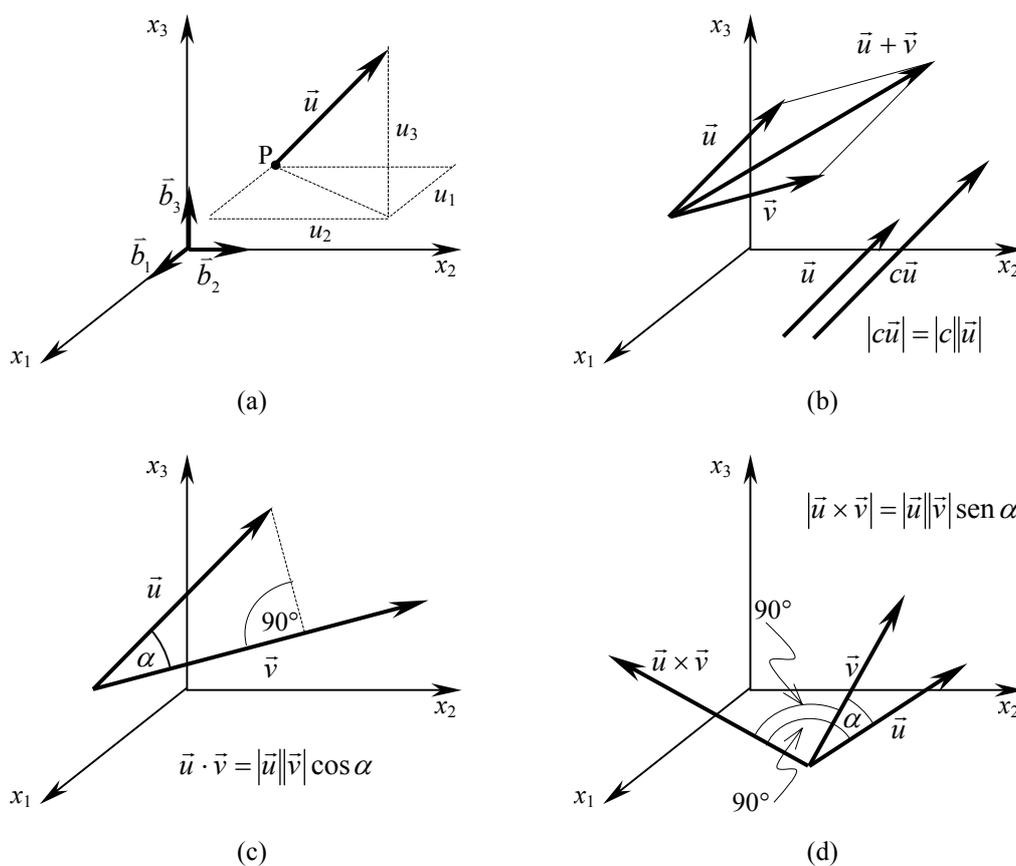
Nell'ambito della meccanica newtoniana, alla quale faremo esclusivo riferimento, le grandezze fisiche sono esprimibili mediante enti geometrici di vario tipo nello spazio euclideo a tre dimensioni.

Uno *scalare* è una grandezza caratterizzata da un solo numero reale. Esempi di grandezze fisiche scalari sono la pressione, la densità e la concentrazione di un soluto.

Un *vettore* è un segmento orientato, caratterizzato pertanto da un *modulo* (la lunghezza del segmento), una direzione e un verso (vedi Figura 4a). Equivalentemente, un vettore è individuato compiutamente dalle sue proiezioni sugli assi coordinati (*le componenti*, al femminile), quindi, nello spazio euclideo a tre dimensioni, da una terna ordinata di numeri reali. Esempi di grandezze

<sup>1</sup> Il Citrini-Nosedà ed il Marchi-Rubatta utilizzano la convenzione di normale interna.

fisiche vettoriali sono la velocità, l'accelerazione e la forza. Nel prosieguo verranno utilizzati: per i vettori la notazione con una freccia in soprassegno del simbolo adottato per la grandezza ( $\vec{u}$  in Figura 4), per il modulo il simbolo di valore assoluto ( $|\vec{u}|$ ), o anche il solo simbolo della grandezza ( $u$ ), e per le sue componenti il simbolo attribuito alla grandezza con il pedice dell'asse coordinato corrispondente ( $u_i, i=1, 2, 3$ ). Sebbene i vettori siano sempre rappresentati nello spazio fisico (si è parlato infatti di "lunghezza del segmento" a proposito del modulo), a seconda di quale tipo di grandezza fisica venga in tal modo rappresentata, stabilita una certa scala di rappresentazione grafica della grandezza (p.es.:  $1\text{ cm} \equiv 1\text{ ms}^{-1}$  per le velocità), il modulo del vettore è in effetti espresso nelle unità di misura della grandezza in questione. Generalmente, è anche rilevante la posizione del vettore nello spazio, ossia, il suo *punto di applicazione*,  $P$ . La retta contenente un vettore costituisce la sua *retta d'azione*. Talora in luogo del modulo del vettore si parla di *intensità* della grandezza fisica rappresentata dal vettore.



**Figura 4. Schemi illustrativi di: (a) definizione di vettore; (b) somma di due vettori e prodotto di un vettore per uno scalare; (c) prodotto scalare; (d) prodotto vettoriale.**

### 1.2.2 Operazioni fra vettori

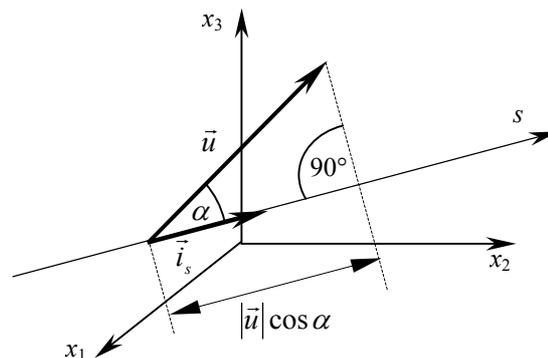
Si definiscono le seguenti operazioni fra vettori:

- *prodotto di un vettore per uno scalare* (Figura 4b): si indica con la notazione dell'algebra, accostando i simboli del vettore e dello scalare senza segni ( $c\vec{u}$ ); il risultato è dato da un vettore avente la stessa direzione del vettore originario, verso concorde o discorde da quello del vettore originario a seconda che lo scalare sia positivo o negativo rispettivamente, modulo pari al modulo del vettore originario moltiplicato per il valore assoluto (o modulo) dello scalare. Nel caso  $c=-1$ ,  $c\vec{u} = -\vec{u}$  è il vettore opposto a  $\vec{u}$ , avente uguale direzione e modulo, ma verso opposto. Il prodotto di uno scalare per un vettore gode della proprietà distributiva rispetto alla somma di vettori ( $c(\vec{u} + \vec{v}) = c\vec{u} + c\vec{v}$ );

- *somma* (Figura 4b): la somma di due vettori si indica con il segno  $+$  ( $\vec{u} + \vec{v}$ ) e si esegue con la regola del parallelogramma, rappresentata in Figura 4b. Si osservi che l'operazione così definita equivale a mettere i due vettori uno in coda all'altro ed a tracciare il vettore somma (detto anche vettore *risultante*) dalla coda alla punta estreme. Tale modo di procedere è senz'altro consigliabile, da un punto di vista pratico, qualora si debba eseguire la somma di più di due vettori, nel qual caso il tracciamento successivo dei vari parallelogrammi necessari renderebbe il disegno alquanto confuso. La somma gode delle proprietà commutativa ( $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ ) ed associativa ( $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ ). La differenza di due vettori si ottiene dalla somma del primo con l'opposto del secondo;
- *prodotto scalare* (Figura 4c): si indica con un punto interposto fra i vettori operandi ( $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ); ha per risultato uno scalare dato dal prodotto dei moduli dei vettori operandi per il coseno dell'angolo compreso fra i vettori. Conseguenza da tale definizione che il prodotto scalare di due vettori ortogonali sia nullo, e viceversa (il viceversa vale sempre, ovviamente, a meno del caso banale in cui uno dei due vettori operandi sia esso stesso nullo). Il prodotto scalare gode delle proprietà commutativa e distributiva rispetto alla somma. Non ha invece senso parlare di proprietà associativa, in quanto il risultato del prodotto scalare di due vettori, essendo uno scalare, non è più moltiplicabile scalarmente con un terzo vettore;
- *prodotto vettoriale* (Figura 4d): si indica con il segno  $\times$  ( $\vec{u} \times \vec{v}$ )<sup>2</sup>; il risultato è un vettore ortogonale ai vettori operandi (quindi, al piano formato da tali due vettori), di modulo pari al prodotto dei moduli dei vettori operandi per il seno dell'angolo compreso fra i vettori e verso tale che un osservatore avente la testa sulla punta del vettore prodotto vede il primo vettore operando sovrapporsi al secondo ruotando in senso antiorario di un angolo inferiore a  $180^\circ$  (come il terzo asse,  $x_3$ , della usuale *terna destra*, di cui il primo ed il secondo vettore operando sono, nello stesso ordine, i primi due assi,  $x_1$  e  $x_2$ ). Si ha quindi  $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ .

Da quanto sopra riportato, la componente (scalare) di un vettore  $\vec{u}$  lungo una direzione orientata (dotata cioè di un verso)  $s$  può ottenersi come prodotto scalare fra il vettore dato ed un vettore parallelo ed equiverso alla direzione orientata data, di modulo unitario (*versore*), che indicheremo con  $\vec{i}_s$ . Indicando con  $u_s$  tale componente, si ha infatti (Figura 5):

$$u_s = \vec{u} \cdot \vec{i}_s = |\vec{u}| |\vec{i}_s| \cos \alpha = |\vec{u}| \cos \alpha . \quad (25)$$



**Figura 5. Componente di un vettore lungo una direzione orientata.**

Tale componente sarà positiva per un angolo compreso fra il vettore ed il versore inferiore a  $90^\circ$  (come nell'esempio di Figura 5), negativa per un angolo maggiore di  $90^\circ$ , nulla, come s'è detto, se il

<sup>2</sup> In alcuni testi si può trovare il simbolo  $\times$  utilizzato per il prodotto scalare o il simbolo  $\wedge$  per il prodotto vettoriale. Il Cenedese utilizza la simbologia di queste dispense; il Marchi-Rubatta utilizza i simboli  $\cdot$  e  $\wedge$  rispettivamente per prodotto scalare e prodotto vettoriale; nel Citrini-Nosedà non compaiono prodotti vettoriali; prodotti scalari per il calcolo di componenti normali sono espressi nella forma cartesiana (29).

vettore è ortogonale alla direzione  $s$ . In particolare, detti  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$  i versori degli assi coordinati (Figura 4a), le componenti di un vettore  $\vec{u}$  su tali assi sono date da:

$$u_i = \vec{u} \cdot \vec{b}_i$$

per  $i = 1, 2, 3$ . Sulla base della definizione di somma di vettori, il vettore  $\vec{u}$  è esprimibile come:

$$\vec{u} = u_1 \vec{b}_1 + u_2 \vec{b}_2 + u_3 \vec{b}_3, \quad (26)$$

in cui ciascuno dei tre vettori addendi nella (26) è detto anch'esso componente del vettore  $\vec{u}$ , ma al maschile (un componente, il componente, etc...). La (26) può quindi risciversi in termini di vettori componenti come:

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3. \quad (27)$$

Dalla (26) discende anche che la somma di due vettori sia un vettore avente per componenti la somma delle (e dei) componenti dei due vettori sommati, mentre il prodotto di un vettore per uno scalare ha componenti date (dati) dalle (dai) componenti del vettore originario, moltiplicate (moltiplicati) per lo scalare. In una terna ortogonale quale quella adottata, il modulo di un vettore può scriversi in funzione delle sue componenti come:

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Utilizzando la proprietà distributiva rispetto alla somma, il prodotto scalare tra due vettori  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  si può scrivere:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1 \vec{b}_1 + u_2 \vec{b}_2 + u_3 \vec{b}_3) \cdot (v_1 \vec{b}_1 + v_2 \vec{b}_2 + v_3 \vec{b}_3) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3, \quad (28)$$

perché il prodotto scalare di due versori vale 1 se si tratta di versori uguali, mentre è nullo se si tratta di versori differenti, essendo essi ortogonali. L'espressione finale dello sviluppo (28) costituisce la *forma cartesiana* del prodotto scalare.

Per quanto finora detto, la componente  $s_i$  di un versore generico  $\vec{i}_s$  lungo uno degli assi coordinati, indicato genericamente dal pedice  $i$ , è data da  $s_i = \vec{i}_s \cdot \vec{b}_i = \cos(x_i \wedge s)$ , cioè, dal coseno dell'angolo fra la direzione orientata e l'asse prescelto (*coseno direttore*). Pertanto, la componente di un vettore  $\vec{u}$  lungo una direzione orientata  $s$  può esprimersi, attraverso la forma cartesiana del prodotto scalare, come:

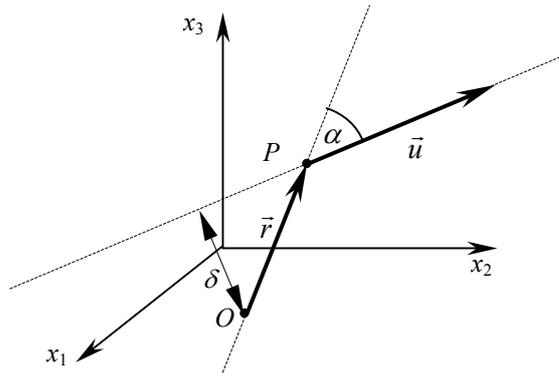
$$u_s = u_1 \cos(x_1 \wedge s) + u_2 \cos(x_2 \wedge s) + u_3 \cos(x_3 \wedge s) = u_1 s_1 + u_2 s_2 + u_3 s_3. \quad (29)$$

L'espressione cartesiana del prodotto vettoriale si ottiene risolvendo il seguente determinante:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \vec{b}_1 (u_2 v_3 - u_3 v_2) + \vec{b}_2 (u_3 v_1 - u_1 v_3) + \vec{b}_3 (u_1 v_2 - u_2 v_1).$$

Dato un vettore  $\vec{u}$  applicato in un punto dello spazio  $P$  (Figura 6), si dice *momento del vettore  $\vec{u}$  rispetto ad un punto  $O$* , detto *polo*, il prodotto vettoriale:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{u}, \quad (30)$$



**Figura 6. Schema illustrativo del momento di un vettore rispetto ad un punto.**

in cui  $\vec{r}$  è il vettore congiungente i punti  $O$  e  $P$ , orientato da  $O$  verso  $P$ . Il vettore momento è normale al piano contenente la retta d'azione della forza ed il polo. La somma dei momenti di più vettori rispetto ad uno stesso polo  $O$  si dice *momento risultante* del sistema di vettori. Il momento di un vettore rispetto ad un punto è invariante per scorrimento del vettore lungo la propria retta d'azione. Infatti, il modulo del vettore prodotto rimane invariato poiché, per qualunque posizione del vettore lungo la propria retta d'azione, risulta  $|\vec{r}| \sin \alpha = \delta$ , dove  $\delta$  (detto *braccio del vettore* rispetto al punto  $O$ ) è la distanza di  $O$  dalla retta d'azione del vettore. Inoltre, l'angolo rimane compreso fra i valori  $0^\circ$  e  $180^\circ$ , per cui rimane invariato anche il verso del vettore prodotto.

Nelle formule (26), (28) e (29) sono presenti sommatorie di tre termini caratterizzati dai tre valori dei pedici identificativi degli assi coordinati, ciascuno dei quali, inoltre, è costituito dal prodotto di quantità caratterizzate dallo stesso pedice. Tale circostanza è abbastanza frequente in vari campi della fisica matematica – in particolare, nell'Idraulica e nella Meccanica dei Fluidi – il che ha suggerito l'introduzione di una notazione sintetica basata sull'uso simbolico dei pedici (indicati cioè come  $i, j$ , etc...) secondo la seguente convenzione (*regola della sommatoria* o di *Einstein*): un termine di una espressione in cui compaia un pedice ripetuto ha il significato della somma dei tre termini ottenuti da quello in questione al variare del pedice ripetuto sui tre valori 1, 2, 3. A titolo di esempio, secondo tale convenzione le formule (26), (28) e (29) si scriverebbero:

$$\vec{u} = u_i \vec{b}_i$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_i v_i \quad (31)$$

$$u_s = u_i \cos(x_i \wedge s) = u_i s_i \quad (32)$$

Si osservi che la regola ha senso quando si parli di pedici che possono assumere più di un valore: in quanto segue, esclusivamente i pedici identificativi degli assi coordinati. Nel caso di un termine con un pedice ripetuto identificativo di una particolare, anche se generica, direzione  $s$ , essendo evidente che tale pedice ha un valore univoco, la regola non si applica (né avrebbe senso farlo). Qualora però occorresse considerare una ed una sola generica quantità contenente pedici ripetuti identificativi degli assi coordinati, relativa ad un unico, anche se generico, valore del pedice, ancorché espresso simbolicamente ( $i, j$ , etc...), per esprimere che non si intende di dover eseguire la sommatoria sui tre valori i pedici verranno sottolineati. Ad esempio, uno generico dei tre componenti del vettore  $\vec{u}$  di cui alle formule (26) e (27) si scriverà:

$$\vec{u}_i = u_i \vec{b}_i$$

L'uso della regola di Einstein si giustifica, in pratica, col fatto che la necessità di eseguire la sommatoria è molto più frequente dell'indicazione di valori simbolici a valore unico del pedice.

### 1.2.3 Tensori

L'impostazione di alcuni problemi fisici porta a stabilire una corrispondenza fra il vettore rappresentativo di una certa grandezza e le direzioni orientate dello spazio, identificate da un versore variabile  $\vec{n}$ , secondo un'espressione del tipo:

$$\vec{\tau}_n = \vec{\tau}_1 \cos(x_1 \wedge n) + \vec{\tau}_2 \cos(x_2 \wedge n) + \vec{\tau}_3 \cos(x_3 \wedge n), \quad (33)$$

ovvero, nella notazione sintetica di Einstein:

$$\vec{\tau}_n = \vec{\tau}_j \cos(x_j \wedge n), \quad (34)$$

ove il pedice  $n$  del vettore a primo membro simboleggia la corrispondenza con le direzioni orientate dello spazio ed i tre vettori a secondo membro rappresentano vettori associati alle direzioni orientate degli assi coordinati. Si osservi che tali vettori non hanno niente a che vedere con i componenti del vettore  $\vec{\tau}_n$ , né hanno una particolare direzione legata, in qualche modo, all'asse coordinato cui sono associati. Pertanto, una volta assegnati i vettori  $\vec{\tau}_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ), a norma della (33) o (34), a ciascuna direzione orientata dello spazio, identificata dal versore  $\vec{n}$ , corrisponde un ben preciso valore del vettore  $\vec{\tau}_n$ . Si osservi l'analogia fra le espressioni della componente di un vettore lungo una direzione orientata (29) o (32) e le espressioni (33) o (34) rispettivamente. Così come, assegnato un vettore  $\vec{u}$  mediante assegnazione delle sue tre componenti scalari, a ciascuna direzione orientata dello spazio è associato uno scalare dato dalla componente del vettore lungo tale direzione, così, assegnato questo nuovo ente matematico mediante assegnazione delle sue tre componenti vettoriali, a ciascuna direzione orientata dello spazio è associato un vettore, in entrambi i casi mediante combinazione lineare delle componenti (scalari per il vettore; vettoriali per questo nuovo ente) tramite i coseni direttori del versore identificativo della direzione orientata. Un ente matematico di questo tipo è detto *tensor* e verrà indicato con una doppia sottolineatura del simbolo prescelto; nel caso specifico:  $\underline{\underline{\tau}}$ .

Poiché ciascuna delle tre componenti vettoriali è definita mediante assegnazione delle sue tre componenti scalari, complessivamente un tensore è definito compiutamente assegnandone le sue nove componenti scalari. Tali componenti sono identificate simbolicamente come  $\tau_{ij}$ , rappresentante la componente scalare nella direzione dell'asse  $x_i$  della componente vettoriale associata all'asse  $x_j$ ,  $\vec{\tau}_j$ <sup>3</sup>.

Le componenti del vettore  $\vec{\tau}_n$  si ottengono proiettandolo sugli assi coordinati, eseguendone il prodotto scalare con i versori degli assi coordinati. La generica componente del vettore  $\vec{\tau}_n$  lungo l'asse  $x_i$ , indicata, per la convenzione assunta per gli indici, con  $\tau_{in}$ , è data pertanto da:

$$\begin{aligned} \tau_{in} = \vec{\tau}_n \cdot \vec{b}_i = \vec{\tau}_1 \cdot \vec{b}_i \cos(x_1 \wedge n) + \vec{\tau}_2 \cdot \vec{b}_i \cos(x_2 \wedge n) + \vec{\tau}_3 \cdot \vec{b}_i \cos(x_3 \wedge n) = \\ \tau_{i1} \cos(x_1 \wedge n) + \tau_{i2} \cos(x_2 \wedge n) + \tau_{i3} \cos(x_3 \wedge n) \end{aligned}$$

avendo applicato la proprietà distributiva del prodotto scalare rispetto alla somma di vettori. In termini di notazione sintetica ed indicando i coseni direttori come componenti del versore  $\vec{n}$ , si ha:

$$\tau_{in} = \tau_{ij} n_j$$

Tale scrittura consente di ottenere il valore di una qualunque delle tre componenti, relativa al corrispondente valore del pedice  $i$ , che assume, in quanto non ripetuto, sempre un valore alla volta (o 1, o 2, o 3). L'operazione si può eseguire simultaneamente per tutte e tre le componenti del

<sup>3</sup> Il Citrini-Nosedà ed il Marchi-Rubatta utilizzano la convenzione opposta.

vettore  $\vec{\tau}_n$  mediante il seguente *prodotto matrice per vettore* secondo le regole dell'algebra matriciale (prodotto righe per colonne):

$$\begin{pmatrix} \tau_{1n} \\ \tau_{2n} \\ \tau_{3n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11}n_1 + \tau_{12}n_2 + \tau_{13}n_3 \\ \tau_{21}n_1 + \tau_{22}n_2 + \tau_{23}n_3 \\ \tau_{31}n_1 + \tau_{32}n_2 + \tau_{33}n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{1j}n_j \\ \tau_{2j}n_j \\ \tau_{3j}n_j \end{pmatrix}, \quad (35)$$

ove la matrice quadrata a secondo membro è associata al tensore  $\underline{\underline{\tau}}$  e ne costituisce la rappresentazione in termini delle sue nove componenti scalari, le quali, come si è detto, lo identificano compiutamente. Si osservi che i vettori colonna estraibili da tale matrice corrispondono alle componenti vettoriali del tensore. La stessa operazione si esprime, nella notazione vettoriale:

$$\vec{\tau}_n = \underline{\underline{\tau}} \vec{n},$$

la quale si scrive senza alcun segno di operazione fra i termini a secondo membro.

Un tensore quale quello considerato in precedenza è detto, più precisamente, tensore di ordine 2, in quanto caratterizzato da due indici. Più in generale, si possono definire tensori di ordine  $d$  qualunque, caratterizzati, nello spazio a tre dimensioni, da  $3^d$  componenti; in particolare, i vettori sono tensori di ordine 1 e gli scalari tensori di ordine 0.

L'associazione di un tensore di ordine 2 ad una matrice quadrata comporta l'adozione, per i tensori, della terminologia usualmente utilizzata per le matrici. Un tensore *simmetrico* è quindi rappresentato da una matrice simmetrica (tale cioè che  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ ); un tensore *antisimmetrico* da una matrice antisimmetrica ( $\tau_{ij} = -\tau_{ji}$ ); un tensore *trasposto* di un altro, indicato con un apice T, ha una matrice che si ottiene dalla matrice del tensore originario scambiando le righe con le colonne ( $\tau^T_{ij} = \tau_{ji}$ ); la *traccia* di un tensore è la traccia della matrice associata, data dalla somma degli elementi della *diagonale* ( $tr(\underline{\underline{\tau}}) = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} = \tau_{ii}$ ). Un tensore a traccia nulla è detto *deviatore*.

Nel prosieguo verranno utilizzate le seguenti operazioni riguardanti tensori e/o matrici:

- *prodotto di un tensore per uno scalare*: il risultato è una matrice avente per elementi gli elementi della matrice originaria moltiplicati per lo scalare ( $(c\underline{\underline{\tau}})_{ij} = c\tau_{ij}$ );
- *somma di due tensori*: è rappresentato dalla somma delle corrispondenti matrici, il cui risultato è una matrice avente per elementi la somma degli elementi corrispondenti delle matrici sommate ( $(\underline{\underline{a}} + \underline{\underline{b}})_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ );
- *prodotto di due tensori*: indicato con  $\underline{\underline{ab}}$ , può effettuarsi, secondo la regola del prodotto righe per colonne, se  $\underline{\underline{a}}$  ha tante colonne quante sono le righe di  $\underline{\underline{b}}$ ; per esempio, il prodotto matrice per vettore (35). Il risultato è una matrice con tante righe quante quelle della prima matrice e tante colonne quante quelle della seconda matrice: mentre il risultato del prodotto (35) è un vettore, il prodotto di due matrici quadrate  $3 \times 3$  è un'altra matrice quadrata  $3 \times 3$ . La matrice che moltiplicata per un'altra matrice quadrata la lascia inalterata è la *matrice* (o tensore) *unità*:

$$\underline{\underline{I}} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

di componenti  $\delta_{ij}$  (*simbolo di Kronecker*), con  $\delta_{ij} = 1$  per  $i=j$ ;  $\delta_{ij} = 0$  per  $i \neq j$ . Si dice *isotropo* o *sferico* un tensore del tipo  $c\underline{\underline{I}}$ , dove  $c$  è uno scalare, avente elementi non nulli e tutti uguali fra loro

soltanto sulla diagonale. Nel prosieguo verranno considerati unicamente prodotti matrice per vettore, mentre il tensore unità verrà utilizzato unicamente nell'espressione di un tensore isotropo.

L'operazione di trasposizione trasforma un vettore colonna in un vettore riga, e viceversa:

$$(u_1 \quad u_2 \quad u_3)^T = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

Si ricorda che le operazioni fra scalari, vettori e tensori in forma puramente matriciale sottintendono sempre la specificazione del sistema di riferimento adottato, ossia, adottando la terminologia della teoria degli spazi vettoriali, della *base* dello spazio vettoriale tridimensionale costituita dalla terna di versori  $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ . Detta teoria insegna come modificare le rappresentazioni matriciali in relazione a cambiamenti del sistema di riferimento mediante semplici operazioni, che qui tuttavia non interessa richiamare in quanto non utilizzate nel prosieguo. Le notazioni vettoriale e matriciale sono quindi equivalenti; tale equivalenza è espressa, più correttamente, dal simbolo  $\equiv$  (p.es.:  $\vec{u} \equiv (u_1 \quad u_2 \quad u_3)^T$ ) piuttosto che dal simbolo di uguaglianza,  $=$ . Di norma la rappresentazione matriciale utilizzata per un vettore sarà quella del vettore colonna.

#### 1.2.4 Campi scalari, vettoriali e tensoriali. Operatori differenziali.

Una regione dello spazio nella quale sia definibile, punto per punto, ed eventualmente in funzione del tempo, una certa grandezza scalare, vettoriale o tensoriale, si dice *campo scalare*, *vettoriale* o *tensoriale* rispettivamente. Nel caso del campo di uno scalare  $a$ , ad esempio, si utilizzerà la notazione:

$$a(x_1, x_2, x_3, t), \quad (36)$$

ovvero, considerando che le tre coordinate del punto possono essere riguardate come componenti di un *vettore posizione*  $\vec{x}$  applicato nell'origine del sistema di riferimento, la notazione:

$$a(\vec{x}, t), \quad (37)$$

ed analogamente per un campo vettoriale o tensoriale. Come risultato dell'impostazione di determinati problemi fisici si perviene alla definizione di vari operatori di tipo differenziale applicati a campi scalari, vettoriali o tensoriali dotati di opportune proprietà di regolarità. Definiamo dapprima:

- *gradiente di uno scalare*: si dice gradiente di uno scalare  $a$  un vettore avente per componenti le derivate parziali di  $a$  rispetto alle coordinate omologhe:

$$\text{grad}(a) = \frac{\partial a}{\partial x_1} \vec{b}_1 + \frac{\partial a}{\partial x_2} \vec{b}_2 + \frac{\partial a}{\partial x_3} \vec{b}_3 = \frac{\partial a}{\partial x_i} \vec{b}_i \equiv \begin{pmatrix} \partial a / \partial x_1 \\ \partial a / \partial x_2 \\ \partial a / \partial x_3 \end{pmatrix}; \quad (38)$$

- *divergenza di un vettore*: si dice divergenza di un vettore  $\vec{u}$  uno scalare dato dalla somma delle derivate parziali delle componenti del vettore rispetto alle coordinate omologhe:

$$\text{div}(\vec{u}) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

In luogo dei simboli *grad* e *div*, nel prosieguo verrà utilizzata una simbologia basata sulla definizione del vettore, puramente simbolico, denominato *nabla* ed indicato con il simbolo  $\nabla$ , avente per componenti gli operatori di derivata parziale rispetto alle coordinate omologhe:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1} \bar{b}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \bar{b}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \bar{b}_3 = \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{b}_i \equiv \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix}.$$

Sulla base di tale definizione, il gradiente di uno scalare viene indicato con  $\nabla a$ ; mentre la divergenza di un vettore viene invece espressa dal prodotto scalare  $\nabla \cdot \bar{u}$ . Si osservi come, nell'ambito della generalizzazione del concetto di tensore indicata in precedenza, l'operatore gradiente fornisce un tensore di grado superiore a quello cui l'operatore è stato applicato (si passa da uno scalare ad un vettore), mentre la divergenza determina il passaggio ad un grado inferiore (da vettore a scalare). Ricordata l'analogia fra le componenti scalari di un vettore e le componenti vettoriali di un tensore, per estensione si definiscono anche:

- *divergenza di un tensore*: fornisce un vettore dato da:

$$\text{div}(\underline{\underline{\tau}}) = \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} = \frac{\partial \bar{\tau}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{\tau}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{\tau}_3}{\partial x_3} = \frac{\partial \bar{\tau}_i}{\partial x_i} \equiv \begin{pmatrix} \partial \tau_{11}/\partial x_1 + \partial \tau_{12}/\partial x_2 + \partial \tau_{13}/\partial x_3 \\ \partial \tau_{21}/\partial x_1 + \partial \tau_{22}/\partial x_2 + \partial \tau_{23}/\partial x_3 \\ \partial \tau_{31}/\partial x_1 + \partial \tau_{32}/\partial x_2 + \partial \tau_{33}/\partial x_3 \end{pmatrix},$$

l'espressione della generica componente ( $i$ -esima) del quale è data, nella notazione sintetica, da:

$$(\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}})_i = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j},$$

e per il quale, come si è visto, si utilizza la medesima notazione della divergenza di un vettore, con il punto interposto fra il vettore simbolico nabla ed il tensore;

- *gradiente di un vettore*: fornisce un tensore dato da:

$$\nabla \bar{u} \equiv \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial u_1/\partial x_1 & \partial u_2/\partial x_1 & \partial u_3/\partial x_1 \\ \partial u_1/\partial x_2 & \partial u_2/\partial x_2 & \partial u_3/\partial x_2 \\ \partial u_1/\partial x_3 & \partial u_2/\partial x_3 & \partial u_3/\partial x_3 \end{pmatrix},$$

l'espressione della generica componente scalare ( $i$ -esima riga,  $j$ -esima colonna) del quale è data, nella notazione sintetica, da:

$$(\nabla \bar{u})_{ij} = \partial u_j / \partial x_i.$$

Le formule di Gauss (24) possono essere utilizzate per dedurre il *Teorema della divergenza*. Applicando le formule di Gauss a tre integrali di volume contenenti ciascuno la derivata di una componente di un vettore  $\bar{u}$  rispetto alla coordinata omologa e sommando, si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_V (\nabla \cdot \bar{u}) dV &= \int_V \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) dV = \int_V \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dV + \int_V \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dV + \int_V \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dV = \\ &= \int_S u_1 \cos(x_1 \wedge n) dS + \int_S u_2 \cos(x_2 \wedge n) dS + \int_S u_3 \cos(x_3 \wedge n) dS = \\ &= \int_S [u_1 \cos(x_1 \wedge n) + u_2 \cos(x_2 \wedge n) + u_3 \cos(x_3 \wedge n)] dS = \int_S (\bar{u} \cdot \bar{n}) dS \end{aligned}$$

ossia, sintetizzando in forma vettoriale:

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{u}) dV = \int_S (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS, \quad (39)$$

ovvero, nella notazione per componenti:

$$\int_V \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dV = \int_S u_i n_i dS,$$

avendo utilizzato il simbolo  $n_i$  per le componenti della normale in luogo della espressione esplicita dei coseni direttori, come più spesso faremo d'ora in avanti.

Nella formulazione canonica del Teorema della divergenza su riportata, a secondo membro compare l'integrale di superficie del prodotto scalare fra il vettore  $\vec{u}$  e la normale (esterna) alla superficie  $\vec{n}$ . Tuttavia, dalle formule di Gauss può dedursi anche una formulazione simile in cui non compare un prodotto scalare:

$$\int_V \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dV = \int_S \tau_{ij} n_j dS,$$

la cui forma vettoriale è:

$$\int_V (\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}) dV = \int_S (\underline{\underline{\tau}} \vec{n}) dS,$$

in cui nell'integrale di superficie a secondo membro figura, come preannunciato, non un prodotto scalare, ma un prodotto matrice per vettore, mentre a primo membro compare l'integrale di volume della divergenza di un tensore. Si tratta quindi dell'estensione del Teorema della divergenza al caso della divergenza di un tensore.

L'introduzione del vettore simbolico nabla consente anche di dedurre espressioni alternative per il differenziale e per la derivata direzionale di una funzione  $f(x_1, x_2, x_3)$ , formule (18) e (19) rispettivamente. detto  $d\vec{s} \equiv (dx_1 \ dx_2 \ dx_3)^T$  un vettore spostamento elementare ed  $\vec{i}_s \equiv (s_1 \ s_2 \ s_3)^T = (\cos(x_1 \wedge s) \ \cos(x_2 \wedge s) \ \cos(x_3 \wedge s))^T$  il corrispondente versore, il differenziale della funzione può scriversi come:

$$df = \nabla f \cdot d\vec{s} = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i, \quad (40)$$

e la derivata direzionale:

$$\frac{df}{ds} = \nabla f \cdot \vec{i}_s = \frac{\partial f}{\partial x_1} s_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} s_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} s_3 = \frac{\partial f}{\partial x_i} s_i.$$

Da tali espressioni si evince anche che il gradiente di una funzione scalare  $f(x_1, x_2, x_3)$  è punto per punto perpendicolare alle superfici ove  $f$  è costante. Infatti, considerati un punto dello spazio, la superficie ove  $f = \text{cost}$  passante per quel punto ed uno spostamento elementare  $d\vec{s}$  su tale superficie – quindi, sul piano tangente alla superficie nel punto considerato – deve ovviamente risultare nullo il differenziale di  $f$ , poiché tuttavia questo è espresso attraverso il prodotto scalare (40), i vettori  $\nabla f$  e  $d\vec{s}$  devono necessariamente essere ortogonali (se entrambi non nulli, naturalmente). Il gradiente è rivolto nel verso delle  $f$  crescenti perché il differenziale corrispondente ad uno spostamento nel verso del gradiente è positivo, essendo nullo l'angolo fra  $\nabla f$  e  $d\vec{s}$  e pari quindi all'unità il relativo coseno. La derivata di  $f$  nella direzione e nel verso del gradiente assume pertanto anche il valore massimo rispetto a tutte le altre possibili direzioni, dato da  $\partial f / \partial n = |\nabla f|$ .

Dalla (40) si evince anche che una funzione scalare il cui gradiente sia ovunque nullo deve risultare costante, dovendo essere ovunque nullo il suo differenziale totale.

Nello sviluppo di alcune espressioni risulta conveniente esprimere il versore della verticale in termini del vettore simbolico nabla. Infatti, per quanto testé illustrato, detta  $z$  la coordinata verticale, il vettore  $\nabla z$  è normale alle superfici su cui  $z$  è costante (i piani orizzontali) ed è pertanto verticale; ha modulo pari a  $|\nabla z| = \partial z / \partial n = \partial z / \partial z = 1$  ed è orientato nel verso delle  $z$  crescenti: esso è dunque il versore della verticale (vedi Figura 7). In particolare, se l'asse  $z$  costituisce uno dei tre assi di una terna di riferimento  $xyz$  di versori  $\vec{b}_x, \vec{b}_y, \vec{b}_z$ , si ha, più semplicemente:

$$\nabla z = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{b}_x + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{b}_y + \frac{\partial z}{\partial z} \vec{b}_z = \vec{b}_z, \quad (41)$$

essendo  $\partial z / \partial x = \partial z / \partial y = 0$ . Il ragionamento è valido, peraltro, per qualunque direzione orientata.

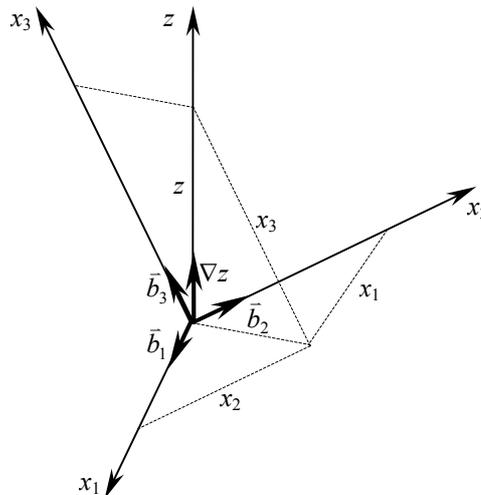


Figura 7. Versore della verticale in un sistema di riferimento generico.

## 1.3 Richiami di Meccanica

### 1.3.1 Misura delle grandezze fisiche

Per misura di una grandezza fisica si intende il rapporto fra essa ed un'altra grandezza della stessa specie scelta come unità, da eseguire con modalità determinate. Allo scopo di conferire carattere di oggettività al sistema di misura, si richiede che, variando la grandezza campione assunta ad unità di misura (operazione tutt'altro che infrequente nelle applicazioni tecniche), si mantenga inalterato il rapporto delle misure di due grandezze della stessa specie. Requisiti importanti delle grandezze campione sono l'inalterabilità e la riproducibilità, il che ha suggerito definizioni delle stesse sempre più sofisticate. Ad esempio, se per certo tempo il campione di metro è stato costituito dalla distanza alla temperatura di  $0^\circ\text{C}$  fra due tacche incise su una barra di platino-iridio di particolare sezione, conservata presso il Bureau of Poids et Mesures di Parigi e riprodotta in esemplari in dotazione presso ogni stato aderente alla convenzione metrico-decimale, successivamente la lunghezza del medesimo metro campione è stata legata alla lunghezza d'onda di una radiazione emessa dall'isotopo 86 del Krypton, perché meno alterabile e riproducibile con maggiore precisione.

È senz'altro possibile adottare una grandezza campione come unità di misura per ciascuna specie di grandezza fisica. Tuttavia, la sussistenza di relazioni fra le varie grandezze fisiche, in termini di leggi fisiche – descrittive cioè una certa classe di fenomeni fisici in termini relativamente generali – o legate alle sole definizioni delle grandezze, comporta la possibilità, più conveniente da un punto di vista pratico, di assumere in maniera arbitraria il numero strettamente sufficiente di grandezze campione, che vengono dette perciò *fondamentali*, definendo tutte le altre grandezze campione attraverso le relazioni riconosciute valide fra le varie grandezze, denotandole perciò come *grandezze derivate*. Le grandezze fisiche verranno denotate, come d'uso, con simboli

racchiusi fra parentesi quadre. Nella Meccanica, nel cui ambito si svolge interamente il corso di Idraulica, è necessario scegliere tre grandezze fondamentali. Ad esempio, scelti il metro, m, ed il secondo, s, come unità di misura delle lunghezze [L] e del tempo [T] rispettivamente, la sola definizione di velocità consente di assumerne ad unità di misura, ad esempio, quel valore che, mantenuto costante nel tempo, consente di percorrere la distanza di 1 m nel tempo di 1 s, ossia, 1 m/s o 1 ms<sup>-1</sup>. Per definire l'unità di misura della forza [F], una volta assunta l'unità di misura della massa [M], p. es., il chilogrammo massa, kg, e definita, analogamente alla velocità, l'unità di misura dell'accelerazione [a], p. es. 1 ms<sup>-2</sup>, ci si potrà invece basare su una vera e propria legge fisica, quale la seconda legge di Newton,  $F=ma$ , per definire come unità di misura quella forza che imprime alla massa di 1 kg l'accelerazione di 1 ms<sup>-2</sup> (Newton, N), oppure, la forza che imprime alla massa di 1 kg l'accelerazione media di gravità,  $g=9,80665 \text{ ms}^{-2}$  (chilogrammo forza, o chilogrammo peso, o chilopond, kp – quest'ultima denominazione utilizzata per brevità nel prosieguo).

Un sistema di unità di misura è dato dall'insieme delle unità assunte per le varie specie di grandezze fisiche. Dei vari sistemi di unità di misura esistenti, attualmente è fatto obbligo dell'uso delle unità del Sistema Internazionale (abbreviato SI), il quale assume come grandezze fondamentali della Meccanica e relative unità di misura: lunghezza [L] e metro (m); tempo [T] e secondo (s); massa [M] e chilogrammo massa, o chilogrammo *tout-court* (kg)<sup>4</sup>. Le *dimensioni fisiche* di una grandezza sono i prodotti delle potenze delle grandezze fondamentali che la definiscono (p.es., con riferimento alla forza:  $[F]=[M][a]=[MLT^{-2}]$ ). Ciascuna grandezza fisica è perciò caratterizzata da proprie dimensioni ed è perciò fundamentalmente differente da un numero puro, che ne è privo. La differenza è rilevante perché mentre cambiando le unità di misura varierà anche la misura di una data grandezza fisica, un numero puro rimane inalterato. Il concetto di dimensione fisica fa sì che possano essere sommate soltanto grandezze fisiche della stessa specie e che i due membri di una equazione debbano possedere le medesime dimensioni fisiche (*principio di omogeneità dimensionale*). Fra l'altro, tale ultimo concetto è utile, da un punto di vista pratico, per verificare rapidamente eventuali errori nella scrittura di una equazione, nel senso che essa è certamente errata se non rispetta il principio di omogeneità dimensionale (mentre, naturalmente, il rispetto di tale principio non implica invece, di per sé, che l'equazione sia scritta correttamente).

Le dimensioni fisiche, come le corrispondenti unità di misura, sono trattabili con le regole dell'algebra, al fine di stabilire le corrispondenze fra unità di misura differenti, operazione utile anche per scopi tecnici. Ad esempio, volendo esprimere in km h<sup>-1</sup> (o km/h) una velocità di 20 ms<sup>-1</sup>, tenendo presente che 1 km = 1000 m (1 m = 1/1000 km) e che 1 h = 3600 s (1 s = 1/3600 h), si ha:

$$20 \text{ ms}^{-1} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 20 \times \frac{\text{km}}{1000} \times \frac{3600}{\text{h}} = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 72 \text{ km h}^{-1}. \quad (42)$$

Nonostante, come s'è detto, attualmente sia obbligatorio l'uso del Sistema Internazionale, tuttavia nella pratica sovente si è costretti ad effettuare operazioni di conversione di unità di misura. Nel caso dell'Idraulica, ad esempio, è piuttosto comune trovare manometri (strumenti di misura della pressione che verranno descritti nel capitolo dedicato all'Idrostatica) graduati secondo svariate unità di misura: Nm<sup>-2</sup>, bar, kp cm<sup>-2</sup>, quando non, addirittura, in m di colonna d'acqua o mm di mercurio, che non sembrerebbero affatto essere unità di misura della pressione, se non sottintendendo relazioni che verranno, anch'esse, studiate in Idrostatica.

Nella Tabella 1 sono riportate le unità di misura di uso più frequente nelle applicazioni tecniche, suddivise fra unità del SI ed unità di altri sistemi, con le corrispondenti equivalenze. La tabella è riportata a scopo riassuntivo; le definizioni delle varie grandezze verranno richiamate di volta in volta nel prosieguo. Di norma, nel corso si farà uso delle unità SI, con alcune eccezioni riguardanti unità del sistema pratico o poche altre di uso corrente.

<sup>4</sup> Le edizioni meno recenti del Citrini-Nosedà fanno uso del sistema pratico, le cui grandezze fondamentali e relative unità di misura sono: lunghezza (L) e metri (m); tempo (T) e secondi (s); forza (F) e chilopond, indicato come chilogrammo peso e per il quale, si badi, si usa il simbolo che nel SI è riservato al chilogrammo massa (kg). Le edizioni più recenti fanno invece riferimento alle unità SI.

**Tabella 1: Unità di misura di impiego frequente.**

Grandezza	Unità SI		Unità estranee	
	nome (simbolo)	unità	nome (simbolo)	equivalenza
Lunghezza	metro (m)	m	miglio terrestre (St mi) miglio marino (n mi) piede (ft) pollice (in)	1 St mi = 1.609 m 1 n mi = 1.852 m 1 ft = 0,3048 m 1 in = 2,540 m
Area	metro quadrato	m <sup>2</sup>	ettaro (ha)	1 ha = 10 <sup>4</sup> m <sup>2</sup>
Volume	metro cubo	m <sup>3</sup>	litro (l) gallone (USA) (gal)	1 l = 10 <sup>-3</sup> m <sup>3</sup> 1 gal = 3,785 × 10 <sup>-3</sup> m <sup>3</sup>
Angolo piano	radiante (rad)	rad	grado sessagesimale (°) grado centesimale (ᵍ)	360° = 2π rad 400ᵍ = 2π rad
Tempo	secondo (s)	s	minuto (min) ora (h) giorno solare (d)	1 min = 60 s 1 h = 3600 s 1 d = 86400 s
Velocità	—	m s <sup>-1</sup>	(km h <sup>-1</sup> ) nodo (kn) miglio all'ora (mph)	1 km h <sup>-1</sup> = 0,2778 m s <sup>-1</sup> 1 kn = 0,5144 m s <sup>-1</sup> 1 mph = 0,4470 m s <sup>-1</sup>
Velocità angolare	—	rad s <sup>-1</sup>	giri al minuto (rpm)	60 rpm = 2π rad s <sup>-1</sup>
Accelerazione	—	m s <sup>-2</sup>	—	—
Portata	—	m <sup>3</sup> s <sup>-1</sup>	—	—
Viscosità cinematica	—	m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>	Stokes (St)	1 St = 10 <sup>-4</sup> m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>
Massa	chilogrammo (kg)	kg	(kp m <sup>-1</sup> s <sup>2</sup> ) libbra (lb)	1 kp m <sup>-1</sup> s <sup>2</sup> = 9,80665 kg 1 lb = 0,4536 kg
Forza	Newton (N)	kg m s <sup>-2</sup>	chilopond (kp)	1 kp = 9,80665 N
Quantità di moto	—	kg m s <sup>-1</sup>	(kp s)	1 kp s = 9,80665 kg m s <sup>-1</sup>
Momento di quantità di moto	—	kg m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>	(kp m s)	1 kp m s = 9,80665 kg m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>
Momento di una forza	—	N m	(kp m)	1 kp m = 9,80665 N m
Sforzo (pressione)	Pascal (Pa)	N m <sup>-2</sup>	(kp cm <sup>-2</sup> ) bar (bar) atmosfera (atm) metri di colonna d'acqua (m H <sub>2</sub> O) mm di mercurio (Torr)	1 kp cm <sup>-2</sup> = 98.066,5 Pa 1 bar = 10 <sup>5</sup> Pa 1 atm = 101.303 Pa 1 m H <sub>2</sub> O = 9.806,65 Pa 1 Torr = 133,3 Pa
Densità	—	kg m <sup>-3</sup>	(kp m <sup>-4</sup> s <sup>2</sup> )	1 kp m <sup>-4</sup> s <sup>2</sup> = 9,80665 kg m <sup>-3</sup>
Peso specifico	—	N m <sup>-3</sup>	(kp m <sup>-3</sup> )	1 kp m <sup>-3</sup> = 9,80665 N m <sup>-3</sup>
Viscosità dinamica	—	kg m <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup>	(kp m <sup>-2</sup> s) Poise (Po)	1 kp m <sup>-2</sup> s = 9,80665 kg m <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup> 1 Po = 0,1000 kg m <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup>
Modulo di elasticità	Pascal (Pa)	N m <sup>-2</sup>	vedi sforzo	
Tensione superficiale	—	N m <sup>-1</sup>	(kp m <sup>-1</sup> )	1 kp m <sup>-1</sup> = 9,80665 N m <sup>-1</sup>
Lavoro ed energia	Joule (J)	N m	(kp m) piccola caloria (cal) British thermal unit (BTU) chilowattora (kWh)	1 kp m = 9,80665 N 1 cal = 4.1868 J 1 BTU = 1.055 J 1 kWh = 3,600 × 10 <sup>6</sup> J
Potenza	Watt (W)	N m s <sup>-1</sup>	(kp m s <sup>-1</sup> ) cavallo vapore (CV)	1 kp m s <sup>-1</sup> = 9,80665 W 1 CV = 735,5 W
Temperatura	grado Kelvin (K)	K	grado celsius (°C) grado Fahrenheit (°F)	T(°C) = T(K) - 273,15 T(°F) = 9/5 T(K) - 459,67 T(°F) = 9/5 T(°C) + 32

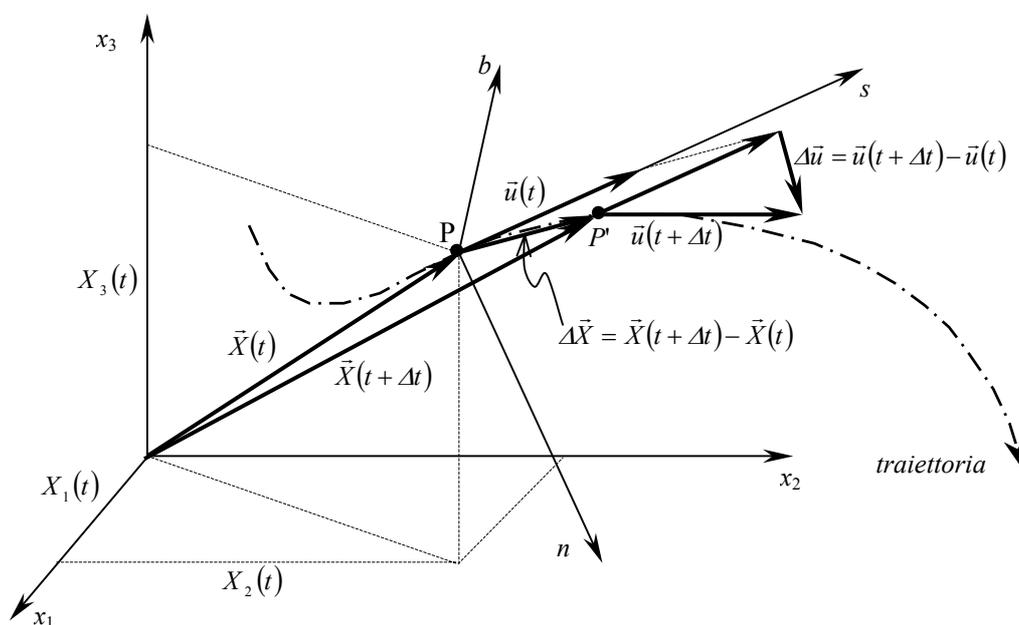
Le equivalenze delle unità SI con varie altre unità alternative, quali, ad esempio, il piede quadrato (sq ft) o il pollice cubo (cu in), omesse nella Tabella 1 per ragioni di spazio, possono essere facilmente derivate sulla base delle unità fornite in tabella mediante operazioni di conversione del tipo (42). Per una più esauriente esposizione dei fattori di conversione fra le varie unità di misura si rimanda particolarmente ai manuali di ingegneria<sup>5</sup>.

Dalla Tabella 1 si può anche osservare come le stesse dimensioni fisiche possano competere a grandezze di diversa specie, quali il momento di una forza ed il lavoro di una forza.

### 1.3.2 Schematizzazione dello spazio fisico nella Meccanica Newtoniana. Il punto materiale

Le leggi fondamentali della Meccanica elementare (Newtoniana), di interesse applicativo esclusivo per l'ingegnere civile, sono di norma introdotte ricorrendo all'astrazione del *punto materiale*, ossia un corpo privo di dimensioni, quale è un punto, nel quale si intenda concentrata una massa finita. Tale concetto, oltre che utile alla comprensione delle leggi fondamentali della Meccanica da un punto di vista didattico, storicamente ha costituito anche il mezzo attraverso il quale, semplificando radicalmente la descrizione dell'ambiente fisico, tali leggi hanno potuto essere riconosciute da pionieri del pensiero scientifico quali Galileo e Newton.

Si rimarca come il concetto di punto materiale costituisca una astrazione, non essendo fisicamente possibile la concentrazione di una massa finita in un ente geometrico quale il punto, privo di dimensione. Tuttavia, anche solo su base intuitiva, appare abbastanza ragionevole che un corpo possa essere schematizzato come punto materiale se possiede dimensioni lineari molto minori di quelle caratteristiche dell'ambiente in cui si muove (sotto questo aspetto, la definizione parrebbe simile a quella di particella fluida di cui al capitolo successivo, la quale tuttavia, come si vedrà, sottende concetti alquanto differenti). Inoltre, sebbene non esista il punto materiale in quanto tale, in qualunque sistema meccanico, come si avrà modo di richiamare più avanti, è definibile un punto caratteristico – il baricentro del sistema – che si muove seguendo le medesime leggi del punto materiale, legittimandone perciò l'introduzione nello studio della Meccanica in maniera più sostanziale. Seguendo il percorso tipico della Fisica elementare, nei presenti richiami di Meccanica si farà perciò senz'altro riferimento al concetto di punto materiale.



**Figura 8. Schema di definizione delle grandezze caratteristiche del moto di un punto materiale.**

<sup>5</sup> Si raccomanda vivamente l'allievo di dotarsi di un manuale di ingegneria, p. es.: Manuale dell'Ingegnere – nuovo Colombo, Hoepli; Manuale di Ingegneria Civile, Zanichelli - Edizioni Scientifiche Cremonese.

### 1.3.3 Cinematica

La cinematica studia il moto dei corpi al trascorrere del tempo da un punto di vista puramente geometrico, non comprendendo l'analisi delle cause che lo producono.

Il moto di un punto materiale nello spazio (vedi Figura 8) è descrivibile mediante il vettore posizione dipendente dal tempo,  $\vec{X}(t)$ , le cui componenti sono le coordinate del punto nel sistema di riferimento prescelto,  $X_i(t)$ ,  $i=1, 2, 3$ :

$$\vec{X}(t) \equiv \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \end{pmatrix} .$$

Le equazioni che esprimono tali componenti in funzione del tempo, del tipo  $x_i = X_i(t)$ , vengono dette equazioni del moto in forma *parametrica*. La *traiettoria* del punto è una curva nello spazio data dal luogo delle posizioni da occupate dal punto al trascorrere del tempo, la cui equazione si ottiene eliminando il tempo fra le tre equazioni parametriche del moto.

Sulla base della definizione di somma e differenza di due vettori, la velocità del punto materiale al tempo  $t$  si calcola come derivata prima del vettore spostamento, data da:

$$\vec{u}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{X}(t + \Delta t) - \vec{X}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{X}}{dt}(t) , \quad (43)$$

in cui al numeratore del rapporto incrementale è contenuto il vettore spostamento nell'intervallo di tempo  $\Delta t$ , differenza dei vettori posizione agli estremi dell'intervallo, costituente un segmento elementare di traiettoria. Al limite, il vettore velocità assume quindi, punto per punto, la direzione della tangente alla traiettoria. Le componenti del vettore velocità sono le derivate prime delle componenti del vettore spostamento:  $u_i = dX_i/dt$ . Il rapporto incrementale che figura nella (43) rappresenta la velocità media occorrente per spostarsi dal punto P al punto P' nell'intervallo  $\Delta t$  e pertanto anche lo spostamento che avverrebbe, se tale velocità si mantenesse costante, in un intervallo di tempo unitario. Estendendo il concetto al limite, si dice che la velocità è data dallo spostamento subito nell'unità di tempo, o, in termini di modulo, dallo spazio percorso nell'unità di tempo. In quanto rapporto di una lunghezza e di un tempo, nel SI la velocità si misura in  $ms^{-1}$ .

Nota che sia l'andamento della velocità in funzione del tempo,  $\vec{u}(t)$ , l'equazione della traiettoria in forma parametrica si ottiene per integrazione dell'equazione differenziale ordinaria che si ottiene uguagliando primo e terzo membro dell'uguaglianza (43):

$$\vec{X}(t) = \int_{t_0}^t \vec{u}(t) dt + \vec{X}(t_0) , \quad (44)$$

in cui  $\vec{X}(t_0)$ , posizione del punto materiale al tempo  $t=t_0$ , rappresenta la costante di integrazione che è necessario assegnare per individuare compiutamente la traiettoria.

Analogamente, l'accelerazione del punto materiale al tempo  $t$  è data dalla derivata prima del vettore velocità:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{u}(t + \Delta t) - \vec{u}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{u}}{dt}(t) , \quad (45)$$

quindi, dalla derivata seconda del vettore posizione. Se la funzione assegnata fosse l'accelerazione, occorrerebbe procedere dapprima all'integrazione dell'equazione differenziale espressa dalla (45):

$$\vec{u}(t) = \int_{t_0}^t \vec{a}(t) dt + \vec{u}(t_0),$$

in cui  $\vec{u}(t_0)$  è una costante di integrazione, e successivamente all'integrazione (44). Per tale operazione è quindi necessaria la specificazione di due costanti di integrazione arbitrarie.

L'accelerazione del punto materiale in una data posizione  $P$  lungo la traiettoria risulta contenuta in un piano detto *piano osculatore del moto*, contenente la tangente alla traiettoria nel punto  $P$  considerato ed il centro di curvatura locale  $O$  della traiettoria, rappresentato dal punto in cui, al limite per  $\Delta t$  tendente a zero, si intersecano le normali alla traiettoria nei punti  $P$  e  $P'$ . Il segmento  $\overline{OP}$  è normale alla tangente alla traiettoria e rappresenta il *raggio di curvatura locale*, la cui lunghezza indichiamo con  $r$ . Ai fini dell'analisi locale del moto è conveniente definire un sistema di riferimento detto *terna intrinseca al moto*, avente origine in  $P$  e formato, nell'ordine, da un primo asse  $s$  parallelo ed equiverso al vettore velocità (*tangente*), da un secondo asse  $n$  rivolto verso il centro di curvatura (*normale interna*) e da un terzo asse perpendicolare ai primi due, quindi anche al piano osculatore, detto *binormale*, costituente una terna destra (tangente, normale e binormale sono posti rispettivamente come gli assi  $x_1, x_2$  e  $x_3$  dei sistemi di riferimento considerati sinora).

Le componenti dell'accelerazione lungo gli assi della terna intrinseca sono date da:

$$\begin{aligned} a_s &= \frac{du}{dt} \\ a_n &= \frac{u^2}{r}, \\ a_b &= 0 \end{aligned} \quad (46)$$

in cui  $u = |\vec{u}|$  è il modulo della velocità nel punto  $P$ . La componente dell'accelerazione lungo la normale interna è detta *accelerazione centripeta* in quanto rivolta verso il centro di curvatura.

In forza delle equazioni (46), lungo una traiettoria rettilinea ( $r \rightarrow \infty$ ) l'accelerazione centripeta è nulla, mentre nel moto circolare uniforme ( $u = \text{cost}$ ;  $r = \text{cost}$ ) risulta nulla l'accelerazione tangenziale e costante nel tempo l'accelerazione centripeta.

### 1.3.4 Statica

#### 1.3.4.1 Principi fondamentali. Equilibrio delle forze

Le forze sono grandezze fisiche vettoriali che sono in grado di produrre effetti meccanici, ossia di mettere in movimento un corpo inizialmente in quiete o variarne le condizioni di moto. La statica studia sotto quali condizioni i corpi possono rimanere in quiete sotto l'azione di forze.

Per quanto riguarda il punto materiale, si postula che l'effetto su di esso di un sistema di forze applicategli è il medesimo del vettore risultante delle forze applicate<sup>6</sup>. Pertanto, l'operazione di somma (*composizione*) delle forze non altera lo stato di quiete o di moto del punto cui esse sono applicate (e del corpo cui, eventualmente, il punto appartiene). Condizione necessaria e sufficiente affinché un punto materiale sia in quiete (se lo è inizialmente) è che si annulli la risultante delle forze applicategli, ossia, il sistema di forze sia *in equilibrio*.

Nel caso di un corpo costituito da più punti materiali, esso si dice in quiete se è in quiete ciascuno dei punti che lo compongono. Poiché ciò comporta che la risultante delle forze applicate a ciascun punto sia nulla, anche il vettore risultante di tutte le forze applicate all'intero sistema di punti deve essere nullo. Inoltre, per la proprietà distributiva del prodotto vettoriale rispetto alla somma di vettori è anche nullo il momento risultante delle forze applicate a ciascun punto

<sup>6</sup> Per evidenziare che si parla di forze tutte applicate al (quindi agenti sul) punto materiale, in Meccanica Razionale si denota la somma delle forze come *la risultante* (al femminile); con il termine *il risultante* (al maschile) si intende, invece, la pura e semplice somma vettoriale di un insieme di forze, che può sempre eseguirsi a prescindere dalla coincidenza o meno dei punti di applicazione delle forze stesse.

materiale; pertanto, deve essere nullo anche il momento risultante dell'insieme di forze applicate al sistema di punti.

Tali conclusioni potrebbero, nella pratica, risultare di difficile utilizzazione, dal momento che parte delle forze agenti sui punti potrebbero essere esercitate da un punto su un altro (*forze interne*) e quindi, generalmente, non note a priori. Condizioni necessarie per la quiete più utili delle precedenti si ricavano in forza della Terza Legge di Newton (Principio di azione e reazione): *ad ogni azione che un corpo esercita su un altro, corrisponde una reazione di quest'ultimo uguale e contraria* (cioè: una forza di pari modulo e direzione e verso opposto applicata al primo corpo).

Applicando tale principio al calcolo del vettore risultante e del momento risultante delle forze applicate al sistema di punti, si elidono i contributi delle forze interne. Condizione necessaria perché un sistema di punti sia in quiete è quindi che siano nulli il vettore risultante ed il momento risultante delle sole *forze esterne* (non mutuamente esercitate fra punti del sistema). Se al sistema sono applicate  $N$  forze esterne  $\vec{F}_{e_k}$ , si hanno quindi le *equazioni cardinali della statica*<sup>7</sup>:

$$\vec{R}_e = \sum_{k=1}^N \vec{F}_{e_k} = 0 \quad , \quad (47)$$

$$\vec{M}_e = \sum_{k=1}^N \vec{M}_{e_k} = \sum_{k=1}^N \vec{r}_k \times \vec{F}_{e_k} = 0 \quad . \quad (48)$$

Un tale sistema di forze si dice, anch'esso, in equilibrio. Le condizioni (47) e (48) valgono per un sistema qualunque, anche deformabile, che è il caso che interessa trattando della quiete dei fluidi, studiata in Idrostatica<sup>8</sup>.

Nel caso di un corpo rigido le condizioni (47) e (48) sono anche sufficienti per garantire la quiete del corpo, se esso è in quiete quando gli viene applicato il sistema di forze. Tali condizioni risultano utili qualora si intenda eseguire il calcolo della spinta su una parete schematizzabile come un corpo rigido per eseguirne, ad esempio, la verifica a rottura o il progetto.

#### 1.3.4.2 Sistemi di forze equivalenti

Si dicono *equivalenti* due sistemi di forze aventi uguali vettore risultante e momento risultante rispetto ad un punto dello spazio. Due sistemi equivalenti soddisfacenti le (47) e (48) sono intercambiabili *su un corpo rigido*<sup>9</sup> in quanto aventi lo stesso effetto meccanico di garantire la quiete del corpo. Il concetto di equivalenza dei sistemi di forze è di grande importanza sia nella statica che nella dinamica dei corpi rigidi, come si vedrà successivamente, in quanto, in generale, sistemi di forze equivalenti comportano gli stessi effetti meccanici su un corpo rigido e sono perciò sempre intercambiabili. Per effetto della uguaglianza dei vettori risultanti, cambiando il punto rispetto al quale si calcolano i momenti risultanti di due sistemi equivalenti tali momenti cambiano rispetto al valore originario, ma si mantengono sempre uguali fra loro. L'importante conseguenza di ciò è che, volendo determinare un sistema di forze equivalente ad uno dato, oltre a renderne uguali i vettori risultanti, nell'imporre l'uguaglianza del momento risultante può scegliersi un punto qualunque, dunque il più comodo allo scopo.

Ogni sistema di forze è equivalente ad una forza più una *coppia* (costituita da due forze uguali in modulo e direzione, aventi verso opposto – quindi, vettore risultante nullo – e rette d'azione differenti) o a due forze, eventualmente sghembe (non complanari). Analogamente al caso del momento di un vettore rispetto ad un punto, la distanza fra le rette d'azione delle forze costituenti

<sup>7</sup> Non interessa nell'ambito del corso distinguere le forze, interne o esterne che siano, in forze attive e reazioni vincolari, com'è invece utile qualora sia di interesse la determinazione di queste ultime.

<sup>8</sup> È facile mostrare con un esempio come le condizioni (47) e (48) non siano sufficienti per la quiete di un corpo (sistema meccanico) non rigido. Consideriamo infatti il sistema meccanico costituito da due palle da biliardo che non siano a contatto; applicando alle due sfere due forze di uguale intensità dirette come la congiungente i centri delle sfere ma opposte in verso, il sistema di forze soddisfa chiaramente le (47) e (48), ma le sfere vengono ovviamente poste in movimento.

<sup>9</sup> Anche il fatto che sistemi di forze equivalenti non siano intercambiabili su un corpo non rigido può essere dimostrato facilmente ragionando su esempi simili al precedente.

una coppia è detto braccio della coppia; il modulo del momento della coppia rispetto ad un qualunque punto dello spazio è dato dal prodotto del modulo della singola forza per il braccio della coppia; il vettore momento della coppia è normale al piano contenente le rette d'azione delle due forze. Un sistema costituito da una forza più una coppia equivalente ad un sistema di forze dato si determina facilmente. Poiché la coppia ha vettore risultante nullo, la forza deve essere data dal vettore risultante del sistema dato. Un sistema equivalente si ottiene applicando il vettore risultante in un qualunque punto dello spazio (*centro di riduzione* del sistema di forze) ed aggiungendo una coppia di momento pari al momento risultante del sistema dato calcolato rispetto a tale punto, poiché il momento del vettore risultante rispetto al proprio punto di applicazione (come rispetto a tutti i punti della propria retta d'azione) è nullo.

Poiché le operazioni elementari di scorrimento e composizione (o decomposizione) delle forze non alterano né il vettore risultante, né il momento risultante, tali operazioni possono essere utilizzate, a partire da un sistema di forze dato applicato ad un corpo rigido, per ottenerne uno equivalente, eventualmente più semplice. Se, dato un sistema di forze, è possibile ottenerne uno equivalente consistente in un'unica forza, questa si dice *la risultante* (al femminile) del sistema<sup>10</sup>. Tale circostanza si verifica se, rispetto ad un qualche punto dello spazio, il momento risultante del sistema dato è nullo, poiché adottando tale punto sia come punto di applicazione della risultante che come polo per il calcolo del momento della risultante, tale sistema soddisfa le condizioni di equivalenza. La risultante potrà perciò essere applicata in tale punto, come in uno qualunque dei punti della corrispondente retta d'azione della risultante.

Nel caso in cui un sistema di forze sia equivalente ad una sola forza (la risultante), si enuncia il *Teorema di Varignon*, secondo il quale il momento della risultante rispetto ad un qualunque punto dello spazio è uguale al corrispondente momento risultante del sistema di forze.

Un sistema di forze tutte giacenti su uno stesso piano il cui vettore risultante non sia nullo è equivalente ad una sola forza, perché ad essa si può sempre pervenire mediante operazioni di scorrimento e composizione. In tal caso è agevole determinare la retta d'azione della risultante mediante il Teorema di Varignon, assumendo ad incognita il valore del suo braccio rispetto ad un qualunque punto dello spazio (che però, nel caso specifico, sarà conveniente scegliere nel piano che contiene le forze), la posizione relativa della retta d'azione rispetto al punto dovendo essere congruente con il verso del momento risultante del sistema di forze, che risulta perpendicolare al piano (così come i momenti delle singole forze) se il polo è scelto su di esso. Per un osservatore che diriga lo sguardo perpendicolarmente al piano che contiene le forze, sono rivolti verso di lui i vettori momento delle forze cui è associabile una rotazione in senso antiorario rispetto al polo, sono rivolti in senso opposto i vettori momento delle forze che ruotano in senso orario. Al verso dei vettori momento è quindi associabile, in sostanza, un segno corrispondente al verso di rotazione delle forze rispetto al polo, se orario o antiorario. Ai fini dell'applicazione del teorema di Varignon, tuttavia, è ovviamente irrilevante quale verso di rotazione venga assunto come positivo.

Ad esempio, con riferimento al sistema di tre vettori giacenti sul piano  $x_1 x_2$  di cui alla Figura 9a, per chiarezza assunti tutti rotanti in senso orario rispetto al polo  $O$ , la posizione della risultante, calcolata mediante la poligonale in Figura 9b<sup>11</sup>, si determina intanto osservando che il suo momento deve essere associato ad una rotazione oraria, come il momento risultante delle tre forze (Figura 9c); il braccio incognito  $\delta_x$  si determina quindi imponendo l'uguaglianza:

$$F_1\delta_1 + F_2\delta_2 + F_3\delta_3 = R\delta_x .$$

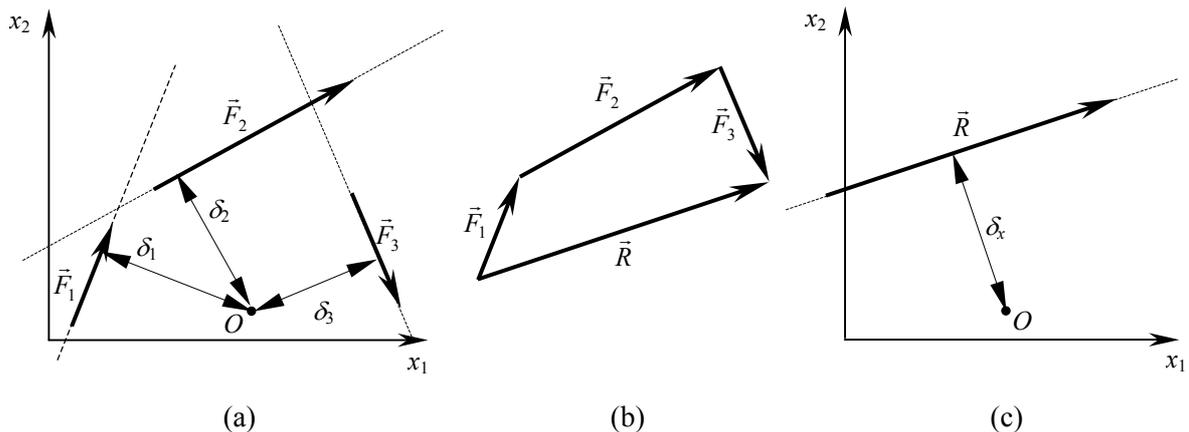
#### **1.3.4.3 Centro di un sistema di forze parallele. Baricentro. Geometria delle masse.**

Un sistema costituito da forze tutte fra loro parallele (*sistema di forze parallele*) applicate ad un corpo rigido equivale ad una sola forza o ad una coppia a seconda che il vettore risultante sia

<sup>10</sup> Un criterio generale per stabilire quando un sistema di forze equivalga ad una sola forza è basato sull'*invariante* del sistema,  $I = \vec{M} \cdot \vec{R}$  (vedi D. Graffi, *Elementi di Meccanica Razionale*), di cui tuttavia non si tratterà in questa sede perché i sistemi di forze equivalenti ad una sola forza con cui avremo a che fare sono sempre facilmente identificabili sulla base di altri criteri.

<sup>11</sup> La poligonale di Figura 9b costituisce un esempio di come sia più conveniente operare la somma di più di due vettori senza tracciare parallelogrammi.

diverso da zero o uguale a zero rispettivamente. In particolare, il primo caso si verifica certamente se le forze sono tutte equiverse (*cospiranti*). Poiché due forze qualunque del sistema, in quanto parallele, sono anche complanari, la posizione della risultante (o il valore della coppia) si può ottenere facilmente applicando ripetutamente il Teorema di Varignon (sulla base di tale procedimento si dimostra in effetti la stessa equivalenza del sistema ad una sola forza o ad una coppia). Caratteristica importantissima di tale classe di sistemi di forze è che, nel caso il vettore risultante sia diverso da zero, la risultante può essere applicata in un punto, detto *centro di un sistema di forze parallele*, il quale resta invariato al ruotare delle forze, purché esse rimangano sempre parallele, con uguale modulo e applicate negli stessi punti.



**Figura 9. Schema esemplificativo dell'applicazione del Teorema di Varignon per la determinazione della retta d'azione della risultante di un sistema di forze.**

Nel caso il sistema abbia vettore risultante non nullo, la posizione del centro di  $N$  forze parallele si determina nel seguente modo. Per una qualunque direzione delle forze, si consideri un versore avente la stessa direzione delle forze ed orientato arbitrariamente,  $\vec{i}_p$ . Detta  $F_{pk} = \vec{F}_k \cdot \vec{i}_p$  la componente della generica ( $k$ -esima) forza lungo la direzione orientata individuata dal versore, il vettore posizione del centro del sistema di forze parallele è dato dalla relazione:

$$\vec{x}_c = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{x}_k F_{pk}}{\sum_{i=1}^N F_{pk}}, \quad (49)$$

e la corrispondente generica coordinata da:

$$x_{c_i} = \frac{\sum_{i=1}^N x_{ik} F_{pk}}{\sum_{i=1}^N F_{pk}}. \quad (50)$$

Un caso notevole di sistema di forze parallele è dato dalle forze peso di un sistema di punti materiali rigidamente vincolati, che non possano quindi mutare la posizione relativa, per semplicità di rappresentazione esemplificato in Figura 10 da un sistema di punti complanari. Stante l'indeformabilità del sistema, durante il movimento del sistema i pesi dei punti, mantenendosi sempre verticali, ruotano rispetto al sistema di riferimento solidale con il sistema, mantenendosi però sempre reciprocamente paralleli ed inalterati in modulo. Per le proprietà menzionate di un

sistema di questo tipo, le coordinate del centro del sistema di forze nel riferimento solidale al sistema di punti rimangono anch'esse immutate durante il moto di quest'ultimo.

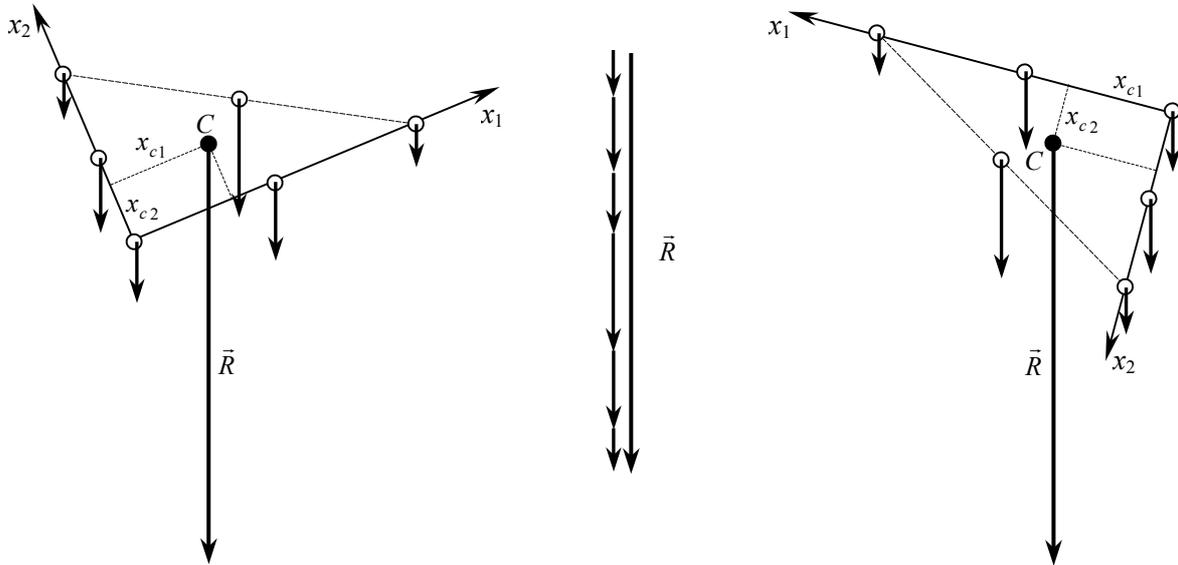


Figura 10. Sistema di punti materiali vincolati rigidamente.

Essendo i moduli dei pesi dei punti materiali dati dalle rispettive masse,  $m_k$ , moltiplicate per l'accelerazione di gravità,  $g$ , in virtù della costanza di quest'ultima le coordinate del centro del sistema di forze peso (*baricentro* del sistema di punti, generalmente indicato con il simbolo  $G$ ) sono legate alla distribuzione delle masse e date dalla:

$$x_{G_i} = \frac{\sum_{i=1}^N x_{ik} m_k}{\sum_{i=1}^N m_k} = \frac{\sum_{i=1}^N x_{ik} m_k}{M}, \quad (51)$$

in cui  $M$  è la massa complessiva del sistema di punti materiali.

Nel caso di un sistema continuo omogeneo ideale<sup>12</sup>, caratterizzato da una densità  $\rho$  (massa per unità di volume) uniforme su un volume  $V$ , un volume elementare, infinitesimo,  $dV$  è assimilabile ad un punto materiale di massa infinitesima  $dm = \rho dV$ . Essendo il sistema composto di infiniti volumi elementari infinitesimi, le coordinate del suo baricentro si ottengono sostituendo, in formule del tipo (51), integrali estesi al volume  $V$  alle sommatorie estese all'insieme di punti materiali:

$$x_{G_i} = \frac{\int_V x_i \rho dV}{\int_V \rho dV} = \frac{\int_V x_i dV}{\int_V dV} = \frac{\int_V x_i dV}{V}. \quad (52)$$

La posizione del baricentro di un solido omogeneo è perciò dipendente unicamente dalle caratteristiche geometriche del solido. Per questo motivo, nonché per il fatto che a formule del tipo (52) si perviene anche in problemi che prescindono dalla presenza di forze peso, il termine baricentro è utilizzato, nella branca della Meccanica denominata *Geometria delle masse*, con riferimento esclusivo alle caratteristiche geometriche dei solidi – ma anche, per estensione, di

<sup>12</sup> La rappresentazione della materia come sistema continuo è qui assunta su base intuitiva. Tale semplificazione, nota sotto il nome di *schema di mezzo continuo*, è discussa in qualche dettaglio nel capitolo seguente in relazione al concetto di particella fluida.

superfici e curve. Nel prosieguo si farà riferimento esclusivo al caso di figure omogenee, senza ulteriore specificazione. Inoltre, per consuetudine il termine baricentro è talora utilizzato per identificare, quello che, più propriamente, dovrebbe essere indicato come centro di un sistema di forze parallele diverse dalle forze peso. Si osservi anche che le (49)-(52) rappresentano l'espressione del Teorema di Varignon per il caso particolare di un sistema di forze parallele ed in tale modo vengono talora presentate. Le quantità a numeratore delle (50) e (51) e del secondo e terzo membro della (52) sono detti *momenti statici* rispetto al piano coordinato normale all'asse  $x_i$  rispettivamente del sistema di forze, della distribuzione di masse e del solido continuo considerati.

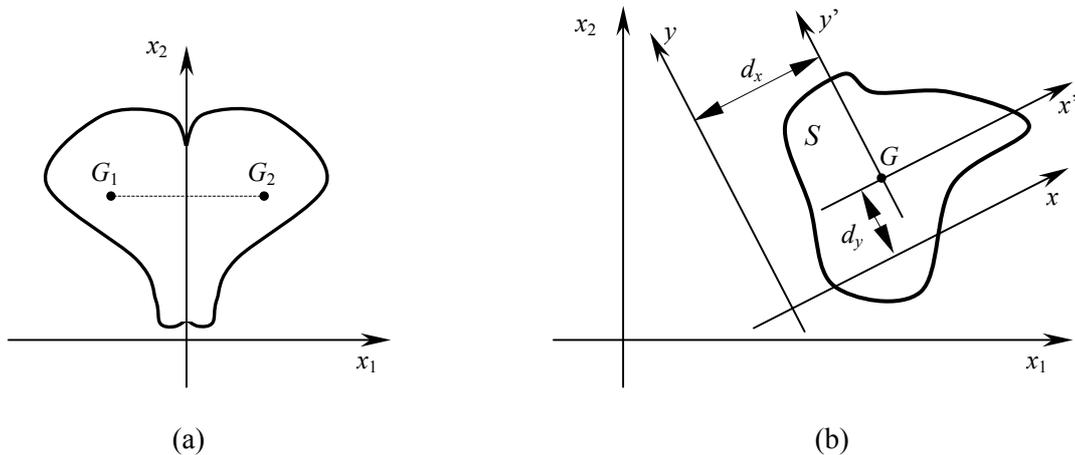
Con riferimento al caso continuo, ed immediata estensione al caso discreto (così come al caso di superfici e curve nello spazio), dati due volumi,  $V_1$  e  $V_2$ , aventi baricentri di coordinate  $x_{G1_i}$  e  $x_{G2_i}$ , le coordinate  $x_{G_i}$  del baricentro del volume  $V$  costituito dall'insieme dei due volumi,  $V = V_1 + V_2$ , si determina come segue:

$$x_{G_i} = \frac{\int_V x_i dV}{V} = \frac{\int_{V_1} x_i dV + \int_{V_2} x_i dV}{V_1 + V_2} = \frac{x_{G1_i} V_1 + x_{G2_i} V_2}{V_1 + V_2} . \quad (53)$$

Le coordinate del baricentro del volume totale si ottengono quindi come medie pesate delle corrispondenti coordinate dei baricentri dei singoli volumi, con pesi dati dai volumi. Tale formula può anche essere utilizzata per determinare le coordinate del baricentro di una parte di un volume, perché si può anche scrivere, con riferimento all'esempio precedente:

$$x_{G1_i} = \frac{x_{G_i} (V_1 + V_2) - x_{G2_i} V_2}{V_1} = \frac{x_{G_i} V - x_{G2_i} V_2}{V - V_2} .$$

Pertanto, la relazione (53) è generale, purché si adotti l'accorgimento di considerare con segno negativo il volume ( $V_2$  nel caso specifico) che occorre sottrarre al volume totale per ottenere la parte di quest'ultimo ( $V_1$ ) della quale si desidera determinare le coordinate del baricentro. Tali formule risultano particolarmente utili nel caso di figure composte da elementi più semplici, per le quali le espressioni delle coordinate dei baricentri possano reperirsi sui manuali tecnici, eliminando così la necessità di effettuare materialmente l'operazione di integrazione.



**Figura 11. (a) figura solida dotata di un piano di simmetria; (b) schema di calcolo del momento di inerzia e del momento centrifugo di una figura piana.**

Se un solido è dotato di un piano di simmetria, allora il suo baricentro giace su tale piano. Infatti, assunto un sistema di riferimento avente due assi coordinati giacenti sul piano di simmetria (come  $x_2$  e  $x_3$  – quest'ultimo normale al piano del foglio – nell'esempio di Figura 11a), la coordinata del

baricentro del solido relativa all'asse normale a tale piano ( $x_1$  nell'esempio) è nulla, in quanto ottenibile dalla (53) per uguali volumi delle due parti speculari del solido, aventi baricentri,  $G_1$  e  $G_2$ , pure simmetrici rispetto al piano  $x_2 x_3$  e perciò aventi coordinate  $x_1$  uguali in valore assoluto ma di segno opposto.

Se un solido ha due piani di simmetria, dovendo il baricentro giacere su entrambi i piani, esso deve appartenere alla retta intersezione dei due piani. In particolare, un solido dotato di un asse di simmetria cilindrica – quindi, di infiniti piani di simmetria – ha il suo baricentro su tale asse. Alle stesse conclusioni si perviene nel caso di superfici o curve piane dotate di rette di simmetria. Nei manuali tecnici le espressioni delle coordinate dei baricentri sono fornite con la massima sintesi possibile sfruttando eventuali proprietà di simmetria della figura.

Altre grandezze importanti studiate nella geometria delle masse sono il *momento di inerzia* ed il *momento centrifugo*, che verranno qui considerati limitatamente al caso di figure piane. Il momento di inerzia di una figura piana di superficie  $S$  rispetto ad una retta del piano, per esempio l'asse  $y$  di Figura 11b, è dato da:

$$I_{xx} = \int_S x^2 dS ,$$

mentre il momento centrifugo rispetto a due assi ortogonali (p.es. gli assi  $xy$  della stessa figura) è definito da:

$$I_{xy} = \int_S xy dS . \quad (54)$$

Il momento d'inerzia è ovviamente definito positivo, essendo tale la funzione integranda,  $x^2$ . Il momento centrifugo può avere segno qualunque. Esso è nullo qualora uno dei due assi coordinati sia asse di simmetria per la figura. Infatti, in tal caso la figura piana può riguardarsi come costituita da infinite coppie di superfici elementari  $dS$  disposte simmetricamente rispetto a tale asse aventi la stessa coordinata corrispondente all'asse di simmetria ma coordinate relative all'altro asse opposte, i cui contributi all'integrale (54) sono pertanto individualmente (e quindi complessivamente) nulli.

Il momento di inerzia di una figura piana rispetto ad una retta del piano è esprimibile come somma del momento di inerzia rispetto alla retta parallela passante per il baricentro e del prodotto della superficie della figura per la distanza fra le due rette (*Teorema di trasposizione di Huygens*). Ad esempio, nel caso di Figura 11b si ha:

$$I_{xx} = I_{x'x'} + d_x^2 S , \quad (55)$$

avendo indicato con  $I_{x'x'}$  il momento di inerzia della superficie calcolato rispetto all'asse baricentrico  $y'$ . Analoga formula si ha per il momento centrifugo:

$$I_{xy} = I_{x'y'} + d_x d_y S . \quad (56)$$

Dalla (55) si evince che il minimo momento di inerzia rispetto ad un fascio di assi paralleli è quello calcolato rispetto alla retta baricentrica.

I momenti statici (o del primo ordine) hanno dimensioni  $[L^3]$  e si misurano perciò in  $m^3$  in unità SI. I momenti del secondo ordine, quali sono il momento d'inerzia ed il momento centrifugo hanno dimensioni  $[L^4]$  e si misurano in  $m^4$  in unità SI.

### 1.3.5 Dinamica

La dinamica studia il moto dei corpi in relazione alle cause che lo provocano. Essa si basa su alcuni principi fondamentali noti sotto il nome di leggi di Newton<sup>13</sup>, così esprimibili:

<sup>13</sup> Tale denominazione ricorda chi di tali principi diede gli enunciati più precisi. Tuttavia, alla loro elaborazione contribuirono in misura sostanziali altri scienziati, fra i quali particolarmente Galileo Galilei.

1. (Principio di inerzia) Un punto materiale non soggetto a forze (o soggetto a forze a vettore risultante nullo) o è in quiete o si muove di moto rettilineo uniforme;
2. (Legge fondamentale della dinamica) L'accelerazione  $\vec{a}$  di un punto materiale è proporzionale alla forza  $\vec{F}$  applicatagli, secondo una costante di proporzionalità  $m$  detta *massa inerziale*:

$$\vec{F} = m\vec{a} ; \quad (57)$$

3. (Principio di azione e reazione) Ad ogni azione che un punto materiale esercita su un altro, corrisponde una reazione di quest'ultimo uguale e contraria (cioè: una forza di pari modulo e direzione e verso opposto applicata al primo punto materiale).

Il principio di azione e reazione, già ricordato nei richiami di statica, ha quindi validità anche nel caso di movimento di punti materiali, determinando analoghe importanti semplificazioni.

Qualora si considerino unicamente *forze reali*, ossia esercitate effettivamente da un corpo su un altro, il principio di inerzia ha validità limitata ai sistemi di riferimento detti *inerziali*, identificabili sulla base del rispetto di tale principio, il cui prototipo identificato da Newton era un sistema riferito alle stelle fisse. Peraltro, qualunque sistema di riferimento che si muova di moto traslatorio (privo di rotazioni) uniforme (a velocità costante) rispetto ad un sistema inerziale è esso stesso inerziale. Infatti, le velocità misurate nei due sistemi differiscono per quantità (intese come vettori) costanti; un moto che risulti rettilineo e uniforme in uno dei due sistemi è perciò tale anche nel secondo. In sostanza, ciò che priva un sistema non inerziale della proprietà di vedervi rispettato il principio di inerzia è l'essere accelerato rispetto ad un sistema inerziale. L'importanza dei relativi effetti in termini di mancato rispetto del principio di inerzia dipende quindi dall'entità delle accelerazioni del sistema non inerziale rispetto a quello inerziale.

Un sistema di riferimento solidale con la Terra non è inerziale in conseguenza del moto di rotazione terrestre. Tuttavia, in determinate condizioni, gli effetti non inerziali possono risultare non rilevanti. Assumendo senz'altro tali condizioni, due esempi di sistemi di riferimento non inerziali sono costituiti da un riferimento solidale con una automobile che percorra una strada di moto rettilineo accelerato ed un riferimento rotante attorno ad uno dei suoi assi coordinati – per esempio, l'asse di una giostra. Nel primo caso, i passeggeri vedono gli alberi che fiancheggiano la strada muoversi di moto rettilineo accelerato di pari intensità ma in senso opposto rispetto al moto dell'automobile, mentre gli alberi risultano fermi rispetto ad un riferimento solidale con un paracarro a bordo strada e soggetti al sistema di forze equilibrato costituito dal proprio peso, una eventuale spinta del vento, e delle reazioni vincolari del terreno esercitate attraverso le radici. Nel secondo caso, le persone sedute sui sedili della giostra rotante con velocità angolare costante vedono gli edifici circostanti muoversi di moto circolare uniforme (quindi, accelerato, vedi § 1.3.3) alla medesima velocità angolare ed in senso opposto al verso di rotazione della giostra, mentre essi risultano fissi rispetto ad un riferimento solidale col casello del giostrante ed anch'essi soggetti ad un sistema di forze reso equilibrato dalle reazioni vincolari agenti sulle fondazioni.

I conti non tornano anche per quanto riguarda la dinamica dei corpi solidali con i sistemi accelerati in relazione alle sole forze esercitate da altri corpi. Infatti, un passeggero dell'automobile è fermo rispetto al riferimento solidale ad essa, pur subendo una spinta in avanti da parte dello schienale del sedile; lo stesso dicasi per una persona sulla giostra, nonostante essa subisca unicamente una spinta verso l'asse di rotazione (centripeta) da parte del seggiolino, a sua volta collegato ad un tirante, che impedisce al passeggero di andare, rigorosamente, per la tangente alla traiettoria circolare percorsa.

Un artificio per ottenere il rispetto delle leggi della dinamica di Newton in sistemi non inerziali consiste nel definire delle forze fittizie dette *forze d'inerzia*. Riscrivendo la (57) nella forma:

$$\vec{F}_s - m_p \vec{a}_i = 0 \quad (58)$$

per un certo passeggero dell'automobile di massa  $m_p$  sul quale il sedile esercita la forza  $\vec{F}_s$ , imprimendogli la medesima accelerazione  $\vec{a}_i$  cui è soggetta l'automobile, misurata rispetto al

sistema inerziale solidale al paracarro, ed attribuendo al termine  $-m_p \vec{a}_i$  il significato di una forza agente su di esso – ma in realtà non esercitata da alcun corpo – la (58) assume l'aspetto dell'equazione cardinale della statica (47), che effettivamente garantisce le condizioni di quiete del passeggero rispetto al riferimento solidale con l'automobile. Allo stesso modo, la condizione di equilibrio della persona sulla giostra viene espressa da una simile equazione, il termine  $-m_p \vec{a}_{pi}$  rappresentando, in quanto di verso opposto alla accelerazione centripeta misurata nel riferimento fisso, quella che viene comunemente denominata *forza centrifuga*, appartenente quindi, anch'essa, alla classe delle forze di inerzia, o fittizie. La percezione fisica della forza centrifuga è, in realtà, unicamente la percezione della tendenza del corpo a procedere di moto rettilineo uniforme nella direzione della tangente alla traiettoria, contrastata dal tirante collegato al seggiolino (o dalla portiera dell'automobile quando, al termine del rettilineo, essa descrive una curva).

In conclusione, attribuiremo la qualifica di forze di inerzia applicate ad un corpo a termini dati dal prodotto della massa del corpo (eventualmente specifica all'unità di volume) per l'accelerazione del corpo misurata rispetto ad un sistema di riferimento inerziale, cambiati di segno, o, comunque, derivanti da termini di questo tipo. Negli esempi fatti, i corpi considerati erano in condizioni di quiete rispetto ai rispettivi sistemi di riferimento accelerati. In generale, il Principio di D'Alembert consente di descrivere il moto di un corpo rispetto ad un sistema di riferimento non inerziale mediante equazioni di equilibrio statico fra forze reali e forze d'inerzia.

Una importante forza d'inerzia che appare nel caso di moto rispetto ad un sistema di riferimento rotante (quindi non inerziale) è la forza di Coriolis, che è essenziale per descrivere la circolazione oceanica o atmosferica, ma della quale non ci occuperemo perché non importante ai fini della descrizione dei fenomeni di interesse del corso. Invece, la forza centrifuga legata al moto di rotazione terrestre viene effettivamente considerata, sommata alla forza di attrazione gravitazionale terrestre, per fornire quella che, sinteticamente, viene chiamata *forza di gravità*. Pertanto, sebbene nel prosieguo l'impostazione delle equazioni della statica e del movimento verrà eseguita apparentemente come per sistemi di riferimento inerziali, esse tengono in realtà conto delle caratteristiche non inerziali del riferimento terrestre. Il contributo della forza centrifuga non è peraltro importante da un punto di vista tecnico rispetto alla forza di origine gravitazionale, tanto più che entrambe variano da punto a punto della superficie terrestre, in relazione sostanzialmente alla latitudine. Si assume perciò normalmente un valore medio della accelerazione di gravità  $g=9,80665 \text{ ms}^{-2}$  – indipendente, come è noto, dalle caratteristiche dei corpi – approssimabile per scopi tecnici dal valore  $g=9,81 \text{ ms}^{-2}$ . La direzione della accelerazione (e quindi della forza) di gravità è la direzione verticale – che indicheremo, come già in precedenza mediante la coordinata  $z$  – materializzata dalla direzione del filo a piombo.

Sulla base della legge fondamentale della dinamica (57) è ora possibile definire l'unità di misura SI della forza, denominata Newton (simbolo N), come quella forza che impressa ad un punto materiale di massa unitaria (1 kg) gli imprime l'accelerazione di  $1 \text{ ms}^{-2}$ :  $1 \text{ N} = 1 \text{ kg m s}^{-2}$ . In termini di dimensioni fisiche:  $[F] = [\text{ML T}^{-2}]$ . Poiché la più agevole misura delle forze è di tipo statico (mediante *dinamometri*), non stupisce che per lungo tempo l'unità di misura della forza sia stata costituita dal chilopond (kp), dato dalla forza che imprime alla massa unitaria l'accelerazione di gravità  $g=9,80665 \text{ ms}^{-2}$  (cioè la forza peso agente su una massa unitaria):  $1 \text{ kp} = 9,80665 \text{ kg m s}^{-2} = 9,80665 \text{ N}$ . Il momento di una forza ha dimensioni fisiche  $[\text{ML}^2 \text{ T}^{-2}]$  e viene misurata in Newton metro (Nm) nel SI.

La legge fondamentale della dinamica (57) è esprimibile in una forma alternativa, ricordando che l'accelerazione è la derivata prima della velocità (equazione (45)) e che la massa del punto materiale si mantiene costante durante il moto. Si può quindi scrivere:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d(m\vec{u})}{dt} = \frac{d\vec{q}}{dt}, \quad (59)$$

in cui la grandezza vettoriale  $\vec{q} = m\vec{u}$  è detta *quantità di moto* del punto materiale, ha dimensioni fisiche  $[q] = [\text{ML T}^{-1}]$  e viene misurata in  $\text{kg m s}^{-1}$  nel SI.

La quantità di moto di un sistema di punti  $N$  materiali in movimento è data dalla somma vettoriale (vettore risultante) delle quantità di moto dei singoli punti materiali:

$$\vec{q} = \sum_{k=1}^N m_k \vec{u}_k .$$

Scrivendo la (59) per ciascuno dei punti materiali del sistema, procedendo alla sommatoria membro a membro ed invocando – come già fatto per la deduzione delle equazioni cardinali della statica – il principio di azione e reazione, si ottiene l'importante relazione nota sotto il nome di *Teorema della quantità di moto* ed esprime il *Principio di bilancio della quantità di moto*:

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \frac{d\left(\sum_{k=1}^N m_k \vec{u}_k\right)}{dt} = \vec{R}_e , \quad (60)$$

in cui  $\vec{R}_e$  è la risultante delle sole forze esterne. Definito poi, conformemente alla (30), *il momento della quantità di moto* di un punto materiale rispetto ad un polo  $O$ :

$$\vec{I} = \vec{r} \times \vec{q}$$

ed il momento della quantità di moto del sistema di punti:

$$\vec{I} = \sum_{k=1}^N \vec{r}_k \times \vec{q}_k ,$$

si può dedurre l'equazione:

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \frac{d\left(\sum_{k=1}^N \vec{r}_k \times \vec{q}_k\right)}{dt} = \vec{M}_e , \quad (61)$$

in cui  $\vec{M}_e$  è il momento risultante delle sole forze esterne calcolato rispetto allo stesso polo  $O$ , equazione (48). Le equazioni (60) e (61) prendono anche il nome di *equazioni cardinali del moto* dei sistemi meccanici.

Il momento della quantità di moto ha dimensioni fisiche  $[\Gamma] = [ML^2 T^{-1}]$  e viene misurato in  $kg\ m^2\ s^{-1}$  nel SI.

Detta  $m = \sum_k m_k$  la massa complessiva del sistema di punti materiali, si dimostra che il moto del baricentro del sistema è retto dalla:

$$\vec{R}_e = m\vec{a}_G , \quad (62)$$

dove  $\vec{a}_G$  è l'accelerazione del baricentro. Il baricentro di un sistema di punti materiali si muove pertanto come un punto materiale di massa pari alla massa totale del sistema soggetto alla risultante delle forze esterne applicate al sistema. Almeno entro certi limiti, tale proprietà fornisce una giustificazione formale della assimilazione a punti materiali di corpi di dimensioni piccole rispetto alle dimensioni caratteristiche dell'ambiente circostante, così come del concetto stesso di punto materiale.

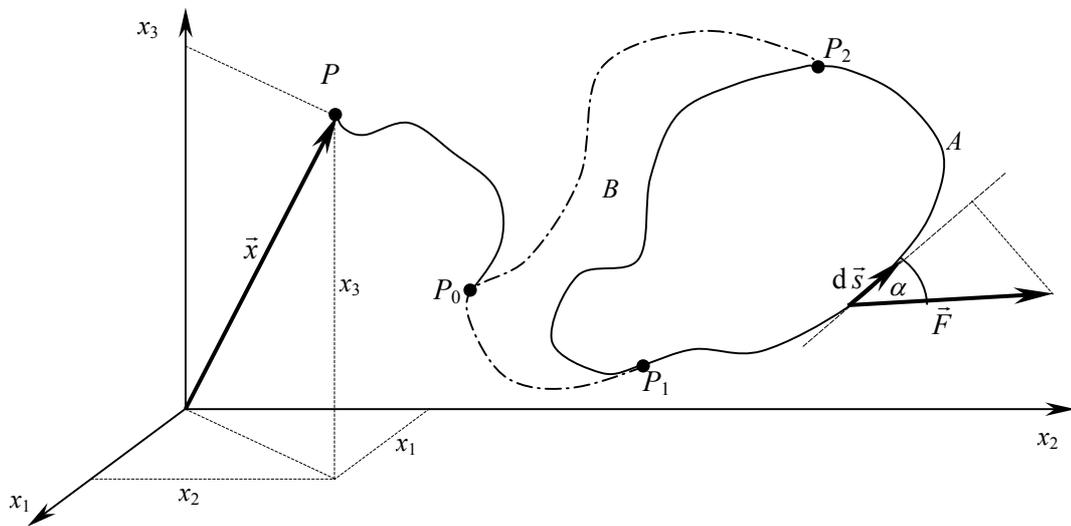
Una forza applicata ad un punto materiale inizialmente in quiete lo mette in movimento imprimendogli una accelerazione espressa dalla legge fondamentale della dinamica (57), con conseguente spostamento in direzione e verso concordi con quello della forza. Con riferimento a questo caso particolare, si dice *lavoro* elementare della forza  $F$  relativo ad uno spostamento elementare  $ds$  la quantità:

$$dL = F\ ds . \quad (63)$$

Il lavoro della forza corrispondente ad uno spostamento finito  $\Delta s$  si ottiene integrando l'equazione (63). Tenendo conto della forma scalare della (57) e della definizione di velocità corrispondente, per il caso specifico, alla (43),  $u = ds/dt$  si ottiene (*Teorema delle forze vive*):

$$L = \int_{\Delta s} dL = \int_{\Delta s} F ds = \int_{\Delta s} m \frac{du}{dt} ds = m \int_{\Delta s} \frac{du}{dt} u dt = m \int_{u_1}^{u_2} u du = \frac{1}{2} m (u_2^2 - u_1^2), \quad (64)$$

in cui  $u_1$  e  $u_2$  sono le velocità del punto materiale agli estremi dello spostamento  $\Delta s$  (la prima nulla nell'ipotesi di punto inizialmente in quiete). La quantità  $\frac{1}{2} mu^2$  è detta *energia cinetica* del punto materiale. Il lavoro della forza  $F$  è pertanto pari alla variazione di energia cinetica del punto materiale. Lavoro di una forza ed energia cinetica sono grandezze della stessa specie, aventi dimensioni fisiche  $[ML^2 T^{-2}]$ . L'unità di misura SI corrispondente è il lavoro compiuto dalla forza di 1 N per uno spostamento di 1 m, denominata Joule (simbolo J):  $1 J = 1 N m = 1 kg m^2 s^{-2}$ .



**Figura 12. Schema illustrativo del lavoro delle forze di un campo.**

Nel caso generale di uno spostamento non parallelo alla forza (vedi Figura 12), il lavoro elementare si valuta sulla base della componente della forza  $\vec{F}$  lungo lo spostamento elementare  $d\vec{s}$ , fornito dal prodotto scalare (vedi equazioni (25), (28) e (31)):

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F ds \cos \alpha = F_1 ds_1 + F_2 ds_2 + F_3 ds_3 = F_i ds_i .$$

Conformemente alla definizione di campo vettoriale, un campo di forze è costituito da una regione dello spazio nella quale agisca, punto per punto, una forza eventualmente funzione del tempo, esprimibile in termini sintetici come:

$$\vec{F}(\vec{x}, t) = \vec{F}(x_1, x_2, x_3, t) . \quad (65)$$

Usualmente, si identifica con il termine campo la stessa rappresentazione funzionale (65) del vettore forza.

Una classe particolarmente importante di campi di forze è data dai *campi di forze conservativi*. Un campo di forze si dice conservativo se, dati due punti qualunque del campo,  $P_1$  e  $P_2$ , raffigurati in Figura 12, il lavoro compiuto dalle forze del campo in relazione ad uno spostamento da un punto all'altro, dato dall'integrale di linea (equazione (22)):

$$L_{P_1 P_2} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{P_1}^{P_2} F \cos \alpha ds = \int_{P_1}^{P_2} (F_1 ds_1 + F_2 ds_2 + F_3 ds_3) = \int_{P_1}^{P_2} F_i ds_i$$

non dipende dal particolare percorso seguito, ma soltanto dalla posizione dei punti estremi del percorso. Presi ora un punto  $P_0$  inteso fisso ed uno  $P$  variabile, identificato dal suo vettore posizione  $\vec{x}$  (vedi Figura 12), il lavoro relativo ad un qualunque percorso da  $P_0$  a  $P$ , dovendo dipendere unicamente dalla posizione di  $P$  (a  $P_0$  fissato), può essere espresso come:

$$L_{P_0 P} = \int_{P_0}^P \vec{F} \cdot d\vec{s} = \phi(\vec{x})$$

in cui la funzione scalare  $\phi(\vec{x})$  così definita è detta *potenziale* del campo di forze.

Mantenuto sempre il riferimento al punto  $P_0$  fissato, il lavoro corrispondente ad uno spostamento qualunque fra due punti  $P_1$  e  $P_2$  può sempre esprimersi, in particolare, relativamente ad un percorso passante per  $P_0$  (riportato a tratto e punto in Figura 12). Ricordate le proprietà (14) e (15) degli integrali (valide anche per gli integrali di linea), si può quindi scrivere:

$$L_{P_1 P_2} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{P_1}^{P_0} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{P_0}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \phi(\vec{x}_2) - \phi(\vec{x}_1).$$

Pertanto, la differenza del valore del potenziale di un dato campo di forze fra due punti fornisce il lavoro delle forze del campo relativo ad un qualunque percorso che congiunga i due punti. La funzione potenziale come sopra definita assume ovviamente il valore zero in  $P_0$ . La scelta del punto  $P_0$  è tuttavia inessenziale, dal momento che il lavoro corrispondente ad un certo percorso è dato dalla differenza dei potenziali nei punti estremi: i medesimi risultati si otterrebbero quindi utilizzando una funzione  $\phi^*(\vec{x}) = \phi(\vec{x}) + c$ , con  $c = \text{cost}$ . In altri termini: il potenziale di un campo di forze conservativo è determinato a meno di una costante inessenziale.

Si dice *energia potenziale* di un campo di forze conservativo una funzione scalare data dal potenziale del campo cambiato di segno:

$$E(\vec{x}) = -\phi(\vec{x}).$$

Pertanto, ad una diminuzione del potenziale corrisponde un aumento dell'energia potenziale, e viceversa.

Nel caso il campo di forze sia descritto da una funzione regolare, condizione necessaria e sufficiente perché il campo sia conservativo è che le forze del campo siano date, punto per punto, dal gradiente del potenziale:

$$\vec{F} = \nabla \phi. \quad (66)$$

Ogni campo di forze esprimibile come gradiente di una funzione scalare è pertanto conservativo. In tal caso risulta nullo il *rotore* (o *rotazione*) del campo di forze (che è quindi *irrotazionale*), dato da:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \partial F_3/\partial x_2 - \partial F_2/\partial x_3 \\ \partial F_1/\partial x_3 - \partial F_3/\partial x_1 \\ \partial F_2/\partial x_1 - \partial F_1/\partial x_2 \end{pmatrix}.$$

L'esempio più importante di campo di forze conservativo è dato dal campo della forza di gravità (o forza peso). Poiché su ogni corpo è esercitata una forza peso proporzionale alla massa del corpo, è conveniente rappresentare il campo delle forze di gravità agenti sull'unità di massa, dato dal campo

del vettore accelerazione di gravità, talora indicato con il simbolo  $\vec{g}$ . Tale campo ha intensità che può essere considerata uniforme su estensioni sufficientemente limitate e pari al valore medio  $g \cong \text{cost} \cong 9,80665 \text{ ms}^{-2} \cong 9,81 \text{ ms}^{-2}$ . Rivolto, come d'uso, l'asse della verticale in verso opposto alla forza di gravità e ricordata l'espressione (41) del corrispondente versore in funzione della coordinata verticale  $z$ , l'espressione del campo delle forze di gravità specifiche all'unità di massa è data dalle forme alternative:

$$\vec{g} = -g\nabla z = -\nabla(gz) = \nabla(-gz) .$$

Essendo dato dal gradiente della funzione scalare  $-gz$ , il campo della forze di gravità è conservativo. Mentre il potenziale del campo diminuisce all'aumentare della quota  $z$ , l'energia potenziale aumenta corrispondentemente. A norma del Teorema delle forze vive (64), per due quote qualunque,  $z_1$  e  $z_2$ , di un grave di massa  $m$  in caduta libera, descrivente una traiettoria anche non verticale, supposto soggetto unicamente all'azione del proprio peso (trascurando quindi, ad esempio, l'attrito dell'aria) si ha:

$$L_{1-2} = \phi(z_2) - \phi(z_1) = [(-gmz_2) - (-gmz_1)] = gm(z_1 - z_2) = \frac{1}{2}m(u_2^2 - u_1^2) ,$$

da cui:

$$gmz_1 + \frac{1}{2}mu_1^2 = gmz_2 + \frac{1}{2}mu_2^2 . \quad (67)$$

Pertanto, la somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica (energia meccanica totale) del corpo in caduta libera si mantiene costante (*Principio di conservazione dell'energia meccanica*). La (67) si può esprimere nella forma riferita all'unità di peso ( $gm$ ), che risulterà più familiare nell'ambito del corso:

$$z_1 + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{u_2^2}{2g} .$$

La grandezza fisica corrispondente al lavoro compiuto, ovvero alla variazione di energia avvenuta, nell'unità di tempo, data da:

$$P = \frac{dL}{dt} ,$$

o espressione analoga riferita all'energia, è detta *potenza*, avente dimensioni fisiche  $[P] = [ML^2T^{-3}]$ . L'unità di misura SI è la potenza corrispondente al lavoro di 1 J compiuto in 1 s, denominata Watt (simbolo W):  $1 \text{ W} = 1 \text{ J s}^{-1} = 1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-3}$ .

Fino a questo, ove possibile, le varie espressioni sono state riportate utilizzando, per quanto riguarda la scrittura per componenti, sia la forma per esteso che la forma basata sulla convenzione di Einstein allo scopo di favorire la familiarità dello studente con tale notazione. Nei capitoli successivi, invece, la notazione per componenti verrà riportata con esclusivo riferimento alla convenzione di Einstein (che è stata introdotta, per l'appunto, per la sintesi).



## CAPITOLO SECONDO

### 2. PROPRIETÀ FISICHE DEI FLUIDI

#### 2.1 Schema di mezzo continuo

Gli strumenti dell'Analisi Matematica illustrati nel Capitolo 1 richiedono, per la loro applicabilità, la regolarità delle funzioni che descrivono i campi delle grandezze di interesse. I fluidi, come del resto i solidi e la materia in generale, sono tuttavia mezzi essenzialmente discontinui, essendo composti di molecole poste a distanze reciproche grandi rispetto alle proprie dimensioni e caratterizzate da movimenti rapidi ed irregolari. Le molecole, a loro volta, sono composte di atomi; gli atomi di particelle elementari, anch'esse in rapido movimento su distanze anche molto maggiori delle proprie dimensioni. Da tali caratteristiche è quindi evidente che le grandezze fisiche misurabili in un punto, quali velocità, accelerazione, etc..., sono anche discontinue nel tempo e, in definitiva, anche ad essere in grado di determinarle compiutamente, di scarso interesse pratico, almeno nell'ambito dello studio dell'Idraulica. Si pensi, a tale proposito, che quello che possiamo definire, da un punto di vista macroscopico, pratico ed applicativo, un fluido in quiete è in realtà anch'esso sede di moti caotici delle molecole – che è infatti la causa, nel caso si tratti di un liquido, della sua evaporazione. Tuttavia, il carattere macroscopico di quiete del fluido deriva dal fatto che, determinato un volume contenente un numero di molecole sufficientemente alto, il valore medio della velocità delle molecole è, a meno di uno scarto trascurabile, nullo.

La chiave per l'interpretazione del comportamento dei fluidi (ma lo stesso vale per i solidi) mediante gli strumenti matematici richiamati in precedenza consiste nell'ammettere, in considerazione delle ridottissime dimensioni delle molecole per confronto con le dimensioni delle porzioni di fluido di interesse pratico, che un numero sufficientemente alto di molecole, tale da fornire valori medi statisticamente significativi della grandezza di interesse, sia contenuto in volumi di dimensioni caratteristiche molto minori di quelle entro le quali si desidera rilevare eventuali variazioni della grandezza (per esempio: il raggio di una tubazione a sezione circolare nel caso di un liquido in movimento entro essa, nell'ambito del quale la velocità passa dal valore nullo alla parete, al valore massimo sull'asse della tubazione). Mentre nell'esempio del fluido in quiete è evidente che maggiore è il volume considerato, più accurata sarà la media (nulla) della velocità, nel caso di un fluido in movimento il problema è più sottile, occorrendo che il volume sia al tempo stesso non troppo piccolo, in modo da contenere un numero di molecole sufficientemente alto da fornire una media statisticamente significativa della grandezza in esame, ma anche di dimensioni sufficientemente ridotte perché, in buona sostanza, la misura possa essere considerata praticamente puntuale rispetto alla variabilità nello spazio del campo in esame. Ad un volume di fluido che soddisfi tali requisiti viene dato il nome di *particella fluida*.

Consegue da quanto detto che le dimensioni che possono essere assunte per una particella fluida variano da caso a caso: potranno essere, ad esempio, molto maggiori nel caso di un'onda di marea, di periodo dell'ordine di 12 ore e lunghezza dell'ordine delle decine o centinaia di chilometri, piuttosto che nel caso di un'onda prodotta dal vento, avente periodo dell'ordine di alcuni secondi e lunghezza dell'ordine delle decine o centinaia di metri. In linea di principio, tali valutazioni dovrebbero essere effettuate di volta in volta, a seconda del problema in studio, al fine di verificare la possibilità stessa di individuare la particella fluida come definita in precedenza. Tuttavia, in pratica, l'essere stato riconosciuto ciò possibile per la generalità dei problemi di interesse dell'Idraulica conduce, in ultima analisi, semplicemente al ritenere ammissibile l'assimilazione del fluido, nella realtà come s'è detto discontinuo, ad un mezzo continuo (*schema di mezzo continuo*), suscettibile pertanto di rappresentazione mediante gli strumenti matematici richiamati nel Capitolo 1.

In effetti, tutti gli strumenti dell'analisi infinitesimale, essendo basati sul concetto di limite, sono in realtà rigorosamente compatibili con il concetto di particella fluida di dimensione finita. Lo sviluppo in serie di una funzione di più variabili (21) mostra infatti che la variazione di una funzione nell'intorno di un punto è rappresentabile mediante il differenziale (18) a meno di scarti trascurabili purché, per l'appunto, le dimensioni dell'intorno siano sufficientemente ridotte. In altri

termini, tutti i fenomeni di interesse del corso potranno senz'altro studiarsi attraverso una descrizione dei campi delle grandezze nell'ambito dello schema di mezzo continuo, assumendo sempre di poter individuare volumi (particelle fluide) le cui dimensioni siano, oltre che non troppo piccole perché possano ottenersi valori medi statisticamente significativi della grandezza in esame, anche sufficientemente ridotte per consentire di sviluppare la funzione rappresentativa del campo della grandezza in serie di Taylor arrestata al primo ordine su distanze dell'ordine di tali dimensioni. Tutto ciò precisato, nel prosieguo si farà perciò di norma riferimento a spostamenti ( $ds$ ,  $dx_i$ , etc...), superfici ( $dS$ ,  $d\Omega$ , etc...) o volumi ( $dV$ ) elementari intesi infinitesimi, salvo eventuali eccezioni in cui risulti conveniente evidenziare il volume della particella fluida,  $V_p$ . Inoltre, i campi delle varie grandezze che verranno considerate si intendono descritti da funzioni dello spazio e del tempo continue, derivabili e a derivate continue fino all'ordine che occorre, di volta in volta, per utilizzare i vari teoremi dell'Analisi richiamati nel Capitolo 1 (genericamente dette regolari).

Le leggi fondamentali della Meccanica sono di norma introdotte, così come sono state richiamate nel capitolo precedente, ricorrendo all'astrazione del punto materiale, ossia un punto nel quale si intenda concentrata una massa finita. Sebbene il ricorso a tale astrazione venga giustificata con argomentazioni simili a quelle che consentono di definire il concetto di particella fluida – un corpo può essere schematizzato come punto materiale se possiede dimensioni lineari molto minori di quelle caratteristiche dell'ambiente in cui si muove – i due concetti non sono equivalenti, perché, per l'appunto, il punto materiale è un'astrazione, mentre la particella fluida è un ente reale, di dimensioni finite, fisicamente ben definito ed individuabile, anche se non univocamente. In particolare, mentre l'astrazione del punto materiale si esplica nella proprietà singolare di possedere una densità infinita (massa finita su volume nullo), tale eventualità è esclusa dallo schema di mezzo continuo, il cui carattere di astrattezza è, al contrario, legato alla continuità dei campi (con eventuali singolarità localizzate, peraltro non legate alla struttura della materia e, comunque, non riguardanti gli argomenti del corso) e, in particolare, alla distribuzione non singolare della densità. Ciò nondimeno, almeno per quanto riguarda alcuni aspetti del movimento di una singola particella, questa potrà essere efficacemente schematizzata come punto materiale, conforme sia alla giustificazione sopra richiamata, che, più sostanzialmente, sulla base del fatto che il baricentro di una particella fluida, come di un qualsiasi sistema meccanico, si muove nel rispetto delle leggi postulate per il punto materiale, equazione (62).

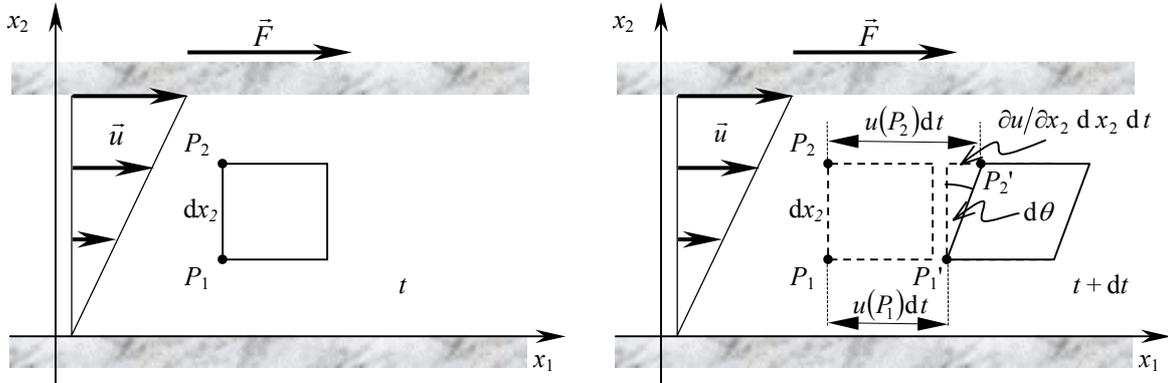
Per quanto riguarda le leggi fondamentali della meccanica, lo schema di mezzo continuo richiede di esprimere in termini di integrali su porzioni continue di fluido le grandezze presentate nel capitolo precedente con riferimento al caso discreto (insieme di punti materiali), secondo l'approccio generalmente seguito nei corsi di base specifici, in termini di sommatorie di quantità competenti ai punti materiali. Tali formulazioni integrali verranno introdotte caso per caso nel prosieguo.

## 2.2 Definizione di fluido

A livello microscopico, i fluidi si distinguono dai solidi per la mobilità delle loro molecole, che consente loro di subire variazioni di forma molto maggiori a parità di forze applicate. Inoltre, tali deformazioni sono permanenti, mentre un solido riacquista la forma iniziale al cessare delle azioni che ne avevano determinato la deformazione – per lo meno nel caso, abbastanza comune e spesso considerato desiderabile ai fini tecnici, di comportamento elastico. Infine, tipicamente, le piccole resistenze che i fluidi in movimento oppongono alle deformazioni, si annullano in condizioni di quiete. Conseguentemente, i fluidi tendono ad assumere la forma del recipiente che li contiene. I fluidi possono essere suddivisi in *liquidi* e *aeriformi* (o *gas*) a seconda della resistenza che essi oppongono ad azioni tendenti a modificarne il volume, ossia, a seconda della loro maggiore o minore *comprimibilità*: i liquidi sono fluidi poco comprimibili; gli aeriformi molto comprimibili. Naturalmente, un aeriforme, in quanto molto comprimibile, tende anche a dilatarsi liberamente e occupa perciò interamente il volume di un recipiente chiuso che lo contenga.

I concetti fin qui riassunti rimandano, in sostanza, alla distinzione fra solidi, liquidi ed aeriformi della Fisica elementare: i solidi hanno forma e volume propri; i liquidi hanno volume proprio ma non forma propria; gli aeriformi non hanno forma né volume propri. Tali criteri di riconoscimento sono evidentemente riferiti a condizioni di quiete dei fluidi. Sebbene in precedenza siano state

indicate alcune peculiarità del comportamento dei fluidi in movimento, a tali condizioni può essere riferita una definizione più puntuale, che ha il pregio di evidenziare alcune caratteristiche fisiche importanti del comportamento dei fluidi, rappresentabili in termini quantitativi.



**Figura 13. Velocità di deformazione di un volume fluido nel moto fra pareti piane parallele scorrevoli.**

Si consideri il caso di un fluido, per esempio acqua, interposto fra due pareti piane parallele (Figura 13), di cui una fissa ed un'altra posta in movimento da una forza  $\vec{F}$  avente direzione identificata da un asse  $x_1$  complanare alle pareti, a partire da condizioni di quiete del fluido. Dopo un certo periodo di tempo, durante il quale le velocità aumentano progressivamente (*transitorio*), mantenendosi ovunque parallele all'asse  $x_1$ , si perviene ad una situazione di regime caratterizzata da una distribuzione lineare delle velocità nella direzione  $x_2$  perpendicolare alle pareti piane, identica su piani paralleli al piano cartesiano  $x_1 x_2$  (*moto piano*) e rappresentabile pertanto in termini del solo modulo  $u(x_2)$ . Il fluido aderisce perfettamente alle pareti, per cui il valore massimo della velocità del fluido a contatto con la parete superiore è anche la velocità della parete.

Si consideri, all'interno della massa fluida, un volume parallelepipedo di cui in Figura 13 è riportata la sezione sul piano  $x_1 x_2$  e le particelle fluide aventi i propri baricentri nei punti  $P_1$  e  $P_2$  inizialmente coincidenti con gli estremi del lato della sezione parallelo all'asse  $x_2$ , di lunghezza  $dx_2$ . A partire da un generico istante di tempo  $t$ , relativo a condizioni di regime raggiunto, si consideri la deformazione del parallelepipedo (e della sua sezione rettangolare) in un intervallo di tempo elementare  $dt$ , durante il quale le due particelle si portano nelle posizioni  $P_1'$  e  $P_2'$ , avendo percorso le distanze date da  $u(P_1)dt$  e  $u(P_2)dt$ . Sulla base dello schema di mezzo continuo introdotto nel §2.1, la velocità nel punto  $P_2$  (come in tutti i punti aventi stessa coordinata  $x_2$ ) si può esprimere come:

$$u(P_2) = u(P_1) + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 .$$

Conseguentemente, la maggiore distanza percorsa dalla particella centrata inizialmente nel punto  $P_2$  rispetto alla particella centrata inizialmente nel punto  $P_1$  è data da:

$$ds = \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 dt$$

Trattandosi di una quantità piccola rispetto al lato  $dx_2$  della sezione, perché contenente a fattore la piccola quantità  $dt$ , l'angolo di rotazione del segmento congiungente i baricentri delle particelle intervenuto nell'intervallo elementare  $dt$  può essere espresso come:

$$d\theta = \arctg\left(\frac{ds}{dx_2}\right) \cong \frac{ds}{dx_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2} dt .$$

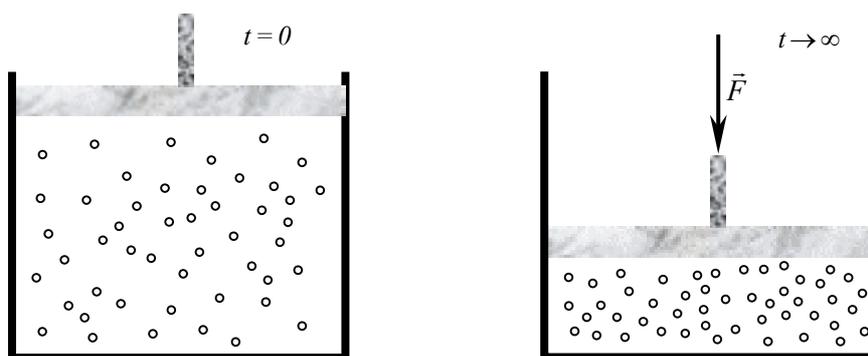
Tale angolo esprime la deformazione del parallelepipedo nell'intervallo  $dt$ . La rapidità con cui tale deformazione ha luogo (*velocità di deformazione*) è espressa da:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \quad (68)$$

avendo evidenziato a terzo membro che il modulo della velocità  $u$  coincide con la sua componente nella direzione  $x_1$ . Poiché si tratta di condizioni di regime, invariabili nel tempo, concludiamo che il fluido in esame, soggetto ad una sollecitazione costante rappresentata dallo scorrimento a velocità costante di un piano rispetto all'altro – o, se si preferisce, dalla forza costante  $\vec{F}$  che induce lo scorrimento – in condizioni di regime è soggetto ad una velocità di deformazione anch'essa costante nel tempo, finita e misurabile. Potremmo quindi anche definire fluido una sostanza che soddisfa tale requisito. Un comportamento di questo tipo implica evidentemente che ad una sollecitazione nulla corrisponda anche una velocità di deformazione nulla.

Una caratteristica importante del processo di deformazione del fluido descritto in precedenza è che esso avviene in assenza di variazioni di volume del fluido, perché l'area della sezione deformata, che è un parallelogramma, è pari a quella della sezione rettangolare al tempo  $t$ . La definizione alternativa di fluido introdotta con riferimento a questo esempio è in effetti da intendersi riferita unicamente a deformazioni (e corrispondenti velocità di deformazione) a volume costante, del che è facile convincersi dall'esempio seguente.

Si consideri un recipiente contenente un aeriforme – per esempio, aria – chiuso dalla testata di un pistone sul quale viene esercitata una forza di modulo costante  $F$  ad esso normale e tale da indurre una compressione dell'aeriforme, come da schema riportato in Figura 14. Partendo, ad esempio, da condizioni di pressione atmosferica dell'aeriforme, dopo un tempo sufficientemente lungo dall'inizio dell'applicazione della forza si perviene ad una condizione di equilibrio statico, in cui la forza esterna  $F$  è bilanciata dalla spinta che il fluido esercita sulla superficie interna del pistone, determinata dalla aumentata pressione all'interno del recipiente rispetto al valore iniziale. Tale condizione di quiete del fluido in configurazione deformata rispetto alle condizioni iniziali si mantiene inalterata nel tempo nonostante l'azione continua della forza  $F$ . Il comportamento del fluido in termini di relazione fra sollecitazioni e velocità di deformazione è quindi sostanzialmente differente a seconda che le deformazioni avvengano a volume costante o a volume variabile.



**Figura 14. Fluido sottoposto ad una deformazione a volume variabile.**

L'insieme degli elementi forniti nel presente paragrafo fornisce un quadro abbastanza chiaro di cosa debba intendersi per fluido, nonché alcune caratteristiche essenziali del comportamento dei fluidi, anche se esposte in parte in forma puramente qualitativa. Successivamente, in sede di descrizione delle caratteristiche *reologiche* dei fluidi – attinenti la relazione fra sollecitazioni e velocità di deformazione – si vedrà che alcune sostanze classificate come fluidi – anche di interesse tecnico – non soddisfano in realtà completamente le proprietà fin qui illustrate, peraltro comuni alla gran parte dei fluidi di interesse tecnico, fra cui in primo luogo l'acqua.

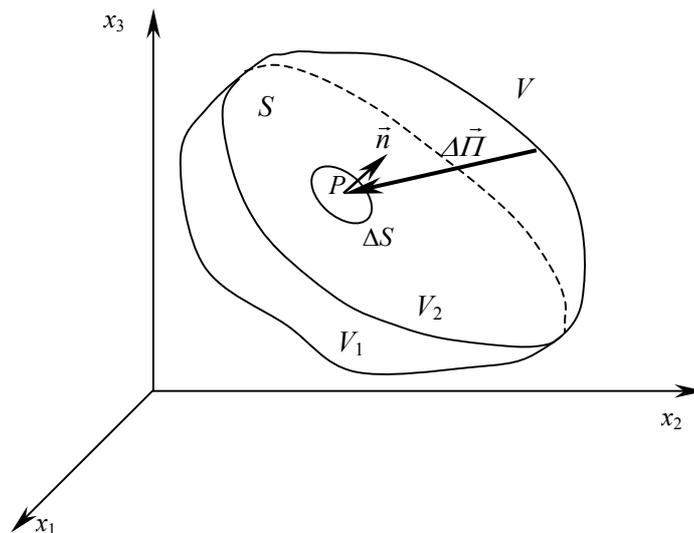
### 2.3 Sforzi nei fluidi. Forze di superficie.

Si consideri il volume fluido  $V$  riportato in Figura 15 ed una delle due facce di un elemento di superficie  $\Delta S$  interno al volume, di estensione finita e contenente un punto dello spazio  $P$ , appartenente ad una superficie  $S$  di forma qualunque. Detta  $\Delta \vec{T}$  la forza agente su tale faccia dell'elemento di superficie, si dice *sforzo* medio o *tensione* media sulla data faccia dell'elemento di superficie  $\Delta S$  considerato la grandezza vettoriale:

$$\vec{\tau} = \frac{\Delta \vec{T}}{\Delta S} .$$

In generale, il valore dello sforzo medio dipende dalle dimensioni della superficie  $\Delta S$ . Riducendo progressivamente le dimensioni di tale elemento di superficie contenente il punto  $P$ , questo tende ad essere contenuto nel piano tangente alla superficie  $S$  nel punto  $P$ . La giacitura e la faccia dell'elemento di superficie  $\Delta S$  in questione possono quindi essere individuati dalla corrispondente normale esterna  $\vec{n}$ . Nell'ambito dello schema di mezzo continuo si dice sforzo (o tensione) nel punto  $P$  e sulla data faccia dell'elemento di superficie considerato la grandezza vettoriale definita dal limite:

$$\vec{\tau}_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{T}}{\Delta S} = \frac{d \vec{T}}{d S} . \quad (69)$$



**Figura 15. Schema di definizione dello sforzo in un punto di una superficie fluida.**

Poiché finora il concetto di schema di mezzo continuo è stato trattato con riferimento al concetto di particella fluida – quindi, di un volume – è il caso di osservare che, nel caso della valutazione dello sforzo in un punto, il limite (69) andrebbe piuttosto riferito ad una superficie elementare  $\Delta S_P$  sufficientemente ristretta da poter essere considerata come puntiforme rispetto alle superfici che caratterizzano il volume fluido in oggetto ma anche sufficientemente estesa di modo che la corrispondente forza elementare  $\Delta \vec{T}$  costituisca un valore statisticamente rappresentativo delle azioni che le molecole che vengono a contatto attraverso la superficie esercitano l'una sull'altra.

Con la notazione utilizzata per lo sforzo nel punto  $P$ , contenente il pedice  $n$ , si vuole evidenziare il fatto che il valore dello sforzo nel punto dipende dall'orientazione della faccia dell'elemento di superficie contenente il punto, ossia, dalla direzione e dal verso della sua normale. In generale, per uno stesso punto dello spazio, a ciascuna delle  $\infty^2$  possibili giaciture dell'elemento di superficie

corrispondono quindi differenti valori dello sforzo nel punto. Pertanto, la stessa terminologia "sforzo in un punto", di per sé imprecisa per quanto sopra detto, viene impiegata sottintendendo la cognizione della dipendenza dello sforzo nel punto dalla giacitura della superficie, eventualmente per aver già precisato la giacitura cui ci si intende riferire. Si vedrà peraltro nel prosieguo come lo stato di sforzo in un punto possa essere compiutamente rappresentato in termini alquanto più semplici.

Lo sforzo in un punto può essere decomposto nelle sue componenti *tangenziale* e *normale* alla superficie su cui agisce. La componente normale, detta anche *assiale*, si dice di *compressione* se avente verso opposto alla normale (esterna)  $\vec{n}$ , tendente perciò a far avvicinare due particelle contigue la cui congiungente sia essa stessa normale alla superficie, di *trazione* nel caso contrario. Salvo che in condizioni molto particolari, i fluidi non sono atti a sopportare sforzi di trazione ragguardevoli, per cui gli sforzi normali risultano generalmente di compressione. La componente normale dello sforzo viene talora designata con il termine di *pressione*. Tuttavia, tale termine verrà utilizzato nel prosieguo unicamente con riferimento ad uno stato di sforzo puramente assiale ed indipendente dalla giacitura dell'elemento di superficie considerato, detto *isotropo* o *sferico*, come è il caso, ad esempio, dei più comuni tipi di fluidi in condizioni di quiete.

Come di consueto, anche nel passaggio al limite (69) si conserva la definizione dello sforzo come forza agente sull'unità di superficie, o forza per unità di superficie. Diciture analoghe verranno d'ora in poi utilizzate, senza ulteriore simile precisazione, per grandezze definite in modo analogo. Gli sforzi hanno le dimensioni fisiche di una forza divisa per una superficie,  $[ML^{-1}T^{-2}]$  e si misurano in  $N/m^2$  nel SI<sup>14</sup>. Tale unità di misura è denominata *Pascal* (simbolo Pa).

Nel prosieguo si ammetterà sempre che il modulo dello sforzo in un punto sia sempre finito. In tal caso, la forza elementare agente su un'areola  $dS$ , supposta tendente a zero, data da:

$$d\vec{I} = \vec{\tau}_n dS ,$$

risulta proporzionale all'area della superficie  $dS$  e pertanto infinitesima dello stesso ordine, così come il suo modulo. Forze di questo tipo vengono dette, per ovvi motivi, *forze di superficie*.

Data una superficie  $S$ , per esempio la superficie che separa il volume  $V$  di Figura 15 nelle due parti  $V_1$  e  $V_2$ , il risultante delle forze elementari agenti punto per punto sulla faccia della superficie prescelta, detto *spinta* sulla superficie, è dato dall'integrale:

$$\vec{I} = \int_S \vec{\tau}_n dS . \quad (70)$$

Per il principio di azione e reazione, i due vettori sforzo relativi ad uno stesso punto e ad una stessa giacitura, ma alle due facce opposte della superficie elementare così definita, sono uguali e contrari. Pertanto, anche la spinta che il fluido appartenente al volume  $V_1$  esercita sul volume  $V_2$  attraverso la superficie di contatto  $S$  fra i due volumi è uguale e contraria alla spinta che il fluido appartenente al volume  $V_2$  esercita sul fluido appartenente al volume  $V_1$ . In particolare, un volume fluido può trovarsi a contatto con una parete solida attraverso una certa superficie  $S$ . Anche in questo caso, per il principio di azione e reazione la spinta che il fluido esercita sulla parete è uguale e contraria alla spinta che la parete esercita sul fluido. Tale considerazione tornerà utile nella soluzione di problemi pratici legati alla determinazione della spinta su pareti solide. Nei problemi applicativi, inoltre, si desidera generalmente esprimere il sistema di forze di superficie in esame in termini di sistema di forze equivalente, dato da due forze non complanari (sghembe) o da una forza più una coppia, come richiamato nel § 1.3.4.2. Il termine "spinta" è in effetti utilizzato in modo più appropriato in questa accezione, piuttosto che intendendo semplicemente il risultante (70).

<sup>14</sup> Ove non si incorra in ambiguità in presenza di più grandezze a denominatore, le unità di misura verranno indicate facendo uso del simbolo di frazione in luogo della forma in termini di potenze a esponenti negativi.

## 2.4 Densità e peso specifico. Forze di volume.

Sino a questo punto, è stato utilizzato un concetto di densità riferito a corpi omogenei di dimensioni finite su base sostanzialmente intuitiva, legato al rapporto fra la massa ed il volume di tali corpi. Lo schema di mezzo continuo richiede tuttavia di definire valori puntuali della densità  $\rho$  ai fini della rappresentazione della distribuzione della densità in termini di campi scalari del tipo (36) o (37):

$$\rho = \rho(\vec{x}, t) \equiv \rho(x_1, x_2, x_3, t),$$

in cui  $\vec{x}$  è il vettore che identifica la posizione di un punto  $P$  nello spazio e  $x_i, i=1,2,3$  le coordinate del punto nel sistema di riferimento prescelto, costituenti le componenti scalari del vettore posizione (vedi Figura 16).

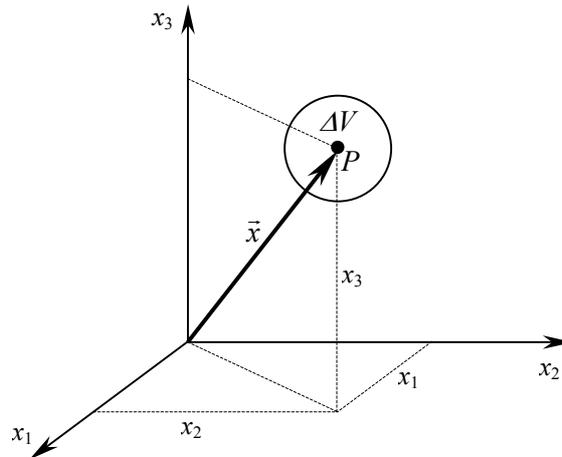


Figura 16. Schema di definizione della densità in un punto.

Analogamente al caso dello sforzo medio su una superficie di cui al §2.3, considerato un volume finito  $\Delta V$  di massa  $\Delta m$  contenente il punto  $P$ , la densità media della porzione di fluido considerato, dipendente in generale dalle dimensioni del volume  $\Delta V$ , è data dal rapporto:

$$\bar{\rho} = \frac{\Delta m}{\Delta V}.$$

Riducendo progressivamente le dimensioni del volume racchiudente il punto  $P$ , nell'ambito dello schema di mezzo continuo la densità nel punto è data dal limite:

$$\rho(\vec{x}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{d m}{d V},$$

che – lo si ripete per un'ultima volta – è in realtà da intendersi equivalente al limite:

$$\rho(\vec{x}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow V_P} \frac{\Delta m}{\Delta V},$$

se si desidera che il campo risultante sia continuo.

In quanto definita come massa dell'unità di volume, la densità ha dimensioni fisiche  $[ML^{-3}]$  e si misura in  $kg/m^3$  nel SI. Il volume dell'unità di massa, inverso della densità, è detto *volume specifico*.

In generale, la densità di un fluido può essere funzione di svariate variabili termodinamiche; quantomeno, della temperatura  $T$  e della pressione  $p$ . Il corrispondente legame funzionale:

$$\rho = \rho(p, T) \quad (71)$$

è detto *equazione di stato* del fluido<sup>15</sup>.

Nel caso dei liquidi, per definizione poco comprimibili, può essere di una qualche rilevanza la dipendenza della densità dalla temperatura. In tutti i liquidi, la densità diminuisce all'aumentare della temperatura, con l'eccezione dell'acqua, la cui densità presenta il valore massimo alla temperatura  $T^\circ = 4^\circ\text{C}$ . Per l'acqua alla pressione atmosferica normale è stata determinata la seguente relazione:

$$\rho = \rho_0 \left( 1 + 5,2939 \times 10^{-5} T - 6,5322 \times 10^{-6} T^2 + 5,2939 \times 10^{-8} T^3 \right),$$

in cui  $T$  è la temperatura in gradi centigradi (celsius) e  $\rho_0 = 999,457 \text{ kg/m}^3$  è la densità a  $T^\circ = 0^\circ\text{C}$ .

Nel campo di temperature  $0 < T < 40^\circ\text{C}$  le modeste variazioni della densità dell'acqua ( $< 0,8\%$ ) consentono di fare senz'altro riferimento al valore di  $1000 \text{ kg/m}^3$ .

La massa  $dm$  di un volume elementare  $dV$  è data evidentemente da:

$$dm = \rho dV$$

e la massa  $m$  di un volume finito  $V$  dall'integrale:

$$m = \int_V \rho dV.$$

Il volume  $dV$  di massa  $dm$  di cui sopra è soggetto ad una forza peso pari in modulo al prodotto della massa per l'accelerazione di gravità,  $g$ :

$$dG = \rho g dV \quad (72)$$

Potendo l'accelerazione di gravità essere considerata costante su estensioni sufficientemente limitate<sup>16</sup>, con ragionamento analogo a quello esposto per definire la densità in un punto, si può definire il *peso specifico* (per unità di volume)  $\gamma$ , dato da:

$$\gamma = \frac{dG}{dV} = \rho g.$$

Il peso specifico ha dimensioni  $[\text{ML}^{-2}\text{T}^{-2}]$  e si misura in  $\text{N/m}^3$  nel SI. Il valore di peso specifico dell'acqua utilizzabile nei calcoli corrispondente alla densità di  $1000 \text{ kg/m}^3$  indicata in precedenza è pari a  $9806 \text{ N/m}^3$ , corrispondente a  $1000 \text{ kp/m}^3$  nel sistema pratico.

Nella Tabella 2 vengono riportati i valori delle densità e dei pesi specifici di alcuni fluidi di impiego più frequente, riferiti a condizioni di pressione atmosferica normale di  $101302 \text{ Pa}$ . Gli ordini di grandezza della densità e del peso specifico dell'acqua dovrebbero tuttavia essere memorizzati, perché veramente fondamentali.

Come per lo sforzo in un punto, nel prosieguo si ammetterà sempre che la densità in un punto sia finita. Il modulo della forza peso elementare agente su un volume infinitesimo  $dV$ , dato dalla equazione (72), risulta proporzionale al volume  $dV$  e pertanto infinitesimo dello stesso ordine. Forze di questo tipo vengono dette *forze di volume* o *forze di massa*, identificate, in generale, dalla forza agente sull'unità di massa,  $\vec{f}_m$ . Esempi di forze di massa differenti dalla forza peso sono la forza centrifuga e la forza di Coriolis, entrambe forze fittizie che si manifestano in riferimenti non inerziali (§1.3.5), delle quali tuttavia non ci occuperemo nell'ambito del corso.

<sup>15</sup> La densità può dipendere, oltre che dalla pressione e dalla temperatura, anche da altre grandezze; in particolare, dalla concentrazione di sostanze disciolte: ad esempio, la salinità nel caso dell'acqua di mare, o le concentrazioni delle stesse numerose specie disciolte nella normale acqua dolce potabile. Un'espressione del tipo (71) è quindi relativa ad un fluido *omogeneo*, o anche ad un fluido in cui la concentrazione delle sostanze disciolte eventualmente presenti sia, comunque, uniforme (omogeneo in senso lato).

<sup>16</sup> Anche questa precisazione verrà d'ora in avanti omessa.

Ricordando che il versore della verticale può esprimersi come gradiente della corrispondente coordinata  $z$ , nel caso della forza peso si ha, in particolare,  $\vec{f}_m = -g\nabla z$ , coincidente con l'accelerazione di gravità. La forza peso elementare agente sul volumetto  $dV$  è data pertanto da:

$$d\vec{G} = \rho \vec{f}_m dV = -\rho g dV \nabla z = -\gamma dV \nabla z ,$$

mentre il peso di un volume fluido finito  $V$  si ottiene dall'integrale:

$$\vec{G} = \int_V -\gamma \nabla z dV = \int_V -\rho g \nabla z dV = -g \nabla z \int_V \rho dV = -gm \nabla z , \quad (73)$$

suscettibile di ovvie semplificazioni nel caso di densità uniforme ( $\rho = \text{cost}$ ).

**Tabella 2: Densità e pesi specifici di fluidi di uso più frequente in condizioni di pressione atmosferica normale.**

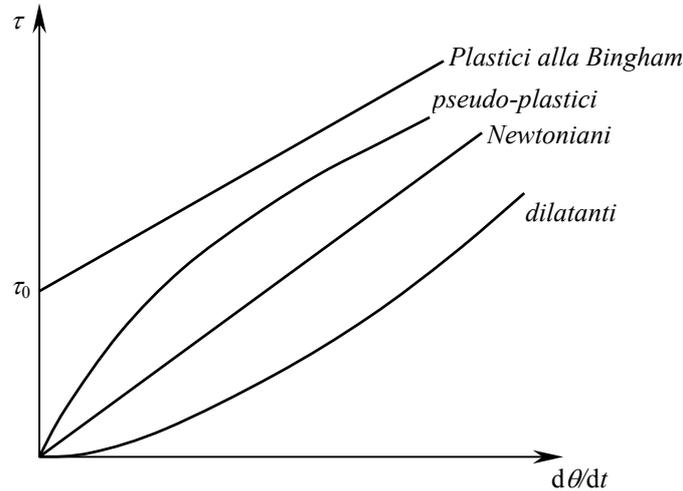
Fluido	$T$ (°C)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\gamma$ (N/m <sup>3</sup> )
Idrogeno	20	0,0837	0,821
Azoto	20	1,166	11,434
Ossigeno	20	1,331	13,052
Aria secca	0	1,293	12,679
Aria secca	15	1,226	12,022
Acqua	15	1000	9806
Acqua di mare	15	1030	10100
Mercurio	20	13546	132871
Alcool etilico	15	794	7786
Acqua ossigenata	15	1465	14366
Benzina per automobili	15	740	7256
Combustibili liquidi pesanti	15	880 ÷ 970	8629 ÷ 9512
Oli vegetali	15	900 ÷ 920	8225 ÷ 9032

## 2.5 Viscosità

Come si è avuto modo di accennare nel §2.2, i fluidi si distinguono dai solidi per la relativa modesta entità delle resistenze opposte a cambiamenti di forma sotto l'azione di forze applicate loro. Ancora, si è accennato al fatto che, tipicamente, nei fluidi le resistenze alle deformazioni si annullano in condizioni di quiete, con le diverse conseguenze che da ciò derivano nei casi di liquidi ed aeriformi. Tali caratteristiche sono, invero, quelle riscontrabili nell'acqua, nell'aria ed in una molteplicità di fluidi di interesse anche tecnico, ma non si possono tuttavia dire comuni alla totalità dei fluidi esistenti in natura, né ai soli fluidi di interesse tecnico. Nel presente paragrafo verranno sinteticamente illustrate più specificamente tali proprietà dei fluidi di opporre resistenza alle deformazioni, dette proprietà *reologiche* (*Reologia* è detta la branca della Fisica che si occupa di tali proprietà), con riferimento ad una più specifica definizione, peraltro in larga misura idealizzata, dell'esperimento rappresentato in Figura 13.

Si supponga infatti ora che la lastra superiore soggetta ad una azione tangenziale di modulo  $F$  abbia una superficie finita  $S$ . Si può pertanto ammettere, idealmente, che uno sforzo tangenziale uniforme di modulo  $\tau = F/S$  sia esercitato dalla faccia inferiore della lastra superiore scorrevole sulla superficie dell'acqua a contatto con essa. Fintantoché la velocità della piastra non supera un valore limite tale da determinare l'insorgere di turbolenza all'interno del liquido, al di sotto della lastra in movimento le caratteristiche del profilo di velocità a regime sono le medesime del caso di Figura 13: una distribuzione lineare della velocità con valore nullo sul fondo e massimo sulla superficie del fluido a contatto con la lastra superiore, cui corrisponde un certo valore della derivata

spaziale della velocità nella direzione normale al moto (ed alle lastre), pari, come s'è, visto, alla velocità di variazione dell'angolo di deformazione  $\theta$ , equazione (68). Le caratteristiche reologiche dei fluidi vengono frequentemente rappresentate in termini di legame funzionale (*equazione reologica*) fra la velocità di deformazione angolare  $d\theta/dt$  e lo sforzo  $\tau$ , il quale risulta costante lungo la direzione normale alle piastre nell'esperimento ideale summenzionato, data la linearità del profilo di velocità.



**Figura 17. Diagrammi rappresentativi delle caratteristiche reologiche (curve reologiche) di fluidi a comportamento indipendente dal tempo.**

### 2.5.1 Fluidi newtoniani

Le proprietà reologiche di un'ampia classe di fluidi, inclusiva di acqua, aria, tutti i gas e quasi tutti i liquidi omogenei non macromolecolari sono descritte dal seguente legame di proporzionalità:

$$\tau = \mu \frac{d\theta}{dt} \quad (74)$$

in cui il fattore di proporzionalità  $\mu$  dipende dalla pressione e dalla temperatura. I fluidi appartenenti a tale classe vengono definiti *fluidi newtoniani*. Tale categoria di fluidi è talmente estesa, comprende fluidi di natura talmente comune ed è caratterizzata da una equazione reologica di tale semplicità da dare luogo alla distinzione fondamentale dei fluidi fra newtoniani e non newtoniani. L'equazione reologica dei fluidi newtoniani (per dati valori di temperatura e pressione) è rappresentata da una retta passante per l'origine degli assi, come mostrato in Figura 17. Tali rappresentazioni grafiche sono dette *curve reologiche*. Si rimarca, ancora una volta, la differenza rispetto ai solidi elastici, nei quali gli sforzi tangenziali sono direttamente proporzionali alle deformazioni angolari piuttosto che alla velocità di deformazione angolare.

Il coefficiente di proporzionalità della relazione (74) prende il nome di *viscosità dinamica* o semplicemente viscosità. La viscosità ha dimensioni  $[ML^{-1}T^{-1}]$  e si misura in  $kg\ m^{-1}\ s^{-1}$  (ovvero  $Ns/m^2$ ) nel SI. Nei gas, la viscosità aumenta con la temperatura e con la pressione, mentre nei liquidi diminuisce all'aumentare della temperatura e aumenta generalmente con la pressione. In particolare, un'eccezione è costituita dall'acqua, nella quale la variazione con la pressione non è monotona e comunque di scarsa importanza ai fini tecnici. Per l'acqua può utilizzarsi la seguente espressione stabilita da Poiseuille, in buon accordo con i valori determinati sperimentalmente anche di recente:

$$\mu = \mu_0 (1 + 0,0337 T + 0,00022 T^2)^{-1} ,$$

in cui  $T$  è la temperatura in gradi centigradi e  $\mu_0 = 1,773 \times 10^{-3} \text{ Ns/m}^2$  è la viscosità a  $0^\circ \text{C}$ . Variazioni della viscosità con la pressione sono state misurate ma in misura estremamente ridotta, apprezzabile per variazioni di pressione dell'ordine di  $10^7 \text{ Pa}$ , ossia, di centinaia di volte la pressione atmosferica. Tali variazioni sono pertanto certamente trascurabili in campo tecnico.

Nelle equazioni che governano il moto dei fluidi è rilevante, piuttosto che la viscosità dinamica  $\mu$  in sé, il suo rapporto alla densità del fluido  $\rho$ . La grandezza:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

viene denominata *viscosità cinematica*, ha dimensioni  $[\text{L}^2 \text{T}^{-1}]$  e si misura in  $\text{m}^2/\text{s}$  nel SI.

In Tabella 3 vengono riportati i valori di viscosità dinamica e viscosità cinematica di alcuni fluidi alla temperatura di  $20^\circ \text{C}$ .

**Tabella 3: valori di viscosità dinamica e viscosità cinematica di alcuni fluidi alla temperatura di  $20^\circ \text{C}$ .**

<i>Fluido</i>	$\mu \cdot 10^6$ (Ns/m <sup>2</sup> )	$\nu \cdot 10^4$ (m <sup>2</sup> /s)
Idrogeno	9,12	1,09
Azoto	17,36	0,149
Ossigeno	20,10	0,151
Aria secca	18,24	0,151
Acqua	1006	0,01008
Glicerina	799189	6,35
Mercurio	1566	0,00115
Alcool etilico	590	0,00746
Benzina	299	0,00440
Kerosene	1867	0,0233
Petrolio greggio (*)	1800	0,20
Olio lubrificante SAE 30 (*)	37000	4,0
Olio crudo	7845	0,0913

(\*) valori medi indicativi

### 2.5.2 Fluidi non newtoniani

Fondamentalmente, i fluidi non newtoniani vengono distinti in:

- fluidi le cui caratteristiche reologiche sono indipendenti dal tempo;
- fluidi le cui caratteristiche reologiche dipendono dalla durata dello sforzo applicato o della deformazione, oppure dalla precedente storia;
- fluidi che possiedono alcune caratteristiche dei solidi (*elastoviscosi* o *viscoelastici*).

In Figura 17 sono mostrate le rappresentazioni grafiche delle equazioni reologiche delle varie specie di fluidi a comportamento indipendente dal tempo, per i quali è possibile esprimere un'equazione reologica nella forma  $\tau = f(d\theta/dt)$ . Essi si distinguono in:

- fluidi *plastici alla Bingham*;
- fluidi *pseudoplastici*;
- fluidi *dilatanti*.

I fluidi plastici alla Bingham sono caratterizzati da un'equazione reologica lineare non passante per l'origine degli assi. Ciò significa che tali fluidi sono in grado di subire e trasmettere sforzi

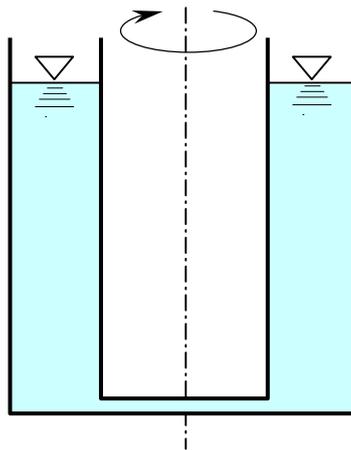
tangenziali anche in condizioni di quiete ( $d\theta/dt=0$ ). È quindi evidente che essi non rispondono pienamente alla definizione di fluido fornita nel §2.2, che in tale sede era stata infatti segnalata come non rigorosamente esaustiva. Esempi di fluidi di questo tipo, anche di interesse tecnico, sono: alcune vernici, la comune pasta dentifricia, la boiaccia di cemento, i fanghi impiegati nelle trivellazioni ed i fanghi di fogna. In particolare, l'utilità di tale comportamento nei fanghi di trivellazione è data dal fatto che, a trivella non operante, la coesione dei fanghi corrispondente alla possibilità di sopportare lo sforzo  $\tau_0$  consente loro di evitare il franamento delle pareti del pozzo; la trivellazione può successivamente essere ripresa per effetto del superamento del valore critico di sforzo dovuto all'attrito esercitato dalla trivella rotante sulle pareti del pozzo.

I fluidi pseudoplastici sono caratterizzati da una curva reologica passante per l'origine ed avente concavità rivolta verso il basso. Il rapporto fra sforzo tangenziale e velocità di deformazione, detto *viscosità apparente*, diminuisce pertanto all'aumentare della velocità di deformazione, tendendo a valori pressoché costanti per valori sufficientemente elevati di quest'ultima. Pertanto, essi presentano una resistenza al moto relativamente elevata per piccole velocità, che diminuisce all'aumentare della velocità di deformazione. Esempi di fluidi pseudoplastici sono dati da sospensioni di particelle asimmetriche o soluzioni di polimeri come i derivati della cellulosa o le sostanze macromolecolari.

I fluidi dilatanti presentano un comportamento opposto a quello dei fluidi pseudoplastici, la relativa curva reologica presentando la concavità rivolta verso l'alto, con una viscosità apparente crescente con la velocità di deformazione. Esempi di fluidi dilatanti sono costituiti da sospensioni di materiali solidi ad alta concentrazione.

Per quanto riguarda i fluidi a comportamento dipendente dalla durata del movimento, questi vengono detti *tixotropici* se, a velocità di deformazione mantenuta costante, lo sforzo tangenziale, e quindi la viscosità apparente, decrescono al trascorrere del tempo, tendendo ad un valore asintotico corrispondente ad un comportamento di tipo newtoniano; si dicono *reopectici* se denotano un comportamento opposto, in alcuni casi tendendo però ad assumere l'aspetto ed il comportamento di una sostanza solida. Esempi di fluidi tixotropici di interesse tecnico sono alcuni tipi di vernici e di lubrificanti.

Infine, i fluidi elastoviscosi presentano, accanto alle proprietà viscose proprie dei fluidi, anche alcune caratteristiche tipiche dei solidi – in particolare, una parziale reversibilità delle deformazioni – di cui peraltro le prime prevalenti rispetto alle seconde. Esempi di tale tipo di fluidi sono emulsioni o sospensioni di un fluido newtoniano in un altro o alcuni tipi di bitumi.



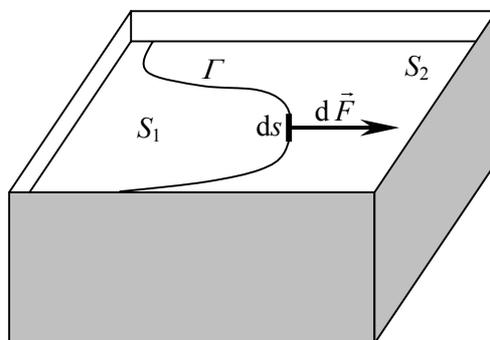
**Figura 18. Illustrazione schematica di un viscosimetro.**

Piuttosto che allestendo l'esperimento descritto nel §2.2, mediante il quale non possono essere eseguite misure sufficientemente accurate, in pratica la determinazione delle caratteristiche reologiche dei fluidi viene eseguita mediante un apparecchio denominato *viscosimetro*, costituito da due cilindri coassiali di diametri poco differenti, in grado di ruotare con attriti trascurabili rispetto all'asse comune ma indipendentemente l'uno dall'altro (Figura 18), fra i quali si interpone il

fluido di interesse. Ponendo in rotazione il cilindro esterno e mantenendo fermo il cilindro interno mediante applicazione di una coppia, dalla misura di tale coppia e sulla base della linearità della distribuzione radiale di velocità e della simmetria cilindrica del moto, si risale agevolmente alla misura della viscosità.

## 2.6 Tensione superficiale

Si consideri la superficie di separazione fra un liquido ed un fluido (liquido o gas) non miscibili – per esempio, la superficie libera di un liquido a contatto con l'atmosfera riportata in Figura 19 – e si consideri una curva  $\Gamma$  di forma qualunque su tale superficie. Si immagini di effettuare un taglio della superficie lungo tale curva, dividendo così la superficie in due parti,  $S_1$  e  $S_2$ . Per effetto delle forze di attrazione molecolare, attraverso un segmento elementare di lunghezza  $ds$  individuato sulla curva, la superficie  $S_2$  esercita sulla superficie  $S_1$  la forza elementare di trazione  $d\vec{F}$  raffigurata in Figura 19, uguale e contraria alla forza che la superficie  $S_1$  esercita sulla superficie  $S_2$ , di modulo  $T_s ds$ , in cui  $T_s$  è detta *tensione superficiale* e rappresenta, per quanto detto, una forza di trazione per unità di lunghezza<sup>17</sup>.



**Figura 19.** Schema illustrativo della tensione superficiale agente lungo una curva giacente sulla superficie libera di un liquido.

Il valore della tensione superficiale dipende dalla natura dei fluidi a contatto e dalla temperatura, diminuendo all'aumentare di questa. In Tabella 4 vengono riportati i valori di tensione superficiale per alcune coppie liquido-fluido alla temperatura di 20 °C.

**Tabella 4.** Valori della tensione superficiale per alcune coppie liquido-fluido alla temperatura di 20 °C.

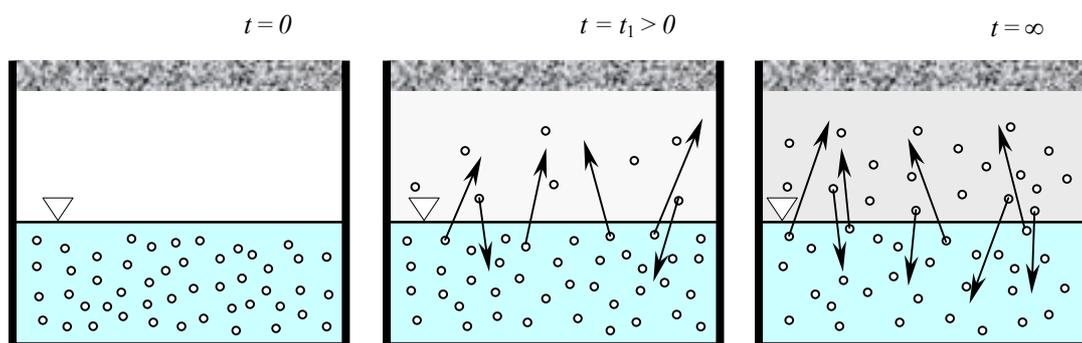
<i>Fluidi a contatto</i>	$T_s$ (N/m)
acqua – gas	0,0726
mercurio – gas	0,4820
benzene – gas	0,0294
olio di oliva – gas	0,3187
alcool etilico – gas	0,0216
etere etilico – gas	0,0157
mercurio – acqua	0,4178
acqua – olio di oliva	0,0196

<sup>17</sup> Il termine "tensione" viene quindi qui utilizzato con riferimento esclusivo ad una azione di trazione esercitata in direzione normale all'elemento di curva. Tale accezione non è quindi da confondere con quella equivalente al concetto generale di sforzo, sia esso tangenziale o normale e, in quest'ultimo caso, sia di trazione che di compressione.

Gli effetti della tensione superficiale si manifestano, ad esempio, nel determinare la forma approssimativamente sferica delle gocce di un liquido o nei fenomeni di capillarità. È facile mostrare come, in virtù dei valori relativamente modesti della tensione superficiale, il suo effetto può essere rilevante solo in presenza di curvature relativamente accentuate della superficie del liquido in esame –ad esempio, nel menisco che si determina in tubi di piccolo diametro (capillari).

## 2.7 Tensione di vapore

La tensione di vapore costituisce la proprietà fisica dei liquidi che ne determina la possibilità di passare allo stato di vapore. Per chiarire tale concetto, si consideri il recipiente chiuso raffigurato nella Figura 20, nel quale venga creato il vuoto e, successivamente, venga immesso del liquido che ne occupi soltanto una parte.



**Figura 20. Formazione di vapore saturo per evaporazione di un liquido in un contenitore inizialmente sotto vuoto.**

Le molecole costituenti il liquido sono animate da moti caratterizzati, nel loro insieme, da una distribuzione di velocità e, quindi, di energia cinetica, il cui valore medio è legato alla grandezza macroscopica costituita dalla temperatura del liquido. Le singole molecole mutano in continuazione le proprie quantità di moto ed energia cinetica per effetto degli urti vicendevoli e sono, inoltre, soggette alle forze di mutua attrazione alle quali si è fatto cenno nel §2.6. Una molecola passa in fase gassosa quando, per effetto della propria energia cinetica e di una relativa vicinanza alla superficie libera del liquido, essa è in grado di abbandonare la massa liquida, vincendo le resistenze costituite dalle forze di attrazione opposte delle molecole circostanti. La probabilità che ciò avvenga è, quindi, tanto maggiore quanto maggiore è l'energia cinetica della molecola e quanto più prossima essa si trova alla superficie libera. Supponendo di mantenere costante la temperatura all'interno del contenitore, il numero di molecole che passano in fase gassosa nell'unità di tempo è costante, perché tale si manterrà la frazione di molecole in possesso dei requisiti su indicati.

Le molecole che sono passate in fase gassosa sono anch'esse animate da moti caotici. I conseguenti scambi di quantità di moto con il liquido e con le pareti del contenitore hanno la loro manifestazione macroscopica nella pressione misurabile nel vapore, la quale, per quanto detto, aumenta all'aumentare del numero di molecole in fase gassosa. A loro volta, fra le molecole allo stato di vapore, alcune si troveranno nelle condizioni favorevoli ad un loro rientro nella massa liquida. Tuttavia, anche il numero di molecole che si trovano in tale condizione risulta proporzionale al numero di molecole in fase gassosa e, pertanto, crescente con la pressione del vapore.

Inizialmente ( $t=0$  in Figura 20) vi saranno pertanto unicamente molecole che riescono ad abbandonare la massa liquida, contribuendo così alla formazione di vapore e della corrispondente pressione. In un istante intermedio del processo ( $t=t_1 > 0$  in Figura 20), il numero di molecole che si porta, nell'unità di tempo, dalla fase liquida a quella gassosa si mantiene costante, mentre la quantità di molecole che dalla fase gassosa si riporta alla fase liquida, in quanto inferiore alla prima, determina un continuo aumento delle molecole in fase gassosa e, corrispondentemente, un aumento sia della pressione del vapore che, quindi, del numero di molecole che rientra in fase

liquida. Dopo un tempo sufficientemente lungo dall'inizio del processo (schematicamente indicato con  $t=\infty$  in Figura 20) si raggiunge una condizione di equilibrio nella quale il numero di molecole che si porta dalla fase gassosa a quella liquida nell'unità di tempo uguaglia la corrispondente grandezza relativa al passaggio opposto. In tali condizioni, il numero di molecole in fase gassosa si deve mantenere costante (naturalmente, a meno di variazioni irrisorie che possono intervenire in intervalli di tempo molto piccoli), così come, conseguentemente, la pressione del vapore. Tale condizione di equilibrio, nella quale non si ha ulteriore evaporazione di liquido, è anche detta di *saturazione* e la corrispondente pressione *pressione di vapor saturo* o *tensione di vapore*. Più precisamente, sebbene le due grandezze siano numericamente identiche, la prima rappresenta, concettualmente, il fenomeno legato alla presenza di molecole in fase gassosa, quindi la pressione vera e propria del vapore e la conseguente tendenza delle molecole in fase gassosa a rientrare nella fase liquida; la seconda rappresenta piuttosto la tendenza del liquido ad evaporare, evidenziata da un termine – tensione – che richiama in maniera più suggestiva il processo di "estrazione" delle molecole dalla fase liquida. Come ogni pressione, anche la tensione di vapore è misurata in Pascal nel SI.

Le condizioni di equilibrio menzionate sono naturalmente di tipo dinamico: sebbene il numero di molecole allo stato di vapore si mantenga costante, esse non sono sempre le stesse, venendo continuamente sostituite da altre molecole fuoriuscite dal liquido, mentre altre nel contempo vi ritornano.

Ogniqualevolta un liquido è soggetto ad una pressione esterna uguale o inferiore alla tensione di vapore esso tende a passare allo stato di vapore, cioè ad entrare in ebollizione. Un liquido può essere quindi portato in condizioni di ebollizione aumentandone la tensione di vapore mediante un aumento di temperatura a fronte di date condizioni di pressione esterna (è il caso dell'acqua nella pentola per cuocere gli spaghetti soggetta alla pressione atmosferica), o, in date condizioni di temperatura (quindi, di tensione di vapore), diminuendo la pressione esterna. Il secondo caso è quello che interessa qui maggiormente, potendo realizzarsi in situazioni di interesse tecnico legate alla presenza di depressioni, come è il caso, ad esempio, dei sifoni o degli impianti di pompaggio. Dei problemi connessi al verificarsi di condizioni di questo tipo si darà conto nei capitoli seguenti.

Nella Tabella 5 sono riportati alcuni valori della tensione di vapore dell'acqua in funzione della temperatura. Si osservi come in Tabella 5 siano inclusi anche valori relativi a temperature inferiori allo zero, ossia al passaggio diretto dallo stato solido allo stato di vapore, che è pure possibile e prende il nome di *sublimazione*.

**Tabella 5. Valori della tensione di vapore dell'acqua,  $p_v$ , in funzione della temperatura.**

$T$ (°C)	$p_v$ (atm)	$T$ (°C)	$p_v$ (atm)	$T$ (°C)	$p_v$ (atm)
-25	$6,26 \times 10^{-4}$	10	$1,21 \times 10^{-2}$	90	$6,92 \times 10^{-1}$
-15	$1,63 \times 10^{-3}$	30	$4,19 \times 10^{-2}$	100	1,00
-5	$3,95 \times 10^{-3}$	50	$1,22 \times 10^{-1}$	150	4,70
0,01	$6,03 \times 10^{-3}$	70	$3,08 \times 10^{-1}$	200	39,24

## 2.8 Comprimibilità

Qualsiasi fluido modifica il proprio volume al variare della pressione cui esso è soggetto. Dato un volume di fluido  $V$  in date condizioni di pressione, ad una variazione di pressione elementare  $dp$ , supposta uniforme sulla superficie di contorno del volume, corrisponde una variazione di volume  $dV$  data da:

$$dV = -\frac{V}{\varepsilon} dp, \quad (75)$$

in cui il termine  $\varepsilon$  è detto *modulo di elasticità di volume*. A norma della (75), ad un aumento di pressione corrisponde una diminuzione di volume tanto minore in modulo quanto maggiore è il valore del modulo di elasticità di volume. L'inverso del modulo di elasticità di volume è detto *coefficiente di comprimibilità*. Il modulo di elasticità di volume ha le dimensioni di una pressione e

si misura perciò in Pascal nel SI. Il significato fisico che gli si può attribuire è quello del valore di variazione di pressione da realizzare per ottenere una variazione di volume pari al volume iniziale. Un'espressione equivalente alla (75) espressa in termini di densità invece che di volume può ottenersi osservando che la massa del volume  $V$  è data da  $m = \rho V$ ; poiché la massa si mantiene costante nel processo di compressione o dilatazione in oggetto, risulta  $dm = \rho dV + V d\rho = 0$ , da cui:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\varepsilon} \quad (76)$$

Per tutti i liquidi  $\varepsilon$  può ritenersi praticamente indipendente dalla pressione, mentre aumenta generalmente con la temperatura, mantenendosi tipicamente dell'ordine di  $10^9$  Pa. In particolare, il modulo di elasticità di volume dell'acqua alla temperatura di  $10^\circ\text{C}$  ed alla pressione atmosferica vale  $2,03 \times 10^9$  Pa. Tali valori sono indice della scarsa comprimibilità dei liquidi: a norma della (75), una variazione di pressione di  $10^5$  Pa, dell'ordine della pressione atmosferica, comporta una variazione di volume dello 0,005%. Lo studio di alcuni fenomeni di interesse dell'Ingegneria Civile richiede di considerare la comprimibilità dei liquidi; nell'ambito dei fenomeni oggetto di studio del presente corso, i liquidi potranno tuttavia essere sempre considerati praticamente incompressibili. Assumendo, inoltre, condizioni di temperatura costante (isoterme), l'equazione di stato (71) assume la sua forma più semplice:

$$\rho = \text{cost} \quad (77)$$

A tale fine, naturalmente, è necessario assumere che il liquido sia anche *omogeneo*, ossia, ad esempio, non contenente specie disciolte con concentrazioni variabili all'interno della massa liquida, il che peraltro è implicito nella forma (71) dell'equazione di stato.

Nei gas, o aeriformi, il modulo di elasticità di volume dipende in misura apprezzabile sia dalla pressione che dalla temperatura. La determinazione del valore di  $\varepsilon$  può effettuarsi, per esempio, sulla base della legge dei gas perfetti, qualora il gas in esame sia ad essi assimilabile, come in genere avviene per valori di pressione relativamente ridotti. In particolare, nel caso di trasformazione isoterma può dedursi facilmente che il modulo di elasticità di volume è pari alla pressione del gas:  $\varepsilon = p$ . Pertanto, alla pressione atmosferica, dell'ordine di  $10^5$  Pa come detto, l'aria risulta circa  $2 \times 10^4$  volte più comprimibile dell'acqua. Anche con questi ordini di grandezza, un aeriforme può tuttavia essere trattato approssimativamente come un fluido incompressibile, purché non subisca variazioni di pressione rilevanti. Ciò è quanto potrà assumersi, ad esempio, in problemi di idrostatica, qualora la massa di aeriforme in esame non si estenda apprezzabilmente in verticale.

## 2.9 Assorbimento dei gas nei liquidi.

I gas hanno la possibilità di passare in soluzione nei liquidi con i quali si trovino a contatto attraverso una superficie libera. Tale fenomeno, detto *assorbimento* o *assorbimento*, è governato dalla legge di Henry, secondo la quale, a temperatura costante e per una determinata coppia gas-liquido, la massa di gas  $m_g$  disciolta nell'unità di volume di liquido è proporzionale alla pressione del gas  $p_g$ :

$$m_g = k_T p_g \quad .$$

La costante di proporzionalità  $k_T$  fra concentrazione del gas disciolto  $m_g$  (massa di gas disciolta per unità di volume liquido) e pressione  $p_g$  decresce all'aumentare della temperatura, cui corrisponde pertanto una diminuzione della solubilità.

La Legge di Henry è valida anche per una miscela gassosa (quale è l'aria). In tal caso, essa si applica ai singoli gas costituenti la miscela, con riferimento alle corrispondenti pressioni parziali. A norma della Legge di Dalton, la pressione parziale di un gas ideale in una miscela soggetta alla pressione  $p$  è pari al prodotto di tale pressione per la frazione volumetrica del gas, ovvero, alla pressione che la massa di gas presente nella miscela assumerebbe se occupasse da solo tutto il volume a disposizione della miscela.

Nell'ambito dell'Idraulica, tale proprietà dei gas è rilevante nei casi in cui si verificano, in alcune parti del liquido in esame, delle consistenti diminuzioni di pressione, come è il caso dei punti più elevati o di strozzature di una condotta, o delle condotte di aspirazione di impianti di pompaggio. In tali casi, infatti, alla diminuzione di pressione ed alla conseguente ridotta solubilità dei gas corrisponde la formazione di sacche gassose rilasciate dal liquido perché non più assorbibili, le quali determinano un funzionamento irregolare della condotta.



## CAPITOLO TERZO

### 3. IDROSTATICA

#### 3.1 Introduzione

L'idrostatica studia il comportamento dei fluidi in quiete, caratterizzati cioè da valori nulli, punto per punto, sia delle velocità che delle accelerazioni. Non sono infatti di tipo idrostatico le condizioni che si verificano, ad esempio, all'interno di un recipiente dotato di una apertura (detta *luce*) regolabile, all'interno del quale sia contenuto del liquido inizialmente in quiete, allorché la luce venga aperta istantaneamente.

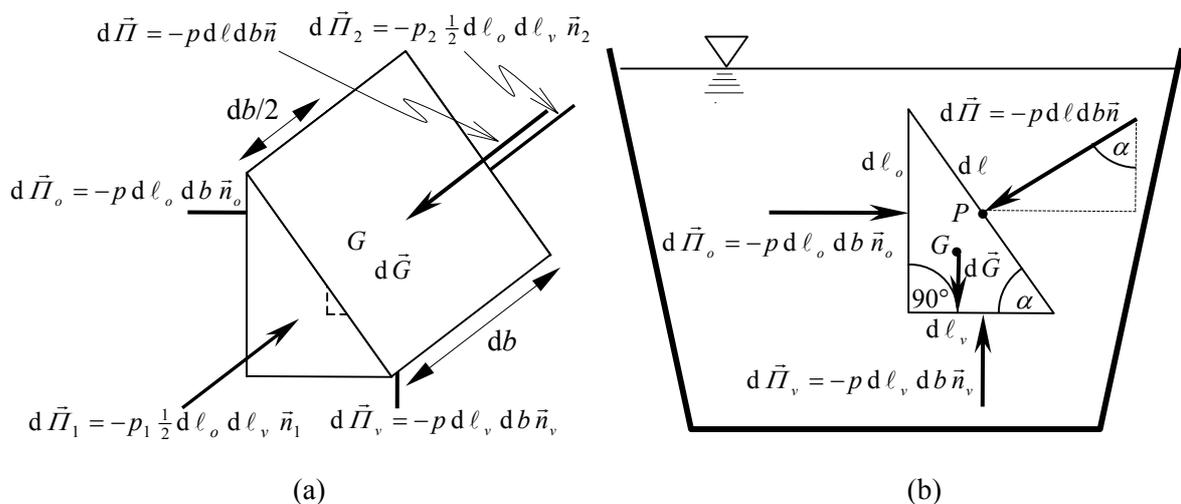
Tanto nel presente capitolo quanto nel prosieguo del corso, verranno considerati unicamente fluidi newtoniani, sebbene, nel caso specifico dell'idrostatica, le trattazioni che verranno sviluppate possano ritenersi valide per alcuni degli altri tipi di fluidi esaminati in sede di descrizione delle proprietà reologiche, e precisamente tutti i fluidi per i quali, in condizioni di quiete, risultino nulli gli sforzi tangenziali.

#### 3.2 Stato di sforzo in un punto.

Come preannunciato nel §2.3, lo stato di sforzo in un punto assume caratteri di particolare semplicità nel caso di fluidi newtoniani in quiete, come conseguenza dell'annullamento delle componenti di sforzo tangenziali, a norma della equazione (74).

Si consideri infatti il prisma elementare di fluido ad asse orizzontale di Figura 21, avente per sezione retta un triangolo rettangolo contenuto in un piano verticale, con un cateto orizzontale ed uno verticale. I lati della sezione triangolare e la profondità del prisma in direzione dell'asse orizzontale abbiano lunghezze  $d\ell$ ,  $d\ell_o = d\ell \sin \alpha$ ,  $d\ell_v = d\ell \cos \alpha$  e  $db$  infinitesime,  $\alpha$  essendo l'angolo fra le facce orizzontale ed obliqua del prisma, che si assume mantenersi inalterato al tendere a zero delle dimensioni lineari.

Rispetto alle dimensioni lineari, le aree sia della sezione retta (sezioni di estremità del prisma), data da  $\frac{1}{2} d\ell_v d\ell_o$ , che delle tre superfici laterali di basi  $d\ell$ ,  $d\ell_o$ ,  $d\ell_v$  ed altezza  $db$  sono infinitesime di ordine 2, mentre il volume del prisma è infinitesimo di ordine 3, perché dato dal prodotto dell'area della sezione per la profondità  $db$ :  $\frac{1}{2} d\ell_v d\ell_o db$ .



**Figura 21. Schema dimostrativo dello stato di tensione in un punto in condizioni idrostatiche: (a) veduta assometrica del prisma elementare; (b) sezione triangolare.**

Si vuole esaminare lo stato di sforzo nel punto  $P$  posto nel centro di figura del rettangolo obliquo di dimensioni  $d\ell db$ . Il prisma fluido è in equilibrio sotto l'azione della forza peso  $d\vec{G}$  (forza di volume o di massa), delle forze (o spinte) agenti sulle tre superfici laterali rettangolari,  $d\vec{\Pi}$ ,  $d\vec{\Pi}_o$  e  $d\vec{\Pi}_v$ , e sulle due superfici triangolari di estremità,  $d\vec{\Pi}_1$  e  $d\vec{\Pi}_2$  (forze di superficie). A norma della prima equazione cardinale della statica (47), deve risultare:

$$d\vec{G} + d\vec{\Pi} + d\vec{\Pi}_o + d\vec{\Pi}_v + d\vec{\Pi}_1 + d\vec{\Pi}_2 = 0 . \quad (78)$$

Il vettore risultante a primo membro della (78) è nullo se risultano nulle le sue tre componenti scalari rispetto al sistema di riferimento prescelto. Poiché gli sforzi sono unicamente normali essendo il fluido in quiete, le forze  $d\vec{G}$ ,  $d\vec{\Pi}$ ,  $d\vec{\Pi}_o$  e  $d\vec{\Pi}_v$  sono tutte contenute in un piano verticale, mentre le forze  $d\vec{\Pi}_1$  e  $d\vec{\Pi}_2$  sono orizzontali. Pertanto, queste ultime devono farsi equilibrio,  $d\vec{\Pi}_1 + d\vec{\Pi}_2 = 0$ , e deve perciò anche verificarsi:

$$d\vec{G} + d\vec{\Pi} + d\vec{\Pi}_o + d\vec{\Pi}_v = 0 . \quad (79)$$

Date le dimensioni infinitesime del volume prismatico, a meno di termini infinitesimi, sia la distribuzione della massa al suo interno che le distribuzioni degli sforzi sulle superfici laterali sono uniformi, per cui i punti di applicazione delle forze coincidono con i centri di figura del volume e delle superfici rettangolari per le forze di volume e di superficie rispettivamente. Le quattro forze a primo membro della (79) giacciono pertanto tutte nel piano verticale di simmetria del prisma, ad una distanza  $db/2$  dalle estremità. Indicati con  $p$ ,  $p_o$  e  $p_v$  gli sforzi normali agenti sulle tre superfici laterali rettangolari di basi  $d\ell$ ,  $d\ell_o$  e  $d\ell_v$  rispettivamente ed altezza  $db$  – di cui  $p$ , in particolare, è lo sforzo nel punto  $P$  – risultano i seguenti moduli delle forze a primo membro della (79):

$$\begin{aligned} dG &= \gamma \frac{1}{2} d\ell_o d\ell_v db \\ d\Pi &= p d\ell db \\ d\Pi_o &= p_o d\ell_o db \\ d\Pi_v &= p_v d\ell_v db \end{aligned} ,$$

di cui il modulo della forza peso infinitesimo di ordine superiore rispetto ai moduli delle spinte sulle superfici laterali e pertanto trascurabile rispetto ad essi al tendere a zero della sezione del prisma. In tali condizioni deve quindi aversi, in definitiva, l'equilibrio fra le sole forze di superficie:

$$d\vec{\Pi} + d\vec{\Pi}_o + d\vec{\Pi}_v = 0 . \quad (80)$$

Nelle espressioni vettoriali di tali spinte riportate in Figura 21 il segno meno deriva dal riferimento alle normali esterne alle facce delle superfici considerate, non raffigurate nel disegno, adottando l'usuale convenzione di considerare positivi gli sforzi normali di compressione. La (80) è verificata se risultano nulle due componenti del vettore risultante a primo membro lungo direzioni contenute nel piano verticale: ad esempio, lungo le direzioni orizzontale e verticale.

L'equilibrio nella direzione orizzontale fornisce:

$$- p d\ell db \sin \alpha + p_o d\ell_o db = 0 ,$$

da cui, osservando che  $d\ell \sin \alpha = d\ell_o$ , si ottiene  $p_1 = p_2$ .

L'equilibrio alla traslazione verticale è espresso dalla:

$$-p \, d\ell \, db \cos \alpha + p_v \, d\ell_v \, db = 0 \, ,$$

da cui, osservando che  $d\ell \cos \alpha = d\ell_v$ , si ottiene  $p = p_v$  e, pertanto:

$$p_o = p_v = p \, .$$

Il medesimo ragionamento si può ripetere, pervenendo alle medesime conclusioni, per qualunque valore dell'angolo  $\alpha$ , nonché previa rotazione del prisma di un angolo qualunque attorno ad un asse verticale, in tal modo considerando tutte le  $\infty^2$  giaciture possibili di elementi di superficie passanti per il punto  $P$ . Rimane così dimostrato che, in un fluido in quiete, lo stato di sforzo in un punto è individuato da un unico valore di sforzo normale, indipendente dalla giacitura della superficie considerata, cui viene dato il nome di *pressione*, ed alla quale si conviene, come già ricordato, di assegnare valori positivi se corrispondenti ad una sollecitazione di compressione sulla superficie premuta. Conseguentemente, nel caso idrostatico l'espressione (69) dello sforzo  $\vec{\tau}_n$  agente sulla faccia di una superficie di giacitura individuata dalla propria normale esterna  $\vec{n}$  assume la forma:

$$\vec{\tau}_n = -p\vec{n} \, , \quad (81)$$

mentre l'espressione (70) del risultante delle forze di superficie esercitate su una superficie  $S$  assume la forma:

$$\vec{H} = -\int_S p\vec{n} \, dS \, . \quad (82)$$

### 3.3 Equazione indefinita dell'idrostatica.

Accertato che lo stato di sforzo in un punto di un fluido in quiete è caratterizzato da un valore univoco di pressione, si pone il problema di determinare la distribuzione delle pressioni all'interno della massa fluida considerata. A tale scopo, si consideri il volume elementare parallelepipedo  $dV$  appartenente ad un fluido in quiete, di lati  $dx_1$ ,  $dx_2$  e  $dx_3$ , rappresentato in Figura 22.

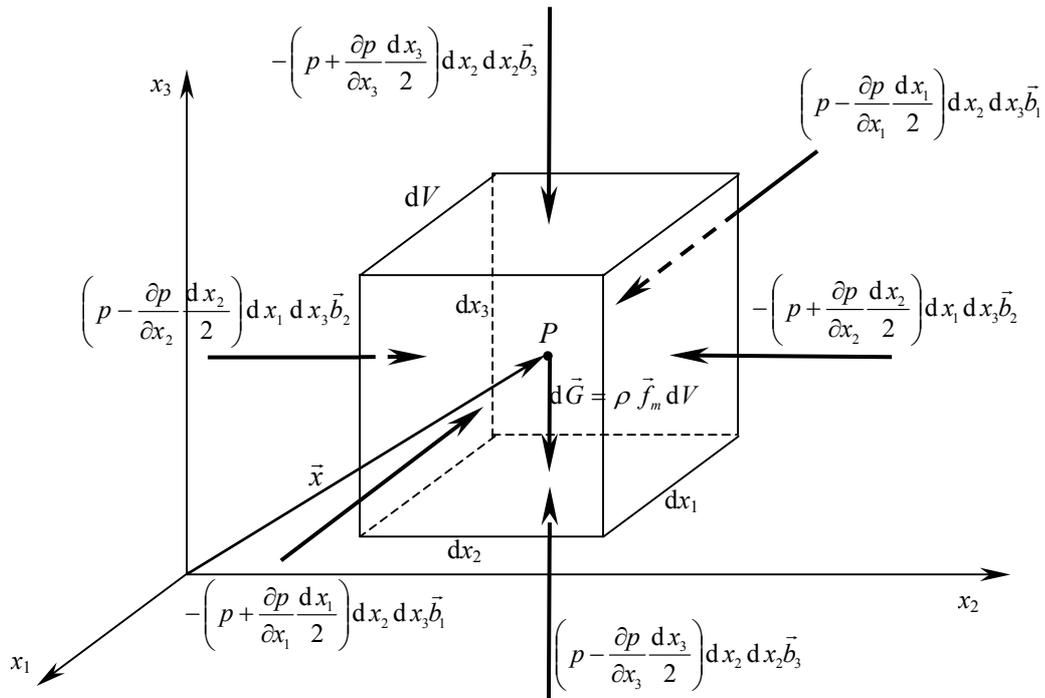


Figura 22. Volume fluido elementare in equilibrio idrostatico.

Il volume  $dV$  è in equilibrio sotto l'azione delle forze di superficie, associate alla distribuzione delle pressioni, e delle forze di massa  $\vec{f}_m$ , che ammetteremo di norma costituite dalla sola forza peso:

$$\vec{f}_m = -g\nabla z,$$

cui corrisponde la forza peso elementare agente sul volume parallelepipedo  $dV$ :

$$d\vec{G} = \rho\vec{f}_m dV = -\rho g\nabla z dx_1 dx_2 dx_3$$

Detta  $p$  la pressione nel punto  $P$  individuato dal suo vettore posizione  $\vec{x}$ , mediante sviluppi in serie di Taylor arrestati al primo ordine nelle tre direzioni degli assi coordinati, la spinta agente complessivamente sulle facce esterne della superficie di contorno del volume elementare  $dV$ , risultante delle forze di superficie, può esprimersi come segue (vedi schema di Figura 22):

$$\begin{aligned} d\vec{\Pi} = & -\left(p + \frac{\partial p}{\partial x_1} \frac{dx_1}{2}\right) dx_2 dx_3 \vec{b}_1 + \left(p - \frac{\partial p}{\partial x_1} \frac{dx_1}{2}\right) dx_2 dx_3 \vec{b}_1 + \\ & -\left(p + \frac{\partial p}{\partial x_2} \frac{dx_2}{2}\right) dx_1 dx_3 \vec{b}_2 + \left(p - \frac{\partial p}{\partial x_2} \frac{dx_2}{2}\right) dx_1 dx_3 \vec{b}_2 + \\ & -\left(p + \frac{\partial p}{\partial x_3} \frac{dx_3}{2}\right) dx_1 dx_2 \vec{b}_3 + \left(p - \frac{\partial p}{\partial x_3} \frac{dx_3}{2}\right) dx_1 dx_2 \vec{b}_3 = \\ & -\left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \vec{b}_1 + \frac{\partial p}{\partial x_2} \vec{b}_2 + \frac{\partial p}{\partial x_3} \vec{b}_3\right) dx_1 dx_2 dx_3 = -\nabla p dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned}$$

in cui  $\vec{b}_1$ ,  $\vec{b}_2$  e  $\vec{b}_3$  sono i versori degli assi coordinati  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  rispettivamente.

Le forze agenti sul volume elementare devono farsi equilibrio. A norma della prima equazione cardinale della statica, equazione (47), nel caso di forze di massa qualunque deve pertanto risultare, dopo semplificazione del volume elementare  $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ :

$$\rho\vec{f}_m = \nabla p, \quad (83)$$

ovvero, nel caso in cui le forze di massa siano costituite dalla sola forza peso:

$$-\rho g\nabla z = \nabla p. \quad (84)$$

L'equazione (83) è detta *equazione indefinita dell'idrostatica* o *equazione dell'idrostatica in forma locale*. Essa deve essere soddisfatta in ogni punto della massa fluida in quiete. Poiché il vettore gradiente di una funzione scalare è, punto per punto, perpendicolare alla superficie dello spazio sulla quale la funzione è costante, dalla (83) risulta che la pressione è costante su superfici (dette *isobariche*) rispetto alle quali la forza di massa risulta, punto per punto, normale. Nel caso della forza peso, le superfici isobariche sono pertanto piani orizzontali. Proiettando la (84) lungo la verticale si ottiene:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g, \quad (85)$$

la quale, sulla base di una equazione di stato,  $\rho = \rho(p, T)$ , consente di determinare la distribuzione di pressione  $p(z)$ . La (85) può essere utilizzata per determinare la distribuzione di pressione nell'atmosfera terrestre, ipotizzando il tipo di trasformazione termodinamica rappresentativa delle condizioni della colonna d'aria: ad esempio, isoterma o adiabatica. Lo stesso tipo di valutazione può effettuarsi allo scopo di rendersi conto delle condizioni nelle quali un aeriforme possa essere

considerato, ai fini applicativi, come un fluido praticamente incompressibile. Assumendo condizioni isoterme e pressioni non troppo elevate, l'equazione di stato è data dalla Legge di Boyle-Mariotte, qui scritta in termini di densità invece che di volume specifico, inverso della densità:

$$\frac{p}{\rho} = \text{cost} = \frac{p_0}{\rho_0} , \quad (86)$$

in cui il valore della costante può desumersi, ad esempio, per l'aria, in condizioni di pressione atmosferica ed alla temperatura di 20 °C, dai valori riportati in Tabella 1 ( $p_0 = 1 \text{ atm} = 101303 \text{ Pa}$ ) e Tabella 2 ( $\rho_0 = 1,226 \text{ kg/m}^3$ ). Si ha quindi la seguente equazione differenziale ordinaria:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{\text{cost}} dz = -\frac{g\rho_0}{p_0} dz ,$$

la quale, integrata con le condizioni al contorno  $p = p_0$  per  $z = 0$ , fornisce la seguente distribuzione di pressione in funzione della quota:

$$p = p_0 e^{-\frac{g\rho_0 z}{p_0}} .$$

Mediante tale relazione si può valutare il rapporto delle pressioni,  $p_1$  e  $p_2$  vigenti alle quote  $z_1$  e  $z_2$ :

$$\frac{p_1}{p_2} = e^{-\frac{g\rho_0(z_1 - z_2)}{p_0}} .$$

Ad esempio, ad una differenza di quota di 10 m corrisponde un rapporto fra le pressioni pari a:

$$\frac{p_1}{p_2} = e^{-\frac{9,80665 \times 1,226 \times 10}{101303}} = 0,99881 ,$$

pari anche al rapporto fra le densità corrispondenti, mentre ad dislivello di 50 m corrisponderebbe un rapporto delle pressioni pari a 0,99408. Pertanto, ogniqualvolta si abbia a che fare con volumi di aeriformi non eccessivamente estesi in verticale, tali aeriformi potranno considerarsi come praticamente incompressibili e, inoltre, aventi pressione distribuita in modo praticamente uniforme all'interno del volume, in conseguenza della densità relativamente ridotta. A queste condizioni ci riferiremo esclusivamente nel prosieguo, ferme restando le considerazioni esposte sulle possibilità di utilizzo più generale della (85).

### 3.4 Equazione globale dell'idrostatica.

Si consideri un qualunque volume finito  $V_c$  individuato all'interno di una massa fluida in quiete, detto *volume di controllo*, sia esso interamente immerso nel fluido circostante, ovvero a contatto con una parete, come rappresentato in due esempi in Figura 23, o anche con altri fluidi.

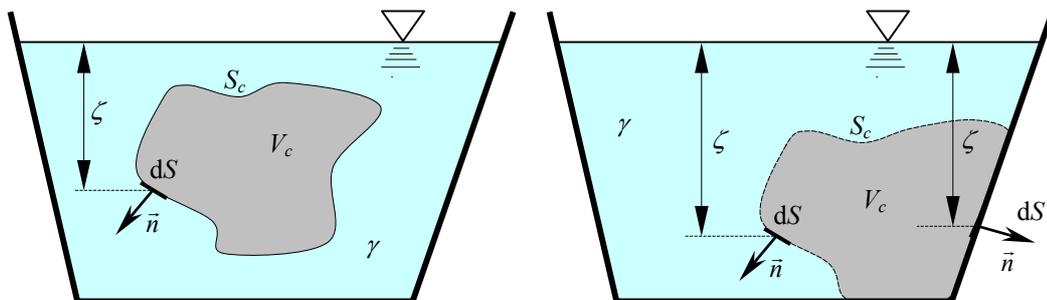


Figura 23. Schemi per la derivazione dell'equazione globale dell'idrostatica

Essendo tale volume fluido in condizioni di equilibrio statico, devono valere per esso le equazioni cardinali della statica (47) e (48):

$$\vec{R}_e = \sum_{k=1}^N \vec{F}_{e_k} = 0 \quad , \quad (47)$$

$$\vec{M}_e = \sum_{k=1}^N \vec{M}_{e_k} = \sum_{k=1}^N \vec{r}_k \times \vec{F}_{e_k} = 0 \quad . \quad (48)$$

in cui  $\vec{R}_e$  ed  $\vec{M}_e$  sono rispettivamente il risultante delle forze esterne ed il momento risultante rispetto ad un qualunque punto dello spazio delle forze esterne applicate alla massa fluida contenuta nel volume di controllo.

Le forze esterne agenti sul volume di controllo possono suddividersi in forze di massa (o di volume) di risultante<sup>18</sup>:

$$\vec{G} = \int_V \vec{f}_m \, dV$$

e forze di superficie, esercitate dalle masse esterne alla superficie di contorno, siano esse fluide o solide (pareti), di risultante:

$$\vec{I} = - \int_{S_c} p \vec{n} \, dS \quad . \quad (82)$$

Nel caso le forze di massa siano costituite dalle sole forze peso, il vettore:

$$\vec{G} = \int_V -\rho g \nabla z \, dV = -g \nabla z \int_V \rho \, dV = -gm \nabla z \quad (73)$$

rappresenta evidentemente il peso del volume di controllo di massa  $m$ .

La prima equazione cardinale della statica si scrive perciò:

$$\vec{G} + \vec{I} = 0 \quad , \quad (87)$$

denominata *equazione globale dell'idrostatica*. In generale, in Idraulica si dicono globali equazioni in forma di integrali estesi a volumi di controllo.

Essendo il sistema di forze esterne esercitato sul volume di controllo costituito dalle sole due forze menzionate, uguali in modulo, parallele e discordi per effetto della (87), la seconda equazione cardinale richiede che esse risultino agenti sulla medesima retta d'azione<sup>19</sup>. Nel caso in cui le forze di massa siano costituite dalle sole forze peso, si concluderebbe che le forze di superficie costituiscono un sistema equivalente al vettore risultante  $\vec{I}$ , verticale, rivolto verso l'alto e di modulo pari al peso del volume fluido, applicato nel baricentro di quest'ultimo, in quanto costituente anche il punto di applicazione della forza peso  $\vec{G}$ .

Un procedimento più formale per la deduzione dell'equazione globale dell'idrostatica, del quale non daremo conto, è basato sull'uso delle formule di Gauss, equazione (24)<sup>20</sup>.

<sup>18</sup> Da declinare al femminile, perché *singolo* vettore equivalente alla distribuzione continua di forze peso elementari se applicato nel baricentro del volume fluido.

<sup>19</sup> Data l'arbitrarietà della scelta del polo (§1.2.2) per il calcolo del momento risultante, la scelta di un qualunque punto appartenente alla retta d'azione di una delle due forze rende nullo il momento della stessa forza. Dovendo essere quindi individualmente nullo anche il momento della seconda forza, questa deve avere braccio nullo e, pertanto, necessariamente, anche la medesima retta d'azione della prima forza.

<sup>20</sup> Vedi Citrini-Nosedà o Dispense di Idraulica A. Balzano per allievi ingegneri edili-architetti. Le stesse formule consentirebbero la deduzione dell'equazione indefinita a partire dall'equazione globale (87).

Nel §3.10.2.1, in sede di illustrazione dei metodi per la determinazione delle spinte esercitate da fluidi in condizioni idrostatiche, si mostrerà come l'equazione globale costituisca uno strumento particolarmente efficace nel caso della valutazione di spinte su superfici di forma qualunque. In particolare, si fa qui osservare che, non essendo richiesto per l'integrazione di una funzione che essa sia continua, le equazioni globali hanno il pregio di poter essere applicata a volumi di controllo non omogenei.

### 3.5 Fluidi pesanti, isotermi, omogenei e incompressibili. Legge di Stevin.

Un caso di particolare rilevanza ai fini applicativi, in idrostatica come in idrodinamica, è quello dei fluidi pesanti, isotermi, omogenei ed incompressibili, per i quali le forze di massa sono costituite soltanto dalla forza peso e la densità risulta costante in tutta la massa fluida ( $\rho = \text{cost}$ ). È questo il tipico caso dei liquidi in svariate condizioni di pratico interesse.

In forza dell'essere la densità costante, l'equazione indefinita dell'idrostatica per fluidi pesanti, isotermi, omogenei ed incompressibili (84) può risciversi nella forma:

$$\nabla \left( z + \frac{p}{\rho g} \right) = 0 ,$$

per cui la quantità costituente l'argomento del gradiente, in cui può porsi  $\gamma = \rho g$ , risulta costante in tutta la massa fluida:

$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{cost} . \quad (88)$$

L'equazione (88) è detta *equazione fondamentale della statica dei fluidi incompressibili* o *legge di Stevin*. La grandezza  $z + p/\gamma$  è detta *quota piezometrica* o *carico piezometrico* e verrà d'ora in avanti indicata con il simbolo  $h$ . La grandezza  $p/\gamma$  è detta *altezza piezometrica*. Evidentemente, la quota piezometrica in un punto dipende dal piano di riferimento scelto per le quote  $z$  (le quali verranno talora più specificamente indicate con il nome di *quote geodetiche*), mentre l'altezza piezometrica assume un valore univocamente determinato dalla pressione nel punto e dal peso specifico del liquido. A norma della (88), a tutti i punti di una massa fluida pesante ed incompressibile compete lo stesso valore di quota piezometrica, il cui valore può essere determinato qualora si conosca il valore di pressione esistente in un punto di quota data. Inoltre, come già evidenziato anche per il caso di fluidi pesanti comprimibili, la (88) indica che le superfici isobariche sono piani orizzontali.

Dimensionalmente, la quota piezometrica e l'altezza piezometrica sono lunghezze. Si osservi tuttavia che alla quota piezometrica si può attribuire il significato fisico di energia potenziale totale per unità di peso di liquido. Infatti, la quota parte di energia potenziale relativa al campo delle forze peso di un volume  $V$  di massa  $m = \rho V$  e peso  $W = gm$  rispetto al piano di riferimento per la valutazione delle quote è data da  $E_w = gmz = Wz^{21}$ . Per quanto riguarda il termine l'altezza piezometrica  $p/\gamma$ , essa rappresenta una energia di pressione per unità di peso, in quanto derivante dal termine  $\nabla p$  delle equazioni (83) e (84). Sebbene tale termine derivi, in effetti, da forze di superficie, il risultante delle forze di superficie cui è soggetto il volume elementare rappresentato in Figura 22 è dato dalla forza di volume  $d\vec{F}_p = -\nabla p dV = \nabla(-p dV)$ , corrispondente ad una forza per unità di peso  $\vec{f}_p = d\vec{F}_p / (\gamma dV) = \nabla(-p/\gamma)$ . In quanto dato dal gradiente di una funzione scalare, il relativo campo di forze è conservativo (vedi §0.); esso ammette potenziale  $\phi = -p/\gamma$  ed energia potenziale  $E_p = -\phi = p/\gamma$ , detta *energia di pressione*. Rimane pertanto dimostrato che la quota piezometrica rappresenta una energia potenziale totale (somma dell'energia del campo delle forze peso e dell'energia di pressione) per unità di peso di liquido.

Dati due punti,  $P_1$  e  $P_2$ , posti a quote  $z_1$  e  $z_2$  rispettivamente, la legge di Stevin fornisce:

<sup>21</sup> la costante arbitraria a meno della quale sono definiti i potenziali e le energie potenziali di cui al §0 è in effetti implicitamente considerata per l'arbitrarietà della scelta del piano di riferimento delle quote.

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} , \quad (89)$$

dalla quale si ricava l'espressione di uno dei due valori di pressione in funzione dell'altro:

$$p_2 = p_1 + \gamma(z_1 - z_2) . \quad (90)$$

La (90) indica che la pressione aumenta linearmente al diminuire della quota geodetica, con fattore di proporzionalità dato dal peso specifico del fluido.

In particolare, la (89) può essere scritta con riferimento ad un punto a quota geodetica generica  $z$  e ad un altro, la cui quota indichiamo con  $z_0$ , alla quale risulti nulla la pressione:

$$z + \frac{p}{\gamma} = z_0 . \quad (91)$$

Il piano orizzontale posto alla quota  $z_0$ , sul quale la pressione è ovunque nulla, è detto *piano dei carichi idrostatici* del fluido in questione. La sua quota rappresenta la costante che compare nella legge di Stevin (88), ossia, il valore di quota piezometrica comune a tutti i punti del fluido. La pressione in un punto di quota  $z$  è dunque esprimibile in funzione dell'affondamento del punto rispetto al piano dei carichi idrostatici:

$$p = \gamma(z_0 - z), \quad (92)$$

il quale rappresenta pertanto un riferimento importante per il calcolo delle pressioni. Per questo motivo il piano dei carichi idrostatici viene sempre riportato nella rappresentazione grafica di problemi applicativi. Viceversa, data la pressione  $p$  in un punto di quota  $z$ , la posizione del piano dei carichi idrostatici può ottenersi sommando alla quota del punto  $z$  l'altezza piezometrica  $p/\gamma$ .

Fino a questo momento è stato fatto riferimento ad un concetto di pressione legato, attraverso la definizione di sforzo riportata nel §2.3, alle forze realmente agenti su un elemento di superficie. Tale nozione di pressione è quella utilizzata in Termodinamica; ad esempio, nella scrittura della legge di Boyle-Mariotte (86). Diremo d'ora in avanti *pressioni assolute* tali pressioni e le indicheremo con un asterisco in apice,  $p^*$ , così come eventuali altre grandezze caratteristiche riferite alle pressioni assolute. Corrispondentemente, chiameremo *piano dei carichi idrostatici assoluto* il piano alla cui quota,  $z_0^*$ , sono nulle le pressioni assolute.

Nelle applicazioni pratiche risulta tuttavia particolarmente comodo considerare le cosiddette *pressioni relative*, che indicheremo con il simbolo  $p$  privo di apici, definite come differenza fra pressioni assolute e pressione atmosferica:

$$p = p^* - p_{atm}^* ,$$

ed alle quali faremo d'ora in avanti riferimento salvo diversa indicazione. Esprimendo la (91), scritta per pressioni assolute, in termini di pressioni relative, si ottiene:

$$z + \frac{p^*}{\gamma} = z + \frac{p + p_{atm}^*}{\gamma} = z_0^* ,$$

da cui:

$$z + \frac{p}{\gamma} = z_0^* - \frac{p_{atm}^*}{\gamma} = z_0 . \quad (93)$$

L'equazione (93) indica che la distribuzione delle pressioni relative, come quella delle pressioni assolute, ha andamento lineare con la quota, con fattore di proporzionalità dato dal peso specifico del fluido. Con ragionamento analogo a quello svolto in precedenza, si riconosce che il secondo

membro della (93) ha il significato di quota del piano dei carichi idrostatici corrispondente alle pressioni relative (*piano dei carichi idrostatici relativi*), ove queste sono nulle e la pressione assoluta uguaglia quindi la pressione atmosferica. Pertanto, il riferimento alle pressioni relative comporta il vantaggio di poter individuare il corrispondente piano dei carichi idrostatici in una superficie del fluido a contatto con l'atmosfera, qualora essa sia materialmente presente. Dalla (93) la differenza di quota fra i piani dei carichi idrostatici assoluti e relativi risulta data da:

$$z_0^* - z_0 = \frac{p_{atm}^*}{\gamma} .$$

Nel caso dell'acqua, il valore di tale differenza di quote corrispondente a valori medi della pressione atmosferica ( $p_{atm}^* = 101'303 \text{ Pa}$ ) e di peso specifico ( $\gamma_m = 9'806 \text{ N/m}^3$ ) è pari a 10,33 m. Nel caso del mercurio, avente peso specifico molto maggiore ( $\gamma_m = 132'871 \text{ N/m}^3$  a  $20^\circ\text{C}$  e  $p^* = 1 \text{ atm}$ ) la differenza corrispondente sarebbe pari a 0,76 m.

In tema di piano dei carichi idrostatici assoluto, giova puntualizzare che, a rigore, in assenza di provvedimenti particolari realizzabili in laboratorio<sup>22</sup>, non è possibile realizzare in una massa fluida condizioni di pressione assoluta nulla, in quanto, secondo quanto discusso nel §2.7, al di sopra della superficie libera di un liquido inizialmente soggetta ad una pressione nulla si crea del vapore avente pressione pari alla tensione di vapore del liquido. Peraltro, dato il modesto valore che la tensione di vapore assume nell'acqua, per tale liquido la differenza fra la quota teorica del piano dei carichi idrostatici assoluti e la quota del piano soggetto alla pressione di vapor saturo, data da  $\Delta z = p_v^*/\gamma$  sulla base della (92), è modesta rispetto alla differenza di quota fra i due piani dei carichi idrostatici (sulla base dei dati di Tabella 1, Tabella 2 e Tabella 5, alla temperatura di  $10^\circ\text{C}$  risulta  $\Delta z = 1,21 \times 10^{-2} \times 101'303/9806 = 0,125 \text{ m}$ , mentre la differenza di quota fra i piani dei carichi idrostatici assoluti e relativi è pari, come già rilevato, a circa 10,33 m).

Mentre, quindi, i fluidi non sono praticamente atti a sopportare pressioni assolute negative (cioè sforzi normali assoluti di trazione), sono invece ammessi valori negativi della pressione relativa, corrispondenti semplicemente a condizioni di pressione assoluta inferiore alla pressione atmosferica, e pertanto a condizioni di sforzo normale reale ancora positivo. Si parla in tal caso di fluido *in depressione*; nel più usuale caso contrario si dice invece che il fluido è *in pressione*.

A parte la comodità di poter visualizzare il piano dei carichi idrostatico relativi, ci si può porre il problema di quali siano le conseguenze del riferimento alle pressioni relative nel caso in cui si debba valutare, come spesso occorre fare, la spinta che un fluido esercita, ad esempio, sulla parete di un recipiente. Come verrà meglio chiarito nel prosieguo in sede di descrizione dei metodi disponibili per tali operazioni, tipicamente il problema riguarda pareti esposte, sulla faccia opposta a quella a contatto con il fluido, alla pressione atmosferica. Il riferimento alle pressioni relative equivale pertanto ad evitare la considerazione di due distribuzioni di pressione uniformi pari entrambi alla pressione atmosferica: una, relativa al fluido che esercita la spinta, costituente soltanto una parte del diagramma delle pressioni assolute del fluido; l'altra, agente in verso opposto, dall'esterno, esercitata dall'atmosfera. Il riferimento alle pressioni relative, oltre che risultare equivalente nei confronti della valutazione della spinta sulla parete, risulta pertanto anche semplificativo rispetto alla considerazione delle pressioni assolute, in quanto consente di considerare un'unica distribuzione (netta) di pressioni.

Tutti i concetti legati alla legge di Stevin per fluidi pesanti a densità uniforme fin qui illustrati sono rappresentati in forma grafica in Figura 24. Si rimarca tuttavia che, in generale, i concetti di piano dei carichi idrostatici relativi ed assoluti discendono da un mero esame formale della legge di Stevin e del conseguente andamento lineare delle pressioni con la quota. Pertanto, si può dare il caso – tutt'altro che infrequente – che, tanto il piano dei carichi idrostatici relativi di un fluido, quanto quello assoluto, risultino posti a quote ove non è in realtà presente fluido<sup>23</sup>.

<sup>22</sup> Per una discussione di questi aspetti si veda C.A. Fassò – Dispense di Idraulica.

<sup>23</sup> È questo il caso dei serbatoi in pressione, quali sono, ad esempio, i comuni scaldacqua domestici, il cui piano dei carichi idrostatici relativi può essere visualizzato per mezzo di un *piezometro*, di cui si dirà al §3.9.

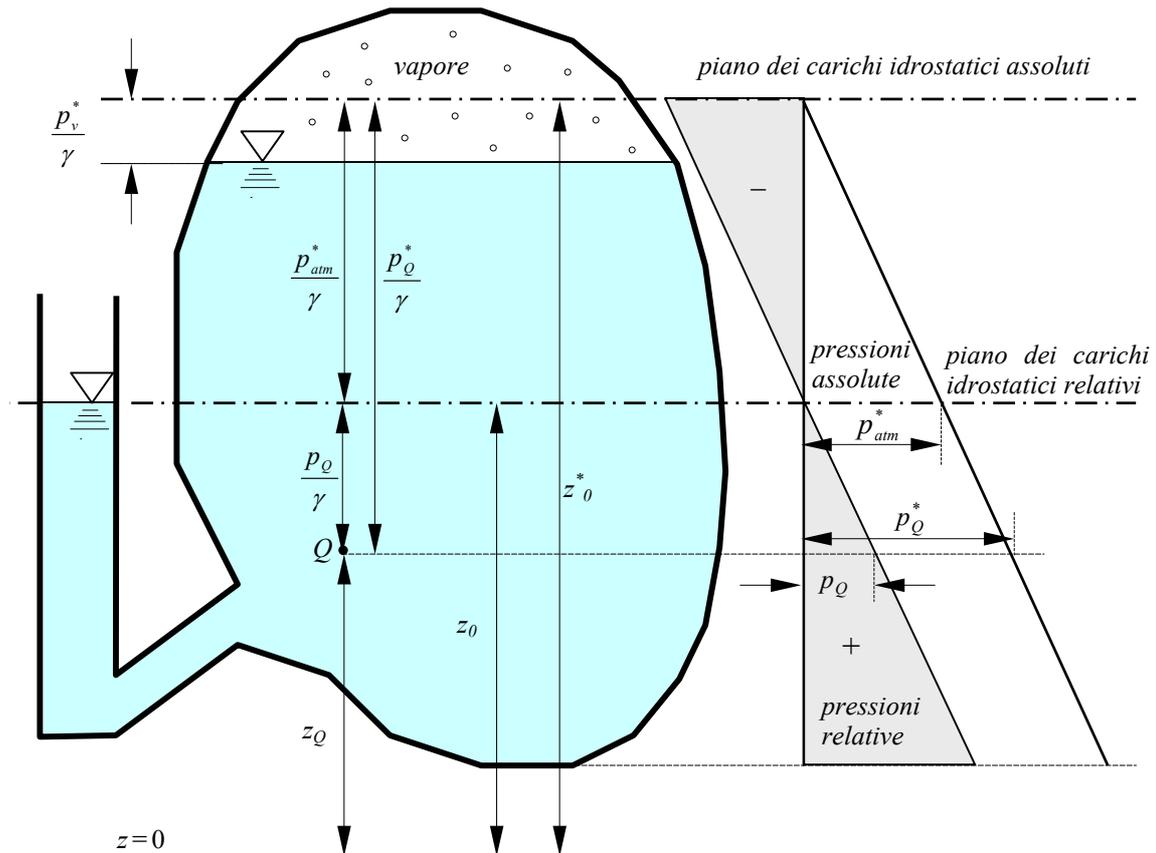


Figura 24. Rappresentazione grafica della distribuzione delle pressioni e dei relativi elementi caratteristici in un fluido pesante, isoterma, omogeneo e incompressibile.

### 3.6 Principio di Pascal.

Una conseguenza elementare della legge di Stevin è nota sotto il nome di Principio di Pascal.

Si considerino due punti di un fluido pesante, isoterma, omogeneo e incompressibile in quiete posti alle quote  $z_1$  e  $z_2$  e soggetti alle pressioni  $p_1$  e  $p_2$ . In forza della legge di Stevin devono essere verificate le equazioni (89) e (90):

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} , \quad (89)$$

$$p_2 = p_1 + \gamma(z_1 - z_2) . \quad (90)$$

In seguito all'applicazione, con un mezzo opportuno, di una sovrappressione  $\Delta p_1$  nel punto 1, si vuole determinare l'eventuale variazione di pressione nel punto 2, qualora il fluido si mantenga in condizioni di quiete. Il nuovo valore di pressione nel punto 2,  $p_2'$ , deve soddisfare la relazione:

$$z_1 + \frac{p_1 + \Delta p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2'}{\gamma} ,$$

da cui:

$$p_2' = p_1 + \gamma(z_1 - z_2) + \Delta p_1 = p_2 + \Delta p_1 ,$$

la quale sancisce che l'incremento di pressione imposto nel punto 1 si è risentito, inalterato, in tutti gli altri punti della massa fluida. Tale conclusione costituisce l'enunciato del Principio di Pascal.

Naturalmente, la sovrappressione  $\Delta p$  comporta anche l'aumento della quota dei piani dei carichi idrostatici (sia relativi che assoluti) della quantità  $\Delta p/\gamma$  rispetto alla situazione iniziale.

Una importante applicazione del principio di Pascal è costituita dal *torchio idraulico*. Si consideri il contenitore chiuso rappresentato in Figura 25, provvisto sulla parete posta in sommità di due cilindri all'interno dei quali possono scorrere dei pistoni cilindrici ideali, tali cioè da non risentire di resistenze apprezzabili allo scorrimento all'interno del cilindro per effetto di attriti. I pistoni abbiano sezioni  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , con  $\Omega_1 < \Omega_2$ . Si supponga anche, per semplicità, che i pistoni abbiano peso trascurabile, che le loro basi siano poste alla medesima quota  $z$  e che su tale piano viga inizialmente la pressione atmosferica (pressione relativa nulla). I pistoni sono dunque in equilibrio poiché le traslazioni orizzontali e le rotazioni sono impediti dai rispettivi cilindri – i quali costituiscono un tipo di vincolo denominato, nella Scienza delle Costruzioni, *manicotto* – mentre la componente lungo la verticale delle forze agenti sui pistoni è nulla in termini di pressioni relative (pressioni nulle alle due sezioni estreme dei pistoni, con peso proprio dei pistoni trascurabile), o comunque equilibrata in termini di pressioni assolute (spinte uguali e contrarie sulle due sezioni estreme, date in modulo dal prodotto della pressione atmosferica per l'area delle sezioni).

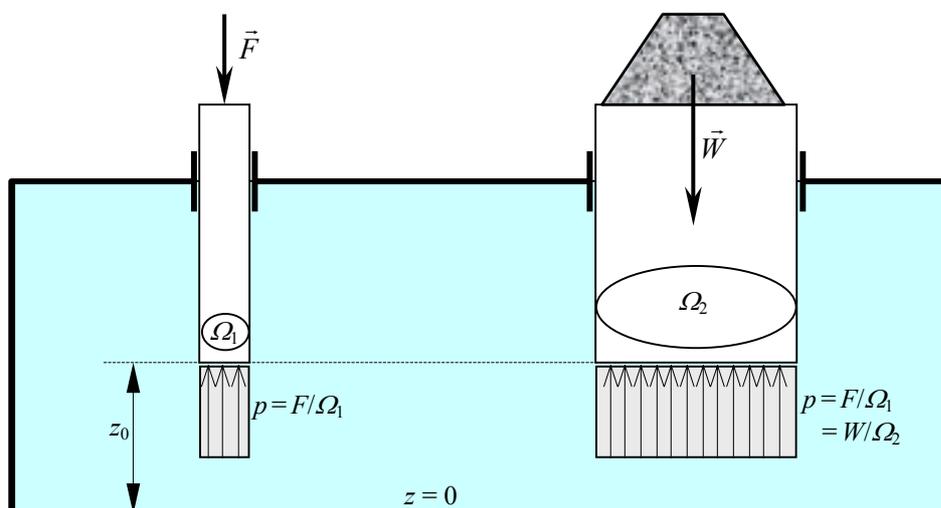


Figura 25. Schema di funzionamento del torchio idraulico.

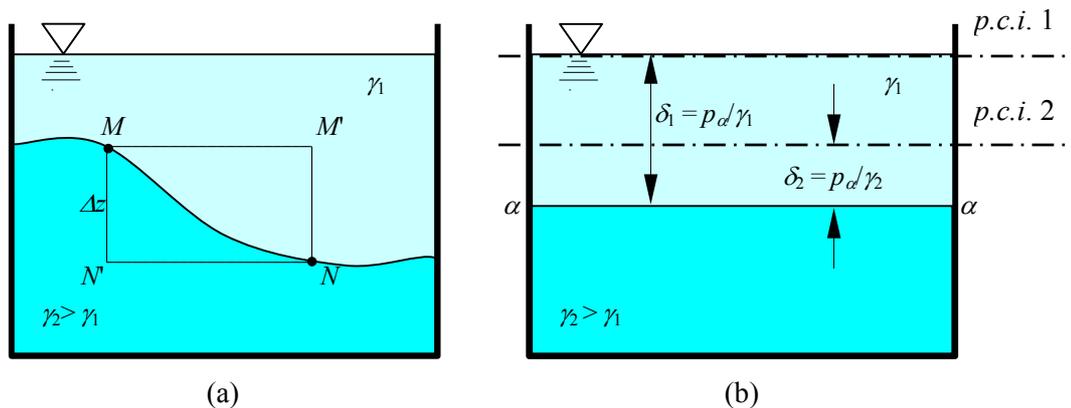
La distribuzione delle pressioni è pertanto data dall'equazione (91), ove  $z_0$  è la quota delle sezioni di base dei pistoni. Successivamente all'applicazione di una forza assiale  $\vec{F}$  di compressione sul pistone 1, questo rimane in equilibrio se alla sua base si produce una pressione positiva  $p$  ed una conseguente spinta verticale rivolta verso l'alto esercitata dal fluido sul pistone, di modulo  $p\Omega_1 = F$ , da cui  $p = F/\Omega_1$ . Poiché, in condizioni di equilibrio, il medesimo valore di pressione deve ritrovarsi alla base del pistone 2, questa è sottoposta ad una spinta, anch'essa verticale e rivolta verso l'alto, di modulo  $p\Omega_2$ , che è in grado di equilibrare un uguale peso  $W$  di un corpo posto sulla sommità del cilindro 2. Il valore del peso che può essere mantenuto in equilibrio sul pistone 2 è quindi dato da:

$$W = F \frac{\Omega_2}{\Omega_1} .$$

Il sistema dei due pistoni costituisce pertanto una sorta di leva idraulica, detto *torchio idraulico*, in quanto consente il contrasto di una forza resistente  $W$  maggiore di quella attiva  $F$ .

### 3.7 Fluidi non miscibili sovrapposti.

La legge di Stevin (88) si applica, come più volte richiamato, a fluidi pesanti, incompressibili isotermi ed omogenei. Essa può essere utilizzata anche nel caso in cui coesistano due o più fluidi che soddisfino tali condizioni, non miscibili l'uno nell'altro, purché per ciascuno si consideri un diverso valore della costante, ossia, una diversa quota del piano dei carichi idrostatici. Tale requisito deriva dall'aver ammesso costante il peso specifico nella derivazione della legge, quindi né variabile con continuità, né, tanto meno, discontinuo all'interfaccia fra due fluidi di caratteristiche differenti. Risulta d'altro canto evidente che all'interfaccia di due fluidi (ad esempio quelli rappresentati in Figura 26), dovendo considerarsi per ciascuno dei due fluidi la medesima quota  $e$ , per il principio di azione e reazione, la medesima pressione, essendo differenti i relativi pesi specifici non può risultare identico il valore della quota piezometrica.



**Figura 26. Liquidi non miscibili sovrapposti: (a) ipotetica superficie di separazione diversa da piano orizzontale; (b) superficie di separazione reale e posizioni dei piani dei carichi idrostatici.**

In questo caso risulta di interesse quale forma debba avere la superficie di separazione dei due fluidi e quali siano le posizioni dei relativi piani dei carichi idrostatici.

Il primo aspetto si chiarisce ipotizzando per la superficie di separazione una forma qualunque, per esempio quella riportata in Figura 26a, e verificando a quali conseguenze conduce l'applicazione della legge di Stevin a ciascuno dei due fluidi. La pressione nel punto  $N$  può esprimersi in funzione del valore nel punto  $M$  nei seguenti due modi, con riferimento ai due punti ausiliari,  $M'$  e  $N'$ , posti alla stessa quota di  $M$  ed  $N$  rispettivamente:

$$p_N = p_{M'} + \gamma_1 \Delta z = p_M + \gamma_1 \Delta z$$

$$p_N = p_{N'} = p_M + \gamma_2 \Delta z$$

da cui, sottraendo membro a membro, si ottiene:

$$\Delta z (\gamma_1 - \gamma_2) = 0 .$$

Essendo, per ipotesi,  $\gamma_1 \neq \gamma_2$ , deve quindi risultare  $\Delta z = 0$ . Non essendo stata fatta alcuna ipotesi particolare sui punti  $M$  ed  $N$ , dovendo due punti qualunque della superficie di separazione fra i due fluidi essere posti alla stessa quota, la superficie di separazione deve essere costituita da un piano orizzontale.

Ciò chiarito, la situazione deve risultare quindi quella rappresentata in Figura 26b. La posizione relativa dei piani dei carichi idrostatici si ricava osservando intanto che, affinché si abbiano condizioni di equilibrio stabile, il fluido avente peso specifico maggiore deve disporsi inferiormente all'altro, poiché in tal caso risulta la minima possibile la quota del baricentro dell'intero sistema costituito dai due fluidi. La situazione opposta costituisce, anch'essa, una

configurazione di equilibrio, di natura però instabile, perché in tal caso la quota del baricentro del sistema risulta massima. In pratica, ciò significa che, quand'anche questa seconda situazione venisse realizzata, una minima perturbazione indotta nella massa fluida tenderebbe, per evoluzione spontanea dei due fluidi, a determinare lo stabilirsi della condizione di equilibrio stabile.

Esprimendo la pressione sul piano di interfaccia fra i due fluidi con riferimento ai corrispondenti piani dei carichi idrostatici deve risultare:

$$p_a = \gamma_1 \delta_1 = \gamma_2 \delta_2 ,$$

da cui:

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} . \quad (94)$$

Per una condizione, quale quella rappresentata in Figura 26b, in cui il piano di separazione dei fluidi risulti in pressione, si ha pertanto che il piano dei carichi idrostatici del fluido più pesante giace al di sotto del piano dei carichi idrostatici del liquido più leggero. Nel caso invece il piano di separazione dei fluidi risultasse in depressione, con ragionamento del tutto analogo si perverrebbe alla conclusione opposta, poiché un volume fluido in depressione è situato al di sopra del proprio piano dei carichi idrostatici.

### 3.8 Aeriformi.

Nel §3.3 si è verificato con un esempio realistico che in un volume di aeriforme, almeno fintantoché esso non si estende in misura rilevante in verticale, la pressione, e quindi la densità possono essere considerati praticamente costanti. Per quanto riguarda la densità costante, ciò potrebbe far concludere che, presentando il gas un comportamento da fluido incompressibile, gli sia applicabile la legge di Stevin (88). Tuttavia, il fatto che possa considerarsi costante anche la pressione si concilia con tale legge, ovvero con la (90) che ne è conseguenza, soltanto ammettendo nullo il peso specifico del gas. Pertanto, avvalersi della semplificazione determinata dall'assumere costante la pressione in un gas nega la possibilità di definirne un piano dei carichi idrostatici, perché ciò comporterebbe una divisione per zero nella stessa espressione della quota piezometrica (88). Nulla impedirebbe, ovviamente, di assumere, invece, un peso specifico non nullo ma pur sempre costante. Tuttavia, poiché i valori di tale grandezza sono estremamente ridotti nei gas, ciò comporterebbe la localizzazione del relativo piano dei carichi idrostatici in posizione poco pratica perché notevolmente al di sopra del piano dei carichi idrostatici di un liquido sottostante.

A titolo di esempio, si considerino acqua ed aria sovrapposti in un contenitore chiuso superiormente, alla temperatura di 15 °C. Con riferimento ai valori di peso specifico riportati in Tabella 2 ed alla equazione (94), qualora il piano dei carichi idrostatici dell'acqua si trovasse 1 m al di sopra del piano di separazione fra acqua ed aria, il piano dei carichi idrostatici dell'aria si troverebbe al di sopra dello stesso piano di  $9806 / 12,022 = 815,7$  m. Oltre ad una inutile possibilità di valutazione di minime variazioni di pressione nel gas, tale scelta comporterebbe una certa mancanza di praticità per quanto riguarda la rappresentazione grafica dei piani dei carichi idrostatici.

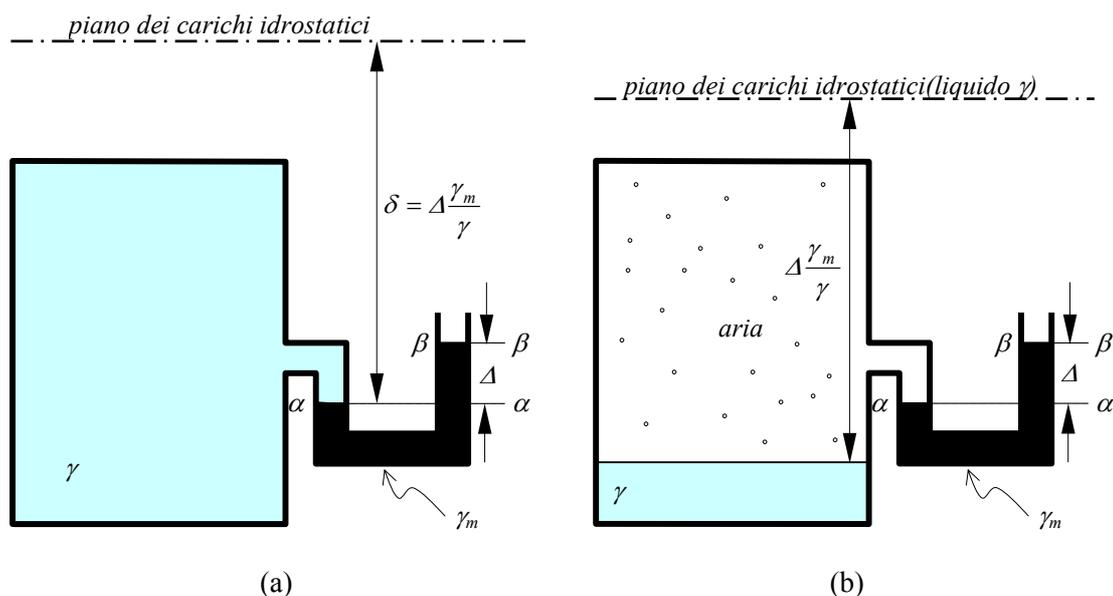
In conclusione, ogniqualvolta si presenti l'eventualità di dover considerare un gas in applicazioni di carattere tecnico che escludano estensioni in verticale apprezzabili, come si assumerà in via esclusiva nel presente corso, si farà senz'altro l'ipotesi semplificativa di assumere uniforme la pressione del gas e non si definirà alcun piano dei carichi idrostatici per esso.

### 3.9 Strumenti di misura della pressione.

Il più semplice strumento di misura della pressione in un liquido è costituito dal *piezometro*. Esso è costituito semplicemente da un tubo collegato ad un estremo al liquido ed all'altro estremo all'atmosfera. Un esempio di piezometro è riportato nella parte sinistra della Figura 24. Esso consente, in sostanza, la localizzazione del piano dei carichi idrostatici relativi e, sulla base della

(92), il calcolo delle pressioni in ciascun punto della massa liquida. Naturalmente, nel caso del piezometro non può che trattarsi di liquidi, in quanto un gas si disperderebbe nell'atmosfera.

Il piezometro risulta di difficile utilizzo nel caso di pressioni del liquido elevate, poiché in tal caso la superficie libera esposta alla pressione atmosferica (detta *menisco se*, come sempre accade, il tubo ha una sezione relativamente ridotta) risulta posta ad una quota elevata e la relativa lettura conseguentemente poco pratica. In questo caso risulta utile uno strumento solo leggermente più elaborato detto *manometro semplice*. Tale strumento è costituito da un tubo conformato ad U, anch'esso collegato ad un estremo al fluido del quale si voglia misurare la pressione (il quale può essere anche un gas) ed all'altro all'atmosfera, al cui interno è posto del liquido (*liquido manometrico*) di peso specifico maggiore di quello del fluido oggetto della misura di pressione.



**Figura 27. Manometro semplice collegato (a) ad un liquido e (b) ad un aeriforme sovrastante un liquido.**

Con riferimento agli schemi di Figura 27, detto  $\gamma_m$  il peso specifico del liquido manometrico, la pressione al menisco interno, posto sul piano  $\alpha$ - $\alpha$ , vale:

$$p_\alpha = \gamma_m \Delta$$

Qualora il manometro sia collegato ad un liquido (Figura 27a), tale valore di pressione deve anche essere pari al prodotto del peso specifico del liquido,  $\gamma$ , per l'affondamento del menisco interno rispetto al piano dei carichi idrostatici del liquido (altezza piezometrica alla quota del menisco interno),  $\delta$ . Quest'ultimo deve pertanto essere pari a:

$$\delta = \frac{p_\alpha}{\gamma} = \frac{\gamma_m \Delta}{\gamma} \quad (95)$$

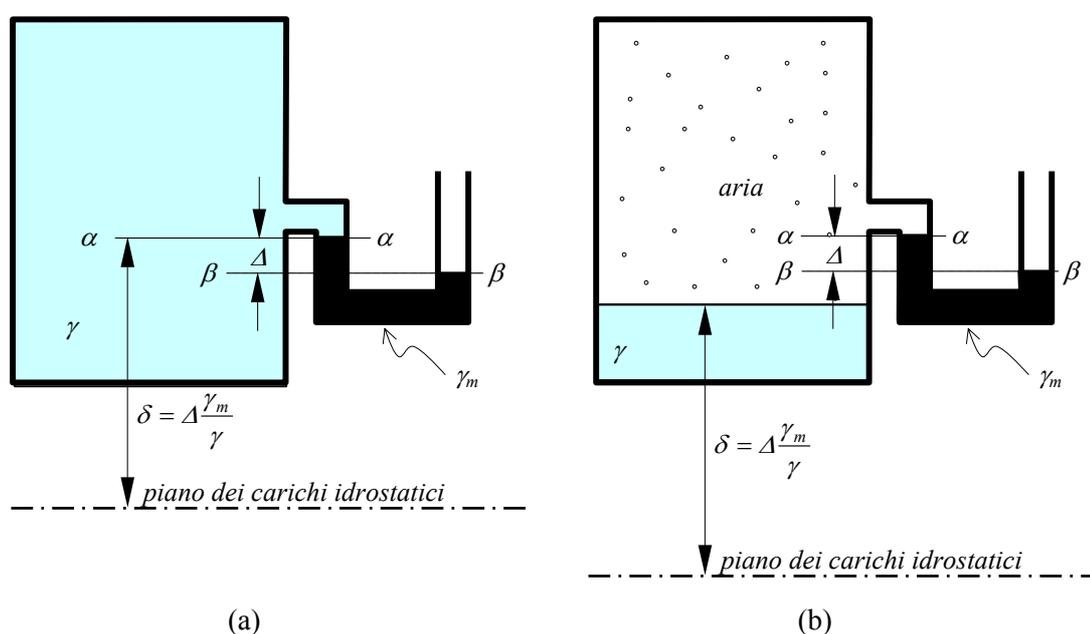
Dalla (95) si può osservare come la misura del manometro  $\Delta$  sia ridotta rispetto all'altezza piezometrica al menisco interno  $\delta$  nel rapporto dei pesi specifici dei liquidi oggetto della misura e manometrico rispettivamente. Per questo motivo, e per le ragioni esposte in precedenza per le quali si fa uso di tale strumento, come liquido manometrico si adotta generalmente il mercurio, in quanto avente un peso specifico elevato (vedi Tabella 2).

Nel caso in cui il manometro semplice sia collegato ad un aeriforme, come nell'esempio di Figura 27b, a parità di misura dello strumento si ottiene il medesimo valore di pressione al menisco

interno. Tuttavia, in questo caso, sulla base dell'approssimazione ammessa nel § 3.8 tale valore di pressione si mantiene inalterato in tutto il volume di aria sovrastante il liquido di peso specifico  $\gamma$ , in particolare, sui punti di tale volume a contatto con il liquido attraverso il relativo piano di separazione. La posizione del piano dei carichi idrostatici del liquido si ottiene pertanto innalzandosi rispetto a tale piano di separazione del medesimo valore di altezza piezometrica di cui al caso precedente. Il piano dei carichi idrostatici del liquido risulta pertanto essere posto necessariamente ad una quota inferiore rispetto al caso precedente.

Naturalmente, in un sistema quale quelli rappresentati Figura 27 è definibile un ulteriore piano dei carichi idrostatici: quello del liquido manometrico, posto, ovviamente, alla quota del menisco esterno collegato all'atmosfera.

In Figura 28 sono rappresentati casi analoghi a quelli di Figura 27, ma relativi a condizioni di depressione nei fluidi, segnalate dalla quota del menisco esterno del manometro inferiore rispetto alla quota del menisco interno. A norma della legge di Stevin, sul menisco interno si ha infatti:



**Figura 28. Manometro semplice collegato (a) ad un liquido e (b) ad un aeriforme sovrastante un liquido, in condizioni di depressione.**

$$P_{\alpha} = -\gamma_m \Delta ,$$

per cui i piani dei carichi idrostatici del liquido si trovano abbassandosi dell'altezza piezometrica  $\delta = \Delta \gamma_m / \gamma$  rispetto al menisco interno ed al piano di separazione fra liquido ed aria rispettivamente nei casi in cui il recipiente contenga soltanto il liquido (Figura 28a) o liquido con aria sovrastante (Figura 28b).

Qualora le pressioni da misurare siano rilevanti, può risultare necessario l'uso di *manometri metallici*, esempi dei quali possono reperirsi facilmente nell'erogatore di aria compressa di un distributore di benzina o in vicinanza della caldaia di un impianto di riscaldamento domestico. In ogni caso, l'uso di un manometro metallico è sempre decisamente più pratico di quello di un manometro semplice. Il tipo più semplice di manometro metallico è quello detto di Bourdon. Esso è costituito sostanzialmente da un tubo a forma di spirale e sezione ellittica, chiuso ad un estremo e collegato all'altro estremo al fluido del quale si intende misurare la pressione (Figura 29a). Sotto l'azione della pressione interna al tubo, questo tende a svolgersi<sup>24</sup>, determinando, attraverso una serie di leve collegata all'estremo cieco, il movimento di un indice su un quadrante graduato, sul

<sup>24</sup> l'effetto è il medesimo utilizzato nelle cosiddette "lingue di Menelik" in uso durante il Carnevale.

quale viene effettuata la lettura della pressione. Dal tipo di funzionamento descritto, risulta evidente che il valore di pressione segnato sul quadrante dipende dal valore di pressione vigente nella zona della spirale. Tipicamente, la taratura dello strumento viene effettuata in modo che esso fornisca la pressione esistente alla quota del suo baricentro. Tale misura non dipende pertanto dalla quota alla quale lo strumento viene collegato al recipiente contenente il fluido in oggetto, magari tramite una tubazione più o meno lunga, ma soltanto dalla quota del baricentro dello strumento. Pertanto, nell'esempio riportato in Figura 29b, i due manometri A e B collocati alla stessa quota ma collegati al liquido contenuto nel serbatoio mediante attacchi posti a quote differenti forniscono il medesimo valore di pressione,  $p_A = p_B$ .

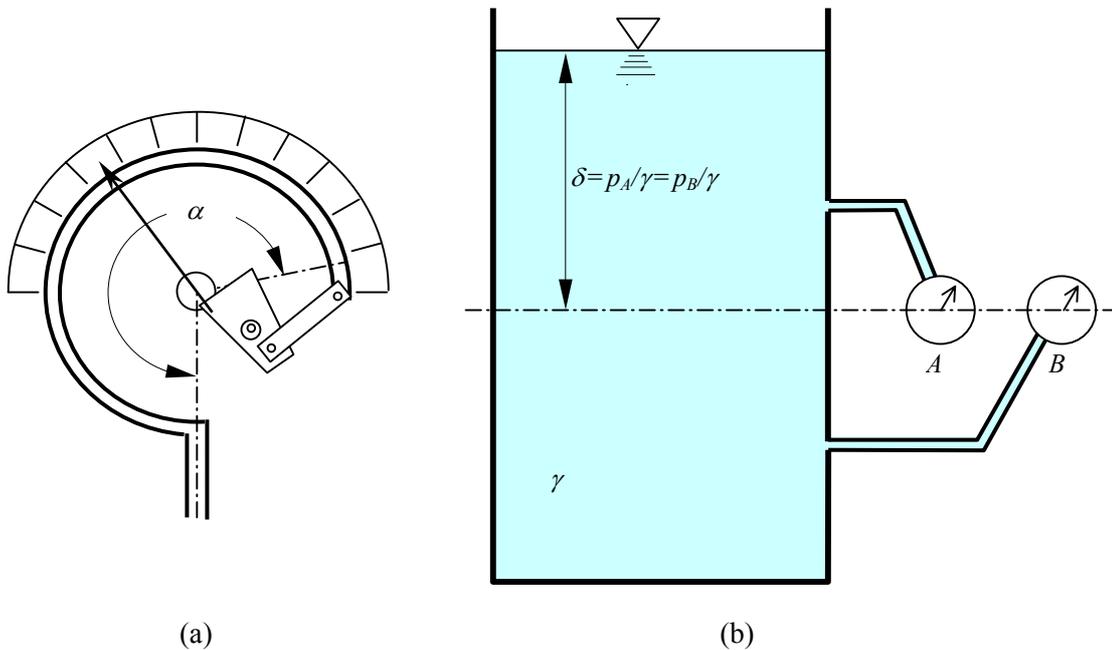


Figura 29. (a) rappresentazione schematica (a) del manometro Bourdon e (b) dell'indipendenza della misura dalla quota di attacco del manometro.



Figura 30. Esempi di manometri metallici con diverse scale di graduazione.

In Figura 30 sono riportate riproduzioni fotografiche di due manometri metallici graduati in diverse unità di misura (m H<sub>2</sub>O e bar). In particolare, il primo fornisce direttamente la misura dell'altezza piezometrica  $\delta = p/\gamma$  se utilizzato con acqua; desiderando conoscere il valore corrispondente di pressione, questo è fornito ovviamente da  $p = \gamma\delta$ . Naturalmente, lo strumento è atto a fornire la misura di pressione anche in liquidi diversi dall'acqua; in tal caso occorrerà però fare riferimento al

peso specifico dell'acqua per il calcolo della pressione, poiché la misura letta sul quadrante non rappresenta l'altezza piezometrica per il liquido in oggetto.

Un'ultima categoria di manometri è costituita dai *manometri differenziali*, i quali sono atti a misurare differenze di pressione fra gas o differenze di quote piezometriche fra liquidi. Nel caso dei liquidi, i manometri differenziali misurano pertanto differenze di quote di piani dei carichi idrostatici.

Un primo tipo di manometro differenziale è del tipo metallico. Nel caso del manometro Bourdon, la superficie esterna del tubo a spirale è soggetta alla pressione di uno dei due fluidi. La rotazione del tubo a spirale dipende infatti dall'azione risultante della pressione interna, che tende, come detto, a far svolgere la spirale, e della pressione esterna, che tende invece a farla avvolgere. La rotazione della spirale dipende quindi dalla differenza delle pressioni dei due fluidi. Da ciò consegue anche che, nei manometri metallici comuni, nei quali non viene adottato alcun accorgimento per isolare la superficie esterna del tubo ricurvo dall'ambiente esterno, detta superficie è soggetta alla pressione atmosferica e la pressione misurata dal manometro è perciò la pressione relativa del fluido cui il manometro è collegato. Nel caso in cui all'interno del tubo si realizzi il vuoto, il manometro metallico funziona come barometro, poiché risulta soggetto alla sola pressione atmosferica sulla superficie esterna del tubo ricurvo.

Un secondo tipo di manometro differenziale è del tipo *a liquido*. Esso è costituito da un tubo ad U collegato ai recipienti contenenti i due fluidi oggetto della misura (Figura 31). Limiteremo il discorso al caso di fluidi di uguale peso specifico, aeriformi o liquidi, che è il solo caso in cui la misura dello strumento fornisce una indicazione univoca della differenza di pressione e di quote piezometriche rispettivamente. Nel caso il liquido manometrico possieda peso specifico  $\gamma_m$  maggiore di quello  $\gamma$  del fluido oggetto della misura, esso si troverà nella parte bassa del tubo, costituente una posizione di equilibrio stabile per esso, come nel caso di Figura 31.

Dalla legge di Stevin, si ha:

$$P_\beta = P_\alpha + \gamma_m \Delta .$$

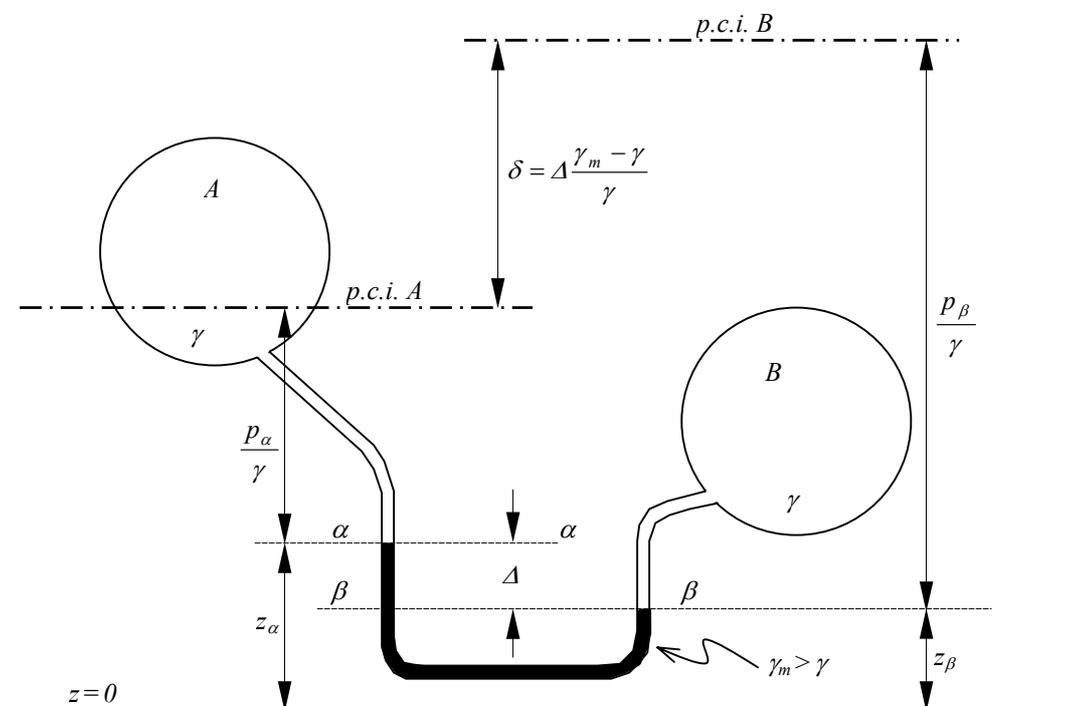
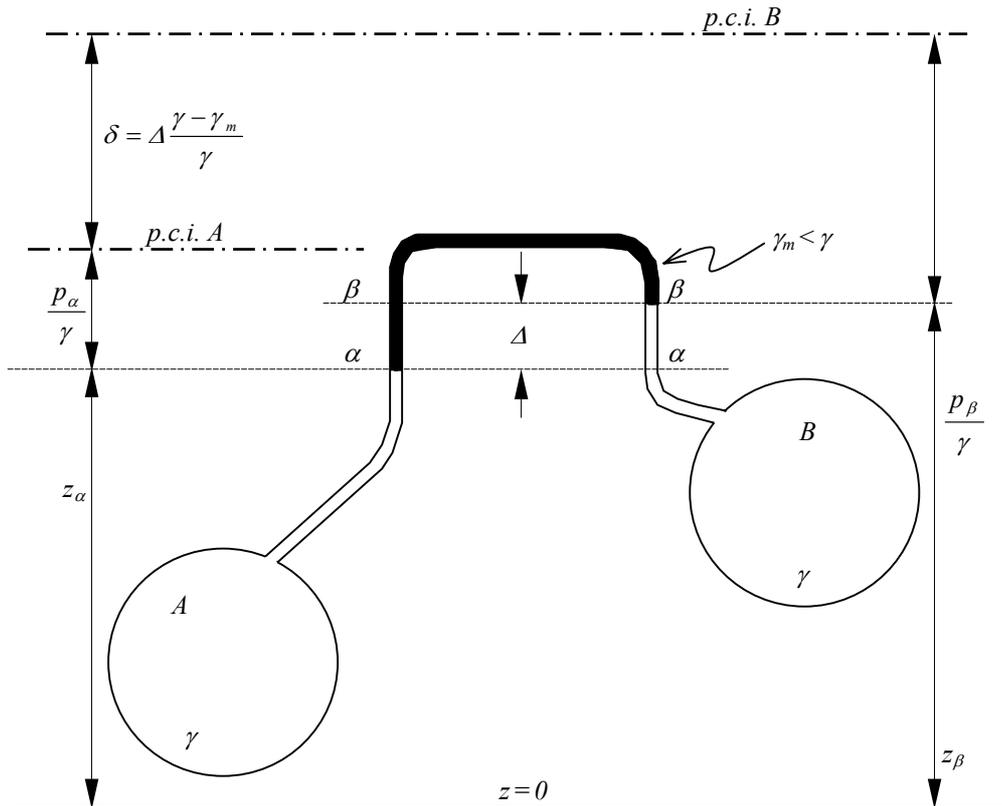


Figura 31. Schema di manometro differenziale a liquido (liquido manometrico più pesante dei fluidi oggetto della misura).



**Figura 32. Schema di manometro differenziale con fluido manometrico più leggero dei fluidi oggetto della misura.**

Nel caso di un liquido, dividendo membro a membro per il peso specifico  $\gamma$ , sommando successivamente membro a membro  $z_\alpha - z_\beta = \Delta$  e riarrangiando si ottiene:

$$\delta = \left( z_\beta + \frac{p_\beta}{\gamma} \right) - \left( z_\alpha + \frac{p_\alpha}{\gamma} \right) = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma} , \quad (96)$$

da cui si deduce che il piano dei carichi idrostatici più elevato è quello del liquido a contatto con il menisco del liquido manometrico meno elevato.

Si osservi che il manometro differenziale fornisce unicamente la differenza delle quote dei piani dei carichi idrostatici, sulle cui posizioni nulla può dirsi in mancanza di ulteriori informazioni – in sostanza, del valore della pressione in un punto qualunque di uno dei due liquidi. I liquidi possono quindi essere entrambi interamente in pressione, interamente in depressione, o parte in pressione e parte in depressione.

Nel caso il fluido manometrico sia più leggero dei fluidi oggetto della misura, il fluido manometrico deve disporsi nella parte alta del tubo ricurvo, come mostrato in Figura 32. Con ragionamento analogo a quello utilizzato per la deduzione della (96), si ottiene in questo caso:

$$\delta = \left( z_\beta + \frac{p_\beta}{\gamma} \right) - \left( z_\alpha + \frac{p_\alpha}{\gamma} \right) = \Delta \frac{\gamma - \gamma_m}{\gamma} . \quad (97)$$

In particolare, se il fluido manometrico è un gas (tipicamente, aria) ed il fluido oggetto della misura un liquido, potendosi trascurare il peso specifico del fluido manometrico rispetto a quello del liquido la misura del manometro differenziale uguaglia la differenza di quota dei piani dei carichi idrostatici,  $\delta = \Delta$ .

### 3.10 Spinte su superfici.

Sulla base della espressione (81) dello stato di sforzo idrostatico, la spinta elementare che un fluido in quiete esercita sulla faccia di un'areola  $dS$  avente normale  $\vec{n}$  è data da:

$$d\vec{\Pi} = -p\vec{n} dS . \quad (98)$$

da cui l'espressione generale della spinta esercitata da un fluido in quiete su una superficie qualunque  $S$ , risultante delle forze elementari (98):

$$\vec{\Pi} = \int_S -p\vec{n} dS . \quad (82)$$

Come ogni sistema di forze, anche il sistema di forze elementari di pressione esercitate da un fluido in quiete su una superficie equivale ad una forza pari al vettore risultante del sistema più una coppia o a due forze non complanari (§ 1.3.4.2). La determinazione di tale sistema di forze equivalente si esegue in maniera differente a seconda che la superficie che subisce la spinta sia piana o gobba. Nei paragrafi successivi sono illustrati i metodi utilizzabili nei vari casi.

#### 3.10.1 Spinte su superfici piane.

Una faccia di una superficie piana ha ovunque la stessa normale. Il sistema di forze di pressione elementari (98) agente sulla superficie costituisce pertanto un sistema di forze parallele, equivalente al vettore risultante (che in tal caso è detto *la risultante*) applicato nel relativo centro del sistema di forze parallele (§ 1.3.4.3).

La determinazione della risultante e del relativo punto di applicazione è svolta di seguito con riferimento allo schema di Figura 33, nella quale è rappresentato un liquido contenuto in un recipiente prismatico a sezione trapezia.

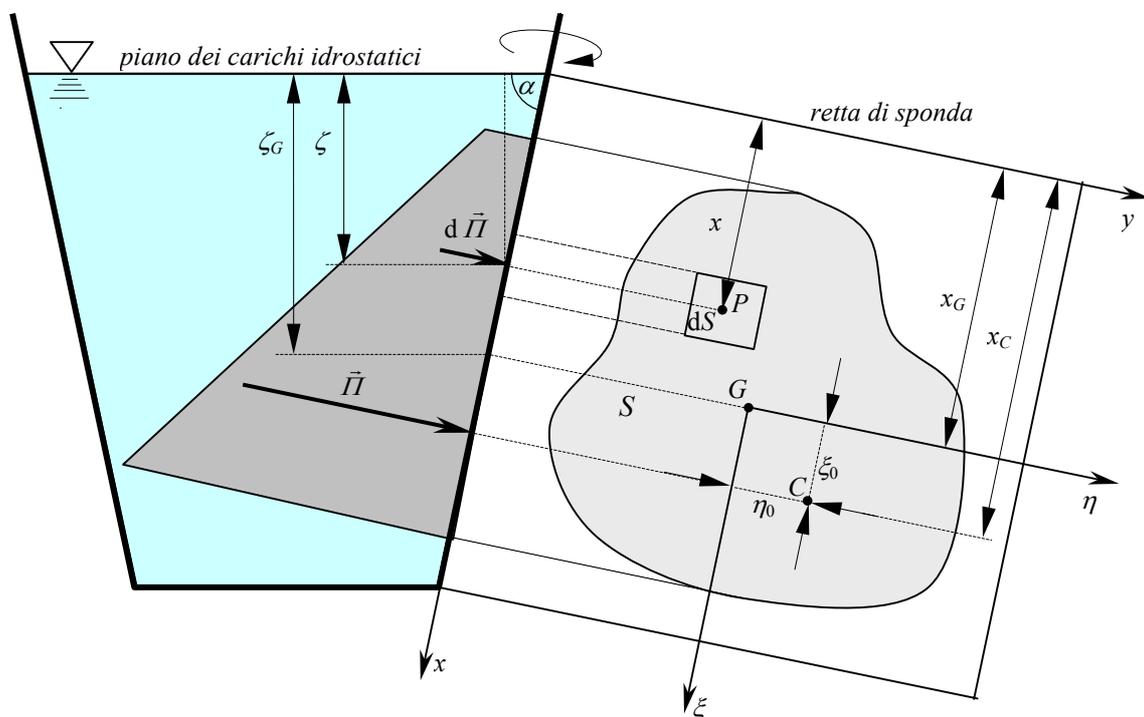


Figura 33. Schema di calcolo della spinta idrostatica su una superficie piana.

La superficie  $S$  sulla quale si desidera calcolare la spinta, che si assume avente forma del tutto generica, è posta sulla faccia interna della parete inclinata destra della sezione trapezia, vista

frontalmente nella parte destra del disegno previo ribaltamento della parete di  $90^\circ$  attorno ad una retta di massima pendenza. Nel disegno, campita in grigio è riportata la parte della distribuzione di pressione agente sulla superficie. Il solido avente per base la superficie  $S$  e per altezza, punto per punto, la pressione ivi vigente, è detto *solido delle pressioni* o *solido di spinta*.

Per quanto riguarda la risultante, la normale  $\vec{n}$  può essere portata fuori dall'integrale (82) in quanto costante su una superficie piana, consentendo di scrivere:

$$\vec{I} = -\vec{n} \int_S p \, dS \quad , \quad (99)$$

in cui l'integrale, pari al volume del solido di spinta, esprime la proiezione della spinta nella direzione opposta alla normale. Trattandosi di normale esterna, un segno positivo dell'integrale corrisponde quindi ad una sollecitazione di compressione nei confronti della superficie; un segno negativo, ad una sollecitazione di trazione. In valore assoluto, tale quantità è pari al modulo della spinta.

L'espressione (99) è suscettibile di notevole semplificazione. Detto  $\zeta$  l'affondamento di un generico punto  $P$  della superficie  $S$  rispetto al piano dei carichi idrostatici, l'integrale a secondo membro della (99) può svilupparsi come segue:

$$\int_S p \, dS = \int_S \gamma \zeta \, dS = \gamma \int_S \zeta \, dS \quad ,$$

nella quale l'integrale a terzo membro rappresenta il momento statico della superficie  $S$  rispetto al piano dei carichi idrostatici, pari al prodotto dell'affondamento  $\zeta_G$  del baricentro  $G$  della superficie  $S$  per l'area della superficie. Si può quindi scrivere:

$$\int_S p \, dS = \gamma \zeta_G S = p_G S \quad , \quad (100)$$

in cui  $p_G$  è la pressione nel baricentro della superficie. Pertanto, la componente della spinta sulla superficie nella direzione opposta alla normale alla superficie è esprimibile semplicemente come prodotto della pressione nel baricentro della superficie per l'area della superficie stessa. La spinta è di compressione se la pressione nel baricentro della superficie è positiva, ossia, se il baricentro è posto inferiormente al piano dei carichi idrostatici, come è il caso della Figura 33; è di trazione in caso contrario. Nel caso in cui il baricentro della superficie sia posto alla quota del piano dei carichi idrostatici, la risultante è nulla ed il sistema equivale ad una sola coppia. Infatti, in tal caso la superficie è scomponibile in due parti soggette a condizioni di pressione solo positiva e solo negativa (depressione), aventi il medesimo valore di momento statico rispetto al piano dei carichi idrostatici in valore assoluto – poiché il momento statico dell'intera superficie, che è nullo, risulta dalla somma algebrica dei momenti statici delle sue due parti per la proprietà additiva degli integrali – e quindi medesimo valore del modulo delle spinte corrispondenti: una di compressione, l'altra di trazione (ragionando naturalmente in termini di pressioni, e quindi di spinte, relative). Detto modulo comune è calcolabile mediante la (100) riferita alla parte di superficie in pressione.

Il significato dell'integrale contenuto nella (99) in termini di volume del solido di spinta, evidenziato in precedenza, è quindi da intendersi in senso generalizzato, potendo esso essere anche negativo o nullo se tale risulta la pressione nel baricentro della superficie  $S$ .

In quanto costituente un sistema di forze parallele, il sistema delle forze di pressione che il fluido esercita sulla superficie  $S$  è equivalente alla risultante  $\vec{I}$  applicata nel centro del sistema di forze. Poiché le forze di pressione elementari possono essere considerate applicate nei punti della superficie  $S$ , il corrispondente centro del sistema di forze, denominato *centro di spinta*, giace su tale superficie (punto  $C$  in Figura 33). Di tale punto occorre pertanto determinare le coordinate in un sistema di riferimento anch'esso giacente sul piano che contiene la superficie  $S$ .

A tale scopo si definisce un sistema di riferimento costituito da un asse  $x$  coincidente con una qualunque retta di massima pendenza ed un asse  $y$ , orizzontale, dato dall'intersezione del piano contenente la superficie  $S$  ed il piano dei carichi idrostatici – nel caso di Figura 33 materializzato

dal pelo libero del volume liquido. La retta corrispondente è detta *retta di sponda*. Tale retta orizzontale costituisce infatti la sponda del liquido sulla parete contenente la superficie soggetta alla spinta. Essendo  $d\Pi_n = p dS$  la componente nella stessa direzione e nel verso opposto alla normale della forza elementare agente su un elemento di superficie  $dS$ , l'analogo nel caso continuo della espressione (50) delle coordinate del centro di un sistema discreto di forze parallele fornisce per le due coordinate  $x_C$  ed  $y_C$  del centro di spinta nel sistema di riferimento scelto le seguenti espressioni:

$$x_C = \frac{\int_S x p dS}{\int_S p dS} \quad ; \quad y_C = \frac{\int_S y p dS}{\int_S p dS} . \quad (101)$$

Si ricorda che le (101) costituiscono l'espressione del teorema di Varignon. Scritte nella forma:

$$x_C \Pi_{-n} = x_C \int_S p dS = \int_S x p dS = \int_S x d \Pi_{-n}$$

$$y_C \Pi_{-n} = y_C \int_S p dS = \int_S y p dS = \int_S y d \Pi_{-n} ,$$

in cui  $\Pi_{-n}$  rappresenta la componente della risultante nella stessa direzione ed in verso opposto alla normale  $\vec{n}$ , esse esprimono infatti l'uguaglianza dei momenti rispetto agli assi  $x$  ed  $y$  della risultante  $\vec{\Pi}$  applicata nel centro di spinta e della distribuzione di forze di pressione elementari applicate nei punti della superficie  $S$ . Si può mostrare facilmente che uguagliare tali momenti rispetto agli assi equivale ad uguagliare le componenti sugli assi  $x$  e  $y$  dei corrispondenti vettori momento calcolati assumendo l'origine del riferimento come polo, giacenti sul piano che contiene la superficie in quanto dati da prodotti vettoriali fra un raggio vettore contenuto nel piano della superficie  $S$  e forze (la risultante e le forze di pressione elementari) normali alla superficie  $S$ . Rimane quindi verificata l'equivalenza dei due sistemi di forze nei termini più generali di uguaglianza del vettore risultante e del momento risultante rispetto ad un qualunque punto dello spazio.

Esprimendo la pressione che compare negli integrali contenuti nella (101) in funzione della coordinata  $x$  del punto generico:

$$p = \gamma \zeta = \gamma x \operatorname{sen} \alpha \quad (102)$$

e osservando che, oltre al peso specifico  $\gamma$ , anche l'angolo  $\alpha$  fra il piano che contiene la superficie  $S$  ed il piano dei carichi idrostatici risulta costante, col che entrambi possono essere portati fuori dal segno di integrale e semplificati fra numeratore e denominatore, le coordinate del centro di spinta possono esprimersi come:

$$x_C = \frac{\int_S x^2 dS}{\int_S x dS} = \frac{I_{xx}}{M_s} \quad ; \quad y_C = \frac{\int_S xy dS}{\int_S x dS} = \frac{I_{xy}}{M_s} , \quad (103)$$

in cui in cui  $I_{xx}$  e  $I_{xy}$  sono rispettivamente il momento d'inerzia della superficie  $S$  rispetto alla retta di sponda ed il momento centrifugo rispetto agli assi  $x$  e  $y$ ;  $M_s$  è il momento statico della superficie  $S$  rispetto alla retta di sponda.

In genere risulta più comodo esprimere le coordinate del centro di spinta rispetto ad un sistema di riferimento  $\xi, \eta$  avente origine nel baricentro della superficie  $S$  ed assi paralleli rispettivamente agli assi  $x$  ed  $y$ . A tale scopo occorre utilizzare il teorema di trasposizione dei momenti di inerzia e centrifugo di Huygens (§1.3.4.3). Detti  $I_{xx_0}$  ed  $I_{xy_0}$  rispettivamente il momento di inerzia rispetto

all'asse  $\eta$  (retta parallela alla retta di sponda passante per il baricentro  $G$ ) ed il momento centrifugo rispetto agli assi  $\xi, \eta$ , si ha:

$$I_{xx} = I_{xx_0} + x_G^2 S \quad (55)$$

$$I_{xy} = I_{xy_0} + x_G y_G S, \quad (56)$$

avendo indicato con  $x_G$  ed  $y_G$  le coordinate del baricentro nel sistema di riferimento  $x, y$ , costituenti rispettivamente, in modulo, le distanze dell'asse  $x$  dall'asse  $\xi$  e dell'asse  $y$  dall'asse  $\eta$ . Sostituendo le (45) e (46) nelle (103) e ricordando che  $M_s = x_G S$ , si ottiene:

$$x_C = \frac{I_{xx}}{M_s} = \frac{I_{xx_0} + x_G^2 S}{x_G S} = \frac{I_{xx_0}}{x_G S} + x_G$$

$$y_C = \frac{I_{xy}}{M_s} = \frac{I_{xy_0} + x_G y_G S}{x_G S} = \frac{I_{xy_0}}{x_G S} + y_G$$

Pertanto, le coordinate del centro di spinta nel sistema di riferimento  $\xi, \eta$  sono date da:

$$\xi_0 = \frac{I_{xx_0}}{M_s}; \quad \eta_0 = \frac{I_{xy_0}}{M_s}. \quad (104)$$

Le formule (104) risultano di più agevole utilizzazione rispetto alle (103) in quanto nei manuali vengono fornite le espressioni dei momenti di inerzia e centrifughi rispetto ad assi baricentrici.

Nel caso la superficie  $S$  presenti un asse di simmetria, il baricentro della superficie appartiene a tale asse. Se l'asse di simmetria è una retta di massima pendenza, a tale retta appartiene, oltre al baricentro, anche il centro di spinta, poiché in tal caso risulta nullo il momento centrifugo (§ 1.3.4.3) e si ha pertanto  $\eta_0 = 0$ .

A norma della prima delle (104), il centro di spinta è sempre posto da parte opposta della retta di sponda rispetto all'asse baricentrico orizzontale (asse  $\eta$ ). Infatti, essendo il momento d'inerzia una quantità definita positiva, il segno di  $\xi_0$  è uguale al segno del momento statico  $M_s = x_G S$ , quindi, essendo anche l'area  $S$  positiva, al segno della coordinata  $x_G$ . Poiché l'asse  $x$  deve essere sempre orientato nel verso delle pressioni crescenti affinché valga la (102), nel caso  $p_G > 0$  ( $\zeta_G > 0, x_G > 0$ ) il baricentro è posto al di sotto del piano dei carichi idrostatici ed il centro di spinta al di sotto del baricentro; nel caso  $p_G < 0$  ( $\zeta_G < 0, x_G < 0$ ) il baricentro è posto al di sopra del piano dei carichi idrostatici ed il centro di spinta al di sopra del baricentro. Ovviamente, qualora il liquido soggiaccia interamente ad un pelo libero ci si trova sempre nel primo caso.

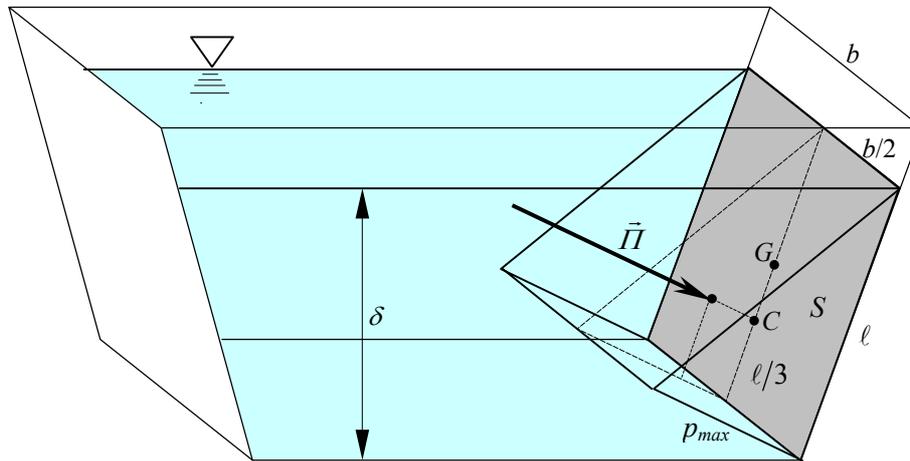
Inoltre, il centro di spinta è posto ad una distanza dall'asse baricentrico orizzontale inversamente proporzionale alla distanza del baricentro dalla retta di sponda. Casi limite sono costituiti: a) da una superficie  $S$  orizzontale, contenuta quindi in un piano che interseca il piano dei carichi idrostatici all'infinito, ove dunque si trova la retta di sponda, determinando un valore  $x_G = \infty$  ed un centro di spinta coincidente con il baricentro della superficie, conclusione che poteva anche trarsi osservando che, in tal caso, la distribuzione di pressione risulta uniforme e le formule generali per le coordinate del centro di spinta, equazioni (101), si riducono alle formule per le coordinate del baricentro (vedi § 1.3.4.3); b) dal già menzionato caso in cui il baricentro della superficie giaccia sul piano dei carichi idrostatici, nel qual caso si avrebbe una risultante nulla applicata a distanza infinita dal baricentro della superficie. Come già detto, in questo caso il sistema di forze di pressione equivale ad una coppia di forze, ciascuna delle quali è determinabile in modulo (identico) e punto di applicazione con le relazioni presentate finora, riferite a ciascuna delle due parti della superficie  $S$  – una interamente in pressione, l'altra interamente in depressione – ed ai relativi baricentri.

Assimilando la distribuzione di forze di pressione agenti sulla superficie  $S$  ad una distribuzione tridimensionale di forze di volume elementari uniformemente distribuite su un volume di forma

uguale al solido delle pressioni, il punto di applicazione della risultante viene talora interpretato come baricentro di tale solido (quindi non appartenente alla superficie  $S$ ) e come tale determinato. Il punto di intersezione della retta d'azione della risultante applicata nel baricentro del solido di spinta con la superficie  $S$  coincide con il centro di spinta.

In pratica, la determinazione della posizione della risultante effettuata in tal modo risulta agevole soltanto nel caso in cui la superficie  $S$  sia costituita da un rettangolo con due lati orizzontali, come nel caso di Figura 34, nel qual caso il solido di spinta è un prisma, denominato perciò *prisma di spinta*. In particolare, in Figura 34 la superficie soggetta alla spinta, campita in grigio, si estende fino al pelo libero ed il prisma di spinta ha quindi sezione retta triangolare. Ricordando che il baricentro di un triangolo rettangolo dista da un cateto un terzo della lunghezza dell'altro cateto, il punto di intersezione della retta d'azione della risultante con la superficie bagnata è posto ad una distanza dal fondo, misurata lungo la direzione di massima pendenza, pari ad un terzo dello sviluppo, nella stessa direzione, della superficie bagnata,  $\ell$ . Inoltre, la risultante appartiene al piano verticale di mezzeria della superficie bagnata.

Ragionando in termini di baricentro del solido di spinta, il centro di spinta è quindi posto ad una distanza dal baricentro della superficie bagnata, misurato lungo la direzione di massima pendenza, pari a  $\xi_0 = \ell/2 - \ell/3 = \ell/6$ . Il medesimo risultato deve ottenersi attraverso le (104). Si ha infatti:



**Figura 34. Spinta idrostatica su una superficie rettangolare con un lato posto sulla retta di sponda. Il solido di spinta è un prisma (prisma di spinta) a sezione triangolare.**

$$\xi_0 = \frac{I_{xx_0}}{M_s} = \frac{I_{xx_0}}{x_G S} = \frac{\frac{1}{12} b \ell^3}{\frac{\ell}{2} b \ell} = \frac{\ell}{6}.$$

Il modulo della spinta è calcolabile in termini di volume del prisma di spinta come:

$$\Pi = b \frac{1}{2} \ell p_{\max} = b \frac{1}{2} \ell \gamma \delta$$

ed in termini di pressione baricentrica, equazione (100), come:

$$\Pi = p_G S = \gamma \zeta_G S = \gamma \frac{\delta}{2} b \ell.$$

Nel caso la superficie rettangolare non abbia un lato orizzontale posto sulla retta di sponda e risulti interamente in pressione, il prisma di spinta ha sezione trapezia.

Nel caso degli aeriformi, il problema risulta alquanto semplificato dal fatto che la distribuzione di pressione sulla superficie  $S$  risulta uniforme. Pertanto, il modulo della risultante si calcola semplicemente come prodotto di tale pressione uniforme per l'area della superficie  $S$  ed il centro di spinta coincide – come già nel caso dei liquidi se la superficie è orizzontale – con il baricentro della superficie.

### 3.10.2 Spinte su superfici di forma qualunque.

Per i casi di superfici di forma qualunque, sono disponibili due metodi di calcolo delle spinte: un primo metodo basato sull'uso dell'equazione globale dell'idrostatica (87), un secondo metodo basato sul calcolo delle componenti della spinta lungo gli assi di una terna contenente un asse verticale (*metodo per componenti*).

#### 3.10.2.1 Calcolo di spinte su superfici mediante l'equazione globale dell'idrostatica

L'uso dell'equazione globale dell'idrostatica per il calcolo di spinte su superfici viene illustrato con alcuni esempi tipici. Il primo è costituito dal problema della valutazione della spinta che un liquido contenuto in un recipiente esercita su un corpo di volume  $V$  di natura qualunque (metallico, plastico, omogeneo o meno, etc...) immerso in esso (vedi Figura 35a). Detta  $S$  la superficie di contorno del volume  $V$ , la spinta su tale superficie è data dall'espressione generale (82):

$$\vec{I} = \int_S -p\vec{n} dS . \quad (82)$$

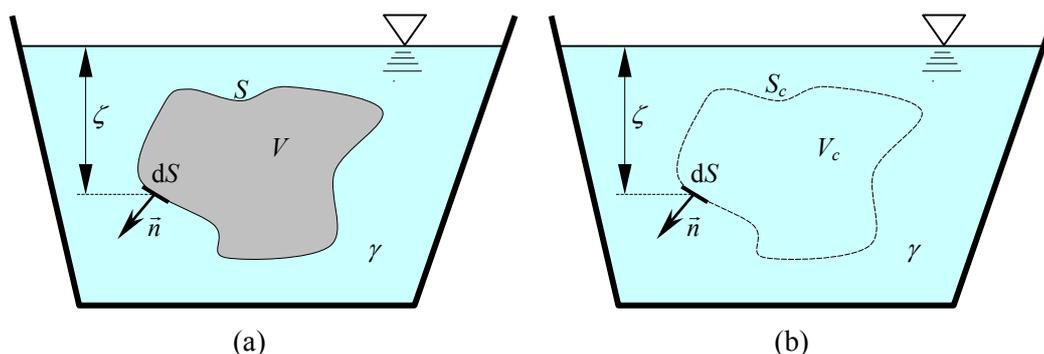


Figura 35. Derivazione del principio di Archimede mediante applicazione dell'equazione globale dell'idrostatica.

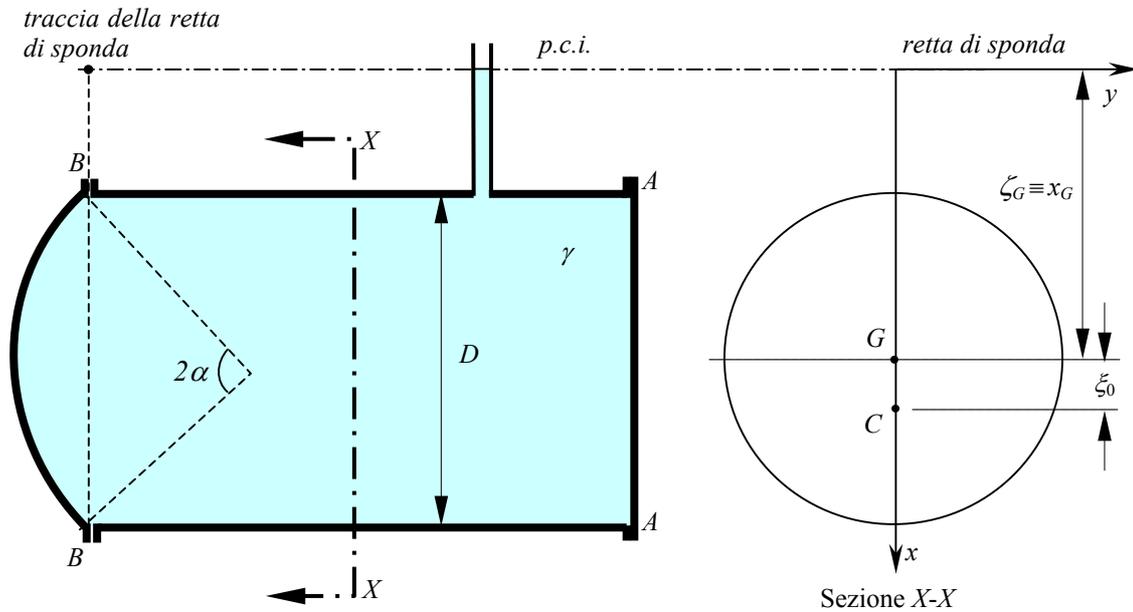
Si supponga ora di estrarre il corpo di volume  $V$  e sostituirlo con un uguale volume di liquido. Si consideri quindi un volume di controllo  $V_c$  avente la medesima forma del corpo e posto esattamente nella stessa posizione occupata in precedenza da esso. Ciascun punto della superficie di contorno di tale volume liquido, essendo posto nella medesima posizione del corrispondente punto del corpo rispetto al piano dei carichi idrostatici, è soggetto alla stessa pressione e le corrispondenti superfici elementari sono soggette alle medesime spinte elementari,  $-\vec{n}p dS$ . In definitiva, la spinta agente sulla superficie esterna del volume liquido è la medesima esercitata sulla superficie esterna del corpo. Essendo il volume liquido in quiete, gli si può applicare l'equazione globale (87), al fine di valutare la spinta sulla superficie di contorno, la quale, per quanto discusso, *risulta identica a quella che agiva sul corpo immerso*. Si ottiene pertanto:

$$\vec{I} = -\vec{G} ,$$

in cui  $\vec{G}$  è il peso del volume liquido, pari in modulo a  $\gamma V$ . Si ritrova pertanto il principio di Archimede, secondo il quale un corpo immerso in un fluido riceve una spinta verso l'alto pari in modulo al peso del fluido spostato. Come già osservato nel §3.4, l'equazione globale (87) esprime l'annullamento della risultante delle forze esterne applicate al volume di controllo (prima equazione cardinale della statica). Essendo la spinta uguale e contraria al peso del volume liquido, la seconda equazione cardinale della statica, esprime l'annullamento del momento risultante delle forze

esterne, implica che la retta d'azione del vettore spinta  $\vec{I}$  debba passare per il baricentro del volume liquido, ove è applicata la forza peso  $\vec{G}$ .

Nel caso di superfici gobbe non chiuse, l'uso dell'equazione globale risulta efficace quando il contorno della superficie in esame è contenuto in un piano. Un esempio di questo tipo è costituito dal problema del calcolo della spinta sulla calotta sferica  $BB$  posta a chiusura del serbatoio cilindrico ad asse orizzontale rappresentato in Figura 36.



**Figura 36. Calcolo della spinta su una calotta sferica mediante l'equazione globale dell'idrostatica.**

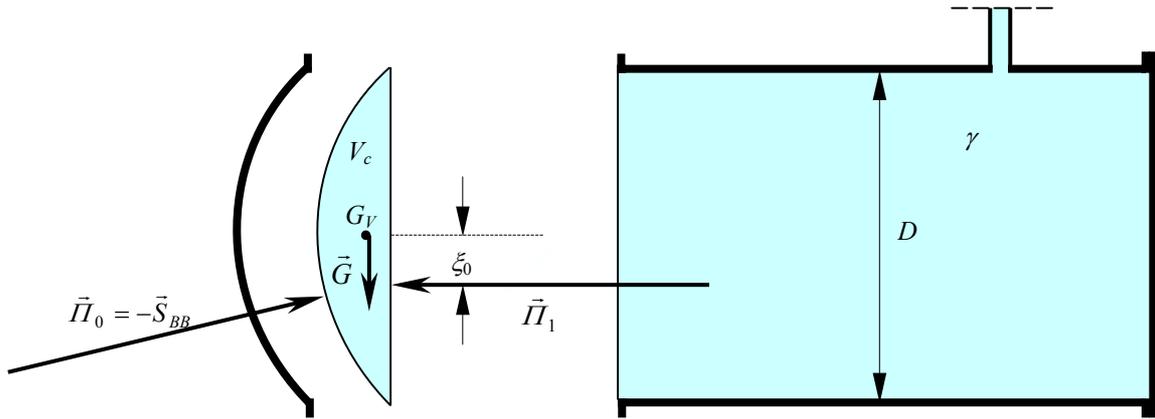
La spinta  $\vec{S}_{BB}$  viene esercitata sulla calotta sferica dal liquido adiacente. Pertanto, per il principio di azione e reazione essa è l'uguale e contraria della forza  $\vec{I}_0$  che la calotta esercita sul liquido attraverso la superficie di contatto. Fatta questa osservazione preliminare, la spinta può determinarsi mediante applicazione dell'equazione globale dell'idrostatica ad un volume fluido in quiete avente una parte della superficie di contorno a contatto con la calotta. Il volume più conveniente rispondente a questo requisito è il volume  $V_c$  avente come parte rimanente della superficie di contorno la superficie circolare verticale di diametro  $D$  (Figura 37).

La risultante delle forze di superficie,  $\vec{I}$ , che compare nella forma generale (87), è esprimibile come somma della  $\vec{I}_0$  esercitata dalla calotta sul volume di controllo, uguale e contraria alla spinta esercitata dal fluido sulla calotta,  $\vec{S}_{BB} = -\vec{I}_0$ , e della  $\vec{I}_1$  esercitata dal liquido adiacente attraverso la superficie circolare, sezione retta del serbatoio cilindrico. Detto  $\vec{G}$  il peso proprio del volume di controllo, l'equazione globale ad esso riferito si scrive perciò:

$$\vec{G} + \vec{I}_0 + \vec{I}_1 = 0 ,$$

da cui l'espressione della spinta cercata:

$$\vec{S}_{BB} = -\vec{I}_0 = \vec{G} + \vec{I}_1 . \quad (105)$$



**Figura 37. Individuazione del volume di controllo per l'applicazione dell'equazione globale.**

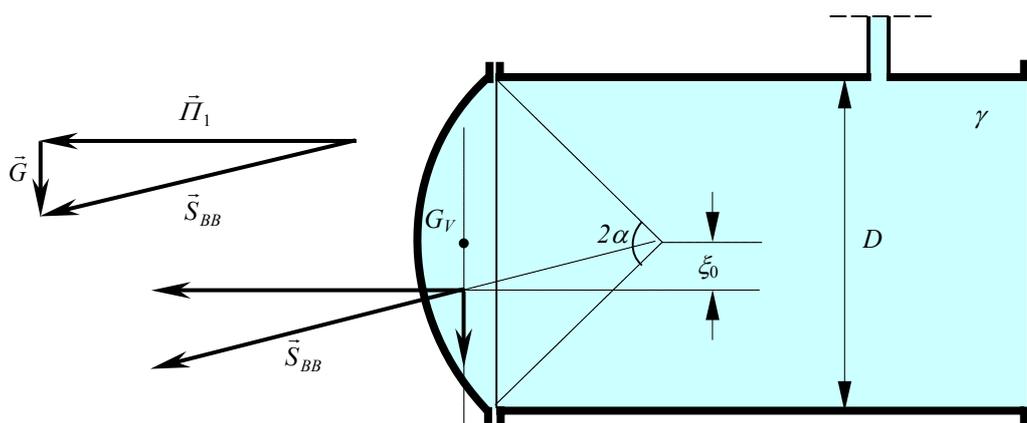
La  $\vec{\Pi}_1$  si determina in modulo, direzione, verso e punto di applicazione sulla base dei criteri presentati nel §3.10.1 per il calcolo di spinte su superfici piane. Con riferimento alla Figura 36, la spinta la spinta  $\vec{\Pi}_1$  risulta di compressione poiché il baricentro della sezione circolare sottostà al piano dei carichi idrostatici. Il modulo della spinta vale:

$$\Pi_1 = p_G S = \gamma \zeta_G \frac{\pi D^2}{4} .$$

Il relativo centro di spinta giace sull'asse  $x$  indicato in Figura 36, in quanto costituente un asse di simmetria per la sezione, ed è posto ad una distanza dal baricentro data da (Figura 36 e Figura 38):

$$\zeta_0 = \frac{I_{xx_0}}{M_s} = \frac{\pi D^4 / 64}{x_G \pi D^2 / 4} = \frac{D^2}{16x_G} .$$

Il modulo della forza peso è data dal prodotto del peso specifico del liquido,  $\gamma$ , per il volume di controllo,  $V_c$ . Essa è applicata nel baricentro del volume liquido,  $G_V$ .



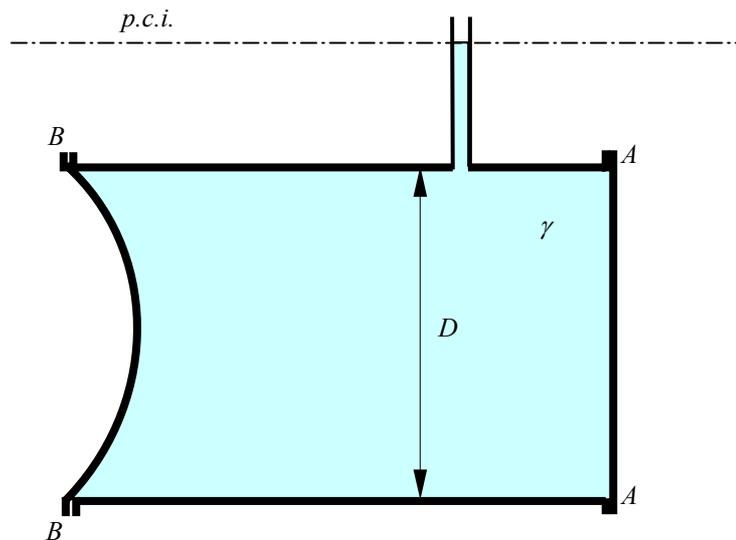
**Figura 38. Poligono delle forze e localizzazione della retta d'azione della spinta sulla calotta.**

In Figura 38 è rappresentata in forma di poligono delle forze la somma vettoriale (105) che fornisce la spinta cercata  $\vec{S}_{BB}$ . Inoltre, viene rappresentato il procedimento grafico necessario a

determinarne la posizione della retta d'azione, consistente nello scorrimento della  $\vec{G}$  e della  $\vec{I}_1$  fino al punto di intersezione delle rispettive rette d'azione, ove queste possono essere composte per fornire la  $\vec{S}_{BB}$ , la cui retta d'azione deve pertanto passare per tale punto. Si ricorda che tali due operazioni (scorrimento e composizione) possono essere eseguite in quanto non alteranti né la risultante delle forze  $\vec{G}$  e  $\vec{I}_1$ , né il loro momento risultante rispetto ad un qualunque punto dello spazio. Pertanto, esse conducono ad un sistema di forze costituito dalla sola  $\vec{S}_{BB}$ , equivalente al sistema costituito dalla  $\vec{G}$  e dalla  $\vec{I}_1$ .

Più semplicemente, la localizzazione della retta d'azione della spinta  $\vec{S}_{BB}$  può determinarsi osservando che tale spinta è la risultante di forze di pressione elementari normali alla calotta sferica e perciò aventi tutte rette d'azione rivolte verso il suo centro e, quindi, momento nullo rispetto a tale punto. Per il teorema di Varignon deve quindi essere nullo anche il momento rispetto allo stesso punto della risultante  $\vec{S}_{BB}$ , la quale deve dunque anch'essa passare per il centro della calotta, come rappresentato in Figura 38.

L'uso di un particolare artificio consente di risolvere, con procedimento per il resto analogo a quello testé esaminato, il problema della determinazione della spinta  $\vec{S}'_{BB}$  su una calotta sferica a chiusura dello stesso serbatoio cilindrico di cui al caso precedente, nel caso in cui essa rivolga la propria concavità verso l'esterno del serbatoio, secondo quanto illustrato in Figura 39.



**Figura 39. Calcolo della spinta su una calotta sferica avente concavità rivolta verso l'esterno di un serbatoio cilindrico.**

A tale scopo si può considerare un caso fittizio, quale quello rappresentato, ad esempio, in Figura 40, nel quale è stato evidenziato un volume di controllo  $V_c$  delimitato dalla faccia interna della calotta sferica che, nel caso reale, è soggetta alla spinta incognita, e dalla superficie piana circolare costituente la sezione retta del serbatoio cilindrico. Si tratta, in sostanza, dello stesso volume di controllo utilizzato nell'esempio precedente, ruotato di  $180^\circ$  rispetto ad un asse verticale. Il fluido contenuto nel volume di controllo è certamente in quiete; ad esso può quindi applicarsi l'equazione globale dell'idrostatica. D'altro canto, la calotta che separa il fluido interno al volume di controllo da quello esterno, avendo la stessa forma ed occupando la medesima posizione della faccia interna della calotta reale rispetto al piano dei carichi idrostatici, è soggetta, sulla sua faccia esterna, punto per punto, alle medesime pressioni e quindi, globalmente, alla medesima spinta. Determinare la spinta sulla superficie fittizia equivale quindi a determinare la spinta sulla superficie reale.

Denominata  $\vec{I}'_1$  la spinta agente sulla faccia esterna (sinistra) della superficie piana circolare – uguale e contraria della spinta corrispondente di cui all'esempio precedente ( $\vec{I}'_1 = -\vec{I}_1$ ) – e  $\vec{G}$  il peso del volume di controllo – invariato rispetto al caso precedente – l'equazione globale può scriversi:

$$\vec{S}'_{BB} + \vec{I}'_1 + \vec{G} = 0 ,$$

dalla quale si ricava l'espressione vettoriale della spinta cercata:

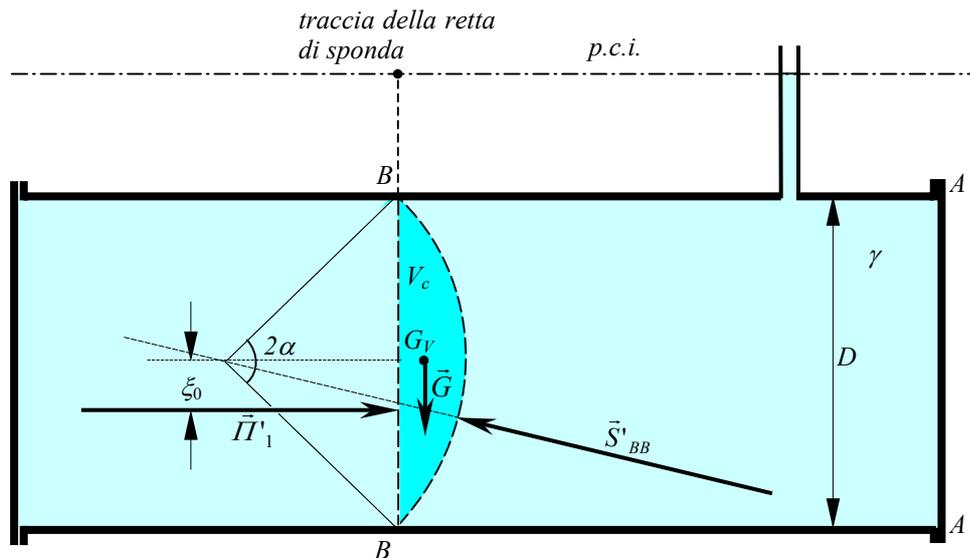


Figura 40. Schema di riferimento fittizio per il calcolo della spinta sulla calotta sferica di Figura 39.

$$\vec{S}'_{BB} = -\vec{I}'_1 - \vec{G} .$$

Con procedimento analogo a quello seguito nell'esempio precedente, la spinta  $\vec{S}'_{BB}$  si determina graficamente mediante il relativo poligono delle forze e si verifica che essa ha retta d'azione passante per il centro della calotta sferica, secondo quanto rappresentato in Figura 40.

Generalizzando, l'artificio testé descritto si può utilizzare ogni qual volta ricorrano le seguenti condizioni: a) si possa individuare un volume di controllo fittizio occupato dallo stesso fluido del caso reale, in quiete; b) tale volume di controllo possieda una parte della propria superficie di contorno identica alla superficie reale sulla quale si vuole determinare la spinta agente; c) tale superficie sia situata nella stessa posizione della superficie reale rispetto al piano dei carichi idrostatici, affinché possano dirsi uguali le spinte agenti sulle due superfici. Per il resto, le configurazioni del caso fittizio possono essere le più disparate. Ad esempio, nell'esempio precedente, il serbatoio avrebbe potuto avere la testata sinistra posta con la sua faccia interna (destra) a contatto con la parte piana della superficie di contorno del volume di controllo, oppure, il volume di controllo essere traslato orizzontalmente fino a far coincidere tale superficie piana con la faccia interna della testata sinistra nella posizione da essa occupata in Figura 40.

Un ultimo esempio di applicazione dell'equazione globale per il calcolo delle spinte su superfici di forma qualunque viene presentato allo scopo di evidenziare come tale strumento possa fornire una soluzione estremamente semplice anche nel caso in cui coesistano più fluidi.

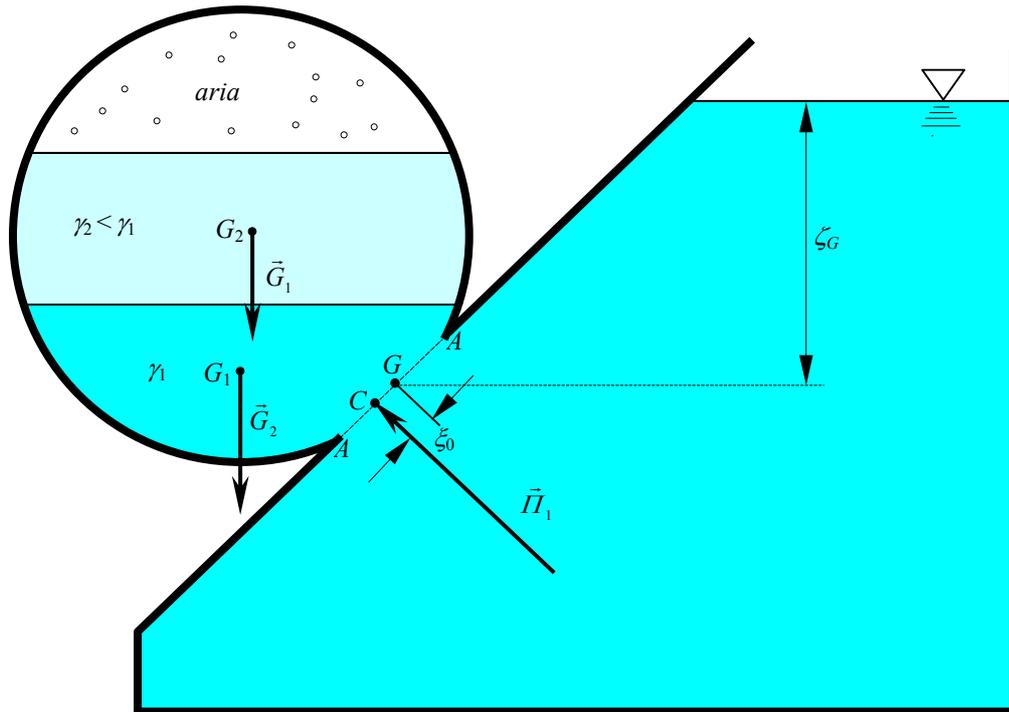


Figura 41. Calcolo della spinta esercitata su una superficie gobba da tre fluidi non miscibili sovrapposti.

Si consideri il caso di Figura 41, nella quale è raffigurato un serbatoio composto da un primo comparto occupato da un liquido di peso specifico  $\gamma_1$  a contatto con l'atmosfera attraverso una superficie libera e da un secondo comparto, comunicante con il primo attraverso una superficie piana di traccia  $A-A$ , occupato parzialmente, oltre che dal primo liquido, da un secondo liquido di peso specifico  $\gamma_2 < \gamma_1$  sovrastante il primo e da aria sovrastante il secondo liquido. Il secondo comparto può avere una superficie a calotta sferica o cilindrica, che qui non interessa precisare meglio, di cui in Figura 41 è mostrata la sezione su un piano verticale.

La spinta che i tre fluidi esercitano, complessivamente, sulla superficie interna del secondo comparto può determinarsi agevolmente mediante applicazione dell'equazione globale dell'idrostatica al volume di controllo interno a tale comparto, delimitato dalla superficie piana di traccia  $A-A$ . L'equazione si scrive nella forma:

$$\vec{H}_0 + \vec{H}_1 + \vec{G}_1 + \vec{G}_2 = 0 ,$$

in cui  $\vec{H}_0 = -\vec{S}$  è la spinta che la parete interna del secondo comparto esercita sul volume di controllo, uguale e contraria alla spinta cercata  $\vec{S}$ , risultante delle spinte esercitate dai tre fluidi compresi nel volume;  $\vec{H}_1$  è la spinta che il fluido 1 nel primo comparto esercita sullo stesso fluido contenuto nel secondo comparto attraverso la superficie piana di traccia  $A-A$ ;  $\vec{G}_1$  e  $\vec{G}_2$  sono i pesi dei volumi dei fluidi 1 e 2 contenuti nel volume di controllo racchiuso nel secondo comparto, la cui risultante costituisce il peso dell'intero volume di controllo ove si trascuri il peso del volume di aria. La spinta cercata si determina pertanto dalla:

$$\vec{S} = \vec{H}_1 + \vec{G}_1 + \vec{G}_2 ,$$

la valutazione del secondo membro della quale richiede unicamente la determinazione di una spinta su una superficie piana ed il calcolo dei pesi di due volumi fluidi, operazioni che non vengono illustrate in maggiore dettaglio perché del tutto analoghe a quelle eseguite negli esempi precedenti.

Si rimarca come tali operazioni non richiedano la valutazione separata delle spinte esercitate da ciascuno dei tre fluidi compresi nel volume di controllo sulla superficie interna del secondo comparto, e come la disomogeneità del volume non costituisca alcuna limitazione, né complicazione sostanziale, all'uso dell'equazione globale, il quale, al contrario, non richiede neanche la determinazione del piano dei carichi idrostatici del liquido 2, né della pressione dell'aria.

### 3.10.2.2 Calcolo di spinte su superfici per componenti

Un secondo metodo generale per il calcolo delle spinte su superfici di forma qualunque si basa sulla determinazione separata delle tre componenti della spinta (*metodo per componenti*) in un sistema di riferimento avente uno dei tre assi verticale. Per questo motivo, nell'illustrazione del metodo verrà fatto riferimento alle coordinate  $x, y, z$  e ad i corrispondenti versori  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$ : i primi due relativi a direzioni del piano orizzontale, il terzo alla verticale (Figura 42).

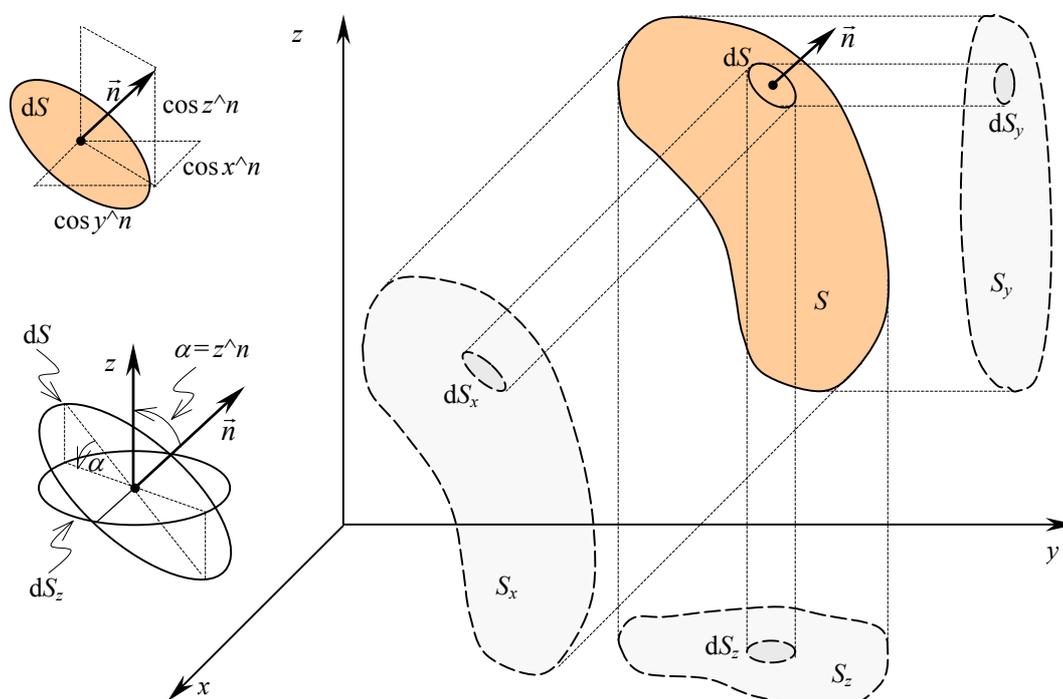


Figura 42. Schema di calcolo per componenti della spinta idrostatica su una superficie.

Le componenti della spinta nelle tre direzioni possono ottenersi facilmente esprimendo la normale contenuta all'interno dell'espressione generale della spinta idrostatica (82) in termini delle sue tre componenti (coseni direttori) e dei relativi versori, scrivendo l'integrale di superficie come somma di tre integrali, ciascuno contenente uno dei tre coseni direttori, e portando fuori dagli integrali i versori degli assi, in quanto costanti:

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \int_S -p \vec{n} dS = \int_S -p (\cos x^n \vec{i} + \cos y^n \vec{j} + \cos z^n \vec{k}) dS = \\ &= -\vec{i} \int_S p \cos x^n dS - \vec{j} \int_S p \cos y^n dS - \vec{k} \int_S p \cos z^n dS \end{aligned} \quad (106)$$

Il prodotto dell'areola  $dS$  per un coseno direttore fornisce l'area della proiezione della superficie elementare nella direzione della coordinata che compare nel coseno direttore, ossia, su un piano

parallelo al piano coordinato denominato con le altre due coordinate (vedi dettaglio di Figura 42, relativo alla proiezione lungo la verticale, su un piano parallelo al piano  $xy$ ). I tre integrali della (106) possono quindi intendersi estesi alle superfici piane  $S_x$ ,  $S_y$  ed  $S_z$ , proiezioni della superficie  $S$  data nelle tre direzioni coordinate corrispondenti. In definitiva, i tre vettori componenti della spinta sono esprimibili come:

$$\begin{aligned}\vec{H}_x &= -\vec{i} \int_{S_x} p \, dS_x, \\ \vec{H}_y &= -\vec{j} \int_{S_y} p \, dS_y, \\ \vec{H}_z &= -\vec{k} \int_{S_z} p \, dS_z,\end{aligned}\tag{107}$$

nelle quali, beninteso, il valore di pressione è da intendersi relativo ai punti della superficie  $S$  piuttosto che ai corrispondenti punti delle superfici proiettate.

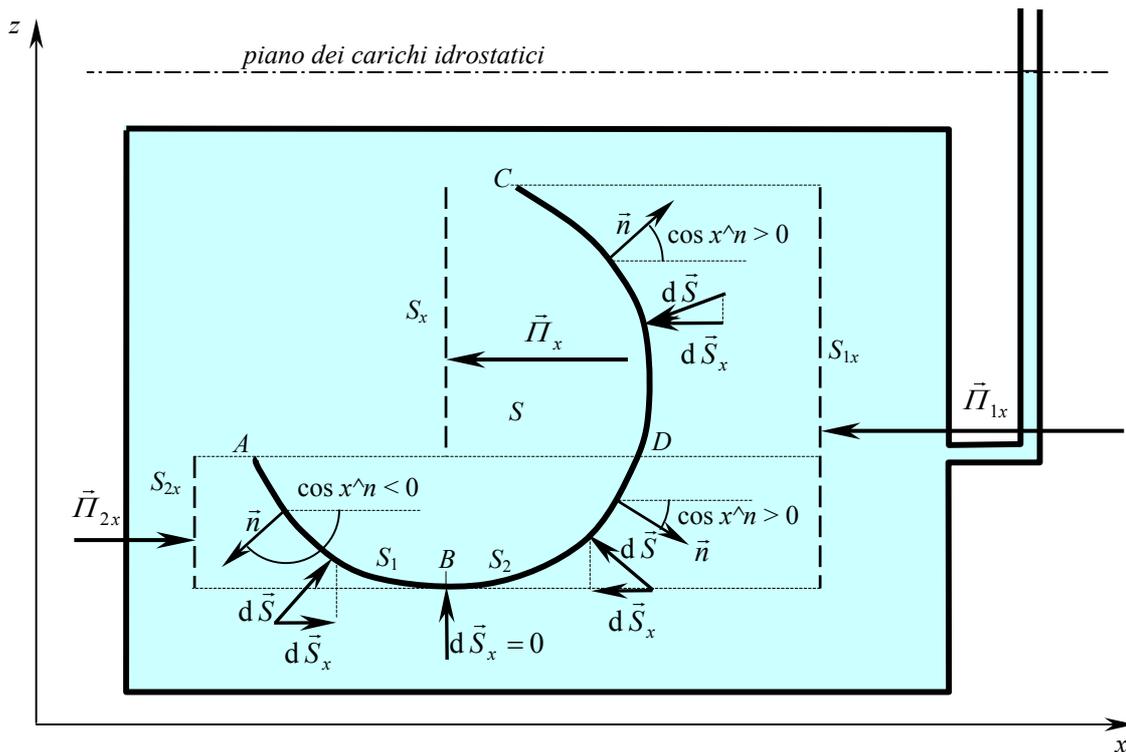
Nel caso delle proiezioni lungo le direzioni orizzontali, un punto della superficie proiettata è posto, ovviamente, alla stessa quota del punto corrispondente della superficie  $S$ . Pertanto, ovunque siano posti i piani verticali sui quali la superficie  $S$  viene proiettata orizzontalmente, e qualunque sia il tipo di fluido (liquido o aeriforme), la pressione in un qualunque suo punto può calcolarsi come pressione nella proiezione del punto stesso – ovviamente appartenente alla corrispondente proiezione della superficie – come se la superficie proiettata fosse a contatto con il liquido. Pertanto, i componenti orizzontali della spinta,  $\vec{H}_x$  e  $\vec{H}_y$ , possono calcolarsi in tutto e per tutto come spinte idrostatiche sulle superfici piane proiezioni della superficie data su piani verticali ortogonali alle direzioni dei componenti stessi. A tale scopo, per ciascun componente, si utilizzano le formule presentate nel §3.10.1 per il calcolo del modulo e del verso della risultante e delle coordinate del centro di spinta sulla superficie premuta, per i casi sia di liquido che di aeriforme.

Da un punto di vista pratico, il verso dei componenti (incluso quello verticale) si stabilisce facilmente esaminando i versi delle spinte elementari corrispondenti<sup>25</sup>. In generale, una superficie può presentare orientazioni puntuali tali da determinare la coesistenza di orientazioni opposte dello stesso componente delle spinte elementari locali. In tal caso occorrerà valutare separatamente i componenti relativi a porzioni di superficie cui sono associati versi costanti dei componenti delle spinte elementari<sup>26</sup>. A chiarimento di quanto affermato, si consideri, per semplicità, la sezione di una superficie cilindrica riportata in Figura 43, avente direttrice contenuta nel piano  $xz$ , rappresentata in figura, e per generatrici rette parallele all'asse  $y$ , normale al piano del foglio. La superficie sia immersa in un liquido e la spinta cercata sia quella esercitata sulla faccia esterna della superficie. Il componente orizzontale della spinta coincide con il componente parallelo all'asse  $x$ ,  $\vec{H}_x$ , dal momento che la superficie ha proiezione nulla in direzione  $y$ .

Tale componente si calcola come risultante dei componenti orizzontali  $\vec{H}_{1x}$  e  $\vec{H}_{2x}$  delle spinte agenti sulle superfici  $S_1$  ed  $S_2$  rispettivamente, aventi per sezione su un piano verticale rispettivamente i tratti di curva  $AB$  e  $BC$ . Tali componenti hanno infatti versi opposti, essendo opposti i versi dei componenti lungo l'asse  $x$  delle spinte elementari agenti punto per punto. I componenti  $\vec{H}_{1x}$  e  $\vec{H}_{2x}$  si calcolano pertanto come spinte sulle superfici piane verticali proiettate  $S_{1x}$  ed  $S_{2x}$ : la prima rivolta nel senso delle  $x$  decrescenti; la seconda nel verso delle  $x$  crescenti.

<sup>25</sup> Da un punto di vista formale, il verso del componente considerato dipende dal valore del coseno direttore puntuale corrispondente, il quale risulta negativo se l'angolo corrispondente è maggiore di  $90^\circ$ . In tal caso, evidentemente, il contributo elementare al componente, per esempio lungo l'asse  $x$ , risulta essere  $\vec{i} p \, dS_x$  piuttosto che  $-\vec{i} p \, dS_x$ , in quanto  $dS_x = -dS \cos \alpha$  per la positività dell'area  $dS_x$ .

<sup>26</sup> Ovvero segni costanti dei coseni direttori delle normali relativi alla direzione considerata.



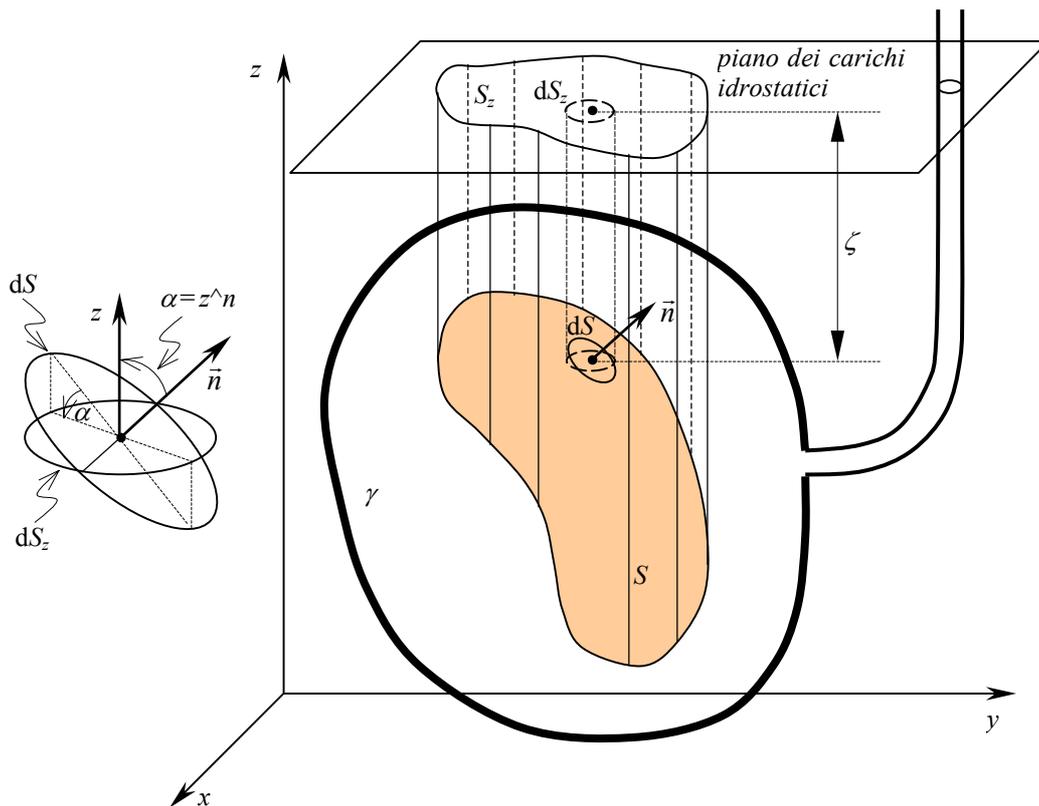
**Figura 43. Schema di calcolo del componente lungo l'asse  $x$  della spinta su una superficie cilindrica avente direttrice giacente nel piano  $xz$  e generatrici parallele all'asse  $y$ .**

Ai fini della determinazione del componente orizzontale della spinta, si può anche osservare che, avendo le superfici di sezioni  $AB$  e  $BD$  la medesima proiezione  $S_{2x}$ , i corrispondenti contributi al componente orizzontale della spinta si elidono. Il componente orizzontale della spinta può pertanto valutarsi con riferimento alla sola superficie di sezione  $CD$ , come spinta sulla relativa proiezione  $S_x$ , rivolta nel verso delle  $x$  decrescenti.

la retta di separazione fra le due superfici  $S_1$  ed  $S_2$ , avente per traccia il punto  $B$ , è luogo dei punti della superficie  $S$  aventi tangente parallela all'asse  $x$ . In generale, ai fini del calcolo di un componente orizzontale della spinta su una superficie di forma qualunque, questa dovrà decomporre in due o più superfici che si congiungono a formare la superficie intera lungo curve luogo dei punti in cui la tangente alla superficie ha la direzione del componente cercato.

Per quanto riguarda il componente verticale della spinta,  $\vec{\Pi}_z$ , nel caso di un liquido isoterma e omogeneo esso va calcolato tenendo presente che, nella terza delle (107), la pressione nel punto generico può esprimersi in funzione dell'affondamento  $\zeta$  del punto rispetto al piano dei carichi idrostatici del liquido (vedi Figura 44) come  $p = \gamma\zeta$ . Il termine  $p dS_z = \gamma\zeta dS_z$  è pertanto pari al peso della colonna di liquido di base  $dS_z$  ed altezza  $\zeta$ , compreso fra la superficie data ed il piano dei carichi idrostatici. L'integrale che compare nella terza delle (107) rappresenta pertanto il peso di un volume dello stesso liquido che sollecita la superficie  $S$ , compreso fra la superficie  $S$  ed il piano dei carichi idrostatici del liquido e determinato per proiezione della superficie in direzione verticale, come mostrato in Figura 44. Il componente verticale è applicato nel baricentro di tale volume liquido. Dal ragionamento esposto risulta evidente come il volume liquido il cui peso uguaglia il modulo del componente verticale possa non essere, nella realtà, interamente esistente, come nel caso di Figura 44, ovvero, la parte di piano dei carichi idrostatici interessata dalla proiezione in verticale non essere posto ad una quota alla quale sia presente del liquido. Il carattere in generale astratto del volume il cui peso uguaglia il modulo del componente verticale dovrebbe essere ben compreso ai fini di una corretta applicazione del metodo.

In definitiva, il metodo di calcolo delle spinte per componenti riconduce al calcolo di due spinte su superfici piane e del peso di un volume liquido.



**Figura 44. Schema di calcolo della componente verticale della spinta su una superficie di forma qualunque.**

Come nel caso dei componenti orizzontali, anche per il componente verticale può occorrere frazionare la superficie in oggetto in due o più superfici soggette a componenti verticali della spinta di versi differenti, ciascuna caratterizzata da un verso univoco delle spinte elementari (quindi, da un segno univoco dei coseni direttori della normale relativi alla direzione verticale), che si congiungono a formare la superficie intera lungo curve luogo dei punti nei quali la tangente alla superficie ha direzione verticale.

Le modalità di determinazione del modulo e del verso del componente verticale della spinta su una superficie di forma qualunque sono esemplificate con riferimento alla Figura 45, raffigurante lo stesso caso di cui alla Figura 43. In questo caso, la superficie cilindrica  $S$  va decomposta nelle superfici  $S_3$  ed  $S_4$ , caratterizzate dall'aver ovunque coseni direttori relativi alla verticale rispettivamente negativi e positivi, e pertanto componenti verticali delle spinte elementari rivolte rispettivamente verso l'alto e verso il basso. Tali superfici sono a contatto attraverso (e sono quindi separate da) la retta orizzontale luogo dei punti della superficie a tangente verticale, avente per traccia il punto  $E$  sul piano della sezione raffigurata nel disegno.

Il componente verticale della spinta agente sulla superficie  $S_3$ ,  $\vec{I}_{3z}$ , ha modulo pari al volume liquido la cui sezione in un piano verticale ha per contorno la curva  $AFEILA$  ed è applicata nel relativo baricentro,  $G_3$ . Il componente verticale della spinta agente sulla superficie  $S_4$ ,  $\vec{I}_{4z}$ , ha modulo pari al volume liquido di sezione  $EIHCE$  ed è applicata nel baricentro del volume,  $G_4$ . Osservando che tale ultimo volume liquido costituisce parte del volume  $AFEILA$ , relativo ad un componente,  $\vec{I}_{3z}$ , rivolto in verso opposto a  $\vec{I}_{4z}$ , tali due contributi si elidono, per cui il componente verticale della spinta agente sull'intera superficie  $S$  è dato da  $\vec{I}_z = \vec{I}_{3z} + \vec{I}_{4z}$ , applicato nel baricentro  $G$  del volume di sezione  $AFECHLA$  evidenziato in Figura 45.

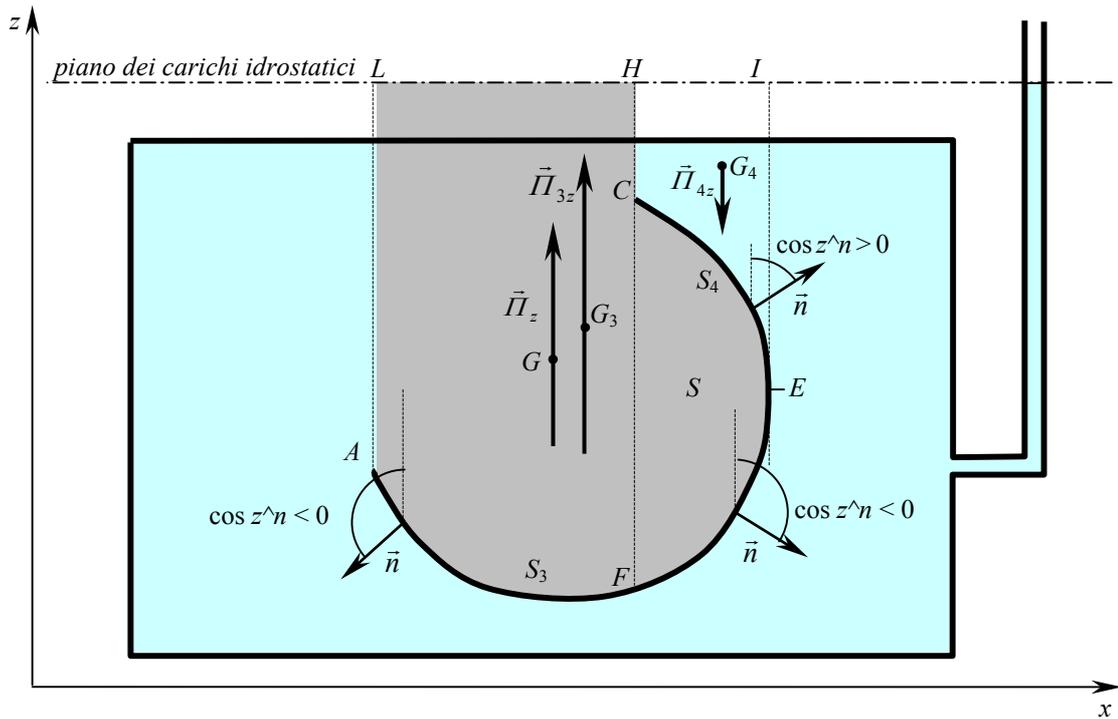


Figura 45. Schema per la determinazione del modulo e del verso del componente verticale della spinta su una superficie di forma qualunque.

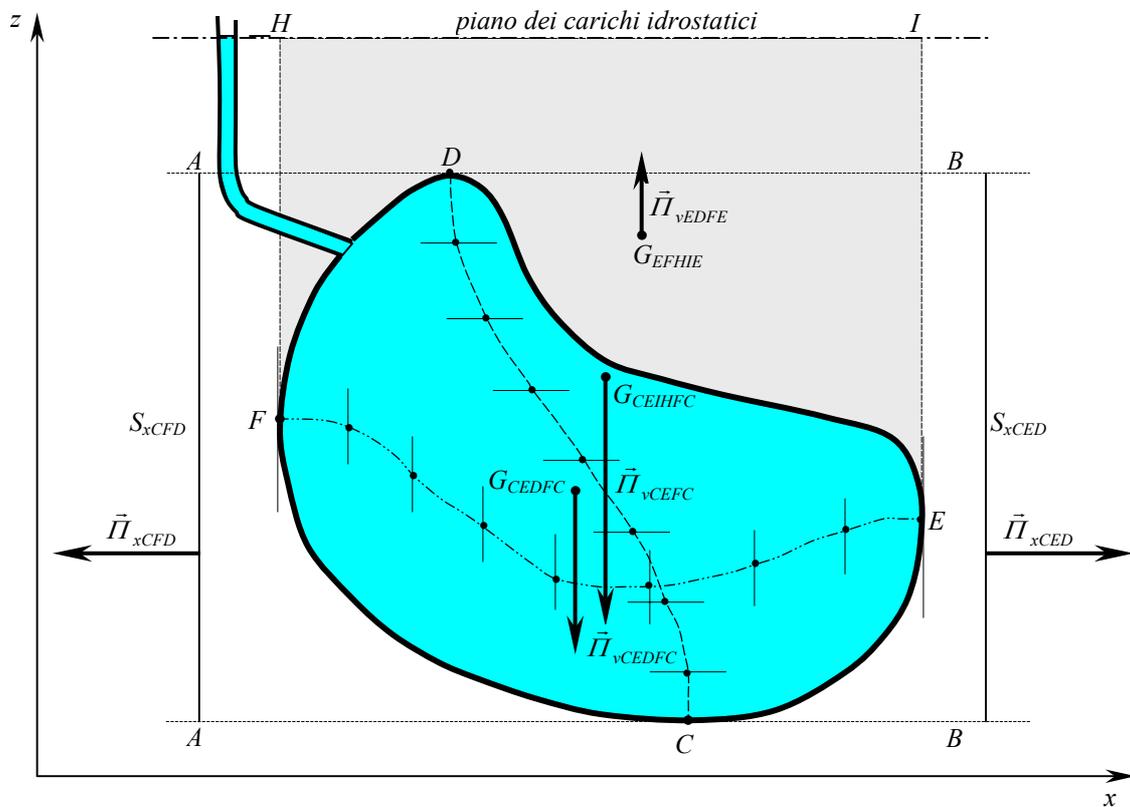


Figura 46. Applicazione del metodo di calcolo delle spinte idrostatiche per componenti ad una superficie chiusa.

Nel caso di una superficie chiusa si ritrova il risultato ottenuto mediante applicazione dell'equazione globale dell'idrostatica. Si consideri, ad esempio, la superficie chiusa di Figura 46, costituente l'involucro di un serbatoio contenente del liquido in pressione, come segnalato dall'indicazione del piezometro. Si vuole determinare la spinta esercitata dal liquido sulla faccia della superficie interna al serbatoio.

Il componente orizzontale in direzione dell'asse  $x$  si determina decomponendo la superficie nelle due parti  $S_{CDEC}$  ed  $S_{CDFC}$ , a contatto attraverso la curva  $CD$ , luogo dei punti della superficie rispetto ai quali sono tangenti rette parallele all'asse  $x$ . Tali due superfici sono pertanto caratterizzate da componenti  $x$  delle spinte elementari  $-p\vec{n} dS$  aventi versi discordi. Tuttavia, avendo le medesime proiezioni su un piano verticale normale alla direzione  $x$ ,  $AA$  e  $BB$ , risultano identici i moduli dei componenti della spinta lungo l'asse  $x$  ed i relativi centri di spinta. Poiché quindi il componente della spinta lungo l'asse  $x$  equivale a due forze uguali e contrarie agenti lungo la medesima retta d'azione, il loro risultante è un sistema nullo, avente cioè nulli sia il risultante che il momento risultante rispetto a qualunque punto dello spazio. Il modo del tutto analogo si argomenta per il componente in direzione dell'asse  $y$ . Pertanto, la spinta sulla superficie ha componente orizzontale nullo. Tale conclusione è generale per il caso di superfici chiuse, costituenti il contorno di volumi.

Analogamente, il componente verticale si determina decomponendo la superficie nelle due parti  $S_{CEFC}$  ed  $S_{DEFD}$ , a contatto attraverso la curva  $EF$ , luogo dei punti della superficie aventi per tangenti rette verticali – la quale, ovviamente, non è contenuta nel piano verticale utilizzato per effettuare la sezione del volume rappresentata in Figura 46. Tali due superfici sono pertanto caratterizzate da componenti verticali delle spinte elementari  $-p\vec{n} dS$  discordi, rivolte rispettivamente verso il basso e verso l'alto, così come i relativi risultanti. Il componente verticale della spinta,  $\vec{\Pi}_v$ , si ottiene dalla composizione dei componenti verticali agenti sulle due superfici.

Il componente agente sulla superficie  $S_{CEFC}$ ,  $\vec{\Pi}_{vCEFC}$ , è rivolto verso il basso, ha modulo pari al peso del volume liquido che ha per sezione su un piano verticale la superficie piana  $CEIHFC$  ed è applicato nel relativo baricentro; il componente agente sulla superficie  $S_{DEFD}$ ,  $\vec{\Pi}_{vDEFD}$ , è rivolto verso l'alto, ha modulo pari al peso del volume liquido che ha per sezione su un piano verticale la superficie piana  $EDFHIE$  ed è applicato nel relativo baricentro.

Tale ultimo volume costituisce una parte del volume di sezione  $CEIHFC$ , corrispondente però ad un componente verticale rivolto verso il basso. Pertanto, i due contributi al componente verticale della spinta agente sull'intera superficie si elidono, e tale componente, rivolto verso il basso, ha perciò modulo pari al peso del volume liquido contenuto nel serbatoio, di sezione  $CEDFC$  ed è applicato nel relativo baricentro.

Nel caso il serbatoio fosse stato immerso in un liquido differente dal liquido contenuto in esso, con ragionamento del tutto analogo la spinta agente sulla superficie esterna del serbatoio sarebbe risultata uguale e contraria al peso del volume liquido *esterno* al serbatoio, come facilmente deducibile mediante applicazione dell'equazione globale dell'idrostatica come da esempio riportato al principio del §3.10.2.

Come richiamato al §1.3.4.2, in generale, il sistema di forze che dà origine alla spinta su una superficie, comunque essa venga determinata, può essere ridotto ad una forza più una coppia o a due forze non complanari (sghembe).

In particolare, nel caso del metodo per componenti, la spinta è equivalente ad una forza orizzontale:

$$\vec{\Pi}_o = \vec{\Pi}_x + \vec{\Pi}_y ,$$

di modulo:

$$\Pi_o = \sqrt{\Pi_x^2 + \Pi_y^2}$$

più il componente verticale  $\vec{\Pi}_v = \vec{\Pi}_z$ . In tal modo viene rispettata l'uguaglianza del vettore risultante dei sistemi di forze. I punti di applicazione delle due forze si determinano imponendo

l'uguaglianza dei momenti risultanti dei tre componenti  $\vec{M}_x$ ,  $\vec{M}_y$  e  $\vec{M}_z$  e dei due vettori  $\vec{M}_o$  e  $\vec{M}_v$  rispetto ad uno stesso (e qualunque) punto dello spazio.

Nel caso i componenti orizzontali siano complanari, il punto di applicazione di  $\vec{M}_o$  giace sul piano contenente i componenti e si determina facilmente mediante operazioni di scorrimento e composizione, ovvero esprimendo l'uguaglianza dei momenti risultanti dei due componenti orizzontali e del loro risultante (teorema di Varignon) secondo lo schema illustrato in Figura 9, §1.3.4.2. Il componente verticale è allora applicato nel baricentro del volume liquido il cui peso fornisce il modulo del componente.

Nel caso i componenti orizzontali non siano complanari, l'equilibrio dei momenti determina per il componente verticale un punto di applicazione differente dal baricentro del volume liquido di cui sopra.

## CAPITOLO QUARTO

### 4. IDROKINEMATICA

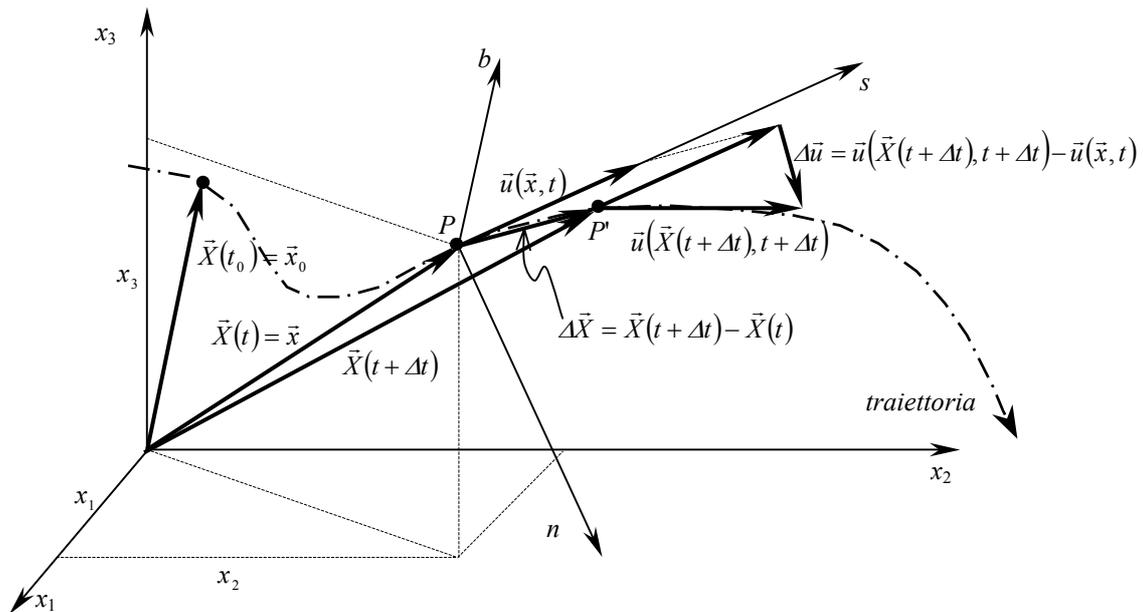
#### 4.1 Generalità.

Analogamente alla Cinematica nell'ambito della Meccanica, l'Idrocinematica si propone di studiare il movimento dei fluidi senza riguardo alle cause che lo provocano, fornendone pertanto una descrizione di tipo puramente geometrico. Tuttavia, alcune delle equazioni che verranno dedotte nel presente capitolo costituiranno, assieme ad altre studiate nell'Idrodinamica, gli strumenti necessari alla corretta posizione ed alla conseguente univoca soluzione dei problemi riguardanti il movimento dei fluidi.

Nell'ambito dello schema di mezzo continuo, verranno studiati i campi di grandezze legate al movimento dei fluidi nella forma generale:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(\vec{x}, t) \equiv \mathcal{G}(x_1, x_2, x_3, t) , \quad (108)$$

ove  $\mathcal{G}$  è una generica grandezza scalare, vettoriale o tensoriale;  $\vec{x}$  rappresenta il vettore posizione del punto in cui si valuta la grandezza, avente per componenti scalari le coordinate del punto,  $x_1, x_2, x_3$ ;  $t$  è il tempo.



**Figura 47. Schema di definizione del campo delle velocità associabile ad una massa fluida in movimento.**

#### 4.2 Campi di velocità e traiettorie.

Conformemente al significato generale di campo di una grandezza fisica, un campo di velocità è una regione dello spazio interessata da una massa fluida in movimento, sulla quale sia possibile definire, punto per punto ed al trascorrere del tempo, un vettore velocità  $\vec{u}(\vec{x}, t)$ . La velocità del campo di moto al tempo  $t$  in un punto  $P$  identificato dal vettore posizione  $\vec{x}$  è la velocità della particella che transita in  $P$  in tale istante di tempo. Sulla scorta della definizione del vettore velocità istantanea di un punto materiale richiamata al §1.3.3 e con riferimento allo schema di Figura 47, tale velocità può essere espressa come di seguito riportato.

Sia  $\vec{X}(t)$  il vettore esprime la posizione di una particella al tempo  $t$ , di componenti (coordinate della particella)  $X_i(t)$ ,  $i=1,2,3$ . Al variare di  $t$ ,  $\vec{X}(t)$  rappresenta pertanto il luogo dei punti dello spazio occupati dalla particella, ossia, la sua traiettoria. Si consideri ora la particella che ad un tempo  $t$  fissato si trova nel punto  $P$  di assegnata posizione  $\vec{x}$ , tale quindi che  $\vec{X}(t)=\vec{x}$ , ovvero  $X_i(t)=x_i$  in termini di componenti scalari del vettore posizione (coordinate del punto  $P$ ). Sia  $\Delta\vec{X}=\vec{X}(t+\Delta t)-\vec{X}(t)$  lo spostamento compiuto dalla particella nel successivo intervallo di tempo  $\Delta t$  per portarsi in un punto  $P'$ . La velocità della particella al tempo  $t$  è definita dal limite:

$$\vec{u}(\vec{x},t)=\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{X}(t+\Delta t)-\vec{X}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{X}}{dt}(t), \quad (109)$$

rappresentante la derivata prima del vettore posizione, e le corrispondenti componenti scalari da:

$$u_i(\vec{x},t)=\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X_i(t+\Delta t)-X_i(t)}{\Delta t} = \frac{dX_i}{dt}(t).$$

La velocità così espressa è funzione del vettore posizione e del tempo, perché dedotta con riferimento alla particolare particella che al tempo  $t$  transitava nel punto  $P$ . La possibilità di determinare, con identico procedimento, un vettore velocità in ogni punto della massa fluida e per ogni istante temporale denota l'esistenza di un campo di velocità, del quale il primo membro della (109) rappresenta pertanto l'espressione formale, ove  $\vec{x}$  e  $t$  assumono ora il significato di variabili indipendenti. Un campo di velocità è quindi pienamente determinato se si conosce il valore del vettore  $\vec{u}(\vec{x},t)$  in ogni punto della massa fluida ed in ogni istante temporale.

Si noti che, da un punto di vista geometrico, il vettore velocità, risultando parallelo al vettore spostamento  $\Delta\vec{X}$ , costituente un segmento elementare di traiettoria, nel limite per  $\Delta t \rightarrow 0$ , è tangente alla traiettoria della particella nel punto  $P$ .

Noto che sia il campo di velocità per l'intervallo di tempo durante il quale interessa studiarne il moto, ci si può porre il problema di determinare le traiettorie di tutte le particelle. L'equazione differenziale generale che descrive la traiettoria di una particella si desume dalla (109), tenendo presente che la particella si muove, ad un dato istante, con la velocità vigente nel punto dello spazio in cui essa si trova in tale istante, ponendo cioè  $\vec{x}=\vec{X}(t)$  nell'espressione del campo di velocità:

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{u}(\vec{X},t). \quad (110)$$

L'integrale della (110) è definito a meno di una costante da determinare sulla base di una condizione iniziale: la posizione occupata dalla particella ad un dato istante temporale  $t_0$ :

$$\vec{X}(t_0) = \vec{x}_0.$$

L'espressione generale che descrive tutte le traiettorie del campo di moto in termini di vettore posizione, integrale della (110), è perciò data da  $\vec{X}(t;\vec{x}_0)$ , di cui  $\vec{x}_0$  costituisce un parametro, identificato simbolicamente come tale dal punto e virgola di separazione dalla variabile indipendente  $t$ . Specificare in tale espressione un particolare valore di  $\vec{x}_0$  significa individuare una particolare particella della massa fluida, come materialmente potrebbe farsi marcandola con una goccia di colorante, instillata al tempo  $t_0$  nel punto  $\vec{x}_0$ . Seguendo la macchia colorata al trascorrere del tempo si visualizzerebbe perciò la traiettoria della particella marcata. L'immagine della traiettoria che si sviluppa in un dato intervallo di tempo può ottenersi effettuando una fotografia del campo di moto con un tempo di esposizione di pari durata.

Poiché i valori specificabili per il parametro  $\vec{x}_0$  sono  $\infty^3$ , tale è il numero di traiettorie individuabili nel campo di moto.

Evidentemente, la struttura della (110) implica la possibilità di determinare le traiettorie in forma analitica soltanto per espressioni del campo di velocità sufficientemente semplici. Ammessa tale possibilità, sulla base dell'equazione della traiettoria in termini scalari,  $x_i = X_i(t; \vec{x}_0)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , le forme delle traiettorie di tutte le particelle possono esprimersi analiticamente eliminando il tempo fra le tre equazioni scalari.

### 4.3 Punti di vista Euleriano e Lagrangiano.

Il moto di una massa fluida è completamente descritto quando sia descritto il moto di tutte le  $\infty^3$  particelle che la compongono. Le espressioni del campo di moto,  $\vec{u}(\vec{x}, t)$ , e dell'insieme delle traiettorie di tutte le particelle della massa fluida,  $\vec{X}(t; \vec{x}_0)$ , suggeriscono la possibilità di esaminare il movimento della massa fluida con due diverse modalità.

Una prima modalità consiste nel porsi in un certo punto dello spazio, cui è associato un valore fissato del vettore posizione  $\vec{x}$ , e misurare le velocità delle diverse ( $\infty^1$ ) particelle che, al trascorrere del tempo  $t$ , transitano per il punto prescelto per l'osservazione. Tale modalità di osservazione del campo di moto prende il nome di *punto di vista euleriano* o *locale*.

La seconda modalità consiste nel seguire il movimento di una certa particella al trascorrere del tempo  $t$ , fissando il valore della sua posizione  $\vec{x}_0$  al tempo  $t_0$ . Tale modalità costituisce il *punto di vista lagrangiano*, detto anche *materiale* o *sostanziale*.

In entrambi i casi, ciascun osservatore è in grado di eseguire  $\infty^1$  misure. La descrizione completa del campo di moto si ottiene pertanto utilizzando  $\infty^3$  osservatori euleriani che stazionano negli  $\infty^3$  punti dello spazio o  $\infty^3$  osservatori lagrangiani mobili sulle  $\infty^3$  particelle della massa fluida, in entrambi i casi collezionando  $\infty^4$  misure. Tali osservazioni complete del campo di moto sono equivalenti, nel senso che da una rappresentazione è possibile dedurre l'altra. Infatti, noto il campo delle velocità  $\vec{u}(\vec{x}, t)$ , l'equazione differenziale (110) consente di ricostruire tutte le traiettorie del campo di moto. Viceversa, nota la  $\vec{X}(t; \vec{x}_0)$ , per ogni istante di tempo  $t$  la sua derivata temporale (109) fornisce le velocità in tutti i punti dello spazio  $\vec{x} = \vec{X}(t; \vec{x}_0)$  ottenibili considerando le posizioni iniziali  $\vec{x}_0$  di tutte le particelle della massa fluida.

Le due modalità di osservazione non sono applicabili unicamente a grandezze caratteristiche del campo di moto in senso stretto, ma a qualunque grandezza fisica misurabile in una massa fluida in movimento: densità, pressione<sup>27</sup>, viscosità, etc... La descrizione lagrangiana di una qualunque grandezza  $\mathcal{G}$  si deduce dalla sua descrizione generale (108) inserendovi le posizioni assunte da una particella lungo la sua traiettoria al trascorrere del tempo  $\vec{x} = \vec{X}(t; \vec{x}_0)$ :

$$\mathcal{G}(\vec{x}, t) = \mathcal{G}[\vec{X}(t; \vec{x}_0), t] = \mathcal{G}(t; \vec{x}_0),$$

ove  $\vec{x}_0$  assume il medesimo significato indicato nel caso dell'equazione delle traiettorie.

A seconda del punto di vista adottato, possono definirsi due tipi di derivate temporali della grandezza  $\mathcal{G}$ . Si definisce *derivata euleriana* o *locale* nel punto  $\vec{x}$  al tempo  $t$  il seguente limite:

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}(\vec{x}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{G}(\vec{x}, t + \Delta t) - \mathcal{G}(\vec{x}, t)}{\Delta t} = \left. \frac{d \mathcal{G}(\vec{x}, t)}{d t} \right|_{\vec{x} = \text{cost}},$$

la quale, evidentemente, riflette le variazioni temporali della grandezza rilevabili da un punto di vista euleriano.

<sup>27</sup> Nel caso di fluidi in movimento, la pressione deve essere opportunamente definita, come si vedrà nel capitolo successivo.

Si definisce *derivata lagrangiana*, o *sostanziale*, o *materiale*, nel punto  $\bar{x}$  al tempo  $t$  il limite:

$$\frac{D\mathcal{G}}{Dt}(\bar{x}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{G}(t + \Delta t; \bar{x}_0) - \mathcal{G}(t; \bar{x}_0)}{\Delta t} = \left. \frac{d\mathcal{G}(t; \bar{x}_0)}{dt} \right|_{\bar{x}_0 = \text{cost}},$$

riferito alla particella che transita nel punto  $\bar{x}$  al tempo  $t$ , individuata scegliendo il parametro  $\bar{x}_0$  tale che risulti  $\bar{X}(t; \bar{x}_0) = \bar{x}$ .

Con procedimento analogo a quello utilizzato per la deduzione dell'espressione (20) della derivata ordinaria di una funzione dipendente da un'unica variabile indipendente attraverso funzioni ausiliarie, il legame esistente fra i due tipi di derivata temporale si deduce facilmente esprimendo il differenziale totale della (108):

$$d\mathcal{G}(\bar{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_3} dx_3 = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_i} dx_i,$$

imponendo che le componenti dello spostamento  $dx_i$  siano quelle della particella che passa per il punto  $\bar{x}$  al tempo  $t$ ,  $dx_i = dX_i(t; \bar{x}_0)$ , procedendo alla valutazione della derivata dividendo per il differenziale  $dt$  e tenendo presente l'equazione differenziale della traiettoria (110):

$$\frac{D\mathcal{G}}{Dt}(\bar{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_i} \frac{dX_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_i} u_i. \quad (111)$$

La relazione (111) prende il nome di *regola di derivazione lagrangiana*.

Il procedimento seguito corrisponde, in effetti, alla valutazione del limite:

$$\frac{D\mathcal{G}}{Dt}(\bar{x}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{G}[\bar{X}(t + \Delta t; \bar{x}_0), t + \Delta t] - \mathcal{G}[\bar{X}(t; \bar{x}_0), t]}{\Delta t}.$$

Riconoscendo che  $\partial \mathcal{G} / \partial x_i$  è la  $i$ -esima componente del gradiente di  $\mathcal{G}$ , il secondo termine a terzo membro della (111) rappresenta la forma cartesiana del prodotto scalare fra tale gradiente ed il vettore velocità e può pertanto esprimersi in notazione vettoriale come:

$$\frac{D\mathcal{G}}{Dt} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \mathcal{G}.$$

Si osservi che, per definizione di derivata parziale, nella (111) il termine  $\partial \mathcal{G} / \partial t$  è calcolato mantenendo costante  $\bar{x}$  (ovvero le sue tre componenti scalari  $x_i$ ) ed è quindi, per definizione, proprio la derivata euleriana della grandezza nel dato punto  $\bar{x}$  e nel dato istante di tempo  $t$ .

Analogamente, l'accelerazione in un punto e ad un dato istante di tempo, accelerazione della particella che transita nel punto in quell'istante, è espressa dalla derivata lagrangiana del vettore velocità:

$$\vec{a}(\bar{x}, t) = \frac{D\vec{u}}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{u}[\bar{X}(t + \Delta t; \bar{x}_0), t + \Delta t] - \vec{u}[\bar{X}(t; \bar{x}_0), t]}{\Delta t}, \quad (112)$$

con opportuna scelta del parametro  $\bar{x}_0$ , secondo quanto menzionato in precedenza.

La presenza della velocità nell'espressione della regola di derivazione lagrangiana (111) rende non lineare la corrispondente espressione dell'accelerazione. In termini di componenti scalari si ha infatti, ponendo  $\mathcal{G} = u_i$  nella (111):

$$a_i = \frac{D u_i}{D t} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (113)$$

in cui  $\partial u_i / \partial t$  è detta *accelerazione locale* e  $u_j \partial u_i / \partial x_j$  *accelerazione convettiva* o *istantanea*, corrispondente all'espressione in notazione vettoriale:

$$\bar{a} = \frac{D \bar{u}}{D t} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + u_j \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u},$$

in cui l'equivalenza fra gli operatori  $(\bar{u} \cdot \nabla)$  e  $u_j (\partial / \partial x_j)$  si verifica facilmente eseguendo il prodotto scalare fra la velocità ed il vettore simbolico nabla nella forma cartesiana (28).

#### 4.4 Cenni all'analisi del campo di moto nell'intorno di un punto

In questo paragrafo si riassumono alcuni importanti risultati dell'analisi del campo di moto nell'intorno di un punto, rilevanti particolarmente ai fini della derivazione del legame fra sforzi e velocità di deformazione nei fluidi. Tale legame, discusso con riferimento ad un caso semplificato, ancorché significativo, nel §2.5, in sede di trattazione delle proprietà reologiche dei fluidi, verrà presentato in forma più generale nel capitolo successivo dedicato all'Idrodinamica.

Dalla citata analisi locale del campo di velocità, il movimento di un volume fluido elementare può essere visto come risultante dalla composizione di un moto puramente traslatorio, di una rotazione rigida e di una deformazione. Con ragionamento del tutto analogo a quello svolto nel §2.2, si può mostrare che, in generale, la derivata spaziale  $\partial u_i / \partial x_j$  rappresenta: per  $i \neq j$ , la velocità di rotazione di un segmento parallelo all'asse  $x_j$  attorno ad un asse normale al piano coordinato  $x_i x_j$ ; per  $i = j$ , la velocità specifica di dilatazione (se positiva) o di contrazione (se negativa) dello stesso segmento, ossia, rapportata alla lunghezza iniziale. Mediante uno sviluppo in serie di Taylor arrestato al primo ordine, dalla conoscenza delle nove derivate  $\partial u_i / \partial x_j$  che si ottengono per  $i = 1, 2, 3$  e  $j = 1, 2, 3$  si possono determinare gli spostamenti degli otto vertici di un parallelepipedo elementare avente spigoli paralleli agli assi coordinati. Esprimendo tali derivate come:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = D_{ij} + R_{ij}, \quad (114)$$

dall'analisi delle modifiche subite dal parallelepipedo originario si conclude che il termine:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

rappresenta, per  $i \neq j$ , una velocità di deformazione angolare a volume costante associata alla rotazione, uguale in modulo ma in versi opposti, dei lati  $dx_i$  e  $dx_j$  di una sezione rettangolare di un parallelepipedo elementare avente spigoli paralleli agli assi coordinati, rispetto ad un asse normale alla faccia parallela al piano coordinato  $x_i x_j$ , che ha per lati  $dx_i$  e  $dx_j$  (p.es., per  $i = 1$  e  $j = 2$ , il rettangolo di Figura 13). Tale rappresentazione costituisce l'estensione ad un moto tridimensionale della espressione della velocità di deformazione angolare in termini di derivata spaziale della velocità, già riconosciuta per il moto piano descritto al §2.1.

Il medesimo termine rappresenta invece, per  $i \neq j$ , una velocità di deformazione specifica puramente assiale, a volume pertanto variabile. In particolare, da tale analisi consegue che la divergenza del vettore velocità rappresenta la velocità di variazione volumetrica specifica. Dato un volume elementare  $V$ , si ha infatti:

$$\nabla \cdot \bar{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt}.$$

Consegue da ciò che il campo di moto di un fluido incomprimibile ed isoterma debba essere caratterizzato dall'essere ovunque nulla la divergenza del vettore velocità<sup>28</sup>.

Anche nel caso del moto più generale possibile di un fluido newtoniano, lo stato di sforzo è legato unicamente alla velocità di deformazione, come già riconosciuto nel §2.5 con riferimento ai soli sforzi tangenziali ed a casi particolari di moto (Figura 13, Figura 18).

Analogamente, il termine:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

rappresenta le velocità di rotazione degli stessi lati rispetto allo stesso asse, uguali però sia in modulo che in verso: dunque, una velocità di rotazione rigida attorno a tale asse. Tali termini sono ovviamente nulli per  $i=j$ .

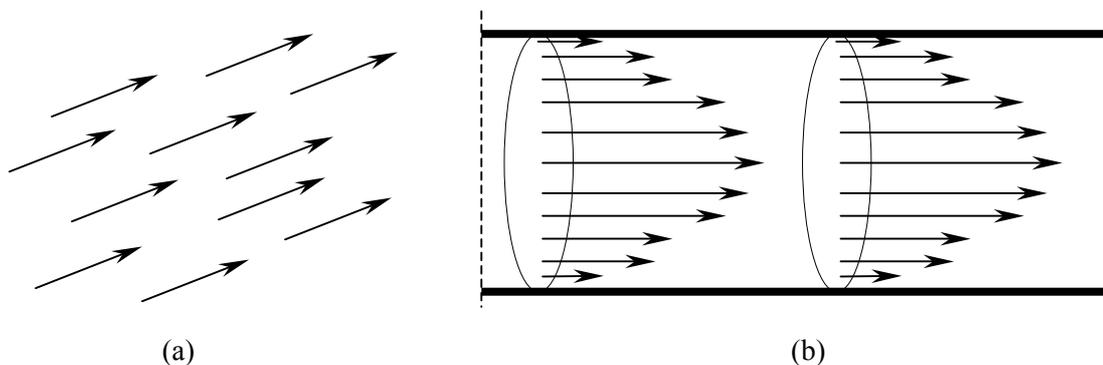
Si può infine mostrare che le matrici di elementi  $D_{ij}$  ed  $R_{ij}$  dati dalla (114) rappresentano dei tensori; rispettivamente, il tensore velocità di deformazione,  $\underline{D}$ , ed il tensore velocità di rotazione rigida,  $\underline{R}$ .

#### 4.5 Classificazione dei moti.

Si dicono *stazionari* o *permanenti* quei moti per i quali, in qualunque punto dello spazio, tutte le grandezze cinematiche caratteristiche (velocità, accelerazione, etc...) non dipendono dal tempo. La stazionarietà del moto è pertanto espressa dall'annullamento della derivata Euleriana di una qualunque grandezza caratteristica del campo di moto,  $\mathcal{G}$ :

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} = 0 ,$$

in ogni punto della massa fluida. Un moto non stazionario si dice *vario*.



**Figura 48. Esempi di campi di velocità uniformi (a) in senso stretto e (b) nell'accezione del termine correntemente utilizzata nella tecnica idraulica.**

Si dicono *uniformi* in senso stretto i moti stazionari nei quali il vettore velocità possieda uguali direzione, verso e modulo in tutti i punti della massa fluida e sia, quindi, invariabile anche nello spazio (Figura 48a). A livello tecnico, tuttavia, il termine "moto uniforme" viene utilizzato generalmente per individuare un moto stazionario nel quale tutte le particelle si muovano di moto rettilineo uniforme, anche con velocità differenti l'una dall'altra. Consegue da ciò che le traiettorie debbano essere fra loro parallele. Un esempio di tale accezione del termine è quello, significativo,

<sup>28</sup> Ove si sostituiscano le rotazione e le deformazioni alle velocità di rotazione e di deformazione, i risultati di tale analisi sono del tutto analoghi a quelli che si ottengono nella Scienza delle Costruzioni. Similmente, lo stato di sforzo in un solido elastico si riconosce dipendere unicamente dal suo stato di deformazione.

relativo al moto di un fluido in una condotta cilindrica, nel quale la velocità non è uniforme su una sezione piana perpendicolare all'asse della condotta e, nel caso di sezione circolare, possiede una distribuzione a simmetria assiale, con valori nulli alla parete e massimi sull'asse (Figura 48b).

Dal punto di vista delle caratteristiche geometriche, i moti si dicono *tridimensionali* nel caso generale in cui le grandezze caratteristiche del moto varino lungo tutte e tre le dimensioni dello spazio, e dipendano pertanto da tre coordinate, anche non cartesiane; si dicono *bidimensionali* e *unidimensionali* qualora la variabilità spaziale del moto possa essere descritta, rispettivamente, da due o da una coordinata. I flussi unidimensionali, nei quali, ad eccezione di alcuni tratti di sviluppo limitato, il moto si svolga, localmente, lungo una direzione preferenziale e le velocità siano perciò sensibilmente parallele, costituisce una *corrente*. La variabile spaziale indipendente è costituita da una ascissa curvilinea stabilita lungo una curva assunta come *asse della corrente*.

Fra i moti bidimensionali possono menzionarsi i moti *a simmetria assiale* ed i moti *piani*. Nei primi, le grandezze possono variare al variare di una coordinata rettilinea,  $x$ , e, su piani perpendicolari a tale direzione, al variare del raggio spiccato dall'asse  $x$ , ma non con l'angolo  $\theta$  misurato sul piano. Nei secondi, il campo di moto si ripete identico su piani paralleli, con componente della velocità nulla nella direzione ad essi perpendicolare (i vettori velocità giacciono su tali piani).

Sono esempi di corrente i flussi in un canale o in un condotto. Il moto in un condotto a sezione circolare è anche a simmetria assiale. Un esempio di moto piano è quello descritto nel §2.1.

#### 4.6 Linee di corrente e linee di fumo.

Oltre alle traiettorie, in un campo di moto possono essere definite altre due famiglie di curve caratteristiche: *linee di corrente* e *linee di fumo* o *di emissione*.

Le linee di corrente sono le linee di flusso del campo di velocità e sono pertanto definite, ad un dato istante di tempo, come curve tangenti, punto per punto al vettore velocità. Esse forniscono quindi una rappresentazione istantanea del moto. Con riferimento allo schema semplificato, bidimensionale, di Figura 49, detto  $d\vec{x}$  il vettore spostamento elementare lungo una linea di corrente, costituente un segmento elementare della linea, di componenti  $d\hat{x}_i$  ( $i=1,2,3$ ), il parallelismo fra tale vettore ed il vettore velocità è espresso dalla proporzionalità fra le componenti omologhe dei due vettori:

$$\frac{d\hat{x}_i}{d\hat{x}_j} = \frac{u_i(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3; t)}{u_j(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3; t)}, \quad (115)$$

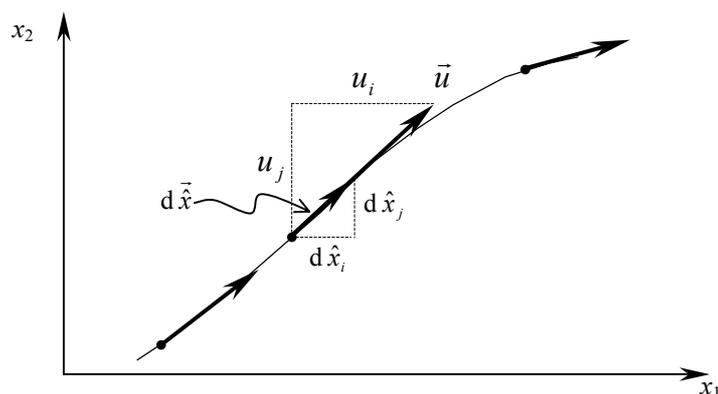


Figura 49. Schema illustrativo della deduzione delle equazioni delle linee di corrente.

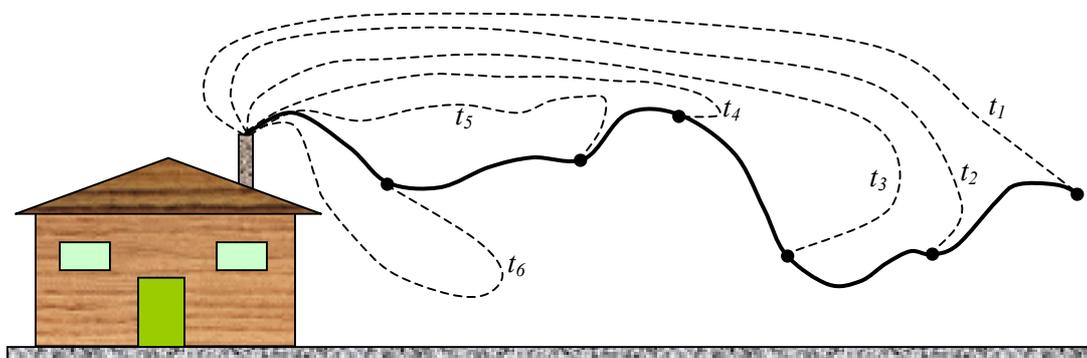
scritte per due coppie qualunque di valori dei pedici  $i$  e  $j$  (la terza equazione che può essere scritta è ottenibile dalle prime due dividendo membro a membro e non ne è perciò indipendente), nella quale  $t$  rappresenta un parametro. Mediante imposizione di una condizione al contorno esprimente il passaggio della linea di corrente per un dato punto, per integrazione della (115) può dedursi

l'equazione della linea di flusso. Poiché possono essere tracciate  $\infty^2$  linee di corrente in ciascuno degli  $\infty^1$  istanti contenuti in un dato intervallo temporale, in tale intervallo sono definibili complessivamente  $\infty^3$  linee di corrente, tante quante le traiettorie.

Una particella fluida esaminata ad un certo istante temporale nella posizione da essa occupata, percorrerà in un intervallo di tempo elementare un segmento elementare che, evidentemente, è comune alla traiettoria ed alla linea di corrente definite sulla base della posizione iniziale della particella. Tuttavia, se il moto è vario, nell'istante successivo la particella si troverà soggetta ad una velocità differente da quella esistente, nello stesso punto, all'istante iniziale. La prima velocità, propria della particella, è quella sulla base della quale si determina la sua traiettoria, mentre la seconda è quella che occorre considerare per il tracciamento della linea di corrente all'istante iniziale. Pertanto, in generale, linee di corrente e traiettorie non coincidono. Le due famiglie di curve coincidono, però, se in moto è stazionario. Infatti, in tal caso, in qualunque posizione la particella si trovi, essa è soggetta alla stessa velocità sulla base della quale si tracciano le linee di corrente relative a qualunque istante.

Per quanto testé esposto, una famiglia di linee di corrente ad un dato istante di tempo può visualizzarsi iniettando una goccia di tracciante in un certo numero di punti del campo di moto ed eseguendo una fotografia con un tempo di esposizione sufficiente a visualizzare i relativi segmenti di traiettoria. Quanto più i punti di immissione del tracciante sono ravvicinati, tanto più i segmenti si prestano ad essere collegati da curve ad essi tangenti costituenti le linee di corrente istantanee.

Le linee di fumo, o di emissione, sono definite come luogo dei punti occupati, ad un dato istante, da tutte le particelle transitate, o che devono ancora transitare, per un fissato punto dello spazio. L'origine del nome è evidente: nel caso ideale di un camino puntiforme emittente fumo, la corrispondente linea di fumo è l'immagine stessa del pennacchio di fumo, come mostrato nella Figura 50. In essa, le linee tratteggiate rappresentano le traiettorie seguite da diverse particelle uscite dal camino negli istanti indicati, da  $t_1$  a  $t_6$ . La linea di fumo al tempo  $t$ , al quale la figura è riferita, è la linea continua congiungente le posizioni delle particelle in tale istante, indicate con dei cerchietti. Ovviamente, in tale caso la linea di fumo rappresenta soltanto le posizioni delle particelle che sono passate per (uscite da) la bocca puntiforme del camino.



**Figura 50. Schema per la definizione di una linea di fumo.**

Ad ogni istante sono determinabili  $\infty^3$  linee di fumo, relative agli  $\infty^3$  punti di riferimento per il passaggio delle particelle (per definizione di linea di fumo, ad un dato istante ciascuna particella appartiene a tutte le linee di fumo riferite a ciascuno dei punti della sua traiettoria). In un dato intervallo di tempo, costituito da  $\infty^1$  istanti, le linee di fumo rappresentabili sono pertanto  $\infty^4$ .

Le linee di fumo relative ad uno stesso punto di emissione ed a diversi istanti di tempo possono essere visualizzate osservando, al trascorrere del tempo, la disposizione delle particelle di un tracciante iniettato continuamente nel punto di emissione<sup>29</sup>. Nel caso stazionario, le linee di fumo coincidono con le traiettorie e le linee di corrente.

<sup>29</sup> Per una deduzione formale delle equazioni delle linee di fumo vedi C.A. Fassò – Dispense di Idraulica.

#### 4.7 Flussi attraverso superfici.

Si consideri la massa fluida rappresentata in Figura 51 e la superficie  $S$  in essa contenuta. Si consideri, inoltre, il vettore velocità in un punto  $P$  qualunque di tale superficie ed una superficie elementare  $dS$  che comprenda tale punto. Avendo tale superficie elementare dimensioni infinitesime, a meno di termini infinitesimi il valore della velocità in ciascuno dei suoi punti è lo stesso che nel punto  $P$ . In un intervallo di tempo elementare  $dt$ , le particelle inizialmente poste sull'areola  $dS$  compiono quindi tutte lo stesso spostamento  $u dt$  nella direzione e nel verso del vettore velocità. Pertanto, l'insieme delle particelle che, in tale intervallo, ha attraversato la superficie elementare  $dS$  occupa un volume cilindrico costituito dalla proiezione di tale superficie nella direzione e per una distanza pari allo spostamento  $\vec{u} dt$ .

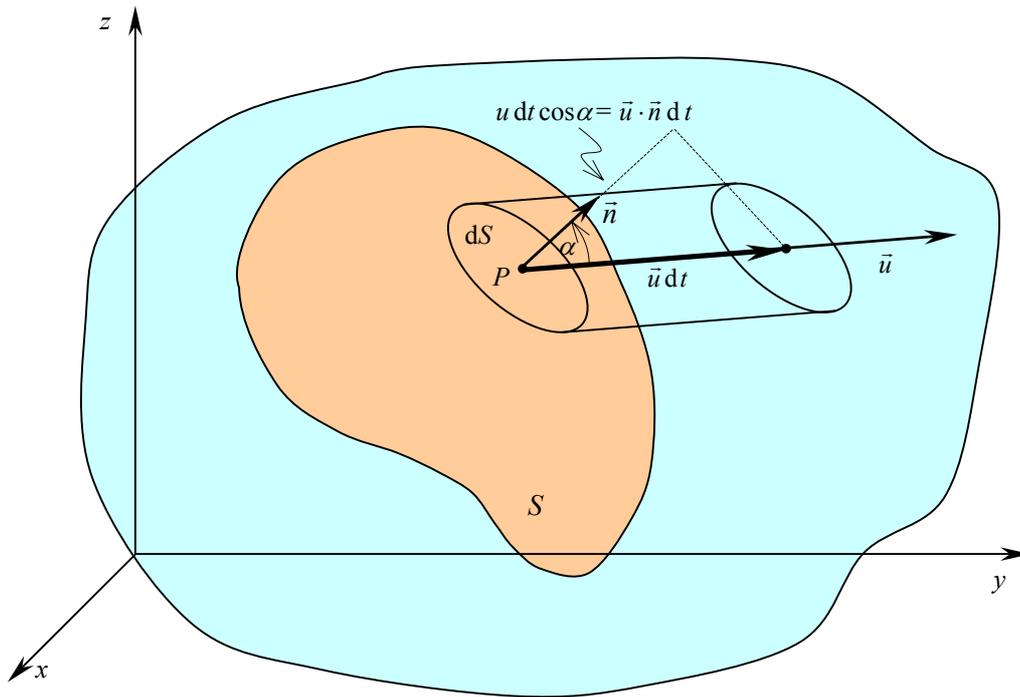


Figura 51. Schema di definizione del flusso attraverso una superficie.

Il volume di tale solido è dato dal prodotto della superficie di base  $dS$  per l'altezza  $a$  del cilindro, misurata in direzione normale alla superficie di base. Essendo quest'ultima data dalla proiezione dello spostamento  $\vec{u} dt$  lungo la direzione della normale alla superficie  $dS$ , detto  $\alpha$  l'angolo formato dallo spostamento e dalla normale, si ha  $a = u dt \cos \alpha = \vec{u} \cdot \vec{n} dt$ . Il volume di tale cilindro elementare è dato quindi da:

$$dV = dS \vec{u} \cdot \vec{n} dt .$$

Detta  $\rho$  la densità nel punto  $P$ , tale volume materiale elementare possiede massa pari a:

$$dm = \rho dV = \rho dS \vec{u} \cdot \vec{n} dt$$

e quantità di moto:

$$d\vec{q} = \vec{u} dm = \rho \vec{u} dS \vec{u} \cdot \vec{n} dt .$$

Tali quantità costituiscono rispettivamente il volume, la massa e la quantità di moto che hanno attraversato la superficie elementare  $dS$  nell'intervallo di tempo elementare  $dt$ . Dividendo per  $dt$

possono quindi definirsi le corrispondenti quantità che attraversano la superficie elementare nell'unità di tempo:

$$dQ = \frac{dV}{dt} = \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS$$

$$dQ_m = \frac{dm}{dt} = \rho \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS \, ,$$

$$d\vec{M} = \frac{d\vec{q}}{dt} = \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS$$

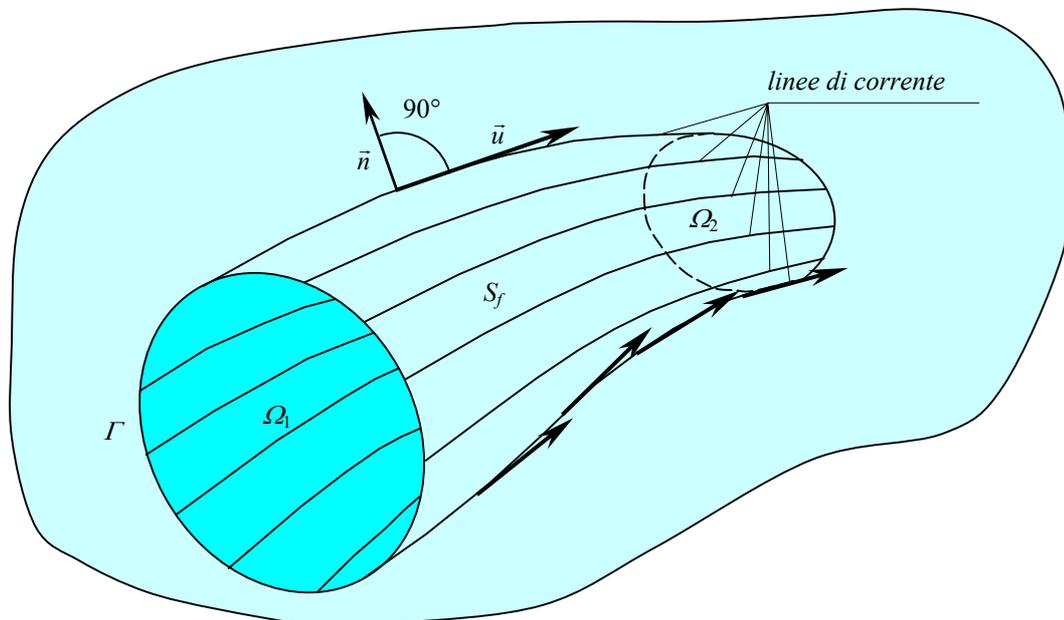
dette rispettivamente *flusso volumetrico* o *portata volumetrica* o semplicemente *portata*, *flusso di massa* o *portata di massa* e *flusso di quantità di moto* elementari. Si rimarca come, ai fini dell'attraversamento della superficie, sia efficace unicamente la componente della velocità in direzione ad essa normale. Un valore positivo del flusso corrisponde all'attraversamento della superficie nel verso della normale; un valore negativo ad un attraversamento in verso opposto.

La portata volumetrica, la portata di massa ed il flusso di quantità di moto relativi all'intera superficie  $S$ , pari alle corrispondenti quantità che attraversano la superficie nell'unità di tempo, sono date dagli integrali:

$$Q = \int_S \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS \, . \tag{116}$$

$$Q_m = \int_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS \, . \tag{117}$$

$$\vec{M} = \int_S \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS \, . \tag{118}$$



**Figura 52. Tubo di flusso in un volume fluido in movimento.**

Si consideri una linea chiusa all'interno di una massa fluida in movimento,  $\Gamma$ , che non sia una linea di corrente e l'insieme delle  $\infty^1$  linee di flusso che passano per i punti di detta curva (Figura 52). La superficie tubolare  $S_f$  così definita è detta *tubo di flusso*. Essendo nullo in ogni punto di tale

superficie il prodotto scalare fra il vettore velocità e la normale alla superficie, attraverso un tubo di flusso risultano nulli i flussi volumetrico, di massa e di quantità di moto.

Considerando il volume delimitato dal tubo di flusso, da una superficie  $\Omega_1$  avente per contorno la curva  $\Gamma$  e da analoga superficie  $\Omega_2$  avente per contorno una curva cui si appoggiano le stesse linee di corrente che compongono il tubo di flusso, potranno aversi portata, portata di massa e flusso di quantità di moto non nulli, al più, attraverso tali due sezioni del tubo di flusso.

#### 4.8 Principio di conservazione della massa. Equazioni di continuità.

Nel prosieguo ci si limiterà alla descrizione di moti di una singola specie fluida, la cui massa complessiva, così come quella di una qualunque sua porzione, si mantiene costante al trascorrere del tempo (*Principio di conservazione della massa*).

Si dice *volume materiale* un volume fluido costituito sempre dalle stesse particelle, individualmente considerate e visualizzabili, durante il loro movimento, mediante marcatura con un tracciante. Seguire un volume materiale nel suo movimento – durante il quale esso può deformarsi e variare di volume geometrico – significa pertanto seguire le traiettorie di tutte le particelle che lo compongono. La conservazione della massa di un volume materiale  $V_m$  si esprime mediante l'annullamento della sua derivata lagrangiana:

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{V_m} \rho dV = 0$$

Tralasciamo qui di illustrare come possa esprimersi tale derivata lagrangiana di una quantità – la massa del volume materiale – definita come integrale esteso ad un dominio di integrazione variabile nel tempo e pertanto dipendente dalla variabile di derivazione<sup>30</sup>. In questa sede il principio di conservazione della massa verrà espresso direttamente in forma euleriana, mediante bilanci di massa riferiti a volumi di controllo, puramente geometrici, considerati fissi ed invariabili al trascorrere del tempo e pertanto occupati, in generale, da porzioni di fluido sempre diverse.

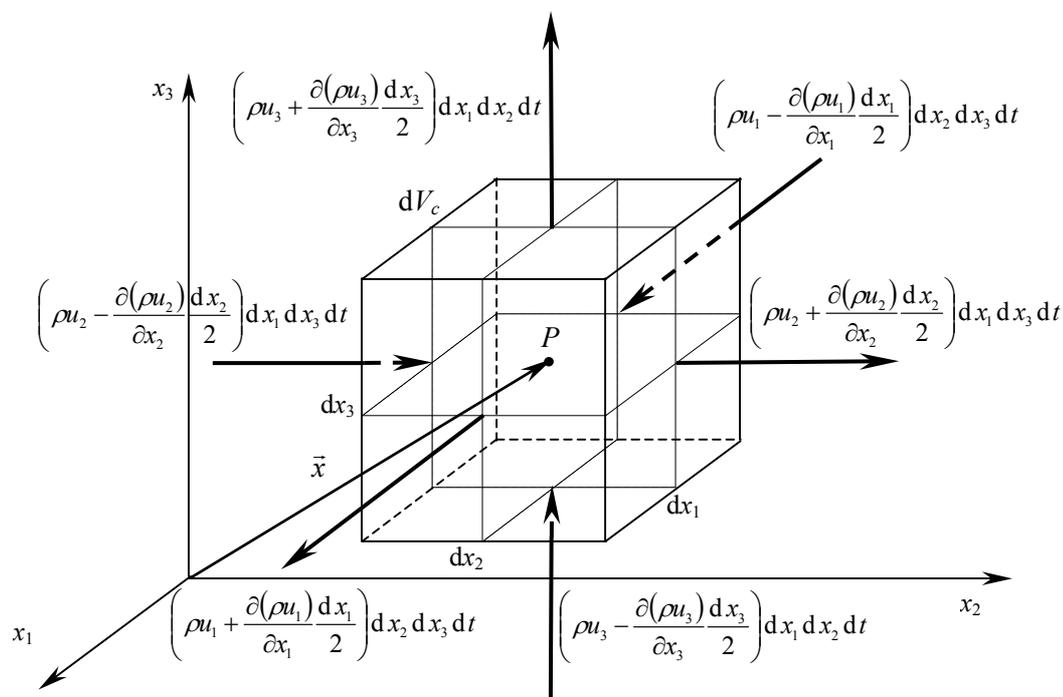


Figura 53. Schema di impostazione dell'equazione di continuità in forma locale.

<sup>30</sup> La soluzione del problema è fornita dal *Teorema del trasporto*, o *Teorema di Reynolds*. Il lettore interessato all'argomento può consultare il Marchi-Rubatta o il Cenedese.

#### 4.8.1 Equazione di continuità in forma locale

Il principio di conservazione della massa può esprimersi in forma euleriana con riferimento al volume di controllo elementare rappresentato in Figura 53, scrivendo che la variazione della massa contenuta all'interno del volume di controllo in un intervallo di tempo elementare  $dt$  è pari alla massa netta entrante nel volume, nello stesso intervallo di tempo, attraverso la sua superficie di contorno costituita dalle sei superfici rettangolari parallele ai piani coordinati.

Come mostrato nel §4.7, ai fini della valutazione del flusso è rilevante la componente della velocità normale alla superficie considerata. Essendo le sei facce rettangolari del parallelepipedo normali ad assi coordinati, per ciascuna di esse il flusso di massa si esprime con riferimento alla componente della velocità lungo l'asse coordinato normale alla faccia. Ad esempio, il flusso di massa elementare  $dQ_{m1}$  attraverso la superficie elementare  $dS_1$  normale all'asse  $x_1$ , sezione del volume di controllo con un piano contenente il baricentro  $P$  del volume di controllo, di coordinate  $x_1, x_2, x_3$  (quindi, una superficie non coincidente con alcuna delle sei facce del parallelepipedo, ma parallela a due di esse), riferito alla faccia rivolta verso le  $x_1$  crescenti, è dato da:

$$dQ_{m1} = \int_{dS_1} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS = \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS_1 = \rho \vec{u} \cdot \vec{b}_1 dx_2 dx_3 = \rho u_1 dx_2 dx_3, \quad (119)$$

in cui  $\rho$  e  $u_1$  sono rispettivamente la densità e la componente della velocità lungo l'asse  $x_1$  nel punto  $P$ . Lo sviluppo dell'integrale è eseguito tenendo conto delle seguenti considerazioni: a) la superficie è infinitesima, per cui (a meno di termini infinitesimi) la funzione integranda può ritenersi costante sulla superficie  $dS_1$  e l'integrabile può valutarsi come prodotto della funzione integranda per l'area della superficie; b) la normale esterna alla faccia di una superficie piana normale all'asse  $x_1$ , rivolta nel senso delle  $x_1$  crescenti è il versore dell'asse  $x_1$ ,  $\vec{b}_1$ ; il prodotto scalare fra il vettore velocità ed il versore dell'asse  $x_1$  rappresenta la componente scalare della velocità sull'asse  $x_1$ ,  $u_1$ ; d) la superficie è un rettangolo di area  $dS_1 = dx_2 dx_3$ .

In Figura 53 sono indicate le masse che attraversano nell'intervallo di tempo  $dt$  le sei superfici rettangolari del parallelepipedo con il relativo verso di attraversamento, rappresentato dalle frecce, assumendo, con scelta del tutto arbitraria ed irrilevante sui risultati cui si perverrà, componenti scalari del vettore velocità tutte positive<sup>31</sup>.

La massa entrante nell'intervallo di tempo  $dt$  all'interno del volume di controllo, attraverso la faccia del parallelepipedo normale all'asse  $x_1$  posta alla coordinata  $x_1 - dx_1/2$ , si esprime sulla base dell'espressione (119), mediante uno sviluppo in serie di Taylor arrestato al primo ordine del flusso di massa per unità di superficie,  $\rho u_1$ , rispetto al valore che il termine assume nel punto  $P$ :

$$\left( \rho u_1 - \frac{\partial(\rho u_1)}{\partial x_1} \frac{dx_1}{2} \right) dx_2 dx_3 dt,$$

con il segno meno corrispondente ad uno spostamento  $-dx_1/2$  ( $dx_1/2$  nel verso delle  $x_1$  decrescente) a partire dal punto  $P$ .

Analogamente, nello stesso intervallo di tempo, attraverso la faccia parallela posta alla coordinata  $x_1 + dx_1/2$  (spostamento  $+dx_1/2$  rispetto a  $P$ ) esce dal volume di controllo la massa:

$$\left( \rho u_1 + \frac{\partial(\rho u_1)}{\partial x_1} \frac{dx_1}{2} \right) dx_2 dx_3 dt.$$

La massa *netta entrante* nel volume di controllo è data dalla somma algebrica delle due, pari a:

$$-\frac{\partial(\rho u_1)}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 dt = -\frac{\partial(\rho u_1)}{\partial x_1} dV_c dt.$$

<sup>31</sup> Le frecce hanno quindi direzione e verso dei componenti (al maschile) del vettore velocità.

Analogamente si ragiona per le facce normali agli altri due assi coordinati.

La variazione nell'intervallo  $dt$  della massa  $m$  contenuta nel volume di controllo  $dV_c$  è data da:

$$\frac{\partial m}{\partial t} dt = \frac{\partial(\rho dV_c)}{\partial t} dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dV_c dt ,$$

essendo il volume di controllo fisso ed invariabile nel tempo.

Il bilancio di massa complessivo sul volume di controllo si scrive pertanto, in notazione sintetica:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dV_c dt = - \left[ \frac{\partial(\rho u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho u_3)}{\partial x_3} \right] dV_c dt = - \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} dV_c dt ,$$

da cui, semplificando e ordinando i termini, si ottiene l'equazione di continuità in forma locale o indefinita:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 , \quad (120)$$

in cui il secondo termine a primo membro costituisce la divergenza del vettore  $\rho \vec{u}$ . L'equazione di continuità si può quindi anche esprimere in notazione vettoriale come:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 . \quad (121)$$

Sviluppando la divergenza del prodotto  $\rho \vec{u}$  e ricordando la regola di derivazione lagrangiana (111) si ottiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} ,$$

da cui la forma lagrangiana:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

che in notazione vettoriale si scrive:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 . \quad (122)$$

Nel caso particolare di fluido incompressibile ed isoterma (per cui la densità non può variare per effetto di variazioni di temperatura), avendosi per la singola particella  $D\rho/Dt=0$  e non potendo essere nulla la densità del fluido si ottiene:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 , \quad (123)$$

la quale – si badi – vale anche nel caso di moto vario ( $\partial\rho/\partial t \neq 0$ ) e fluido non omogeneo.

Si osservi anche che, ripetendo il ragionamento sviluppato per impostare il bilancio di massa sul volume di controllo  $dV_c$ , la divergenza del vettore velocità rappresenta il flusso netto uscente dal volume di controllo, diviso per il volume<sup>32</sup>. L'equazione (123) esprime pertanto che il flusso volumetrico netto attraverso la superficie di contorno del volume di controllo elementare – che,

<sup>32</sup> Proprio questo significato è all'origine del termine "divergenza".

come si è più volte specificato, è da intendersi fisso nel tempo – deve essere nullo; pertanto la somma dei volumi entranti in un dato intervallo di tempo deve essere pari alla somma dei volumi uscenti.

L'equazione (123) era stata anticipata nel §4.3 sulla base del significato della divergenza del vettore velocità quale velocità di variazione di volume specifica di un volume materiale elementare. Tale significato, basato su una descrizione lagrangiana della deformazione del volume materiale, è, come si vede, del tutto congruente con quello testé evidenziato dal bilancio sul volume di controllo, su base pertanto euleriana.

#### 4.8.2 Equazione di continuità in forma globale

Una forma globale dell'equazione di continuità può dedursi integrando la forma euleriana dell'equazione di continuità (121) su un volume di controllo  $V_c$  ed applicando il teorema della divergenza (39), §1.2.4. Avendosi:

$$\int_{V_c} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) \right] dV = \int_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{V_c} \nabla \cdot (\rho \vec{u}) dV = \int_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{S_c} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS$$

l'equazione di continuità in forma globale si scrive:

$$\int_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{S_c} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad , \quad (124)$$

in cui gli integrali di volume e di superficie rappresentano rispettivamente la variazione nell'unità di tempo della massa contenuta nel volume di controllo ed il flusso netto di massa uscente attraverso la superficie di contorno del volume di controllo (perché riferito alla faccia esterna). Fisicamente, l'equazione globale rappresenta pertanto il medesimo bilancio di massa impostato al §4.8.1, per derivare l'equazione indefinita di continuità: il flusso di massa netta entrante nel volume di controllo uguaglia la variazione nell'unità di tempo della massa contenuta in esso.

Nel caso di moto stazionario ( $\partial \rho / \partial t = 0$ ), risulta nullo, istante per istante, il flusso netto di massa attraverso la superficie di contorno del volume di controllo, essendo nullo l'integrale di volume.

Nel caso di fluido incompressibile ed isoterma, eseguendo l'integrazione sul volume di controllo della forma (123) dell'equazione di continuità, risulta nullo il flusso volumetrico netto istantaneo:

$$\int_{S_c} \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad .$$

A più forte ragione, alla stessa conclusione si perviene nel caso più restrittivo di fluido incompressibile, isoterma ed omogeneo ( $\rho = \text{cost}$ ), per semplificazione della forma generale dell'equazione globale (124).

Applicando l'equazione (124) al volume di controllo definito dal tubo di flusso di superficie laterale  $S_f$  e sezioni di estremità  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  di Figura 52, il flusso attraverso la superficie di contorno  $S_c$  si scrive come somma dei flussi attraverso le tre superfici in cui  $S_c$  può essere scomposto:

$$\int_{S_c} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS = \int_{\Omega_1} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS + \int_{\Omega_2} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_f} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS$$

in cui il terzo integrale a secondo membro è nullo per essere le velocità normali alla superficie laterale. Nel caso di moto stazionario l'equazione si riduce pertanto alla:

$$\int_{\Omega_1} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS + \int_{\Omega_2} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad .$$

Col che risultano uguali in modulo e di segno opposto, istante per istante, i flussi di massa attraverso le sezioni di estremità. Di più, se il fluido è incompressibile ed isoterma, anche in caso di moto vario, risultano uguali in modulo i flussi volumetrici (o portate) attraverso le due sezioni.

## CAPITOLO QUINTO

### 5. EQUAZIONI FONDAMENTALI DELLA DINAMICA DEI FLUIDI

#### 5.1 Generalità

L'idrodinamica studia il movimento dei fluidi in relazione alle cause che lo determinano. Come per il moto di un qualunque sistema meccanico, il moto dei fluidi si basa, oltre che sul principio di conservazione della massa utilizzato nell'idrocinematica, sui principi di *bilancio della quantità di moto* e di *bilancio del momento della quantità di moto*, espressi nel §1 rispettivamente dalle *equazioni cardinali del moto* (60) e (61) con riferimento a sistemi meccanici discreti, deducibili dalle leggi di Newton.

Nel caso dei sistemi continui, la quantità di moto di un volume elementare  $dV$  di massa  $dm = \rho dV$  animato dalla velocità  $\vec{u}$  è dato da:

$$d\vec{q} = \rho \vec{u} dV .$$

La quantità di moto di un volume materiale  $V_m$ , come precedentemente definito al § 4.7, è quindi data da:

$$\vec{q} = \int_{V_m} \rho \vec{u} dV .$$

Il principio di bilancio della quantità di moto afferma che la derivata lagrangiana (variazione nell'unità di tempo) della quantità di moto di un volume materiale è pari alla risultante delle forze esterne applicate al volume. Distinguendo tali forze nella risultante delle forze di volume:

$$\vec{G} = \int_{V_m} \rho \vec{f}_m dV$$

in cui  $\vec{f}_m$  è la forza agente sull'unità di massa, e nella risultante delle forze di superficie:

$$\vec{H} = \int_{S_m} \vec{\tau}_n dS ,$$

in cui  $S_m$  è la superficie di contorno del volume materiale e  $\vec{\tau}_n$  lo sforzo agente sull'elemento di superficie  $dS$  di normale  $\vec{n}$ , l'espressione di tale principio assume la forma (*prima equazione cardinale del moto*, § 1.3.5, eq. (60)):

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m} \rho \vec{u} dV = \int_{V_m} \rho \vec{f}_m dV + \int_{S_m} \vec{\tau}_n dS . \quad (125)$$

Analogamente, il principio di bilancio del momento della quantità di moto afferma che la derivata lagrangiana del momento della quantità di moto di un volume materiale valutato rispetto ad un qualunque punto dello spazio uguaglia il momento risultante delle forze esterne (*seconda equazione cardinale del moto*, § 1.3.5, eq. (61)):

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m} \vec{r} \times \rho \vec{u} dV = \int_{V_m} \vec{r} \times \rho \vec{f}_m dV + \int_{S_m} \vec{r} \times \vec{\tau}_n dS , \quad (126)$$

in cui  $\vec{r}$  è il raggio vettore congiungente il polo rispetto al quale si calcolano i momenti ed il punto generico del volume materiale o della sua superficie di contorno (vedi Figura 54).

Tali due principi fondamentali verranno utilizzati dapprima per dedurre le caratteristiche dello stato di sforzo in un punto nel caso generale di fluido in movimento, quindi per dedurre le equazioni che, più specificamente, governano il moto di una massa fluida, con particolare riferimento al caso dei fluidi newtoniani.

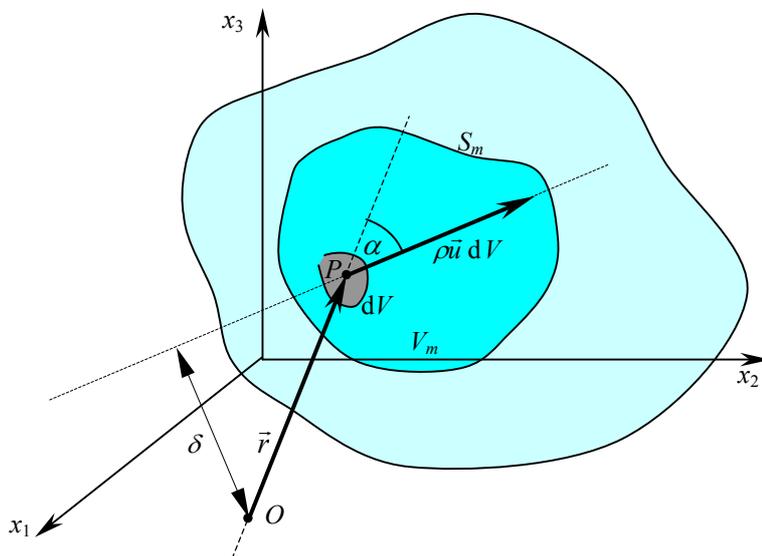


Figura 54. Schema di calcolo del momento della quantità di moto di un volume materiale.

## 5.2 Stato di sforzo in un punto. Teorema di Cauchy.

Nei capitoli precedenti si è visto come, in generale, lo stato di sforzo in un punto consista di  $\infty^2$  valori di tensione,  $\vec{\tau}_n$ , associati a tutte le possibili giaciture di superfici elementari contenenti il punto in esame. Inoltre, nel caso idrostatico, si è mostrato come lo stato di sforzo assuma caratteri di particolare semplicità, essendo costituito unicamente da una componente normale – la pressione – di valore indipendente dalla giacitura della superficie considerata:  $\vec{\tau}_n = -p\vec{n}$ .

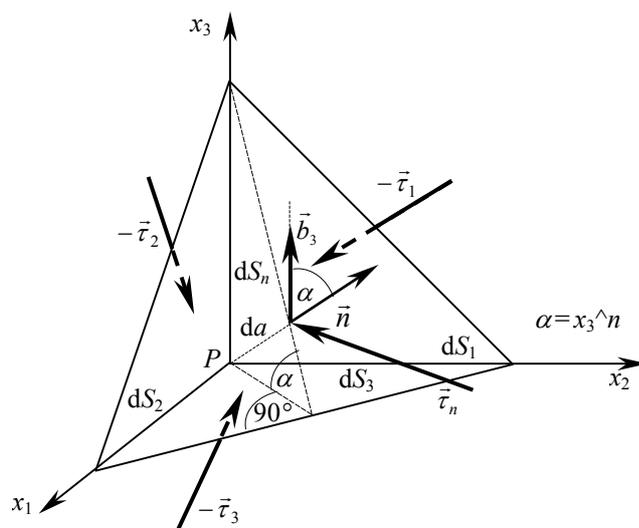


Figura 55. Tetraedro di Cauchy.

Nel caso generale di un fluido in movimento, la rappresentazione dello stato di sforzo in un punto si ottiene agevolmente applicando il principio di bilancio della quantità di moto ad un volume elementare tetraedrico, avente tre facce parallele ai piani coordinati e la quarta faccia posta alla distanza  $da$  dal punto comune alle prime tre, che viene per comodità assunto come origine del sistema di riferimento (*tetraedro di Cauchy*, vedi Figura 55). Si consideri la distanza caratteristica  $da$  tendente a zero per una generica giacitura della quarta faccia del tetraedro, individuata dalla sua normale  $\vec{n}$ , mantenuta costante nel limite per  $da \rightarrow 0$ . Le superfici delle facce del tetraedro contenute nei piani coordinati,  $dS_i$  ( $i=1,2,3$ ), e la superficie della quarta faccia del solido,  $dS_n$ , sono pertanto infinitesimi di ordine 2 rispetto alla dimensione caratteristica  $da$  ( $dS_i, dS_n = O(da^2)$ ), mentre il volume del tetraedro,  $dV = 1/3 da dS_n$ , risulta infinitesimo di ordine 3 ( $dV = O(da^3)$ ).

Per la proprietà additiva degli integrali (23), l'integrale di superficie che compare nella (125) è pari alla somma dei corrispondenti integrali estesi alle quattro facce del tetraedro. Avendo quest'ultimo dimensioni infinitesime, tanto le forze di superficie quanto le forze di volume (ivi inclusa la forza d'inerzia legata alla derivata lagrangiana della quantità di moto) risultano, a meno di termini infinitesimi, uniformemente distribuite sui rispettivi domini di integrazione e, pertanto, applicate nei relativi baricentri. Gli integrali possono quindi esprimersi, più semplicemente, come prodotto delle funzioni integrande per i corrispondenti domini di integrazione.

Indicati con  $\vec{\tau}_i$  gli sforzi agenti sulle facce delle superfici  $dS_i$  rivolte nel senso delle coordinate  $x_i$  crescenti, con  $-\vec{\tau}_i$ , per il principio di azione e reazione, gli sforzi agenti sul volume materiale attraverso le sue facce esterne ed osservato che, in virtù del principio di conservazione della massa, la massa del volume materiale,  $\rho dV$ , non varia nel tempo, la prima equazione cardinale del moto, eq. (125), può riscriversi nella forma:

$$\rho dV \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f}_m dV + \vec{\tau}_n dS_n - \vec{\tau}_i dS_i ,$$

nella quale la regola della sommatoria si applica ai termini delle forze di superficie legate alle superfici  $dS_i$ , in quanto  $i$  costituisce un pedice variabile, ma non al termine associato alla quarta faccia, il pedice  $n$  essendo identificativo di una fissata, ancorché generica, direzione.

Essendo la densità e l'accelerazione della particella e la forza di massa agente su di essa quantità finite nel limite per  $da \rightarrow 0$ , i termini proporzionali al volume  $dV$  risultano essi stessi infinitesimi di ordine superiore rispetto ai termini proporzionali alle aree delle quattro facce del tetraedro,  $dS_i$  e  $dS_n$  e pertanto trascurabili rispetto a questi ultimi. In definitiva, al limite per  $da \rightarrow 0$  devono farsi equilibrio le sole forze di superficie:

$$\vec{\tau}_n dS_n - \vec{\tau}_i dS_i = 0$$

e lo sforzo agente sulla faccia di normale  $\vec{n}$  può quindi esprimersi come:

$$\vec{\tau}_n = \frac{dS_i}{dS_n} \vec{\tau}_i .$$

L'angolo fra due piani è dato dall'angolo fra le due rette sezioni dei due piani con un terzo piano perpendicolare ad entrambi, indicate in tratteggio in Figura 55 con riferimento alle facce  $S_n$  ed  $S_3$  e ad un terzo piano appartenente alla stella di piani avente per asse l'asse coordinato  $x_3$ . L'angolo fra i piani contenenti le facce  $dS_n$  ed  $dS_i$  è inoltre uguale all'angolo  $(x_i \wedge n)$  fra le rispettive normali,  $\vec{n}$  e  $\vec{b}_i$ . La generica superficie  $dS_i$  è pertanto esprimibile come  $dS_i = dS_n \cos(x_i \wedge n) = dS_n n_i$ , avendo utilizzato il simbolo  $n_i$  per indicare i coseni direttori quali componenti della normale.

Lo sforzo agente sulla faccia di normale  $\vec{n}$  è quindi esprimibile come:

$$\vec{\tau}_n = \cos(x_i \wedge n) \vec{\tau}_i = n_i \vec{\tau}_i , \quad (127)$$

costituente l'espressione del *Teorema di Cauchy*.

Come richiamato al §1.2.3, tale relazione denota la natura tensoriale dello stato di sforzo in un punto. La relazione (127) è di importanza fondamentale in quanto consente di conoscere lo sforzo agente su una superficie elementare passante per un dato punto avente una qualunque delle  $\infty^2$  giaciture possibili, noti che siano i valori dello sforzo relativo alle tre giaciture dei piani coordinati. Come già si è avuto modo rilevare, in quanto esposto la scelta del sistema di riferimento è del tutto arbitraria; pertanto, lo stato di sforzo in un punto è pienamente conosciuto quando si conoscano gli sforzi corrispondenti a tre giaciture mutuamente ortogonali qualunque. Tali sforzi costituiscono le componenti vettoriali del  *tensore degli sforzi* , che indicheremo con il simbolo  $\underline{\underline{\tau}}$ <sup>33</sup>.

Ai fini dello sviluppo del discorso, si adotti d'ora in avanti il simbolo  $j$ , in luogo di  $i$ , per il pedice identificativo della normale al piano considerato e dello sforzo agente su di esso<sup>34</sup>:

$$\vec{\tau}_n = \cos(x_j \wedge n) \vec{\tau}_j = n_j \vec{\tau}_j .$$

Volendo conoscere le componenti scalari dello sforzo agente sulla faccia di normale  $\vec{n}$ , occorre proiettare lo sforzo  $\vec{\tau}_n$  nelle tre direzioni, mediante prodotto scalare con i versori degli assi. Detta  $\tau_{ij}$  la componente lungo l'asse  $i$  dello sforzo agente sulla faccia (interna) del tetraedro normale all'asse  $x_j$ , si ha quindi  $\tau_{ij} = \vec{\tau}_j \cdot \vec{b}_i$ . Le componenti scalari dello sforzo  $\vec{\tau}_n$  si ottengono pertanto dalla:

$$\tau_{in} = \vec{\tau}_n \cdot \vec{b}_i = n_j \vec{\tau}_j \cdot \vec{b}_i = \tau_{ij} n_j , \quad (128)$$

la quale rappresenta in forma scalare (e contratta mediante la regola della sommatoria) il risultato del seguente prodotto matrice per vettore (vedi §1.2.3):

$$\begin{pmatrix} \tau_{1n} \\ \tau_{2n} \\ \tau_{3n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11}n_1 + \tau_{12}n_2 + \tau_{13}n_3 \\ \tau_{21}n_1 + \tau_{22}n_2 + \tau_{23}n_3 \\ \tau_{31}n_1 + \tau_{32}n_2 + \tau_{33}n_3 \end{pmatrix} ,$$

ove la matrice quadrata a secondo membro è associata al tensore  $\underline{\underline{\tau}}$  e ne costituisce la rappresentazione in termini delle sue nove componenti scalari, le quali lo identificano compiutamente. I vettori colonna estraibili da tale matrice corrispondono alle componenti vettoriali del tensore,  $\vec{\tau}_j$ . La stessa operazione si esprime, nella notazione vettoriale:

$$\vec{\tau}_n = \underline{\underline{\tau}} \vec{n} , \quad (129)$$

la quale si scrive senza alcun segno di operazione fra i termini a secondo membro.

Oltre al già menzionato importante significato legato alla completa conoscibilità dello stato di sforzo in un punto sulla base della conoscenza di tre soli valori, la relazione (129) risulta utile nella deduzione di equazioni esprimenti il principio di bilancio della quantità di moto in forma integrale.

Nel caso idrostatico, l'analisi condotta nel §3.2 mediante applicazione della prima equazione cardinale della statica ad un prisma elementare aveva consentito di verificare che lo stato di sforzo è isotropo, caratterizzato cioè da un valore univoco della componente normale indipendente dalla

<sup>33</sup> Con l'unica differenza costituita dalla presenza del termine inerziale nella prima equazione cardinale del moto, il procedimento seguito è del tutto analogo a quello che, riferito alla prima equazione cardinale della statica, conduce nella Scienza delle Costruzioni al medesimo risultato.

<sup>34</sup> La precisazione è fatta per maggiore chiarezza. Si ricorda tuttavia come l'uso di un simbolo piuttosto che un altro per un pedice, come pure il cambio di tale simbolo nel corso degli sviluppi non debba costituire motivo di confusione, dovendosi prestare attenzione unicamente al fatto che un pedice sia ripetuto (nel qual caso si applica la regola della sommatoria) o meno (nel qual caso esso si intende rappresentare un valore generico e può pertanto assumerne uno particolare – 1, 2 o 3 – per volta).

giacitura considerata, cui era stato attribuito il nome di pressione,  $p$ . Introducendo il tensore (e corrispondente matrice associata) identità,  $\underline{\underline{I}}$  (§1.2.3), di componenti date dal *delta di Kronecker*,  $\delta_{ij}$  ( $\delta_{ij}=1$  per  $i=j$ ;  $\delta_{ij}=0$   $i \neq j$ ), per le convenzioni assunte (normale esterna e pressioni positive di compressione) il relativo tensore degli sforzi può essere rappresentato come:

$$\underline{\underline{\tau}} = -p\underline{\underline{I}} \equiv \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}, \quad (130)$$

di componenti:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij},$$

da cui, applicando la relazione (129), si ritrova l'espressione (81) dello stato di sforzo idrostatico.

Nel caso ideale di un fluido privo di viscosità (*fluido ideale o perfetto*<sup>35</sup>), per il quale risultano pertanto identicamente nulli gli sforzi tangenziali (§2.5.1), l'applicazione del principio di bilancio della quantità di moto (125) allo stesso prisma elementare considerato nel § 3.2 per l'analisi dello stato di sforzo in condizioni idrostatiche – per il quale, ancora, le forze di volume (comprendenti questa volta anche la forza d'inerzia) possono trascurarsi rispetto alle forze di superficie – conduce alle medesime condizioni di equilibrio delle sole forze di superficie e, quindi, alle medesime conclusioni: anche nel caso di un fluido ideale in movimento, lo stato di sforzo è isotropo, caratterizzato da un valore univoco di pressione, indipendente dalla giacitura considerata.

Nel caso del moto più generale possibile di un fluido reale, le tre componenti normali del tensore degli sforzi, corrispondenti agli elementi della diagonale della matrice associata, hanno invece, in generale, valori differenti.

### 5.3 Simmetria del tensore degli sforzi.

La rappresentazione dello stato di sforzo in un punto è suscettibile di ulteriore semplificazione mediante applicazione del principio di bilancio della quantità di moto.

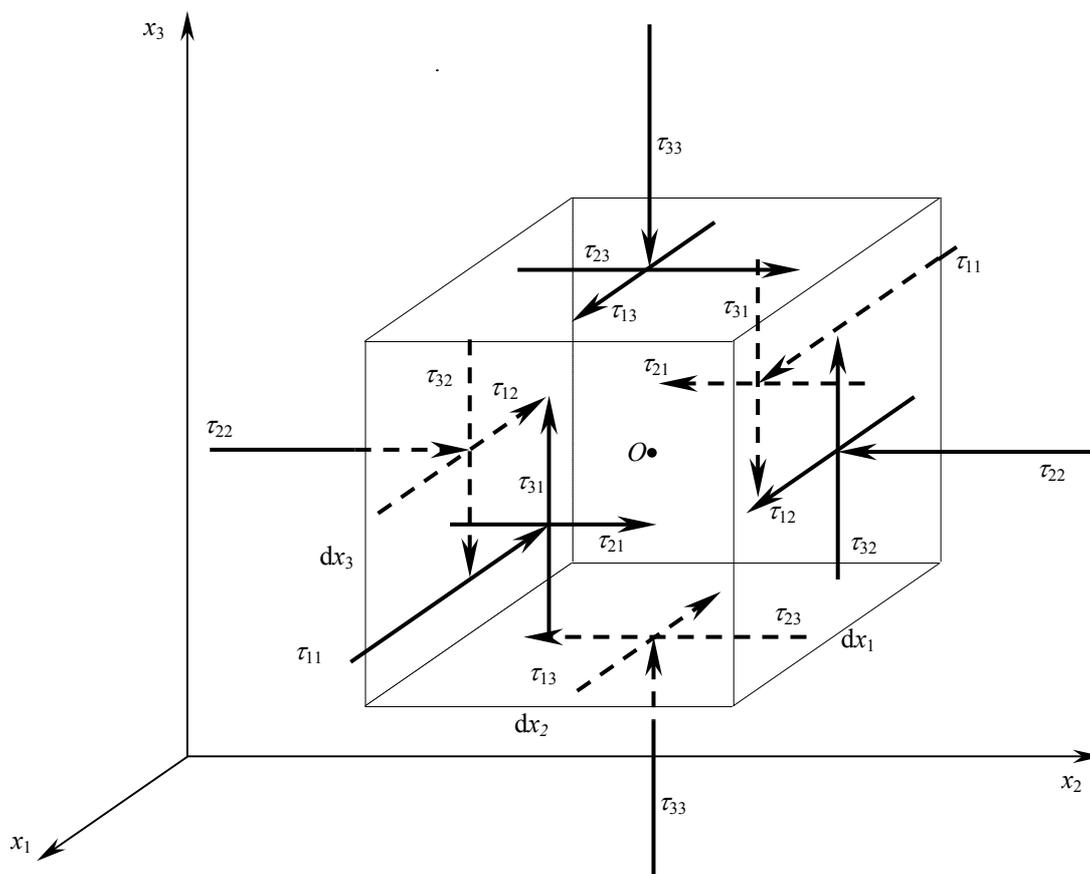
Si consideri il parallelepipedo di lati infinitesimi  $dx_1$ ,  $dx_2$  e  $dx_3$  riportato in Figura 56 ed i componenti degli sforzi agenti sulla sua superficie di contorno, i cui moduli sono pure indicati in figura. Con riferimento a tale volume, si scriva la seconda equazione cardinale del moto (126), facendo tendere a zero le dimensioni del prisma mantenendone invariati i rapporti  $dx_1 : dx_2 : dx_3$ . Analogamente a quanto osservato nella deduzione del teorema di Cauchy, i termini definiti come integrali di volume (momenti risultanti delle forze d'inerzia e delle forze di massa) risultano infinitesimi di ordine superiore rispetto al termine definito come integrale di superficie (momento risultante delle forze di superficie). Deve pertanto risultare nullo il momento risultante delle sole forze di superficie:

$$\int_{S_m} \vec{r} \times \vec{\tau}_n dS = 0.$$

Tale espressione vettoriale equivale a tre equazioni scalari esprimenti l'annullamento delle tre componenti del vettore momento delle forze di superficie. Ricordando che la scelta del polo per il calcolo dei momenti è del tutto arbitraria, e che, al limite per  $dx_i \rightarrow 0$ , a meno di termini infinitesimi i componenti di sforzo sono distribuiti uniformemente sulle facce del prisma e le rette d'azione delle corrispondenti forze elementari passano quindi per il baricentro della faccia su cui agiscono, assumendo come polo  $O$  per il calcolo dei momenti il baricentro del parallelepipedo, ciascuno dei

<sup>35</sup> La condizione è ideale sia nel senso di non rigorosamente verificabile in natura che nel senso di condizione desiderabile, in quanto da essa discende la conservazione dell'energia meccanica totale come conseguenza dell'assenza di dissipazioni interne al fluido, come si avrà modo di vedere nel prosieguo.

18 componenti delle forze elementari agenti sulle facce del parallelepipedo ha momento o nullo (è il caso dei componenti assiali, la cui retta d'azione passa per il polo  $O$ ) o parallelo ad uno dei tre assi coordinati (è il caso dei componenti tangenziali).



**Figura 56. Parallelepipedo elementare di fluido e componenti di sforzo agenti sulla sua superficie di contorno.**

Esprimendo l'annullamento di uno qualunque dei tre componenti del momento risultante senza introdurre alcuna ipotesi specifica relativamente alla direzione scelta, le conclusioni che verranno tratte saranno valide anche per le altre due direzioni coordinate.

I componenti delle forze agenti sulle facce del parallelepipedo che generano momenti diretti come l'asse  $x_1$  sono i componenti tangenziali contenuti su un piano parallelo al piano coordinato  $x_2x_3$  (normale ad  $x_1$ ), passante per il polo  $O$ , di moduli  $\tau_{23}dx_1dx_2$  e  $\tau_{32}dx_1dx_3$ . Per il principio di azione e reazione, a meno di termini infinitesimi, su facce parallele del parallelepipedo, in quanto poste a distanza infinitesima, agiranno sforzi uguali e contrari<sup>36</sup>. Le forze corrispondenti di moduli  $\tau_{23}dx_1dx_2$  e  $\tau_{32}dx_1dx_3$  costituiscono pertanto coppie aventi rispettivamente bracci  $dx_3$  e  $dx_2$  (vedi § 1.2.2 e 1.3.4.2). Assumendo positivi i momenti corrispondenti ad una rotazione antioraria delle forze (vettore momento rivolto concordemente all'asse  $x_1$ ), l'annullamento del componente del momento risultante diretto come l'asse  $x_1$  si scrive:

$$\tau_{32} dx_1 dx_3 \cdot dx_2 - \tau_{23} dx_1 dx_2 \cdot dx_3 = 0 ,$$

da cui, semplificando il termine comune costituito dal volume del parallelepipedo,  $dx_1 dx_2 dx_3$ :

<sup>36</sup> I termini infinitesimi per i quali gli sforzi agenti su facce parallele differiscono sono desumibili da uno sviluppo in serie arrestato al primo ordine. È facile mostrare che il contributo al momento risultante di coppie di tali termini infinitesimi relative a componenti di sforzi corrispondenti è rigorosamente nullo.

$$\tau_{32} = \tau_{23} .$$

Ripetendo lo stesso ragionamento per i componenti del momento risultante paralleli agli assi  $x_2$  e  $x_3$ , si perviene alla conclusione di carattere generale:

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} , \quad (131)$$

la quale esprime la simmetria del tensore delle tensioni. Conseguentemente, le componenti indipendenti incognite del tensore degli sforzi si riducono da nove a sei. Un altro aspetto importante del risultato ottenuto è che la considerazione della simmetria del tensore delle tensioni implica automaticamente il soddisfacimento del principio di bilancio del momento della quantità di moto, che non è quindi necessario esprimere esplicitamente nell'analisi dei fenomeni di moto.

#### 5.4 Equazione indefinita del moto.

L'applicazione del principio di bilancio della quantità di moto, equazione (125), al volume materiale parallelepipedo elementare riportato in Figura 57, consente di dedurre una equazione in forma locale detta *equazione indefinita del moto*.

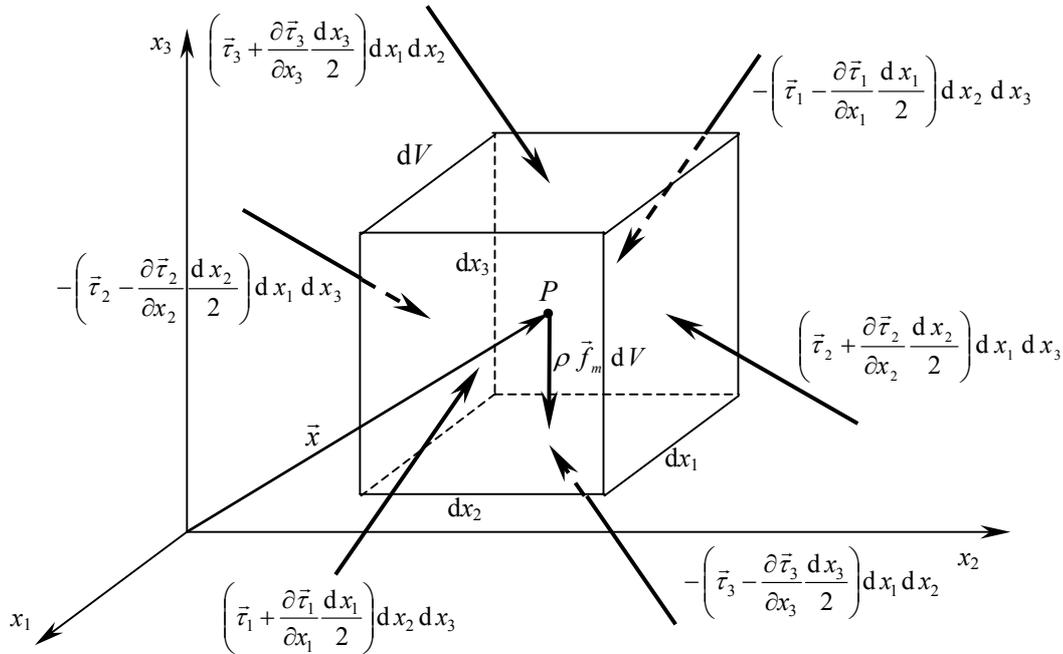


Figura 57. Schema di impostazione dell'equazione indefinita del moto.

Analogamente al caso della derivazione del teorema di Cauchy, §5.2, l'aver il volume materiale dimensioni infinitesime e l'essere, conseguentemente, tanto le forze di volume (ivi incluso il termine inerziale a primo membro della (125)) quanto le forze di superfici costanti, a meno di termini infinitesimi, sui rispettivi domini di integrazione, unitamente al principio di conservazione della massa, consente di formulare il principio di bilancio della quantità di moto nella forma:

$$\rho dV \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f}_m dV + d\vec{\Pi} , \quad (132)$$

in cui l'ultimo termine rappresenta il risultante delle forze di superficie. Il procedimento differisce, a questo punto, da quello che ha condotto alla formulazione del teorema di Cauchy, per il fatto di

avere considerato un volume materiale di forma parallelepipedica, anziché tetraedrica. Esprimendo gli sforzi agenti sulle facce del volume mediante sviluppo in serie rispetto ai corrispondenti valori esistenti nel baricentro del volume,  $P$ , individuato dal suo vettore posizione  $\bar{x}$  – in modo del tutto analogo a quanto fatto nella derivazione dell'equazione indefinita dell'idrostatica – si ottiene la seguente espressione del risultante delle forze di superficie:

$$\begin{aligned}
 d\vec{I} = & -\left(\bar{\tau}_1 - \frac{\partial \bar{\tau}_1}{\partial x_1} \frac{dx_1}{2}\right) dx_2 dx_3 + \left(\bar{\tau}_1 + \frac{\partial \bar{\tau}_1}{\partial x_1} \frac{dx_1}{2}\right) dx_2 dx_3 + \\
 & -\left(\bar{\tau}_2 - \frac{\partial \bar{\tau}_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{2}\right) dx_1 dx_3 + \left(\bar{\tau}_2 + \frac{\partial \bar{\tau}_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{2}\right) dx_1 dx_3 + \\
 & -\left(\bar{\tau}_3 - \frac{\partial \bar{\tau}_3}{\partial x_3} \frac{dx_3}{2}\right) dx_1 dx_2 + \left(\bar{\tau}_3 + \frac{\partial \bar{\tau}_3}{\partial x_3} \frac{dx_3}{2}\right) dx_1 dx_2 = \\
 & \left(\frac{\partial \bar{\tau}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{\tau}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{\tau}_3}{\partial x_3}\right) dx_1 dx_2 dx_3 = (\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}) dx_1 dx_2 dx_3
 \end{aligned} \tag{133}$$

in cui è stato introdotto il vettore divergenza del tensore degli sforzi<sup>37</sup> (vedi §1.2.4):

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} = \frac{\partial \bar{\tau}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{\tau}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{\tau}_3}{\partial x_3} ,$$

indicato con la medesima notazione utilizzata per la divergenza di un vettore.

Inserendo l'espressione del risultante delle forze di superficie nella (132) e semplificando il volume del parallelepipedo elementare, si perviene alla cercata equazione indefinita, talora identificata anche con il nome di *equazione di Cauchy*:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f}_m + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} , \tag{134}$$

esprimibile nella notazione per componenti:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_{mi} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} . \tag{135}$$

## 5.5 Legge costitutiva dei fluidi newtoniani.

Allo stato degli sviluppi fin qui conseguiti, il bilancio fra funzioni scalari incognite descrittive del moto di un fluido ed equazioni utilizzabili per la loro determinazione si riassume come segue:

Incognite		N°	Equazioni		N°
$\rho$	Densità	1	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0$	Eq. di continuità	1
$u_i$	Velocità	3	$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_{mi} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$	Eq. del moto	3
$\tau_{ij}$	Sforzi (linearmente indipendenti)	6			
Totale		10	Totale		4

<sup>37</sup> Si ricorda che, in generale, l'operatore divergenza applicato ad un tensore (in senso lato, §1.2.3) fornisce un tensore di ordine inferiore, mentre l'operatore gradiente fornisce un tensore di ordine superiore.

Avendosi dieci incognite e quattro equazioni, la possibilità di soluzione del problema rimane legata alla esistenza di ulteriori sei relazioni fra le variabili incognite.

Nel §2.5 si è trattato delle caratteristiche reologiche dei fluidi con riferimento all'esperimento, in certa misura ideale, di cui alla Figura 13 del §2.1, volto a mettere in luce il legame fra lo sforzo tangenziale agente sulle superfici contenenti il vettore velocità e la velocità di deformazione di volumi materiali individuabili all'interno della massa fluida in movimento. Su tale base, il comportamento reologico dei vari tipi di fluidi è stato ammesso rappresentabile in termini delle proprietà del coefficiente di viscosità dinamica  $\mu$ , definito dalla:

$$\tau = \mu \frac{d\theta}{dt} , \quad (74)$$

nella quale la derivata temporale dell'angolo  $\theta$  rappresenta la velocità di deformazione angolare dell'elemento materiale considerato.

In particolare, con riferimento alla (74) sono stati definiti newtoniani quei fluidi a comportamento indipendente dal tempo nei quali, inoltre, il coefficiente di viscosità non dipende dallo sforzo tangenziale e risulta pertanto costante per fissati valori di pressione e di temperatura.

Sebbene tale modalità di rappresentazione delle proprietà reologiche risulti efficace ai fini della caratterizzazione del comportamento dei vari tipi di fluidi (newtoniani e non newtoniani), la relazione (74) è pur tuttavia rappresentativa di un tipo di moto alquanto particolare: piano, unidirezionale e caratterizzato dall'assenza di variazioni volumetriche del fluido. Anche volendo limitare il discorso, come senz'altro verrà fatto, al caso dei fluidi newtoniani, il legame fra lo stato di sforzo e le caratteristiche di un campo di moto più generale (detto *legame* o *legge costitutiva*) non può essere ricompreso in una formula della semplicità della (74), dovendo rappresentare le sei componenti di sforzo indipendenti del tensore  $\underline{\underline{\tau}}$  e l'insieme dei gradi di libertà che concorrono alle modalità di deformazione di un volume materiale nelle tre dimensioni dello spazio, cui si è fatto cenno, seppure in maniera sintetica, nel § 4.4.

Rinunciando senz'altro ad una trattazione generale del problema della determinazione del legame costitutivo di un fluido newtoniano, per la quale il lettore interessato è rimandato ai riferimenti indicati in nota<sup>38</sup>, si intende qui presentare, in forma anche in parte euristica, e avvalendosi delle considerazioni presentate nel § 2.5, una giustificazione della forma che tale legame costitutivo assume nel caso di un fluido newtoniano incompressibile e isoterma, che costituirà il caso esclusivo nei problemi applicativi studiati nei capitoli successivi.

Essenzialmente, un fluido newtoniano è caratterizzato da un legame fra sforzi e velocità di deformazione lineare, isotropo – il cui comportamento sia cioè il medesimo lungo tutte le direzioni dello spazio – ed indipendente dal particolare sistema di riferimento adottato. Una ulteriore condizione che viene richiesta è che, nel caso idrostatico, il legame costitutivo si riduca alla forma isotropa<sup>39</sup> (81) o (130), caratterizzata da un valore univoco di sforzo: la pressione  $p$ . Si noti come tale ultima proprietà sia facilmente deducibile, come mostrato nel § 3.2, sulla base della sola ipotesi che, in condizioni di quiete, risultino nulli gli sforzi tangenziali – piuttosto naturale sulla base della nozione elementare di fluido comunemente posseduta, prima ancora che della conoscenza delle esperienze descritte nel § 2.5. Nel § 5.2 si è anche osservato come tale stato di sforzo sia sempre proprio di un fluido ideale, anche quando esso sia in movimento.

<sup>38</sup> Trattazioni più complete del problema della determinazione del legame costitutivo di un fluido newtoniano si trovano nel Marchi-Rubatta, nel Cenedese e nelle Dispense di Idraulica – C.A. Fassò. Tali trattazioni conducono a stabilire l'influenza di *due* coefficienti di viscosità. Tuttavia, nel caso degli aeriformi, nei quali, sperimentalmente, la velocità di variazione volumetrica è stata accertata indipendente dalla viscosità, il legame costitutivo dipende dal solo coefficiente di viscosità  $\mu$  fin qui considerato. Alla medesima conclusione si perviene per i liquidi, giacché per essi, in quanto praticamente incompressibili, la velocità di variazione volumetrica, e quindi il suo contributo allo stato di sforzo, risultano trascurabili. Tali considerazioni costituiscono solide giustificazioni della validità a scopi tecnici della caratterizzazione delle proprietà reologiche dei fluidi in termini dell'equazione (74).

<sup>39</sup> Non si confonda l'isotropia dello stato di sforzo idrostatico (cioè, del tensore delle tensioni) con l'isotropia del fluido (cioè, della *relazione* fra tensore delle tensioni e tensore delle velocità di deformazione)

Sulla base di tali considerazioni preliminari, lo stato di sforzo in un fluido in movimento, rappresentato dalla matrice delle nove componenti scalari del tensore  $\underline{\underline{\tau}}$ , può pensarsi come derivante dalla sovrapposizione di una parte statica e di una parte legata al movimento:

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{11} + p & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} + p & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} + p \end{pmatrix}. \quad (136)$$

Le rappresentazioni tensoriale e per componenti della decomposizione (136) sono rispettivamente:

$$\underline{\underline{\tau}} = -p\underline{\underline{I}} + (p\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}})$$

e:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + (p\delta_{ij} + \tau_{ij})$$

Il tensore rappresentativo della parte dinamica dello stato di sforzo è detto *deviatore*. Sulla base di tale decomposizione, si ricercano due relazioni che consentano di esprimere componente statica e componente dinamica, la seconda delle quali in funzione delle velocità di deformazione. Il deviatore differisce dal tensore  $\underline{\underline{\tau}}$  soltanto nei termini diagonali, relativi a sforzi normali. Pertanto, un legame per i termini tangenziali del deviatore è valido anche per i termini tangenziali di  $\underline{\underline{\tau}}$ .

Limitando il discorso, come s'è detto, al caso di fluidi incomprimibili (liquidi) ed isotermi, per quanto riguarda le componenti tangenziali degli sforzi si può argomentare nel modo seguente. Per uno stato di moto quale quello descritto nel § 2.2, la (74) si scrive, più specificamente:

$$\tau_{12} = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2}.$$

Per la simmetria del tensore degli sforzi, deve aversi anche:

$$\tau_{21} = \tau_{12} = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2}.$$

Nel caso in cui esista anche una variabilità della componente di velocità  $u_2$  in direzione  $x_1$ , il conseguente sforzo  $\mu \partial u_2 / \partial x_1$  dovrà aggiungersi alla componente  $\tau_{21}$  e, per la simmetria del tensore degli sforzi, anche alla componente  $\tau_{12}$ . La variabilità della componente  $u_3$ , come pure la variabilità di  $u_1$  e  $u_2$  lungo la direzione  $x_3$  non hanno invece influenza sulle componenti  $\tau_{12}$  e  $\tau_{21}$ , poiché relative a velocità di deformazione angolare riferite a rotazioni delle facce del parallelepipedo elementare attorno ad un asse parallelo all'asse  $x_3$ . Pertanto, per quanto riguarda le componenti tangenziali ( $i \neq j$ ), il legame costitutivo di un liquido isoterma può scriversi:

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Assumendo il medesimo legame lineare ed isotropo anche per i termini assiali del deviatore, il legame costitutivo cercato può scriversi, in forma completa, come:

$$\tau_{ij} + p\delta_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

ovvero:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (137)$$

corrispondente alla forma tensoriale:

$$\underline{\underline{\tau}} = -p\underline{\underline{I}} + 2\mu\underline{\underline{D}}, \quad (138)$$

in cui  $\underline{\underline{D}}$  è il tensore delle velocità di deformazione introdotto nel § 4.4.

Si osservi che, come richiesto, lo stato di sforzo si riduce ad uno isotropo (sferico) per i casi di fluido in quiete ( $\vec{u} \equiv 0$ ) o fluido ideale ( $\mu=0$ ). Inoltre, la pressione costituisce una incognita aggiuntiva del problema rispetto al bilancio incognite-equazioni delineato in precedenza.

Per il caso di cui alla Figura 13 trattato nel §2.1, in cui il moto si svolge unicamente in direzione dell'asse  $x_1$ , per la componente  $\tau_{12}$  si ottiene, dalla (137):

$$\tau_{12} = -p\delta_{12} + \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right),$$

da cui, essendo  $\delta_{12}=0$  ed  $u_2=0$  ovunque, si perviene alla (74):

$$\tau_{12} = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \mu \frac{d\theta}{dt},$$

in cui la seconda uguaglianza è stata dimostrata nel § 2.2.

La parte statica dello stato di sforzo,  $-p\delta_{ij}$ , è descritta da una equazione di stato, costituente un legame fra la pressione ed altre variabili termodinamiche rilevanti nel caso specifico in esame (vedi § 2.4); in particolare, possiamo qui limitarci a considerare la densità e la temperatura:

$$F(p, \rho, T) = 0.$$

Un noto esempio di equazione di stato è costituito, per gli aeriformi, dalla legge dei gas perfetti. Nel caso di un liquido – per definizione praticamente incompressibile – in condizioni isoterme, l'equazione si scrive nella forma più semplice possibile:

$$\rho = \text{cost}.$$

La legge costitutiva (137) o (138) determina un'importante proprietà della pressione, che finora, come s'è detto, ha svolto il ruolo di mera incognita ausiliaria, introdotta per la congruenza del legame costitutivo con le condizioni idrostatiche o di fluido ideale. Sommando membro a membro i termini diagonali ( $i=j$ ) della (137) e tenendo presente che, in un liquido isoterma, la somma dei termini diagonali (*traccia*) del tensore velocità di deformazione, pari alla divergenza del vettore velocità, risulta nulla per l'equazione di continuità (123), si ottiene:

$$p = -\frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\tau}}) = -\frac{\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}}{3} = -\frac{\tau_{ii}}{3}, \quad (139)$$

Poiché la traccia di un tensore è invariante per cambiamento di sistema di riferimento (da cui la denominazione alternativa di *invariante lineare* del tensore), l'espressione (139) indica che la pressione costituisce una grandezza intrinsecamente rappresentativa della componente idrostatica dello stato di sforzo in un punto.

In forza della simmetria del tensore degli sforzi, la (137) equivale a sei equazioni scalari indipendenti relative alle sei componenti indipendenti del tensore. Con le sei equazioni (137),

l'equazione di stato e l'introduzione della pressione come incognita aggiuntiva, il computo incognite scalari/equazioni si presenta ora in pareggio: undici equazioni (una equazione di continuità, tre equazioni del moto, sei equazioni indipendenti del legame costitutivo, una equazione di stato) per undici incognite (densità, pressione, tre componenti della velocità, sei componenti indipendenti del tensore degli sforzi). Il problema della determinazione del moto di una massa fluida è pertanto ora formalmente ben posto e risolvibile.

## 5.6 Equazione di Navier-Stokes

Ancorché formalmente ammessa dalla disponibilità di tante equazioni quante sono le incognite, la soluzione del problema rappresentato dalla determinazione del moto di una massa fluida si presenta tuttavia estremamente complessa per via dell'elevato numero di incognite. Inoltre, se l'aspetto di interesse è costituito dal solo campo di velocità, la determinazione dello stato di sforzo costituisce unicamente una scomoda necessità imposta dalle relazioni intercorrenti con le componenti della velocità. È pertanto di notevole interesse, anche pratico, determinare una forma dell'equazione del moto che, al contrario della equazione indefinita (134), non contenga esplicitamente gli sforzi come incognite. Tale equazione si determina in maniera agevole sostituendo agli sforzi contenuti nell'equazione indefinita del moto le relative espressioni fornite dal legame costitutivo, per il caso di fluido incomprimibile, isoterma ed omogeneo ( $\mu = \text{cost}$ ;  $\rho = \text{cost}$ ).

A tale scopo, conviene operare sulle forme per componenti scalari dell'equazione indefinita del moto, (135), e del legame costitutivo, (137). Si ottiene in tal modo, per la generica ( $i$ -esima) componente della velocità:

$$\rho \frac{D u_i}{D t} = \rho f_{mi} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \rho f_{mi} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ -p \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right],$$

il cui sviluppo si esegue osservando, innanzitutto, che, una volta sviluppata la derivata rispetto ad  $x_j$  dei singoli termini contenuti entro parentesi quadre, il pedice  $j$  risulta ripetuto in tutti i termini ed implica pertanto, sulla base della convenzione assunta per l'indicizzazione, la sommatoria delle grandezze sui tre valori  $j=1,2,3$ , conformemente al significato del termine  $\partial \tau_{ij}/\partial x_j$  così come dedotto dal procedimento esposto nel § 5.4.

Esaminiamo separatamente i vari termini. Per uno qualunque dei tre valori del pedice  $i$  si ha:

$$\frac{\partial (p \delta_{ij})}{\partial x_j} = \frac{\partial (p \delta_{i1})}{\partial x_1} + \frac{\partial (p \delta_{i2})}{\partial x_2} + \frac{\partial (p \delta_{i3})}{\partial x_3}.$$

Qualunque sia il valore di  $i$ , l'unico dei tre delta di Kronecker non nulli e pari all'unità sarà, per definizione, quello per cui  $i=j$ . L'unica delle tre derivate non nulla sarà quindi quella fatta rispetto alla  $x_j$  con  $j=i$ : ossia, la derivata fatta rispetto ad  $x_i$  della pressione, essendo il delta corrispondente unitario. Si ha quindi:

$$\frac{\partial (p \delta_{ij})}{\partial x_j} = \frac{\partial p}{\partial x_i}.$$

Si ha poi:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j},$$

in cui il secondo termine a secondo membro, per l'invertibilità dell'ordine di derivazione di funzioni regolari (§ 1.1.4), può scriversi come:

$$\mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} = \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} = \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) = 0 ,$$

per l'equazione di continuità (123).

Riordinando l'equazione indefinita del moto con gli sviluppi illustrati si ottiene quindi:

$$\rho \frac{D u_i}{D t} = \rho f_{m_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} , \quad (140)$$

costituente la forma per componenti della *equazione di Navier-Stokes* per un fluido incomprimibile, isoterma ed omogeneo.

Ricordando la definizione di gradiente di uno scalare (38), §1.2.4, ed introducendo il simbolo dell'*operatore di Laplace* (o *laplaciano*),  $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ , inteso come divergenza di un gradiente, per esprimere il termine viscoso<sup>40</sup>, l'equazione di Navier-Stokes si scrive nella sua forma vettoriale come:

$$\rho \frac{D \vec{u}}{D t} = \rho \vec{f}_m - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} , \quad (141)$$

ovvero, dividendo membro a membro per la densità ed introducendo la viscosità cinematica  $\nu$ :

$$\frac{D \vec{u}}{D t} = \vec{f}_m - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} .$$

Come casi particolari, si possono menzionare: il caso di un fluido soggetto unicamente alla forza peso fra le forze di massa,  $\vec{f}_m = -g \nabla z$  :

$$\frac{D \vec{u}}{D t} = -g \nabla z - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u}$$

e il caso di un fluido pesante ideale ( $\mu=0$ ), per il quale, utilizzando specificamente la condizione  $\rho = \text{cost}$  per fluido incomprimibile, isoterma ed omogeneo, si può scrivere:

$$\frac{D \vec{u}}{D t} = -g \nabla \left( z + \frac{p}{\rho g} \right) ,$$

equivalente alla *equazione di Eulero*.

Nel caso, abbastanza comune, di un fluido pesante, incomprimibile, isoterma ed omogeneo, il moto può studiarsi risolvendo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{D \vec{u}}{D t} = -g \nabla z - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0 \end{cases} ,$$

<sup>40</sup> Riguardo il laplaciano di un vettore, non interessa qui specificare che forma abbia il tensore gradiente di velocità ( $\nabla \vec{u}$ ), del quale prendere la divergenza ( $\nabla \cdot \nabla \vec{u}$ ). È sufficiente osservare che il vettore che ha  $\partial^2 u_i / \partial x_j \partial x_j$  (termine dell'equazione di Navier-Stokes) come componente scalare sull'asse  $x_i$  è dato da:

$$\vec{b}_1 (\partial^2 u_1 / \partial x_j \partial x_j) + \vec{b}_2 (\partial^2 u_2 / \partial x_j \partial x_j) + \vec{b}_3 (\partial^2 u_3 / \partial x_j \partial x_j) = \partial^2 (u_1 \vec{b}_1) / \partial x_j \partial x_j + \partial^2 (u_2 \vec{b}_2) / \partial x_j \partial x_j + \partial^2 (u_3 \vec{b}_3) / \partial x_j \partial x_j = \partial^2 (u_1 \vec{b}_1 + u_2 \vec{b}_2 + u_3 \vec{b}_3) / \partial x_j \partial x_j = \partial^2 \vec{u} / \partial x_j \partial x_j = \partial^2 \vec{u} / \partial x_1^2 + \partial^2 \vec{u} / \partial x_2^2 + \partial^2 \vec{u} / \partial x_3^2$$

ossia, da un termine simile, ma con il vettore velocità al posto della generica componente scalare  $u_i$ .

corrispondente a sole quattro equazioni scalari per le quattro incognite  $u_i, p$ .

Si osservi che, quand'anche fosse di interesse conoscere lo stato di sforzo all'interno della massa liquida, l'uso dell'equazione di Navier-Stokes risulta comunque più efficiente rispetto alla risoluzione delle undici equazioni originarie del problema generale, potendosi dapprima risolvere un numero ridotto di equazioni non comprendenti gli sforzi viscosi, deducibili successivamente dal legame costitutivo (138) sulla base dei campi di velocità e di pressione determinati.

## 5.7 Equazione globale del moto

Con procedimento del tutto analogo a quello utilizzato nel §3.4 per derivare l'equazione globale dell'idrostatica, si può pervenire ad una formulazione integrale del principio di bilancio della quantità di moto.

### 5.7.1 Forma generale

Una prima forma può dedursi integrando su un volume di controllo l'equazione indefinita del moto (134) o, per maggiore convenienza, la sua forma per componenti scalari (135), previo sviluppo della derivata lagrangiana della velocità mediante la relativa regola di derivazione (113):

$$\int_{V_c} \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dV = \int_{V_c} \left( \rho f_{m_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) dV . \quad (142)$$

Tenendo presente l'equazione di continuità (120) e lo sviluppo (8) della derivata di un prodotto di due funzioni, la funzione integranda dell'integrale a primo membro si sviluppa come segue:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} - u_i \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = \\ \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} &= \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} \end{aligned}$$

Utilizzando le formule di Gauss, il corrispondente integrale di volume si sviluppa nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \int_{V_c} \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dV &= \int_{V_c} \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} dV + \int_{V_c} \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} dV = \\ \int_{V_c} \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} dV + \int_{S_c} \rho u_i u_j \cos(x_j \wedge n) dS &= \int_{V_c} \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} dV + \int_{S_c} \rho u_i (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS \end{aligned}$$

in cui il primo integrale contiene la derivata euleriana della generica ( $i$ -esima) componente della quantità di moto per unità di volume; il secondo termine è la corrispondente componente del flusso di quantità di moto attraverso la superficie di contorno del volume di controllo,  $S_c$ , equazione (118). In termini vettoriali, le due quantità sono date da:

$$\begin{aligned} \vec{I} &= \int_{V_c} \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} dV \\ \vec{M} &= \int_{S_c} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS \end{aligned}$$

Entrambe le grandezze sono di origine inerziale, perché derivanti dall'accelerazione lagrangiana presente nella (134). Esprimendo la variazione temporale della quantità di moto contenuta nel

volume di controllo mediante una derivata euleriana, o locale, al termine  $\vec{I}$  viene dato il nome di *inerzia locale*<sup>41</sup>.

Utilizzando ancora le formule di Gauss e tenendo presente l'espressione (128) delle componenti dello sforzo in un punto in termini delle componenti del tensore degli sforzi, il secondo membro della (142) si sviluppa come segue:

$$\int_{V_c} \rho f_{m_i} dV + \int_{V_c} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dV = \int_{V_c} \rho f_{m_i} dV + \int_{S_c} \tau_{ij} \cos(x_j \wedge n) dS = \int_{V_c} \rho f_{m_i} dV + \int_{S_c} \tau_{in} dS ,$$

di cui il primo integrale rappresenta la generica componente del risultante delle forze di massa; il secondo, la corrispondente componente del risultante delle forze esercitate sulla superficie di contorno del volume di controllo. In termini vettoriali, le due quantità sono date da:

$$\vec{G} = \int_{V_c} \rho \vec{f}_m dV$$

$$\vec{H} = \int_{S_c} \vec{\tau}_n dS$$

Nel caso le forze di massa siano date unicamente dalla forza peso,  $f_m = -g\nabla z$ ,  $\vec{G}$  non rappresenta altro che il peso del fluido contenuto nel volume di controllo.

L'equazione globale del moto, o dell'equilibrio dinamico, o del bilancio di quantità di moto, si scrive pertanto nella forma generale<sup>42</sup>:

$$\vec{I} + \vec{M} = \vec{G} + \vec{H} . \quad (143)$$

Nel caso particolare di fluido in quiete, la (143) si riduce, com'era logico attendersi, all'equazione globale dell'idrostatica (87).

L'equazione globale del moto consente di determinare le spinte esercitate da fluidi in movimento in modo particolarmente efficiente, in quanto tipicamente non è richiesta, a tal fine, la determinazione della distribuzione degli sforzi sulla superficie premuta, sia essa piana o gobba, ma soltanto su superfici per le quali, come si vedrà nel prosieguo, la determinazione degli sforzi risulta del tutto agevole. Inoltre, come già osservato a proposito dell'equazione globale dell'idrostatica, la formulazione integrale rende le equazioni globali suscettibili di applicazione anche a casi caratterizzati da discontinuità della distribuzione delle grandezze.

### 5.7.2 Forma per un fluido viscoso

Una forma alternativa dell'equazione globale può ottenersi a partire dall'equazione di Navier-Stokes, in modo da distinguere, fra le forze di superficie, le componenti dovute alle forze di pressione ed alle forze viscosi.

I termini di inerzia locale, flusso di quantità di moto e risultante delle forze di massa rimangono inalterati rispetto alle espressioni derivate per la forma (143) dell'equazione globale. Si tratta pertanto di sviluppare l'integrale di volume:

$$\int_{V_c} \left( -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) dV$$

facendo uso, ancora, delle formule di Gauss. Si ottiene così:

<sup>41</sup> Nel Citrini lo stesso simbolo è utilizzato per identificare la stessa grandezza cambiata di segno, ossia, più propriamente, una forza d'inerzia (vedi §0).

<sup>42</sup> La differente forma generale dell'equazione globale del moto riportata nel Citrini deriva, oltre che dalla differente definizione del termine di inerzia locale  $\vec{I}$ , dall'adozione della convenzione di normale interna. Anche nel Marchi-Rubatta il flusso di quantità di moto è ottenuto sotto la convenzione di normale interna.

$$\int_{V_c} \left( -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) dV = -\int_{V_c} \frac{\partial p}{\partial x_i} dV + \mu \int_{V_c} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dV =$$

$$-\int_{S_c} p \cos(x_i \wedge n) dS + \mu \int_{S_c} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cos(x_j \wedge n) dS = -\int_{S_c} p n_i dS + \mu \int_{S_c} \frac{\partial u_i}{\partial n} dS$$

ove il primo integrale a ultimo membro rappresenta la componente lungo l'asse  $x_i$  del risultante delle sole forze di pressione, mentre il secondo, dedotto sulla base dell'espressione (19) della derivata di una funzione lungo una direzione generica, rappresenta il risultante delle sole forze di origine viscosa.

In termini vettoriali si ha quindi<sup>43</sup>:

$$\int_{V_c} (-\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u}) dV = \int_{S_c} -p \vec{n} dS + \mu \int_{S_c} \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} dS = \vec{\Pi}_p + \vec{\Pi}_\mu.$$

La corrispondente forma dell'equazione globale si scrive pertanto:

$$\vec{I} + \vec{M} = \vec{G} + \vec{\Pi}_p + \vec{\Pi}_\mu. \quad (144)$$

### 5.8 Analisi locale del moto di una particella lungo la sua traiettoria

Le accelerazioni di una particella fluida lungo la propria traiettoria possono essere convenientemente analizzate con riferimento ai risultati ottenuti, nella Meccanica Razionale, per il moto di un punto materiale (richiamati al §1.3.3), al fine di ricavare importanti risultati di interesse specifico nello studio del moto dei fluidi.

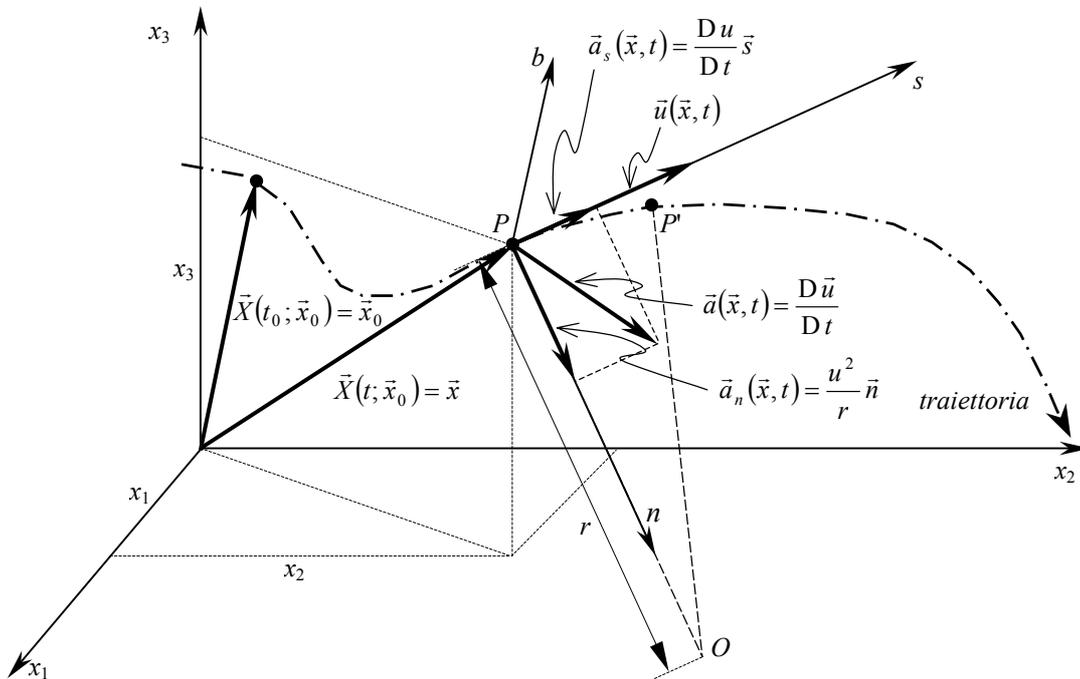


Figura 58. Terna intrinseca alla traiettoria di una particella in un punto.

<sup>43</sup> Anche in questo caso, nel Citrini e nel Marchi-Rubatta i due termini hanno segni opposti perché dedotti con riferimento alla normale interna anziché esterna.

Con riferimento allo schema di Figura 58, l'accelerazione di una particella in una data posizione  $P$  lungo la sua traiettoria risulta contenuta nel *piano osculatore del moto*, contenente la tangente alla traiettoria nel punto  $P$  ed il centro di curvatura locale  $O$  della traiettoria, punto di intersezione delle normali alla traiettoria nei punti  $P$  e  $P'$ , nel limite per  $\Delta t \rightarrow 0$  considerato per la definizione della velocità e dell'accelerazione nel punto (Figura 47 ed equazioni (109) e (112) rispettivamente). Il segmento  $\overline{OP}$  di lunghezza  $r$ , normale alla tangente alla traiettoria, rappresenta il *raggio di curvatura locale*. Ai fini dell'analisi locale del moto è pertanto conveniente riferirsi alla *terna intrinseca al moto*, avente origine in  $P$  e formata, nell'ordine, da un primo asse  $s$  di versore  $\vec{s}$  parallelo ed equiverso al vettore velocità (*tangente*, in quanto tangente alla traiettoria come osservato al §4.2), da un secondo asse  $n$  (versore  $\vec{n}$ ) rivolto verso il centro di curvatura (*normale interna*) e da un terzo asse  $b$  perpendicolare ai primi due (*binormale*), costituente una terna destra (ovvero, tangente, normale e binormale sono posti rispettivamente come gli assi  $x_1, x_2$  e  $x_3$  dei sistemi di riferimento considerati sinora). Per quanto detto, la tangente e la normale giacciono sul piano osculatore del moto; la normale e la binormale giacciono invece sul piano normale al vettore velocità nel punto  $P$ .

Le componenti scalari dell'accelerazione lungo gli assi della terna intrinseca sono date da:

$$\begin{aligned} a_s &= \frac{Du}{Dt} \\ a_n &= \frac{u^2}{r} \quad , \\ a_b &= 0 \end{aligned} \quad (46)$$

in cui  $u = |\vec{u}|$  è il modulo della velocità nel punto  $P$  e la componente dell'accelerazione lungo la normale interna è necessariamente sempre positiva. Conseguenza di ciò che il corrispondente componente vettoriale dell'accelerazione è sempre rivolto verso il centro di curvatura (*accelerazione centripeta*). Inoltre, trattandosi dell'analisi del moto di una particella di un mezzo continuo piuttosto che di un corpo isolato, la derivata temporale che compare nell'espressione della componente tangenziale è stata specificamente indicata come derivata lagrangiana.

Con riferimento al caso di un fluido pesante, incomprimibile, isoterma ed omogeneo, tali espressioni possono essere uguagliate alle corrispondenti espressioni ricavate proiettando sugli assi della terna intrinseca la forma che l'equazione di Navier-Stokes assume per il tipo di fluido considerato:

$$-\frac{1}{g} \frac{D\vec{u}}{Dt} = \nabla \left( z + \frac{p}{\rho g} \right) - \frac{\nu}{g} \nabla^2 \vec{u} \quad .$$

Ricordando che le componenti del gradiente di una funzione scalare (nel caso specifico, la quota piezometrica  $h = z + p/\gamma$ ) sono le derivate parziali della funzione rispetto agli assi corrispondenti (eq. (38), § 1.2.4), si ottiene:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{g} \frac{Du}{Dt} &= \frac{\partial h}{\partial s} - \frac{\nu}{g} (\nabla^2 \vec{u})_s \\ -\frac{1}{g} \frac{u^2}{r} &= \frac{\partial h}{\partial n} - \frac{\nu}{g} (\nabla^2 \vec{u})_n \quad . \\ 0 &= \frac{\partial h}{\partial b} - \frac{\nu}{g} (\nabla^2 \vec{u})_b \end{aligned} \quad (145)$$

### 5.8.1 Distribuzione della quota piezometrica nel piano normale alla traiettoria

Nel caso di un fluido ideale ( $\nu=0$ ), Per il quale si annullano i termini contenenti la viscosità cinematica, in forza della seconda delle equazioni (145), nel caso in cui la traiettoria abbia raggio di curvatura  $r$  abbastanza grande (e sia quindi piccola la sua curvatura), ad uno spostamento elementare nella direzione della normale corrisponderebbe una variazione della quota piezometrica trascurabile rispetto alla posizione iniziale. Ad uno spostamento in direzione della binormale corrisponderebbe invece una variazione identicamente nulla della quota piezometrica. Pertanto, per uno spostamento elementare sul piano normale alla velocità locale, contenente la normale interna e la binormale, la corrispondente variazione di quota piezometrica, data dal differenziale:

$$dh = \frac{\partial h}{\partial n} dn + \frac{\partial h}{\partial b} db$$

risulterebbe pure trascurabile. In tale intorno piano del punto  $P$  si avrebbe pertanto una distribuzione della pressione che, essendo caratterizzata da un valore costante della quota piezometrica, sarebbe identica a quella vigente in una massa liquida in equilibrio idrostatico (Legge di Stevin, eq (88)).

Considerando la superficie di estensione finita contenente il punto  $P$ , punto per punto normale al vettore velocità (*sezione normale*) ed attraversata da traiettorie tutte aventi raggio di curvatura abbastanza elevato, anche su tale sezione normale si avrebbe una distribuzione di pressione idrostatica. In generale, tale sezione normale può essere gobba.

Per la singola traiettoria, la distribuzione di pressione locale nel piano normale sarebbe rigorosamente identica a quella idrostatica in caso di traiettoria localmente rettilinea, ossia, a raggio di curvatura infinito (curvatura nulla). Se, inoltre, l'intero flusso fosse caratterizzato da traiettorie tutte rettilinee e parallele fra loro (moto uniforme), si avrebbe un valore costante della quota piezometrica sull'intera sezione normale, la quale sarebbe in tal caso piana.

### 5.8.2 Teorema di Bernoulli

La prima delle (145) può svilupparsi mediante la regola di derivazione lagrangiana (111), tenendo presente che, nella terna intrinseca, l'unica delle tre componenti della velocità non nulla è quella lungo la tangente, coincidente con il modulo  $u$  della velocità. Il primo membro può quindi scriversi:

$$-\frac{1}{g} \frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{g} u \frac{\partial u}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial(u^2/2g)}{\partial s},$$

da cui, raccogliendo tutti i termini derivati rispetto alla coordinata tangenziale  $s$  sotto un unico segno e rielaborando, si ottiene:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left( z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) - \frac{\nu}{g} (\nabla^2 \vec{u})_s = 0. \quad (146)$$

La quantità  $z + p/\gamma + u^2/2g$  è detta *carico totale* e viene usualmente indicata con il simbolo  $H$ . Si è mostrato nel §3.5 che la quota piezometrica  $h = z + p/\gamma$  rappresenta un'energia potenziale totale (somma dell'energia del campo delle forze peso e dell'energia di pressione) per unità di peso di liquido (fluido incompressibile). Dato un volume  $V$  di liquido di densità  $\rho$ , peso specifico  $\gamma = \rho g$ , massa  $\rho V$  e peso  $\gamma V$ , in moto traslatorio con la velocità  $u$ , la sua energia cinetica è data da:

$$E_c = \frac{1}{2} mu^2 = \frac{1}{2} \rho V u^2 = \gamma V \frac{u^2}{2g}.$$

Pertanto, il terzo termine del carico totale rappresenta l'energia cinetica per unità di peso di liquido (conclusione analoga si era tratta nel §1 per il caso di un punto materiale, equazione (67)). Il carico totale  $H$  rappresenta quindi *l'energia meccanica totale per unità di peso di liquido*.

La (146) descrive la variazione del carico totale lungo la traiettoria della particella di un liquido viscoso, percorsa in moto vario. Nel caso del moto stazionario ( $\partial u/\partial t = 0$ ) di una particella di un liquido ideale ( $\nu = 0$ ), la (146) si riduce alla relazione:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) = 0 ,$$

la quale esprime che il carico totale di una particella di un liquido ideale in moto stazionario si mantiene costante lungo la traiettoria (che in tal caso coincide con una linea di corrente, vedi §4.6), costituente l'enunciato del celebre *Teorema o Legge di Bernoulli*:

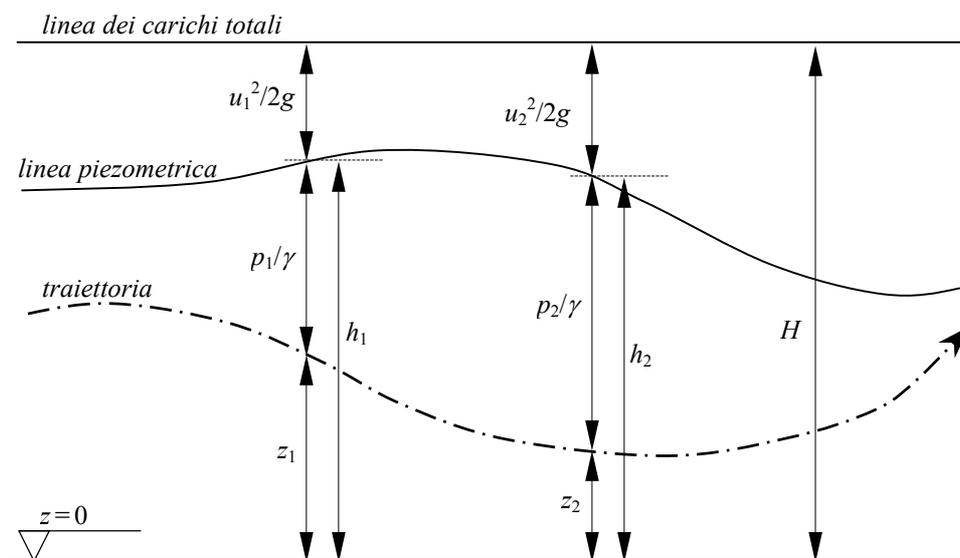
$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = \text{cost} . \quad (147)$$

Il carico totale prende perciò anche il nome di *trinomio di Bernoulli*. Essendo il carico totale, come le grandezze che lo compongono, una lunghezza, si può dare del teorema di Bernoulli la rappresentazione grafica presentata in Figura 59.

Si definiscono *linea piezometrica* e *linea dei carichi totali* di una particella le curve dello spazio luogo dei punti posti sulla verticale dei punti della traiettoria della particella, aventi quote pari rispettivamente alla quota piezometrica ed al carico totale della particella. A norma del teorema di Bernoulli, la quota della linea dei carichi totali rimane costante. In particolare, nel caso di una traiettoria orizzontale ( $z = \text{cost}$ ), ad un aumento della velocità della particella deve corrispondere una diminuzione della pressione (*effetto Venturi*).

Nel caso del moto di un fluido viscoso in regime stazionario, la variazione del carico totale lungo la traiettoria è descritta dalla:

$$\frac{\partial H}{\partial s} = \frac{\nu}{g} (\nabla^2 \bar{u})_s . \quad (148)$$



**Figura 59. Rappresentazione grafica del teorema di Bernoulli.**

In particolare, nel caso del moto uniforme in un condotto a sezione costante di cui alla Figura 60 – caso abbastanza ricorrente nelle applicazioni – nel quale le traiettorie sono tutte rettilinee e

parallele all'asse del condotto, i centri di curvatura locali di tutte le traiettorie sono, ovunque, indeterminati, perché posti all'infinito; conseguentemente, gli assi normale e binormale della terna intrinseca possono essere scelti arbitrariamente e, pertanto, anche tutti paralleli in tutti i punti della massa liquida. Essendo perciò costanti i versori degli assi di tutte le terne intrinseche, è agevole dedurre il segno del termine viscoso. Si ha infatti:

$$(\nabla^2 \vec{u})_s = \vec{i}_s \cdot \nabla^2 (u \vec{i}_s) = \vec{i}_s \cdot \vec{i}_s \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial b^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial b^2}$$

perché  $\partial u / \partial s = 0$  identicamente per particelle animate da moto rettilineo uniforme, da cui anche  $\partial^2 u / \partial s^2 = 0$ .

Poiché vige la condizione di aderenza del liquido alle pareti del condotto, il solido delle velocità (rappresentazione geometrica dell'insieme dei vettori velocità nella sezione della condotta) è un solido di rotazione (a simmetria assiale) che rivolge la propria convessità nella direzione del moto. La medesima proprietà vale anche, pertanto, per qualunque sezione della superficie del solido fatta con piani paralleli all'asse della condotta (due esempi sono riportati in Figura 60: uno per il punto  $P$  della sezione sull'asse; un altro per un punto  $Q$  generico). In particolare, le sezioni con i piani  $sn$  ed  $sb$  forniscono i profili di velocità lungo  $n$  e  $b$  rispettivamente. Poiché tali profili rivolgono la convessità nel senso del moto, la derivata seconda delle corrispondenti funzioni  $u(n)$  e  $u(b)$  è negativa (vedi §1.1.1). Risulta pertanto negativo, per tutte le particelle, il termine a secondo membro della (148), il che denota la sistematica diminuzione dell'energia (*perdita di carico*) delle particelle – così come, evidentemente, del flusso nel suo complesso – nel senso del moto.

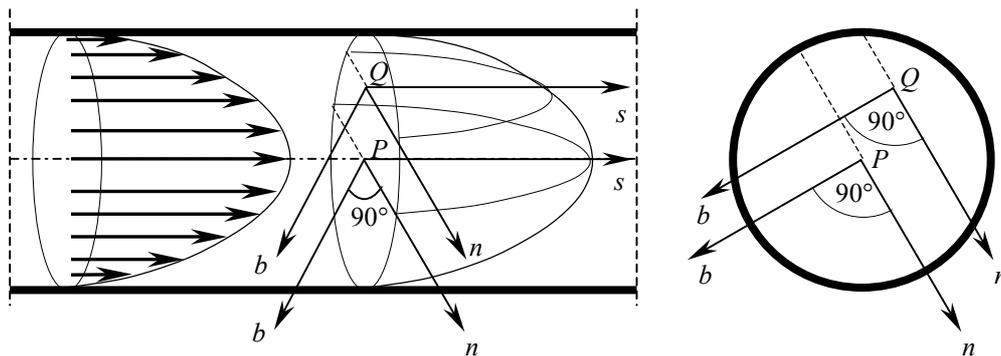


Figura 60. Terne intrinseche alle traiettorie nel moto uniforme.

Si è menzionato in precedenza come l'ipotesi di fluido non viscoso sia, in termini assoluti, non riscontrabile nella realtà. Tuttavia, l'applicabilità di tale schematizzazione per la soluzione di problemi pratici può giustificarsi con le specifiche caratteristiche del problema in studio. Integrando la (148) fra due punti della traiettoria,  $P_1$  e  $P_2$ , si ottiene infatti la relazione:

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial H}{\partial s} ds = H_2 - H_1 = \int_{s_1}^{s_2} \frac{v}{g} (\nabla^2 \vec{u})_s ds ,$$

la quale denota come un aspetto importante nella valutazione della applicabilità dell'ipotesi di fluido non viscoso all'analisi di un dato problema di flusso sia legato, fra gli altri, allo sviluppo del tratto di traiettoria considerato, la differenza di carico totale agli estremi del tratto essendo tanto minore quanto minore è tale sviluppo.

L'ipotesi di fluido ideale è pertanto accettabile per descrivere, per esempio, fenomeni quali i processi di efflusso da *luci* (aperture praticate sulle pareti di serbatoi o contenitori), ove le distanze caratteristiche  $L$  da considerare sono dell'ordine dei metri (vedi Figura 61a), eventualmente apportando alle formule che possono in tal modo facilmente dedursi, correzioni, peraltro di modesta entità, determinate sperimentalmente. Di tali applicazioni del teorema di Bernoulli si

tratterà nel capitolo 10, dedicato alla branca dell'Idraulica che si occupa dello studio di tali fenomeni di efflusso (*Foronomia*).

L'ipotesi di liquido perfetto non è invece appropriata nel caso della condotta di adduzione idrica rappresentata in Figura 61b, ove l'azione delle forze viscosse si esplica su lunghezze caratteristiche dell'ordine, grosso modo, variabile dalle centinaia di metri alle decine di chilometri.

Il problema della valutazione delle dissipazioni energetiche (perdite di carico) in una massa fluida in movimento verrà approfondito con riferimento alle correnti nei successivi capitoli 6 e 7.

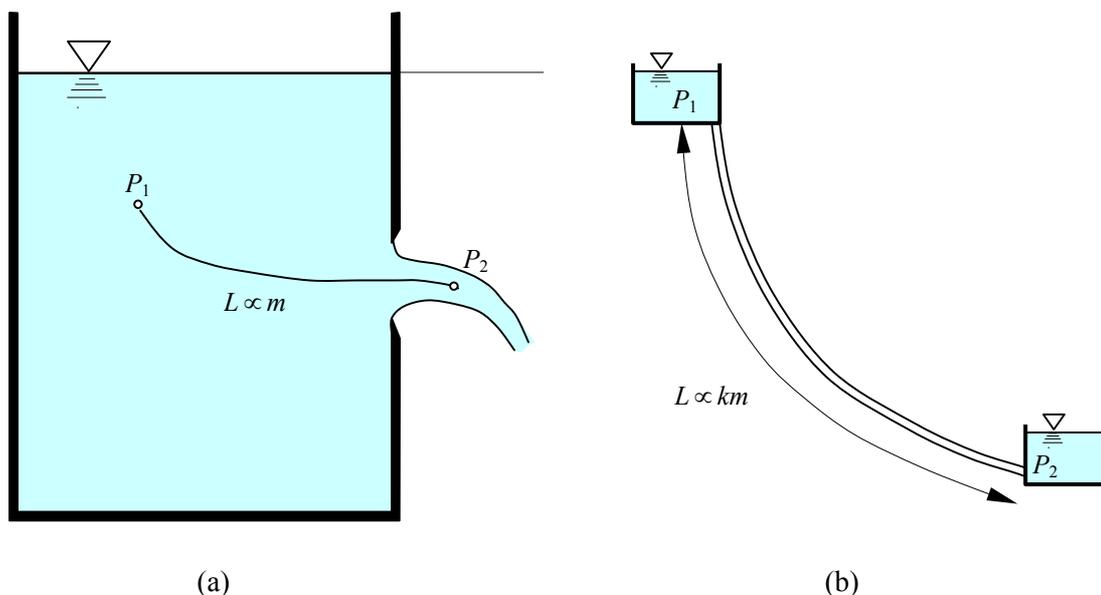


Figura 61. (a) efflusso da luce in parete sottile; (b) condotta di adduzione idrica.

## 5.9 Turbolenza

Nell'accezione usuale dell'Idraulica, il moto uniforme di una massa fluida è stato definito nel §4.5 come un flusso in cui tutte le particelle si muovono di moto rettilineo e uniforme. Come esempio notevole di tale tipo di moto è stato indicato il flusso in una normale tubazione a sezione costante. Tuttavia, il verificarsi di tale tipo di moto in un condotto siffatto non è affatto scontato: è, anzi, alquanto improbabile nel caso del moto dell'acqua in tubazioni acquedottistiche, come anche in canali a pelo libero – tanto per citare due esempi applicativi abbastanza comuni – per effetto dell'insorgenza di fenomeni di instabilità del flusso, identificati con il termine "turbolenza", che vengono illustrati ed analizzati nei loro aspetti essenziali nei paragrafi successivi.

### 5.9.1 Evidenze sperimentali

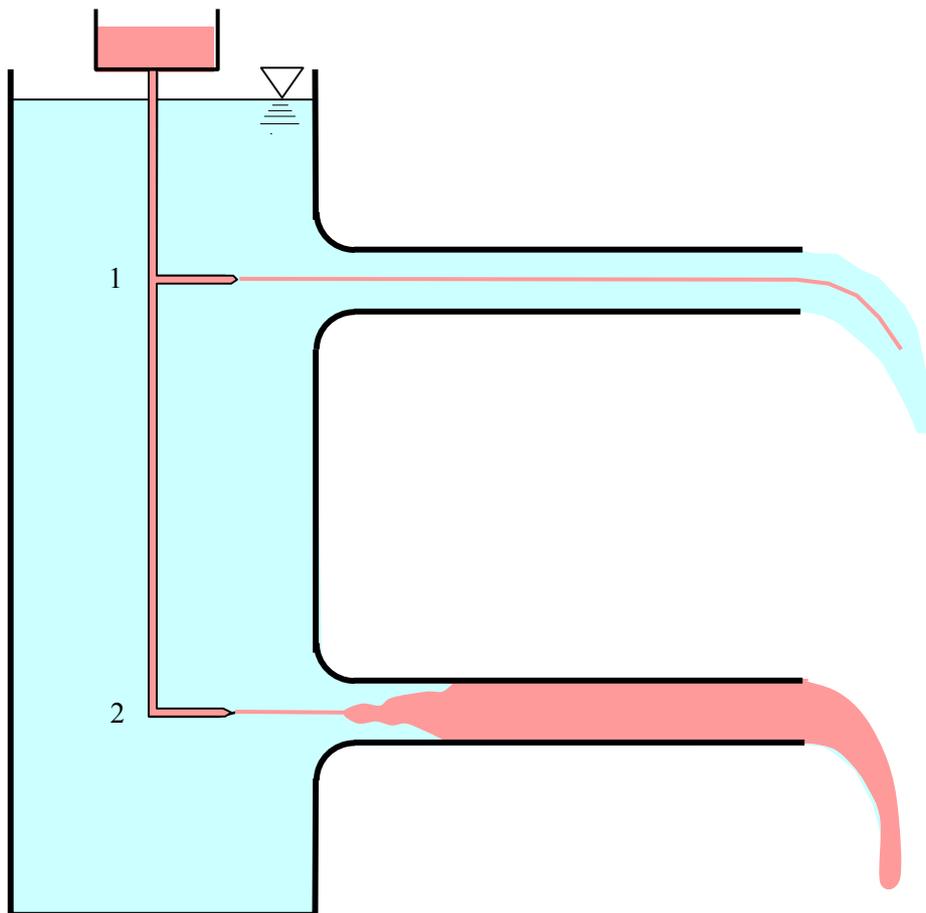
Da un punto di vista sperimentale, il verificarsi del moto uniforme come precedentemente definito implicherebbe il fatto che, iniettando continuamente del colorante in un certo punto di un liquido fluente in una tubazione di vetro il colorante descriva, al trascorrere del tempo, un tracciato rettilineo ben definito, dato dalla linea di fumo associata al punto di iniezione del colorante. Ciò è quanto accade, nella versione idealizzata dell'esperienza di Reynolds rappresentata in Figura 62, per iniezione del colorante nel punto 1. Essendo il moto stazionario, tale linea di fumo coincide con la traiettoria comune alle particelle che, in tempi successivi, sono passate per il punto di iniezione (vedi §4.6). Tale comportamento denota la mancanza di mescolamento delle particelle che seguono la medesima traiettoria con il liquido circostante, e quindi della massa liquida nel suo complesso. Il regime di moto caratterizzato dal tipo di comportamento testé descritto prende il nome di regime *laminare* o *regolare*. Una ulteriore caratteristica del regime laminare è costituita dal fatto che eventuali perturbazioni indotte in punti della massa liquida tendono progressivamente ad attenuarsi nel senso del moto, fino a scomparire.

Eseguendo l'esperimento di cui sopra con un liquido di assegnate viscosità  $\mu$  e densità  $\rho$  in una tubazione a sezione circolare di diametro  $D$ , il regime di moto laminare si osserva fino a valori dell'ordine di circa 2000 del parametro adimensionale, detto *numero di Reynolds*:

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu} = \frac{U D}{\nu}, \quad (149)$$

in cui  $U = Q/\Omega$ , con  $\Omega = \pi D^2/4$  area della sezione circolare del tubo, è la *velocità media* del flusso.

Per valori del numero di Reynolds superiori (cioè, per velocità medie maggiori di un dato liquido fluente in una tubazione di dato diametro), i filetti fluidi colorati presentano dapprima un andamento fluttuante, segnale di una condizione di instabilità del flusso. Ad ulteriori aumenti del numero di Reynolds, corrispondono movimenti sempre più irregolari dei filetti fluidi, caratterizzati da spostamenti, ondulazioni e contorsioni di ampiezza sempre maggiore, talché il liquido colorato riesce completamente mescolato con il liquido circostante a distanze sempre minori dal punto di immissione. Altrettanto irregolari sono le forme assunte dalle traiettorie delle particelle. In considerazione del fatto che la tubazione inferiore in Figura 62 è percorsa, come si vedrà nei capitoli successivi, da una portata maggiore rispetto a quella della tubazione sovrastante, ciò è quanto può succedere, per opportuni valori dei parametri in gioco, nel caso dell'iniezione nel punto 2. Un tale regime di moto è denominato *turbolento*.



**Figura 62. Schema idealizzato dell'esperimento di Reynolds.**

Il tipo di comportamento dei filetti fluidi nel caso di regime turbolento è dovuto al fatto che, in un dato punto della massa liquida, la velocità non rimane costante al trascorrere del tempo, ma è

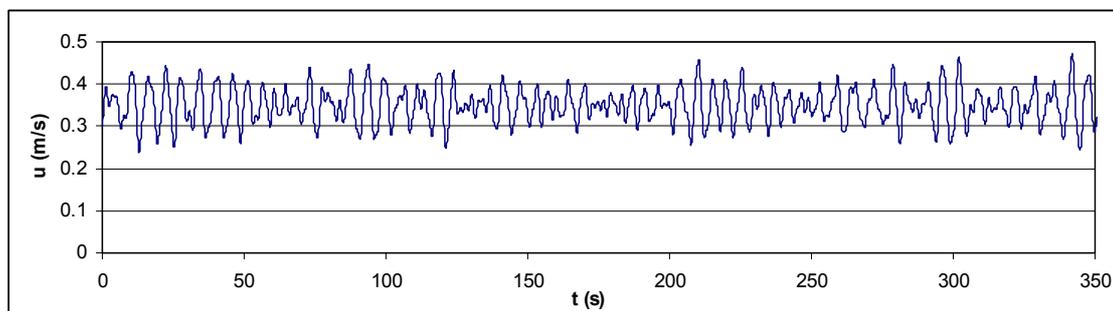
invece caratterizzata da fluttuazioni di intensità legate, anch'esse, al valore del numero di Reynolds. Il moto turbolento è quindi, intanto, sempre essenzialmente un moto vario. Inoltre, l'instabilità tipica del moto turbolento si esplica in alcuni aspetti ad esso peculiari, costituenti notevoli difficoltà per chi volesse determinare compiutamente il moto del liquido. Un primo aspetto è costituito dalla tendenza alla amplificazione di una perturbazione generata in un punto della massa liquida, anziché alla sua attenuazione, come avviene invece nel caso del moto laminare. Inoltre, due particelle poste inizialmente a distanza infinitesima, possono trovarsi, dopo un intervallo di tempo finito, ad una distanza finita. Ciò ha una importante conseguenza nei confronti della possibilità di predire il moto del fluido. Infatti, qualora si desiderasse descrivere la traiettoria di una particella, ci si troverebbe di fronte al problema che un errore, anche molto piccolo, commesso nella localizzazione iniziale della particella che si vuole seguire, si traduce in un errore rilevante riguardo la posizione della particella in un tempo successivo. Per lo stesso motivo, è evidente come gli esperimenti di moto in regime turbolento siano anche non perfettamente ripetibili. Tali caratteristiche sono quelle tipiche di un fenomeno *caotico*.

Da quanto illustrato finora, sebbene il moto turbolento di un fluido newtoniano sia, in linea di principio, descrivibile compiutamente mediante le equazioni di Navier-Stokes, in pratica tale possibilità è limitata dalla elevata sensibilità della soluzione ad errori commessi nella specificazione di condizioni iniziali o al contorno.

Naturalmente, tale considerazione potrebbe suscitare nel lettore il sospetto della totale inutilità di tutta la costruzione logica fin qui condotta per la scrittura delle equazioni scritte ai fini della descrizione del moto di un fluido. Le cose non stanno in effetti in questi termini. Come per vari altri fenomeni della fisica, la difficoltà di descrivere il moto turbolento, per i motivi illustrati, attraverso le leggi fisiche che lo governano, rende più conveniente analizzarlo come un fenomeno aleatorio, quale effettivamente si manifesta dall'evidenza sperimentale pura e semplice, esaminandone e cercando di descriverne le caratteristiche statistiche. Ciò è quanto verrà illustrato nel paragrafo successivo, mantenendo la trattazione ad un livello elementare<sup>44</sup>.

### 5.9.2 Analisi statistica della turbolenza

Come precedentemente menzionato, il rilievo puntuale di una qualunque grandezza all'interno di una massa fluida in moto turbolento fornisce un andamento fluttuante. Se la quota del pelo libero del serbatoio di Figura 62 viene mantenuta costante nel tempo (anche in questo caso a meno di un errore che si ammette molto piccolo), l'andamento temporale, ad esempio, della componente della velocità nella direzione dell'asse della tubazione, assume l'aspetto riportato in Figura 63. Corrispondentemente, anche la portata che fluisce nella tubazione assume un andamento fluttuante. Tuttavia, se si effettua la misura della portata media su intervalli di tempo non troppo piccoli  $\Delta t$ , semplicemente misurando, per ciascuno di tali intervalli di tempo, il volume di liquido  $\Delta V_k$  che si è riversato in un recipiente di raccolta del liquido e dividendolo per l'intervallo di tempo, si osserva che i vari valori di portata così ottenuti sono, a meno di piccoli scarti, tutti uguali fra loro.



**Figura 63. Andamento temporale della velocità assiale in un punto di una tubazione sede di un moto turbolento.**

<sup>44</sup> Per un sintetico ma più completo inquadramento del problema si veda Cenedese – Meccanica dei Fluidi.

Da un punto di vista matematico, tale operazione corrisponde alla valutazione della seguente media integrale, per il generico intervallo di tempo  $[t_k, t_{k+1}] = [t_k, t_k + \Delta t]$ :

$$\bar{Q}_k = \frac{\Delta V_k}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_k}^{t_k + \Delta t} Q(t) dt$$

È del tutto evidente come tale modalità di determinazione della portata possa risultare del tutto soddisfacente da un punto di vista applicativo, non essendo di alcun interesse valutare le fluttuazioni della portata, ma soltanto la componente media che effettivamente determina, su tempi non troppo piccoli, il trasporto di massa.

La medesima impostazione può essere adottata per l'analisi di tutte le grandezze che intervengono nel moto turbolento; in particolare, per la componente assiale della velocità il cui andamento temporale è riportato in Figura 63. Allo stesso modo, si calcolano quindi, per ciascun intervallo di tempo, i valori *medi locali* (perché riferiti ad un punto della massa liquida):

$$\bar{u}_k = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_k}^{t_k + \Delta t} u(t) dt .$$

Nel caso in cui, in alternativa, su ciascun intervallo  $\Delta t$  venga eseguita la misura di un numero finito  $N$ , sufficientemente grande, di valori di velocità ad intervalli di tempo  $\delta t$ , tali quindi che  $\Delta t = N \delta t$ , i valori medi locali della velocità vengano calcolati semplicemente come medie aritmetiche:

$$\bar{u}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u_{k,n} . \quad (150)$$

In entrambi i casi, tali valori medi, nelle citate condizioni di stazionarietà del livello della superficie libera nel serbatoio, risulteranno identici a meno di piccoli scarti. La componente media della velocità così definita è quella che, punto per punto, determina la portata media valutata come sopra descritto, ed assume perciò anche il nome di *velocità* o *componente di trasporto*. Nell'esempio di Figura 63 il valore medio della velocità, o velocità di trasporto, è pari a 0,35 m/s. Per quanto detto sul significato dei valori medi come componenti di trasporto, eseguendo la medesima analisi sulle componenti della velocità radiali, non potendosi avere, su intervalli non troppo piccoli, trasporto netto in direzione trasversale all'asse della corrente essendo questa confinata dalle pareti della tubazione, i valori medi calcolabili per una qualunque direzione radiale non potranno che essere (sempre a meno di piccoli scarti) nulli. L'essere i vari valori medi calcolabili sui successivi intervalli di tempo praticamente identici fra loro, conferisce ad un moto di questo tipo l'attributo di moto *stazionario in media*. Inoltre, nel caso specifico di una tubazione a sezione circolare costante, risultando nulli i valori medi delle componenti trasversali della velocità, il moto è anche *uniforme in media*.

I concetti esposti si estendono facilmente a moti turbolenti che non possano dirsi stazionari in media. Ad esempio, conservando il riferimento allo schema di Figura 62, eseguendo  $N$  esperienze in ciascuna delle quali il livello del pelo libero del serbatoio viene fatto aumentare (nelle intenzioni) sempre con la stessa legge di variazione temporale (ma sempre con qualche errore nei livelli istantanei), misurando l'andamento temporale della componente assiale della velocità in un certo punto della tubazione, si otterrebbe la sequenza di  $N$  rilievi, tutti differenti l'uno dall'altro, illustrata in Figura 64:

In tal caso, rilevata, per un dato istante di tempo  $t_0$ , la sequenza degli  $N$  valori di velocità assiale misurati nelle  $N$  prove (dette *realizzazioni*), il corrispondente valore medio si può ottenere, con tanta maggiore precisione quanto è il numero di realizzazioni effettuate, dalla media aritmetica (*media di insieme*, riferita cioè all'insieme delle realizzazioni):

$$\bar{u}(t_0) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u_n(t_0) . \quad (151)$$

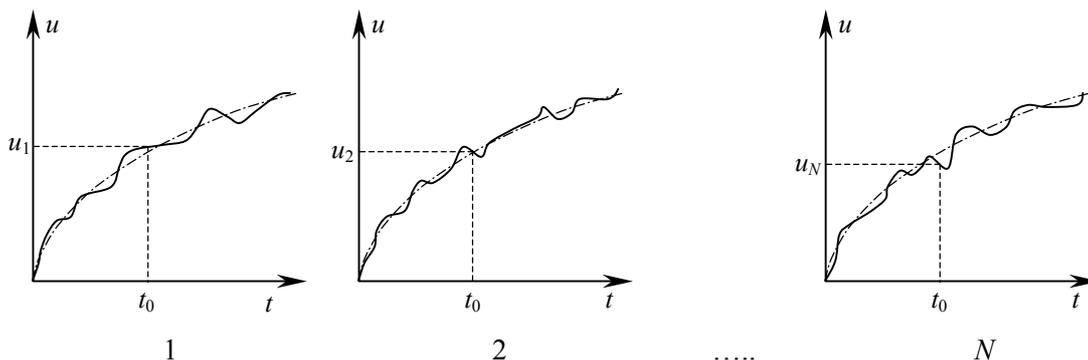


Figura 64. Realizzazioni di esperimenti di moto turbolento non stazionario in media.

$$\bar{u}(t_0) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u_n(t_0). \quad (152)$$

Tale media locale può essere, ovviamente, valutata per qualunque istante di tempo  $t$ . In generale, oltre a risultare differente da istante a istante il valore medio (*moto vario in media*), potranno risultare differenti le distribuzioni di probabilità delle variabili aleatorie  $u(t)$ , le quali, dipendendo da un parametro quale è il tempo, costituiscono, per definizione, dei *processi stocastici*.

L'analisi delineata per i moti vari in media è la più generale possibile. La stazionarietà in media di un moto, in realtà, non implica automaticamente la possibilità di calcolare i valori medi mediante un media temporale, come precedentemente ammesso, essendo richiesta a tale fine l'*ergodicità* del processo stocastico, la quale è peraltro in genere verificata. Poiché tuttavia la valutazione delle quantità medie mediante la media di insieme (152) costituisce un procedimento più generale, a tale termine ed all'analisi di un insieme di realizzazioni faremo riferimento in quanto segue. Da un punto di vista puramente matematico, peraltro, la media di insieme non costituisce un operatore differente dalla media temporale discreta (150), per cui le operazioni che verranno appresso illustrate possono intendersi indifferentemente riferite all'analisi sia di un moto vario in media che di uno stazionario in media ed ergodico.

Si rileva tuttavia come, da un punto di vista pratico, la sussistenza della proprietà ergodica sia importante in quanto consente di limitarsi ad effettuare una sola realizzazione del processo stocastico, ossia, un solo esperimento. Poiché l'attendibilità statistica di una media aumenta con il numero dei termini mediati, ottenere un insieme di realizzazioni sufficientemente nutrito – necessario sempre per un moto vario in media, ma anche per un moto stazionario in media non ergodico – può significare un rilevante impegno di tempo ed economico.

Si osservi che l'operatore media di insieme gode della proprietà di linearità (5) (§1.1.1), la quale verrà utilizzata estensivamente nei procedimenti illustrati nel prosieguo per la derivazione delle equazioni per le quantità medie.

Tutto ciò precisato, sulla base del concetto di media di insieme, è possibile, in generale, rappresentare il valore istantaneo di una grandezza – diciamo, la velocità assiale  $u$  – come somma della parte media,  $\bar{u}$ , e di una parte fluttuante,  $u'$  (*decomposizione di Reynolds*):

$$u = \bar{u} + u', \quad (153)$$

di cui, ovviamente, il valore medio è lo stesso per tutte le realizzazioni, mentre la parte pulsante – detta anche, perché non contribuente al trasporto di massa, *componente di agitazione* – varia da prova a prova. Ricalcolando la media di insieme sulla base della decomposizione di Reynolds ed utilizzandone la proprietà di linearità si ottiene:

$$\bar{u} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u_n = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\bar{u} + u'_n) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \bar{u} + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u'_n = \frac{N\bar{u}}{N} + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u'_n = \bar{u} + \bar{u}',$$

da cui, semplificando il valore medio fra il primo e l'ultimo membro, si ottiene:

$$\overline{u'} = 0 , \quad (154)$$

per cui risulta nullo il valore medio delle parti fluttuanti.

### 5.9.3 Equazioni per le quantità medie

Poiché il moto turbolento, per le caratteristiche descritte, non è conoscibile compiutamente, in ogni dettaglio sia spaziale che temporale, e poiché inoltre, in svariati problemi applicativi, non si è in effetti interessati a tale completa descrizione ma soltanto alla conoscenza delle componenti di trasporto della velocità – ovvero della conoscenza di tali componenti, più semplicemente, ci si accontenta – si pone il problema di determinare almeno delle equazioni che descrivano il moto medio. L'impostazione di tale problema viene condotta con riferimento al caso di fluido incomprimibile, omogeneo ed isoterma ( $\rho = \text{cost}$ ;  $\mu = \text{cost}$ ), sia perché sotto tali ipotesi è stata dedotta l'equazione di Navier-Stokes, sia per motivi più specificamente legati al problema in esame, che riusciranno più chiari nel prosieguo.

L'equazione di continuità per un fluido incomprimibile ed omogeneo assume la forma vettoriale (123) (§ 4.8.1), equivalente alla forma per componenti:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 ,$$

la quale può scriversi, utilizzando la decomposizione di Reynolds:

$$\frac{\partial (\overline{u}_j + u'_{j_n})}{\partial x_j} = 0 .$$

Applicando l'operatore media di insieme membro a membro e ricordando le proprietà di linearità dell'operatore derivata (6) e (7) – espressioni particolari delle condizioni generali (5) – l'equazione si può sviluppare come segue:

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial (\overline{u}_j + u'_{j_n})}{\partial x_j}} &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \overline{\frac{\partial (\overline{u}_j + u'_{j_n})}{\partial x_j}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_j} + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{\partial u'_{j_n}}{\partial x_j} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u'_{j_n} \right) = \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial (\overline{u'_{j_n}})}{\partial x_j} = 0 \end{aligned}$$

da cui, essendo nulla la media delle parti fluttuanti, si ottiene infine:

$$\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_j} = 0 , \quad (155)$$

ossia, un'equazione formalmente identica a quella per le grandezze istantanee, espressa però in termini di grandezze medie. Tale risultato deriva dalla linearità dell'equazione di continuità, oltre che dall'operatore media d'insieme. Sulla base di un procedimento analogo, identici risultati si otterranno ogni qual volta si applichi l'operatore media di insieme ad un termine lineare di una equazione.

Chiarite per il caso dell'equazione di continuità le modalità di utilizzazione delle proprietà di linearità dell'operatore media di insieme e delle funzioni cui esso è applicabile, nel prosieguo, per la sintesi, la media di insieme verrà sempre indicata con il simbolo di soprassegno piuttosto che attraverso la sua espressione esplicita.

Sottraendo membro a membro la forma dell'equazione di continuità per le parti medie dalla forma contenente esplicitamente la decomposizione di Reynolds, si ottiene anche:

$$\frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0 . \quad (156)$$

È quindi a divergenza nulla anche il campo delle parti fluttuanti della velocità.

Anche per quanto riguarda l'equazione di Navier-Stokes, conviene operare sulla forma per componenti, considerando altresì a primo membro l'espressione dell'accelerazione fornita dalla regola di derivazione lagrangiana:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho f_{mi} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} ,$$

nella quale l'unico termine non lineare è quello convettivo,  $u_j(\partial u_i/\partial x_j)$ . Di conseguenza, mentre l'esecuzione della media di insieme degli altri termini produce termini formalmente identici contenenti quantità medie, la media del termine convettivo fornisce, dopo qualche elaborazione:

$$\overline{(\bar{u}_j + u'_j) \frac{\partial (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j}} = \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} .$$

Si osservi che tali conclusioni si possono trarre unicamente sotto l'ipotesi di fluido incomprimibile, omogeneo ed isoterma ( $\rho = \text{cost}$ ;  $\mu = \text{cost}$ ). In caso contrario, anche la densità e la viscosità dinamica risulterebbero fluttuanti e determinerebbero la natura non lineare dei termini in cui esse sono contenute (tranne che per le forze peso, in cui la densità comparirebbe linearmente). Lo stesso si concluderebbe per le forme complete dell'equazione di continuità (121) o (122).

Dei due termini non nulli residui, il primo è analogo a quello di partenza, espresso però in funzione delle quantità medie. Il secondo termine non è invece ulteriormente riducibile. Non è, in particolare, riconducibile ad una forma in cui vi compaiano medie di *singole* parti fluttuanti<sup>45</sup> e pertanto non può essere riconosciuto identicamente nullo. Esso figura come un termine aggiuntivo incognito in una equazione che formalmente, per il resto, è identica a quella scritta per le grandezze istantanee, ma espressa in termini di valori medi.

L'equazione del moto per le parti medie può quindi scriversi, infine, come (*equazione di Reynolds*):

$$\rho \frac{D \bar{u}_i}{D t} = \rho \bar{f}_{mi} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial (\overline{\rho u'_i u'_j})}{\partial x_j} . \quad (157)$$

Riconoscendo l'analogia del termine contenente la media del prodotto di parti fluttuanti con il termine degli sforzi contenuto nella equazione indefinita del moto (135), ai termini  $\tau_{Rij} = -\rho \overline{u'_i u'_j}$  si attribuisce il nome di *sforzi turbolenti* o *sforzi di Reynolds*. Derivando da un termine inerziale quale l'accelerazione della particella, gli sforzi turbolenti sono associabili, in effetti, a forze d'inerzia (§0). Si può mostrare che lo anche stato di sforzo turbolento è rappresentato da un tensore, che risulta ovviamente simmetrico in considerazione della espressione degli sforzi turbolenti. Le forme (134) e (135) dell'equazione indefinita del moto si possono quindi riscrivere per le grandezze medie, evidenziando l'analogia fra sforzi reali e sforzi turbolenti, rispettivamente come:

$$\rho \frac{D \bar{u}}{D t} = \rho \bar{f}_m + \nabla \cdot (\underline{\underline{\tau}} + \underline{\underline{\tau}}_R) \quad (158)$$

e

<sup>45</sup> Si rimarca che, con la (154), si è dedotto l'annullamento della media di una singola quantità fluttuante: nulla si può dire su termini contenenti prodotti, frazioni, potenze, etc., di parti fluttuanti, cioè, combinazioni non lineari delle stesse.

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_{m_i} + \frac{\partial(\tau_{ij} + \tau_{Rij})}{\partial x_j} . \quad (159)$$

Tenendo conto degli sforzi turbolenti, si ottengono le seguenti espressioni degli sforzi totali, nelle notazioni vettoriale e per componenti scalari:

$$\underline{\underline{\tau}} = -p\underline{\underline{I}} + 2\mu\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{\tau}}_R \quad (160)$$

e

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \overline{\rho u'_i u'_j} . \quad (161)$$

Si rimarca come il problema della determinazione degli sforzi turbolenti mediante relazioni che consentano di ottenere un bilancio equazioni/incognite in pareggio (problema di chiusura) sia tuttora, in generale, insoluto. A parte le equazioni che possono determinarsi per le parti fluttuanti similmente a quanto fatto per l'equazione di continuità – le quali tuttavia contengono, a loro volta, ulteriori incognite – o modelli di chiusura che esprimono gli sforzi turbolenti in termini delle grandezze medie – contenenti però, anch'essi, parametri in generale non noti (p.es. il popolare modello di Boussinesq) – in generale la valutazione dell'effetto degli sforzi turbolenti in casi specifici deve essere effettuata a livello sperimentale.

Sotto l'ipotesi fin qui assunta di fluido incomprimibile, omogeneo ed isoterma, anche l'equazione globale del moto presenta termini non lineari che, sottoposti all'operazione di media, forniscono termini aggiuntivi legati agli sforzi turbolenti. Nelle forme sia (143) che (144), tale termine è costituito dal flusso di quantità di moto:

$$\vec{M} = \int_{S_c} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS ,$$

derivante, in effetti, dai termini convettivi dell'equazione indefinita del moto e dell'equazione di Navier-Stokes, § 5.7. La media di insieme di tale termine, valutabile tenendo presente la linearità dell'operatore integrale, fornisce:

$$\overline{\int_{S_c} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS} = \int_{S_c} \rho \overline{\vec{u}} (\overline{\vec{u}} \cdot \overline{\vec{n}}) dS + \int_{S_c} \overline{\rho \vec{u}' (\vec{u}' \cdot \vec{n})} dS = \overline{\vec{M}} - \vec{\Pi}_R ,$$

di cui il secondo termine, conformemente al concetto di sforzo di Reynolds, viene incluso fra le forze esterne a secondo membro delle:

$$\overline{\vec{I}} + \overline{\vec{M}} = \overline{\vec{G}} + \overline{\vec{\Pi}} + \vec{\Pi}_R \quad (162)$$

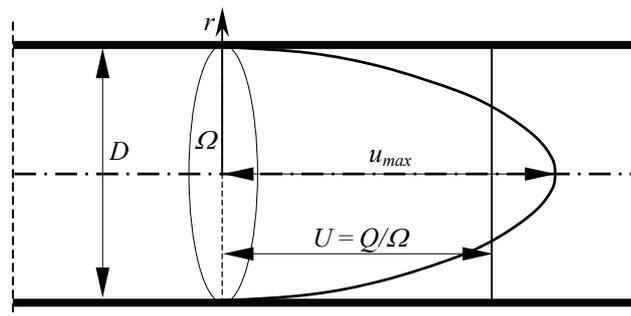
$$\overline{\vec{I}} + \overline{\vec{M}} = \overline{\vec{G}} + \overline{\vec{\Pi}}_p + \overline{\vec{\Pi}}_\mu + \vec{\Pi}_R , \quad (163)$$

in cui gli altri termini sono formalmente i medesimi delle equazioni (143) e (144), ma espressi in termini delle quantità medie. Non è superfluo rimarcare che il termine  $\vec{\Pi}_R$  deriva dagli stessi termini convettivi non lineari che danno luogo al termine aggiuntivo contenuto nell'equazione di Reynolds.

#### 5.9.4 Significato fisico del numero di Reynolds

Al numero di Reynolds, che è stato introdotto come parametro riconosciuto influente, su base empirica, ai fini dello stabilirsi di uno dei due regimi di moto possibili – laminare o turbolento – può essere attribuito un importante significato fisico. A tale scopo, occorre eseguire la valutazione

degli ordini di grandezza di due termini dell'equazione di Navier-Stokes: il termine convettivo, la cui media di insieme fornisce gli sforzi turbolenti, ed il termine viscoso. Eseguiamo tale valutazione sempre per il caso del moto in una tubazione a sezione circolare. In Figura 65 è riportato uno schema riferito ad un profilo di velocità a simmetria cilindrica, dipendente quindi soltanto da una coordinata radiale  $r$ , della forma parabolica determinabile per via teorica per il regime laminare. Risulta a simmetria assiale anche il profilo delle velocità medie nel moto turbolento, sebbene caratterizzato da una forma più schiacciata. Il ragionamento che verrà impostato, tuttavia, non richiede la sussistenza di tale simmetria, proprio perché attinente alla valutazione dei soli ordini di grandezza dei termini citati piuttosto che dei valori puntuali. Nonostante il riferimento alle caratteristiche geometriche del profilo rappresentato in Figura 65, il procedimento che verrà qui illustrato è quindi valido anche per un profilo delle velocità assiali istantanee in un moto turbolento, caratterizzato da una forma irregolare.



**Figura 65. Profilo di velocità in una tubazione a sezione circolare.**

Innanzitutto, l'ordine di grandezza dei termini citati è fornito dalla componente assiale della velocità, che è l'unica non nulla nel moto laminare o, in termini di valori medi, nel moto turbolento, ma è comunque predominante anche in termini di valori istantanei nel regime turbolento.

Poiché la velocità varia dal valore zero sulla parete del tubo al valore massimo sull'asse,  $u_{max}$ , dello stesso ordine di grandezza della velocità media  $U$ , in una distanza pari al raggio della tubazione, dello stesso ordine di grandezza del diametro, l'ordine di grandezza delle derivate spaziali della velocità è dato da:

$$\frac{\partial u}{\partial r} \propto \frac{U}{D},$$

in cui il simbolo  $\propto$  indica proporzionalità. Analogamente, l'ordine di grandezza delle derivate seconde valutato sull'intero diametro, come rapporto incrementale di una derivata prima positiva dalla parete all'asse e di una negativa dall'asse alla parete opposta, è dato da:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \propto \frac{U}{D} - \left( -\frac{U}{D} \right) \propto \frac{U}{D^2}.$$

L'ordine di grandezza del rapporto fra termini convettivi e termini viscosi è quindi dato da:

$$\frac{\rho u_j \partial u_i / \partial x_j}{\mu (\partial^2 u_i / \partial x_j \partial x_j)} \propto \frac{\rho U (U/D)}{\mu (U/D^2)} = \frac{\rho U D}{\mu} = Re.$$

Pertanto, nel regime laminare, i termini viscosi, tendenzialmente dissipativi come si è visto nel §5.8.2, risultano prevalenti rispetto ai termini convettivi, dell'equazione del moto. Ad essi si deve quindi la stabilizzazione del flusso determinata dalla menzionata dissipazione delle perturbazioni. All'aumentare del numero di Reynolds, l'effetto dissipativo dei termini viscosi diviene sempre

meno rilevante per confronto con i termini convettivi non lineari, costituenti la causa della amplificazione delle perturbazioni.

Poiché, in regime turbolento, le componenti fluttuanti della velocità crescono al crescere delle componenti medie, il numero di Reynolds rappresenta anche una misura del rapporto fra sforzi turbolenti,  $\tau_{Rij} = -\rho \overline{u'_i u'_j}$ , e sforzi viscosi,  $\tau_{\mu ij} = \mu (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$ .

Si ha infatti:

$$\frac{\tau_{Rij}}{\tau_{\mu ij}} = \frac{\overline{\rho u'_i u'_j}}{\mu (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)} \propto \frac{\rho U^2}{\mu \frac{U}{L}} = \frac{\rho U L}{\mu} = Re .$$

Per valori sufficientemente elevati del numero di Reynolds si ha pertanto:

$$\tau_{Rij} \gg \tau_{\mu ij} ,$$

per cui gli sforzi viscosi riescono trascurabili rispetto a quelli turbolenti.

Tuttavia, anche in queste condizioni, una analisi dettagliata nella zona delle pareti che confinano il flusso di un fluido in regime turbolento consente di evidenziare che, sebbene la maggior parte della massa fluida sia sede dei moti caotici che si è avuto modo di descrivere in precedenza, ove gli sforzi turbolenti sono effettivamente molto maggiori di quelli viscosi, esiste generalmente uno strato di fluido aderente alle pareti sede di un moto laminare (*sottostrato laminare*), il cui spessore peraltro decresce all'aumentare del numero di Reynolds. La presenza del sottostrato laminare e la dipendenza del suo spessore dal numero di Reynolds rivestono una certa importanza ai fini della valutazione delle resistenze al moto offerte da una parete solida a contatto con un fluido in movimento, come si vedrà nel cap. 7 in sede di descrizione delle formule a tale scopo utilizzabili nel caso delle condotte in pressione.

Trattandosi d'ora innanzi, nel caso di regime turbolento, sempre di equazioni per le quantità medie, si conviene di indicarle, per brevità, prive del soprassegno, mentre si continuerà ad individuare con gli apici le componenti fluttuanti.

## CAPITOLO SESTO

### 6. CORRENTI FLUIDE

#### 6.1 Definizioni

Nel §4.5 sono state definite correnti flussi unidimensionali nei quali, ad eccezione di alcuni tratti di sviluppo limitato, il moto si svolga, localmente, lungo una direzione preferenziale e le velocità siano perciò sensibilmente parallele. Una corrente caratterizzata da una ridotta curvatura (elevato raggio di curvatura) delle traiettorie delle particelle in essa contenute si dice una corrente *gradualmente variata*. Dall'analisi locale del moto nel piano normale alla traiettoria in un punto discussa nel §5.8.1, si è dedotto che in sezione normale di una corrente gradualmente variata di un fluido pesante, incomprimibile isoterma ed omogeneo vige una distribuzione di pressione idrostatica. La caratteristica ideale di una corrente gradualmente variata, determinata con riferimento ad un fluido in cui siano trascurabili le forze viscosive, rimane una schematizzazione accettabile anche nei casi reali, nei quali, oltre alle forze viscosive contenute nella (145), sono in generale presenti anche gli sforzi turbolenti introdotti nell'equazione di Reynolds per il moto medio.

Se una sezione normale (o *sezione retta*) di una corrente gradualmente variata è anche piana, si parla di *sezione regolare*. Una sezione regolare è quindi una sezione retta piana sulla quale la distribuzione della pressione è di tipo idrostatico. Sebbene le sezioni normali di una corrente gradualmente variata possano essere anche gobbe (nel caso in cui il flusso converga o diverga), l'essere le traiettorie caratterizzate da un ampio raggio di curvatura e le velocità sensibilmente parallele fa sì che, da un punto di vista pratico, le sezioni normali di correnti gradualmente variate possano comunque sempre considerarsi, almeno approssimativamente, piane e quindi regolari.

Si definisce *asse della corrente* il luogo di punti individuati con criterio prestabilito sulle sezioni della corrente: per esempio, il luogo dei baricentri delle sezioni. Sull'asse della corrente si definisce una *ascissa curvilinea*  $s$ , rispetto alla quale si esprime la variabilità spaziale delle grandezze caratteristiche della corrente. Il campo di grandezze relative ad una corrente quali la quota piezometrica o la densità, identificate dalla generica grandezza  $\mathcal{G}$ , si esprime pertanto come:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(s, t) .$$

La caratteristica delle correnti gradualmente variate relativa alla distribuzione idrostatica delle pressioni sulle sezioni normali consente infatti di associare ad ogni valore di ascissa curvilinea un valore di quota piezometrica, poiché questa si mantiene costante sulla sezione corrispondente. In termini di rappresentazione grafica, tale relazione univoca può essere descritta da un'unica *linea piezometrica* (Figura 66). Per questo motivo, tali tipi di correnti vengono anche dette *correnti lineari*. Rappresentando l'andamento della quota piezometrica lungo l'asse, la linea piezometrica visualizza, sezione per sezione, la quota di riferimento per il calcolo delle pressioni, essendo esse nulle ad una quota geometrica pari alla quota piezometrica, come ampiamente discusso nel §3.5.

Conseguentemente, per una data sezione regolare, il piano orizzontale posto ad una quota pari alla quota piezometrica che compete alla sezione rappresenta l'analogo del piano dei carichi idrostatici introdotto nello studio dei fluidi in quiete. Con riferimento a tale piano e con le regole stabilite per le spinte idrostatiche su superfici piane, potrà calcolarsi, con ottima approssimazione, la spinta esercitata sulla sezione regolare dal fluido della corrente a contatto con essa. Infatti, detta spinta (forza di superficie) è legata all'integrale esteso alla sezione stessa della componente di sforzo assiale  $\tau_{ss}$  (in quanto agente nella direzione del versore tangente alla linea d'asse,  $\vec{i}_s$ , sul piano normale alla stessa direzione), nella cui espressione deducibile dal legame costitutivo (161):

$$\tau_{ss} = -p + 2\mu \frac{\partial u_s}{\partial s} - \overline{\rho u'_s u'_s} ,$$

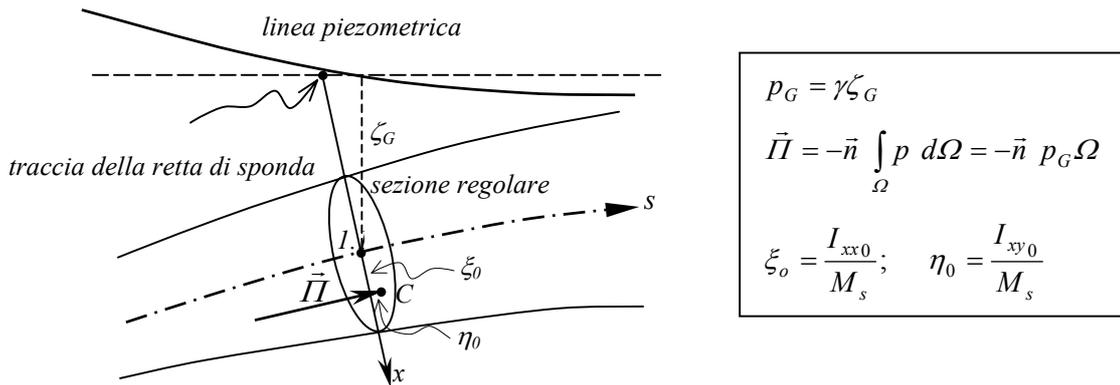


Figura 66. schema di calcolo delle spinte in una sezione regolare di una corrente.

possono essere trascurati sia il termine viscoso che il termine dovuto alla turbolenza, in considerazione degli ordini di grandezza che tali termini normalmente assumono. In particolare, per quanto riguarda il termine viscoso, nel caso di un moto uniforme di un fluido incompressibile, essendo identicamente nulle le componenti (medie) della velocità diverse da quella assiale,  $u_s$ , l'equazione di continuità in forma locale:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 ,$$

riferita alla terna intrinseca, implica rigorosamente l'annullamento della  $\partial u_s / \partial s$ .

## 6.2 Equazione di continuità per le correnti

Il principio di conservazione della massa espresso per una corrente si traduce in una forma specifica di equazione di continuità, deducibile con riferimento allo schema di Figura 67.

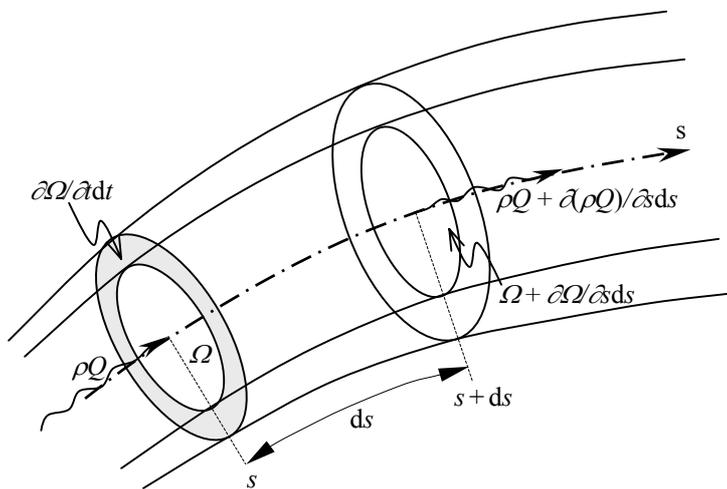


Figura 67. Schema per la derivazione dell'equazione di continuità per una corrente.

Si considerino due sezioni regolari di un tratto di corrente gradualmente variata di sviluppo in asse pari a  $ds$ . In considerazione dello schema di corrente, la densità del fluido,  $\rho(s,t)$ , è uniforme su ciascuna sezione. Inoltre, poiché le sezioni sono regolari, le velocità puntuali sono normali alla sezione. Pertanto, sulla base della convenzione di normale esterna, nella sezione di ascissa  $s$ , ove il

vettore velocità è rivolto in verso opposto alla normale esterna, il flusso di massa, deducibile dall'espressione generale (117), è dato da:

$$Q_m(s) = \int_{\Omega} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} \, d\Omega = -\rho \int_{\Omega} u \, d\Omega = -\rho Q .$$

Nella sezione posta all'ascissa  $s+ds$  il vettore velocità è concorde con la normale esterna e l'espressione del flusso di massa ha perciò segno positivo. Detto flusso è esprimibile mediante sviluppo in serie arrestato al primo ordine rispetto al valore della sezione  $s$ :

$$Q_m(s+ds) = \rho Q + \frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} ds .$$

Tali flussi rappresentano la massa che attraversa le sezioni corrispondenti nell'unità di tempo ed avvengono entrambi nel senso delle ascisse crescenti. I valori delle masse che attraversano le stesse sezioni in un intervallo di tempo elementare  $dt$  si ottengono pertanto come prodotto dei flussi di massa per l'intervallo di tempo.

A meno di infinitesimi di ordine superiore, la massa di fluido compresa fra le sezioni di controllo  $s$  ed  $s+ds$  è data dal prodotto  $\rho\Omega ds$ . La variazione  $dm$  della massa compresa fra le due sezioni nell'intervallo di tempo  $dt$  è data quindi da:

$$dm = \frac{\partial m}{\partial t} dt = \frac{\partial(\rho\Omega ds)}{\partial t} dt = \frac{\partial(\rho\Omega)}{\partial t} ds dt .$$

Il bilancio di massa relativo al tratto di corrente compreso fra le ascisse  $s$  ed  $s+ds$  si esprime scrivendo che la massa netta entrante nel tratto compreso fra le due sezioni di controllo deve uguagliare la variazione della massa che rimane compresa fra le sezioni:

$$\rho Q dt - \left[ \rho Q + \frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} ds \right] dt = \frac{\partial(\rho\Omega)}{\partial t} ds dt ,$$

da cui, semplificando, si perviene alla espressione della *equazione di continuità per una corrente*:

$$\frac{\partial(\rho\Omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} = 0 . \quad (164)$$

Nel caso di moto stazionario, la (164) si riduce alla forma:

$$\frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} = 0 ,$$

la quale esprime che il flusso di massa non varia da sezione a sezione, lungo l'asse della corrente. Nel caso di moto vario di un fluido incompressibile, isoterma ed omogeneo, la densità  $\rho$ , costante in tutta la corrente, può essere portata fuori dai segni di derivata e semplificata, col che si ottiene:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} = 0 .$$

Se, inoltre, il moto è stazionario o la condotta è indeformabile, non potendo l'area di una qualunque sezione variare al trascorrere del tempo, deve annullarsi la corrispondente derivata temporale euleriana, da cui:

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0 , \quad (165)$$

la quale esprime che la portata si mantiene costante da sezione a sezione, lungo l'asse della corrente:

$$Q = \text{cost.}$$

In particolare, nel presente corso il caso di moto stazionario di fluido incomprimibile, isoterma ed omogeneo sarà quello cui verrà fatto riferimento esclusivo nelle applicazioni pratiche.

Si definisce *velocità media* in una sezione attraversata da una data portata quel valore di velocità che, uniformemente distribuito nella sezione, determina la stessa portata<sup>46</sup>. La velocità media è data pertanto dal rapporto fra la portata e l'area della sezione:

$$U = \frac{Q}{\Omega}.$$

L'equazione di continuità per una corrente di un fluido incomprimibile ed omogeneo in moto stazionario si può quindi anche scrivere:

$$\Omega U = \text{cost.} \quad (166)$$

### 6.3 Potenza di una corrente in una sezione

I fenomeni che hanno luogo in una corrente fluida possono essere caratterizzati dal punto di vista energetico sulla base del concetto di potenza di una corrente in una sezione, definita come l'energia meccanica totale del fluido che attraversa una data sezione nell'unità di tempo.

L'espressione della potenza in una sezione regolare di una corrente gradualmente variata di un fluido incomprimibile, isoterma ed omogeneo si deduce con riferimento allo schema di Figura 68.

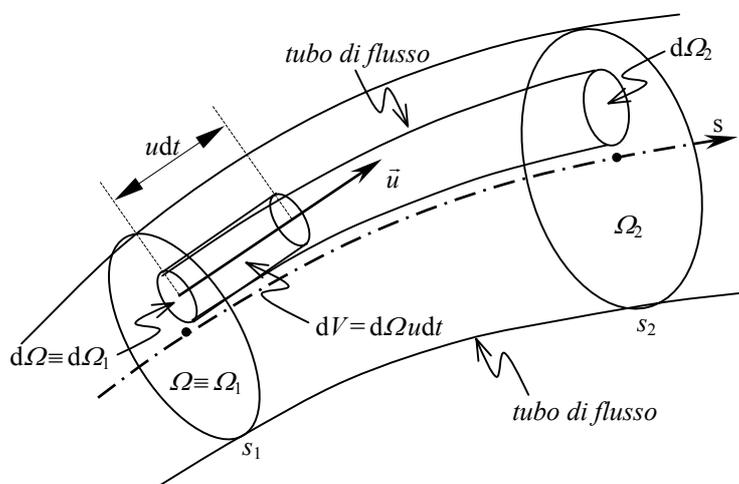


Figura 68. Schema di definizione della potenza di una corrente in una sezione.

Si consideri la sezione regolare  $\Omega$  posta in corrispondenza dell'ascissa curvilinea  $s_1$ , ed una sua porzione elementare  $d\Omega$ . Essendo la sezione regolare, il vettore velocità nell'areola  $d\Omega$ , uniformemente distribuito su di essa a meno di termini infinitesimi, è ad essa normale. Pertanto, in un intervallo di tempo elementare  $dt$  l'areola è attraversata da un volume fluido:

$$dV = d\Omega u dt = dQ dt$$

<sup>46</sup> Il concetto di velocità media in una sezione è in realtà già stato utilizzato nella definizione del numero di Reynolds, §5.9.1.

di peso:

$$dW = \gamma dV = \gamma d\Omega u dt = \gamma dQ dt .$$

Se  $H = z + p/\gamma + u^2/2g$  è il carico totale uniformemente distribuito, a meno di termini infinitesimi, sull'areola  $d\Omega$ , atteso il significato di energia meccanica totale per unità di peso di fluido attribuitogli nel § 5.8.2, l'energia meccanica totale del volume fluido è data da:

$$dE = H dW = \gamma dQ H dt$$

e la corrispondente potenza (energia che ha attraversato l'areola nell'unità di tempo) è:

$$dP = \frac{dE}{dt} = \gamma dQ H . \quad (167)$$

La potenza che attraversa l'intera sezione  $\Omega$ , si ottiene integrando l'espressione della potenza elementare attraverso l'areola  $d\Omega$  sull'intera sezione (o anche, sull'intera portata che attraversa la sezione):

$$P = \int_Q dP = \int_Q \gamma H dQ = \gamma \int_Q \left( z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) dQ ,$$

essendo il fluido per ipotesi incompressibile ed omogeneo.

Poiché la sezione è regolare, la distribuzione delle pressioni agenti su di essa è idrostatica, la quota piezometrica  $h = z + p/\gamma$  è perciò costante sull'intera sezione e può quindi essere integrata facilmente, portandola fuori del segno di integrale. L'espressione della potenza che attraversa l'intera sezione è quindi data da:

$$P = \gamma \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) \int_Q dQ + \gamma \int_Q \frac{u^2}{2g} dQ = \gamma \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) Q + \gamma \int_Q \frac{u^3}{2g} d\Omega .$$

Volendo esprimere tale potenza in termini di velocità media della corrente  $U = Q/\Omega$ , si pone:

$$P = \gamma \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) Q + \gamma \alpha \frac{U^3 \Omega}{2g} = \gamma \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) Q + \gamma \alpha \frac{U^2}{2g} Q = \gamma \left( z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g} \right) Q = \gamma \bar{H} Q , \quad (168)$$

ove  $\bar{H}$  rappresenta un carico totale medio della corrente, espresso in termini della velocità media  $U$  della corrente introducendo il *coefficiente di ragguaglio delle potenze cinetiche* (o *primo coefficiente di Coriolis*), dato da:

$$\alpha = \frac{\int u^3 d\Omega}{U^3 \Omega} .$$

Il valore del coefficiente  $\alpha$  dipende evidentemente dalla forma della distribuzione delle velocità nella sezione regolare. Nei casi di moto turbolento, che costituiscono l'eventualità di gran lunga più comune nelle applicazioni dell'Ingegneria Civile, e di moto uniforme in media in sezioni relativamente regolari (per esempio, circolari) la distribuzione delle velocità è sensibilmente uniforme ed il coefficiente di ragguaglio è perciò molto prossimo all'unità, valore che viene generalmente senz'altro assunto nelle applicazioni numeriche. Si danno tuttavia casi di correnti in moto turbolento caratterizzate da sezioni marcatamente irregolari (per esempio le sezioni di un corso d'acqua naturale con un alveo di magra ed espansioni laterali inondabili in condizioni di

piena) o in moto vario, in cui la velocità è distribuita in modo irregolare ed il coefficiente di Coriolis può discostarsi sensibilmente dall'unità. Nel caso di regime di moto laminare in una tubazione cilindrica a sezione circolare, essendo il solido di portata (distribuzione delle velocità sulla sezione) un paraboloide di rotazione avente per asse l'asse della condotta, si ha  $\alpha=2$ .

#### 6.4 Estensione del Teorema di Bernoulli alle correnti

Con riferimento allo schema di Figura 68, si consideri un tratto della medesima corrente stazionaria delimitato da due sezioni  $\Omega_1 \equiv \Omega$  ed  $\Omega_2$ , poste alle ascisse  $s_1$  ed  $s_2$  rispettivamente, entrambe regolari. La corrente può non essere gradualmente variata nel tratto compreso fra le due sezioni; essa deve però esserlo, lo ripetiamo, sulle sezioni di estremità, talché su di esse si possa definire la potenza della corrente nella forma derivata al paragrafo precedente.

Nel caso di moto stazionario, la superficie di contorno di una corrente rappresenta necessariamente un tubo di flusso. Non è infatti possibile che le velocità su tale superficie non risultino tangenti ad essa, perché altrimenti, al trascorrere del tempo, risultando non nullo il flusso attraverso le parti della superficie in cui ciò si verifica, la corrente dovrebbe necessariamente modificare la propria forma, il che non è compatibile con l'ipotesi di moto stazionario.

Inoltre, qualunque superficie contenuta in una sezione regolare, finita od infinitesima, definisce un tubo di flusso determinato dalle linee di corrente (coincidenti con le traiettorie nel caso stazionario) che passano per il contorno della superficie in questione (vedi § 4.7). Un tubo di flusso elementare è perciò determinato, ad esempio, dalla sezione  $d\Omega_1 \equiv d\Omega$ , avente sezione di estremità  $d\Omega_2$  sulla sezione  $\Omega_2$ .

Essendo il fluido incomprimibile, isoterma ed omogeneo, le portate  $dQ_1$  e  $dQ_2$  che attraversano le sezioni estreme di tale tubo di flusso,  $d\Omega_1$  e  $d\Omega_2$ , devono necessariamente essere identiche (vedi § 4.8):

$$dQ_1 = dQ_2 = dQ .$$

D'altro canto, in forza del Teorema di Bernoulli studiato al § 5.8.2, nel caso di un fluido ideale il carico totale delle particelle che si portano dall'areola  $d\Omega_1$  all'areola  $d\Omega_2$  deve mantenersi costante durante il percorso, a prescindere dalla conformazione più o meno regolare delle traiettorie da esse descritte (ossia, a prescindere dal fatto che la corrente, nel suo complesso, risulti o meno gradualmente variata fra le due sezioni). Detti  $H_1$  ed  $H_2$  i carichi totali delle particelle nelle sezioni  $d\Omega_1$  e  $d\Omega_2$  rispettivamente, si ha pertanto:

$$H_1 = H_2 = H .$$

A norma della espressione (167) della potenza che attraversa una sezione elementare, le potenze che attraversano l'areola  $d\Omega$  e la corrispondente areola all'ascissa  $s_2$  appartenente allo stesso tubo di flusso devono quindi essere identiche:

$$\gamma dQ_1 H_1 = \gamma dQ_2 H_2 = \gamma dQ H .$$

Le due sezioni regolari,  $\Omega_1$  ed  $\Omega_2$ , che delimitano il tratto di corrente considerato, possono essere scomposte in infinite areole elementari per ciascuna delle quali si perviene alla stessa conclusione tratta per le due areole di cui sopra; si deve pertanto necessariamente concludere che anche le potenze che attraversano le due sezioni regolari della intera corrente alle ascisse  $s_1$  ed  $s_2$ , esprimibili nella forma (168), devono essere anch'esse fra loro identiche:

$$\gamma \bar{H}_1 Q_1 = \gamma \bar{H}_2 Q_2 .$$

Essendo tuttavia uguali anche le portate corrispondenti,  $Q_1 = Q_2$ , fra le due sezioni deve necessariamente rimanere invariato anche il carico totale medio della corrente:

$$\bar{H}_1 = \bar{H}_2 .$$

Tale espressione costituisce una estensione alle correnti del Teorema di Bernoulli per un fluido ideale in moto stazionario, in forma del tutto analoga a quella dimostrata per una particella in moto lungo la propria traiettoria.

È importante rimarcare che il carico totale medio è identico nelle sezioni regolari di estremità di un tratto di corrente stazionaria di fluido ideale anche se il flusso perde il carattere di corrente gradualmente variata all'interno del tratto.

Nel caso delle correnti gradualmente variate – nelle quali sole è definibile, come s'è mostrato al § 6.1, una linea piezometrica della corrente – analogamente a quanto mostrato per il caso di una particella (§ 5.8.2), è possibile definire una linea dei carichi totali soprastante la linea piezometrica della quantità  $\alpha U^2/2g$ , avente pertanto quota locale pari al carico totale medio della corrente, il cui andamento rappresenta graficamente l'andamento dell'energia meccanica per unità di peso di fluido lungo l'asse della corrente.

La perdita di energia meccanica totale per unità di peso e per unità di sviluppo in asse della corrente viene detta *cadente dei carichi totali*:

$$j = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial s}.$$

Essa rappresenta la pendenza geometrica locale della linea dei carichi totali se la corrente ha asse orizzontale; è minore della pendenza geometrica secondo un fattore costante se l'asse è inclinato ma rettilineo; è, infine, minore della pendenza geometrica e variabile da punto a punto dell'asse se l'asse ha, anch'esso, pendenza variabile.

Analogamente si definisce la *cadente piezometrica*:

$$i = -\frac{\partial h}{\partial s},$$

per la quale valgono considerazioni geometriche simili a quelle presentate per la cadente  $j$ .

Sulla base di tali definizioni, le cadenti sono positive se le linee corrispondenti sono declivi nel senso del moto.

In un tratto di corrente che risulti ovunque gradualmente variata si ha perciò, lungo l'asse:

$$\bar{H} = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g} = \text{cost},$$

ovvero, in termini differenziali:

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial s} = 0,$$

con la linea dei carichi totali che risulta pertanto orizzontale.

Nel § 5.8.2 si è mostrato perché nel caso di moto uniforme in un condotto a sezione costante, ove vige la condizione di aderenza alle pareti, essendo il profilo di velocità convesso, il carico totale di una singola particella in moto lungo la sua traiettoria debba diminuire nel senso del moto. In tal caso deve perciò diminuire anche il carico totale della corrente. In un fluido reale si osserva pertanto il fenomeno delle *perdite di carico* (che così semplicemente denominate si intende sempre rappresentino perdite di carico *totale*), costituenti perdite di energia meccanica della corrente determinate dalla viscosità del fluido.

Le perdite di carico che hanno luogo in tratti di corrente gradualmente variata sono dette *distribuite*. In tal caso si ha pertanto:

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial s} < 0,$$

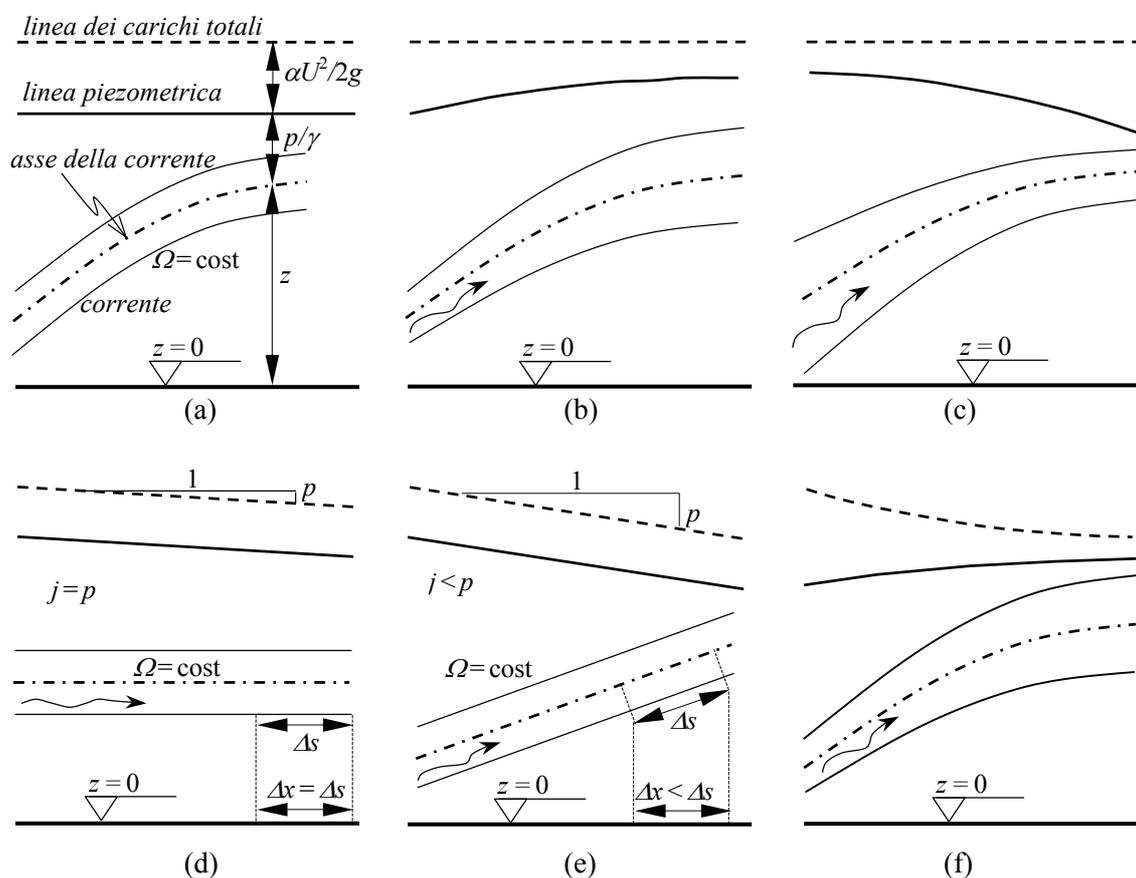
col che la linea dei carichi totali risulta declive nel senso del moto.

Nel § 5.8.2 si è chiarito come l'ipotesi di fluido ideale vada riferita alle condizioni di moto (in linea di massima, allo sviluppo lineare del flusso in esame) piuttosto che ad una effettiva proprietà fisica del fluido, che non può mai essere considerato privo di viscosità. Tale concetto è, ovviamente, valido anche in tema di correnti.

In definitiva, trattandosi di una corrente liquida in regime stazionario, *deve sempre, necessariamente, osservarsi una linea dei carichi totali declive nel senso del moto*, eventualmente avente pendenza talmente ridotta da potersi considerare nulla. Qualora il verificarsi di tale ultima condizione risulti fondato sulla base delle caratteristiche del processo di moto, tale ipotesi potrà essere utilizzata per descrivere in maniera più agevole, anche se pur sempre in via più o meno approssimata, il processo di moto.

La linea piezometrica può essere, invece, sia declive che acclive nel senso del moto, a seconda dell'andamento dell'altezza cinetica media lungo l'asse della corrente.

In Figura 69 sono riportati alcuni esempi di andamento delle linee dei carichi totali e piezometrica, ricapitolativi delle considerazioni svolte in precedenza, di cui i casi (a), (b) e (c) relativi ad un fluido ideale; i casi (d), (e) ed (f) ad un fluido reale. Con il simbolo  $p$  è stata indicata la pendenza geometrica effettiva della linea dei carichi totali.



**Figura 69. Esempi di andamento della linea dei carichi totali e della linea piezometrica di una corrente**

Perdite di carico dette *localizzate* si verificano, invece, in zone generalmente circoscritte di una corrente localmente non gradualmente variata, interessata da fenomeni di distacco di vena dalle pareti, originanti zone di ricircolazione caratterizzate da intensa turbolenza, per le quali, non essendo idrostatica la distribuzione delle pressioni, non è definibile una linea piezometrica né, quindi, una linea dei carichi totali. In questo caso, per le sezioni regolari più vicine che comprendano il tratto in questione risulta:

$$\bar{H}_2 < \bar{H}_1.$$

La perdita di carico localizzata è definita come differenza di tali carichi totali.

Il problema della determinazione di espressioni utili al calcolo delle perdite di carico, sia distribuite che localizzate, verrà affrontato nel cap. 7.

Per brevità, d'ora in avanti indicheremo il carico medio di una corrente privo del soprassegno.

### 6.5 Strumenti di misura della portata

Il Teorema di Bernoulli scritto per una corrente di un fluido ideale in regime stazionario può utilizzarsi per esprimere la portata di una corrente, in funzione delle quote piezometriche della stessa rilevabili mediante idonei strumenti di misura.

Un primo tipo di strumenti di misura delle portate di una corrente è costituito dal *venturimetro*, così denominato in quanto l'effetto di diminuzione della quota piezometrica associato ad un aumento della velocità media, descritto dal Teorema di Bernoulli, è noto sotto il nome di *effetto Venturi*. Il venturimetro è costituito da un tratto di tubazione convergente nel senso della corrente, avente diametri variabili da un valore massimo  $D$  ad un minimo  $d$ ; un tratto a sezione costante di diametro  $d$  e da un successivo tratto divergente (vedi Figura 70). Il tratto divergente deve avere uno sviluppo maggiore del tratto convergente, allo scopo di minimizzare le perdite di carico che, in una corrente rallentata quale quella che interessa il divergente sono sempre ben maggiori che in una corrente accelerata, della quale è invece sede il tratto convergente.

In considerazione della limitatezza dello sviluppo del convergente e del fatto che le correnti accelerate non sono tipicamente affette da perdite di carico localizzate, in buona approssimazione è lecito assumere costante il carico totale della corrente in tale tratto. Contrassegnate con i pedici 1 e 2 le due sezioni regolari estreme del tratto di corrente considerata si ha quindi:

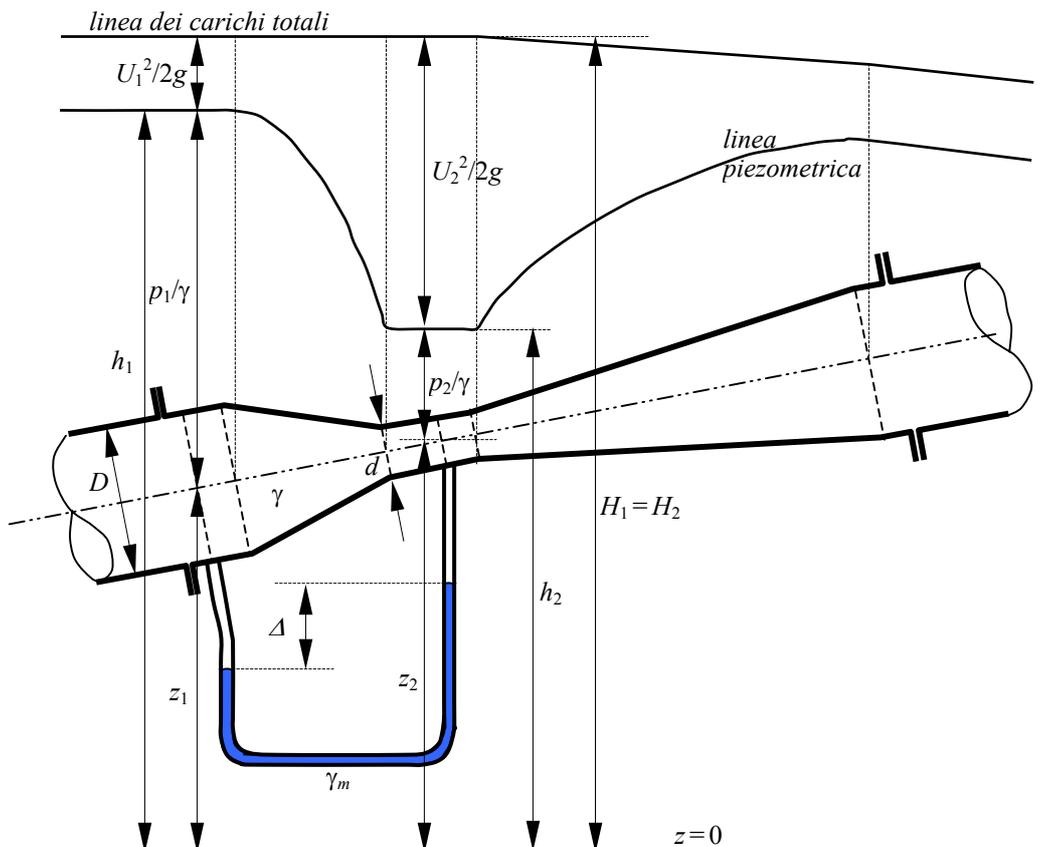


Figura 70. Rappresentazione schematica di un venturimetro.

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{U_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{U_2^2}{2g} .$$

Considerando che le sezioni regolari sono caratterizzate da un valore univoco della quota piezometrica  $h$  ed assumendo unitario il coefficiente di ragguglio delle potenze cinetiche, si può anche scrivere:

$$h_1 + \frac{U_1^2}{2g} = h_2 + \frac{U_2^2}{2g} .$$

Poiché il moto è stazionario ed il fluido incomprimibile, isoterma ed omogeneo, la portata non varia lungo l'asse della corrente. Esprimendo quindi le velocità medie in funzione della portata e delle aree delle sezioni,  $U_1 = Q/\Omega_1$  e  $U_2 = Q/\Omega_2$ , mettendo in evidenza la portata ed esplicitandone l'espressione si ottiene:

$$Q = \sqrt{\frac{2g(h_1 - h_2)}{\frac{1}{\Omega_2^2} - \frac{1}{\Omega_1^2}}} = \Omega_1 \Omega_2 \sqrt{\frac{2g(h_1 - h_2)}{\Omega_1^2 - \Omega_2^2}} .$$

La misura della portata è quindi ricondotta alla misura delle quote piezometriche ai due estremi del convergente. Tale misura può essere effettuata con un manometro differenziale a liquido del tipo studiato nell'idrostatica o mediante manometri metallici posti a quote note.

A tale proposito, si osservi che il liquido in quiete contenuto in una derivazione della condotta avente sezione di attacco posta sulla superficie laterale della condotta ha necessariamente la medesima quota piezometrica della sezione di attacco, poiché sulle due facce della sezione di attacco – una rivolta verso l'interno della condotta, l'altra verso il fluido in quiete nella derivazione – oltre che aversi, ovviamente, la stessa quota geodetica, deve aversi anche equilibrio delle pressioni per il principio di azione e reazione<sup>47</sup>.

Ricordando la formula (97) del manometro differenziale si può quindi scrivere una espressione della portata in funzione della misura  $\Delta$  del manometro differenziale:

$$Q = \Omega_1 \Omega_2 \sqrt{\frac{2g\Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}}{\Omega_1^2 - \Omega_2^2}} .$$

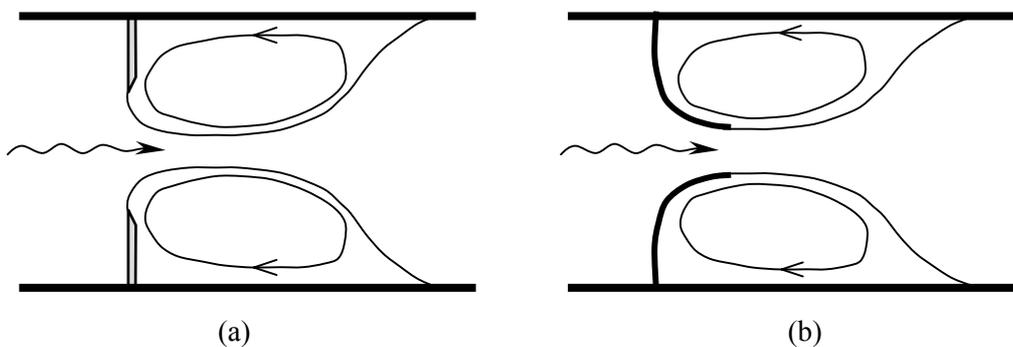
All'atto pratico, la formula ricavata fornisce una determinazione della portata affetta da imprecisioni legate principalmente all'ipotesi di fluido ideale ed all'assunzione di un coefficiente di ragguglio delle potenze cinetiche unitario. Al fine di poter attribuire allo strumento una determinata precisione, occorre procedere ad una taratura basata su misure di portata eseguite, come in tutte le operazioni di taratura, mediante strumenti di misura di precisione maggiore di quella che si vuole attribuire al venturimetro. Tali operazioni sono eseguite in stabilimento dal costruttore.

Strumenti di misura delle portate più economici del venturimetro basati anch'essi sull'effetto Venturi sono il *diaframma* ed il *bocaglio* (vedi Figura 71). Il primo è costituito, per l'appunto, da un diaframma nel quale è praticato un foro circolare dal bordo affilato, allo scopo di favorire un distacco netto della vena e la formazione, a valle del foro, di una sezione contratta sufficientemente stabile, nella quale è minimo il valore della quota piezometrica. Il valore del rapporto fra le aree della sezione contratta e della sezione del foro, detto *coefficiente di contrazione*, dipende dal

<sup>47</sup> Incidentalmente, si osserva anche che, per quanto affermato, la quota del menisco del liquido contenuto in un piezometro collegato ad una sezione di una condotta nella quale la corrente sia gradualmente variata rappresenta la quota piezometrica della corrente in tale sezione.

rapporto fra le aree del foro e della sezione della condotta. Nel boccaglio, la contrazione è determinata da un elemento convergente a profilo curvilineo interno alla tubazione.

Non includendo alcun dispositivo per realizzare una espansione controllata della vena fluida a valle della sezione contratta, questa avviene in modo relativamente brusco, con intensa produzione di turbolenza e conseguenti maggiori perdite di carico rispetto al venturimetro. Più precisamente, venturimetro, boccaglio e diaframma si collocano in ordine di costo decrescente e perdite di carico crescenti.



**Figura 71. (a) diaframma, (b) boccaglio.**



**CAPITOLO SETTIMO**  
**7. CORRENTI IN PRESSIONE**

**7.1 Generalità**

Viene denominata corrente in pressione una corrente che fluisce in un condotto occupandone l'intera sezione, non presentando perciò parte alcuna della sua superficie di contorno a contatto con l'atmosfera e non essendo, conseguentemente, vincolata ad avere parte di tale superficie esposta alla pressione atmosferica. Tale denominazione non esclude quindi che la corrente possa trovarsi localmente in condizioni di pressione negativa (fluido in *depressione*), sebbene la condizione normale sia effettivamente quella in cui le pressioni sono positive (fluido in *pressione*), perché generalmente preferibile per motivi tecnici.

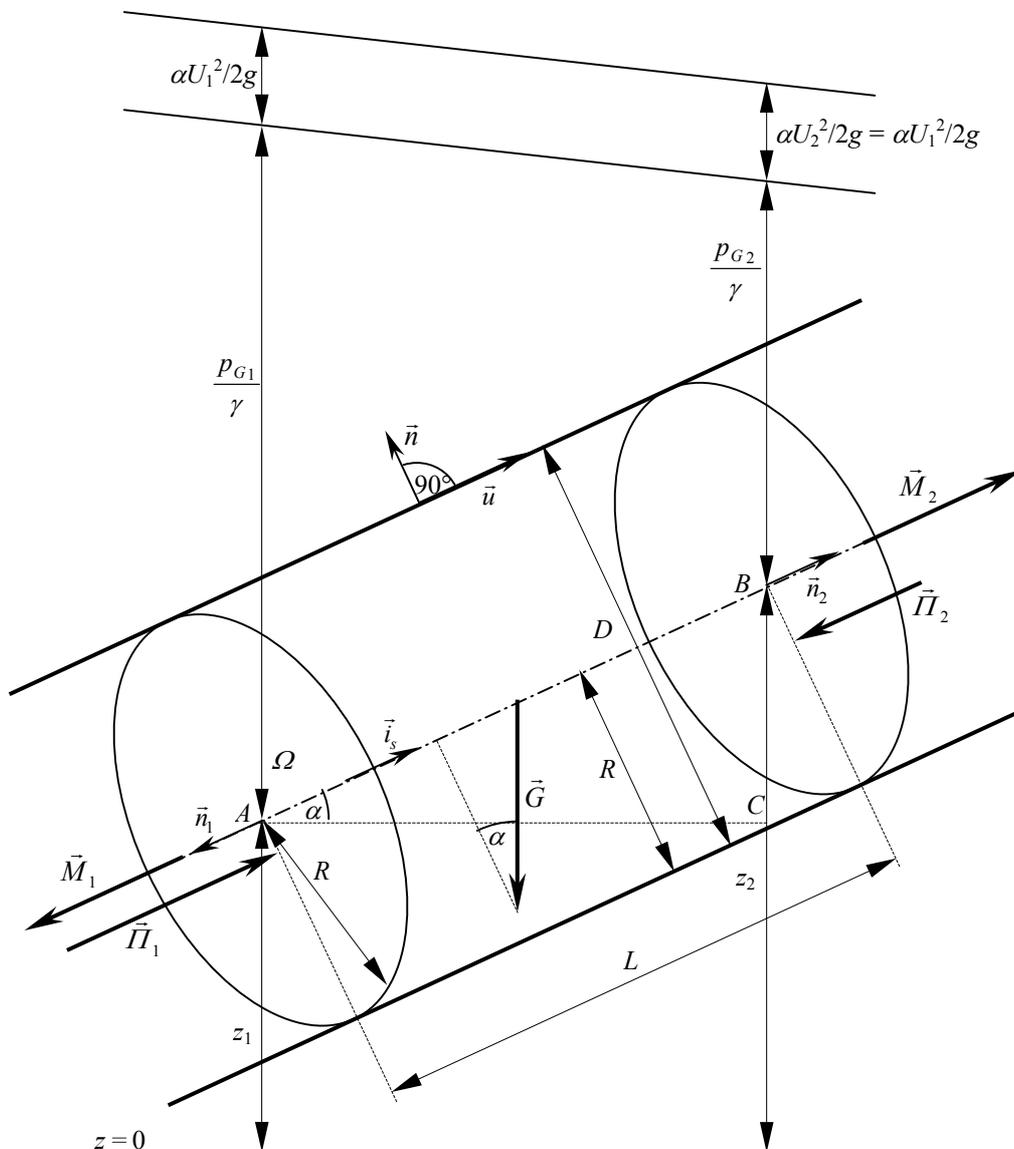


Figura 72. Schema di corrente in pressione in moto uniforme.

Normalmente, una condotta in pressione si compone quasi interamente di tratti cilindrici a sezione circolare, sedi di moti uniformi in media<sup>48</sup> soggetti a perdite di carico distribuite, più alcuni tratti di sviluppo complessivamente limitato in confronto ai primi, ove la corrente non è gradualmente variata e non vi è quindi definibile né una linea piezometrica né una linea dei carichi totali, sedi di perdite di carico localizzate (§ 6.4).

I due tipi di flusso devono essere analizzati con modalità differenti, sostanzialmente allo scopo di dedurre formule per il calcolo delle corrispondenti perdite di carico mediante le quali poter risolvere i fondamentali problemi di progetto (che caratteristiche occorre assegnare ad una tubazione soggetta a certe condizioni al contorno affinché vi fluisca una data portata?) e di verifica (che portata fluisce in una data condotta soggetta a date condizioni al contorno?). L'analisi viene condotta con riferimento al caso di fluidi incomprimibili (liquidi), isotermi ed omogenei.

## 7.2 Moto uniforme nelle condotte in pressione

Il moto uniforme di un fluido incomprimibile, isoterma ed omogeneo ( $\rho = \text{cost}$ ) in un condotto cilindrico a sezione circolare di raggio  $R$  si può studiare convenientemente mediante l'equazione globale del moto nella forma (162) applicata ad un volume di controllo compreso fra due sezioni rette poste ad una distanza  $L$  (vedi Figura 72). Proiettando l'equazione lungo l'asse della condotta, assunto orientato nel verso del moto, si ha:

$$(\vec{I} + \vec{M}) \cdot \vec{i}_s = (\vec{G} + \vec{II} + \vec{II}_R) \cdot \vec{i}_s,$$

nella quale, come preannunciato al § 5.9.4, sono stati omissi, per brevità, i simboli di media di insieme, ed  $\vec{i}_s$  è il versore che individua direzione e verso del moto.

Essendo il moto uniforme nel senso della definizione data nel § 4.5, esso è anche stazionario e risulta perciò nullo il termine di inerzia locale:

$$\vec{I} = \int_{V_c} \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} dV.$$

Il flusso di quantità di moto attraverso la superficie di contorno del volume di controllo  $S_c$  può esprimersi come somma degli integrali estesi alle due sezioni di estremità ed alla superficie laterale del volume di controllo:

$$\vec{M} = \int_{S_c} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = \int_{\Omega_1} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS + \int_{\Omega_2} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS + \int_{\Omega_L} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS.$$

L'integrale esteso alla superficie laterale è nullo, perché nullo è, identicamente, il vettore velocità per la condizione di aderenza alla parete<sup>49</sup>.

Poiché la distribuzione di velocità è identica in tutte le sezioni della tubazione, quindi anche sulle sezioni di estremità del volume di controllo,  $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ , i corrispondenti flussi di quantità di moto differiscono per i valori assunti dal prodotto scalare  $\vec{u} \cdot \vec{n}$ . Essendo velocità e normale paralleli e discordi nella sezione 1 e paralleli e concordi nella sezione 2, i prodotti scalari valgono  $-u$  ed  $u$  nelle sezioni 1 e 2 rispettivamente, per cui i corrispondenti flussi di quantità di moto sono vettori individualmente non nulli, uguali in direzione e modulo ma opposti in verso e la loro somma vettoriale risulta perciò nulla.

Il vettore flusso di quantità di moto attraverso l'intera superficie di contorno del volume di controllo è pertanto nullo.

<sup>48</sup> Si ricorda che con tale termine si intende il moto uniforme per le grandezze medie in un moto turbolento. Tale specificazione verrà sottintesa e non più ripetuta nel prosieguo.

<sup>49</sup> Quand'anche, per mera ipotesi, la condizione di aderenza non sussistesse, il termine risulterebbe comunque nullo. Infatti, il vettore velocità sarebbe pur sempre diretto come l'asse della tubazione (parallelo alle generatrici della superficie cilindrica) e pertanto ortogonale alla normale alla superficie, col che sarebbe nullo il corrispondente prodotto scalare contenuto nell'integrale del flusso di quantità di moto.

Sulla base dello schema di Figura 72, ove si individua il triangolo rettangolo  $ABC$  avente ipotenusa  $AB$  di lunghezza  $L$  e cateti orizzontale  $AC$  e verticale  $BC$ , la componente assiale della forza peso si può esprimere nel modo seguente:

$$\vec{i}_s \cdot \vec{G} = G_s = -|\vec{G}| \sin \alpha = -\gamma V \sin \alpha = -\gamma \Omega L \sin \alpha = -\gamma \Omega (z_2 - z_1).$$

Anche il risultante dei termini legati agli sforzi turbolenti (di Reynolds) può essere espresso come somma degli integrali estesi alle superfici laterale e di estremità:

$$\vec{I}_R = \int_{\Omega_1} -\rho \overline{u'(\vec{u}' \cdot \vec{n})} dS + \int_{\Omega_2} -\rho \overline{u'(\vec{u}' \cdot \vec{n})} dS + \int_{\Omega_L} -\rho \overline{u'(\vec{u}' \cdot \vec{n})} dS .$$

Dei tre integrali, quello esteso alla superficie laterale risulta nullo, dovendo essere identicamente nulle, per la condizione di aderenza, oltre alle componenti di trasporto (medie), anche le componenti di agitazione (fluttuanti)<sup>50</sup>. Detta  $u'$  la proiezione sull'asse del moto della componente di agitazione della velocità, e tenendo presente che  $\vec{i}_s = -\vec{n}$  sulla sezione 1 e  $\vec{i}_s = \vec{n}$  sulla sezione 2, i termini relativi alle sezioni di estremità del volume di controllo possono scriversi come segue:

$$\int_{\Omega_1} -\rho \overline{u'(\vec{u}' \cdot \vec{n})} dS + \int_{\Omega_2} -\rho \overline{u'(\vec{u}' \cdot \vec{n})} dS = \int_{\Omega_1} -\rho \overline{u'(-u')} dS + \int_{\Omega_2} -\rho \overline{u'(u')} dS = \int_{\Omega_1} \rho \overline{u'u'} dS - \int_{\Omega_2} \rho \overline{u'u'} dS .$$

Essendo il moto uniforme in media, anche le caratteristiche della turbolenza non variano da sezione a sezione. Pertanto, nonostante termini come  $\overline{u'u'}$  non possano dirsi, per la natura aleatoria delle componenti di agitazione, identici istante per istante in punti corrispondenti delle due sezioni, devono pur sempre essere identici i loro valori medi sulle due sezioni. La somma algebrica degli integrali contenenti i termini turbolenti relativi alle due sezioni di estremità deve pertanto essere nulla, e così, quindi, l'intero termine  $\vec{I}_R$ .

Del risultante delle forze agenti sulla superficie di contorno del volume di controllo  $S_c$ :

$$\vec{I} = \int_{S_c} \vec{\tau} dS = \int_{\Omega_1} \vec{\tau} dS + \int_{\Omega_2} \vec{\tau} dS + \int_{\Omega_L} \vec{\tau} dS .$$

i termini relativi alle superfici di estremità si valutano, per quanto argomentato al § 6.1, sulla base della sola componente idrostatica dello stato di sforzo,  $\vec{\tau} = -p\vec{n}$ <sup>51</sup>. Essendo le sezioni di estremità del volume di controllo regolari e le relative distribuzioni di pressione idrostatiche, i corrispondenti integrali possono valutarsi con le formule studiate in Idrostatica per le spinte sulle sezioni piane.

La componente lungo l'asse della condotta dello sforzo agente sulla superficie laterale è uno sforzo tangenziale esercitato dalla parete sul fluido, costante sulla superficie per effetto della simmetria cilindrica del campo di velocità<sup>52</sup>. Detto  $\tau_0$  il modulo di tale sforzo tangenziale, la componente lungo l'asse del risultante delle forze di superficie si esprime come:

$$\vec{i}_s \cdot \vec{I} = \vec{i}_s \cdot \left[ \int_{\Omega_1} -p\vec{n} dS + \int_{\Omega_2} -p\vec{n} dS + \int_{\Omega_L} \vec{\tau} dS \right] = -(\vec{i}_s \cdot \vec{n})_1 p_{G1} \Omega_1 - (\vec{i}_s \cdot \vec{n})_2 p_{G2} \Omega_2 - \tau_0 BL ,$$

<sup>50</sup> Anche in questo caso si può osservare che, quand'anche la condizione di aderenza non vigesse, le componenti di agitazione normali alla parete dovrebbero comunque essere nulle, essendo la parete impenetrabile. Inoltre, le componenti di agitazione sono nulle anche in tutto il sottostrato viscoso menzionato nel § 5.9.4, in quanto sede di moto laminare.

<sup>51</sup> Chiariamo che, delle argomentazioni svolte al § 6.1, qui è utile quella relativa alla componente viscosa,  $2\mu\partial u/\partial s$ ; la componente turbolenta è quella che dà origine al termine  $\vec{I}_R$  – nullo anch'esso, come s'è visto.

<sup>52</sup> Considerato che la parete è a contatto con il sottostrato laminare, lo sforzo alla parete è di tipo viscoso e le componenti tangenziali sono perciò legate alle velocità di deformazione a volume costante dal legame costitutivo dei fluidi Newtoniani (137) e, quindi, al campo di velocità.



nel senso del moto. Essendo inoltre lo sforzo resistente totale costante lungo la superficie laterale del volume di controllo, tale deve essere anche la cadente piezometrica, col che la linea piezometrica viene ad essere rettilinea (casi di Figura 69d e Figura 69e).

Poiché nel moto uniforme l'altezza cinetica media della corrente,  $\alpha U^2/2g$ , non varia da sezione a sezione, la linea dei carichi totali si mantiene parallela alla linea piezometrica e risultano pertanto uguali le corrispondenti pendenze. La cadente piezometrica è perciò uguale alla cadente dei carichi totali:

$$j = -\frac{\partial H}{\partial s} = \frac{H_1 - H_2}{L} ,$$

col che si ha anche:

$$j = \frac{\tau_0}{\gamma \mathcal{R}} , \quad (169)$$

Si può dimostrare che tale relazione si mantiene valida per correnti non uniformi gradualmente variate in regime turbolento<sup>53</sup>. La variazione di carico totale di una corrente gradualmente variata fra due sezioni di ascisse  $s_1$  ed  $s_2$  è perciò data, in generale, da:

$$H_2 - H_1 = \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial H}{\partial s} ds = - \int_{s_1}^{s_2} \frac{\tau_0}{\gamma \mathcal{R}} ds .$$

Sulla base della relazione fra cadente dei carichi totali e sforzo resistente alla parete, il modulo  $T$  della forza resistente agente su un tratto di corrente in moto uniforme di lunghezza  $L$  è dato da:

$$T = \tau_0 BL = \gamma \mathcal{R} j BL = \gamma \frac{\Omega}{B} j BL = \gamma \Omega L j = \gamma \mathcal{W} j ,$$

ove  $V$  è il volume liquido del tratto di corrente considerato. Per il principio di azione e reazione, il fluido esercita una azione uguale e contraria nei confronti della parete interna della tubazione, che tende a trascinare quest'ultima nel senso del moto (*azione di trascinamento*).

Esprimendo la cadente dei carichi totali dalla relazione precedente:

$$j = \frac{T}{\gamma \mathcal{W}} ,$$

si riconosce che ad essa può essere attribuito, in aggiunta al significato energetico illustrato al §6.4, l'ulteriore significato dinamico di azione resistente esercitata sull'unità di peso di fluido dalle pareti della condotta (ovvero similmente, in termini di azione di trascinamento).

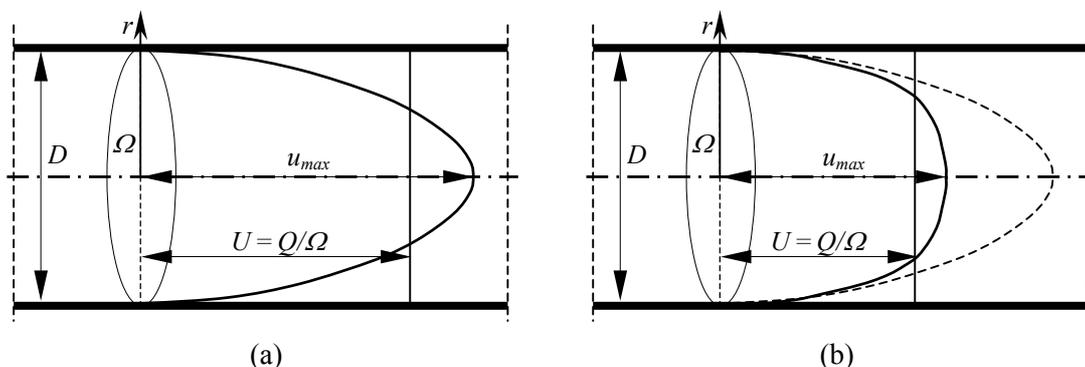
Una analisi del tutto simile a quella testè presentata, ma riferita ad un generico volume cilindrico coassiale con la condotta, conduce, nel caso di regime laminare, ad una equazione differenziale a variabili separabili che, per integrazione ed imposizione della condizione di aderenza ( $u=0$ ) alle pareti della tubazione, consente di determinare una distribuzione di velocità a simmetria assiale a profilo parabolico (il solido di velocità è quindi un paraboloide di rivoluzione, vedi Figura 74).

Nel caso di regime turbolento, l'equazione differenziale cui si perviene contiene un termine nel quale sono presenti sforzi turbolenti, i quali, come s'è detto, non sono suscettibili di determinazione su base deduttiva. Tuttavia, ragionando sul flusso volumetrico attraverso il volume di controllo e sulla distribuzione qualitativa delle velocità, si può mostrare che anche gli sforzi turbolenti tangenziali sono di tipo resistente<sup>54</sup>. Pur non potendosi esprimere questi ultimi in funzione delle grandezze caratteristiche del moto medio, la conoscenza del segno degli stessi consente di concludere che, a parità di cadente piezometrica, le velocità risultano punto per punto inferiori a

<sup>53</sup> Vedi Marchi-Rubatta, Cap. 16.

<sup>54</sup> Vedi Citrini, §7.3 e §7.4, per una anaisi dell'effetto degli sforzi turbolenti sul profilo di velocità.

quelle corrispondenti al regime laminare, come riportato in Figura 74, e la portata è quindi anche inferiore. Conseguentemente, al moto in regime turbolento è associata una maggiore caduta piezometrica a parità di portata. Come già rilevato al §6.3, l'essere nel regime turbolento il profilo di velocità sensibilmente schiacciato rispetto a quello relativo al regime laminare consente di approssimare all'unità il coefficiente di ragguglio delle potenze cinetiche,  $\alpha$ .



**Figura 74. Profili di velocità in tubazione cilindrica a sezione circolare nei regimi (a) laminare e (b) turbolento.**

Da quanto sopra esposto, ai fini del calcolo delle perdite di carico distribuite che hanno luogo nelle correnti in moto uniforme è necessario determinare relazioni fra lo sforzo resistente alla parete e le grandezze caratteristiche del moto (viscosità, densità, portata, diametro della sezione, etc...) per i vari regimi di moto. Tale argomento verrà affrontato nel paragrafo successivo.

### 7.3 Leggi di resistenza al moto uniforme

Il problema della determinazione delle perdite di carico distribuite nel moto uniforme in condotte a sezione circolare può essere efficacemente impostato con i metodi dell'analisi dimensionale. Tuttavia, rinunciando in questa sede ad una trattazione sistematica su tale base, il problema verrà trattato nei suoi aspetti essenziali e con particolare riferimento agli aspetti applicativi, rimandando il lettore interessato ad approfondimenti ai testi a tale scopo consigliati.

#### 7.3.1 Formula di Darcy-Weisbach

La rappresentazione più completa delle resistenze al moto uniforme nei vari regimi di moto possibili in una tubazione cilindrica di sezione qualunque è espressa in termini della formula:

$$j = \lambda \frac{U^2}{8g\mathfrak{R}},$$

che nel caso di sezione circolare di diametro  $D$  assume la forma nota sotto il nome di *formula di Darcy-Weisbach*:

$$j = \lambda \frac{U^2}{2gD}, \quad (170)$$

in cui  $\lambda$  è un coefficiente adimensionale cui vengono attribuite da vari autori una serie di denominazioni differenti: *coefficiente di resistenza*, *numero indice di resistenza*, *coefficiente di perdita distribuita*, *fattore d'attrito*<sup>55</sup>.

<sup>55</sup> A proposito della denominazione "fattore d'attrito" è importante rilevare che il fenomeno della perdita di energia di una corrente fluida non è legato allo sviluppo di attrito fra il fluido e la superficie interna della tubazione, giacché alla parete vige la condizione di aderenza e non v'è perciò scorrimento del fluido rispetto

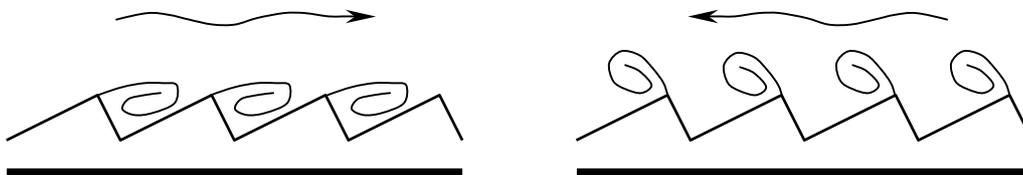
Il problema è quindi ricondotto alla specificazione del valore di  $\lambda$  in funzione delle grandezze caratteristiche del moto.

Nel paragrafo precedente si è accennato alla possibilità di determinare il profilo di velocità per via deduttiva nel caso di moto laminare. Tale trattazione consente anche di stabilire l'espressione dell'indice di resistenza relativa a tale regime di moto, data da:

$$\lambda = \frac{64}{Re} . \quad (171)$$

Nel caso di moto in regime turbolento la determinazione di  $\lambda$  deve essere affrontata per via sperimentale, come conseguenza della menzionata incapacità di dedurre espressioni degli sforzi turbolenti in funzione delle grandezze caratteristiche del moto medio. Nel caso più generale di moto in condotte aventi superficie interna scabra,  $\lambda$  risulta funzione di due parametri adimensionali, di cui uno è il numero di Reynolds (149), l'altro il rapporto fra una lunghezza caratteristica rappresentativa della rugosità della parete interna della tubazione, detta *scabrezza*, e il diametro della sezione circolare della tubazione (ovvero, per una sezione di forma generale, quattro volte il raggio idraulico).

La definizione operativa della scabrezza di una tubazione costituisce un problema concettuale tutt'altro che banale. Posto che il concetto di scabrezza è legato alla geometria della superficie interna della tubazione, tuttavia, in linea di principio, essa non può essere rappresentata da un'unica lunghezza caratteristica, determinabile per via deduttiva, sulla base di misure di tipo geometrico, quale il valore medio o massimo delle asperità della superficie, dovendo essere rilevante nei confronti delle resistenze offerte al moto la forma delle asperità, come pure la posizione delle asperità rispetto al flusso. Un esempio convincente delle difficoltà insite nella definizione della scabrezza è il classico caso della conformazione del profilo della superficie a denti di sega aventi i tratti acclivi e declivi a diverse pendenze, rappresentato in Figura 75.



**Figura 75. Esempio di superfici scabre di uguale geometria che determinano differenti resistenze al moto di correnti fluenti in sensi opposti.**

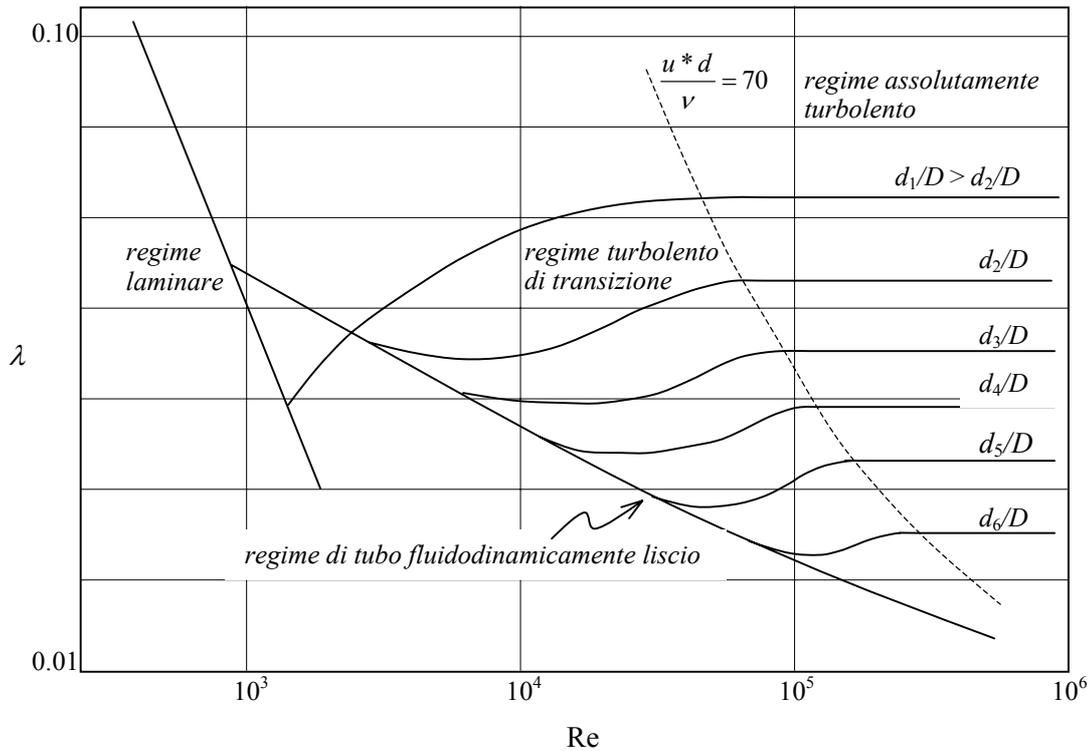
Infatti, quando il fronte ripido del profilo è posto controcorrente vengono prodotte scie vorticose di ampiezza maggiore rispetto al caso in cui la corrente investa il lato a pendenza minore, con conseguenti maggiori perdite di carico. Nel caso delle tubazioni commerciali il problema di una determinazione della scabrezza su base puramente deduttiva è ulteriormente complicato dal fatto che la conformazione della superficie scabra è estremamente irregolare.

Tale difficoltà concettuale ha suggerito di procedere alla definizione del parametro scabrezza in termini degli effetti da essa prodotti – ossia, delle resistenze al moto – piuttosto che puramente geometrici. A tale scopo, l'analisi sperimentale del fenomeno ha proceduto, storicamente, ricercando dapprima relazioni valide per una ben determinato tipo di scabrezza omogenea, costituita da sabbia di granulometria pressoché uniforme di diametro  $d$ , facilmente misurabile. I risultati di tali esperienze, compiute da Nikuradse nel 1933, sono rappresentati in un diagramma bilogarithmico avente in ascisse il numero di Reynolds ed in ordinate l'indice di resistenza  $\lambda$ . Tale diagramma, cui è stato anche attribuito il nome di *arpa di Nikuradse* a causa della forma dell'insieme delle curve in esso contenute, è riportato in forma schematica in Figura 76.

---

ad essa. Il termine "attrito" va quindi inteso nel senso di attrito interno al fluido, dovuto alla sua viscosità e legato allo scorrimento reciproco degli strati di fluido attraverso la legge costitutiva (138).

Per valori del numero di Reynolds inferiori al valore critico  $Re_c \cong 2000$  il regime di moto è laminare. In tale intervallo vale quindi la relazione (171) – desumibile, come s'è detto, anche teoricamente – della quale i risultati sperimentali rappresentano tuttavia, come per tutti i risultati teorici, la necessaria conferma. Trattandosi di una relazione monomia, essa è rappresentata da una retta in un diagramma bilogarithmico.



**Figura 76. Rappresentazione schematica dell'arpa di Nikuradse.**

Per valori del numero di Reynolds superiori al valore critico si ha l'insorgenza della turbolenza, nelle forme progressive descritte nel §5.9.1.

Tutte le curve relative al regime turbolento ed alle varie scabrezze relative giacciono superiormente ad una curva limite rappresentativa del comportamento dei tubi lisci, descritta dall'equazione di Prandtl-Von Kármán:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left( \frac{2,51}{\sqrt{\lambda} Re} \right). \quad (172)$$

Ciascuna curva associata ad una data scabrezza relativa  $d/D$  si sovrappone alla curva dei tubi lisci fino ad un certo valore del numero di Reynolds, superato il quale la curva relativa al tubo scabro se ne distacca dapprima con andamento decrescente fino ad un valore minimo, per poi assumere un andamento crescente, tendente, per valori del numero di Reynolds sufficientemente elevati, ad una giacitura parallela all'asse delle ascisse, denotante l'indipendenza dell'indice di resistenza dal numero di Reynolds. Tale condizione, detta di *moto assolutamente turbolento* o *turbolento pienamente sviluppato*, è rappresentata dall'equazione di Prandtl-Nikuradse:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left( \frac{d/D}{3,71} \right). \quad (173)$$

Si osservi che le equazioni di Prandtl-Von Kármán e Prandtl-Nikuradse hanno strutture dedotte teoricamente sulla base della legge logaritmica di distribuzione della velocità nel regime

turbolento, deducibile sulla base di un modello concettuale relativamente semplice per gli sforzi tangenziali turbolenti in prossimità della parete, e valori dei coefficienti calibrati sulla base dei rilievi sperimentali.

Le curve associate ai vari valori di scabrezza relativa si staccano dalla curva dei tubi lisci per valori del numero di Reynolds tanto maggiori quanto minore è la scabrezza relativa. Tale comportamento è dovuta alla circostanza citata al §5.9.4, per cui lo spessore del sottostrato limite viscoso decresce all'aumentare del numero di Reynolds. Pertanto, per numeri di Reynolds non troppo elevati lo spessore del sottostrato viscoso è tale da ricoprire interamente le asperità della superficie interna della tubazione, talché le scie vorticose che si generano in prossimità delle stesse vengono dissipate per effetto della viscosità prima che possano influenzare il nucleo turbolento della corrente. In tali condizioni l'effetto della scabrezza sulle resistenze al moto non è sensibile e un tubo scabro si comporta perciò come un tubo liscio. A sottolineare come tale comportamento si verifichi in dipendenza dalle condizioni del moto, la curva dei tubi lisci viene talora, più efficacemente, designata come dei tubi *fluidodinamicamente lisci*.

Per quanto detto, a ciascun valore di scabrezza relativa corrisponde un valore del numero di Reynolds per il quale le asperità della superficie della tubazione non sono più ricoperte dal sottostrato viscoso, la scabrezza può quindi esercitare un'influenza sulle resistenze al moto e la curva del tubo scabro si distacca pertanto da quella dei tubi lisci. L'essere la scabrezza omogenea determina un distacco netto e per valori del numero di Reynolds ben distinti delle curve corrispondenti a diverse scabrezze relative dalla curva dei tubi lisci.

Il regime di moto turbolento in un tubo scabro che non ha raggiunto le condizioni di turbolenza pienamente sviluppata è detto *regime turbolento di transizione*. Mentre nei regimi di tubo fluidodinamicamente liscio ed assolutamente turbolento l'indice di resistenza dipende rispettivamente soltanto dal numero di Reynolds e dalla scabrezza relativa, nel regime turbolento di transizione la dipendenza è da entrambi i parametri. Il passaggio dal regime turbolento di transizione al regime di turbolenza pienamente sviluppata, rappresentato dalla curva tratteggiata riportata nel diagramma di Nikuradse, avviene in corrispondenza del valore pari a 70 di un particolare numero di Reynolds  $Re^* = u^*d/\nu$  definito sulla base della cosiddetta *velocità d'attrito*  $u^* = \sqrt{\tau_0/\rho}$  e della scabrezza omogenea  $d$ .

Inquadrato nei suoi aspetti essenziali il problema della determinazione delle resistenze al moto in tubazioni a scabrezza omogenea mediante le esperienze di Nikuradse, si pone il problema dell'estensione al caso delle tubazioni a scabrezza eterogenea, tipica dei prodotti commerciali. I risultati sperimentali ottenuti su tubazioni commerciali hanno consentito di verificare, anche per le tubazioni a scabrezza eterogenea, il verificarsi sia del comportamento di tubo fluidodinamicamente liscio che del regime di turbolenza pienamente sviluppata, mentre le forme delle curve sperimentali differiscono nel regime turbolento di transizione, ove l'indice di resistenza ha un andamento monotono decrescente. Tale differente comportamento è interpretabile considerando che, in una superficie a scabrezza eterogenea, a differenza del caso di scabrezza omogenea, le asperità emergono dal sottostrato viscoso progressivamente, a cominciare dalle più pronunciate, alle quali può corrispondere un valore di altezza anche molto maggiore di quello medio.

Come rilevato in precedenza, la maggiore difficoltà insita in tale problema è legata alla definizione della scabrezza. Sebbene le considerazioni esposte in precedenza non garantiscano che un'unica lunghezza caratteristica possa rappresentare efficacemente la scabrezza eterogenea di una tubazione, l'analisi delle indagini sperimentali eseguite su tubazioni commerciali ha, viceversa, consentito di verificare l'accettabilità di tale rappresentazione. In particolare, l'esistenza del regime di turbolenza pienamente sviluppata ha consentito di assumere quale definizione operativa della scabrezza eterogenea, tuttora in uso, il valore di scabrezza omogenea che, in condizioni di moto assolutamente turbolento, fornisce la stessa resistenza al moto (ossia, lo stesso indice di resistenza) della tubazione commerciale, come mostrato nella Figura 77. Si parla perciò di *scabrezza omogenea equivalente*, correntemente identificata dal simbolo  $\varepsilon$ .

Tale definizione è legata, in effetti, alla verifica eseguita con successo da Colebrook, riguardo la possibilità di interpretare in maniera soddisfacente i risultati sperimentali disponibili per tubazioni commerciali mediante una formula semi-empirica, del tutto priva di alcuna giustificazione teorica,

ottenuta semplicemente sommando gli argomenti dei logaritmi a secondo membro delle formule di Prandtl-Von Kármán e di Prandtl-Nikuradse:

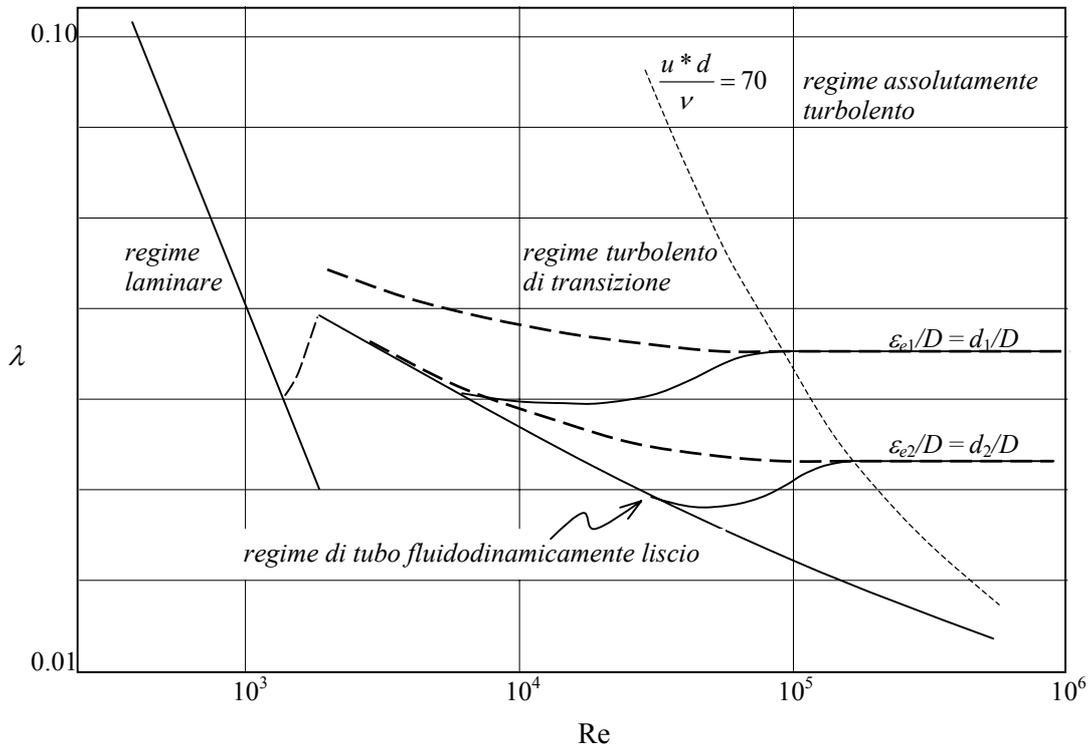


Figura 77. Schema di definizione della scabrezza omogenea equivalente.

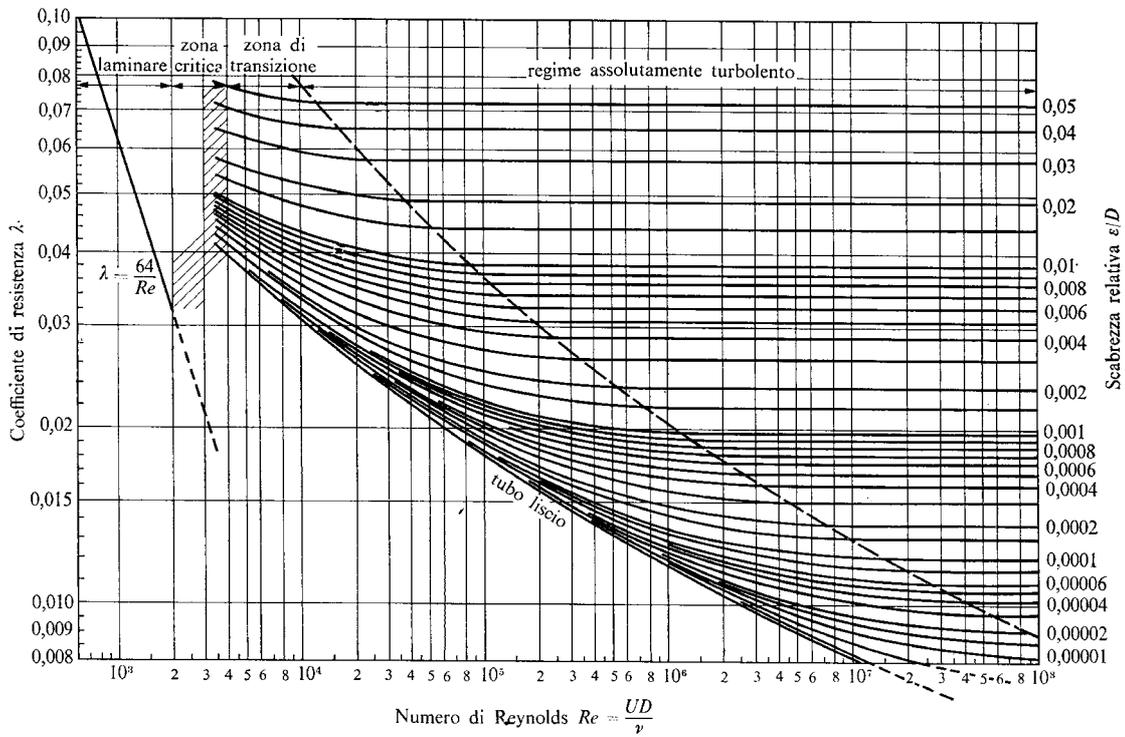


Figura 78. Abaco di Moody (fonte: Marchi-Rubatta – Meccanica dei Fluidi).

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left( \frac{2,51}{\sqrt{\lambda} Re} + \frac{\varepsilon/D}{3,71} \right), \quad (174)$$

detta *formula di Colebrook* o, talora, *di Colebrook-White*, perché basata sull'analisi di risultati sperimentali condotta precedentemente dai due autori.

Oltre che ridursi, per i casi particolari rispettivamente di regime assolutamente turbolento ( $Re \rightarrow \infty$ ) e di tubo liscio ( $\varepsilon=0$ ), alle formule di Prandtl-Nikuradse e Prandtl-Von Kármán, tale formula interpreta bene i risultati sperimentali anche nella zona del moto turbolento di transizione. È inoltre evidente che, riducendosi esattamente alla formula di Prandtl-Nikuradse per il caso di moto assolutamente turbolento, il valore di scabrezza  $\varepsilon$  che vi compare è proprio il diametro di una scabrezza omogenea che fornisce il medesimo valore del coefficiente di resistenza  $\lambda$ , da cui la più puntuale denominazione attribuita al parametro di scabrezza  $\varepsilon$  riportata in precedenza.

Nell'abaco di Moody, riportato in Figura 78, sono tracciate curve rappresentative dell'indice di resistenza dedotte dalla formula di Colebrook, oltre alla curva rappresentativa del regime laminare. Il valore di scabrezza omogenea equivalente  $\varepsilon$  da attribuire ad una data tubazione commerciale si determina ricercando quel valore di  $\varepsilon$  che consente di tracciare in un diagramma  $\lambda-Re$ , sulla base della formula di Colebrook (174), la curva che meglio si sovrappone ai punti sperimentali. Pertanto, come preannunciato, sulla base degli effetti della scabrezza (le resistenze al moto) piuttosto che su base deduttiva.

Con il corredo di tabelle che riportano i valori di scabrezza omogenea equivalente così determinati per diversi tipi di superficie interna delle tubazioni, la formula di Colebrook o l'abaco di Moody, consentono di ricavare l'indice di resistenza del tipo di tubazione prescelta corrispondente ad un dato valore del numero di Reynolds e, attraverso la formula di Darcy-Weisbach, il valore della cadente dei carichi totali per assegnati valori della velocità media della corrente e del diametro della tubazione, o viceversa.

La natura implicita dell'equazione di Colebrook nel caso di tubo liscio o di regime turbolento di transizione ha dato impulso, nel passato, alla derivazione di formule semplificate di più agevole utilizzo in relazione agli strumenti di calcolo disponibili. Allo stato attuale, tuttavia, la soluzione di una equazione implicita in  $\lambda$  non rappresenta più un serio inconveniente, potendo essere eseguita con semplici funzioni implementate in software di uso corrente, quali i solutori automatici dei fogli elettronici. Rimandando ai testi indicati per approfondimenti per una elencazione di formule di questo tipo, si ricorda che, peraltro, il problema frequentemente non si pone nelle applicazioni usuali dell'Ingegneria Civile, nelle quali il moto è generalmente turbolento pienamente sviluppato e la formula assume perciò carattere esplicito per essere in tal caso trascurabile il termine dipendente dal numero di Reynolds.

Volendo comunque procedere alla soluzione dell'equazione mediante calcolo numerico, attesa la natura implicita nell'incognita  $\lambda$  essa può ottenersi mediante un procedimento iterativo. Essendo l'equazione del tipo  $x = f(x)$ , dove  $x = (1/\lambda)^{1/2}$ , le iterazioni possono eseguirsi, nel modo più semplice, calcolando la successione di valori:

$$x_k = f(x_{k-1}) = -2 \log \left( \frac{2,51}{Re} x_{k-1} + \frac{1}{3,71} \frac{\varepsilon}{D} \right),$$

assumendo come valore iniziale  $x_0 = 0$  – ossia, condizioni di moto turbolento pienamente sviluppato ( $Re \rightarrow \infty$ ) – finché due valori successivi differiscono di una prefissata tolleranza  $\delta$ , espressa, ad esempio, in termini di scarto relativo:  $(x_k - x_{k-1})/x_{k-1} < \delta$  ( $\delta = 0.01$  per uno scarto dell'1%).

### 7.3.2 Formule pratiche

Vengono denominate formule pratiche un insieme di formule utilizzabili per il calcolo delle perdite di carico distribuite, aventi in comune, in generale, una derivazione di tipo empirico e, conseguentemente, campi di validità più limitati rispetto alla formula di Darcy-Weisbach in associazione con la formula di Colebrook o l'abaco di Moody. Del resto, la stessa formula di

Darcy-Weisbach nasce come formula empirica, nella quale l'indice di resistenza assumeva forme meno generali di quella analizzata nel paragrafo precedente.

A parte una pletora di formule reperibili, oltre che su vari testi, su pubblicazioni tecniche di ditte costruttrici di tubazioni, riferite a specifici materiali e pertanto di uso non molto generale, la formula pratica di uso più comune è la *formula di Chezy*:

$$j = \frac{U^2}{\chi^2 \mathfrak{R}} \quad (175)$$

in cui  $\chi$  (frequentemente indicato anche con il simbolo  $C^{56}$ ) è il *coefficiente di Chezy*, avente dimensioni  $\text{m}^{1/2} \text{s}^{-1}$ , per il calcolo del quale sono in uso differenti espressioni: la *formula di Bazin*:

$$\chi = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\mathfrak{R}}}}$$

la *formula di Kutter*:

$$\chi = \frac{100}{1 + \frac{m}{\sqrt{\mathfrak{R}}}}$$

la *formula di Gauckler-Strickler*:

$$\chi = k_s \mathfrak{R}^{1/6}$$

e la *formula di Manning*:

$$\chi = \frac{1}{n} \mathfrak{R}^{1/6}$$

in cui  $\gamma$ ,  $m$ ,  $k_s$  ed  $n$  rappresentano *indici o coefficienti di scabrezza* legati alla rugosità della superficie della tubazione, aventi dimensioni fisiche e corrispondenti unità di misura SI date rispettivamente da  $\text{L}^{1/2}$  ( $\text{m}^{1/2}$ ),  $\text{L}^{1/2}$  ( $\text{m}^{1/2}$ ),  $\text{L}^{1/3} \text{T}^{-1}$  ( $\text{m}^{1/3} \text{s}^{-1}$ ),  $\text{L}^{-1/3} \text{T}$  ( $\text{m}^{-1/3} \text{s}$ ): nessuna di esse, quindi, rappresenta una lunghezza caratteristica rappresentativa della scabrezza, al contrario della scabrezza omogenea equivalente  $\varepsilon$ . I coefficienti 87 e 100 delle formule di Bazin e Kutter non sono dei numeri puri; hanno invece le medesime dimensioni fisiche del coefficiente di Chezy:  $\text{m}^{1/2} \text{s}^{-1}$ .

Un'importante differenza concettuale fra la formula di Chezy corredata di una qualunque delle formule elencate per il coefficiente di scabrezza e la formula di Darcy-Weisbach corredata della formula di Colebrook per l'indice di resistenza consiste nel fatto che, nella prima, non compare il numero di Reynolds. Sulla scorta di quanto illustrato nel § 7.3.1 in sede di descrizione dei vari tipi di moto turbolento, ciò significa che *la formula di Chezy ha validità limitata al moto turbolento completamente sviluppato*, la qual cosa ben si giustifica col fatto che tali erano le condizioni nelle quali vennero condotti gli esperimenti in canali a pelo libero che, nel XVIII secolo, portarono alla sua formulazione.

Confrontando le formule di Darcy-Weisbach e di Chezy è possibile stabilire un legame fra numero indice di resistenza e coefficiente di Chezy:

$$\chi = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}$$

ed estendere così la validità della formula di Chezy all'intero regime turbolento.

<sup>56</sup> In alcuni testi il simbolo  $C$  è invece riservato al parametro dimensionale  $\chi/g^{1/2}$ .

Un'osservazione importante dal punto di vista pratico è che  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ ,  $m$ ,  $n$  sono tutti parametri crescenti all'aumentare della scabrezza della parete interna del tubo, mentre  $k_s = 1/n$  varia in senso inverso. Va anche osservato come l'uso delle formule di Gauckler-Strickler o Manning conduca a forme monomie dell'equazione di Chezy – per esempio, per una sezione circolare:

$$j = \frac{U^2}{k_s^2 R^{4/3}} = \frac{4^{4/3} U^2}{k_s^2 D^{4/3}},$$

la quale può risultare particolarmente comoda, ad esempio, nelle applicazioni acquedottistiche, eventualmente esplicitandovi la portata  $Q$ :

$$j = \frac{4^{10/3}}{\pi^2 k_s^2} \frac{Q^2}{D^{16/3}}.$$

Come per la scabrezza omogenea equivalente, anche i valori dei coefficienti di scabrezza contenuti nelle varie espressioni disponibili per il calcolo del coefficiente di Chezy si trovano tabellati nei manuali in funzione delle caratteristiche della parete del tubo. Valori dei coefficienti di scabrezza relativi ai tipi di tubazioni più comuni in varie condizioni di esercizio sono riportati in Tabella 6.

**Tabella 6. coefficienti di scabrezza per le condotte.**

Tipo di condotta	Scabrezza omogenea equivalente $\varepsilon$ (mm)	Bazin $\gamma$ ( $m^{1/2}$ )	Kutter $m$ ( $m^{1/2}$ )	Gauckler-Strickler $k_s$ ( $m^{1/3} s^{-1}$ )
Tubazioni tecnicamente lisce (vetro, ottone o rame trafilato, resina)	0 ÷ 0,02	–	–	–
Tubazioni in acciaio				
- tubi nuovi, verniciati per centrifugazione	0,05	–	–	120
- bitumati per immersione	0,10 ÷ 0,15	≤ 0,06	≤ 0,12	100
- in servizio corrente con leggera ruggine	0,2 ÷ 0,4	0,10	0,15	90
- con asfalto o catrame applicato a mano	0,5 ÷ 0,6	0,16	0,20 ÷ 0,25	85 ÷ 80
- con tuberculizzazione diffusa	1,0 ÷ 3,0	0,23	0,30 ÷ 0,35	75 ÷ 70
- cemento applicato per centrifugazione	0,05 ÷ 0,15	≤ 0,06	≤ 0,12	120
Tubazioni in lamiera saldata				
- in buone condizioni	0,2 ÷ 0,3	0,10	0,15	90
- in servizio corrente, con incrostazioni	0,4 ÷ 1,0	0,16	0,20 ÷ 0,25	85 ÷ 75
Tubazioni in ghisa				
- con rivestimento cementizio centrifugato	0,10	≤ 0,06	≤ 0,12	105
- nuove, rivestite internamente con bitume	0,15	0,06	0,12	100
- nuove, non rivestite	0,2 ÷ 0,4	0,10	0,15	90
- con lievi incrostazioni	0,4 ÷ 1,0	0,16	0,20 ÷ 0,25	85 ÷ 75
- in servizio corrente, parzialmente arrugginite	1,0 ÷ 2,0	0,23	0,35	75 ÷ 70
- fortemente incrostate	3,0 ÷ 5,0	0,36	0,45	65
Tubazioni in cemento				
- cemento-amianto	0,10	≤ 0,06	≤ 0,12	105
- cemento armato nuove, intonaco liscio	0,10 ÷ 0,15	0,06	0,12	100
- cemento armato con intonaco liscio, in servizio da più anni	fino a 2,0	0,23	0,35	70
- gallerie con intonaco di cemento, a seconda del grado di finitura	2,0 ÷ 5,0	0,23 ÷ 0,36	0,30 ÷ 0,45	70 ÷ 65

Fra le formule pratiche, citiamo infine la formula di Darcy:

$$j = \beta \frac{Q^2}{D^5},$$

utilizzata prevalentemente per tubazioni in ghisa o acciaio di diametro inferiore a 500 mm, assumendo  $\beta = 0,00164 + 0,000042/D$  per tubi nuovi e coefficienti raddoppiati per tubi vecchi.

#### 7.4 Perdite distribuite nel moto stazionario non uniforme

Nel caso di moto stazionario non uniforme di una corrente gradualmente variata possono assumersi ancora valide, in via approssimata, le formule stabilite per il moto uniforme. Tuttavia, mentre in un tratto di tubazione sede di moto uniforme compreso fra sezioni  $a$  e  $b$  distanti  $L_{ab}$ , essendo costanti la portata ed il diametro della sezione, quindi anche l'area della sezione liquida e la velocità media della corrente, la soluzione dell'equazione differenziale:

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\lambda \frac{U^2}{2gD}$$

si presenta particolarmente semplice per la costanza della cadente, potendosi in tal caso scrivere:

$$H_b - H_a = -\int_a^b \lambda \frac{U^2}{2gD} ds = -\lambda \frac{U^2}{2gD} L_{ab},$$

nel caso di moto non uniforme la perdita di carico nel tratto deve necessariamente essere determinata risolvendo un integrale. A tale scopo, converrà avvalersi dell'equazione di continuità nella forma  $Q = U\Omega = \text{cost}$ , rendendo in tal modo, almeno per il caso di moto assolutamente turbolento in cui  $\lambda$  non dipende dal numero di Reynolds, la funzione integranda dipendente solo da parametri geometrici di cui è noto l'andamento in funzione dell'ascissa  $s$ :

$$H_b - H_a = -\int_a^b \lambda \frac{Q^2}{2gD\Omega^2} ds = -\frac{8Q^2}{g\pi^2} \int_a^b \frac{\lambda(\varepsilon/D)}{D^5} ds.$$

#### 7.5 Perdite di carico localizzate

Secondo quanto già più volte richiamato, nei tratti nei quali la corrente non può considerarsi gradualmente variata essa non può essere studiata mediante un'equazione del tipo (169), in cui  $j = -\partial H/\partial s$ , giacché non è definibile una linea piezometrica della corrente né, quindi, una linea dei carichi totali. Il moto, eventualmente comprendente fenomeni di distacco con relative elevate dissipazioni di energia, deve in tal caso essere studiato mediante l'equazione globale del moto. Tipicamente, per un tratto di questo tipo, generalmente di sviluppo limitato, interposto fra due tratti sedi di correnti gradualmente variate, ciò che interessa in pratica è determinare la variazione del carico totale fra le due sezioni regolari poste alle estremità del tratto, espresse come frazione dell'altezza cinetica della corrente a valle dello stesso, nella forma:

$$\Delta H = H_m - H_v = \eta \frac{U_v^2}{2g},$$

in cui i pedici  $m$  e  $v$  si riferiscono alle sezioni a monte ed a valle del tratto considerato.

Nonostante, per quanto detto, in tali tratti della corrente non abbia senso, a rigore, il tracciamento delle linee piezometrica e dei carichi totali, ciò si suole tuttavia fare, convenzionalmente, nella rappresentazione grafica, avendo però chiara in mente la differenza

sostanziale con le correnti gradualmente variate, che sono le sole per le quali le due curve possono essere, a rigore, definite e tracciate.

Richiamando una definizione introdotta nel § 6.4, essendo tali tratti generalmente di sviluppo limitato, le relative perdite di carico vengono dette localizzate. Nelle rappresentazioni del profilo longitudinale di una condotta a scale distorte, tali zone possono essere anche rappresentate, in pratica, come discontinuità delle linee dei carichi totali e piezometrica.

### 7.5.1 Perdita di Borda o per brusco allargamento

Una classe importante di perdite di carico localizzate è quella in cui le perdite sono determinate da una decelerazione della corrente, che, nel caso di un fluido incomprimibile, isoterma ed omogeneo in moto stazionario, al quale verrà fatto esclusivo riferimento, è associata ad un aumento della sezione liquida nel senso del moto, la portata essendo costante lungo l'asse della corrente, eq (165).

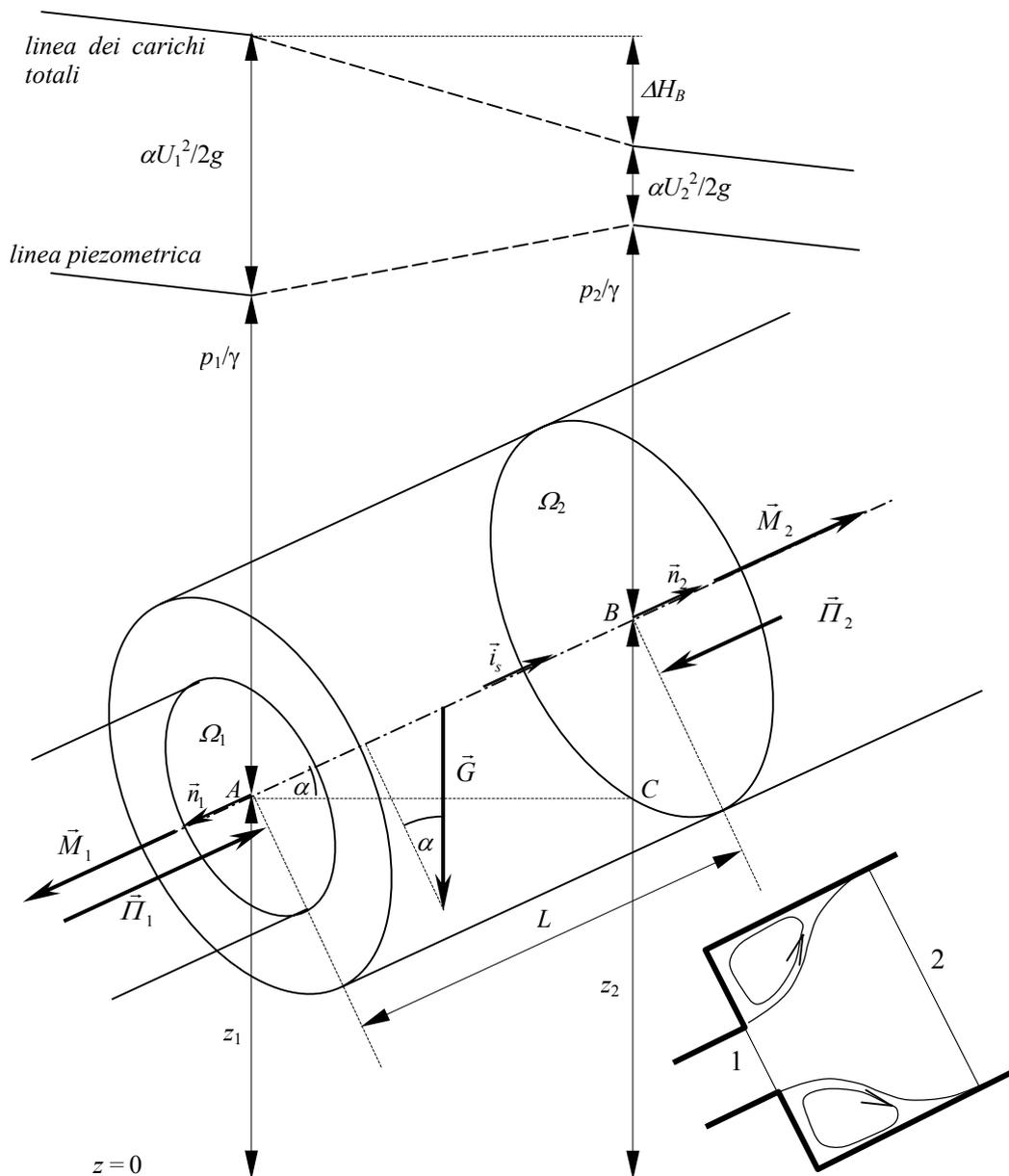


Figura 79. Schema di riferimento per la deduzione dell'espressione della perdita di carico per brusco allargamento (o di Borda).

Un caso rilevante sia in sé, ai fini applicativi, che per il fatto che, nei vari tipi di perdite localizzate ascrivibili a tale classe, tutta o parte della perdita è legata ad un fenomeno di questo tipo, è quello che si determina per un brusco allargamento della corrente. In particolare, si consideri il brusco allargamento di una corrente in moto stazionario determinato da un cambio di diametro, non raccordato, di due tubazioni a sezione circolare, rappresentato in Figura 79. Per effetto del brusco aumento della sezione della tubazione, la corrente proveniente dal tronco a sezione minore  $\Omega_1$  si immette nel tronco a sezione maggiore  $\Omega_2$  formando un getto, con conseguente distacco della vena dalle pareti della tubazione e creazione di una zona di ricircolazione fra il getto e le pareti della tubazione caratterizzata da intensa turbolenza, come rappresentato nel particolare della Figura 79.

Il fenomeno si studia proiettando lungo l'asse della tubazione, nel verso del moto, l'equazione globale del moto nella forma (163) applicata al volume di controllo cilindrico di sezione  $\Omega_2$  e sviluppo in asse  $L$ , compreso fra la sezione di valle del tronco a sezione  $\Omega_1$ , ove la corrente è ancora in moto uniforme e la sezione della condotta varia bruscamente, e la sezione a valle della zona di ricircolazione, ove la corrente, successivamente al riattacco alle pareti della tubazione, riacquista le caratteristiche del moto uniforme:

$$(\vec{I} + \vec{M}) \cdot \vec{i}_s = (\vec{G} + \vec{\Pi}_p + \vec{\Pi}_\mu + \vec{\Pi}_R) \cdot \vec{i}_s ,$$

nella quale, ad eccezione di  $\vec{\Pi}_R$ , tutti i termini sono relativi alle quantità medie del moto turbolento ed  $\vec{i}_s$  è il versore avente direzione e verso dei moti uniformi esterni al volume.

Essendo il moto stazionario, risulta nullo il termine di inerzia locale,  $\vec{I}$ .

Il flusso di quantità di moto attraverso la superficie di contorno del volume di controllo  $S_c$  risulta dai contributi delle sole due sezioni di estremità,  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , poiché la parte rimanente della superficie di contorno è costituita dalle pareti della tubazione, attraverso le quali il flusso è nullo. Essendo velocità e normale paralleli e discordi nella sezione 1 ( $\vec{u} \cdot \vec{n} = -u$ ) e paralleli e concordi nella sezione 2 ( $\vec{u} \cdot \vec{n} = u$ ), mentre le velocità sono concordi con il versore dell'asse, si ha:

$$\vec{i}_s \cdot \vec{M} = M_1 + M_2 = \vec{i}_s \cdot \int_{\Omega_1} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS + \vec{i}_s \cdot \int_{\Omega_2} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = - \int_{\Omega_1} \rho u^2 dS + \int_{\Omega_2} \rho u^2 dS .$$

Analogamente a quanto fatto nel §6.3 per la valutazione della componente cinetica della potenza di una corrente in una sezione, gli integrali esprimenti il flusso di quantità di moto nelle sezioni regolari si esprimono in funzione delle grandezze medie nella forma:

$$M_1 = - \int_{\Omega_1} \rho u^2 dS = -\beta \rho U_1^2 \Omega_1 ,$$

e analogamente per la sezione 2, introducendo il *coefficiente di ragguaglio del flusso di quantità di moto*, o *secondo coefficiente di Coriolis*, dato, in generale, da:

$$\beta = \frac{\int u^2 dS}{U^2 \Omega} .$$

Come già per il coefficiente di ragguaglio delle potenze cinetiche  $\alpha$ , nel caso di moto turbolento, per effetto dello schiacciamento del profilo di velocità, può assumersi anche  $\beta=1$  a meno di errori pari a poche unità percentuali.

Ripetendo le medesime argomentazioni utilizzate nel § 7.2, considerando il triangolo rettangolo  $ABC$  avente ipotenusa  $AB$  di lunghezza  $L$  e cateti orizzontale  $AC$  e verticale  $BC$ , la componente assiale della forza peso si può esprimere nel modo seguente:

$$\vec{i}_s \cdot \vec{G} = G_s = -|\vec{G}| \sin \alpha = -\gamma \Omega_2 L \sin \alpha = -\gamma \Omega_2 (z_2 - z_1) .$$

Nella valutazione della componente assiale delle forze di pressione  $\vec{\Pi}_p$ , la superficie laterale cilindrica del volume di controllo offre un contributo nullo essendo il relativo risultante ortogonale all'asse. Per quanto riguarda le sezioni di estremità, va intanto osservato che la superficie da considerare nella sezione 1 è la superficie circolare di area  $\Omega_2$ , parte della quale – la superficie di area  $\Omega_1$  – è attraversata dalla corrente, mentre la rimanente corona circolare di area  $\Omega_2 - \Omega_1$  è a contatto con la parete della tubazione. Inoltre – fatto tutt'altro che scontato in una superficie così composta – la distribuzione della pressione su di essa è sensibilmente idrostatica, con valore della quota piezometrica pari a quella nella tubazione di sezione  $\Omega_1$ . La distribuzione di pressione è invece senz'altro idrostatica nella sezione 2, essendo essa una sezione regolare, in quanto sede di moto uniforme. Operando come nel § 6.3, utilizzando le formule per il calcolo delle spinte idrostatiche su superfici piane, la componente assiale del risultante delle forze di pressione può quindi scriversi:

$$\vec{i}_s \cdot \vec{\Pi}_p = \vec{i}_s \cdot \int_{\Omega_1} -p\vec{n} dS + \vec{i}_s \cdot \int_{\Omega_2} -p\vec{n} dS = p_{G1}\Omega_2 - p_{G2}\Omega_2.$$

La proiezione lungo l'asse del risultante delle forze viscosive:

$$\vec{\Pi}_\mu = \int_{S_c} \mu \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} dS$$

può ritenersi trascurabile nei suoi vari contributi: sulle sezioni regolari  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  per le considerazioni esposte al § 6.1, essendo esse sedi di moto uniforme; nella corona circolare di area  $\Omega_2 - \Omega_1$  perché la direzione delle velocità si mantiene tangente alla parete ancora ad una distanza finita da questa; sulla superficie cilindrica laterale, infine, a causa del limitato sviluppo della stessa.

I contributi al risultante degli sforzi turbolenti risultano infine nulli alle pareti della tubazione per la condizione di aderenza e trascurabili sulle sezioni regolari  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ .

Raccogliendo i termini residui dell'equazione globale proiettata si scrive quindi:

$$-\rho U_1^2 \Omega_1 + \rho U_2^2 \Omega_2 = -\gamma \Omega_2 (z_2 - z_1) + p_{G1}\Omega_2 - p_{G2}\Omega_2.$$

Utilizzando l'equazione di continuità (166) per ottenere:

$$U_1 = \frac{\Omega_2}{\Omega_1} U_2,$$

dividendo membro a membro per  $\gamma \Omega_2$  e riordinando si perviene all'espressione:

$$\left( z_1 + \frac{p_{G1}}{\gamma} \right) - \left( z_2 + \frac{p_{G2}}{\gamma} \right) = h_1 - h_2 = \left( 1 - \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right) \frac{U_2^2}{g},$$

da cui, essendo  $\Omega_1 < \Omega_2$ , si conclude il valore della quota piezometrica a valle del brusco allargamento è maggiore del valore a monte.

Essendo  $H = z + p/\gamma + \alpha U^2/2g = h + \alpha U^2/2g$ , assumendo, come d'uso,  $\alpha = 1$  e utilizzando ancora l'equazione di continuità, la perdita di carico per brusco allargamento, nota anche sotto il nome di *perdita di Borda*<sup>57</sup>, è data da:

<sup>57</sup> nome di un idraulico francese del XIX secolo, da pronunciare quindi con l'accento sulla "a"!

$$\Delta H_B = H_1 - H_2 = \left( z_1 + \frac{p_{G1}}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} \right) - \left( z_2 + \frac{p_{G2}}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g} \right) = \left( 1 - \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right) \frac{U_2^2}{g} + \frac{U_1^2}{2g} - \frac{U_2^2}{2g} =$$

$$\left( 2 - 2 \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right) \frac{U_2^2}{2g} + \frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2} \frac{U_2^2}{2g} - \frac{U_2^2}{2g} = \left( 1 + \frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2} - 2 \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right) \frac{U_2^2}{2g} = \left( \frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2 \frac{U_2^2}{2g} = \frac{(U_1 - U_2)^2}{2g} \quad (176)$$

Sulla base di tale espressione, la perdita per brusco allargamento è, ovviamente, nulla se  $\Omega_1 = \Omega_2$ , mentre è pari all'intera altezza cinetica della corrente nella sezione  $\Omega_1$  se  $\Omega_1 \ll \Omega_2$ . Quest'ultimo è il caso che si verifica tipicamente quando una corrente sbocca in un serbatoio, all'interno del quale l'energia cinetica della corrente viene progressivamente dissipata; si parla allora di *perdita di sbocco*.

### 7.5.2 Perdita di imbocco

All'imbocco di una condotta da un serbatoio si verifica una perdita localizzata composta di una parte di origine viscosa e, se si verifica un distacco della vena liquida, di una parte relativa al brusco allargamento che la vena subisce fra la sezione ove si ha la massima contrazione (*sezione contratta*) e la sezione in cui la vena occupa nuovamente l'intera condotta. L'entità della contrazione dipende dalla variazione della direzione delle traiettorie delle particelle prossime alla parete del serbatoio.

Si considerano tre casi notevoli:

#### 7.5.2.1 Imbocco a spigolo vivo (non raccordato), deviazione di 90° (Figura 80)

Le perdite viscosse possono essere valutate come perdita di energia cinetica calcolabile sulla base della correzione del valore della velocità nella sezione contratta deducibile nell'ipotesi di fluido ideale (*velocità torricelliana*), effettuata mediante il coefficiente di velocità  $C_v \cong 0.98$ :

$$\Delta H_1 = (1 - C_v^2) \frac{U_c^2}{2g} = (1 - C_v^2) \frac{(Q / \Omega_c)^2}{2g} = (1 - C_v^2) \frac{(\Omega U / \Omega_c)^2}{2g} = \frac{1 - C_v^2}{C_c^2} \frac{U^2}{2g}$$

avendo indicato con  $C_c = \Omega_c / \Omega$  il *coefficiente di contrazione* che, per deviazione di 90° delle traiettorie, vale  $C_c \cong 0,61$ . Sostituendo i valori numerici si ha:

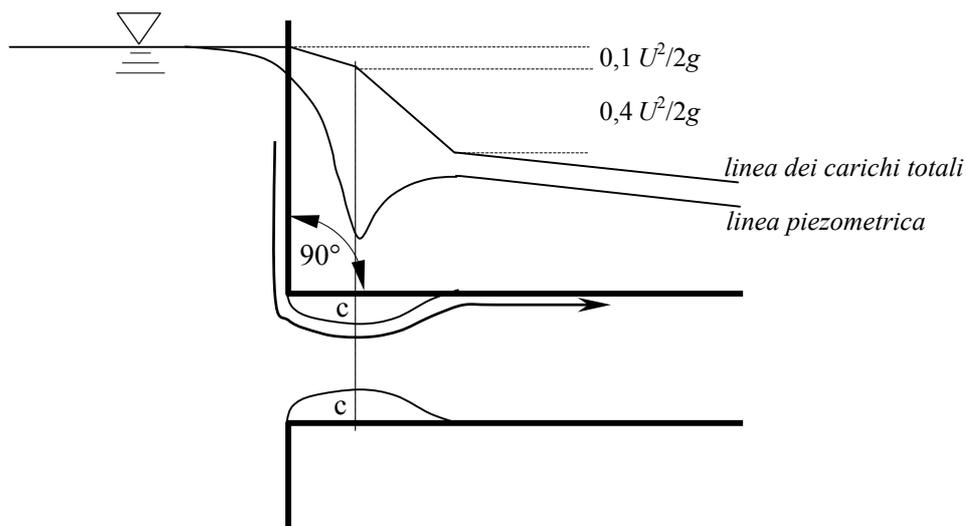


Figura 80. Imbocco a spigolo vivo.

$$\Delta H_1 = \frac{1 - (0,98)^2}{(0,61)^2} \frac{U^2}{2g} = 0,106 \frac{U^2}{2g} \cong 0,1 \frac{U^2}{2g} .$$

La perdita dovuta al brusco allargamento è data da:

$$\Delta H_2 = \left( \frac{\Omega}{\Omega_c} - 1 \right)^2 \frac{U^2}{2g} = \left( \frac{1}{C_c} - 1 \right)^2 \frac{U^2}{2g} = \left( \frac{1}{0,61} - 1 \right)^2 \frac{U^2}{2g} = 0,409 \frac{U^2}{2g} \cong 0,4 \frac{U^2}{2g} .$$

Complessivamente si ha pertanto una perdita di imbocco pari a:

$$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 \cong 0,5 \frac{U^2}{2g} . \quad (177)$$

### 7.5.2.2 Imbocco con tubo addizionale interno, deviazione di 180° (Figura 81)

Il coefficiente di contrazione vale, in questo caso,  $C_c = 0,5$ . Sostituendo tale valore nelle espressioni precedentemente ottenute per le perdite viscosa e per brusco allargamento, si ottiene:

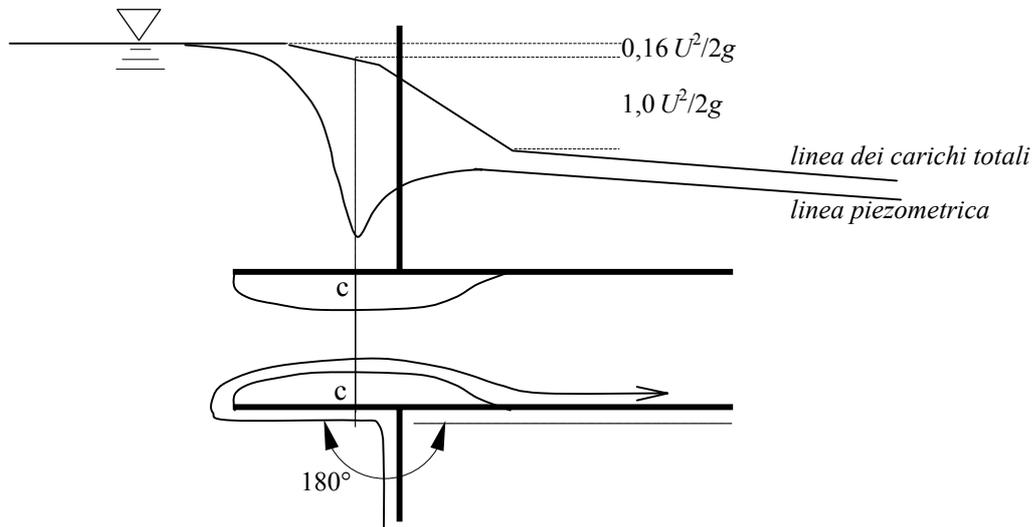


Figura 81. Imbocco con tubo addizionale interno.

$$\Delta H_1 = \frac{1 - C_v^2}{C_c^2} \frac{U^2}{2g} = \frac{1 - (0,98)^2}{(0,5)^2} \frac{U^2}{2g} = 0,158 \frac{U^2}{2g} ,$$

$$\Delta H_2 = \left( \frac{1}{C_c} - 1 \right)^2 \frac{U^2}{2g} = \left( \frac{1}{0,5} - 1 \right)^2 \frac{U^2}{2g} = 1,00 \frac{U^2}{2g}$$

$$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 \cong 1,16 \frac{U^2}{2g} . \quad (178)$$

### 7.5.2.3 Imbocco ben raccordato (Figura 82)

Raccordando adeguatamente la condotta alle pareti del serbatoio, le perdite di imbocco possono essere ridotte ad un valore minimo:

$$\Delta H = 0,05 \div 0,10 \frac{U^2}{2g} . \quad (179)$$

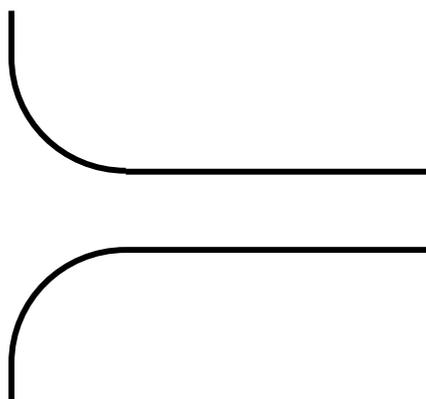


Figura 82. Imbocco ben raccordato.

### 7.5.3 Perdita per brusco restringimento

In corrispondenza di un brusco restringimento di sezione (Figura 83), a valle del cambio di diametro si verifica un distacco di vena, con una contrazione di entità dipendente dal rapporto dei due diametri. Conseguentemente si produce una perdita localizzata dovuta prevalentemente al successivo brusco allargamento che la vena subisce a valle della sezione contratta e su questa base valutabile approssimativamente mediante la formula della perdita di Borda.

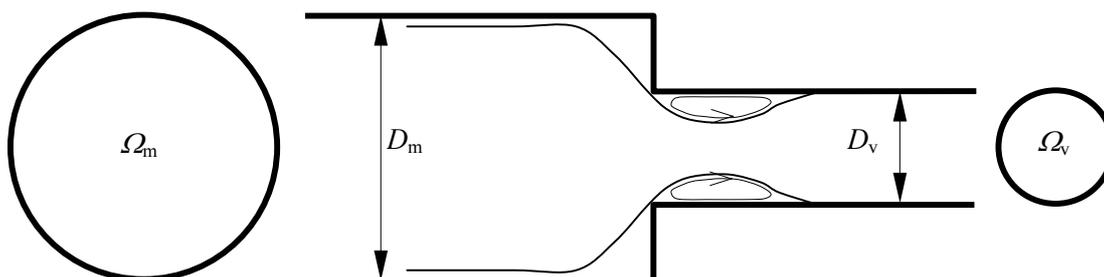


Figura 83. Brusco restringimento.

In termini più precisi, per tenere conto dei fenomeni che hanno luogo a monte della sezione contratta, la perdita di carico per brusco restringimento può valutarsi come frazione dell'altezza cinetica della corrente a valle:

$$\Delta H = \eta_r \frac{U_v^2}{2g}, \quad (180)$$

in cui  $\eta_r$  è un coefficiente dipendente dal rapporto dei diametri, desumibile dalla Tabella 7 (v. Manuale di Ingegneria Civile Cremonese, edizione 1981, Parte Prima, pag. 208). Come si può vedere dalla Tabella 7, per  $\Omega_v/\Omega_m \ll 1$  si ottiene il valore 0,5 proprio della perdita di imbocco, costituente infatti un caso limite di perdita per brusco restringimento.

Tabella 7. Coefficienti della formula per le perdite localizzate per brusco restringimento.

$\Omega_v/\Omega_m$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0
$C_c$	0,624	0,632	0,643	0,659	0,681	0,712	0,813	1,0
$\eta_r$	0,47	0,44	0,40	0,35	0,28	0,21	0,10	0

### 7.5.4 Perdite in tronchi divergenti (Figura 84)

Le perdite in tronchi divergenti vengono espresse in forma simile alle perdite di brusco allargamento (Gibson):

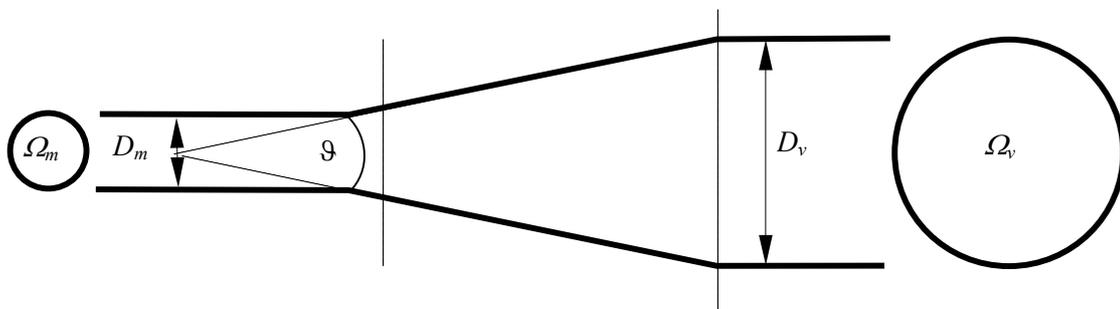
$$\Delta H = K_g \frac{(U_m - U_v)^2}{2g} = K_g \left( \frac{\Omega_v}{\Omega_m} - 1 \right)^2 \frac{U_v^2}{2g}, \quad (181)$$

in cui il coefficiente  $K_g$  dipende dal valore dell'angolo di apertura del divergente,  $\vartheta$ , e dal rapporto delle aree delle sezioni, come illustrato nella Tabella 8 (Marchi-Rubatta – Meccanica dei Fluidi, edizione 1981, p. 452):

**Tabella 8. Coefficienti della formula di Gibson per perdite localizzate in divergenti.**

$\vartheta$	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	120°	180°	$\Omega_m/\Omega_v$
$K_g$	0,20	0,40	0,70	0,95	1,10	1,20	1,20	1,16	1,12	1,05	1,00	1/2
			0,65	0,80	0,95	1,00	1,05	1,05	1,05	1,05	1,00	1/10

Come si può vedere dalla Tabella 8, per fissati valori delle aree delle sezioni il coefficiente  $K_g$  ha un massimo di valore maggiore dell'unità. Il motivo di ciò risiede nel fatto che le formule di Gibson esprimono le perdite di carico che si misurano *complessivamente* nel divergente, e contengono perciò, oltre alle perdite dovute alla turbolenza associata al distacco della vena liquida, le perdite continue dovute alla resistenza della parete del tubo. Queste ultime, evidentemente, per fissati valori delle aree delle sezioni, diminuiscono all'aumentare dell'angolo di apertura, poiché in tal modo diminuisce lo sviluppo dell'elemento. Viceversa, al tendere a zero dell'angolo di apertura, le perdite complessive aumentano indefinitamente per il fatto che, pur tendendo a zero le perdite per distacco di vena, lo sviluppo dell'elemento cresce indefinitamente. Il valore minimo del coefficiente  $K_g$  si ha per  $\vartheta = 6^\circ \div 7^\circ$  e vale 0,13.



**Figura 84. Condotta divergente.**

### 7.5.5 Perdite nelle curve (Figura 85)

Le perdite localizzate nelle curve sono proporzionali all'altezza cinetica della corrente, secondo un coefficiente di proporzionalità dipendente dall'angolo di deviazione,  $\omega$ , e dal rapporto fra il raggio di curvatura dell'asse della condotta ed il diametro del tubo:

$$\Delta H = \eta_c \frac{U^2}{2g}, \quad \eta_c = \eta_c(\omega, r/D). \quad (182)$$

Nei manuali il lettore può trovare una serie di espressioni di perdite di carico localizzate di varia natura (gomiti, giunzioni, valvole di vario tipo, saracinesche, etc..) di cui in questa sede si omette una descrizione particolareggiata.

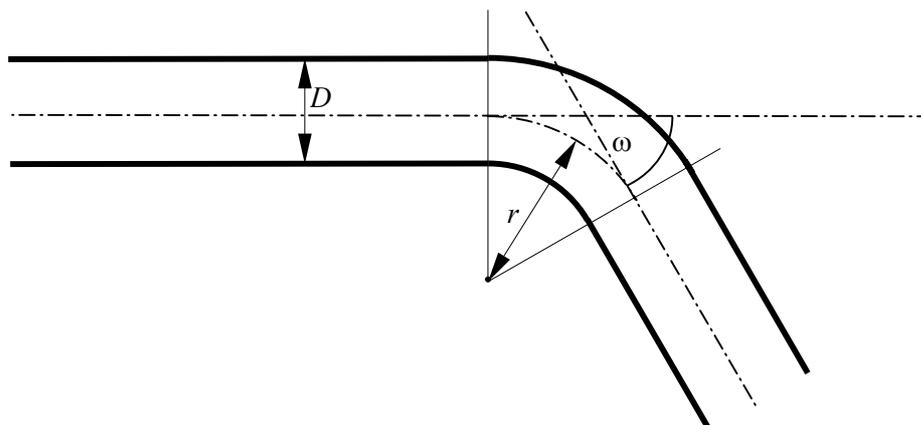


Figura 85. Curva di una tubazione.

## 7.6 Progetto e verifica delle condotte in pressione

Con le espressioni illustrate in precedenza per il calcolo delle perdite di carico distribuite e localizzate, è ora possibile analizzare il funzionamento di una condotta in pressione, allo scopo di eseguire operazioni sia di progetto che di verifica.

In termini generali, tale operazione richiede di esprimere che la somma delle perdite di carico distribuite e localizzate, che si riconoscono avere luogo nelle varie parti della condotta, sia pari alla differenza dei carichi totali fra i due estremi di monte e di valle, determinati da idonee condizioni al contorno. Ai fini del calcolo delle perdite di carico distribuite, verrà utilizzata la formula di Darcy-Weisbach (170) congiuntamente alla formula di Colebrook o all'abaco di Moody per la determinazione dell'indice di resistenza  $\lambda$ , o la formula di Chezy (175) congiuntamente ad una delle espressioni illustrate nel § 7.3.2 per il coefficiente  $\chi$ . Inoltre, verrà fatto uso dell'equazione di continuità, la quale stabilisce che la portata debba mantenersi costante lungo l'asse della condotta:

$$Q = U\Omega = \text{cost} .$$

Come già osservato nel § 7.4, il calcolo delle perdite di carico distribuite in un tratto generico di tubazione sede di moto uniforme compreso fra sezioni  $a$  e  $b$  distanti  $L_{ab}$  si presenta particolarmente semplice, essendo costanti lungo ciascuno di essi sia la portata che il diametro, quindi anche l'area della sezione e la velocità media, e perciò anche la cadente, potendosi in tal caso scrivere:

$$H_b - H_a = -\int_a^b \lambda \frac{U^2}{2gD} ds = \lambda \frac{U^2}{2gD} L_{ab} .$$

Ovviamente, ad una conclusione analoga si perverrebbe utilizzando la formula di Chezy.

A titolo esemplificativo, si mostra come determinare la portata che fluisce in condizioni stazionarie nella condotta di Figura 86, della quale siano noti tutti i dati geometrici (lunghezze, diametri e scabrezze dei tre tratti e quota dell'asse, diametro dell'ugello del convergente, livello del liquido nel serbatoio, coefficiente di contrazione allo sbocco in aria), oltre al peso specifico del liquido convogliato. Sebbene nello schema di Figura 86 siano stati indicati, per chiarezza concettuale, sviluppi dei tratti sede di perdite distribuite che escludono le zone sede di perdite localizzate, considerato il limitato sviluppo di queste ultime è di norma lecito utilizzare nel calcolo delle perdite distribuite le intere lunghezze delle tubazioni, commettendo comunque un errore a favore della sicurezza in quanto le perdite di carico vengono in tal modo sovrastimate.

Le perdite di carico distribuite e localizzate che intervengono fra l'interno del serbatoio  $A$  e la sezione contratta  $C$  a valle del convergente sono, nell'ordine (vedi Figura 86):

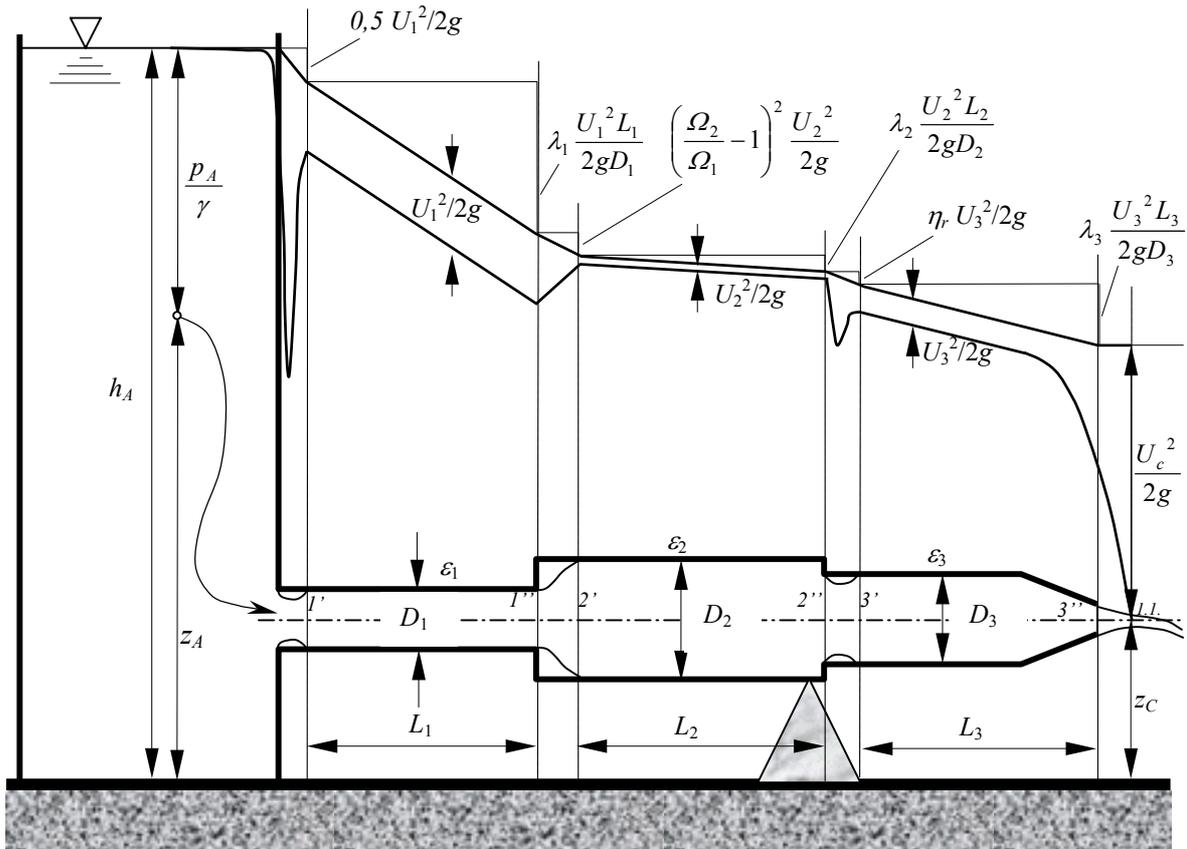


Figura 86. Esempio di condotta in pressione con sbocco in aria.

$$H_A - H_{1'} = 0,5 \frac{U_1^2}{2g}$$

perdita di imbocco;

$$H_{1'} - H_{1''} = \int_{1'}^{1''} \lambda_1 \frac{U_1^2}{2g D_1} ds = \lambda_1 \frac{U_1^2}{2g D_1} L_1$$

perdita distribuita nel tratto 1;

$$H_{1''} - H_2 = \left( \frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2 \frac{U_2^2}{2g}$$

perdita per brusco allargamento;

$$H_2 - H_{2''} = \int_{2'}^{2''} \lambda_2 \frac{U_2^2}{2g D_2} ds = \lambda_2 \frac{U_2^2}{2g D_2} L_2$$

perdita distribuita nel tratto 2;

$$H_{2''} - H_3 = \eta_r \frac{U_3^2}{2g}, \quad \eta_r = \eta_r(\Omega_3/\Omega_2)$$

perdita per brusco restringimento;

$$H_3 - H_{3''} = \int_{3'}^{3''} \lambda_3 \frac{U_3^2}{2g D_3} ds = \lambda_3 \frac{U_3^2}{2g D_3} L_3$$

perdita distribuita nel tratto 3;

$$H_{3''} - H_c \cong 0$$

percorso in aria a valle convergente.

Si osservi che, essendo incognita la portata, non è noto il valore del numero di Reynolds e non si è perciò in grado di assegnare un valore definitivo all'indice di resistenza  $\lambda = \lambda(Re, \varepsilon/D)$ . In assenza di altre indicazioni, il calcolo potrà dapprima eseguirsi sulla base di un valore di  $\lambda$  determinato

esplicitamente sotto l'ipotesi di moto assolutamente turbolento, essendo in tal caso  $\lambda = \lambda(\varepsilon/D)$ , potendosi trascurare il termine  $2,51/(\lambda^{1/2} Re)$  nella formula di Colebrook.

A rigore, avendo il convergente sezione variabile, la relativa perdita distribuita avrebbe dovuto valutarsi, come indicato al §7.4, mediante un integrale, utilizzando peraltro formule stabilite per il moto uniforme. Tuttavia, assumendo, come è normale, uno sviluppo del convergente ridotto rispetto al terzo tronco a monte di esso, la valutazione delle relative perdite distribuite può effettuarsi, in via speditiva, considerando una lunghezza  $L_3$  comprensiva della lunghezza del convergente, così come è stato fatto nell'esempio in questione.

Sommando membro a membro le espressioni delle perdite di carico nei vari tratti, si ottiene l'equazione algebrica esprimente l'insieme delle perdite di energia della corrente, identificata anche come espressione del teorema di Bernoulli generalizzato:

$$H_A - H_c = 0,5 \frac{U_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{U_1^2}{2gD_1} L_1 + \left( \frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2 \frac{U_2^2}{2g} + \lambda_2 \frac{U_2^2}{2gD_2} L_2 + \eta_r \frac{U_3^2}{2g} + \lambda_3 \frac{U_3^2}{2gD_3} L_3$$

in cui:

$$H_A = z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{U_A^2}{2g} \cong z_A + \frac{p_A}{\gamma} = h_A$$

$$H_c = z_c + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{U_c^2}{2g} \cong z_c + \frac{U_c^2}{2g} ,$$

avendo considerato tutte le particelle fluide costituenti la corrente come provenienti da punti del serbatoio  $A$  abbastanza lontani dall'imbocco della condotta per poterne trascurare l'altezza cinetica. Detti punti si trovano pertanto all'interno di un campo di pressioni idrostatico, in cui la quota piezometrica si mantiene costante e pari alla quota della superficie libera del liquido contenuto nel serbatoio, costituente la materializzazione del relativo piano dei carichi idrostatici.

Nella sezione contratta a valle del convergente si hanno ovunque condizioni di pressione nulla. Si badi che tale sezione *non* è una sezione regolare. Si può infatti mostrare facilmente che una distribuzione di pressione uniforme su una sezione verticale, quale è la sezione  $c$ , deriva dall'aver tutte le traiettorie passanti per tale sezione curvatura non trascurabile, causata dalla accelerazione di gravità cui le particelle sono sottoposte, muovendosi, da tale sezione in poi, come un grave in aria.

Sostituendo le espressioni dei carichi totali agli estremi della corrente nella equazione generale delle perdite di carico, si ha:

$$h_A - z_c = \frac{U_c^2}{2g} + 0,5 \frac{U_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{U_1^2}{2gD_1} L_1 + \left( \frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2 \frac{U_2^2}{2g} + \lambda_2 \frac{U_2^2}{2gD_2} L_2 + \eta_r \frac{U_3^2}{2g} + \lambda_3 \frac{U_3^2}{2gD_3} L_3 .$$

Utilizzando l'equazione di continuità nella forma  $U\Omega = Q = \text{cost}$ , l'equazione precedente può scriversi:

$$h_A - z_c = \frac{Q^2}{2g\Omega_c^2} + \frac{0,5 \cdot Q^2}{2g\Omega_1^2} + \frac{\lambda_1 Q^2 L_1}{2gD_1 \Omega_1^2} + \left( \frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2 \frac{Q^2}{2g\Omega_2^2} + \frac{\lambda_2 Q^2 L_2}{2gD_2 \Omega_2^2} + \frac{\eta_r Q^2}{2g\Omega_3^2} + \frac{\lambda_3 Q^2 L_3}{2gD_3 \Omega_3^2} ,$$

riconducibile, mettendo in evidenza i quadrati delle portate che compaiono nei termini di perdita di carico e nell'altezza cinetica nella sezione contratta, a una forma del tipo:

$$h_A - z_c = KQ^2 ,$$

in cui:

$$K = \frac{1}{2g\Omega_c^2} + \frac{0,5}{2g\Omega_1^2} + \frac{\lambda_1 L_1}{2gD_1\Omega_1^2} + \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1\right)^2 \frac{1}{2g\Omega_2^2} + \frac{\lambda_2 L_2}{2gD_2\Omega_2^2} + \frac{\eta_r}{2g\Omega_3^2} + \frac{\lambda_3 L_3}{2gD_3\Omega_3^2} .$$

è un coefficiente il cui valore è calcolabile. Il valore della portata si ricava quindi dalla:

$$Q = \sqrt{\frac{h_A - z_c}{K}} . \quad (183)$$

Per verificare l'accettabilità dell'approssimazione occorrerà, in pratica, controllare i valori del numero di Reynolds,  $Re$ , che si ottengono, per i vari tratti, in corrispondenza del valore di portata determinato. Il controllo può essere effettuato graficamente sull'abaco di Moody, oppure, analiticamente, facendo riferimento alla curva separatrice delle zone del diagramma relative a moto turbolento di transizione e moto turbolento pienamente sviluppato menzionata nel §7.3.1, di equazione:

$$Re^* = \frac{u^* \varepsilon}{\nu} = 70 ,$$

il moto essendo assolutamente turbolento per valori di  $Re^* > 70$ . Ricordando che  $u^* = \sqrt{\tau_0/\rho}$  e  $\tau_0 = \gamma R_j$  e utilizzando la formula di Darcy-Weisbach, con semplici passaggi la stessa condizione può essere espressa in funzione delle grandezze utilizzate nei calcoli pratici:

$$Re^* = \frac{U\varepsilon\sqrt{\lambda/2}}{2\nu} = 70 , \quad (184)$$

ovvero, in termini del numero di Reynolds della corrente:

$$Re \cong \frac{200}{\sqrt{\lambda}(\varepsilon/D)} . \quad (185)$$

In alternativa, si può ricalcolare l'indice di resistenza con la formula di Colebrook inserendo nell'argomento del logaritmo il valore di  $\lambda$  determinato sotto l'ipotesi di moto assolutamente turbolento: nel caso tale ipotesi fosse corretta, il valore così calcolato non dovrebbe differire significativamente da quello precedente.

Qualora il tipo di verifica scelta indicasse valori di  $Re^*$  (o  $Re$ ) propri del regime di transizione, il calcolo andrà reiterato, utilizzando in ciascuna iterazione, per il calcolo del coefficiente  $K$ , valori degli indici di resistenza calcolati sulla base dei numeri di Reynolds determinati nella iterazione precedente.

L'applicazione della formula di Chezy in luogo delle formule di Darcy-Weisbach – Colebrook, essendo di validità limitata al moto turbolento pienamente sviluppato, non comporta iterazioni. Naturalmente, in linea di principio occorre sempre verificare le condizioni di turbolenza pienamente sviluppata attraverso le (184) o (185) o mediante l'abaco di Moody. Nel caso in cui il moto non risultasse assolutamente turbolento, la formula di Chezy si rivelerà insufficiente e risulterà perciò necessario effettuare il calcolo iterativo con le formule di Darcy-Weisbach – Colebrook.

Un tipo diverso di condizioni al contorno all'estremo di valle della corrente va imposto nel caso di sbocco sotto battente, illustrato in Figura 87. In tal caso, la corrente nella sezione contratta allo sbocco è gradualmente variata, essendo immersa in liquido pressoché in quiete che determina al contorno della sezione una distribuzione di pressione idrostatica, la quale rende possibile la medesima condizione all'interno della sezione. Le quote piezometriche, costanti all'interno della sezione contratta e del liquido in quiete nel serbatoio, devono anche necessariamente essere uguali fra loro per la validità del principio di azione e reazione all'interfaccia di sezione contratta e liquido circostante.

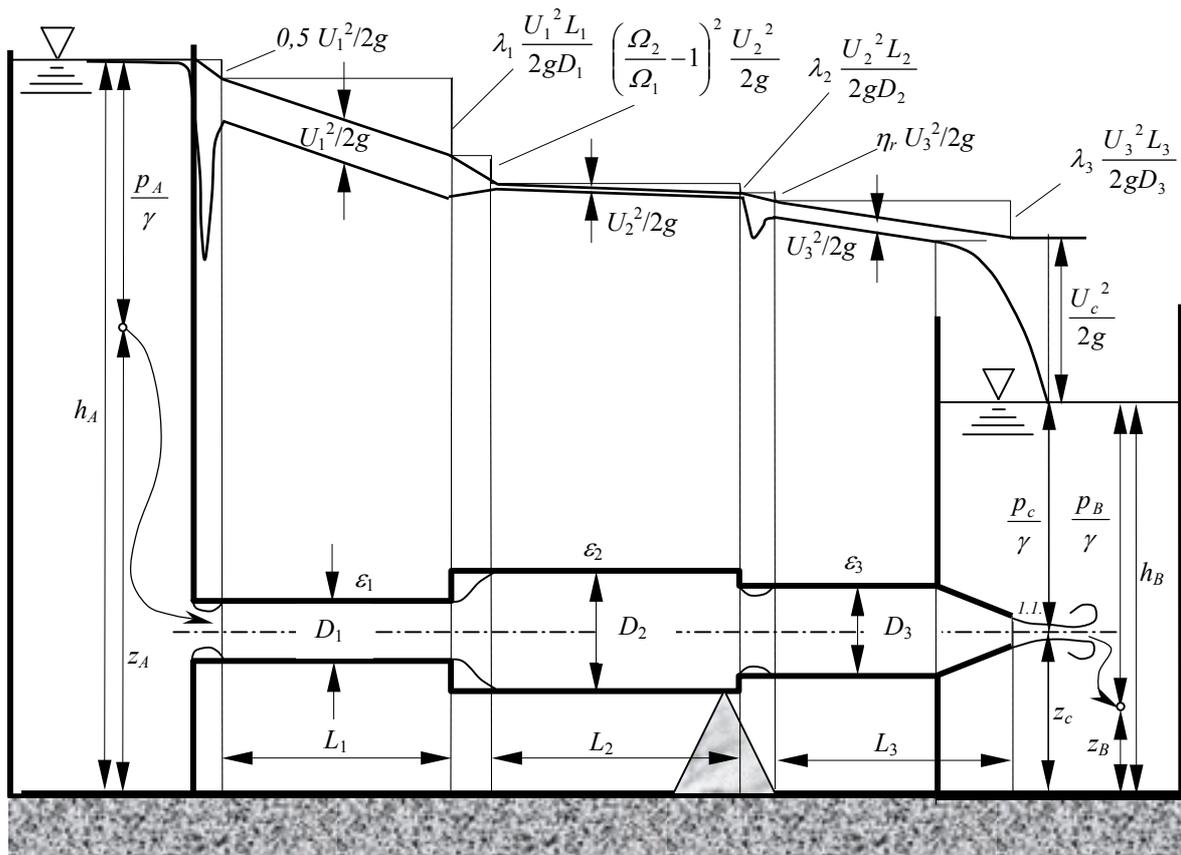


Figura 87. Esempio di condotta in pressione con sbocco sotto battente.

Assumendo come sezione terminale la sezione contratta, la determinazione della portata si esegue quindi in modo del tutto analogo al caso dello sbocco in aria<sup>58</sup>, salvo assumere ora:

$$H_c = z_c + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{U_c^2}{2g} \cong h_B + \frac{U_c^2}{2g} .$$

Nel caso dello sbocco sotto battente, può scegliersi anche di considerare come sezione terminale quella, identificata dal pedice  $B$ , in cui la corrente ha interamente dissipato la propria energia cinetica ed il fluido che la costituiva si trova, quindi, in condizioni di quiete. Si porrà in tal caso:

$$H_B = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{U_B^2}{2g} \cong h_B .$$

La dissipazione dell'energia cinetica della corrente a valle della sezione contratta viene tenuta in conto includendo nel novero delle perdite di carico la perdita di sbocco menzionata nel §7.5.1:

$$\Delta H_s = \frac{U_c^2}{2g} .$$

In entrambi i casi, eseguendo l'operazione di sostituzione delle velocità in funzione della portata e delle aree delle sezioni, si perviene ad una equazione nella forma:

<sup>58</sup> Trascurando la piccola perdita di carico distribuita che interviene fra l'ugello del convergente e la sezione contratta.

$$h_A - h_B = KQ^2 ,$$

in cui il coefficiente  $K$  ha la medesima espressione determinata per il caso di sbocco in aria, da cui l'espressione della portata:

$$Q = \sqrt{\frac{h_A - h_B}{K}} . \quad (186)$$

Il procedimento illustrato è denominato di verifica della tubazione. Qualora si desideri, ad esempio, consentire il passaggio di una portata maggiore di quella che si determina con un determinato assetto della tubazione, si rende necessario sostituire qualcuno dei tronchi con tubazioni di diametro maggiore o, comunque, realizzare una combinazione di scabrezza e diametri che consenta il passaggio della portata desiderata. In pratica, si effettua a priori la scelta del tipo di tubazione e quindi anche la specificazione della scabrezza, che occorrerà considerare nelle condizioni di funzionamento più sfavorevoli, a tubi vecchi.

Scritta quindi l'equazione della condotta come sopra illustrato, la determinazione del diametro da assegnare alla tubazione non è generalmente possibile in termini espliciti, poiché, per una condotta del tipo esaminato in precedenza, il diametro incognito è contenuto in più termini, a denominatore degli stessi (oltre che all'interno dell'indice di resistenza nella scabrezza relativa) ed elevato a potenze massime pari a 5. Poiché, in definitiva, si è vincolati ad utilizzare le tubazioni in commercio, il procedimento che conviene seguire per la determinazione del diametro del nuovo tronco consiste nel determinare, con il procedimento di verifica illustrato, il più piccolo diametro commerciale che comporta, a tubi vecchi, il passaggio di una portata maggiore o uguale a quella desiderata. Nel caso la condotta di componga di più tronchi, come nell'esempio proposto, la scelta del tronco da sostituire si effettuerà sulla base di un criterio di minima spesa<sup>59</sup>.

Ciò fatto, poiché all'inizio della vita utile della nuova tubazione la minore scabrezza determinerebbe valori della portata maggiori di quello prefissato, occorre includere nella condotta un organo di regolazione della portata (*valvola riduttrice di pressione*). Tralasciando una descrizione dettagliata di tali dispositivi, si osserva qui come il loro funzionamento (come del resto quello dei normali rubinetti) si basi sulla induzione di una perdita di carico per brusco allargamento associata alla riduzione della luce libera della valvola attraverso la quale avviene il transito della corrente. In termini analitici, ciò si riflette in un aumento del coefficiente  $K$  della (183) ed in una conseguente riduzione della portata. regolando l'ampiezza della luce libera della valvola si può modulare la portata a seconda delle necessità – per esempio, mantenendola costante al trascorrere del tempo in relazione all'invecchiamento della condotta.

## 7.7 Lunghe condotte

### 7.7.1 Generalità

Con riferimento alla formulazione del Teorema di Bernoulli per una traiettoria, nel §5.8.2 si è osservato come un aspetto importante nella valutazione della applicabilità dell'ipotesi di fluido non viscoso all'analisi di un dato problema di flusso sia legato, fra gli altri, allo sviluppo del tratto di traiettoria considerato, la differenza di carico totale agli estremi del tratto essendo tanto minore quanto minore è tale sviluppo.

Trattando di correnti nelle quali le perdite di carico totale non possano ritenersi trascurabili, sia per essere le lunghezze non sufficientemente limitate che per via di eventuali perdite localizzate, ci

---

<sup>59</sup> Di norma, la scelta finale del tratto da sostituire ricade su quello di diametro minimo. Per questo motivo, conviene procedere come segue: i) determinare il diametro da sostituire al diametro minimo della condotta esistente; ii) determinare il relativo costo della sostituzione (costo per metro di lunghezza  $\times$  lunghezza del tratto di tubazione); iii) determinare i costi per la sostituzione di ciascuno degli altri tratti con il primo diametro commerciale superiore a quello esistente (senza effettuare calcoli idraulici). Se il costo della sostituzione del diametro minimo risultasse inferiore a tali costi, la scelta ricadrà senz'altro sul primo; in caso contrario, si procederà con i calcoli idraulici per gli altri diametri, ordinati per valori crescenti, fino a determinare il primo diametro che consente il flusso della portata richiesta e costa meno di tutte le alternative.

si può porre il problema se esistano condizioni nelle quali le perdite di carico localizzate possano considerarsi trascurabili rispetto a quelle distribuite, nel qual caso i calcoli illustrati nel paragrafo precedente possono notevolmente semplificarsi, soprattutto per quanto riguarda il problema di progetto.

Potendosi esprimere le perdite di carico totale in un tratto di corrente compreso fra due sezioni  $a$  e  $b$  nel quale si succedano, come visto negli esempi precedenti,  $M$  tronchi sedi di moto uniforme con relative perdite di carico distribuite ed  $N$  perdite localizzate, nella forma generale:

$$H_b - H_a = \sum_{i=1}^M \lambda_i \frac{U_i^2}{2gD_i} L_i + \sum_{j=1}^N \eta_j \frac{U_j^2}{2g} ,$$

tale approssimazione è consentita se risulta:

$$\sum_{i=1}^M \lambda_i \frac{U_i^2}{2gD_i} L_i \gg \sum_{j=1}^N \eta_j \frac{U_j^2}{2g} .$$

Nel caso di un unico tratto con  $N$  perdite localizzate, essendo i corrispondenti coefficienti  $\eta$  dell'ordine dell'unità (vedi §7.5) l'approssimazione citata richiede il rispetto della condizione:

$$\lambda \frac{U^2}{2gD} L \gg N \frac{U^2}{2g} ,$$

da cui, semplificando le altezze cinetiche fra primo e secondo membro:

$$\lambda \frac{L}{D} \gg N .$$

Le condotte che soddisfano tali condizioni vengono denominate *lunghe condotte*, come sempre l'aggettivo intendendosi legato ad un concetto di similitudine sintetizzabile in "lunghe in confronto al diametro" (sebbene a tal fine, a rigore, anche la scabrezza della condotta sia rilevante tramite  $\lambda$ ).

Considerando valori dell'indice di resistenza nell'intervallo  $0,015 \div 0,03$  in relazione alle possibili scabrezze e diametri delle tubazioni realisticamente riscontrabili nella pratica, la condizione su riportata equivale ad assumere:

$$\frac{D}{L} \ll \frac{0,015 \div 0,03}{N} .$$

Per fissare le idee, assumendo  $\lambda=0,03$ ,  $N=2$  e  $D/L$  dell'ordine del 4% del secondo membro perché possa essere considerato molto minore di esso, si ottiene una lunghezza minima necessaria alla validità dell'approssimazione di lunga condotta:

$$L = \frac{2}{0,03 \times 0,04} D \cong 1667 D .$$

In definitiva, la valutazione delle perdite di carico può essere limitata alle sole perdite distribuite per lunghezze dell'ordine del migliaio di diametri. A titolo di esempio, rientrano in quest'ordine di valori condotte di lunghezza dell'ordine delle decine di metri e diametro dell'ordine delle decine di millimetri, valori caratteristici di impianti idrici domestici; lunghezze di centinaia di metri e diametri di centinaia di millimetri, tipici di reti di distribuzione urbana; lunghezze dell'ordine dei chilometri e diametri dell'ordine del metro, riscontrabili in condotte di adduzione esterna ai centri abitati – gli ultimi due esempi peraltro spesso caratterizzati da diametri anche alquanto inferiori.

Tali condizioni consentono anche di trascurare nei calcoli l'altezza cinetica costituente parte del carico totale, per cui nelle lunghe condotte è consuetudine considerare unicamente la linea

piezometrica. Sempre a titolo esemplificativo, considerando che le velocità che si tende a realizzare nelle condotte acquedottistiche è dell'ordine di 1 m/s, la corrispondente altezza cinetica è dell'ordine dei 5 cm. Considerando una condotta di questo tipo che congiunga serbatoi i cui peli liberi abbiano un dislivello di appena poche decine di metri, si capisce bene come il tracciamento sia della linea piezometrica che della linea dei carichi totali risulterebbe del tutto inutile, perché le due linee risulterebbero in pratica indistinguibili.

Nei paragrafi seguenti viene illustrata la soluzione di alcuni semplici problemi riguardanti le lunghe condotte. Problemi di natura più complessa vengono trattati in corsi specialistici.

### 7.7.2 Progetto e verifica di una condotta congiungente due serbatoi

Si tratta del tipico caso di progetto di una condotta acquedottistica, in cui il serbatoio di monte può essere costituito da un vaso artificiale o dall'opera di presa di una sorgente ed il serbatoio di valle dal serbatoio di compenso di un centro urbano.

Il problema consiste nel determinare i diametri commerciali dei quali deve essere composta la condotta di lunghezza  $L$  assegnata, affinché essa possa convogliare una portata  $Q$  assegnata fra i serbatoi di monte e di valle aventi rispettivamente quote dei peli liberi assegnate  $h_1$  ed  $h_2$  (vedi Figura 88). Utilizzando la formula di Chezy – il che è consentito dall'essere tipicamente assolutamente turbolento il moto in questo tipo di condotte – l'equazione del moto per la condotta si scrive:

$$h_1 - h_2 = \frac{U^2}{\chi^2 \mathcal{R}} L .$$

Utilizzando la formula di Strickler per il coefficiente di scabrezza  $\chi$ , con indice di scabrezza  $k_s$  a tubi vecchi assegnato in relazione al tipo di tubazione prescelta per la realizzazione della condotta (di ghisa, di acciaio, di polietilene, etc...), introducendo la portata nota  $Q = U\Omega = U(\pi D^2/4)$ , detto  $Y = h_1 - h_2$  il dislivello fra i due serbatoi; ricordato infine che  $\mathcal{R} = D_t/4$  per tubazioni a sezione circolare, dove  $D_t$  è il diametro teorico incognito (teorico in quanto il valore risultante dal calcolo in generale non coinciderà con un diametro esistente in commercio), l'equazione del moto per la condotta si scrive:

$$Y = \frac{4^{10/3}}{\pi^2 k_s^2} \frac{Q^2}{D_t^{16/3}} L ,$$

da cui l'espressione del diametro teorico:

$$D_t = \left( \frac{4^{10/3}}{\pi^2 k_s^2} \frac{Q^2}{Y} L \right)^{3/16} .$$

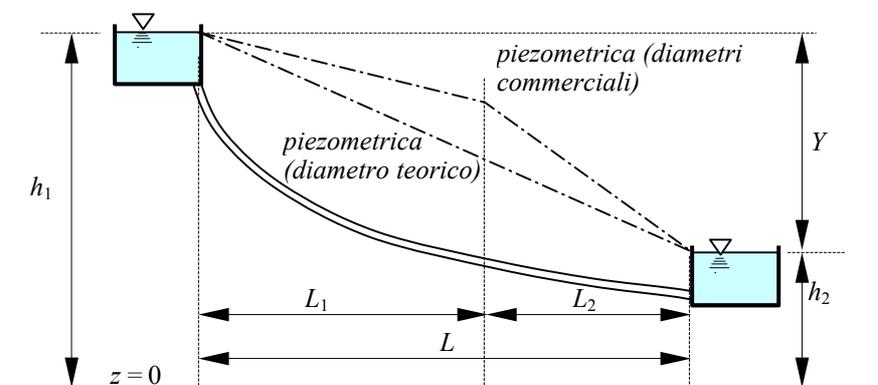


Figura 88. Schema di lunga condotta congiungente due serbatoi (tubi vecchi).

Poiché il diametro così determinato generalmente non coincide con un diametro esistente in commercio per il tipo di tubazione scelta, la condotta dovrà essere necessariamente realizzata con i due diametri commerciali successivi,  $D_1$  e  $D_2$ , fra i quali il diametro teorico risulta compreso. I due tronchi corrispondenti dovranno avere lunghezze  $L_1$  ed  $L_2$ , la cui somma deve uguagliare la lunghezza totale  $L$  prescritta e tali da produrre una perdita di carico complessiva pari al valore  $Y$ , pure prescritto.

Calcolate quindi le cadenti  $j_1$  e  $j_2$  corrispondenti ai due diametri:

$$j_1 = \frac{4^{10/3}}{\pi^2 k_s^2} \frac{Q^2}{D_1^{16/3}} \quad ; \quad j_2 = \frac{4^{10/3}}{\pi^2 k_s^2} \frac{Q^2}{D_2^{16/3}} ,$$

le lunghezze incognite dei due tronchi devono soddisfare il sistema lineare:

$$\begin{aligned} L_1 + L_2 &= L \\ j_1 L_1 + j_2 L_2 &= Y \end{aligned} ,$$

la cui soluzione è data da:

$$L_1 = \frac{Y - L j_2}{j_1 - j_2} \quad ; \quad L_2 = \frac{Y - L j_1}{j_1 - j_2} .$$

La condotta così composta convoglia la portata  $Q$  prescritta nelle condizioni di massima scabrezza relative alla fine della vita utile dell'opera. In assenza di ulteriori provvedimenti, all'inizio dell'esercizio la condotta, composta di tubazioni meno scabre rispetto alle condizioni di progetto, convoglia pertanto una portata maggiore di quella di progetto. Inoltre, la portata di progetto potrà differire da quella effettivamente richiesta all'inizio della vita utile dell'opera: per esempio, trattandosi di un acquedotto ad uso idropotabile, quest'ultima potrà essere inferiore alla portata di progetto per ragioni di crescita demografica.

Detta quindi  $Q'$  la portata richiesta all'inizio dell'esercizio della condotta e calcolate le minori cadenti,  $j_1'$  e  $j_2'$  associate alle minori scabrezze dei due tronchi (corrispondenti per la formula di Strickler a maggiori valori del corrispondente indice di scabrezza  $k_s$ ), la perdita di carico  $\Delta$  che occorre indurre lungo linea con una apposita valvola si determina imponendo, ancora, che la perdita di carico totale eguagli il dislivello  $Y$ :

$$j_1' L_1 + j_2' L_2 + \Delta = Y ,$$

da cui:

$$\Delta = Y - j_1' L_1 - j_2' L_2 .$$

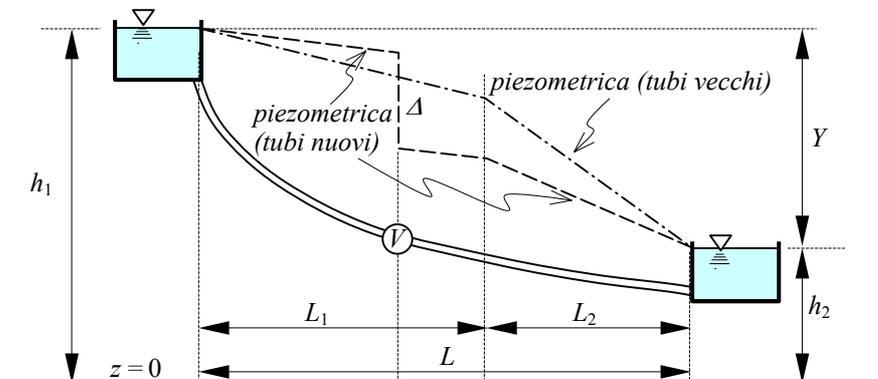


Figura 89. Schema di lunga condotta congiungente due serbatoi (tubi nuovi).

Conseguentemente, ipotizzando di disporre la valvola nel primo tronco, la piezometrica assumerà l'aspetto riportato in tratteggio semplice in Figura 89.

### 7.7.3 Verifica di una rete di lunghe condotte con un nodo interno

Si dice *rete di condotte* una serie di condotte, costituenti i *lati* della rete, convergenti in uno o più punti detti *nodi*. Le equazioni che descrivono il comportamento idraulico di una rete sono le equazioni del moto lungo i lati, del tipo visto nel paragrafo precedente se si tratta di lunghe condotte, così come ammetteremo nel prosieguo, e le equazioni di continuità ai nodi, le quali, per il caso consueto di fluido incomprimibile ed isoterma ed omogeneo, esprimono che la somma delle portate entranti in un nodo uguaglia la somma delle portate uscenti dallo stesso nodo.

Si consideri la semplice rete di Figura 90, costituita di tre lati ed un solo nodo.

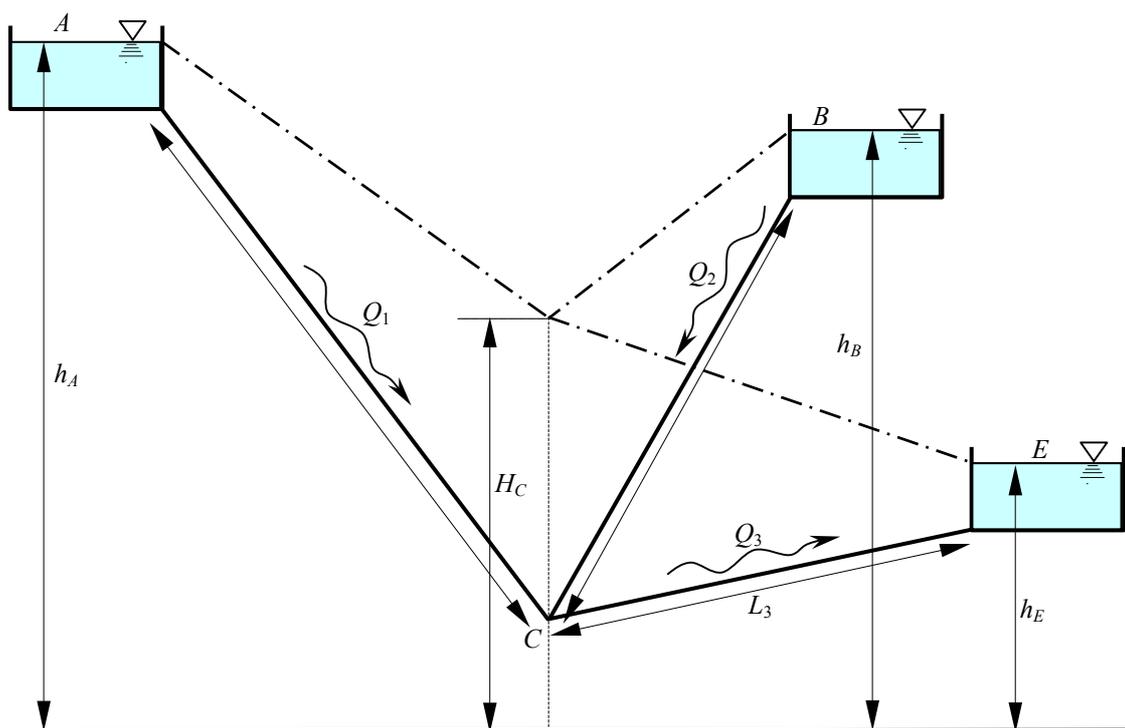


Figura 90. Schema di rete di lunghe condotte composta di tre lati ed un nodo.

La natura monomia dell'espressione della cadente  $j$  tramite la formula di Chezy con indice di scabrezza di Strickler consente di indicarla nella forma sintetica:

$$j = \frac{U^2}{\chi^2 \mathfrak{R}} = \frac{4^{10/3}}{\pi^2 k_s^2} \frac{Q^2}{D^{16/3}} = k Q^2 D^{-n} ,$$

con:

$$k = \frac{4^{10/3}}{\pi^2 k_s^2} , \quad n = \frac{16}{3} = 5,333 .$$

Si osservi che, in generale, anche l'esponente  $n$  può variare da tronco a tronco, il che può verificarsi qualora vengano utilizzate formule diverse dalla formula di Strickler per la valutazione delle perdite di carico. Ciò può rendersi indispensabile, ad esempio, nel caso si usino tubazioni di materiale plastico (ad esempio, PVC), considerabili come lisce, per le quali occorre pertanto

utilizzare la formula di Colebrook e ottenere successivamente, mediante un'operazione di regressione<sup>60</sup>, i coefficienti (sia  $k$  che  $n$ ) della forma monomia della cadente utilizzata nei calcoli.

In quanto composta di tre lati ed un nodo, il funzionamento di tale semplice rete è governato da tre equazioni del moto:

$$h_A - H_C = k_1 Q_1^2 D_1^{-n} L_1$$

$$h_B - H_C = k_2 Q_2^2 D_2^{-n} L_2$$

$$H_C - h_E = k_3 Q_3^2 D_3^{-n} L_3$$

e da una equazione di continuità al nodo  $C$ :

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 ,$$

nello scrivere le quali si è ammesso implicitamente che nel lato n°2 il moto avvenga dal serbatoio  $B$  al nodo  $C$ , circostanza la cui validità può essere soltanto verificata a posteriori. È invece certo che le portate escano dal serbatoio a quota massima ed entrino nel serbatoio a quota minima.

Il problema di progetto più generale consiste nella determinazione dei diametri (teorici, con successiva determinazione dei diametri commerciali secondo quanto illustrato al paragrafo precedente) dei tre lati per assegnati livelli nei tre serbatoi, portate circolanti nei lati, lunghezze e scabrezze degli stessi. Tuttavia, nelle equazioni del moto risulta incognita anche la quota piezometrica del nodo  $C$ ,  $H_C$ , mentre le portate, essendo prescritte, devono a priori soddisfare l'equazione di continuità, che non comprende alcuna delle incognite e non è perciò utilizzabile per determinarle. Pertanto, il problema di progetto così prospettato ammette soltanto tre equazioni fra le quattro incognite da determinare e non è pertanto risolvibile univocamente in assenza di una ulteriore equazione fra le incognite citate.

Naturalmente, poiché il problema comprende più incognite che equazioni, esso ammette  $\infty^1$  soluzioni. A ciascuna di queste  $\infty^1$  terne di diametri corrisponde un costo, sia di acquisto e messa in opera delle tubazioni, da pagare nel relativamente limitato periodo di costruzione dell'opera, che per manutenzione, da distribuire nel corso della vita utile dell'opera. Senza entrare nel dettaglio della formulazione dell'equazione aggiuntiva che consente di chiudere il bilancio fra equazioni ed incognite, per la quale si rimanda ai testi di Costruzioni Idrauliche, si anticipa qui che essa esprime la minimizzazione del costo totale dell'opera, espresso mediante le formule di attualizzazione della matematica finanziaria, che consentono di rendere omogenei costi sostenuti in tempi differenti<sup>61</sup>.

Rimandando quindi la trattazione del problema di progetto alla seconda parte del corso, o, in forma parziale, al corso di esercitazioni<sup>62</sup>, nel prosieguo si limiterà il discorso al problema di verifica della semplice rete in questione. Come già menzionato nel §7.7.2, tale problema si pone sia per controllare le condizioni di funzionamento di una condotta di nuova costruzione, che, in generale, per predisporre l'installazione di organi di regolazione della portata. Si assume quindi di conoscere in quale condizione ci si trovi e che gli indici di scabrezza dei tre tronchi vengano specificati di conseguenza.

Nel problema di verifica, essendo assegnati i diametri ed incognite le portate e la quota piezometrica nel nodo  $C$ , il sistema da risolvere è, questa volta, di quattro equazioni in quattro incognite. Quale che sia la composizione dei singoli tronchi (cioè, anche nel caso in cui ciascuno di essi sia realizzato mediante due diametri, secondo quanto illustrato al §7.7.2), tale sistema può scriversi nella forma generale:

<sup>60</sup> In breve, la regressione è un procedimento che consente di dedurre una relazione funzionale in forma analitica fra due variabili per le quali si conoscano un certo numero di coppie di valori corrispondenti.

<sup>61</sup> Si tratta, in buona sostanza, di formule dello stesso tipo di quelle che consentono di stabilire la rata annua costante di restituzione di un mutuo concesso in un'unica soluzione da una banca.

<sup>62</sup> A questo proposito si vedano anche le dispense dell'autore: Esercizi di Idraulica.

$$h_A - H_C = K_1 Q_1^2$$

$$h_B - H_C = K_2 Q_2^2$$

$$H_C - h_E = K_3 Q_3^2$$

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

Esprimendo le portate dalle equazioni del moto nella forma:

$$Q_1 = \sqrt{\frac{h_A - H_C}{K_1}} \quad , \quad Q_2 = \sqrt{\frac{h_B - H_C}{K_2}} \quad , \quad Q_3 = \sqrt{\frac{H_C - h_E}{K_3}}$$

e sostituendo nell'equazione di continuità, si perviene all'equazione nell'unica incognita  $H_C$ :

$$F(H_C) = \sqrt{\frac{h_A - H_C}{K_1}} + \sqrt{\frac{h_B - H_C}{K_2}} - \sqrt{\frac{H_C - h_E}{K_3}} = 0 \quad ,$$

la quale, in generale, non è esplicitabile rispetto all'incognita.

Come per ogni equazione in forma implicita (quale è anche la formula di Colebrook nella sua forma completa), la soluzione può determinarsi: a) con il solutore automatico di un foglio elettronico; b) graficamente, tracciando la  $F(H_C)$  e verificando per quale valore della quota piezometrica al nodo essa si annulla; c) con metodi iterativi: ad esempio, calcolando dapprima la  $F(H_C)$  per vari valori di  $H_C$  compresi nell'intervallo  $[h_E, h_B]$ , per individuare i due valori di  $H_C$  in corrispondenza dei quali la funzione cambia di segno, fra i quali deve quindi essere compresa la soluzione; quindi, determinare una successione di intervalli della variabile  $H_C$  di ampiezza l'una la metà della precedente, agli estremi dei quali la funzione  $F(H_C)$  assuma sempre valori di segno discorde, fino a quando la dimensione sufficientemente ridotta dell'ultimo intervallo determinato consente di assegnare alla variabile  $H_C$  un valore con la precisione desiderata. In pratica, tutti e tre i procedimenti possono essere implementati facilmente in un foglio elettronico.

L'equazione può anche essere risolta per via analitica scrivendola nella forma:

$$\sqrt{\frac{h_A - H_C}{K_1}} + \sqrt{\frac{h_B - H_C}{K_2}} = \sqrt{\frac{H_C - h_E}{K_3}} \quad ,$$

quadrando membro a membro:

$$\frac{h_A - H_C}{K_1} + \frac{h_B - H_C}{K_2} + 2\sqrt{\frac{h_A - H_C}{K_1}} \sqrt{\frac{h_B - H_C}{K_2}} = \frac{H_C - h_E}{K_3} \quad ,$$

rielaborando e quadrando nuovamente:

$$\left( \frac{h_A - H_C}{K_1} + \frac{h_B - H_C}{K_2} - \frac{H_C - h_E}{K_3} \right)^2 = 4 \frac{h_A - H_C}{K_1} \frac{h_B - H_C}{K_2}$$

per ottenere una equazione di secondo grado, dalla quale si ricava, delle due radici possedute, l'unica che soddisfa le condizioni specifiche del caso ( $H_C$  reale,  $h_E < H_C < h_B$ ). Solo valori dell'incognita  $H_C$  compresi nell'intervallo  $[h_E, h_B]$  sono accettabili, in quanto compatibili con il verso ipotizzato per la portata  $Q$ . Nel caso risultasse invece  $H_C > h_B$ , si dovrà invertire il verso di tale portata e ripetere il procedimento sulla base dell'equazione di continuità al nodo  $C$ :

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

e dell'equazione del moto per il lato n° 2<sup>63</sup>:

$$H_C - h_B = K_2 Q_2^2 .$$

Qualora la verifica fornisce, ad esempio, una portata  $Q_3$  superiore a quella desiderata (caso certo nella verifica a tubi nuovi di una rete di condotte progettata per le condizioni di fine vita utile), occorrerebbe installare una valvola riduttrice di pressione per la regolazione della portata e determinarne la corrispondente perdita di carico localizzata  $\Delta$ .

Assumendo di installare la valvola nel tronco n°3, il sistema di equazioni che descrive il funzionamento del sistema di condotte si scrive:

$$\begin{aligned} h_A - H_C &= K_1 Q_1^2 \\ h_B - H_C &= K_2 Q_2^2 \\ H_C - h_E &= K_3 Q_3^2 + \Delta \\ Q_1 + Q_2 &= Q_3 \end{aligned}$$

in cui la portata  $Q_3$  è ora assegnata. Ricavando dalla terza equazione l'espressione di  $H_C$  in funzione di  $\Delta$ :

$$H_C = K_3 Q_3^2 + \Delta + h_E ,$$

sostituendo nelle espressioni delle portate degli altri due tronchi e sostituendo le espressioni così ottenute nell'equazione di continuità, ci si riduce all'equazione nell'unica incognita  $\Delta$ :

$$\sqrt{\frac{h_A - K_3 Q_3^2 - \Delta - h_E}{K_1}} + \sqrt{\frac{h_B - K_3 Q_3^2 - \Delta - h_E}{K_2}} = Q_3 ,$$

la quale, risolta con uno dei metodi illustrati in precedenza, consente di ricavare il valore di  $H_C$  da una qualunque delle tre equazioni del moto.

Assimilando la perdita di carico localizzata nella valvola ad una perdita per brusco allargamento fra la sezione contratta che si forma a valle della luce libera della valvola di area  $\Omega_v$  e la sezione  $\Omega_3$  della condotta il valore di tale area si ottiene dalla espressione della perdita di Borda, posta uguale a  $\Delta$ :

$$\Delta = \left( \frac{\Omega_3}{C_c \Omega_v} - 1 \right)^2 \frac{U_3^2}{2g} = \left( \frac{\Omega_3}{C_c \Omega_v} - 1 \right)^2 \frac{Q_3^2}{2g \Omega_3^2} ,$$

in cui  $C_c$  è il coefficiente di contrazione, dalla quale si ottiene infine:

$$\Omega_v = \frac{\Omega_3}{C_c \left( 1 + \sqrt{2g\Delta} \frac{\Omega_3}{Q_3} \right)} .$$

<sup>63</sup> Si osservi comunque che tale circostanza è abbastanza improbabile nel caso si stia trattando della verifica di una condotta progettata per realizzare i versi delle portate ipotizzati.

## CAPITOLO OTTAVO

### 8. MACCHINE IDRAULICHE

#### 8.1 Definizioni

Come tutte le macchine, le macchine idrauliche sono dei congegni atti a trasferire energia, eventualmente convertendone la forma. Così, un'automobile con motore a scoppio consente di trasformare energia di tipo chimico del carburante dapprima in energia termica per effetto della combustione che avviene nei cilindri del motore, quindi, per effetto delle pressioni che così si sviluppano e che si esercitano sui pistoni, in energia meccanica, la quale ancora, trasferita dagli organi di trasmissione, viene resa agli assi delle ruote motrici e infine, per effetto dell'aderenza al suolo di queste, trasformata in energia cinetica e potenziale del veicolo, corrispondentemente ad aumenti della velocità e della quota dello stesso.

In particolare, le macchine idrauliche operano trasferimenti di energia fra una massa fluida, che qui ammetteremo sempre costituire una corrente, e l'ambiente esterno. Le turbine che si trovano negli impianti idroelettrici servono a sottrarre energia meccanica al fluido che le attraversa, convertendola, in ultima analisi, in energia elettrica. Le pompe, nelle quali è decisamente più facile imbattersi nella vita di tutti i giorni, servono invece a fornire energia meccanica alla corrente per il tramite di motori elettrici (*elettropompe*) o a scoppio (*motopompe*).

Coerentemente con le finalità del Corso, non essendo di immediato interesse applicativo dell'ingegnere edile, le turbine non verranno trattate. Inoltre, per quanto riguarda le pompe, ci si limiterà alla illustrazione dei procedimenti di verifica essenziali in impianti semplici ed alla sola enunciazione del criterio fondamentale su cui si basa il dimensionamento di un impianto di pompaggio.

Nei §7.6 e 7.7 – in particolare con formule del tipo (183) o (186) – si è illustrato come il valore della portata che può fluire in una data condotta dipenda, oltre che dalla conformazione della condotta (rappresentate dal coefficiente  $K$ ), dalla differenza delle quote piezometriche della corrente ai due estremi. Poiché della quota piezometrica si è riconosciuto il significato energetico (§3.5), in sostanza la possibilità di far fluire una data portata in una data condotta è legata alla disponibilità da parte della corrente di sufficiente energia da dissipare nel percorso dall'estremo di monte all'estremo di valle. Fornire energia alla corrente significa pertanto consentire il flusso di una maggiore portata a parità di altre condizioni, rispetto a quanto consentito nel funzionamento passivo di una condotta fin qui considerato (detto *funzionamento a gravità*<sup>64</sup>).

Un primo esempio di utilizzazione di una pompa è quindi quello legato alla necessità di far fluire in una condotta una portata maggiore di quella consentita dal funzionamento a gravità di cui ai §7.6 e 7.7. Un altro esempio è costituito dalla necessità di consentire la circolazione in un circuito chiuso, quale, ad esempio, il circuito di un impianto di riscaldamento tradizionale ad elementi radianti o il particolare circuito di un impianto a pompe di calore, la cui particolarità è legata alla circostanza per cui parte del moto del fluido (fra l'altro, in questo caso, comprimibile) avviene non in un condotto ma negli ambienti serviti. Un terzo esempio, al quale faremo riferimento nel prosieguo, è quello del moto di una corrente da un serbatoio di monte ad una certa quota ad un serbatoio di valle (ma potrebbe trattarsi anche di uno sbocco in aria) posto ad una quota superiore (vedi Figura 91). I concetti che verranno introdotti sono suscettibili di immediata estensione agli altri due esempi; tuttavia tale esempio è stato scelto in quanto maggiormente rappresentativo, poiché il funzionamento a gravità di tale tipo di condotta determinerebbe non solo

---

<sup>64</sup> Questa denominazione è giustificata dal fatto che, delle forze esterne considerate nelle varie espressioni del bilancio di quantità di moto finora considerate, la forza motrice prima è proprio la forza peso, il campo delle forze di pressione essendo una conseguenza della presenza della gravità (come descritto dalle formule dell'idrostatica) e del moto del fluido e le forze viscosive una conseguenza del solo moto del fluido (come descritto dalla legge costitutiva dei fluidi newtoniani). A conferma di ciò vale l'osservazione che l'accelerazione di gravità  $g$  è comune a tutti i termini costituenti il coefficiente  $K$  delle equazioni (183) e (186); considerarla nulla renderebbe  $K = \infty$  e, conseguentemente, nulla la portata.

una portata insufficiente (come nel primo esempio) o nulla (come nel secondo esempio) ma addirittura fluente in verso opposto a quello desiderato.

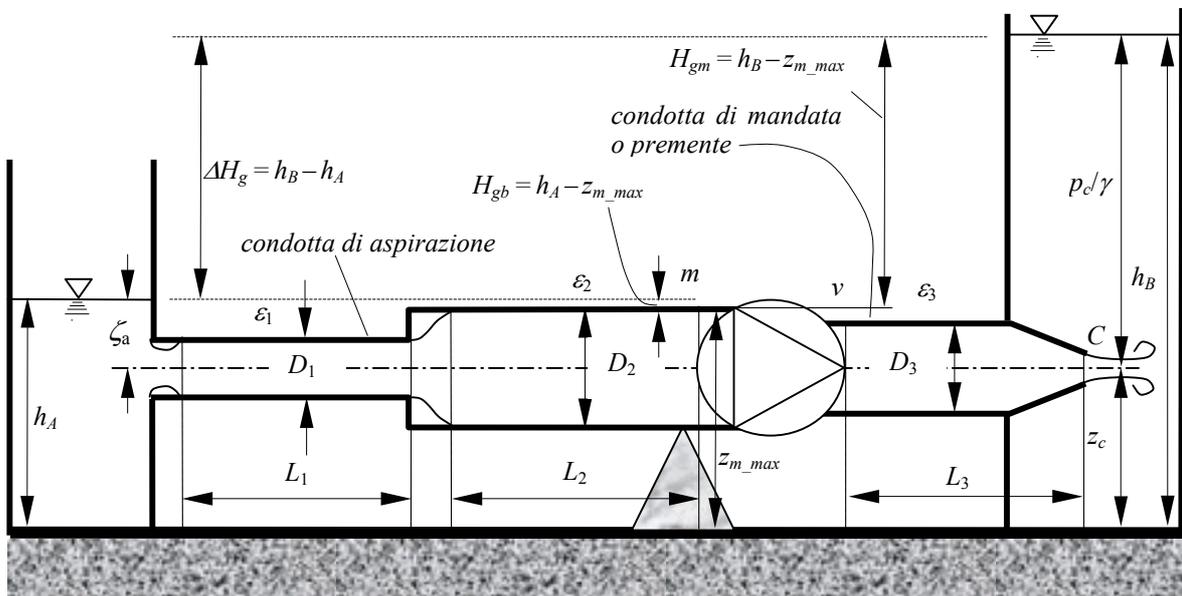


Figura 91. Schema di condotta con impianto di pompaggio.

Con riferimento allo schema di Figura 91 possono darsi innanzitutto le seguenti definizioni:

*prevalenza geodetica*, data dal dislivello fra le quote piezometriche della corrente agli estremi di monte e di valle (nel caso di sbocco in aria si considererà la quota dello sbocco, essendo ivi nulla la pressione):

$$\Delta H_g = h_B - h_A ;$$

*altezza geodetica di aspirazione* ( $H_{ga}$ ): differenza di quota fra l'intradosso della sezione immediatamente a monte della pompa ed il pelo libero del serbatoio di monte (quando l'intradosso della sezione a monte della pompa si trova a quota superiore al pelo libero);

*battente geodetico* ( $H_{gb}$ ): differenza di quota fra il pelo libero del serbatoio di monte e l'intradosso della sezione della condotta immediatamente a monte della pompa (quando questa si trova a quota inferiore al pelo libero, come in Figura 91, dove  $H_{gb} = \zeta_a - D_2/2$ ):

*altezza geodetica di mandata* ( $H_{gm}$ ): differenza di quota fra il pelo libero del serbatoio di valle e l'intradosso della sezione della condotta immediatamente a monte della pompa.

Si dicono poi *condotta di aspirazione* la condotta a monte della pompa e *condotta di mandata o premente* la condotta a valle della pompa.

Le operazioni di verifica di un impianto di pompaggio verranno illustrate con riferimento allo stesso impianto di Figura 91 ed al seguente tipico problema: assegnata completamente la geometria della tubazione (lunghezze, diametri e scabrezze dei tre tratti, diametro dell'ugello del convergente, livelli del liquido nei serbatoi), determinare la portata che in regime permanente fluisce fra i due serbatoi, verificare le massime depressioni e calcolare la potenza installata a servizio della pompa.

A tale proposito, oltre che alle definizioni date sulla base della Figura 91, verrà fatto riferimento allo schema di linee dei carichi totali e piezometrica riportate nella Figura 92.

Dato il significato del carico totale di energia meccanica totale per unità di peso di fluido, fornire energia alla corrente mediante una pompa significa aumentarne il carico totale. Detti  $H_m$  ed  $H_v$  i carichi totali della corrente rispettivamente a monte ed a valle della pompa, l'incremento:

$$\Delta H = H_v - H_m$$

è detta *prevalenza totale* della pompa.

Il corrispondente differenziale di quota piezometrica:

$$\Delta H_m = \left( z_v + \frac{p_v}{\gamma} \right) - \left( z_m + \frac{p_m}{\gamma} \right) = \left( H_v - \frac{U_3^2}{2g} \right) - \left( H_m - \frac{U_2^2}{2g} \right) = \Delta H - \left( \frac{U_3^2}{2g} - \frac{U_2^2}{2g} \right) \quad (187)$$

prende il nome di *prevalenza manometrica*. Nella pratica conviene determinare la prevalenza totale di una pompa in funzionamento indirettamente, misurando la prevalenza manometrica mediante manometri e sommandovi la differenza delle altezze cinetiche fra valle e monte della pompa, secondo l'equazione precedente.

Giusta l'espressione (168) della potenza di una corrente in una sezione, ciò comporta un aumento della potenza della corrente  $N_u = \gamma Q \Delta H$  (*potenza utile*), che deve esserle fornita dalla pompa.

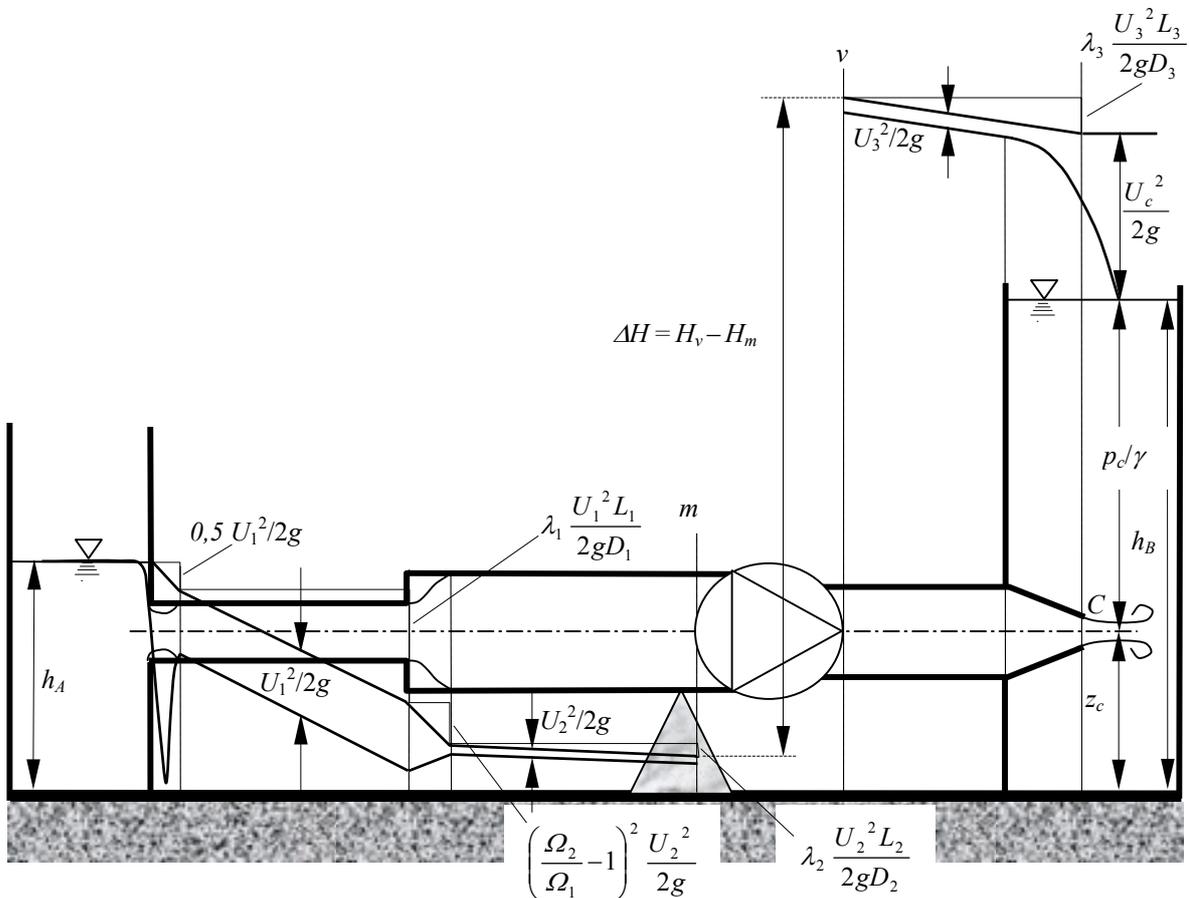


Figura 92. Linee dei carichi totali e piezometrica per la condotta con pompaggio di cui alla Figura 91.

## 8.2 Determinazione del punto di funzionamento di una pompa

Contrariamente al caso del funzionamento a gravità, in questo caso l'andamento della linea dei carichi totali, invece che essere sempre decrescente, presenta un aumento nel senso del moto, con discontinuità, fra le sezioni a monte ed a valle della pompa. Qualitativamente l'andamento della linea dei carichi totali si può analizzare come per i casi precedenti, avendo cura di rispettare le condizioni al contorno del problema, rappresentate dalle quote dei peli liberi nei due serbatoi,  $h_A$  e

$h_B$ . Si parte pertanto dal serbatoio  $A$  con la sequenza di perdite localizzate e distribuite esaminate in precedenza, fino alla sezione immediatamente a monte della pompa. Analogamente, si procede dal serbatoio  $B$ , a ritroso, fino alla sezione immediatamente a valle della pompa, con carichi totali crescenti. Come detto, il differenziale di carico totale che si produce fra monte e valle della pompa è la prevalenza totale  $\Delta H$ .

Introducendo la prevalenza totale nella equazione del moto, quest'ultima, ulteriormente generalizzata per estensione ai moti con immissioni di energia localizzate, si scrive:

$$H_A - H_c = 0,5 \frac{U_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{U_1^2}{2gD_1} L_1 + \left( \frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2 \frac{U_2^2}{2g} + \lambda_2 \frac{U_2^2}{2gD_2} L_2 - \Delta H + \lambda_3 \frac{U_3^2}{2gD_3} L_3$$

con:

$$H_A = z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{U_A^2}{2g} \cong z_A + \frac{p_A}{\gamma} = h_A$$

$$H_c = z_c + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{U_c^2}{2g} \cong h_B + \frac{U_c^2}{2g} .$$

Esprimendo i termini cinetici e delle perdite di carico in funzione del quadrato della portata, si ottiene una equazione che lega i valori di prevalenza totale richiesti in funzione delle portate circolanti corrispondenti, detta *equazione caratteristica della condotta*:

$$\Delta H = h_B - h_A + KQ^2 = \Delta H_g + KQ^2 , \quad (188)$$

in cui il coefficiente  $K$  è dato dalla espressione:

$$K = \frac{1}{2g\Omega_c^2} + \frac{0,5}{2g\Omega_1^2} + \frac{\lambda_1 L_1}{2gD_1\Omega_1^2} + \left( \frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2 \frac{1}{2g\Omega_2^2} + \frac{\lambda_2 L_2}{2gD_2\Omega_2^2} + \frac{\lambda_3 L_3}{2gD_3\Omega_3^2}$$

e che, si badi, prescinde dalle modalità di funzionamento della pompa.

La prevalenza totale è quindi somma delle perdite di carico e della prevalenza geodetica, la quale rappresenta pertanto il minimo valore possibile di prevalenza totale in assenza di perdite di carico, ossia, il minimo contenuto energetico da fornire alla corrente in relazione ai valori alle estremità. Evidentemente, il contributo delle perdite di carico tende a zero al tendere all'infinito dei diametri di tutti i tratti della condotta, tendendo in tal caso a zero il coefficiente  $K$ .

Il funzionamento della pompa è descritto da una relazione fra prevalenza totale e portata,  $\Delta H=f(Q)$ , detta *curva caratteristica della pompa*, di cui è riportato un esempio in Figura 93 (ove la prevalenza viene però indicata con il simbolo  $H$ ). Nella stessa figura sono anche riportate, in funzione della portata: le curve della potenza assorbita all'asse della pompa,  $N_a$ , del rendimento della pompa, rapporto fra la potenza utile e la potenza assorbita all'asse,  $\eta$ , del cosiddetto *NPSH* (*Net Positive Suction Head*, letteralmente: carico positivo netto di aspirazione) e della differenza fra le altezze cinetiche nelle bocche di mandata a valle della pompa ( $V_2^2/2g$ ) e di aspirazione a monte della pompa ( $V_1^2/2g$ ). Questo ultimo termine, sommato alla prevalenza manometrica, fornisce la prevalenza totale (equazione (187)). Tali curve, determinate sperimentalmente dal costruttore, vengono riportate nella documentazione tecnica a corredo della pompa.

La potenza assorbita all'asse è espressa in funzione della potenza utile  $N_u = \gamma Q \Delta H$  dalla:

$$N_a = \frac{\gamma Q \Delta H}{\eta} . \quad (189)$$

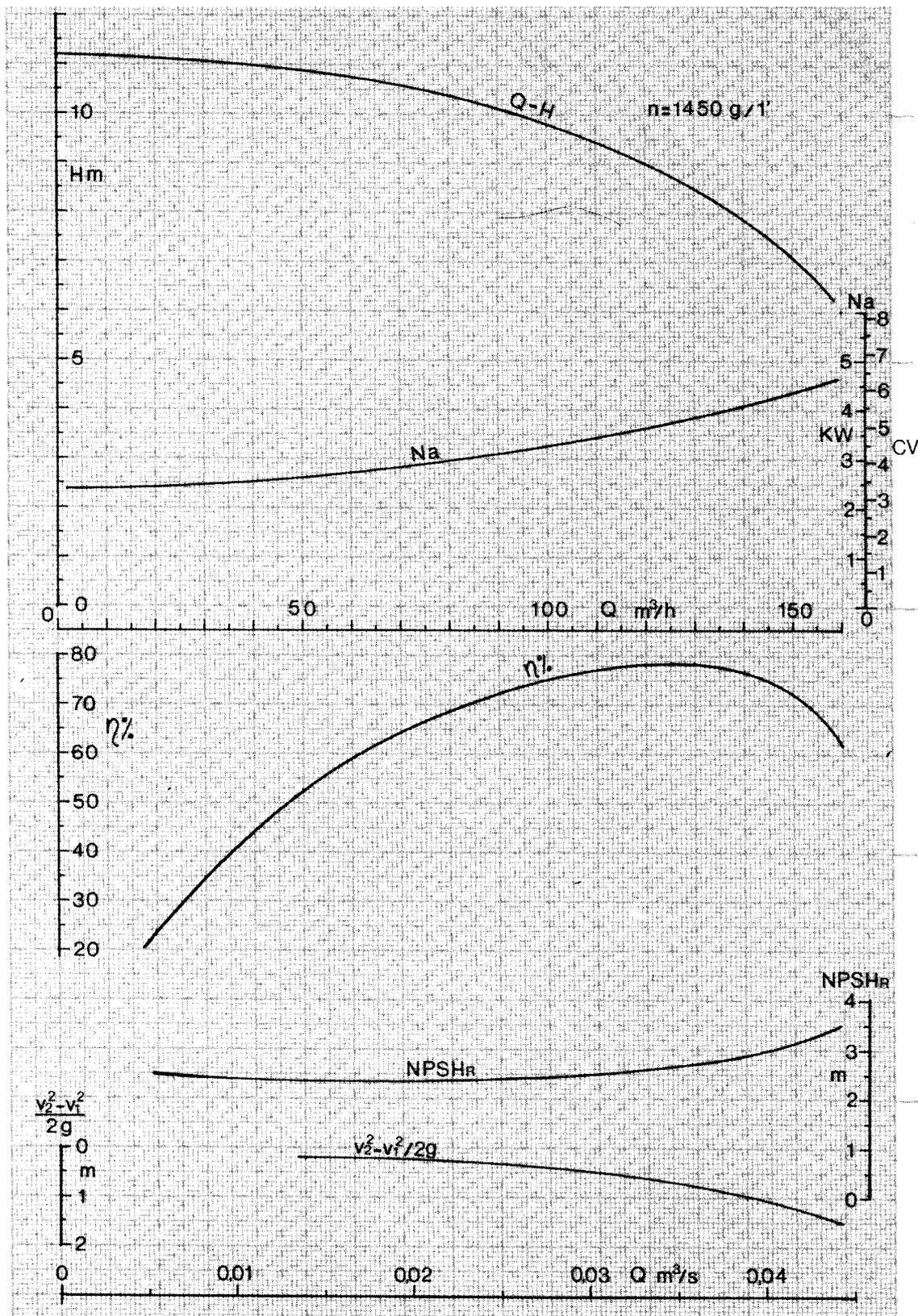
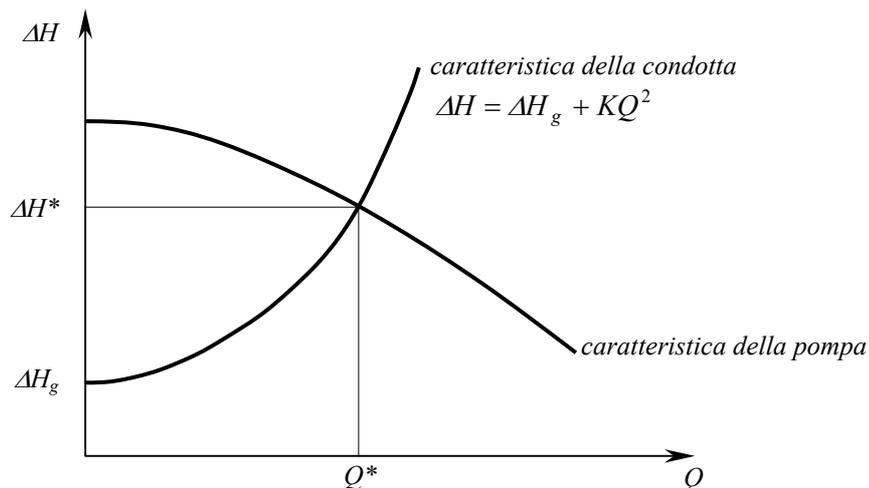


Figura 93. Curve caratteristica, della potenza assorbita, del rendimento, dell' $NPSH_R$  e del differenziale delle altezze cinetiche mandata-aspirazione per una pompa centrifuga in funzione della portata, a numero di giri costante ( $n = 1450 \text{ g/min}$ ).



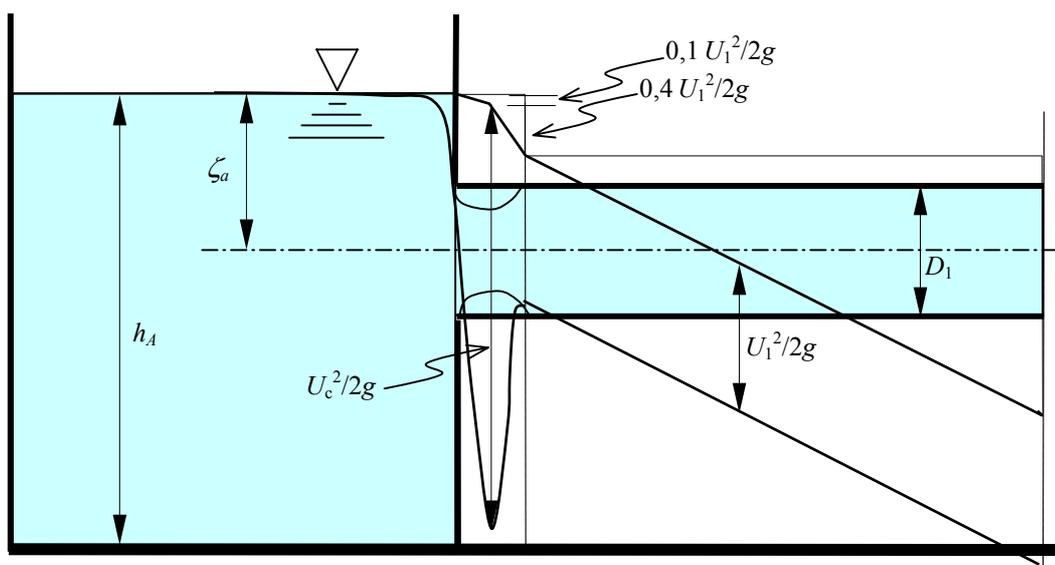
**Figura 94. Determinazione del punto di funzionamento di un sistema pompa – condotta**

Le due equazioni caratteristiche, della condotta e della pompa, devono essere verificate simultaneamente, per cui il punto di funzionamento del sistema condotta + pompa è rappresentato dal punto di intersezione delle due curve, come mostrato in Figura 94.

### 8.3 Verifica delle massime depressioni in un impianto di pompaggio

L'effettiva possibilità di realizzare il passaggio di una data portata dipende dal regime delle pressioni che si stabiliscono nelle varie sezioni della condotta. Come può vedersi dalla Figura 92, la condotta di aspirazione è soggetta in vari punti a condizioni di depressione. In particolare, le sezioni critiche sotto questo profilo sono la sezione contratta in prossimità dell'imbocco e la sezione immediatamente a monte della pompa. All'interno delle singole sezioni, il punto a pressione minima sarà quello posto alla quota massima: il punto di intradosso della condotta.

Con riferimento allo schema di Figura 95, detto  $\zeta_a$  l'affondamento dell'asse della condotta rispetto alla superficie libera del serbatoio *A* e ricordato che la prima parte della perdita di imbocco che si osserva nella sezione contratta è data, per l'imbocco a spigolo vivo, da  $0,1 U_1^2/2g$ , la massima depressione nella sezione contratta si calcola dalla relazione:



**Figura 95. Dettaglio della linea piezometrica nella sezione contratta dell'imbocco.**

$$0,1 \frac{U_1^2}{2g} + \frac{U_c^2}{2g} = \zeta_a - \frac{D_1}{2} - \frac{p_{c_{\min}}}{\gamma},$$

ottenuta da semplici considerazioni geometriche sul dislivello fra il pelo libero nel serbatoio ed il punto di minimo della piezometrica. La pressione  $p_{c_{\min}}$  è presa col proprio segno ed è pertanto, nel caso in questione, negativa. Il corrispondente valore dell'altezza piezometrica è dato da:

$$\frac{p_{c_{\min}}}{\gamma} = \zeta_a - \frac{D_1}{2} - 0,1 \frac{U_1^2}{2g} - \frac{U_c^2}{2g}.$$

La corrispondente pressione assoluta all'intradosso è data pertanto da:

$$p_{c_{\min}}^* = p_{atm}^* + p_{c_{\min}}.$$

Il limite massimo al quale si può spingere la depressione corrisponde al raggiungimento di una pressione assoluta pari alla tensione di vapore (o pressione di vapor saturo) del liquido convogliato nelle particolari condizioni di funzionamento,  $p_v^*$ , definita nel §2.7.

Deve essere perciò verificata la condizione:

$$p_{c_{\min}} + p_{atm}^* > p_v^*.$$

In caso contrario, il liquido tende a passare massivamente in fase gassosa attraverso la formazione di bolle di vapore al suo interno (*cavitazione*). Tale fenomeno comporta innanzitutto un generale irregolare e rumoroso funzionamento della condotta, per effetto della eterogeneità del fluido convogliato, esaltata dalla continua formazione e successiva chiusura delle cavità gassose. Inoltre, gli urti che il liquido esercita in tal modo sulle pareti della condotta e sugli organi mobili della pompa (girante) risultano particolarmente nocivi nei confronti di questi ultimi e sono in grado di mettere fuori uso la macchina in breve tempo.

A tale risultato contribuisce ulteriormente l'azione ossidante sulle parti metalliche della pompa legata alla maggiore disponibilità di ossigeno libero, per effetto della diminuzione della solubilità dei gas nei liquidi al diminuire della pressione. In tali condizioni, infatti, come descritto nel §2.9, parte dell'aria che si trovava in soluzione nel liquido nella vasca di presa tende anch'essa a passare allo stato gassoso, seppure in misura meno eclatante rispetto al fenomeno della cavitazione<sup>65</sup>.

In funzione dei dati del problema in questione deve pertanto aversi:

$$\frac{p_{atm}^*}{\gamma} + \zeta_a - \frac{D_1}{2} - 0,1 \frac{U_1^2}{2g} - \frac{U_c^2}{2g} > \frac{p_v^*}{\gamma}.$$

Lo stesso tipo di verifica occorre fare, come detto, anche alla sezione di entrata della pompa. Più precisamente, ai fini di tale verifica bisogna tenere conto del fatto che i minimi valori di pressione si riscontrano all'interno della macchina, all'imbocco della girante, per effetto sia di perdite di carico totale – sia distribuite che, soprattutto, localizzate all'imbocco della girante – che della velocità all'ingresso nella girante,  $U_g$ . La verifica della massima depressione va fatta pertanto tenendo conto di tale perdita di carico aggiuntiva,  $\Delta w$ , e dell'altezza cinetica all'ingresso della girante,  $U_g^2/2g$ , i cui andamenti in funzione della portata sono determinati dal costruttore, che li fornisce sotto forma di una grandezza ad essi legata: l' $NPSH_R$  di cui alla Figura 93.

Introducendo il battente geodetico:

<sup>65</sup> Tale fenomeno è il medesimo che si osserva nei punti di massima quota di una normale condotta e che richiede l'installazione di opportuni organi di sfiato per l'eliminazione delle bolle.

$$H_{gb} = \zeta_a - \frac{D_2}{2}$$

e raccogliendo tutte le perdite di carico in un termine:

$$\Delta y = 0,5 \frac{U_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{U_1^2}{2gD_1} L_1 + \left( \frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right)^2 \frac{U_2^2}{2g} + \lambda_2 \frac{U_2^2}{2gD_2} L_2 ,$$

un'analisi simile a quella condotta per la sezione contratta all'imbocco consente di esprimere la pressione relativa minima (massima depressione) all'interno della macchina:

$$H_{gb} - \frac{p_{min}}{\gamma} = \Delta y + \frac{U_g^2}{2g} + \Delta w ,$$

da cui si ottiene la condizione per evitare la cavitazione nella pompa:

$$\frac{p_{atm}^*}{\gamma} + H_{gb} - \Delta y - \frac{U_g^2}{2g} - \Delta w > \frac{p_v^*}{\gamma} , \quad (190)$$

esprimibile nella forma:

$$\frac{p_{atm}^*}{\gamma} + H_{gb} - \Delta y - \frac{p_v^*}{\gamma} > \frac{U_g^2}{2g} + \Delta w , \quad (191)$$

nella quale

$$NPSH_R = \frac{U_g^2}{2g} + \Delta w$$

è il valore di *NPSH* minimo richiesto, caratteristico della singola pompa, il cui andamento in funzione della portata è riportato in Figura 93, e:

$$NPSH_a = \frac{p_{atm}^*}{\gamma} + H_{gb} - \Delta y - \frac{p_v^*}{\gamma}$$

è il valore di *NPSH* disponibile (*available* in lingua inglese, da cui il pedice "a") all'imbocco della pompa. In sostanza la verifica viene fatta calcolando un *NPSH* disponibile che dipende soltanto da termini noti ( $p_{atm}^*/\gamma$ ,  $p_v^*/\gamma$ ) o calcolabili sulla base della conformazione della condotta ( $H_{gb}$ ,  $\Delta y$ ) e confrontandolo con il valore minimo ammissibile fornito dal costruttore.

Nel caso si abbia a che fare con una pompa la cui sezione di ingresso sia posta a quota superiore del pelo libero di monte, dovrà considerarsi una prevalenza di aspirazione  $H_{ga}$ ; tutte le formule scritte sono ancora valide purché si sostituisca  $-H_{ga}$  ad  $H_{gb}$ .

In pratica, particolarmente per quanto riguarda la pompa, è buona norma adottare criteri più cautelativi di quello esposto in precedenza, limitando la depressione massima ad un valore inferiore al limite corrispondente al raggiungimento di pressioni assolute pari alla tensione di vapore. Una congrua maggiorazione della pressione assoluta minima di riferimento rispetto al valore della tensione di vapore può essere indicato nell'ordine di 0,5 m di colonna d'acqua (trattandosi di tale liquido), sebbene condizioni di funzionamento stabile possano essere conseguite con depressioni massime non superiori a circa 8 m di colonna d'acqua.

Poiché il soddisfacimento della condizione (191) dipende essenzialmente dalle caratteristiche della condotta, l'esito negativo della verifica *impone necessariamente il ridimensionamento della condotta*.

#### 8.4 Calcolo della portata massima convogliabile da una pompa

Per ciascuna delle due sezioni di controllo si possono definire le condizioni critiche relative al raggiungimento di un valore della pressione minima pari alla tensione di vapore (o eventualmente ad una pressione maggiore, più cautelativa). Poiché il raggiungimento di tali condizioni dipende dalla presenza delle perdite di carico, esse definiscono un valore massimo della portata che può essere convogliata dalla condotta in oggetto *indipendentemente dalla potenza della pompa*. Tale valore sarà dato dal minore dei due valori di portata che si ottengono, per ciascuna delle sezioni di controllo, imponendo sulla sezione la pressione assoluta minima (depressione massima) che si è disposti ad accettare in condotta,  $p_{acc}^*$ , comunque non inferiore alla tensione di vapore del liquido.

Per la sezione contratta all'imbocco il valore della portata critica si ottiene imponendo il segno di uguaglianza nella equazione (190):

$$\frac{p_{atm}^*}{\gamma} + \zeta_a - \frac{D_1}{2} - 0,1 \frac{U_1^2}{2g} - \frac{U_c^2}{2g} = \frac{p_{acc}^*}{\gamma}$$

da cui, nel caso il liquido sia acqua:

$$10,33 + \zeta_a - \frac{D_1}{2} - 0,1 \frac{Q_{cr_i}^2}{2g\Omega_1^2} - \frac{Q_{cr_i}^2}{2g\Omega_1^2 C_c} = \frac{p_{acc}^*}{\gamma},$$

nella quale sono stati introdotti il valore di colonna d'acqua corrispondente alla pressione atmosferica standard (10,33 m) e il coefficiente di contrazione all'imbocco,  $C_c$ .

Si ottiene quindi il valore della portata critica per la sezione di imbocco:

$$Q_{cr_i} = \sqrt{\frac{10,33 + \zeta_a - \frac{D_1}{2} - \frac{p_{acc}^*}{\gamma}}{0,1 \frac{1}{2g\Omega_1^2} + \frac{1}{2g\Omega_1^2 C_c^2}}}$$

Analogamente, per la sezione di controllo all'aspirazione della pompa si avrà, in condizioni critiche:

$$\frac{p_{atm}^*}{\gamma} + H_{gb} - \Delta y(Q_{cr_a}) - \frac{p_{acc}^*}{\gamma} = \frac{U_g^2}{2g} + \Delta w = NPSH_R(Q_{cr_a}) \quad (192)$$

da cui si può dedurre il valore della portata critica corrispondente. In questo caso, il valore di portata critica si deduce per via grafica, dal momento che l'andamento di  $NPSH_R$  è fornito in tale forma. In pratica, ciò si realizza tracciando, sul grafico del  $NPSH_R$  fornito dal costruttore (Figura 93) la curva dei valori del primo membro della (192) in funzione di  $Q$ , che è una parabola avente concavità rivolta verso il basso. Il valore di portata del punto di intersezione delle due curve rappresenta il valore critico per l'aspirazione della pompa. Si rimarca come il pompaggio di portate maggiori *richieda necessariamente il ridimensionamento della condotta*, non essendo realizzabile unicamente con l'installazione di una pompa di maggiore potenza.

#### 8.5 Cenni ai criteri di progettazione degli impianti di pompaggio

Tipicamente, un impianto di pompaggio è costituito da una condotta di aspirazione di sviluppo limitato ad alcuni metri e da una condotta di mandata che copre l'intero sviluppo rimanente.

Obiettivo della progettazione di un impianto di pompaggio è la determinazione dei diametri delle condotte di aspirazione e di mandata, della prevalenza e della potenza della pompa. Da un punto di vista puramente idraulico, il problema ammette le infinite soluzioni fornite dalla equazione caratteristica della condotta (188). Infatti, quand'anche i diametri fossero più d'uno per le condotte di aspirazione e mandata, per ogni insieme di valori di diametri assegnati l'equazione caratteristica della condotta fornisce il valore di prevalenza che consente il passaggio della portata assegnata.

Si tratta, in sostanza, di un problema di indeterminazione analogo a quello evidenziato nel §7.7.3 per il progetto di una rete di lunghe condotte. Come già in quel caso, la soluzione univoca del problema si basa su un criterio di minimo costo, del quale diamo qui soltanto un breve cenno, assumendo, per semplicità, che l'intera condotta (inclusa la condotta di aspirazione) sia costituita da un unico diametro. Ciò è generalmente del tutto lecito in considerazione del fatto che, essendo la condotta di aspirazione di sviluppo limitato, le relative perdite di carico sono di norma trascurabili rispetto a quelle aventi sede nella condotta di mandata.

Anche in questo caso, i costi complessivi si distinguono in costi di realizzazione dell'impianto, sopportati in un intervallo di tempo relativamente limitato (il tempo necessario alla costruzione dell'opera) e costi distribuiti nell'arco della vita utile dell'opera, eventualmente anche variabili da anno ad anno, i quali consistono di due parti: una relativa alla manutenzione dell'impianto (come per le reti di condotte a gravità), l'altra relativa al costo dell'energia utilizzata per il funzionamento della pompa. L'energia utilizzata per un dato intervallo temporale di funzionamento della pompa con assegnate portata e prevalenza si ottiene moltiplicando la potenza della pompa, data dall'equazione (189), per il tempo di funzionamento, costituente un dato progettuale. Moltiplicando il valore così ottenuto per il costo unitario dell'energia, si ottiene il costo sostenuto per il funzionamento della pompa. Anche in questo caso, i due tipi di costi sono resi omogenei, quindi anche sommabili, con le tecniche del calcolo attuariale.

Evidentemente, il costo di costruzione e manutenzione dell'impianto cresce all'aumentare del diametro della tubazione, tendendo all'infinito al tendere all'infinito del diametro. Corrispondentemente, tendono a zero le perdite di carico, in quanto decrescenti monotonicamente al crescere del diametro. Pertanto, sulla base dell'equazione caratteristica (188), la prevalenza si riduce al valore minimo possibile, dato dalla prevalenza geodetica. Il costo complessivo (investimento+manutenzione+funzionamento pompe) assume comunque, in questo limite, un valore infinito perché tale è la componente relativa alla costruzione ed alla manutenzione della tubazione di diametro infinito.

Viceversa, se il diametro della tubazione tende a zero, tende a zero il relativo costo, mentre tendono all'infinito le perdite di carico nella condotta, quindi anche la prevalenza totale, la potenza della pompa, l'energia necessaria al suo funzionamento ed il relativo costo. Tende quindi ancora ad infinito il costo complessivo. Poiché il costo totale, funzione del diametro, tende all'infinito agli estremi dell'intervallo di definizione di questo, deve esistere un valore di diametro intermedio per il quale il costo totale è minimo (*diametro di massimo tornaconto*). Tale valore del diametro può essere espresso facilmente in forma analitica sotto alcune ipotesi semplificative. Peraltro, facendo uso di un foglio di calcolo e riferendosi, come è ormai chiaro doversi fare, al solo insieme di diametri e, volendo, di pompe disponibili in commercio, la determinazione del diametro di massimo tornaconto può eseguirsi agevolmente anche tendendo conto di portate, scabrezze, rendimenti, etc. variabili nel tempo. Si osservi che, poiché ciò che si cerca è una configurazione di minimo costo, nella determinazione del costo complessivo non vengono presi in considerazione costi fissi, o approssimativamente considerabili come tali, quali, ad esempio, le opere civili per l'alloggiamento delle pompe.

Una volta determinato il valore del diametro di massimo tornaconto, la verifica alle massime depressioni potrà eventualmente suggerirne una modifica nel tronco di aspirazione. Poiché, tuttavia, come già ricordato, le perdite in tale tronco sono generalmente trascurabili rispetto a quelle che avvengono nella condotta di mandata, tale operazione non modifica sostanzialmente i risultati del calcolo così come sinteticamente illustrato.

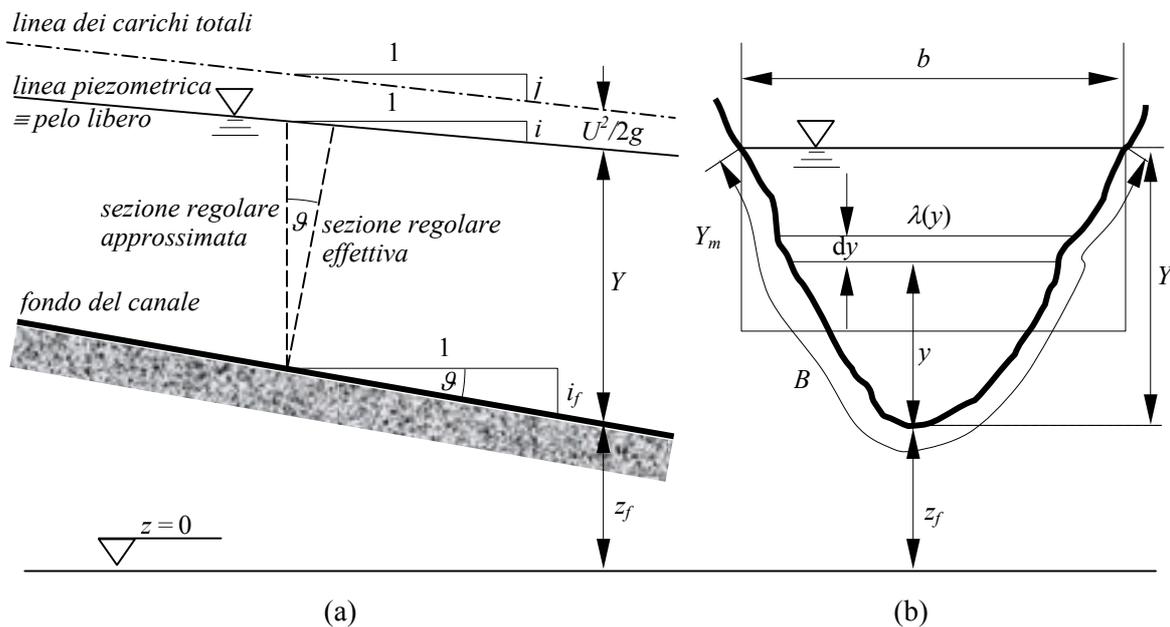
## CAPITOLO NONO

### 9. CORRENTI A SUPERFICIE LIBERA

#### 9.1 Generalità

Si dice *corrente a superficie libera*, o *a pelo libero*, una corrente che presenta parte della sua superficie di contorno a contatto con l'atmosfera ed è perciò vincolata ad avere tale porzione di superficie esposta alla pressione atmosferica. Sebbene, in termini generali, una corrente a superficie libera così definita possa essere costituita, per esempio, da un getto in aria, in termini meno astratti si considera generalmente il caso del moto di una corrente in un canale artificiale o in un alveo naturale, quale quello rappresentato in Figura 96.

Contrariamente al caso delle correnti in pressione, le correnti a pelo libero non sono vincolate ad assumere una forma prestabilita ed il loro studio presenta conseguentemente qualche maggiore difficoltà, particolarmente nel caso di generico moto stazionario. Tuttavia, nell'ambito del corso soltanto il caso del moto uniforme verrà trattato in un certo dettaglio, incluse le applicazioni numeriche. Il moto stazionario non uniforme verrà invece illustrato in via prevalentemente descrittiva, con lo scopo sia di informare l'allievo di quante condizioni di moto anche notevolmente differenti da quella di moto uniforme possano verificarsi in un canale, affinché egli o ella possano rendersi conto di quali problemi non possono essere affrontati ricorrendo a tale schematizzazione, sia per introdurre alcuni concetti – in particolare, quello di stato critico – ai quale occorre far riferimento nello studio dello stramazzo a larga soglia, il cui funzionamento verrà illustrato nel successivo cap. 10, dedicato alla Foronomia.



**Figura 96. Elementi caratteristici di una corrente a pelo libero: (a) sezione longitudinale; (b) sezione trasversale.**

Le ipotesi fondamentali che stanno alla base della teoria delle correnti a pelo libero sono quelle di corrente liquida gradualmente variata – cui consegue la presenza di sezioni regolari ove la pressione è distribuita idrostaticamente – e piccola pendenza del fondo, col che risulta piccolo l'angolo  $\vartheta$  che il profilo del fondo dell'alveo forma con l'orizzontale,  $\cos \vartheta \cong 1$  e le sezioni regolari possono essere considerate, con ottima approssimazione, verticali. Si assume inoltre che il profilo

trasversale della superficie libera nelle sezioni della corrente sia orizzontale, il che consente di definire la profondità  $Y$  della corrente in una sezione come la differenza di quota fra il pelo libero ed il punto più depresso della sezione, la cui quota verrà indicata con  $z_f$ . Inoltre, l'asse della corrente è generalmente assunto come luogo di tali punti più depressi delle sezioni della corrente.

Poiché la quota piezometrica di un fluido in quiete rappresenta la quota del suo piano dei carichi idrostatici (§3.5) e, conseguentemente, la quota piezometrica che vige in una sezione regolare di una corrente rappresenta la quota alla quale si porta il menisco di un piezometro che venga collegato al contorno della corrente, nel caso di una corrente a pelo libero la quota piezometrica di una sua sezione regolare è rappresentata dalla quota stessa della superficie libera della corrente. Pertanto, la linea piezometrica di una corrente a pelo libero è data dal profilo della superficie libera e la cadente piezometrica  $i$  è pertanto pari alla pendenza di tale superficie. La linea dei carichi totali si trova quindi, sezione per sezione, al di sopra del pelo libero di una quantità pari all'altezza cinetica media della corrente nella sezione considerata. In considerazione del fatto che il regime di moto nei canali a pelo libero è generalmente turbolento pienamente sviluppato, nella espressione dell'altezza cinetica media può essere assunto unitario il coefficiente di ragguglio delle potenze cinetiche  $\alpha$ .

Come già nel caso delle correnti in pressione, a tratti caratterizzati dalle condizioni di corrente gradualmente variata, di sviluppo prevalente, si alternano talora tratti di sviluppo molto più limitato sede di fenomeni di moto non lineare, in cui cioè la corrente non può dirsi gradualmente variata e non sono perciò definibili una linea piezometrica ed una linea dei carichi totali della corrente. Anche a tali fenomeni si farà cenno nei paragrafi successivi.

## 9.2 Moto uniforme

La definizione di moto uniforme data nel §4.5 (moto nel quale tutte le particelle fluide si muovono di moto rettilineo uniforme) implica che il moto uniforme in una corrente a pelo libero possa avere luogo unicamente in alvei prismatici o cilindrici, ossia, alvei il cui profilo delle pareti non vari da sezione a sezione<sup>66</sup>. Come tutte le correnti in moto uniforme, anche nel caso delle correnti a pelo libero la sezione liquida  $\Omega$  deve mantenersi costante lungo l'asse, come anche la profondità della corrente. Poiché quindi il profilo della superficie libera deve mantenersi rettilineo e parallelo al profilo del fondo (ossia, del punto più depresso della sezione dell'alveo), detta:

$$i_f = -\frac{\partial z_f}{\partial s} \quad (193)$$

la pendenza del fondo (positiva quando l'alveo, come di norma avviene, è declive nel senso del moto), questa deve risultare pari alla pendenza della superficie libera, a sua volta pari, come detto, alla cadente piezometrica. Essendo le correnti in moto uniforme stazionarie, anche l'altezza cinetica media della corrente deve mantenersi costante lungo l'asse, per cui la linea dei carichi totali risulta anch'essa parallela al profilo del fondo e le corrispondenti pendenze,  $j$  e  $i_f$ , sono perciò uguali.

In definitiva, la condizione rappresentativa del moto uniforme delle correnti a pelo libero è data da:

$$j = i = i_f . \quad (194)$$

Tale condizione consente di risolvere il problema fondamentale della determinazione della profondità  $Y_u$  (*profondità o altezza di moto uniforme*) con la quale si svolge il moto uniforme di una portata  $Q$  assegnata. Essendo nota la pendenza del canale in esame, inserendo la condizione  $j = i_f$ , ad esempio, nell'equazione di Chezy (175) per il calcolo delle perdite di carico nel moto uniforme, si ottiene:

---

<sup>66</sup> A proposito dell'uso indiscriminato delle formule del moto uniforme dal quale si intende mettere in guardia il lettore, si osservi come un alveo naturale ben difficilmente possa dirsi prismatico e come, quindi, solo con una certa dose di approssimazione, e magari di rischio, esso possa essere considerato sede di moto uniforme.

$$i_f = \frac{U^2}{\chi^2 \mathcal{R}},$$

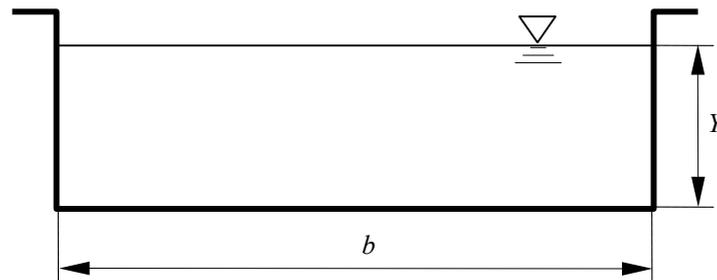
da cui si ricavano le espressioni della velocità e della portata di moto uniforme per un alveo di data sezione, scabrezza delle pareti e pendenza del fondo:

$$\begin{aligned} U &= \chi \sqrt{\mathcal{R} i_f}, \\ Q &= \Omega \chi \sqrt{\mathcal{R} i_f} \end{aligned} \quad (195)$$

ove per il coefficiente di Chezy  $\chi$  si adoterà una delle formule pratiche disponibili (Bazin, Kutter, Gauckler-Strickler, Manning). Per assegnati valori della pendenza del fondo e della scabrezza dell'alveo, la velocità e la portata di moto uniforme sono funzione della sola profondità della corrente tramite i termini  $\mathcal{R}$ ,  $\chi$  e  $\Omega$ . Sebbene siano state proposte formulazioni delle leggi di resistenza al moto uniforme analoghe alla formula di Colebrook<sup>67</sup>, a livello pratico, poiché il regime di moto nei canali è generalmente di tipo turbolento pienamente sviluppato, l'uso della formula di Chezy è di gran lunga più diffuso.

La curva che rappresenta l'andamento della portata di moto uniforme in funzione della profondità della corrente (attraverso i termini della formula di Chezy (195) da questa dipendenti) è detta *scala delle portate di moto uniforme*, talora identificata con il termine, più generico, di *scala di deflusso*. Poiché l'area della sezione liquida ed il raggio idraulico (quindi anche il coefficiente di Chezy) sono funzioni note della profondità, per ogni valore di profondità di moto uniforme è possibile calcolare agevolmente il corrispondente valore di portata. Eseguendo tale calcolo per un numero congruo di valori di profondità, è pertanto possibile tracciare il grafico della scala delle portate di moto uniforme. Viceversa, per un alveo di assegnata geometria, non è possibile ricavare in forma esplicita la profondità di moto uniforme corrispondente ad un dato valore di portata, con l'unica eccezione, significativa dal punto di vista pratico soltanto in alcuni casi molto particolari, dell'alveo a sezione rettangolare di larghezza molto maggiore della profondità.

Per maggiore chiarezza, i problemi legati alla determinazione della profondità di moto uniforme vengono illustrati con riferimento al caso della sezione rettangolare di Figura 97, per la quale si suppone non ricorra la condizione semplificativa  $b \gg Y$ .



**Figura 97. Canale a sezione rettangolare.**

Le varie grandezze che figurano nella espressione della scala delle portate di moto uniforme sono date da:

$$\begin{aligned} \Omega(Y) &= bY ; \\ B(Y) &= b + 2Y ; \end{aligned}$$

<sup>67</sup> Vedi, ad esempio, il Marchi-Rubatta, §17.7.

$$\mathfrak{R}(Y) = \frac{\Omega}{B} = \frac{bY}{b + 2Y} ;$$

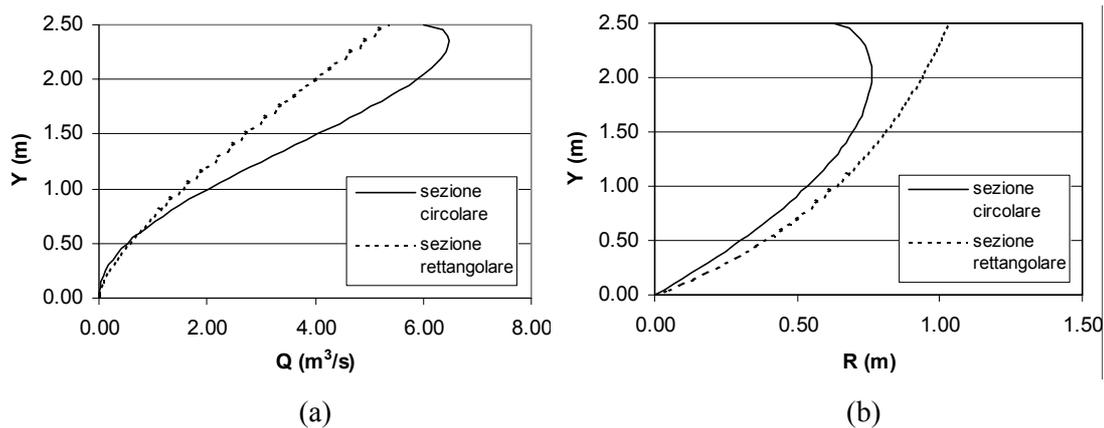
$$\chi(Y) = k_s \mathfrak{R}^{1/6} = k_s \left( \frac{bY}{b + 2Y} \right)^{1/6} ,$$

da cui infine l'espressione della portata:

$$Q_u(Y_u) = \Omega \chi \sqrt{\mathfrak{R} i_f} = b Y_u k_s \left( \frac{b Y_u}{b + 2 Y_u} \right)^{2/3} \sqrt{i_f} .$$

Risulta evidente come, anche in questo semplice caso, non sia possibile scrivere una espressione esplicita di  $Y_u$  in funzione della portata. Il problema della determinazione della profondità di moto uniforme deve pertanto essere risolto con uno dei metodi generali di soluzione di equazioni in forma implicita, illustrati, in queste dispense, con riferimento ai casi dell'equazione di Colebrook (§7.3.1) o della verifica di reti di lunghe condotte (§7.7.3): metodi grafici o metodi iterativi (per approssimazioni successive); questi ultimi, in particolare, di agevole utilizzazione mediante i solutori automatici reperibili in un foglio elettronico, che su tali metodi si basano.

A titolo di esempio, in Figura 98 sono riportate le scale delle portate di moto uniforme e gli andamenti dei raggi idraulici in funzione della profondità  $Y$  per una sezione circolare ( $D=2,50$  m;  $i_f=0,0005$ ;  $k_s=75$  m<sup>1/3</sup>s<sup>-1</sup>) ed una sezione rettangolare ( $b=3,50$  m;  $i_f=0,0001$ ;  $k_s=60$  m<sup>1/3</sup>s<sup>-1</sup>).



**Figura 98. (a) Scala delle portate di moto uniforme e (b) andamento dei raggi idraulici in funzione della profondità  $Y$  in canali a sezione circolare ( $D=2,50$  m;  $i_f=0,0005$ ;  $k_s=75$  m<sup>1/3</sup>s<sup>-1</sup>) e rettangolare ( $b=3,50$  m;  $i_f=0,0001$ ;  $k_s=60$  m<sup>1/3</sup>s<sup>-1</sup>).**

Si osservi come l'andamento di entrambe le grandezze relativamente alla sezione circolare presenti un massimo per valori della profondità minori del massimo consentito, pari al diametro della sezione. Tale caratteristica è comune alle sezioni chiuse, utilizzate tipicamente nelle condotte fognarie. Il massimo nell'andamento del raggio idraulico, costituente la causa del massimo della portata, è dovuto al fatto che, in prossimità del riempimento della sezione, il contorno bagnato (cui sono legate, attraverso lo sforzo alla parete, le resistenze al moto) aumenta molto più rapidamente dell'area della sezione (cui è legata la forza motrice, data dalla forza peso), sicché il rapporto dei due,  $\Omega/B$ , tende a diminuire in prossimità della sommità (o *cielo*) della condotta.

Il procedimento grafico consiste, ovviamente, nella lettura sull'asse delle  $Y$  del valore corrispondente al valore di portata  $Q$  assegnato. Come detto, in Figura 98 sono riportati, per i due tipi di sezione, le scale delle portate di moto uniforme in termini di portate effettive. Poiché l'espressione (195) contiene a secondo membro la pendenza dell'alveo, per una stessa sezione occorre tracciare una scala delle portate per ciascun valore di pendenza del fondo. Nel caso si abbia

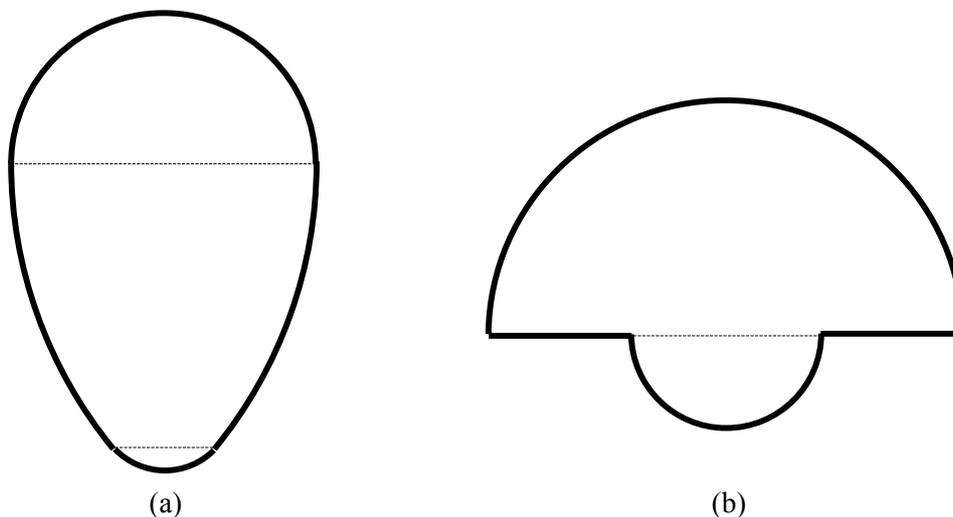
a che fare con un canale composto di più tronchi a pendenza diversa, risulta quindi comodo riferirsi alla scala delle portate di moto uniforme *ridotte*:

$$\frac{Q}{\sqrt{i_f}} = \Omega \chi \sqrt{R} , \quad (196)$$

in quanto indipendente dal valore della pendenza dell'alveo. È quindi sufficiente tracciare una ed una sola scala delle portate ridotte per uno stesso tipo di alveo, i diversi valori di profondità di moto uniforme corrispondenti alla stessa portata (perché si tratta di regime stazionario) ed alle diverse pendenze essendo deducibili dalla stessa curva delle portate ridotte sulla base di diversi valori del rapporto  $Q/\sqrt{i_f}$ <sup>68</sup>.

È evidente che, una volta che sia chiaro il concetto di scala delle portate di moto uniforme, determinarne l'espressione per un tipo di sezione piuttosto che per un altro è una mera questione di abilità nell'espressione analitica dei vari elementi che la compongono (area della sezione liquida, perimetro bagnato, etc...) in funzione della profondità  $Y$ . Si noti anche che certi tipi di sezione di uso corrente ammettono espressioni diverse in diversi campi della profondità. È il caso, ad esempio, delle sezioni ovoidali utilizzate nei collettori fognari (vedi Figura 99a), aventi lo scopo di far fluire le portate minori con velocità non troppo piccole, allo scopo di evitare il deposito dei sedimenti trasportati dalla corrente.

Sezioni del tipo degli ovoidali consentono, comunque, l'uso della formula di Chezy così come è stato illustrato finora, poiché l'irregolarità della sezione, per così dire, attiene semplicemente alla rappresentazione analitica della formula della portata, le sezioni in sé essendo comunque di forma relativamente compatta. L'applicazione pura e semplice della formula di Chezy può invece risultare inadeguata nel caso di sezioni composite di forma più irregolare, quali, ad esempio, quelle dei grandi collettori fognari, dotati di una cunetta atta al convogliamento delle portate minori e di espansioni laterali occupate dalle acque quando nel collettore fluiscano portate maggiori (vedi Figura 99b). Un altro esempio di sezioni di questo tipo è quello degli alvei fluviali composti, similmente al precedente esempio, da un alveo di magra ed espansioni laterali (dette *golene*), che vengono sommerse in occasione degli eventi di piena.



**Figura 99. Esempi di (a) sezione ovoidale e (b) sezione composta con cunetta ed espansioni laterali.**

<sup>68</sup> Sebbene il calcolo grafico vero e proprio sia oramai alquanto in disuso, la rappresentazione grafica consente tuttavia una efficacia illustrativa che non va sottovalutata, soprattutto nella produzione di documenti tecnici che devono avere chiarezza sufficiente alla comprensione dei procedimenti di calcolo da parte di terzi.

Il medesimo meccanismo descritto a proposito della presenza dei massimi di raggio idraulico e portata nelle sezioni chiuse, corrispondente in quel caso ad un effetto fisicamente plausibile e che ha infatti effettivamente luogo, comporta invece, nel caso delle sezioni composite fortemente irregolari, conseguenze chiaramente irrealistiche. Con riferimento al caso della sezione di Figura 99b, quando la superficie libera supera il livello massimo della cunetta, indicato in tratteggio, di una quantità  $dY$  infinitesima, la sezione liquida aumenta di una quantità pure infinitesima, mentre si ha un incremento finito del contorno bagnato, dato dalla somma delle larghezze delle due espansioni laterali. Il corrispondente effetto di riduzione del valore della portata calcolabile con la formula di Chezy considerando l'intera sezione non è in questo caso reale, ma dovuto unicamente, in buona sostanza, al fatto di applicare ad una sezione estremamente irregolare una formula dedotta per sezioni relativamente compatte.

A tale inconveniente si ovvia facilmente scomponendo la sezione in parti che, all'ingrosso, possano essere considerate sufficientemente compatte da poter applicare, a ciascuna di essa, la formula di Chezy con valori specifici di alcuni dei parametri che vi compaiono: nel caso in esempio, la sezione della cunetta e la parte rimanente al di sopra di essa. In generale, data una sezione scomponibile in  $N$  parti, uno dei criteri di calcolo più seguiti assume che in ciascuna delle  $N$  sezioni il moto sia caratterizzato dalle medesime velocità e cadente dei carichi totali; quest'ultima, date le condizioni di moto uniforme, posta pari alla pendenza del fondo. Si scrive quindi, per ciascuna ( $j$ -esima) sezione:

$$\frac{U}{\sqrt{i_f}} = \chi_j \sqrt{\mathfrak{R}_j} = \chi_j \sqrt{\frac{\Omega_j}{B_j}},$$

da cui si ottiene facilmente la seguente espressione dell'area della sezione liquida complessiva:

$$\Omega = \sum_{j=1}^N \Omega_j = \sum_{j=1}^N \frac{U^2}{i_f} \frac{B_j}{\chi_j^2} = \frac{U^2}{i_f} \sum_{j=1}^N \frac{B_j}{\chi_j^2}$$

e quindi, ricordando che  $\mathfrak{R} = \Omega/B$ , la seguente estensione della espressione di Chezy:

$$i_f = \frac{U^2}{\Omega} \sum_{j=1}^N \frac{B_j}{\chi_j^2} = \frac{U^2}{\mathfrak{R}} \left( \frac{1}{B} \sum_{j=1}^N \frac{B_j}{\chi_j^2} \right) = \frac{U^2}{\mathfrak{R} \bar{\chi}^2}$$

in cui compare un valore medio del coefficiente di Chezy dato da:

$$\bar{\chi}^2 = \frac{B}{\sum_{j=1}^N \frac{B_j}{\chi_j^2}}.$$

Si osservi che il procedimento descritto ha un'utilità legata anche al fatto che, tipicamente, e specialmente nel caso degli alvei fluviali, le espansioni laterali hanno una scabrezza differente da quella della cunetta o alveo di magra che sia.

Si osservi anche che, a rigore, il procedimento comporta qualche incertezza nella specificazione dei contorni bagnati delle singole parti della sezione totale, i quali – si ricorda – rappresentano il profilo delle superfici attraverso le quali vengono esercitati sforzi sulla corrente liquida. In pratica, questi si assumono coincidenti con i profili delle superfici materiali a contatto con le sezioni liquide parziali, trascurando gli sforzi che, in realtà, le varie sezioni parziali si trasmettono attraverso le superfici liquide di separazione (nel caso dell'esempio di Figura 99b, la superficie identificata dalla linea tratteggiata). Tale approssimazione può tuttavia ritenersi, generalmente, del tutto accettabile.

In materia particolarmente di alvei naturali, come pure di canali artificiali a cielo aperto o adibiti ad usi particolari, va anche osservato come il problema della specificazione della scabrezza delle

pareti possa essere soggetta ad incertezze ancora maggiori di quelle che pure esistono nel caso delle condotte in pressione.

Per effetto degli agenti atmosferici, della erodibilità degli alvei naturali, della presenza di vegetazione, del convogliamento di sostanze aggressive (è il caso delle condotte fognarie), le scabrezze nei canali a superficie libera possono essere più difficilmente specificabili per una situazione nota, come pure più rapidamente variabili nello spazio e nel tempo. In tali casi, sarà compito del progettista tenere conto di tali incertezze provvedendo a porsi in condizioni ragionevolmente cautelative.

### 9.3 Caratteristiche energetiche della corrente in una sezione. Stato critico

Essendo per ipotesi le correnti a pelo libero gradualmente variate (a meno di pochi tratti di sviluppo limitato) ed essendo perciò la quota piezometrica costante sulle sezioni regolari che possono perciò individuarsi, il carico totale in una sezione può esprimersi con riferimento alla quota del fondo del canale ed alla corrispondente altezza piezometrica  $Y = p_f/\gamma$ , in cui  $p_f = \gamma Y$  rappresenta la pressione al fondo:

$$H = h + \frac{U^2}{2g} = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} = z_f + Y + \frac{U^2}{2g} .$$

Si definisce *carico rispetto al fondo* o *carico specifico* della corrente il carico totale valutato, sezione per sezione, con riferimento alla quota del fondo, variabile lungo l'asse:

$$E = H - z_f = Y + \frac{U^2}{2g} = Y + \frac{Q^2}{2g\Omega^2} . \quad (197)$$

La condizione di moto stazionario in una corrente liquida implica (§6.2) che la portata della corrente sia costante lungo l'asse. È pertanto di particolare interesse studiare l'andamento del carico specifico in funzione della profondità della corrente a portata costante, rappresentato in Figura 100. A tale scopo è conveniente utilizzare l'espressione del carico specifico contenente esplicitamente la portata, dalla quale si evince che, effettivamente,  $E$  dipende unicamente dalla profondità  $Y$ , sia direttamente che attraverso la dipendenza univoca dell'area della sezione liquida  $\Omega$  da  $Y$ .

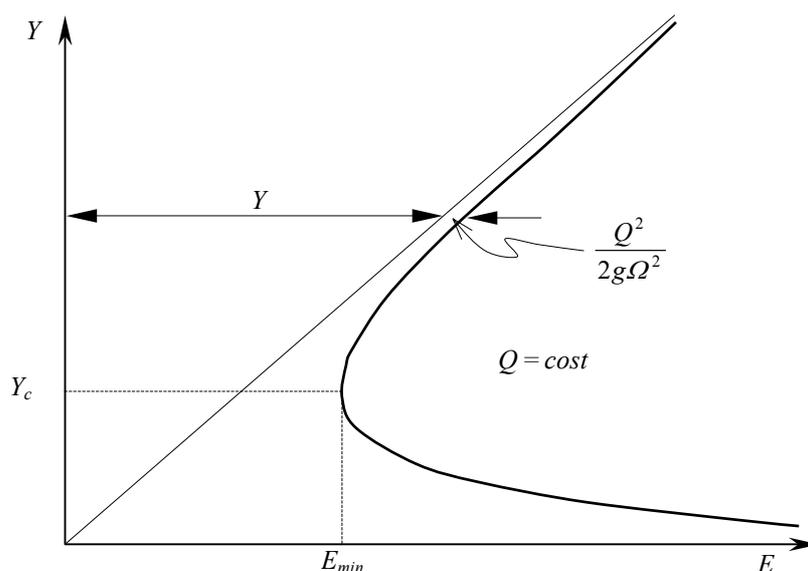


Figura 100. Andamento del carico specifico a portata costante di una corrente a pelo libero.

Il carico specifico è dato dalla somma di un primo contributo pari alla profondità  $Y$ , tendente ovviamente a zero per  $Y \rightarrow 0$  e ad infinito per  $Y \rightarrow \infty$ , e di un secondo contributo,  $Q^2/(2g\Omega^2)$ , tendente a zero per  $Y \rightarrow \infty$  (perché allora  $\Omega \rightarrow \infty$ ) e tendente ad infinito per  $Y \rightarrow 0$  (allorché  $\Omega \rightarrow 0$ ). Pertanto, a entrambi gli estremi dell'intervallo di definizione della variabile indipendente  $Y$ , 0 e  $\infty$ , si ha  $E \rightarrow \infty$ , in quanto una delle due componenti tende sempre ad infinito. Tale constatazione implica necessariamente l'esistenza di un minimo del carico specifico. Si definisce *stato critico* di una corrente a superficie libera la condizione della corrente per la quale è minimo il carico specifico a portata costante fissata, e *profondità critica*, indicata con il simbolo  $Y_c$ , il corrispondente valore di profondità.

L'espressione in forma analitica dello stato critico si determina esprimendo le condizione di minima energia specifica, data dall'annullamento della derivata prima della  $E$  rispetto alla variabile indipendente  $Y$  (la verifica del segno della derivata seconda non è necessaria in quanto, per quanto discusso in precedenza, è certo che la condizione di derivata prima nulla deve corrispondere ad un minimo). Si ha quindi:

$$\left. \frac{\partial E(Y)}{\partial Y} \right|_{Q=\text{cost}} = \frac{\partial}{\partial Y} \left( Y + \frac{Q^2}{2g\Omega^2} \right) \Big|_{Q=\text{cost}} = 1 - \frac{Q^2}{g\Omega^3} \frac{d\Omega}{dY}.$$

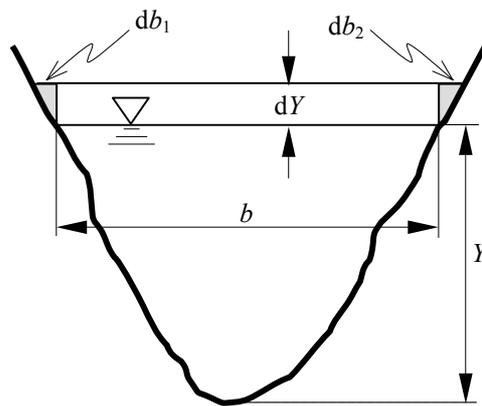


Figura 101. Schema per la valutazione della derivata  $d\Omega/dY$ .

Quanto valga la derivata  $d\Omega/dY$  si deduce dallo schema di Figura 101. Detta  $b$  la larghezza della sezione liquida in superficie, ad un incremento infinitesimo  $dY$  della profondità corrisponde un incremento dell'area della sezione liquida composto da una parte rettangolare di area  $b dY$ , e da due parti, costituenti triangoli rettangoli al limite per  $dY \rightarrow 0$ , aventi entrambi un cateto pari a  $dY$  e l'altro pari a  $db_1$  e  $db_2$  rispettivamente, infinitesimi dello stesso ordine di  $dY$ . Le due aree triangolari sono quindi infinitesime di ordine 2 rispetto a  $dY$ , mentre l'area rettangolare, proporzionale a  $dY$ , è infinitesimo di ordine 1. Nel limite per  $dY \rightarrow 0$  le aree delle superfici triangolari sono quindi trascurabili rispetto all'area della superficie rettangolare, per cui  $d\Omega = b dY$  e  $d\Omega/dY = b$ .

Inserendo tale relazione nell'espressione della derivata dell'energia specifica si ottiene quindi:

$$\left. \frac{\partial E(Y)}{\partial Y} \right|_{Q=\text{cost}} = 1 - \frac{Q^2 b}{g\Omega^3} = 0,$$

da cui si ottiene la condizione utilizzabile in pratica per determinare la profondità critica:

$$\left( \frac{\Omega^3}{b} \right)_c = \frac{Q^2}{g}, \quad (198)$$

in cui i termini dipendenti da  $Y$  a primo membro sono separati dai termini costanti a secondo membro. Per una sezione di forma qualunque, esprimendo il primo membro in funzione della profondità, con ragionamento del tutto analogo a quello condotto in tema di scala delle portate di moto uniforme, si può tracciare la funzione  $\Omega^3/b = F(Y)$  e determinare la  $Y_c$  come quel valore di profondità per il quale  $F(Y) = Q^2/g$ .

Il valore minimo del carico specifico si ottiene inserendo la condizione (198) nell'espressione (197):

$$E_{\min} = \left( Y + \frac{Q^2}{2g\Omega^2} \right)_c = Y_c + \left( \frac{\Omega^3}{b} \right)_c \frac{1}{2\Omega_c^2} = Y_c + \frac{Y_{mc}}{2}$$

ove  $Y_{mc}$  è la *profondità media* della corrente in condizioni critiche, la profondità media  $Y_m = \Omega/b$  essendo interpretabile come profondità di una sezione rettangolare fittizia di larghezza costante pari alla larghezza in superficie della sezione data e uguale area della sezione liquida (vedi Figura 96). Per una sezione rettangolare si ha, ovviamente,  $Y_m = Y$ , per cui si ottiene, in tal caso:

$$E_{\min} = \frac{3}{2} Y_c ,$$

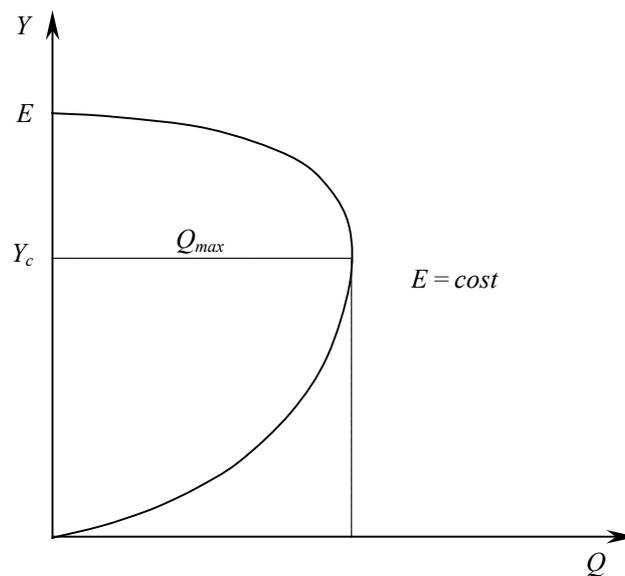
mentre la profondità critica è data dall'espressione esplicita ricavabile facilmente dalla condizione (198):

$$Y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb^2}} . \quad (199)$$

Assumendo costante il carico specifico in luogo della portata, quest'ultima è ora funzione della profondità della corrente secondo la relazione, ottenibile dalla (197):

$$Q = \Omega \sqrt{2g(E - Y)} , \quad (200)$$

rappresentata graficamente in Figura 102.



**Figura 102.** Andamento della portata a carico specifico costante di una corrente a pelo libero.

La portata, in quanto nulla per  $Y=0$  (per cui  $\Omega=0$ ) ed  $Y=E$ , deve ora ammettere un valore massimo, determinabile, analogamente a quanto fatto in precedenza per ricercare il minimo di  $E$  a  $Q$  costante, uguagliando a zero la derivata prima di  $Q$  rispetto ad  $Y$ . Si ha pertanto:

$$\left. \frac{dQ}{dY} \right|_{E=\text{cost}} = \frac{d\Omega}{dY} \sqrt{2g(E-Y)} - \Omega \frac{1}{2} \frac{2g}{\sqrt{2g(E-Y)}} = \frac{b \ 2g(E-Y) - \Omega g}{\sqrt{2g(E-Y)}} ,$$

da cui, eguagliando a zero il numeratore, si ottiene:

$$E = Y_c + \frac{Y_{mc}}{2} .$$

L'identità di tale relazione con la relazione ottenuta per il carico specifico minimo a portata costante segnala che tale condizione di portata massima a carico specifico costante si ottiene in corrispondenza dello stato critico precedentemente definito.

Sostituendo tale espressione nella (200), si ottiene l'espressione della portata massima:

$$\frac{Q_{\max}^2}{g} = \left( \frac{\Omega^3}{b} \right)_c ,$$

analoga alla condizione (198).

Nel caso di sezione rettangolare,  $Y=Y_m$  e la profondità critica è pertanto data da:

$$Y_c = \frac{2}{3} E ,$$

Le condizioni di minima energia specifica a portata costante e di massima portata ad energia specifica costante sono quindi equivalenti, cioè entrambe identificatrici dello stato critico. Il valore minimo di  $E$  corrispondente ad una data portata  $Q$  costante è pari a quel valore che, mantenuto costante, ammette un valore di portata massima pari alla stessa  $Q$ . Tutte le relazioni caratteristiche dello stato critico dedotte con riferimento al caso di portata costante si ottengono, identiche, per il caso di energia specifica costante. A tutti gli effetti, la condizione di portata massima ad energia specifica costante può quindi essere assunta come definizione dello stato critico in luogo di quella relativa al minimo di energia specifica a portata costante.

Si osservi che in nessuna delle relazioni suesposte compare la pendenza dell'alveo, la quale pertanto non gioca alcun ruolo nella determinazione della profondità critica e, più in generale, di tutti i parametri ad essa legati.

## 9.4 Caratteristiche cinematiche delle correnti a pelo libero

### 9.4.1 Propagazione delle perturbazioni.

Dall'equazione caratteristica dello stato critico (198) si può anche ricavare l'espressione della velocità media della corrente in condizioni critiche:

$$U_c = \frac{Q}{\Omega_c} = \sqrt{\frac{g\Omega_c}{b_c}} = \sqrt{gY_{mc}} , \quad (201)$$

la quale riveste un'importanza fondamentale nella teoria delle correnti a pelo libero. Infatti, si può mostrare che tale espressione coincide con l'espressione della velocità con cui si propagano perturbazioni della superficie libera di modesta entità rispetto alla profondità indisturbata (*piccole perturbazioni*). Tali sono certamente le uniche perturbazioni che possono prodursi, per definizione, in una corrente gradualmente variata e che possono quindi interessare le correnti a pelo libero sulla

base delle ipotesi ammesse. La velocità di propagazione di perturbazioni di qualsivoglia natura viene usualmente denominata *celerità*.

Un esempio di propagazione di perturbazioni della superficie libera di un corpo idrico di cui ognuno ha nozione per normale esperienza è costituito dalle onde circolari che si generano in uno stagno buttandovi un sasso – anche se in tal caso può non trattarsi di piccole perturbazioni, giacché la profondità indisturbata può essere confrontabile con l'altezza delle ondulazioni. Supponendo di riuscire a produrre, in qualche modo, piccole perturbazioni della superficie libera a simmetria circolare, le creste circolari si propagherebbero radialmente, in acqua stagnante, con celerità  $\sqrt{gY}$ . Se, invece, una piccola perturbazione viene creata in un corpo idrico in movimento, le creste, oltre a muoversi in direzione radiale con la celerità  $\sqrt{gY}$  rispetto alla corrente, vengono anche da essa trasportate.

Nello schema di moto unidimensionale proprio delle correnti, una perturbazione indotta in seno alla corrente liquida fluente in un canale (per esempio, rilasciando del liquido in una sezione con sufficiente gradualità) produce due sistemi di onde che viaggiano uno verso valle ed uno verso monte. Le perturbazioni vengono viste viaggiare verso monte e verso valle con celerità  $\sqrt{gY_m}$  da un osservatore animato dalla medesima velocità  $U$  della corrente. Tale valore di celerità, in quanto misurata in un sistema di riferimento localmente solidale con la corrente, associata perciò al moto relativo delle perturbazioni rispetto alla corrente, viene denotata con il termine di *celerità relativa* ed indicata qui con il simbolo  $c$ .

Un osservatore fisso posto sulla sponda del canale misura, invece, velocità delle due perturbazioni date dalla somma algebrica della velocità della corrente (che trasporta con sé le perturbazioni) e della celerità relativa con cui le perturbazioni si muovono rispetto alla corrente, una verso monte e l'altra verso valle. I valori delle *celerità assolute* delle due perturbazioni (velocità misurate dall'osservatore fisso), indicate con il simbolo  $a$  e considerate positive se concordi con il verso della corrente, sono date, per una sezione qualunque, da:

$$a_{1,2} = U \pm \sqrt{gY_m} \quad (202)$$

Risulta pertanto che una delle due perturbazioni, la cui celerità assoluta corrisponde al segno + nell'espressione precedente, si propaga certamente verso valle anche rispetto all'osservatore fisso.

#### 9.4.2 Classificazione delle correnti

Una corrente in condizioni critiche ha velocità media  $U_c = \sqrt{gY_{mc}}$ . Pertanto, per  $Y > Y_c$  si ha  $Y_m > Y_{mc}$ ,  $U < U_c$  e dunque anche  $U < \sqrt{gY_m}$ . Si ottiene quindi  $U - \sqrt{gY_m} < 0$ , per cui l'osservatore fisso vede tale seconda perturbazione muoversi verso monte, risalendo la corrente. Tale tipo di corrente viene detta *corrente lenta* (o *subcritica*). Viceversa, se  $Y < Y_c$  si ha  $U - \sqrt{gY_m} > 0$  e la perturbazione corrispondente si propaga anch'essa verso valle rispetto all'osservatore fisso. Si parla in tal caso di *corrente veloce* (o *supercritica*). Se, infine,  $Y = Y_c$  si ha  $U - \sqrt{gY_m} = 0$  e la perturbazione corrispondente rimane immobile rispetto all'osservatore fisso.

Introducendo il *numero di Froude*:

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gY_m}},$$

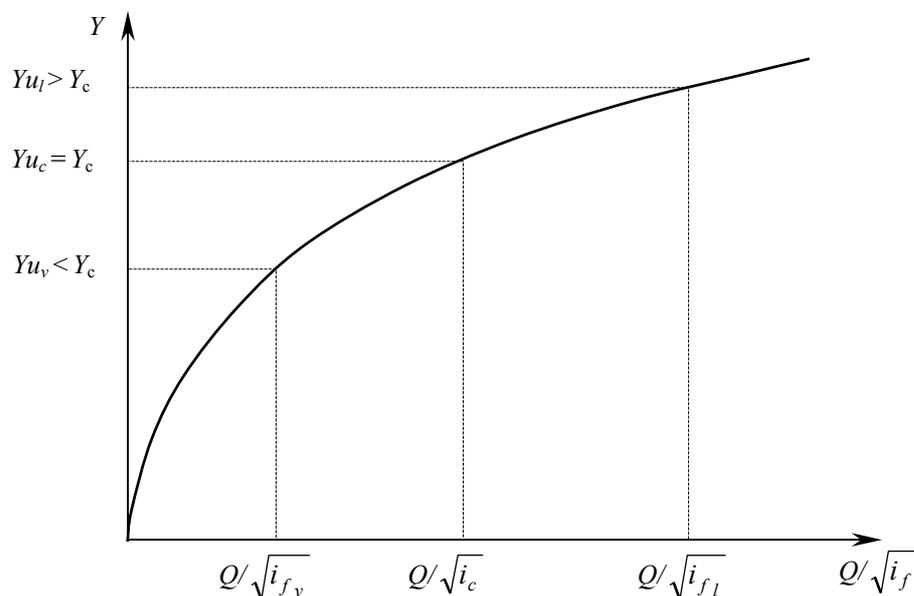
la classificazione delle correnti introdotta in precedenza può riassumersi come in Tabella 9.

#### 9.4.3 Classificazione degli alvei

Si consideri un canale sede di un moto uniforme con portata  $Q$ , il cui funzionamento sia, pertanto, descritto dalla scala delle portate di moto uniforme ridotte riprodotta in Figura 103.

**Tabella 9. Classificazione delle correnti a superficie libera.**

denominazione	definizione	proprietà
correnti lente (subcritiche)	$Y > Y_c$ ( $Fr < 1$ )	$U < \sqrt{gY_m}$ – le perturbazioni si propagano sia verso monte che verso valle.
correnti critiche	$Y = Y_c$ ( $Fr = 1$ )	$U = \sqrt{gY_m}$ – la perturbazione di celerità relativa rivolta verso monte è stazionaria rispetto ad un osservatore fisso (la celerità assoluta è nulla).
correnti veloci (supercritiche)	$Y < Y_c$ ( $Fr > 1$ )	$U > \sqrt{gY_m}$ – le perturbazioni si propagano soltanto verso valle.



**Figura 103. Scala delle portate ridotte.**

Data la scala delle portate ridotte, dipendente dalle dimensioni della sezione trasversale e dalla scabrezza delle pareti, la profondità di moto uniforme dipende, evidentemente, dalla pendenza del canale, mentre, a norma della (198), la profondità critica assume un valore univoco, non dipendente dalla pendenza.

Si supponga di poter variare la pendenza del canale, come in un dispositivo di laboratorio. Per pendenze sufficientemente ridotte (p.es. la  $i_{f_l}$  in Figura 103), il rapporto  $Q/\sqrt{i_f}$  risulterà sufficientemente elevato da fornire una profondità di moto uniforme  $Y_{u_l}$  superiore alla profondità critica  $Y_c$ , talché il moto uniforme si svolge in condizioni di corrente lenta. Un alveo di questo tipo si dice *a debole pendenza* o *fluviale*. Incrementando la pendenza dell'alveo, si ottengono valori di  $Q/\sqrt{i_f}$  e, quindi, della profondità di moto uniforme, via via inferiori. Per pendenze sufficientemente elevate (p.es. la  $\sqrt{i_{f_v}}$  in Figura 103), si ottiene una profondità di moto uniforme  $Y_{u_v}$  inferiore alla profondità critica  $Y_c$ , corrispondente a condizioni di corrente veloce. Un alveo di questo tipo si dice *a forte pendenza* o *torrentizio*. Esisterà, infine, un particolare valore di pendenza in corrispondenza del quale si otterrà una profondità di moto uniforme pari alla profondità critica. Tale valore di pendenza viene detto *pendenza critica*, ed il tipo di alveo *a pendenza critica*.

Tale classificazione è riassunta in Tabella 10.

**Tabella 10. Classificazione degli alvei sedi di correnti a superficie libera.**

denominazione	definizione
alvei a <i>debole pendenza</i> o <i>fluviali</i>	$Y_u > Y_c \equiv i_f < i_c \equiv$ la corrente di moto uniforme è una corrente lenta
alvei a <i>pendenza critica</i>	$Y_u = Y_c \equiv i_f = i_c \equiv$ la corrente di moto uniforme è una corrente critica
alvei a <i>forte pendenza</i> o <i>torrentizi</i>	$Y_u < Y_c \equiv i_f > i_c \equiv$ la corrente di moto uniforme è una corrente veloce

Sebbene le denominazioni correnti suesposte facciano riferimento al termine “pendenza”, operativamente conviene classificare un alveo in uno dei tre modi sulla base delle definizioni basate sul confronto fra profondità critica e di moto uniforme. Tuttavia, il concetto di pendenza critica è ben definito, ed utilizzabile per calcolare, se del caso, il valore di tale parametro per un dato alveo ed una data portata. Per quanto suesposto, fissata la portata, il valore della pendenza critica si ottiene dalla scala delle portate ridotte di Figura 103 dal valore del rapporto  $Q/\sqrt{i_f}$  letto sull’asse delle portate ridotte in corrispondenza di un valore di profondità di moto uniforme pari alla profondità critica per quella portata.

Si osservi che l'essere un alveo a pendenza debole, critica o forte non costituisce una sua caratteristica intrinseca, in quanto, per uno stesso alveo, il confronto fra profondità di moto uniforme e profondità critica dipende dalla portata che si considera. In altri termini, un dato alveo può risultare a forte pendenza per un certo valore della portata ed a debole pendenza per un valore diverso. In particolare, può mostrarsi facilmente<sup>69</sup> che il valore di pendenza critica di un alveo rettangolare di profondità molto minore della sua larghezza è una funzione decrescente della portata. Pertanto, un alveo di questo tipo, avente una pendenza fissata, è sempre a debole pendenza per portate sufficientemente piccole ed a forte pendenza per portate sufficientemente elevate.

## 9.5 Profili di moto permanente

### 9.5.1 Equazione differenziale dei profili di moto permanente

Nel §7.4 si è accennato al fatto che il moto di correnti stazionarie ma non uniformi, fintantoché esse risultano gradualmente variate, può essere studiato mediante l'equazione del moto nella forma generale:

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{\tau_0}{\gamma R_i},$$

utilizzando per la valutazione del secondo membro le formule stabilite per il moto uniforme: nel caso delle correnti a pelo libero, tipicamente la formula di Chezy:

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{U^2}{\chi^2 \mathcal{R}}.$$

Ad essa si aggiunge l'equazione di continuità per le correnti, che, per il caso di moto stazionario di liquido isoterma e omogeneo, si riduce alla relazione  $Q = \text{cost}$ , § 6.2, eq. (165).

A partire da tale equazione differenziale, si può dedurre l'equazione differenziale che descrive l'andamento della profondità  $Y$  lungo l'asse della corrente e, quindi, il profilo della superficie libera. A tale scopo, l'equazione va riscritta in termini di carico specifico  $E$  in luogo del carico totale  $H$ .

Dalla definizione di carico specifico (197):

<sup>69</sup> Vedi Citrini-Nosedà, §10.4.

$$E = H - z_f$$

si ottiene, derivando rispetto all'ascissa curvilinea  $s$ :

$$\frac{dE}{ds} = \frac{dH}{ds} - \frac{dz_f}{ds} = -j + i_f. \quad (203)$$

Tale equazione può essere utilizzata per il tracciamento di profili di correnti a pelo libero in regime stazionario (*profili di moto permanente*) in alvei di forma qualunque, dal momento che l'energia specifica  $E$  è funzione unicamente della profondità  $Y$ . Tuttavia, per ogni applicazione pratica occorre, di fatto, integrare la (203) mediante metodi numerici alle *differenze finite*, che verranno descritti nell'ambito del corso di Idraulica II.

In generale, il problema è costituito dal tracciamento del profilo del pelo libero in un canale che può essere composto di vari tratti, caratterizzati da diverse forme della sezione, pendenza, *tipo* di pendenza (debole, forte o critica), presenza di manufatti, etc.. La (203) costituisce una equazione differenziale nella funzione incognita  $Y$ ; la sua soluzione richiede, pertanto, la specificazione di una condizione al contorno. Una condizione al contorno dovrà essere specificata in ciascuno dei tratti (eventualmente, data dal valore di profondità determinato alla sezione comune di un tratto contiguo per integrazione della stessa (203)). Un concetto essenziale ai fini di un corretto tracciamento dei profili di moto permanente mediante la (203) è costituito dalle modalità di specificazione di tale condizioni al contorno, intimamente legate alle modalità di propagazione delle perturbazioni illustrate nel §9.4.1. Infatti, come conseguenza delle proprietà fisiche delle correnti lente e veloci esposte in precedenza, *l'unica condizione al contorno richiesta in ciascun tratto va imposta a valle se si tratta di corrente lenta, a monte se si tratta di corrente veloce*.

Il secondo caso è abbastanza intuitivo; infatti, potendosi le perturbazioni dirigersi unicamente verso valle nelle correnti veloci, soltanto condizioni imposte da monte possono influenzare la corrente e risultare pertanto idonee da un punto di vista fisico, oltre che matematico. L'affermazione relativa alle correnti lente può invece risultare meno chiara, dal momento che le perturbazioni possono propagarsi in entrambi i sensi. Si deve tuttavia considerare che il problema generale è retto da due equazioni differenziali: del moto e di continuità, nelle due incognite – ad esempio – portata  $Q$  e profondità  $Y$ , che richiedono pertanto due condizioni al contorno. Nel moto vario queste sono date da due condizioni da monte per le correnti veloci ed una da monte ed una da valle per le correnti lente, conformemente alle modalità di propagazione delle perturbazioni. In pratica, il regime stazionario può verificarsi soltanto se, a monte, viene immessa una portata costante o realizzate condizioni che determinino un valore costante della portata (per esempio, determinando una certa apertura, costante nel tempo, di una paratoia che regola la portata derivata da un serbatoio, il cui livello venga pure mantenuto costante nel tempo). Pertanto, specificando il valore di portata in un problema di moto permanente in canali a pelo libero si sta, in effetti, impegnando una condizione al contorno da monte. La seconda condizione disponibile deve quindi essere, effettivamente, imposta da valle per le correnti lente e da monte per le correnti veloci.

### 9.5.2 Profili di moto permanente in alvei prismatici

Le caratteristiche qualitative salienti dei profili di moto permanente possono dedursi per il caso di alvei prismatici, o cilindrici<sup>70</sup>, sia declivi (nei quali la quota del fondo decresce nel senso del moto e la pendenza  $i_f$  è pertanto positiva), che a pendenza nulla, o anche acclivi ( $i_f < 0$ ). Il caso degli alvei prismatici è significativo dal punto di vista pratico in quanto a tale classe possono usualmente

---

<sup>70</sup> Ricordiamo che, in Geometria, si definisce *cilindro* una superficie costituita da  $\infty^1$  rette parallele, dette *generatrici*, passanti per una curva detta *direttrice*. Un cilindro si può quindi ottenere facendo traslare una retta generatrice lungo una curva direttrice, ovvero per proiezione della direttrice lungo la direzione dello delle generatrici. Un prisma è un solido ottenuto dalla proiezione di una figura piana lungo una direzione dello spazio, mediante la quale viene descritta una superficie cilindrica. Un alveo cilindrico, o prismatico, è quindi un alveo ad asse rettilineo, le cui sezioni trasversali (intese come i profili delle pareti a canale vuoto) non variano lungo l'asse.

ascriversi i canali artificiali. Inoltre, tali caratteristiche sono comunque, in certa misura, rappresentative della generalità delle correnti permanenti a pelo libero.

Preventivamente alla deduzione della equazione del profilo del pelo libero, osserviamo che, in un alveo prismatico sede di una corrente in moto permanente, la dipendenza funzionale del carico specifico  $E$  dall'ascissa curvilinea  $s$  è del tipo  $E=E(Y(s))$ , in luogo della, più generale, forma  $E=E(Y(s), s)$ , rappresentativa di un moto stazionario in alveo di forma qualunque. In altri termini, a parità di portata, il carico specifico può variare lungo l'asse del canale soltanto se varia corrispondentemente la profondità della corrente.

Essendo pertanto il carico specifico  $E$  una funzione di  $s$  attraverso la  $Y$ , a norma della (9) la derivata di  $E$  può svilupparsi come:

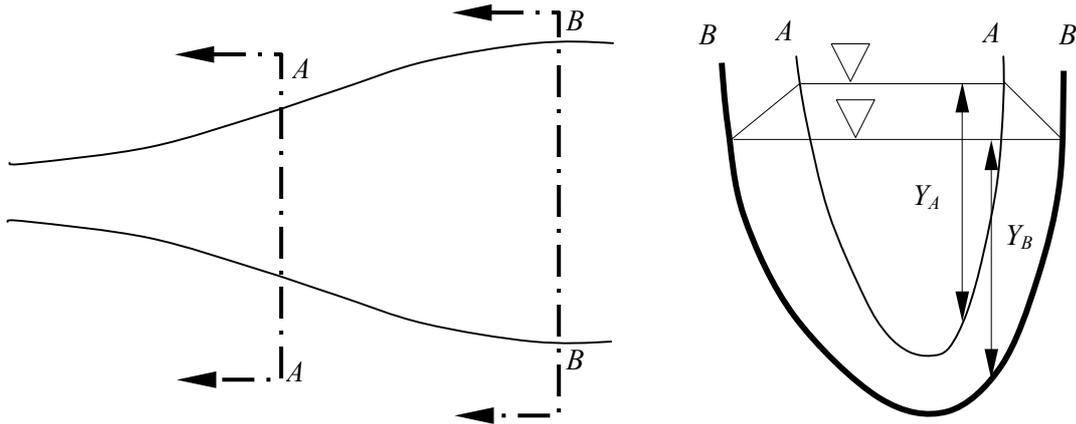


Figura 104. (a) veduta in pianta e (b) sezioni trasversali schematiche di alveo non prismatico.

$$\frac{dE}{dY} \frac{dY}{ds} = i_f - j ,$$

da cui la cercata equazione differenziale che descrive l'andamento del profilo:

$$\frac{dY}{ds} = \frac{i_f - j}{\frac{dE}{dY}} .$$

La derivata a denominatore del secondo membro è stata valutata nel §9.3 nello studio delle condizioni critiche:

$$\frac{dE}{dY} = \left. \frac{\partial E(Y)}{\partial Y} \right|_{Q=\text{cost}} = \left. \frac{\partial}{\partial Y} \left( Y + \frac{Q^2}{2g\Omega^2} \right) \right|_{Q=\text{cost}} = 1 - \frac{bQ^2}{g\Omega^3} ,$$

in cui

$$\frac{bQ^2}{g\Omega^3} = \frac{bU^2}{g\Omega} = \frac{U^2}{gY_m} = Fr^2$$

non è altro che il quadrato del numero di Froude.

L'equazione del profilo della superficie libera può quindi anche scriversi:

$$\frac{dY}{ds} = i_f \frac{1 - \frac{j}{i_f}}{1 - Fr^2}.$$

Esprimendo la cadente dei carichi totali mediante la formula di Chezy (175) ed inserendo l'espressione del numero di Froude, si ottiene la forma dell'equazione differenziale idonea alla discussione qualitativa dei profili:

$$\frac{dY}{ds} = i_f \frac{1 - \frac{Q^2}{i_f \chi^2 \mathcal{R} \Omega^2}}{1 - \frac{bQ^2}{g\Omega^3}}. \quad (204)$$

Le caratteristiche dei profili in alveo declive od acclive ( $i_f \neq 0$ ) si deducono discutendo il segno del numeratore e del denominatore della frazione a secondo membro della (204)<sup>71</sup>.

Nel caso di alvei declivi ( $i_f > 0$ ), indipendentemente dal tipo di alveo in considerazione, sia esso a pendenza debole, forte o critica, il numeratore ed il denominatore della frazione si comportano come segue:

- Il numeratore si annulla per  $Y = Y_u$  poiché in condizioni di moto uniforme è  $j = i_f$ ; tende a 1 per  $Y \rightarrow \infty$  poiché il denominatore  $\chi^2 \mathcal{R} \Omega^2$  della frazione è crescente con la profondità<sup>72</sup> e pertanto tendente ad infinito, col che  $j \rightarrow 0$ ; tende, infine, a meno infinito per  $Y \rightarrow 0$  poiché  $\chi^2 \mathcal{R} \Omega^2 \rightarrow 0$ ;
- Il denominatore si annulla per  $Y = Y_c$  poiché in condizioni critiche è  $Fr = 1$  (ovvero  $dE/dY = 0$ ); tende a 1 per  $Y \rightarrow \infty$  poiché il denominatore  $g\Omega^3$  della frazione tende ad infinito più rapidamente del numeratore  $bQ^2$ , col che  $bQ^2/g\Omega^3 \rightarrow 0$ ; tende, infine, a meno infinito per  $Y \rightarrow 0$  poiché  $g\Omega^3$  tende a zero più rapidamente di  $bQ^2$ , col che  $bQ^2/g\Omega^3 \rightarrow \infty$ .

Le caratteristiche geometriche dei profili risultanti vanno invece analizzate separatamente per alvei a pendenza debole, forte e critica.

### 9.5.3 Alvei a debole pendenza

Per definizione, in alvei a debole pendenza<sup>73</sup> si ha  $Y_u > Y_c$ . Per le considerazioni esposte nel paragrafo precedente, gli andamenti del numeratore  $N$  e del denominatore  $D$  della frazione contenuta nell'espressione (204) della derivata  $dY/ds$  possono essere rappresentati come in Figura 105.

Il segno di un rapporto è, ovviamente, positivo se i segni di numeratore e denominatore è concordi; è invece negativo se i segni risultano discordi. Si determinano pertanto tre intervalli di profondità definiti dalle profondità critica e di moto uniforme, contraddistinti da diverse proprietà dei profili, tracciati in Figura 106, di seguito riassunte.

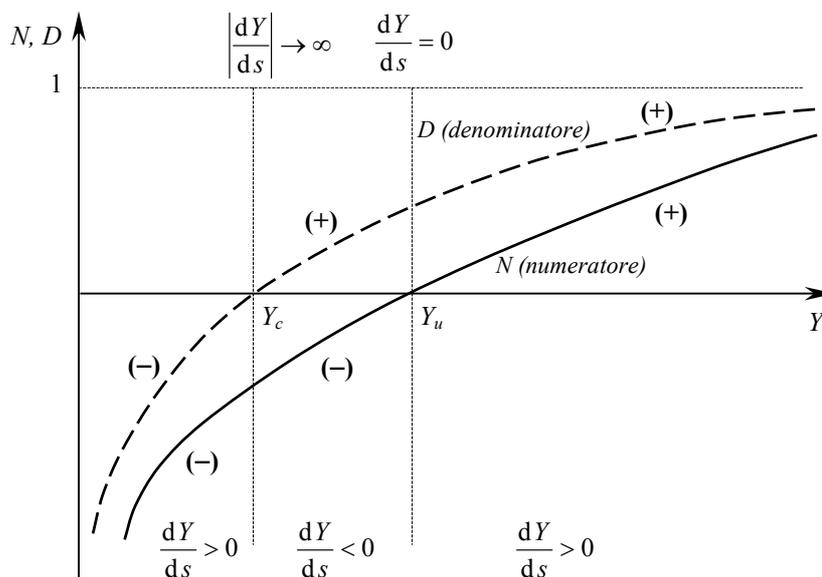
<sup>71</sup> A tale scopo si ricordi che una derivata ha il significato di velocità di variazione della variabile dipendente ( $Y$  in questo caso) al variare della variabile indipendente ( $s$ ). Conseguentemente, un valore positivo della derivata  $dY/ds$  rappresenta un aumento della profondità nel senso del moto, un valore negativo di  $dY/ds$  una diminuzione della profondità;  $dY/ds \rightarrow +\infty$  rappresenta un punto del profilo a tangente verticale con concavità rivolta verso l'alto,  $dY/ds \rightarrow -\infty$  rappresenta un punto del profilo a tangente verticale con concavità rivolta verso il basso.

<sup>72</sup> A meno di non avere a che fare con una sezione chiusa, in prossimità del completo riempimento. D'altro canto, anche nel caso di sezioni aperte, evidentemente, considerare la condizione  $Y \rightarrow \infty$  ha senso unicamente nel caso in cui tali condizioni asintotiche si verificano, in pratica, per profondità della sezione liquida inferiori alla profondità massima disponibile della sezione.

<sup>73</sup> Un alveo a pendenza debole, forte o critica è sempre declive. La classificazione degli alvei utilizzata è infatti definita sulla base del confronto fra profondità critica e di moto uniforme. Poiché, come si mostrerà al §9.5.6, la profondità di moto uniforme è definibile soltanto per alvei declivi, soltanto essi possono essere classificati come a pendenza debole, forte o critica, senza necessità di ulteriori specificazioni sul segno della pendenza.

### 9.5.3.1 Caso $0 < Y < Y_c$ (Profilo D3)

Poiché  $N < 0$  e  $D < 0$  si ha anche  $dY/ds > 0$ . Essendo la derivata  $dY/ds$  positiva, la profondità risulta crescente nel senso del moto e la corrente è pertanto veloce (perché  $Y < Y_c$ ) rallentata (perché  $U = Q/\Omega$  con  $Q = \text{costante}$  ed  $\Omega$  crescente con la profondità  $Y$  nel senso del moto). Tale profilo viene identificato con il simbolo D3<sup>74</sup>. Essendo la profondità crescente verso valle, gli estremi inferiore e superiore dell'intervallo di profondità ( $Y=0$  ed  $Y=Y_c$  rispettivamente) corrispondono agli estremi di monte e di valle del profilo.



**Figura 105. Andamento schematico del numeratore  $N$  e del denominatore  $D$  della frazione a secondo membro dell'espressione (204) della derivata  $dY/ds$  per alveo a debole pendenza**

Maggiori informazioni sulla forma dei profili possono ottenersi analizzando le condizioni che si verificano agli estremi di ciascuno dei tre intervalli di profondità. Nel limite per  $Y \rightarrow 0$ , il rapporto  $N/D$  assume la forma indeterminata  $-\infty/-\infty$ . Si osservi tuttavia, innanzitutto, come tale circostanza non risulti un particolare inconveniente, per il fatto che, come si avrà modo di illustrare nei paragrafi successivi, *un profilo di corrente veloce deve essere sempre tracciato assumendo condizioni al contorno all'estremo di monte*, imponendo pertanto una profondità che, in casi reali, non potrà mai essere nulla<sup>75</sup>. Si può mostrare come, in generale, in prossimità del fondo il profilo assuma una conformazione a tangente verticale con concavità rivolta verso il basso<sup>76</sup>.

Per  $Y \rightarrow Y_c$  da sinistra (ossia, da valori inferiori alla profondità critica), il denominatore  $D$  tende a zero, il numeratore  $N$  tende ad un valore negativo, con il rapporto fra i due che si mantiene

<sup>74</sup> La lettera “D” sta per “debole pendenza” ed è quindi riferito, ovviamente, alle denominazioni “debole pendenza” e “forte pendenza” in luogo di “fluviale” e “torrentizio”. La precisazione è opportuna in quanto, in alcuni testi (ad esempio nel Marchi-Rubatta), viene fatto riferimento a quest’ultima terminologia, con la lettera “F” utilizzata per alvei fluviali (cioè a debole pendenza), che, secondo la scelta adottata in queste dispense, è, viceversa, riferita ad alvei a forte pendenza (cioè torrentizi).

<sup>75</sup> Più in generale, è opportuno chiarire che in Figura 106, come nella analoga Figura 108 per alvei a forte pendenza, sono riportati gli interi sviluppi dei profili determinabili dalla discussione dell’equazione (204). Si osservi però che, nei casi reali, un profilo potrà estendersi, in generale, anche soltanto per parte dell’intero sviluppo. Anche nel caso ideale di un alveo di sviluppo infinito, è comunque sempre questo il caso dei profili di corrente veloce aventi valore minimo di profondità pari a zero (il D3 e l’F3 in alveo a forte pendenza) e dei profili di corrente lenta definiti nell’intervallo di profondità illimitato superiormente (il D1 e l’F1).

<sup>76</sup> Una semplice determinazione del comportamento del profilo D3 per  $Y \rightarrow 0$  mediante il calcolo del limite con la regola di De l’Hospital è presentato nel Citrini-Nosedà per il caso di sezione rettangolare molto larga.

sempre positivo e tende pertanto a  $+\infty$ . Il profilo assume pertanto una conformazione a tangente verticale, con concavità rivolta verso l'alto, come mostrato in Figura 106.

Un profilo D3 si può formare a valle di una paratoia o in conseguenza di fenomeni più complessi, quali il passaggio su un rialzo del fondo o in una strizione della sezione, per effetto dei quali la corrente sia forzata ad assumere condizioni supercritiche (di corrente veloce).

Si osservi che, in prossimità di condizioni di tangente verticale del profilo (ove la corrente non può dirsi gradualmente variata) o di profondità nulla (ove la scabrezza è di dimensioni comparabili con la profondità della corrente), le ipotesi poste alla base della teoria delle correnti a pelo libero cadono in difetto. Per evidenziare questa circostanza, il profilo del pelo libero è tratteggiato. In generale, nella realtà, il passaggio per la profondità critica non avviene con un andamento ben definito, ma con una serie di ondulazioni attorno a tale valore.

### 9.5.3.2 Caso $Y_c < Y < Y_u$ (Profilo D2)

Poiché  $N < 0$  e  $D > 0$  si ha  $dY/ds < 0$ . La profondità risulta pertanto decrescente nel senso del moto e la corrente è quindi lenta (perché  $Y > Y_c$ ) accelerata (perché  $\Omega$  decresce nel senso del moto). Tale profilo viene identificato con il simbolo D2. Essendo la profondità decrescente verso valle, gli estremi inferiore e superiore dell'intervallo di profondità ( $Y = Y_c$  ed  $Y = Y_u$  rispettivamente) corrispondono, nell'ordine, agli estremi di valle e di monte del profilo. Un profilo D2 può prodursi a monte di una sezione a valle della quale la pendenza del fondo subisca un incremento, o l'alveo diminuisca la sua scabrezza (effetto di *richiamo*).

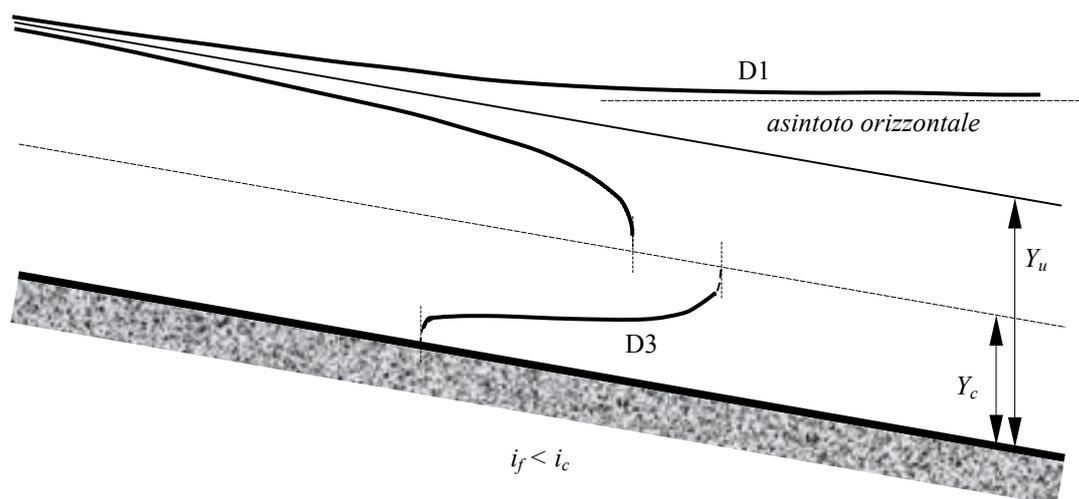


Figura 106. Profili di moto permanente in alvei a debole pendenza.

Nel limite per  $Y \rightarrow Y_c$  da destra (ossia, da valori superiori alla profondità critica), il denominatore  $D$  tende a zero da valori positivi, il numeratore  $N$  tende ad un valore negativo, con il rapporto fra i due che si mantiene sempre negativo e tende pertanto a  $-\infty$ . Il profilo assume pertanto una conformazione a tangente verticale, con concavità rivolta verso il basso, come mostrato in Figura 106. Per  $Y \rightarrow Y_u$  il numeratore  $N$  tende a zero, così come il rapporto  $N/D$  e la derivata  $dY/ds$ . Ciò significa che la profondità tende a diventare costante e pari alla profondità di moto uniforme asintoticamente verso monte da valori inferiori (vedi Figura 106).

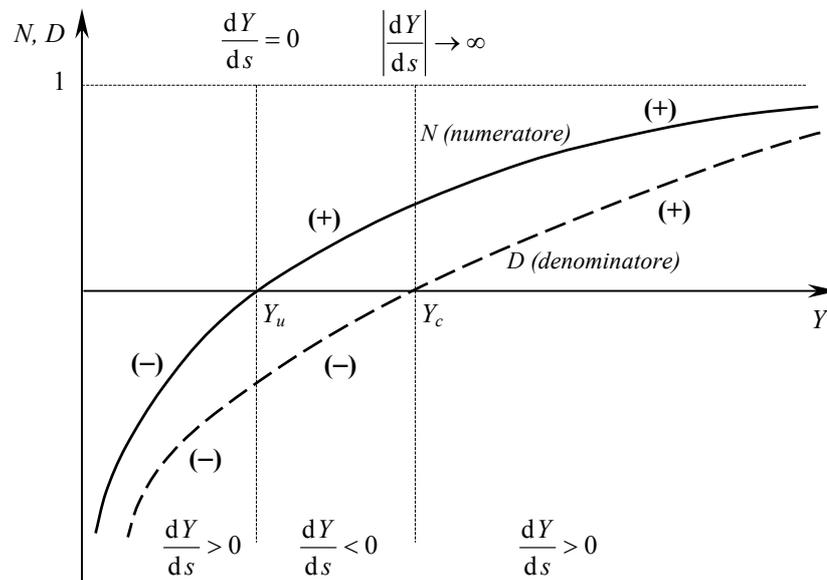
### 9.5.3.3 Caso $Y > Y_u$ (Profilo D1)

Poiché  $N > 0$  e  $D > 0$  si ha  $dY/ds > 0$ . La profondità risulta crescente nel senso del moto e la corrente è pertanto lenta (perché  $Y > Y_c$ ) rallentata (perché  $\Omega$  cresce nel senso del moto). Tale profilo viene identificato con il simbolo D1. Essendo la profondità crescente verso valle, gli estremi inferiore e superiore dell'intervallo di profondità ( $Y = Y_u$  ed  $Y = \infty$  rispettivamente) corrispondono agli estremi di monte e di valle del profilo. Esso può prodursi a monte di un ostacolo al libero deflusso della corrente quale una paratoia o una soglia di fondo (effetto di *rigurgito*).

Per  $Y \rightarrow Y_u$ , il numeratore  $N$ , il rapporto  $N/D$  e la derivata  $dY/ds$  tendono a zero. La profondità tende perciò a diventare costante e pari alla profondità di moto uniforme asintoticamente verso monte da valori superiori (vedi Figura 106). Per  $Y \rightarrow \infty$ , numeratore e denominatore tendono a 1, per cui  $dY/ds \rightarrow i_f$ . Poiché, pertanto, la quota del fondo diminuisce, al tasso  $i_f$ , tanto quanto aumenta la profondità della corrente, la quota del pelo libero deve mantenersi costante: il profilo ha pertanto un asintoto orizzontale cui tende superiormente (vedi Figura 106).

#### 9.5.4 Alvei a forte pendenza

Per definizione, in alvei a forte pendenza si ha  $Y_u < Y_c$ . Gli andamenti del numeratore  $N$  e del denominatore  $D$  della frazione a secondo membro dell'espressione (204) della derivata  $dY/ds$  possono essere rappresentati come in Figura 107. Analogamente al caso degli alvei a debole pendenza, si determinano tre intervalli di profondità contraddistinti dalle proprietà dei profili di seguito riassunte.



**Figura 107. Andamento schematico del numeratore  $N$  e del denominatore  $D$  della frazione a secondo membro dell'espressione (204) della derivata  $dY/ds$  per alveo a forte pendenza**

##### 9.5.4.1 Caso $0 < Y < Y_u$ (Profilo F3)

Poiché  $N < 0$  e  $D < 0$  si ha anche  $dY/ds > 0$ . La profondità risulta pertanto crescente nel senso del moto e la corrente è pertanto veloce (perché  $Y < Y_c$ ) rallentata (perché  $\Omega$  è crescente nel senso del moto a  $Q = \text{costante}$ ). Tale profilo viene identificato con il simbolo F3. Essendo la profondità crescente verso valle, gli estremi inferiore e superiore dell'intervallo di profondità ( $Y=0$  ed  $Y=Y_u$  rispettivamente) corrispondono agli estremi di monte e di valle del profilo.

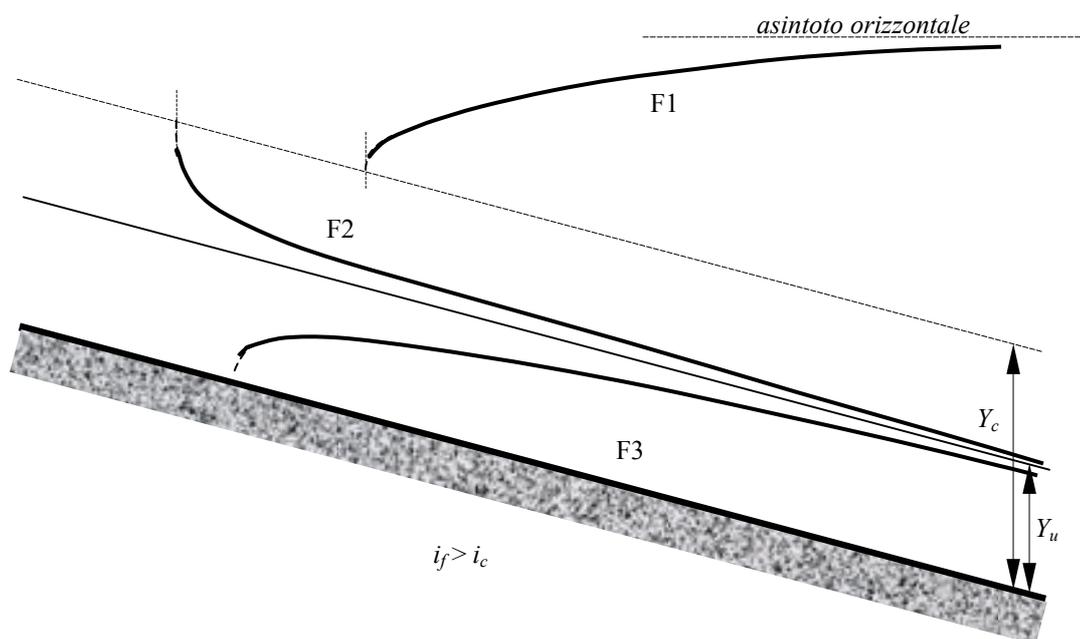
Nel limite per  $Y \rightarrow 0$ , il rapporto  $N/D$  assume la forma indeterminata  $-\infty/-\infty$ . Valgono qui le stesse considerazioni svolte per il caso del profilo D3. In particolare, anche in questo caso il profilo possiede, in prossimità del fondo, tangente verticale con concavità rivolta verso il basso. Per  $Y \rightarrow Y_u$ , il numeratore  $N$ , il rapporto  $N/D$  e la derivata  $dY/ds$  tendono a zero. La profondità tende perciò a diventare costante e pari alla profondità di moto uniforme asintoticamente verso valle, da valori inferiori (vedi Figura 108).

##### 9.5.4.2 Caso $Y_u < Y < Y_c$ (Profilo F2)

Poiché  $N > 0$  e  $D < 0$  si ha  $dY/ds < 0$ . La profondità risulta pertanto decrescente nel senso del moto e la corrente è quindi veloce (perché  $Y < Y_c$ ) accelerata (perché  $\Omega$  decresce nel senso del moto). Tale profilo viene identificato con il simbolo F2. Essendo la profondità decrescente verso valle, gli

estremi inferiore e superiore dell'intervallo di profondità ( $Y=Y_u$  ed  $Y=Y_c$  rispettivamente) corrispondono, nell'ordine, agli estremi di valle e di monte del profilo. Un profilo F2 può prodursi a valle di una sezione a monte della quale la pendenza del fondo subisca un decremento, o l'alveo aumenti la sua scabrezza.

Nel limite per  $Y \rightarrow Y_c$  da sinistra (ossia, da valori inferiori alla profondità critica), il denominatore  $D$  tende a zero da valori negativi, il numeratore  $N$  tende ad un valore positivo, con il rapporto fra i due che si mantiene sempre negativo e tende pertanto a  $-\infty$ . Il profilo assume pertanto una conformazione a tangente verticale, con concavità rivolta verso l'alto, come mostrato in Figura 108. Per  $Y \rightarrow Y_u$  il numeratore  $N$  tende a zero, così come il rapporto  $N/D$  e la derivata  $dY/ds$ . La profondità tende perciò a diventare costante e pari alla profondità di moto uniforme asintoticamente verso valle da valori superiori (vedi Figura 108).



**Figura 108. Profili di moto permanente in alvei a forte pendenza.**

#### 9.5.4.3 Caso $Y > Y_c$ (Profilo F1)

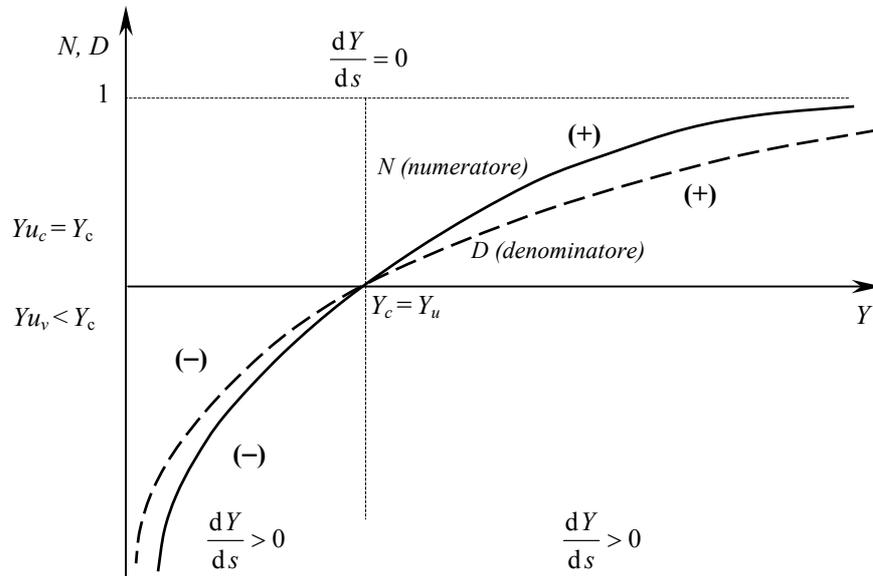
Poiché  $N > 0$  e  $D > 0$  si ha  $dY/ds > 0$ . La profondità risulta crescente nel senso del moto e la corrente è pertanto lenta (perché  $Y > Y_c$ ) rallentata (perché  $\Omega$  cresce nel senso del moto). Tale profilo viene identificato con il simbolo F1. Essendo la profondità crescente verso valle, gli estremi inferiore e superiore dell'intervallo di profondità ( $Y=Y_c$  ed  $Y=\infty$  rispettivamente) corrispondono agli estremi di monte e di valle del profilo. Esso può prodursi a monte di un ostacolo al libero deflusso della corrente quale una paratoia o una soglia di fondo (rigurgito).

Per  $Y \rightarrow Y_c$  da destra (da valori superiori alla profondità critica), il denominatore  $D$  tende a zero da valori positivi, il numeratore  $N$  tende ad un valore positivo, con il rapporto fra i due che si mantiene sempre positivo e tende pertanto a  $+\infty$ . Il profilo assume pertanto una conformazione a tangente verticale, con concavità rivolta verso il basso (vedi Figura 108). Per  $Y \rightarrow \infty$ , numeratore e denominatore tendono a 1, per cui  $dY/ds \rightarrow i_f$ . Analogamente al caso del profilo D1, la quota del pelo libero deve mantenersi costante ed il profilo ha pertanto un asintoto orizzontale cui tende inferiormente (vedi Figura 108).

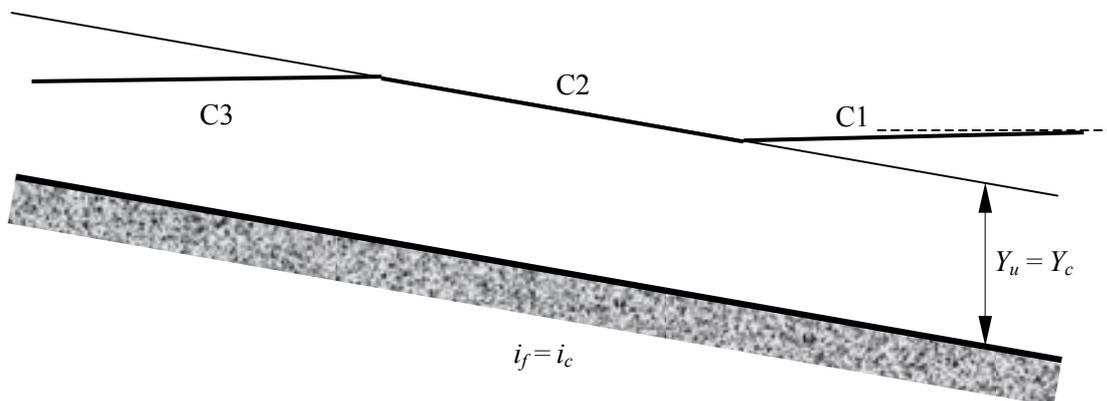
#### 9.5.5 Alvei declivi a pendenza critica

In un alveo a pendenza critica si ha  $Y_u = Y_c$ . I campi contraddistinti da diversi segni della derivata  $dY/ds$ , illustrati in Figura 109, sono ancora tre. Ragionando come nei casi precedenti, si ottiene  $dY/ds > 0$  (corrente ritardata) sia per  $Y < Y_c$  (corrente veloce, profilo C3) che per  $Y > Y_c$  (corrente

lenta, profilo C1). I profili si mantengono molto prossimo all'orizzontale, con debole pendenza acclive nel senso del moto<sup>77</sup>, almeno per profondità non troppo piccole. Per  $Y \rightarrow 0$  il profilo C3 tende ad assumere tangente verticale, con concavità rivolta verso il basso. Il profilo C1 ha un asintoto orizzontale per  $Y \rightarrow \infty$ , cui tende da valori inferiori. Come per altri profili teoricamente passanti per il fondo dell'alveo, anche il profilo C3, di corrente veloce, si traccia a partire da una condizione di profondità non nulla fissata da monte.



**Figura 109.** Andamento schematico del numeratore  $N$  e del denominatore  $D$  della frazione a secondo membro dell'espressione (204) della derivata  $dY/ds$  per alveo a pendenza critica



**Figura 110.** Profili di moto permanente in alveo a pendenza critica.

Per  $Y = Y_c = Y_u$ , la (204) assume la forma indeterminata  $dY/ds = 0/0$ . Con un ragionamento al limite, in cui le linee della profondità di moto uniforme e della profondità critica tendono a coincidere, si

<sup>77</sup> Per un alveo rettangolare molto largo ( $Y/b \ll 1$ ), assumendo l'espressione del coefficiente di Chezy in funzione della scabrezza di Strickler si può mostrare che, in prossimità della profondità critica la pendenza dei profili  $C_1$  od  $C_3$  rispetto all'orizzontale è pari a  $i_f/9$ .

può argomentare che il profilo corrispondente (denominato C2), dovendosi mantenere sempre compreso fra le due linee, assuma, al limite, la conformazione a profondità costante  $Y = Y_c = Y_u^{78}$ .

I tre profili sono schematizzati in Figura 110.

Peraltro, tale caso è, in pratica, meno significativo dei precedenti sia perché relativo ad un unico e ben preciso valore di pendenza, associato ad un ben preciso valore di portata, quindi in pratica abbastanza raro da osservare; sia perché, costituendo un caso limite sia di alveo a debole pendenza che di alveo a forte pendenza, non risulta fondamentalmente differente dai due.

### 9.5.6 Alvei a pendenza nulla ed alvei acclivi

Un caso limite di alvei a debole pendenza è rappresentato dagli alvei a pendenza nulla.

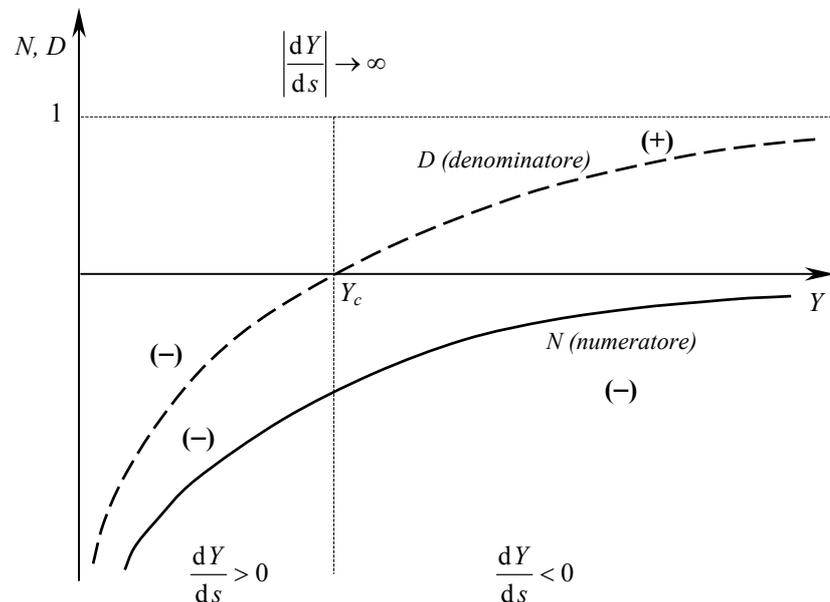
Per tale tipo di alvei, la forma, non singolare, dell'equazione del profilo da considerare è la seguente:

$$\frac{dY}{ds} = \frac{\frac{Q^2}{\chi^2 \mathfrak{R} \Omega^2}}{1 - \frac{bQ^2}{g\Omega^3}} \quad (205)$$

Gli alvei a pendenza nulla costituiscono un caso limite in quanto, per  $i_f \rightarrow 0$ , la profondità di moto uniforme, deducibile sulla base dell'equazione (195):

$$Q = \Omega \chi \sqrt{\mathfrak{R} i_f}$$

o della corrispondente scala delle portate, tende all'infinito. Non è pertanto definibile un profilo analogo al profilo D1, avente profondità superiori alla profondità di moto uniforme. La rappresentazione grafica dell'andamento del numeratore  $N$  e del denominatore  $D$  della frazione a secondo membro della (205) è riportata in Figura 111.



**Figura 111. Andamento schematico del numeratore  $N$  e del denominatore  $D$  della frazione a secondo membro dell'espressione (205) della derivata  $dY/ds$  per alveo a pendenza nulla o acclive**

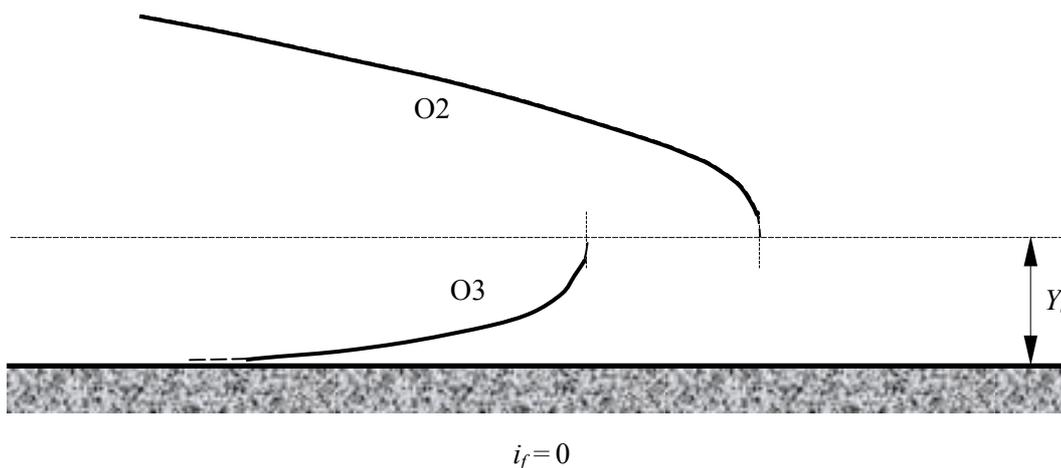
<sup>78</sup> Peraltro, nella realtà, come in altre situazioni di transizione per lo stato critico, il profilo C2 ha un andamento ondulato attorno a tale profondità.

Mentre il denominatore ha le medesime caratteristiche qualitative riscontrate nei casi precedenti, il numeratore si mantiene sempre negativo per effetto dell'essere la pendenza del fondo nulla. Si individuano pertanto due profili, per  $0 \leq Y \leq Y_c$  (profilo O3) e per  $Y_c \leq Y$  (profilo O2), aventi caratteristiche del tutto analoghe, rispettivamente, ai profili D3 e D2, sia quanto a segno della derivata  $dY/ds$ , sia quanto a comportamento ai limiti degli intervalli di profondità sui quali essi sono definiti.

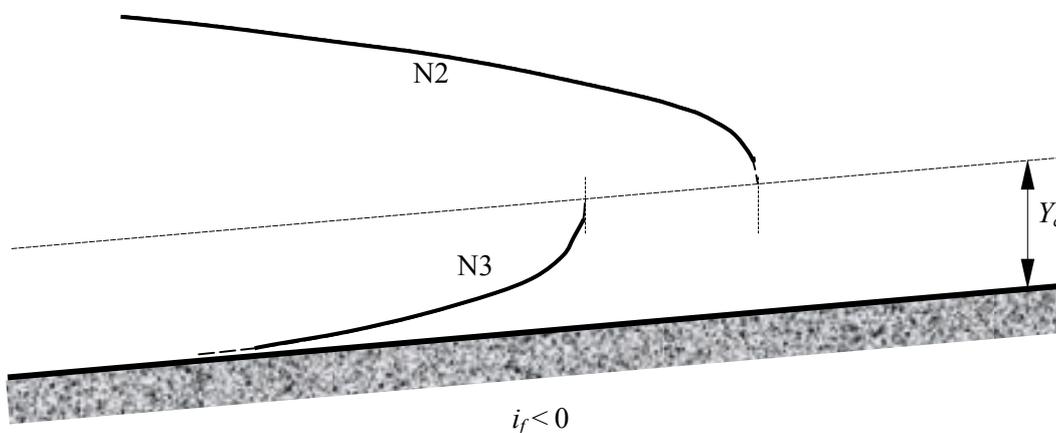
I due profili in alveo a pendenza nulla sono schematizzati in Figura 112.

Sono simili in forma ai profili in alveo a pendenza nulla i profili in alveo acclive (detti anche in contropendenza). In tal caso, essendo la pendenza del fondo, definita dalla (193), negativa, la (195) non possiede soluzione reale per la profondità di moto uniforme. Anche in questo caso, tuttavia, non sussistono particolari difficoltà nella individuazione dei profili di moto permanente, la quale va eseguita, nuovamente, sulla base della equazione (203).

Non essendo definita una profondità di moto uniforme, viene a mancare, come nel caso di alvei a pendenza nulla, il profilo avente profondità superiori a quella di moto uniforme. Il denominatore possiede sempre le stesse caratteristiche che per gli altri tipi di alvei, mentre il numeratore si mantiene sempre di segno negativo, come nel caso di alvei a pendenza nulla. La rappresentazione schematica di Figura 111 è pertanto rappresentativa anche degli alvei acclivi; i due profili da essa desumibili, riportati in Figura 113, possiedono pertanto le medesime caratteristiche dei profili in alveo a pendenza nulla. Utilizzeremo le denominazioni N3 per il profilo avente  $0 \leq Y \leq Y_c$  ed N2 per il profilo avente  $Y_c \leq Y$ .



**Figura 112. Profili di moto permanente in alveo a pendenza nulla.**



**Figura 113. Profili di moto permanente in alveo acclive.**

## 9.6 Tracciamento dei profili di moto permanente

### 9.6.1 Generalità

Nel presente paragrafo verrà fatto riferimento specifico ai risultati ottenuti per i profili di moto permanente in alvei prismatici. Tuttavia, nella sostanza, i procedimenti indicati non sono dissimili da quelli utilizzabili nel caso di alvei non prismatici. Infatti, mentre il calcolo dei profili fa sempre eseguito, in pratica, mediante metodi di discretizzazione numerica, le modalità di specificazione delle condizioni al contorno o l'analisi di casi particolari (soglie di fondo, presenza di manufatti, etc.) va condotta con le stesse modalità<sup>79</sup>.

Una caratteristica del problema del tracciamento dei profili di moto permanente in correnti a pelo libero è costituita dalla possibilità di molteplici delle soluzioni, *qualitativamente* differenti fra loro (ossia, in termini degli stessi *tipi* dei profili ammissibili), a seconda dei valori numerici delle condizioni al contorno o specificabili in particolari sezioni del canale (generalmente identificate come *sezioni di controllo*). Per questo motivo, la soluzione dei problemi relativi al tracciamento dei profili richiede, in generale, una certa dose di ragionamento caso per caso, non sempre traducibile in procedimenti standardizzati. Nonostante ciò, alcune linee guida generali alla soluzione di tali problemi possono essere delineate, come si tenterà di fare nel prosieguo.

Preventivamente, osserviamo una caratteristica comune a tutti i profili esaminati nei paragrafi precedenti: *tutti i profili tendono a ricostituire le condizioni di moto uniforme nel verso corrispondente al tipo di corrente*, sulla base delle modalità di propagazione delle perturbazioni: verso monte in correnti lente (profili D1, D2 direttamente, con tendenza asintotica; profilo F1 limitato inferiormente dalla profondità critica, per limitare gli esempi agli alvei a debole e forte pendenza); verso valle in correnti veloci (profili F2, F3 direttamente, con tendenza asintotica; profilo D3 limitato superiormente dalla profondità critica).

### 9.6.2 Cause perturbatrici e condizioni al contorno

Le condizioni di moto uniforme sono, in effetti, delle condizioni stabili che la corrente tenderebbe a realizzare spontaneamente in assenza di cause perturbative. Queste ultime possono essere molteplici: cambiamenti di pendenza, di scabrezza, di forma della sezione; presenza di manufatti di vario tipo: p.es., una paratoia, uno stramazzo<sup>80</sup>, una soglia di fondo, un gradino od una variazione di sezione. È facile mostrare, mediante una applicazione dell'equazione globale del moto su un tronco di corrente di lunghezza  $L$  e volume  $V = \Omega L$ <sup>81</sup>, che nel moto uniforme si fanno equilibrio la componente della forza peso lungo l'asse della corrente,  $G_s = \gamma V i_f$  (costituente la forza motrice principale) e le resistenze al moto esercitate dalle pareti dell'alveo  $R = \gamma V j$  (associate alle perdite di carico distribuite). Ogni deviazione da questa condizione di equilibrio determina l'insorgenza di forze che tendono a ripristinarlo (a norma della (204) si ha, infatti,  $dY/ds \neq 0$  ogniqualevolta  $i_f \neq j$ ).

In generale, una soluzione sarà raggiunta se, in ogni tratto del canale, il profilo identificato:

1. è uno dei profili possibili per il tipo di alveo in questione (D1, D2 o D3 per alveo a debole pendenza; F1, F2 o F3 per alveo a forte pendenza, etc.)<sup>82</sup>;
2. assume le proprie condizioni al contorno correttamente (da monte se corrente veloce; da valle se corrente lenta)<sup>83</sup>;

<sup>79</sup> La corretta specificazione delle condizioni al contorno è richiesta anche con l'uso di software di pubblico dominio quali, ad esempio, HEC-RAS.

<sup>80</sup> Tali manufatti verranno studiati nel Cap. 10.

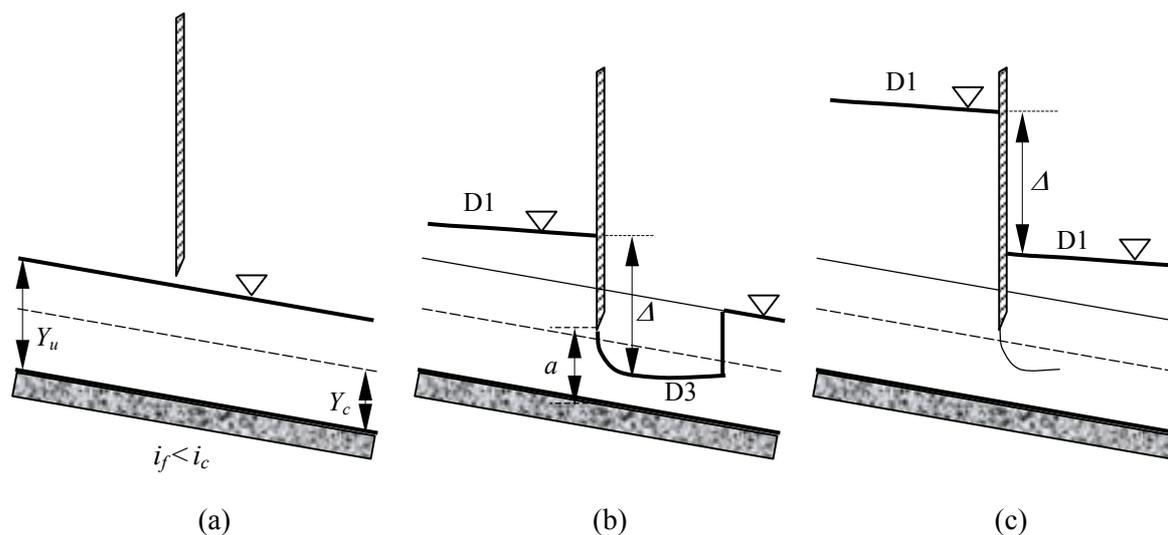
<sup>81</sup> Vedi Dispense di Idraulica di C.A. Fassò.

<sup>82</sup> La precisazione potrà sembrare banale; tuttavia è frequente, nello studente, la tentazione di tracciare profili inesistenti, in quanto non coincidenti con alcuno dei soli profili che si è dimostrato potersi verificare nei paragrafi precedenti.

<sup>83</sup> Lo studente tenga bene a mente che in tutti i tipi di alveo (a pendenza debole, forte, critica, nulla o acclivi), come si è mostrato, possono verificarsi sia correnti lente che correnti veloci. Non si commetta quindi l'errore, anch'esso abbastanza frequente, di associare sempre e comunque una corrente lenta ad un alveo a debole pendenza ed una veloce ad un alveo a forte pendenza.

3. si basa, se del caso, su una specificazione corretta delle condizioni ad una sezione di controllo di estremità in termini di: a) valori delle profondità a monte ed a valle della sezione di controllo; b) attribuzione del tipo di corrente (lenta o veloce).

A proposito della condizione 3b, va rilevato come essa sia complementare alla 2., in quanto entrambe legate alle modalità di propagazione delle perturbazioni. Per questo motivo, *una causa perturbatrice può esercitare la propria influenza: verso monte soltanto se la corrente su cui agisce è lenta (o diventa tale per causa sua); verso valle soltanto se la corrente su cui agisce è veloce (o diventa tale per causa sua).*



**Figura 114. Schema illustrativo delle modalità con le quali una causa perturbatrice influenza una corrente a pelo libero.**

Il concetto può essere meglio illustrato con riferimento all'esempio riportato in Figura 114, nella quale una portata assegnata, uguale nei tre casi mostrati, fluisce in un alveo a debole pendenza di sviluppo lineare molto grande (*alveo indefinito*)<sup>84</sup>, sul quale è posta una paratoia piana, la cui apertura può essere regolata al fine di variare le modalità di deflusso.

Nel caso (a) la sezione libera al di sotto della paratoia (detta *luce*) ha altezza maggiore della profondità di moto uniforme. La corrente non viene pertanto influenzata dalla presenza della paratoia, ed in tutto il canale il deflusso avviene perciò in condizioni di moto uniforme.

Nel caso (b) la luce al di sotto della paratoia ha altezza inferiore alla profondità di moto uniforme, per cui la corrente subisce rilevanti modifiche.

Analogamente a quanto accade all'imbocco di una condotta, ad una breve distanza a valle dalla paratoia si forma una sezione contratta, nella quale si ripristinano le condizioni di corrente gradualmente variata non sussistenti nel breve tratto fra la paratoia e la sezione contratta, per effetto della rilevante curvatura delle traiettorie. In un alveo rettangolare di larghezza pari alla larghezza della paratoia, la profondità della sezione contratta si ottiene come prodotto dell'altezza  $a$  della luce per un coefficiente di contrazione  $C_c$ :  $Y_v = a C_c$ . Essendo la formazione della sezione contratta dovuta ad una causa perturbatrice (la paratoia) situata a monte, *la corrente nella sezione contratta deve essere necessariamente veloce*. La profondità  $Y_v$  costituisce pertanto una condizione al contorno valida per il tracciamento di un profilo D3 (l'unico di corrente veloce in alveo a debole pendenza) a valle della sezione contratta. Il profilo avrà uno sviluppo limitato anche verso valle; per motivi che verranno spiegati nel §9.7 e che qui non interessa discutere, esso si riporterà bruscamente alla profondità di moto uniforme, che verrà mantenuta indefinitamente verso valle.

A monte della paratoia, l'ostacolo al moto offerto al manufatto determina un innalzamento del pelo libero. Poiché il tratto di corrente a monte della paratoia viene influenzato da una causa

<sup>84</sup> Chiariremo successivamente il concetto di alveo indefinito in maniera più puntuale.

perturbatrice (la paratoia) posta al suo estremo di valle, *la corrente a monte della paratoia deve necessariamente essere lenta*. Poiché si tratta di una corrente lenta in alveo a debole pendenza, avente in un punto (immediatamente a monte della paratoia) profondità  $Y_m$  maggiore della profondità di moto uniforme, il profilo non potrà che essere di tipo D1 (l'unico profilo di corrente lenta in alveo a debole pendenza con  $Y > Y_u$ ). Il valore di tale profondità  $Y_m$  si determina sulla base della relazione biunivoca che esprime la portata in funzione del differenziale  $\Delta$  delle quote piezometriche (quote del pelo libero) fra la sezione immediatamente a monte della paratoia e la sezione contratta (quindi anche delle profondità  $Y_m$  e  $Y_v$ ):  $Q = f(\Delta)$  per fissate dimensioni della luce (vedi §10.5). Poiché la portata  $Q$  assegnata deve fluire attraverso la paratoia in condizioni stazionarie, da tale relazione si ricava il dislivello  $\Delta$ , da cui, infine  $Y_m = Y_v + \Delta = Y_v + a C_c$ .

Nel caso (c), a parità di grado di apertura della paratoia, particolari condizioni a valle – quali una seconda paratoia, uno stramazzo, un gradino del fondo, una soglia, etc – determinano la formazione di un secondo rigurgito con profilo D1. A seconda delle dimensioni del rigurgito, e sulla base di condizioni che verranno, anch'esse, illustrate successivamente<sup>85</sup>, può accadere che la vena liquida si addossi alla paratoia in questione. In questo caso, la corrente a valle della paratoia non è veloce, bensì lenta, in quanto *la paratoia non è in grado di costituire una causa perturbatrice*. Il profilo D1 a valle della paratoia verrà tracciato, come ogni profilo di corrente lenta, a partire dal suo estremo di valle, a monte della causa perturbatrice che lo avrà causato. Il tracciamento di tale profilo D1 fornirà il nuovo valore di profondità a valle della paratoia,  $Y'_v > Y_v$ .

Poiché la legge di efflusso  $Q = f(\Delta)$  rimane immutata, a parità di portata deve anche rimanere immutato il differenziale  $\Delta$ . Pertanto, a monte della paratoia si calcola un nuovo valore di profondità  $Y'_m = Y'_v + \Delta > Y_m$ .

Il fatto che a monte della paratoia si abbia un profilo di corrente lenta è abbastanza intuitivo, dal momento che ciò avviene in risposta ad un ostacolo al deflusso di una corrente uniforme che è, già essa, lenta. Si osservi però che, anche nel caso di un alveo a forte pendenza – quindi con moto uniforme in corrente veloce – il rigurgito che si produrrebbe a monte della paratoia deve essere un profilo F1 di corrente lenta. Il profilo a valle della sezione contratta sarebbe invece un profilo F3<sup>86</sup>.

### 9.6.3 Sezioni di controllo. Transizione spontanea per lo stato critico.

Nel presente paragrafo vengono discusse alcune questioni riguardanti l'imposizione di condizioni al contorno sia in sezioni interne (le sezioni di controllo precedentemente menzionate), sia ai limiti in alvei indefiniti verso monte o verso valle.

Per quanto riguarda le sezioni di controllo interne al canale, intanto chiariamo che esse definiscono automaticamente una suddivisione dell'alveo, la quale fa sì che le relative condizioni che possono essere imposte risultino condizioni al contorno per ciascuno dei due segmenti contigui così determinati. Nel caso di Figura 114, mentre nella situazione (a) si ha un unico tratto di sviluppo indefinito interessato ovunque dal moto uniforme, nel caso (b) la presenza della paratoia che incide la corrente uniforme determina la suddivisione del canale in un tratto indefinito verso monte, con condizioni da valle su una corrente lenta, ed uno indefinito verso valle, con condizioni da monte su una corrente veloce. Nel caso (c), infine, oltre al tratto a monte della paratoia ed il tratto compreso fra la paratoia e la causa perturbatrice che determina la formazione del secondo profilo D1, vi sarà un terzo tratto a valle della causa perturbatrice, indefinito verso valle e tracciato con condizioni da monte, in corrente veloce.

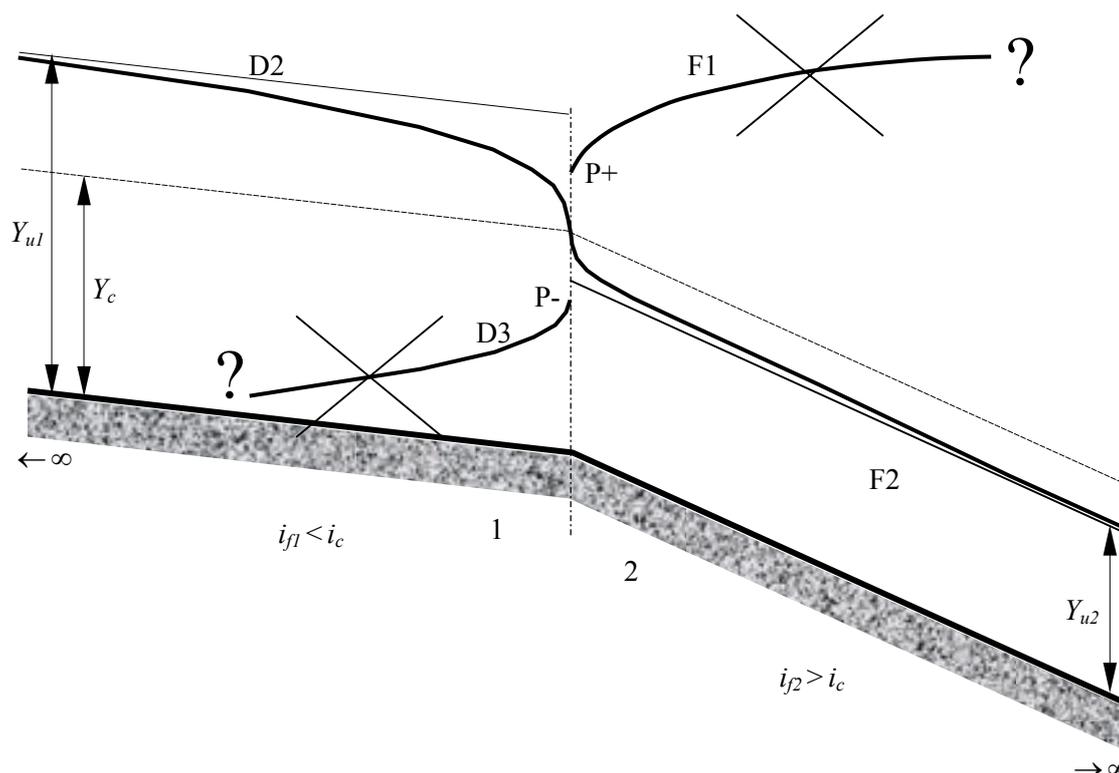
In termini generali, in una sezione di controllo converrà sempre ipotizzare dapprima delle condizioni generali plausibili, utilizzare le relazioni che descrivono il funzionamento della sezione di controllo per ricavare delle profondità a monte e/o a valle, e procedere successivamente alla

<sup>85</sup> Qui menzioniamo soltanto che la corrente rigurgitata deve avere profondità sufficiente.

<sup>86</sup> Un truccetto per evitare di confondersi nella identificazione di quale fra i due profili dello stesso tipo (p.es., F2 ed F3 in un alveo a forte pendenza) si verifichi consiste nell'immaginare la formazione dei profili stessi a partire dalle condizioni di moto uniforme, in seguito all'abbassamento della paratoia. È evidente che fintantoché la paratoia non incide sulla corrente in moto uniforme la corrente non viene perturbata. Poiché ciò accade quando la luce sotto la paratoia ha altezza inferiore alla profondità di moto uniforme, la profondità a valle non potrà che essere inferiore ad essa ed il profilo non potrà quindi essere che un F3. Stesso discorso per concludere che, a monte di una paratoia in un alveo a debole pendenza, il profilo non potrà che essere D1.

verifica della correttezza delle ipotesi fatte una volta che tutti i segmenti nei quali il canale può essere suddiviso saranno stati considerati. Sempre con riferimento alla Figura 114, nel caso in cui la paratoia indica la corrente uniforme, è di norma preferibile ipotizzare, in prima battuta, il caso (b) piuttosto che il caso (c), verificando successivamente se si possano determinare profili di corrente lenta da valle che possano causare i prodursi di una situazione del tipo (c).

Oltre al caso dei manufatti, in cui è generalmente possibile determinare una relazione fra la portata e le profondità a monte e/o a valle, un caso notevole di sezione di controllo è costituito da una sezione in cui avviene un cambio di pendenza, da debole a monte a forte a valle (non il viceversa), nel qual caso la condizione determinabile riguarda la profondità nella sezione.



**Figura 115. Schema illustrativo della transizione con continuità attraverso lo stato critico.**

La situazione è rappresentata in Figura 115, nella quale i due tratti di alveo separati dalla sezione di controllo sono indefiniti. Il procedimento seguito è di tipo esaustivo<sup>87</sup>. Nella sezione in cui avviene il cambio di pendenza sono possibili soltanto tre condizioni qualitative differenti:  $Y < Y_c$ ,  $Y = Y_c$ , o  $Y > Y_c$ . Dimostrando l'impossibilità della prima e della terza condizione, rimarrà dimostrata la seconda in quanto unica alternativa rimasta.

Si supponga la sussistenza della prima ipotesi:  $Y < Y_c$ . Sulla sezione di controllo la superficie libera sia pertanto posta su un punto come il punto P- di figura (le conclusioni non cambiano se la profondità, invece che essere inferiore a  $Y_{u2}$ , come in figura, risulta compresa fra  $Y_{u2}$  e  $Y_c$ ). Tale situazione non comporta incongruenze per quanto riguarda il tracciamento del profilo verso valle: la profondità costituirebbe una valida condizione per il tracciamento di un profilo di corrente veloce (F3 nel caso specifico di figura; F2 se si considerasse il caso  $Y_{u2} < Y < Y_c$ ). A monte, una profondità di corrente veloce implicherebbe la presenza di un profilo D3 (l'unico di corrente veloce in alveo a debole pendenza). Perché esso possa esistere effettivamente, tuttavia, esso dovrebbe

<sup>87</sup> Si ricorda che per procedimento esaustivo si intende un procedimento logico mediante il quale si dimostra un assunto non esplicitamente, ma escludendo la possibilità di verificarsi di *tutte* le alternative possibili.

essere prodotto da una causa perturbatrice *posta a monte di esso*. Ma se l'alveo, come per ipotesi, è indefinito verso monte, tale causa perturbatrice non esiste e la condizione non può pertanto verificarsi. In modo del tutto analogo, si dimostra che non può verificarsi neanche la condizione  $Y < Y_c$ , identificata dal punto P+ in Figura 115. Infatti, mentre verso monte non vi sarebbe problema alcuno, con profili D1 o D2 possibili a seconda del valore di profondità, verso valle una profondità di corrente lenta implicherebbe la presenza di un profilo F1 (l'unico di corrente lenta in alveo a forte pendenza), che però non potrebbe verificarsi per mancanza di una causa perturbatrice a valle di esso che ne determini la formazione. Sulla sezione di controllo la corrente assume, in definitiva, una profondità pari alla profondità critica. Infatti, oltre che l'unica ancora possibile, essa è anche fisicamente consistente: la profondità critica costituisce una valida condizione al contorno da valle per un profilo di corrente lenta D2 tracciato verso monte e da monte per un profilo di corrente veloce F2 tracciato verso valle.

È importante rimarcare che tale passaggio si verifica (in relazione alle altre condizioni che possono riscontrarsi a monte ed a valle, quali eventuali altri tronchi con diverse caratteristiche o manufatti di vario tipo) spontaneamente, qualora si verificano condizioni di tipo *puramente qualitativo*, nel senso che è la sola presenza del cambio di pendenza debole-forte (qualunque siano i valori numerici delle pendenze, purché dei tipi detti) a determinare, nella sezione in cui ciò avviene, la condizione di profondità critica, in quanto essa è l'unica idonea sia per la corrente lenta D2 a monte che per la corrente veloce F2 a valle quali la successione di un tratto a debole pendenza seguito da uno a forte pendenza. Ciò significa anche, ad esempio, che, cambiando il valore della portata immessa, dopo un transitorio più o meno lungo si perviene ad una nuova situazione di moto permanente in cui si ha ancora la transizione per lo stato critico nella sezione di collegamento fra i due tratti, relativo al nuovo valore di portata, qualunque esso sia<sup>88</sup>. Lo stesso avverrebbe, a parità di portata, se venissero variate le pendenze di uno dei tratti o anche di entrambi, purché si mantengano il tratto a monte a debole pendenza ed il tratto a valle a forte pendenza.

Tale caso costituisce, in pratica, l'unico caso possibile di transizione con continuità per lo stato critico: da corrente lenta a corrente veloce. Perché ciò non risulti possibile, e cosa debba succedere, nel caso di una corrente veloce a monte (perché causata da condizioni a monte di essa) che deve tramutarsi in corrente lenta (dettata da una condizione al contorno da valle) verrà illustrato nel §9.7. Qui aggiungiamo soltanto che, come affermato in generale per le sezioni di controllo, nel caso di passaggio da alveo a debole pendenza ad alveo a forte pendenza in condizioni di portata nota, sarà opportuno ipotizzare, in prima battuta, il passaggio per lo stato critico sulla sezione di controllo, salvo verificare, successivamente, che le condizioni imposte in altre sezioni consentano effettivamente il verificarsi di tale condizione.

Si osservi che, poiché una parete verticale costituisce un caso limite di alveo a forte pendenza, si ha una transizione per lo stato critico anche se l'estremo di valle del tronco a debole pendenza costituisce il ciglio di un salto di fondo di altezza sufficiente in relazione alle condizioni della corrente a valle<sup>89</sup>.

#### 9.6.4 Condizioni al contorno in alvei terminali

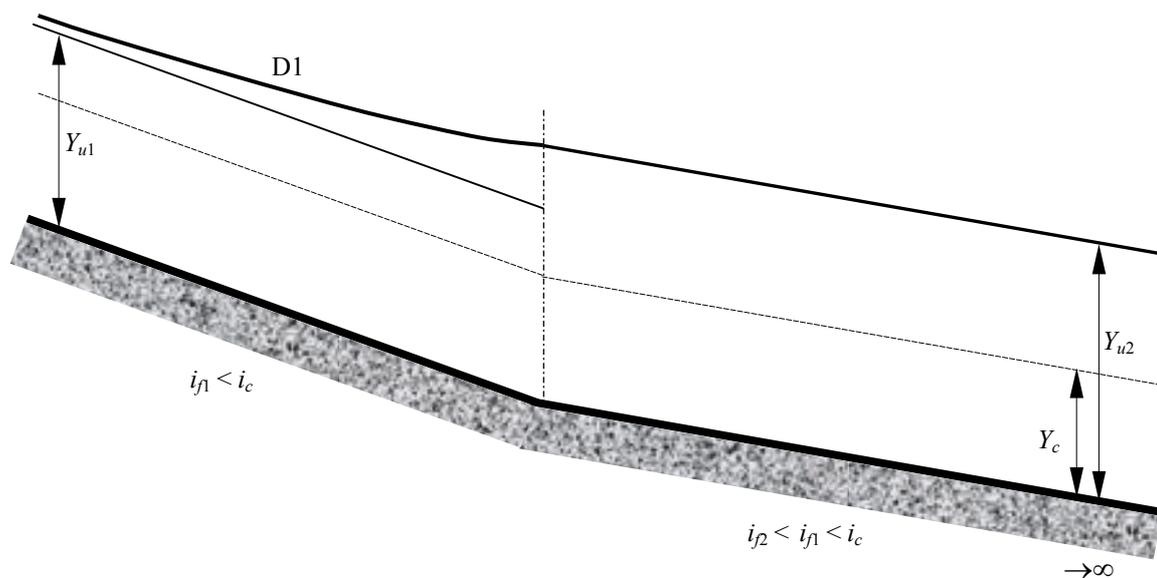
In precedenza si sono più volte menzionate le condizioni di "alveo indefinito", ritenendo il concetto (tratto terminale di una eventuale sequenza, sufficientemente sviluppato in lunghezza in asse) sufficientemente chiaro su base intuitiva per consentire l'illustrazione dei casi di interesse. Dovendosi illustrare le condizioni al contorno da imporre in tali tipi di alvei, si rende ora necessario darne una definizione più puntuale, basata proprio sulle modalità di specificazione di tali condizioni.

Si consideri il caso di un canale costituito di due tratti, entrambi a debole pendenza, indefiniti verso monte e verso valle (solo quest'ultima condizione è peraltro rilevante per quanto si intende

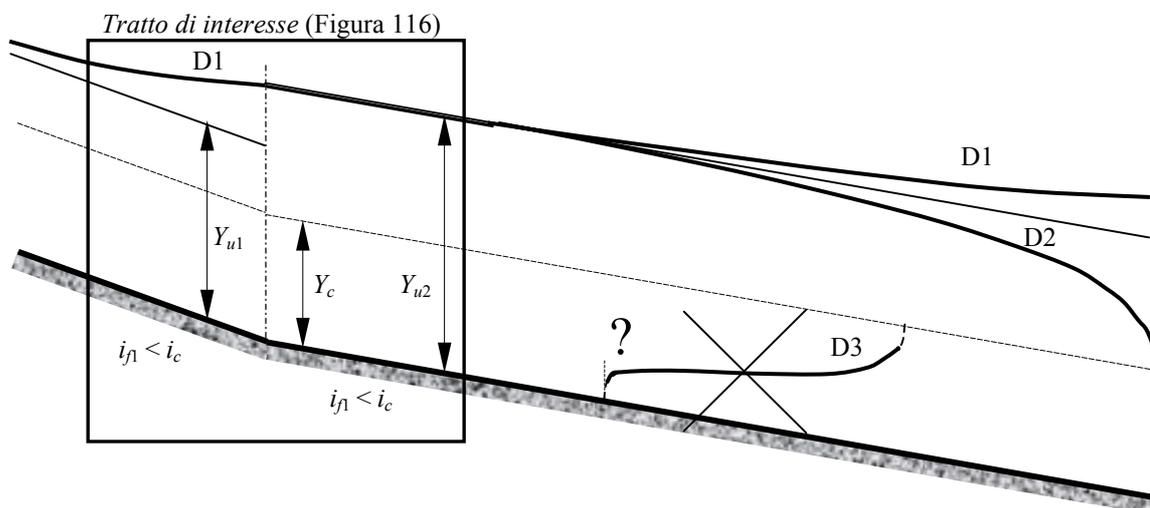
<sup>88</sup> Purché sempre tale da rendere l'alveo a monte a debole pendenza e l'alveo a valle a forte pendenza, tali caratteristiche, come si è detto in precedenza, non essendo intrinseche dell'alveo ma dipendenti dalla portata.

<sup>89</sup> Nella realtà, per effetto della inconsistenza delle condizioni di curvatura del profilo D2 in condizioni critiche con le ipotesi generali della teoria delle correnti a pelo libero, la transizione per lo stato critico non avviene esattamente sul ciglio del salto di fondo. Maggiori informazioni al riguardo possono trovarsi nel Marchi-Rubatta.

dimostrare), illustrato in Figura 116. Avendosi  $i_{f1} > i_{f2}$ , si ha anche  $Y_{u1} < Y_{u2}$ . Non essendovi nel canale sezioni di controllo (non è infatti tale, in particolare, la sezione ove avviene il cambio di pendenza), il problema del tracciamento dei profili di moto permanente richiede la specificazione di una condizione al contorno all'estremo indefinito di almeno uno dei due tratti. Tale condizione al contorno è costituita dalla profondità di moto uniforme da valle nel secondo tratto. La soluzione è fornita pertanto da un profilo di moto uniforme che si estende, nel secondo tratto, fino al suo estremo di monte. Tale profondità di corrente lenta costituisce, inoltre, una condizione al contorno idonea al tracciamento di un profilo D1, di corrente lenta, a monte del cambio di pendenza.



**Figura 116. Alveo a debole pendenza indefinito verso valle**



**Figura 117. Profili di moto permanente in alveo a debole pendenza indefinito verso valle**

Tale considerazione è generale per alvei a debole pendenza indefiniti verso valle. Infatti, seppure in termini astratti sia chiaro cosa possa intendersi per alveo di sviluppo indefinito, in pratica si sta parlando, non di enti geometrici (per l'appunto astratti: una semiretta, un semispazio, etc...), ma di un manufatto che, nella realtà, non può mai avere uno sviluppo infinito. È peraltro intuitivo che la nozione di alveo indefinito sottenderà uno sviluppo sufficientemente esteso del canale perché possa

ritenersi verificata una qualche condizione significativa. Tale condizione è costituita dalla prossimità della profondità di un profilo di corrente lenta, determinato da una qualche condizione a valle, alla profondità di moto uniforme del tratto in questione.

Illustriamo il concetto con riferimento allo schema di Figura 117, nel quale, in un riquadro, è evidenziato il tratto rappresentato in Figura 116, mentre, a valle di esso, è riportato il tratto di canale “molto lungo”, detto indefinito, con i tre profili di moto permanente che si possono verificare, in tutto o soltanto in parte di esso.

Poiché, come si è detto, un alveo di sviluppo infinito in realtà non esiste, al termine del tratto in questione si potrà avere situazioni diverse. In ogni caso, per quanto abbiamo appreso riguardo la propagazione delle perturbazioni, una causa perturbatrice posta in tale sezione terminale potrà influenzare la zona di interesse (posta ad una grande distanza a monte) *soltanto tramite una corrente lenta*; quindi, soltanto un profilo D1 o D2. Il primo profilo potrà aversi se, nella sezione di valle del secondo tratto, avremo un rigurgito determinato, ad esempio, da una paratoia (come nel caso di Figura 114), uno stramazzo, un gradino del fondo, un restringimento di sezione, etc... (non riportati nel disegno). Un profilo D2 potrà invece essere causato da un richiamo generato da un cambiamento di pendenza, da lenta a forte, in un tratto successivo al secondo (anch'esso non riportato nel disegno).

Una corrente veloce *non è idonea a far risentire la sua presenza verso monte*; al contrario, essa *necessita di condizioni da monte*. Ciò non significa, peraltro, che una corrente veloce non possa aversi in qualche parte del secondo tratto. Tuttavia, anche se ciò avvenisse, per effetto di una qualche causa perturbatrice, il profilo di corrente veloce D3 sarebbe posto *a valle* di tale causa e, per tale motivo, non potrebbe in alcun modo influenzare la zona di interesse; inoltre, a monte della causa perturbatrice, verrebbe generato un profilo di rigurgito D1, col che ricadremmo in una delle condizioni delineate in precedenza.

Chiarito che soltanto un profilo D1 o D2 possono influenzare la zona di interesse, e ricordato che entrambi i profili tendono asintoticamente verso monte alla profondità di moto uniforme, è ora possibile *qualificare un alveo (a debole pendenza) come indefinito verso valle se esso possiede lunghezza sufficiente a far sì che il profilo di rigurgito che ha sede nell'alveo possieda, nella zona prossima al suo estremo di monte, profondità praticamente coincidente con la profondità di moto uniforme*, la quale possa pertanto essere specificata come condizione al contorno da valle.

È importante rimarcare che, al contrario del caso delle sezioni di controllo, la condizione al contorno in un alveo a debole pendenza indefinito verso valle non viene specificata in una sezione determinata. Per quanto discusso finora, si può invece affermare che, indipendentemente dalla molteplicità di situazioni che possono verificarsi nella zona di monte del tratto, *da un certo punto in poi verso valle si possano assumere condizioni di moto uniforme* (è questo il caso di Figura 114b, a valle della discontinuità del profilo, le modalità di formazione della quale saranno peraltro illustrate nel §9.7).

Risulta anche evidente come la qualità di alveo indefinito sia tale, non soltanto per determinate condizioni di portata, ma anche in relazione alla causa perturbatrice che, all'estremo di valle reale del tratto “indefinito”, determina uno dei due profili di rigurgito. Ad esempio, se tale causa perturbatrice fosse costituita da una paratoia, per un fissato grado di apertura, il livello di monte aumenterebbe all'aumentare della portata, fino a che possa non essere più possibile ammettere che all'estremo di monte il profilo D1 si trovi in condizioni asintotiche. Viceversa, fissata la portata, valori crescenti della profondità a monte della paratoia (e quindi profili D1 che raggiungono condizioni asintotiche a distanze verso monte sempre crescenti) possono ottenersi anche riducendo la luce al di sotto della paratoia.

Le considerazioni svolte per un alveo a debole pendenza indefinito verso valle possono ripetersi, con modalità del tutto analoghe, per un alveo a forte pendenza indefinito verso monte. Infatti, in questo caso i due profili che, determinati da condizioni poste a monte di essi, possono influenzare la corrente all'estremo di valle del canale, e pertanto fornire condizioni al contorno in tale zona, sono i profili F2 ed F3 di corrente veloce, entrambi tendenti asintoticamente verso valle alla profondità di moto uniforme. Viceversa, un profilo F1 non è idoneo a far risentire la sua presenza verso valle in quanto di corrente lenta (e perciò stesso *neccesitante* di condizioni da valle).

Ricapitolando: *condizioni al contorno costituite dalla profondità di moto uniforme devono essere specificate in alvei a debole pendenza indefiniti verso valle ed in alvei a forte pendenza*

*indefiniti verso monte*. Nessuna particolare condizione di tipo analogo (dalla direzione nella quale il canale si estende “indefinitamente”) può essere specificata per alvei a debole pendenza indefiniti verso monte o per alvei a forte pendenza indefiniti verso valle.

## 9.7 Risalto idraulico

### 9.7.1 Descrizione fenomenologica e criterio per la localizzazione del risalto

Si è detto nel §9.6.3 che la transizione per lo stato critico può avvenire nel passaggio da un profilo di tipo D2 in alveo a debole pendenza ad un profilo di tipo F2 in alveo a forte pendenza, e che ciò avviene spontaneamente al solo ricorrere di tali condizioni puramente qualitative. A questo punto, viene spontaneo chiedersi se sia possibile la transizione per lo stato critico nel senso opposto – da corrente veloce a corrente lenta – e, in caso affermativo, quali siano le condizioni che determinano tale fenomeno.

Dall'esame dei profili in alvei a debole ed a forte pendenza, risulta che l'unica possibilità di assistere ad una transizione per lo stato critico da corrente veloce a corrente lenta è rappresentata dalla successione di un profilo D3 a monte ed F1 a valle, anche in questo caso l'altezza critica verificandosi nella sezione ove avviene il cambio di pendenza da debole a forte. Tuttavia, in tal caso il profilo D3, in quanto di corrente veloce, richiede condizioni da monte, mentre il profilo F1 richiede condizioni da valle. Pertanto, soltanto specificando esattamente i *valori numerici* di tali due condizioni al contorno necessari ad ottenere, in ciascuno dei due profili, la formazione dell'altezza critica sul cambio di pendenza, si potrà realizzare il raccordo continuo degli stessi<sup>90</sup>: si tratta, in pratica, di un'evenienza che può essere realizzata soltanto deliberatamente<sup>91</sup>. Ordinariamente, invece, il passaggio di una corrente a pelo libero dalla condizione di corrente veloce a quella di corrente lenta avviene mediante un, più o meno brusco, incremento dei livelli denominato *risalto idraulico* (un esempio del quale è la transizione da corrente veloce a corrente lenta nel caso di Figura 114b).

Al crescere dei valori del numero di Froude della corrente a monte del risalto, questo si presenta in forme che vanno da semplici ondulazioni della superficie libera (*risalto ondulato*), ad ondulazioni più accentuate con parziale frangimento sulle creste (*risalto ondulato con frangimento*), ovvero assumono l'aspetto, più eclatante, di un fronte d'onda frangente stazionario, caratterizzato da un vortice ad asse orizzontale sede di intensa turbolenza e relative notevoli dissipazioni di energia (*risalto diretto*, detto anche *salto di Bidone*, dal nome dello studioso torinese che indagò tale fenomeno sperimentalmente al principio del XIX secolo). I due tipi estremi di risalto sono schematizzati in Figura 118<sup>92</sup>.

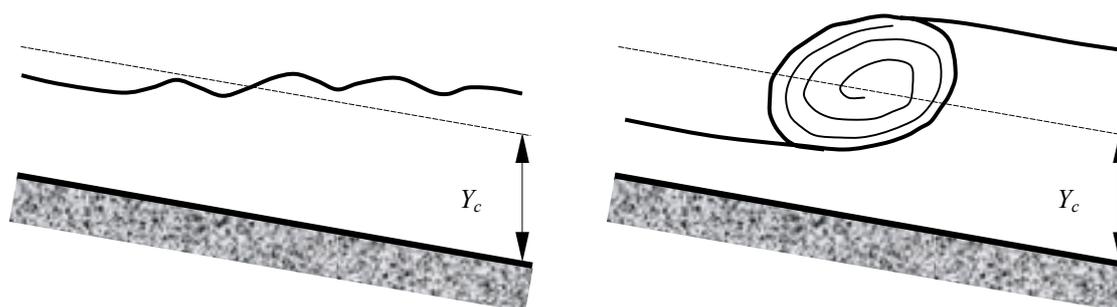


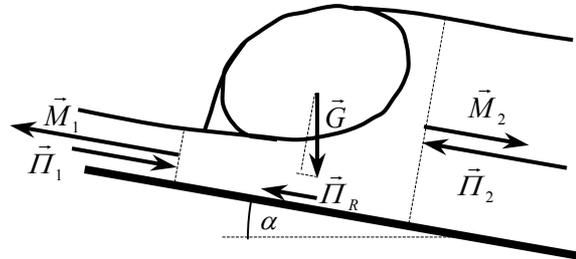
Figura 118. (a) risalto ondulato e (b) salto di Bidone.

<sup>90</sup> Peraltro, anche a voler realizzare tali condizioni deliberatamente, in corrispondenza del cambio di pendenza si osserverebbe, in luogo di un profilo ben definito a tangente verticale, una serie di ondulazioni caratteristiche dell'instabilità propria dello stato critico.

<sup>91</sup> Per i motivi esposti, un simile evento viene qualificato “*a probabilità nulla*”.

<sup>92</sup> Maggiori ragguagli sulle tipologie di risalto descritte possono trovarsi nel Marchi-Rubatta.

La condizione che, verificata in una sezione di un canale, consente di riconoscerne la presenza di un risalto, si ottiene mediante l'analisi del tratto di corrente interessato dal risalto, effettuata mediante l'equazione globale del moto, sulla base dello schema di Figura 119. Tralasciando i dettagli di tale analisi<sup>93</sup>, riportiamo qui gli elementi che consentono di determinare compiutamente un profilo di moto permanente nel quale si riconosca la necessità della presenza di un risalto.



**Figura 119. Schema di riferimento per l'analisi del risalto idraulico mediante l'equazione globale del moto**

Proiettata l'equazione globale lungo l'asse della corrente ed assunto che la componente assiale della forza peso e le resistenze al moto esercitate attraverso la parete dell'alveo si facciano approssimativamente equilibrio (perché individualmente piccole in modulo ed opposte in verso), si perviene alla seguente espressione:

$$\Pi_1 + M_1 = \Pi_2 + M_2 ,$$

ovvero:

$$p_{G1}\Omega_1 + \beta\rho \frac{Q^2}{\Omega_1} = p_{G2}\Omega_2 + \beta\rho \frac{Q^2}{\Omega_2} , \quad (206)$$

in cui il primo termine rappresenta la spinta idrostatica sulla sezione trasversale della corrente (dove  $p_{G1} = \gamma\zeta_G$  è la pressione idrostatica nel baricentro e  $\zeta_G$  è l'affondamento del baricentro della sezione rispetto al pelo libero), ed il secondo termine il modulo del flusso di quantità di moto attraverso la sezione.

La quantità:

$$S = p_G\Omega + \beta\rho \frac{Q^2}{\Omega} \quad (207)$$

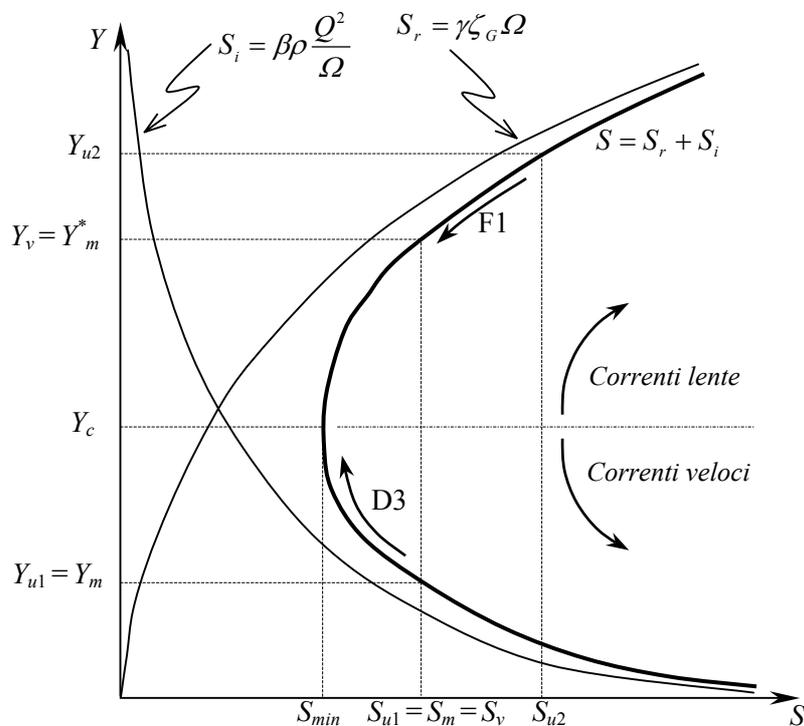
è detta *spinta totale*<sup>94</sup>. L'equazione (206) esprime che *la spinta totale assume il medesimo valore a monte ed a valle del risalto*. Pertanto, al fine di determinare il punto nel quale si localizza il risalto che collega, con discontinuità, un profilo di corrente veloce a monte ad un profilo di corrente lenta a valle, occorrerà ricercare la sezione (unica) nella quale la relazione (206) è verificata.

Al fine di illustrare più chiaramente gli aspetti applicativi di tali concetti, osserviamo innanzitutto che, in condizioni di moto stazionario o permanente ( $Q = \text{cost}$ ) in un alveo di caratteristiche geometriche fissate, la spinta totale è funzione della sola profondità della corrente:  $S = S(Y)$ . Il grafico della funzione si ricava facilmente osservando che, analogamente al caso del carico specifico, essa si compone di una parte  $S_r$ , che si annulla per  $Y=0$  e cresce indefinitamente

<sup>93</sup> Reperibili in uno dei riferimenti indicati (Citirini-Nosedà; Marchi-Rubatta; Cenedese; Dispense C.A. Fassò).

<sup>94</sup> Si tratta infatti di una forza, costituita dalla somma di una spinta derivante da forze reali (la spinta idrostatica) e di una spinta derivante da forze di inerzia o fittizie (il flusso di quantità di moto) – concetti richiamati al §1.3.5.

con la profondità (la spinta idrostatica) e di una parte  $S_r$  decrescente con la profondità, che tende a  $+\infty$  per  $Y \rightarrow 0$  e tende a zero per  $Y \rightarrow \infty$  (il flusso di quantità di moto). Uno schema del diagramma della  $S(Y)$  è riportato in Figura 120.



**Figura 120. Diagramma della spinta totale a portata costante**

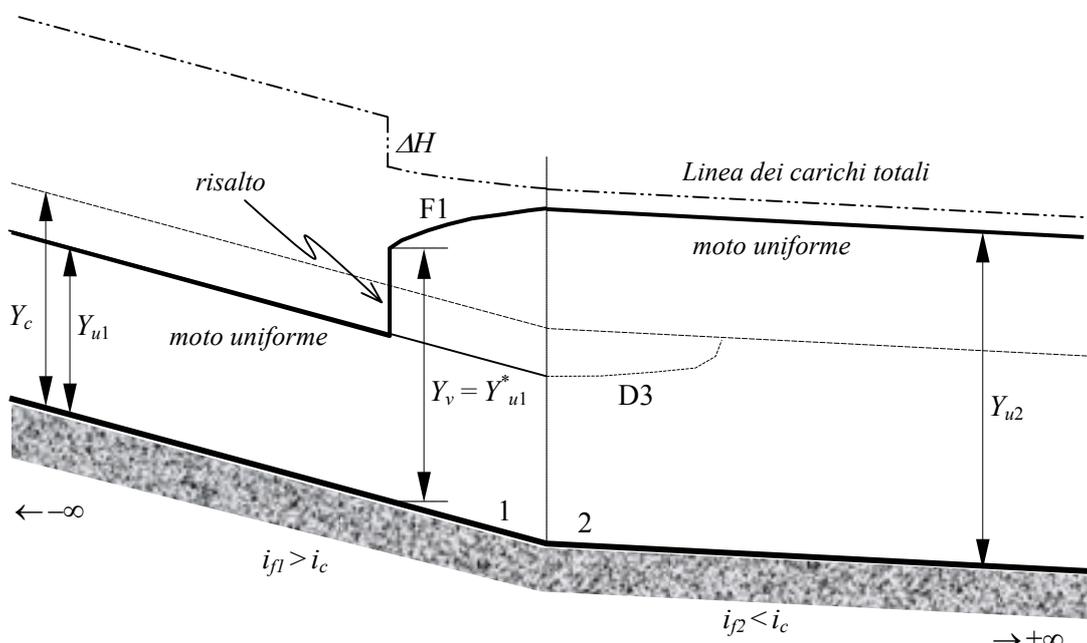
Sulla base di tali caratteristiche, la curva  $S(Y)$  deve tendere a  $+\infty$  per  $Y \rightarrow 0$  e per  $Y \rightarrow \infty$  - ossia, agli estremi dell'intero campo di definizione della funzione. Essa deve pertanto necessariamente possedere un minimo, che si può mostrare verificarsi per un valore di profondità pari alla profondità critica  $Y_c$ . Le condizioni critiche sono pertanto caratterizzate, oltre che dal carico specifico minimo a carico costante, dalla portata massima a carico specifico costante, dall'uguaglianza fra velocità media della corrente e celerità relativa delle perturbazioni, anche dalla spinta totale minima a portata costante. Conseguentemente, possiamo anche identificare, sulla curva  $S(Y)$ , un ramo delle correnti lente per  $Y > Y_c$  ed uno delle correnti veloci per  $Y < Y_c$ .

Due profondità, una di corrente veloce ed una di corrente lenta, cui corrisponde il medesimo valore della spinta totale (come nel caso delle sezioni a monte ed a valle del risalto) sono dette *profondità coniugate*. Nel prosieguo, indicheremo le profondità coniugate con un asterisco in posizione di indice. In pratica, possono darsi due casi leggermente differenti di uso del diagramma di Figura 120 ai fini della localizzazione di un risalto, che descriviamo di seguito.

### 9.7.2 Profondità a monte o a valle del risalto nota a priori

Descriviamo questo caso con riferimento allo schema di Figura 121, nella quale è illustrato il profilo di un canale nella zona in cui esso varia la propria pendenza da forte a debole. Avendosi un alveo a forte pendenza indefinito verso monte ed uno a debole pendenza indefinito verso valle, ciascuno dei due tratti ammette condizioni al contorno di moto uniforme (vedi §9.6.4). Si è chiarito, sempre al §9.6.4 come tali condizioni non siano da prescrivere in sezioni prestabilite, ma, semplicemente, sia certo che esse, per i motivi ampiamente illustrati, si verifichino da una certa sezione in poi (verso valle per l'alveo a debole pendenza; verso monte per l'alveo a forte pendenza). Poiché deve necessariamente verificarsi il passaggio da una corrente veloce a monte ad una corrente lenta a valle, si deve anche formare un risalto, che è necessario localizzare per poter

tracciare i profili di moto permanente lungo l'intero canale. Sulla base di quanto esposto in precedenza, il risalto dovrà trovarsi nella (unica) sezione nella quale la corrente veloce a monte e la corrente lenta a valle possiedono il medesimo valore di spinta totale; una delle due altezze coniugate dovrà necessariamente essere una delle due altezze di moto uniforme costituenti le condizioni al contorno dei due alvei.



**Figura 121. Risalto idraulico in prossimità di un cambio di pendenza**

Operativamente si procede nel seguente modo. Si sceglie, in linea di principio, una qualunque sezione del canale, sulla quale si valutano le spinte totali delle correnti veloce a monte e lenta a valle. In pratica, anche se la sezione può essere una qualunque, nel semplice caso in questione converrà invariabilmente porsi nella sezione ove avviene il cambio di pendenza, in quanto, in essa, le profondità delle due correnti sono entrambe pari alle corrispondenti profondità di moto uniforme, che vanno sempre e comunque calcolate, come anche la profondità critica<sup>95</sup>. Nel caso la spinta della corrente veloce a monte,  $S_{u1}$ , risulti maggiore della spinta della corrente lenta a valle,  $S_{u2}$ , il risalto si localizzerà a valle, nel tratto a debole pendenza; se risulta, invece,  $S_{u1} < S_{u2}$ , il risalto si localizzerà a monte, nell'alveo a forte pendenza. Tale regola – costituente, fra l'altro, un utile trucco mnemonico (la corrente che “spinge” di più sposta il risalto verso l'altra corrente) – ha una semplice giustificazione.

Con riferimento al caso di Figura 121, supponiamo, ad esempio, che risulti  $S_{u1} < S_{u2}$ . Se ricercassimo il risalto verso valle anziché verso monte, dovremmo tracciare un profilo D3 avente quale condizione al contorno da monte la profondità di moto uniforme nell'alveo a forte pendenza,  $Y_{u1}$ . Poiché il profilo D3 ha profondità crescenti verso valle, ci si muoverebbe, lungo la curva in Figura 120, in modo tale da vedere diminuire la spinta totale, allontanandosi dalla richiesta condizione di uguaglianza fra le spinte delle due correnti. Viceversa, ricercando il risalto a monte del cambio di pendenza lungo un profilo F1, avente quale condizione al contorno da valle la profondità di moto uniforme nell'alveo a debole pendenza, ci si muoverebbe, lungo la curva in Figura 120, in modo tale da vedere diminuire la spinta totale, fino a raggiungere il valore di profondità coniugato alla profondità di moto uniforme nell'alveo a forte pendenza,  $Y_v = Y_m^* = Y_{u1}^*$ ,

<sup>95</sup> Se si scegliesse una sezione differente, occorrerebbe tracciare un profilo di moto permanente, con la possibilità che ciò si riveli però fatica sprecata, in seguito alla determinazione della posizione qualitativa del risalto (se a monte od a valle del cambio di pendenza).

con quest'ultima che si riconosce doversi verificare a monte del risalto per effetto delle condizioni al contorno in alveo terminale indefinito.

In pratica, in un caso del genere, riconoscendosi a priori che ad un estremo del risalto la profondità è da ritenersi nota e pari ad una profondità di moto uniforme, il procedimento consiste nel determinare la profondità coniugata a quest'ultima dal grafico  $S(Y)$ , nel tracciare il profilo F1 e nell'individuare (anche contestualmente al tracciamento del profilo) la sezione del profilo F1 nella quale si verifica la medesima profondità<sup>96</sup>.

In considerazione del fatto che un risalto possiede, ordinariamente, uno sviluppo in asse limitato, e che i profili longitudinali vengono disegnati in scale alterate allo scopo di favorirne la leggibilità, il risalto viene usualmente indicato (come anche in Figura 121) come una discontinuità della superficie libera.

La linea dei carichi totali assume l'andamento qualitativo riportato in Figura 121. In particolare, in corrispondenza del risalto, si verifica una perdita di carico localizzata dovuta alla brusca espansione della corrente.

### 9.7.3 Profondità coniugate entrambe incognite

È questo il caso, ad esempio, di Figura 122, nel quale una corrente veloce è generata a valle di una paratoia posta in un alveo a debole pendenza. Nello stesso alveo, un profilo di richiamo D2 viene generato dalla presenza di un tratto a forte pendenza a valle del primo. A differenza del caso del §9.7.2, in questo caso né a monte né a valle del risalto è nota a priori la profondità della corrente. In effetti, nel caso in questione, la presenza stessa del risalto dipende dai valori numerici dei dati. Verrà pertanto illustrato sotto quale ipotesi il risalto si verifichi, ed in quale modo se ne possa eseguire la localizzazione. La condizione da utilizzare per la ricerca della (eventuale) posizione del risalto è sempre la (206): nel caso non si possa determinare una sezione nella quale si verifichi tale condizione, si dovrà concludere che il risalto non può formarsi e risolvere il problema di conseguenza.

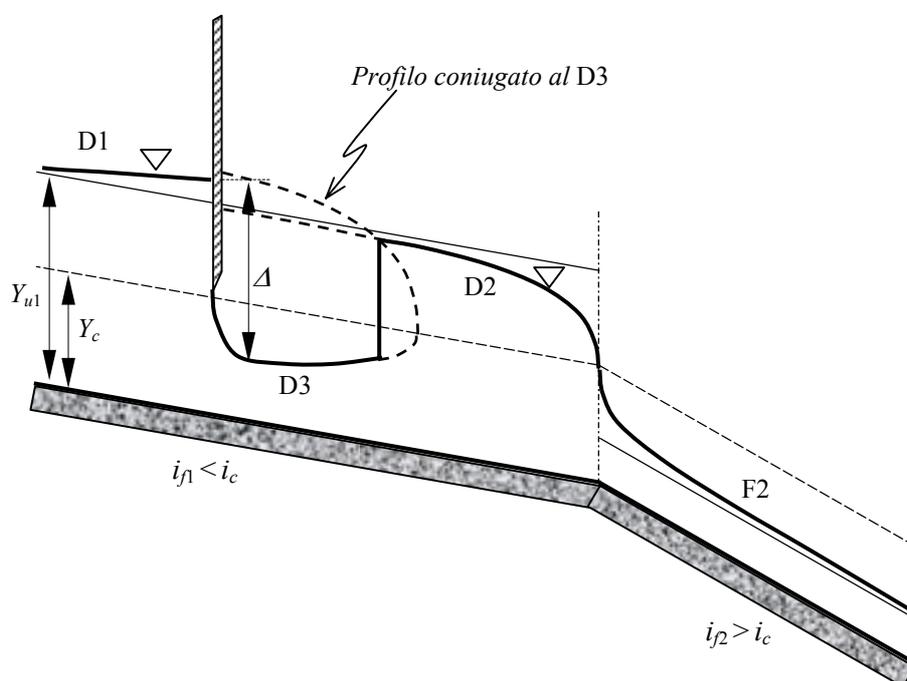
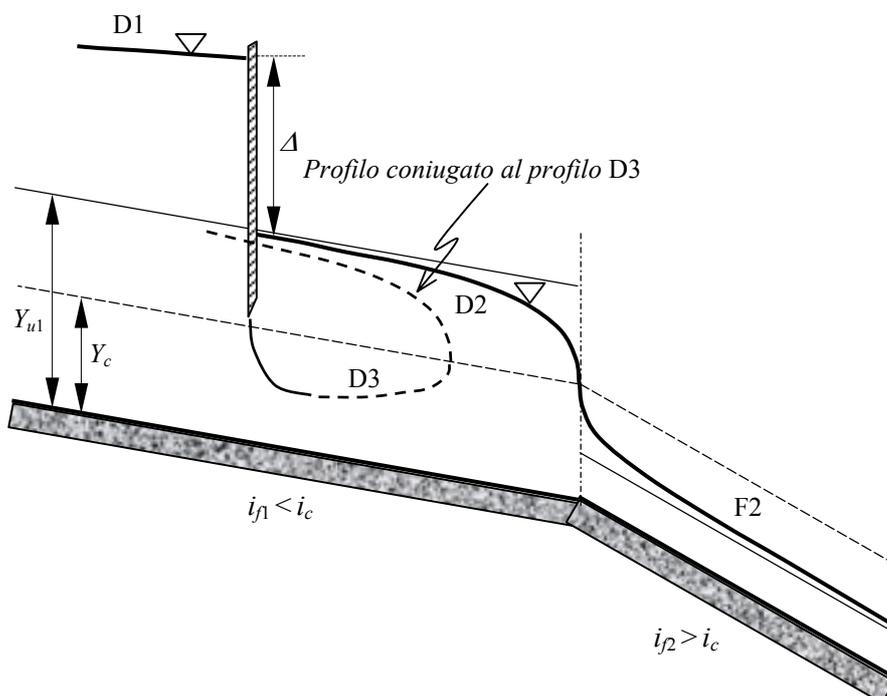


Figura 122. Localizzazione del risalto mediante profilo coniugato

<sup>96</sup> Graficamente, tale ultima operazione si realizza, ovviamente, tracciando un segmento di retta parallelo al fondo, posto ad una distanza da quest'ultimo pari alla profondità coniugata determinata in precedenza.

In termini grafici, il procedimento da seguire si illustra in termini del cosiddetto *profilo coniugato*. Il profilo coniugato ad un profilo dato è un profilo *fittizio* (ossia, una mera costruzione grafica che non è materializzata da un pelo libero), caratterizzato dall'aver in ciascuna sezione una profondità coniugata alla profondità del profilo dato nella stessa sezione. Pertanto, un profilo coniugato ad un profilo dato si può determinare per punti, rilevando, per ciascuno dei valori di profondità in un certo numero di sezioni del profilo dato<sup>97</sup>, le corrispondenti profondità coniugate sul diagramma della spinta del tipo rappresentato in Figura 120.

In Figura 122 è illustrato il caso in cui il profilo coniugato al profilo di corrente veloce D3 interseca il profilo D2 nel tratto di alveo a debole pendenza a valle della paratoia. Sulla base della definizione di profilo coniugato e del suo conseguente significato, per costruzione, in tale punto di intersezione risultano coniugate anche le profondità dei profili D3 e D2: in tale sezione si localizza pertanto il risalto.



**Figura 123. Efflusso annegato da paratoia senza formazione del risalto**

A seconda dei valori numerici dei dati del problema (portata, apertura della paratoia, pendenze, scabrezza, forma della sezione, etc...), può anche darsi il caso di Figura 123, nel quale il profilo coniugato al profilo D3 non interseca il profilo D2 nel tratto a valle della paratoia. Poiché la spinta totale cresce al crescere della profondità in corrente lenta (così come decresce al crescere della profondità in corrente veloce), il profilo D2 possiede ovunque una spinta totale superiore, sezione per sezione, alla spinta totale del profilo D3. Con ragionamento analogo a quello svolto per discutere la localizzazione qualitativa del risalto nel problema descritto nel §9.7.2, ciò corrisponderebbe allo spostamento del risalto verso monte. Poiché però l'intersezione del profilo D2 con il profilo coniugato al D3, come detto, non avviene in tutto il tratto utile a valle della paratoia, la corrente si mantiene lenta, con profilo D2, in tutto questo tratto, sommergendo la vena effluente dalla paratoia e determinando pertanto, a parità di portata, un ulteriore rigurgito a monte della paratoia, secondo quanto già discusso in un problema simile affrontato nel §9.6.2. In generale, un efflusso da paratoia non sarà rigurgitato se la spinta totale della sezione contratta della vena è maggiore della spinta totale che la corrente lenta originata da valle assume nella stessa sezione.

<sup>97</sup> Come sempre in questo tipo di procedimenti, più punti si prendono, più accurato sarà il tracciamento del profilo coniugato.

## CAPITOLO DECIMO

### 10. FORONOMIA

#### 10.1 Generalità

La Foronomia è la branca dell'Idraulica che studia le condizioni dell'efflusso dei fluidi attraverso aperture di qualsivoglia natura (praticate nelle pareti di serbatoi, determinate da organi di regolazione, etc...), dette *luci*. Più in particolare, obiettivo dello studio dei vari tipi di luci è costituito dalla determinazione della *legge di efflusso*, ossia, della relazione che lega la portata defluente dalla luce, tipicamente in condizioni stazionarie, ai parametri caratteristici del caso in studio: il livello all'interno di un serbatoio su una cui parete la luce è praticata; le caratteristiche dimensionali della luce, etc...

Tipicamente, le modalità dell'efflusso sono tali per cui le sezioni sulle quali è possibile imporre le condizioni che consentono di dedurre l'espressione della legge di efflusso sono poste a breve distanza, talché è possibile, almeno in prima approssimazione, studiare il fenomeno mediante la formulazione del Teorema di Bernoulli per un fluido ideale, equazione (147), sulla base delle considerazioni esposte nel §5.8.2. Determinazioni della portata più precise di quelle ottenibili nell'ambito dello schema di fluido ideale si ottengono mediante correzioni delle formule basate su rilievi di laboratorio, le quali tuttavia non ne modificano la struttura. Come si vedrà nel prosieguo, tali correzioni risultano, oltretutto, di modesta entità.

Naturalmente, l'uso del Teorema di Bernoulli implica anche le ulteriori ipotesi ammesse nella sua derivazione: fluido incomprimibile, isoterma ed omogeneo, che ammetteremo quindi valide per tutti i casi che verranno di seguito illustrati.

#### 10.2 Efflusso da luce di fondo in parete sottile

Una luce in parete sottile ha un bordo acuminato che, determinando un distacco netto della vena fluida, consente un deflusso regolare, al contrario di ciò che accade in una luce in parete grossa, caratterizzata da un funzionamento intermittente generalmente indesiderato.

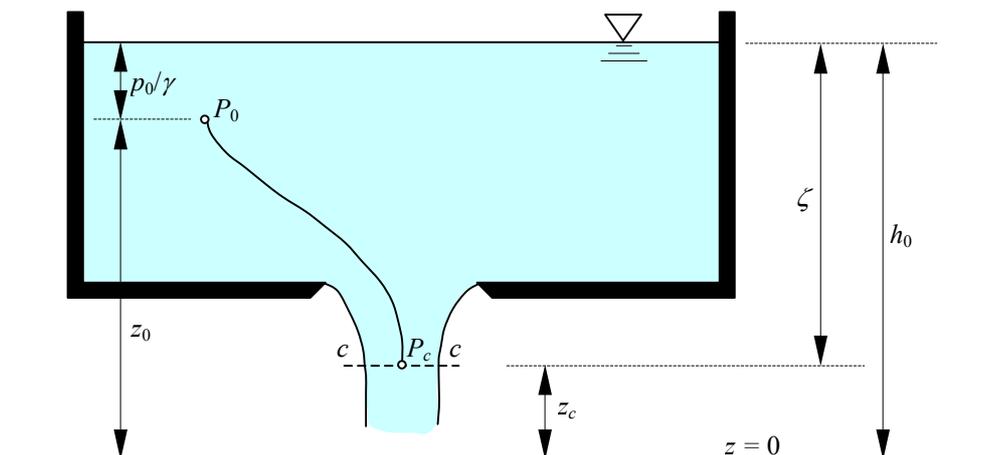


Figura 124. Schema di efflusso da luce di fondo in parete sottile.

Nel caso di una luce in parete sottile praticata sul fondo di un serbatoio la posizione della cui superficie libera a contatto con l'atmosfera si mantiene costante nel tempo, rappresentata nella Figura 124, il flusso, dopo aver subito una contrazione rispetto alle dimensioni della luce, assume, ad una distanza da questa dell'ordine delle sue dimensioni lineari, le caratteristiche di una corrente gradualmente variata ad asse verticale, la cui sezione (*sezione contratta*), indicata come sezione  $c-c$

in figura, di area  $\Omega_c$ , è quindi regolare. Il Teorema di Bernoulli si applica al tratto di traiettoria di una generica particella compreso fra un punto  $P_0$  interno al serbatoio, sufficientemente lontano dalla luce perché vi si possa trascurare la velocità della particella,  $u_0$ , ed un punto  $P_c$  posto sulla sezione contratta. Assumendo un efflusso in atmosfera, essendo la sezione contratta piana, orizzontale ed esposta al contorno alla pressione atmosferica (pressione relativa nulla), tale valore di pressione vige anche in ogni punto interno della sezione:  $p_c=0$ .

Con le condizioni indicate ( $u_0=0$ ;  $p_c=0$ ), l'espressione generale del teorema di Bernoulli:

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{u_0^2}{2g} = z_c + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{u_c^2}{2g}$$

si può scrivere nella forma:

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} = z_c + \frac{u_c^2}{2g} ,$$

in cui, appartenendo il punto  $P_0$  ad un volume fluido in quiete, la sua quota piezometrica coincide con la quota del piano dei carichi idrostatici del liquido  $h_0$  e, quindi, del suo pelo libero. La velocità della generica particella nella sezione contratta è quindi espressa da:

$$u_c = \sqrt{2g(h_0 - z_c)} .$$

Introdotta l'affondamento della sezione contratta rispetto al pelo libero del serbatoio,  $\zeta = h_0 - z_c$  (*carico sulla luce*<sup>98</sup>), la velocità assume la classica espressione di *velocità Torricelliana*:

$$u_c = \sqrt{2g\zeta} ,$$

che è identico per tutte le particelle che transitano in tale sezione. Pertanto, l'espressione della portata, che si ottiene, in generale, dall'integrazione della distribuzione di velocità sulla sezione contratta  $\Omega_c$ :

$$Q = \int_{\Omega_c} u_c \, d\Omega ,$$

si può, in questo caso, esprimere semplicemente come prodotto della velocità costante per l'area della sezione contratta:

$$Q = u_c \Omega_c .$$

L'area della sezione contratta si esprime in funzione dell'area della luce,  $\Omega$ , attraverso il coefficiente di contrazione:

$$C_c = \frac{\Omega_c}{\Omega} .$$

In pratica, il valore del coefficiente di contrazione dipende dal massimo valore dell'angolo di deviazione che le traiettorie devono subire fra l'interno e l'esterno del serbatoio. Nel caso in questione, si tratta delle traiettorie più vicine al fondo del serbatoio, quindi orizzontali all'interno di esso, che devono deviare di  $90^\circ$  per portarsi in direzione verticale sulla sezione contratta, cui

---

<sup>98</sup> Utilizziamo tale denominazione per consuetudine sebbene il carico  $\zeta$  indicato nel procedimento sia piuttosto da intendersi sulla sezione contratta. Naturalmente, nel caso il battente sulla luce (profondità del liquido nel serbatoio) risultasse molto maggiore delle dimensioni lineari della luce, sarebbe lecito, in via approssimata, fare riferimento al battente (carico sulla luce) anziché al carico sulla sezione contratta.

corrisponde un valore del coefficiente di contrazione pari a circa  $C_c=0,61$ . Si rimarca come tale valore sia associato all'angolo di deviazione ed assuma pertanto il medesimo valore in casi di efflusso diversi, come quelli che verranno illustrati successivamente, ma caratterizzati sempre da una deviazione di  $90^\circ$ , come del resto già rilevato trattando di perdite di imbocco nel § 7.5.2.

Come si è detto, l'ipotesi di fluido non viscoso comporta un errore nella valutazione della velocità nella sezione contratta, di cui si può tenere conto correggendo la velocità torricelliana mediante un *coefficiente di velocità*  $C_v$ , dell'ordine di  $C_v=0,98$ . Tale valore denota l'esiguità dell'errore, dell'ordine del 2%. Sulla base di tale valore, nel §7.5.2 è stata valutata la componente della perdita localizzata di imbocco dovuta alla viscosità.

In definitiva, la legge di efflusso della luce di fondo in parate sottile si scrive:

$$Q = C_v C_c \Omega \sqrt{2g\zeta} ,$$

ovvero, conglobando il coefficiente di contrazione ed il coefficiente di velocità in un unico coefficiente di deflusso, prodotto dei due,  $\mu = C_v C_c \cong 0,6$ , nella forma canonica:

$$Q = \mu \Omega \sqrt{2g\zeta} . \quad (208)$$

Nel caso il deflusso avvenisse, anziché nell'atmosfera, in un ambiente a pressione relativa non nulla, il cui valore dovrebbe essere pertanto imposto nella sezione contratta, con elementari modifiche al ragionamento fin qui seguito la legge di efflusso si modificherebbe nella seguente espressione:

$$Q = \mu \Omega \sqrt{2g(\zeta - p_c/\gamma)} . \quad (209)$$

Pertanto, una pressione relativa positiva determinerebbe una diminuzione della portata rispetto al caso dell'efflusso in atmosfera; una pressione relativa negativa (depressione) un aumento della portata.

### 10.3 Efflusso da luce in parete sottile verticale

Un caso formalmente simile a quello della luce di fondo, ma in realtà abbastanza differente dal punto di vista fisico, è costituito dall'efflusso attraverso una luce in parete sottile verticale, illustrato in Figura 125.

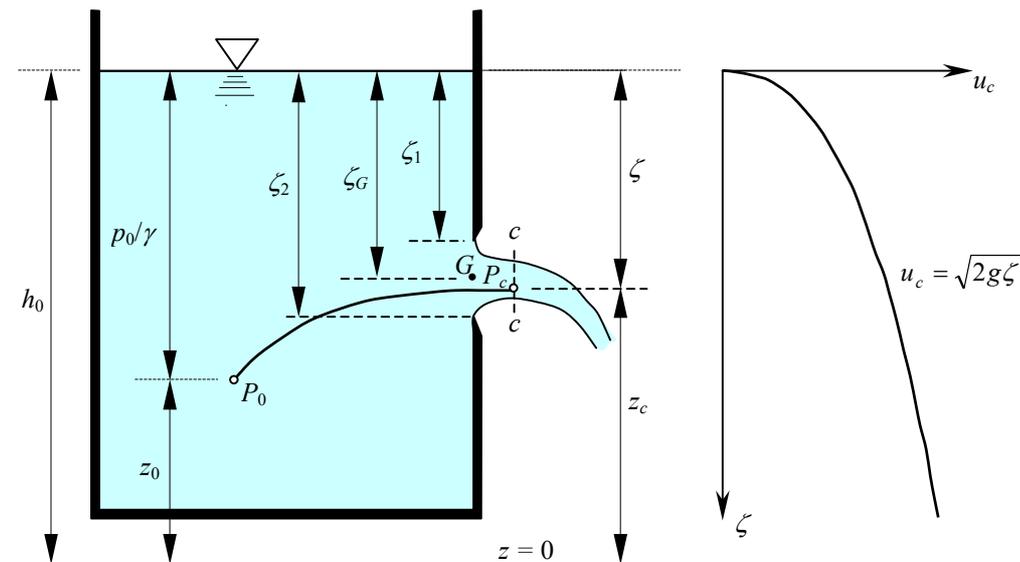


Figura 125. Schema di efflusso da luce in parete sottile verticale.

Anche in questo caso, la vena effluente si contrae, con deviazioni massime delle traiettorie pari a  $90^\circ$ , per disporsi con tangente pressoché orizzontale nella sezione contratta che caratterizza questo tipo di luce. Evidentemente, la sezione contratta è in questo caso verticale. Poiché, nel caso di efflusso in atmosfera, al suo contorno la pressione relativa è identicamente nulla, avendo i diversi punti del contorno quota differente ma pressione identica, la distribuzione delle pressioni non è idrostatica e la sezione contratta non può quindi essere regolare, né la corrente gradualmente variata. In effetti, in tale sezione le singole particelle sono, in buona approssimazione, soggette unicamente alla accelerazione di gravità, che è quanto dire che ciascuna si muove, indipendentemente dalle altre (cioè, senza esercitare mutue azioni tramite sforzi esercitati attraverso le superfici di contatto), seguendo la legge di caduta dei gravi. Si può mostrare<sup>99</sup> che tali condizioni implicano un gradiente verticale di pressione nullo. Pertanto, anche in questa sezione contratta la pressione è, punto per punto, pari a quella atmosferica, quindi nulla in termini di pressione relativa.<sup>100</sup>

Il ragionamento che occorre sviluppare per pervenire all'espressione della velocità della particella nella sezione contratta è quindi del tutto identico a quello seguito nel caso della luce di fondo, con identico risultato formale:

$$u_c = \sqrt{2g\zeta} .$$

Tuttavia, in questo caso il carico  $\zeta$  (differenza fra le quote del pelo libero del serbatoio e della particella nella sezione contratta) non è una costante, giacché la sezione contratta è verticale e in essa le varie particelle non hanno quindi tutte la stessa quota. Pertanto, in generale, in questo caso la determinazione della legge di efflusso richiede effettivamente l'integrazione della velocità sulla sezione contratta:

$$Q = \int_{\Omega_c} u_c \, d\Omega ,$$

che risulta tutt'altro che agevole eseguire in termini rigorosi.

Il problema è suscettibile di semplificazione qualora il battente sulla luce sia molto maggiore delle dimensioni lineari di questa, di qualunque forma essa sia. Infatti, considerando l'andamento della velocità riportato a margine della Figura 125, essendo esso proporzionale alla radice quadrata del carico  $\zeta$  ha anche curvatura decrescente al crescere di questo. Pertanto, per grandi valori del rapporto fra il battente sulla luce e le dimensioni lineari di questa, il tratto di diagramma di velocità che interessa la sezione contratta è approssimativamente lineare. Il problema del calcolo dell'integrale di una funzione lineare nella variabile di integrazione è esattamente il medesimo incontrato in Idrostatica relativamente al calcolo delle spinte su superfici piane (§3.10.1), la cui soluzione era data dal valore della funzione integranda lineare (in quel caso, la pressione) valutata nel baricentro della superficie, moltiplicata per l'area della superficie. Identicamente, nel caso in questione la portata è calcolabile come prodotto della velocità nel baricentro della sezione contratta per l'area di quest'ultima. L'ipotesi di dimensioni lineari della luce relativamente piccole comporta anche che si possa a tale scopo considerare il baricentro della luce piuttosto che della sezione contratta. Qualora ricorrano le condizioni esposte in precedenza, esprimendo ancora l'area della sezione contratta in funzione del coefficiente di contrazione e tenendo conto degli effetti viscosi, la legge di efflusso assume pertanto la forma:

$$Q = \mu\Omega\sqrt{2g\zeta_G} . \tag{210}$$

Nel caso in cui le dimensioni della luce non possano dirsi molto minori del battente su di essa, una soluzione al problema di pratica validità, anche se risultante da un procedimento tutt'altro che

<sup>99</sup> Vedi Citrini – Idraulica, §5.5.

<sup>100</sup> Si tratta in sostanza delle medesime condizioni discusse nel § 7.6 con riferimento allo sbocco in aria di una condotta in pressione

rigoroso, si può ottenere per il caso di una luce rettangolare di altezza  $a = \zeta_2 - \zeta_1$  (vedi Figura 126) e larghezza  $b$ , pari alla larghezza del serbatoio, cosicché la vena non subisca una contrazione laterale.

Il procedimento consiste nel considerare la sezione contratta composta di parti elementari  $b d\zeta_c = b d\zeta C_c$ , derivanti per contrazione di parti elementari della superficie della luce  $b d\zeta$ , e attribuire alle particelle che transitano per tale parte elementare della sezione contratta una velocità calcolata con riferimento al carico  $\zeta$  sulla corrispondente parte elementare della superficie della luce, invece che al carico  $\zeta_c$  sulla sezione contratta. Così facendo l'espressione dell'integrale che fornisce la portata  $Q$  assume la forma:

$$Q = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} C_v C_c b \sqrt{2g\zeta} d\zeta = C_v C_c b \sqrt{2g} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \sqrt{\zeta} d\zeta .$$

Ricordando che la primitiva (§1.1.2) di  $\sqrt{\zeta} = \zeta^{1/2}$  è data da  $2/3 \zeta^{3/2}$ , l'integrale si sviluppa come segue:

$$Q = C_v C_c b \sqrt{2g} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \sqrt{\zeta} d\zeta = C_v C_c b \sqrt{2g} \frac{2}{3} [\zeta^{3/2}]_{\zeta_1}^{\zeta_2} = \mu b \sqrt{2g} (\zeta_2^{3/2} - \zeta_1^{3/2}), \quad (211)$$

in cui ora il coefficiente di efflusso, a parità di valori del coefficiente di contrazione e del coefficiente di velocità rispetto al caso della luce in parete sottile di fondo, vale  $\mu \cong 0,4$ .

È anche abbastanza facile dare una spiegazione del perché, nonostante il procedimento sia privo di qualunque giustificazione rigorosa, esso fornisca un risultato quantitativo del tutto accettabile: ciò è dovuto alla compensazione di sovrastime della velocità nelle parti della sezione contratta poste al di sotto del suo baricentro (perché in esse si considera un carico sulla luce maggiore del carico sulla sezione contratta) con sottostime nelle parti al di sopra del baricentro della sezione contratta (per il motivo opposto).

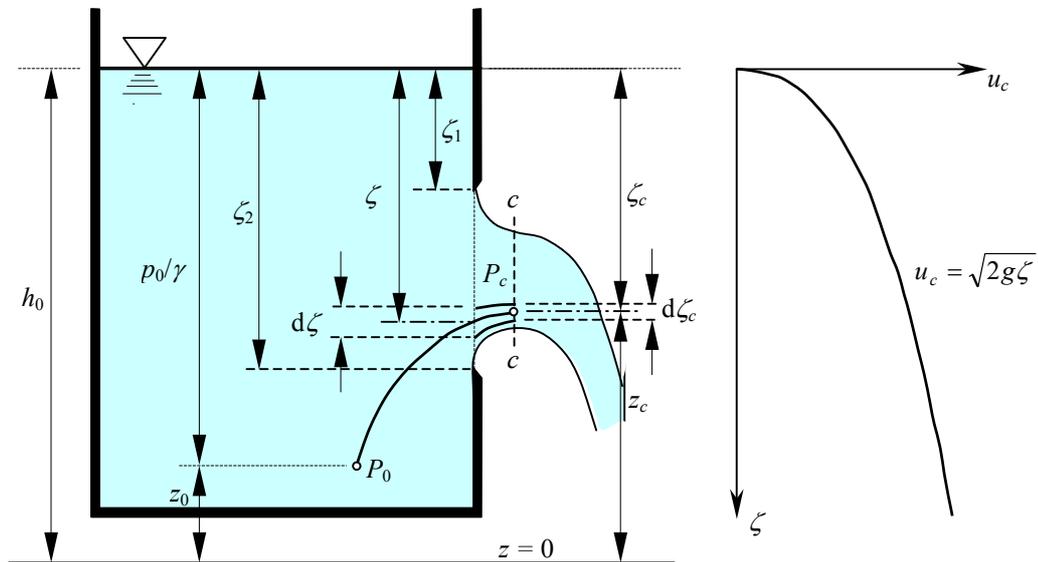
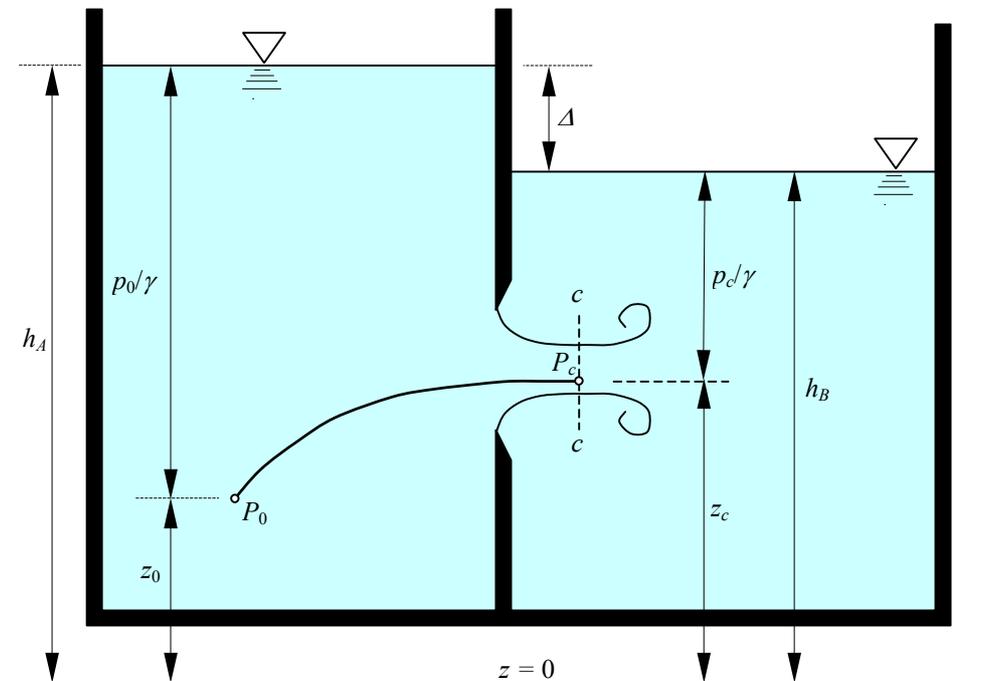


Figura 126. Schema di efflusso da luce in parete sottile verticale di dimensioni comparabili con il battente sulla luce.

#### 10.4 Efflusso da luce in parete sottile rigurgitata

In questo caso, l'efflusso avviene da un serbatoio  $A$  all'interno di un volume liquido contenuto in un serbatoio  $B$  e la sezione contratta che si viene anche in questo caso a formare è quindi sotto battente (vedi Figura 127). Il liquido circostante la sezione contratta può considerarsi, in buona

approssimazione, in quiete. Pertanto, la distribuzione delle pressioni al contorno della sezione contratta è idrostatica: dunque, compatibile con le condizioni di corrente gradualmente variata, che sono infatti verificate in tale sezione. Poiché al suo contorno vi deve essere equilibrio delle pressioni per il principio di azione e reazione, la quota piezometrica uniformemente distribuita sulla sezione contratta deve uguagliare la quota piezometrica del liquido in quiete nel quale essa è immersa, ossia, la quota del pelo libero di quest'ultimo<sup>101</sup>.



**Figura 127. Schema di efflusso da luce in parete sottile rigurgitata.**

Assumendo, come già per i casi precedenti, una posizione iniziale della particella nel serbatoio A sufficientemente lontana dalla luce perché la si possa ritenere praticamente in quiete, l'espressione generale del teorema di Bernoulli:

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{u_0^2}{2g} = z_c + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{u_c^2}{2g}$$

si riduce alla forma:

$$h_A = h_B + \frac{u_c^2}{2g} ,$$

dalla quale si ottiene l'espressione della velocità della particella nella sezione contratta, esprimibile in funzione della differenza dei livelli dei peli liberi nei due serbatoi,  $\Delta = h_A - h_B$ :

$$u_c = \sqrt{2g\Delta} ,$$

che risulta dunque costante sulla sezione contratta. L'espressione della portata si ottiene quindi semplicemente moltiplicando tale valore costante per l'area della sezione contratta. Introducendo,

<sup>101</sup> Si tratta della stessa considerazione utilizzata nella soluzione del problema della condotta con sbocco sotto battente di cui al §7.6.

come in precedenza, il coefficiente di contrazione, il coefficiente di velocità ed il coefficiente di efflusso, prodotto dei due, si ottiene infine la legge di efflusso:

$$Q = \mu \Omega \sqrt{2g\Delta} \quad , \quad (212)$$

nella quale, avendosi anche in questo caso una deviazione massima delle traiettorie pari a  $90^\circ$ , si ha ancora  $C_c = 0,61$  e, dunque, per  $C_v = 0,98$ ,  $\mu \cong 0,6$ .

### 10.5 Efflusso da una paratoia piana verticale in parete sottile

Una paratoia è una lastra, piana o ricurva, regolabile in modo da lasciare, fra il suo bordo inferiore ed il fondo sottostante, una luce libera attraverso il quale avviene l'efflusso. Le paratoie sono usualmente utilizzate come organi di regolazione della portata nei canali. In questa sede ci limiteremo ad illustrare il funzionamento di una paratoia piana verticale in parete sottile, sulla base dello schema di Figura 128.

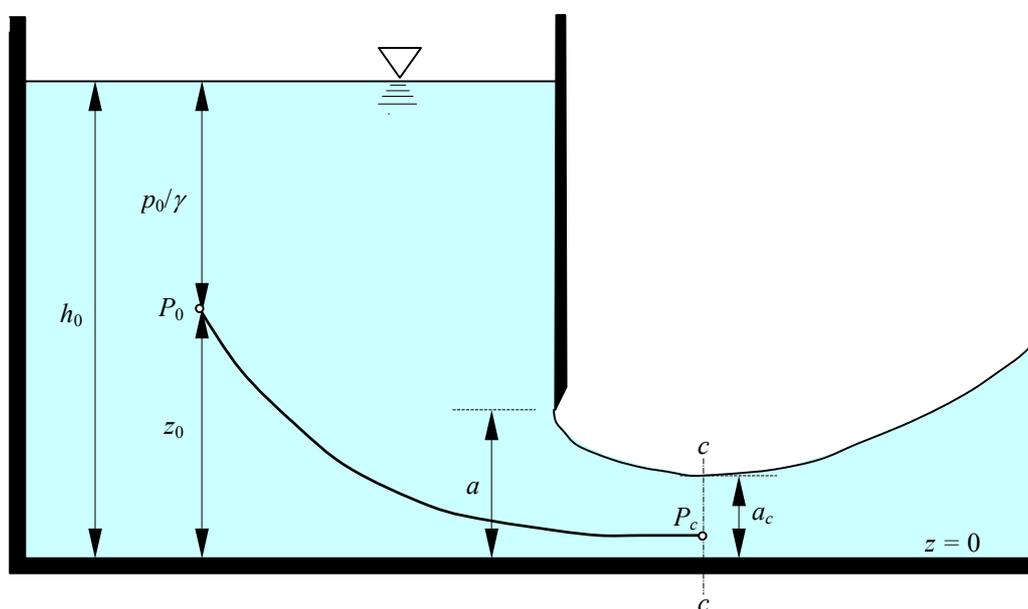


Figura 128. Schema di efflusso da paratoia piana verticale in parete sottile.

Si assume che la larghezza della luce sia pari alla larghezza sia del serbatoio, o del canale, a monte, che del canale a valle di essa, col che non si ha contrazione laterale della vena e, come già nel caso dell'efflusso da luce rettangolare in parete sottile verticale, il moto è piano.

Il procedimento è essenzialmente il medesimo utilizzato per gli altri tipi di luci, la particolarità di ciascun tipo essendo legata alla specificazione delle condizioni da imporre nella sezione contratta. Nel caso della paratoia piana, la sezione contratta è regolare, per cui è costante su essa la quota piezometrica. Avendo assunto come piano di riferimento il fondo, dette  $a$ ,  $a_c = a C_c$  e  $b$  rispettivamente l'altezza della luce, l'altezza della sezione contratta e la larghezza della luce (nonché, per l'assenza di contrazione laterale, della sezione contratta), l'espressione generale del teorema di Bernoulli:

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{u_0^2}{2g} = z_c + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{u_c^2}{2g}$$

si semplifica nella forma:

$$h_0 = a_c + \frac{u_c^2}{2g} = C_c a + \frac{u_c^2}{2g},$$

da cui l'espressione della velocità nella sezione contratta:

$$u_c = \sqrt{2g(h_0 - C_c a)},$$

la quale, come in tutti i casi visti in cui la sezione contratta era regolare, risulta costante. Moltiplicando quindi la velocità per l'area della sezione contratta,  $\Omega_c = C_c a b$ , ed introdotto il coefficiente di velocità  $C_v$  ed il coefficiente di efflusso  $\mu$ , la legge di efflusso assume l'espressione:

$$Q = \mu a b \sqrt{2g(h_0 - C_c a)} \quad (213)$$

ove il coefficiente di efflusso vale  $\mu = 0,6$  per essere le massime deviazioni delle traiettorie pari ancora a  $90^\circ$ . Il coefficiente di contrazione risulterebbe maggiore di 0,61 nel caso di una paratoia piana la cui sezione formasse un angolo acuto con il fondo, minore di 0,61 nel caso di angolo ottuso; le portate corrispondenti sarebbero quindi anch'esse rispettivamente maggiori e minori di quella relativa alla paratoia verticale. Il primo caso si verifica anche nel caso di *paratoie a settore*, nelle quali l'elemento di tenuta è una superficie cilindrica la cui sezione retta è un arco di cerchio.

L'efflusso da una paratoia può anche avvenire con la sezione contratta sotto battente. In questo caso, le caratteristiche dimensionali della sezione contratta sono le medesime del caso di efflusso libero, ma la quota piezometrica da considerare è il livello del pelo libero sovrastante la sezione, come nel caso dell'efflusso da luce in parete sottile rigurgitata. Detta ancora  $\Delta$  la differenza dei livelli a monte ed a valle della paratoia, la legge di efflusso assume in questo caso la forma:

$$Q = \mu a b \sqrt{2g\Delta} \quad (214)$$

La condizione di velocità trascurabile ad una debita distanza a monte della paratoia è spesso adeguata, particolarmente nel caso di efflussi da serbatoi. In generale, la validità di tale condizione è legata a sezioni di efflusso a monte (l'area della sezione orizzontale di un serbatoio, o la sezione verticale di un canale a monte di una paratoia) molto maggiore dell'area della luce. Nel caso di una paratoia posta su un canale, la condizione può essere non completamente soddisfacente. A titolo di esempio, illustriamo di seguito come si modifica la legge di efflusso libero da una paratoia verticale in parete sottile nel caso si debba rinunciare a tale ipotesi semplificativa.

Assumendo, in via approssimata, che la velocità a monte della paratoia sia distribuita in modo pressoché uniforme, e perciò esprimibile come rapporto fra la portata della corrente e l'area della sezione liquida,  $u_0 = Q/(bh_0)$ , esprimendo in modo analogo anche la velocità nella sezione contratta e tenendo presente che la corrente a monte della paratoia è gradualmente variata, l'espressione generale del teorema di Bernoulli:

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{u_0^2}{2g} = z_c + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{u_c^2}{2g}$$

assume la forma:

$$h_0 + \frac{Q^2}{2gb^2h_0^2} = C_c a + \frac{Q^2}{2gC_v^2 C_c^2 a^2 b^2},$$

da cui l'espressione della portata:

$$Q = \sqrt{\frac{2g(h_0 - C_c a)}{\frac{1}{\mu^2 a^2 b^2} - \frac{1}{b^2 h_0^2}}} \quad (215)$$

### 10.6 Stramazzo in parete sottile

Gli *stramazzi* sono dei manufatti per la misura della portata in canali a pelo liberi, costituiti da una barriera posta trasversalmente all'asse del canale a occuparne l'intera larghezza (*petto dello stramazzo*), attraverso i quali l'efflusso avviene per tracimazione della *cresta*, occupante in tutto o in parte la larghezza del petto. Si distinguono *stramazzi in parete sottile* da stramazzi in parete grossa o *a larga soglia*, che verranno descritti nel paragrafo successivo. I primi possono essere realizzati in forme diverse: nello *stramazzo Bazin*, il più semplice di tutti, la cresta occupa l'intera larghezza del canale e su di esso l'efflusso avviene perciò senza contrazione laterale; lo *stramazzo Francis*, nel quale la lama sfiorante occupa soltanto una parte della larghezza del canale, il che comporta una contrazione laterale ed una diminuzione della portata effluente rispetto ad uno stramazzo Bazin di pari larghezza della cresta; gli *stramazzi triangolari*, dalla forma della lama sfiorante, il cui uso è limitato ai laboratori, per la misurazione di piccole portate; lo *stramazzo Cipolletti*, avente una lama sfiorante a forma trapezia di larghezza inferiore alla larghezza del canale, di modo che la minore portata legata alla contrazione laterale della vena effluente è compensata dall'aumento dovuto alle aree triangolari laterali e per esso possa perciò utilizzarsi la legge di efflusso dello stramazzo Bazin di larghezza pari alla larghezza della base della lama sfiorante (base minore del trapezio).

La legge di efflusso dello stramazzo Bazin si deduce con riferimento alla trattazione della luce in parete sottile verticale rettangolare di dimensioni confrontabili con il battente sulla luce, per il caso in cui quest'ultimo sia nullo (vedi Figura 129).

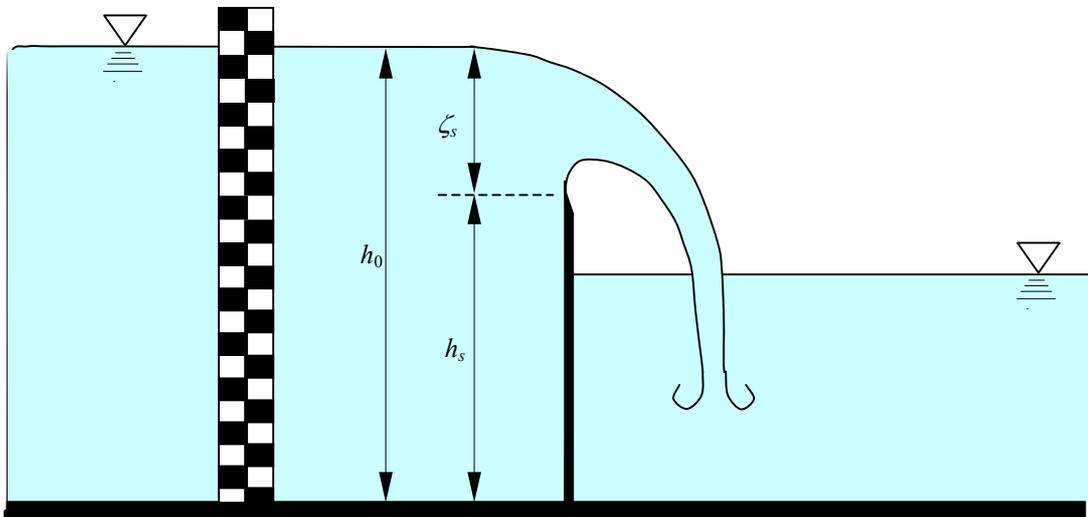


Figura 129. Schema di efflusso da stramazzo Bazin.

Ponendo pertanto  $\zeta_1 = 0$  e  $\zeta_2 = \zeta_s$  nella formula (211) si ottiene la legge di efflusso dello stramazzo Bazin:

$$Q = \mu b \sqrt{2g} \zeta_s^{3/2} = \mu b \zeta_s \sqrt{2g \zeta_s} \quad (216)$$

con  $\mu = 0,4$ . Per via dell'effetto di richiamo in prossimità della cresta dello stramazzo, il carico sullo stramazzo  $\zeta_s$  andrà valutato ad una breve distanza dal manufatto, ove tale effetto risulti trascurabile,

per differenza fra la lettura del livello  $h_0$  mediante una stadia graduata e l'altezza del petto dello stramazzo  $h_s$ , che è ovviamente nota.

Si osservi che, ad eccezione della formula (211), tutte le formule fin qui ottenute per il caso di velocità trascurabili a monte della luce sono espresse dal prodotto di un coefficiente di efflusso, dell'area di una sezione caratteristica e di una velocità torricelliana, del tipo  $\sqrt{2g\delta}$ , dove  $\delta$  è un'altezza caratteristica data dalla differenza delle quote piezometriche a monte della luce e nella sezione contratta. Tale osservazione può facilitare la memorizzazione delle varie formule, peraltro tutte dedotte sostanzialmente mediante lo stesso ragionamento e quindi piuttosto semplici da ricavare qualora si sia compresa la modalità di specificazione dei due tipi possibili di condizioni sulla sezione contratta.

La formula di Bazin qui presentata è la più semplice possibile e peraltro, come si è detto, risultante da un procedimento tutt'altro che rigoroso. Esistono tuttavia formulazioni più accurate, che mettono in conto effetti fisici quali la tensione superficiale (formula di Rehbock), sulle quali tuttavia non interessa qui dilungarsi, anche perché trattasi di affinamenti utili più in laboratorio che sul campo.

La legge di efflusso dello stramazzo Francis è molto simile a quella dello stramazzo Bazin, differendo da questa per la considerazione di una larghezza utile pari alla larghezza della lama sfiorante diminuita di  $0,2 \zeta_s$ :

$$Q = \mu(b - 0,2\zeta_s)\zeta_s \sqrt{2g\zeta_s} .$$

Per quanto riguarda gli stramazzi triangolari, la relativa legge di efflusso si può ottenere facilmente sulla base del procedimento utilizzabile per lo stramazzo Bazin, a differenza del quale la larghezza  $b$  dell'elemento di sezione contratta,  $b d\zeta_c = b d\zeta C_c$ , non è costante ma varia linearmente con l'affondamento  $\zeta$ .

### 10.7 Stramazzo a larga soglia

Anche lo stramazzo a larga soglia è un manufatto per la misura delle portate nei canali. Nella sua conformazione più essenziale, si tratta di una soglia sfiorante di sviluppo longitudinale sufficiente a che la vena liquida possa adagiarsi in condizioni di corrente gradualmente variata e di altezza sufficiente a che, su di essa, la vena assuma la profondità critica, avente l'intera larghezza del canale su cui è realizzata (vedi Figura 130).<sup>102</sup>

Assumendo un piano di riferimento posto alla quota della soglia sfiorante, ammessa l'ipotesi di piccole velocità a monte dello stramazzo, ove la corrente è pure gradualmente variata, ed espressa la profondità della corrente sulla soglia come profondità critica  $Y_c$  della corrente, il teorema di Bernoulli si esprime nella forma:

$$\zeta_s = Y_c + \frac{u_c^2}{2g} .$$

Per le ipotesi di piccole velocità a monte della soglia e di conservazione dell'energia, espressa dal teorema di Bernoulli, la linea dei carichi totali, pressoché orizzontale, è posta alla quota della superficie libera della corrente a monte della soglia, ad una distanza da questa dove l'effetto di richiamo non sia sensibile. Pertanto, il carico sullo stramazzo  $\zeta_s$  costituisce anche il valore di energia rispetto al fondo della corrente sulla soglia, che è minimo per la portata fluente trovandosi la corrente in condizioni critiche. Essendo la sezione di forma rettangolare, per quanto visto al §9.3 si ha quindi:

<sup>102</sup> Altri manufatti di misura delle portate basati su questo principio (*modellatori a risalto*) sfruttano anche l'effetto di una restringimento della larghezza del canale nei confronti dell'induzione della transizione per lo stato critico; sono quindi realizzati sia con un innalzamento del fondo che con un restringimento della sezione.

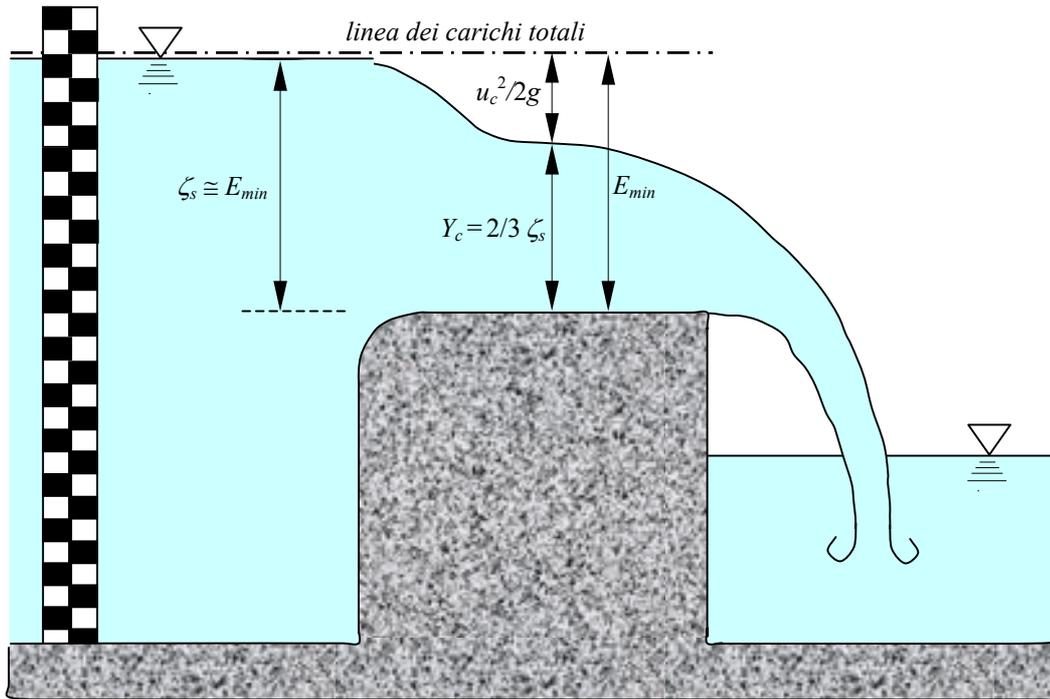


Figura 130. Schema di efflusso da stramazzo a larga soglia.

$$Y_c = \frac{2}{3} E_{\min} = \frac{2}{3} \zeta_s .$$

La velocità sulla soglia  $u_c$  assume pertanto l'espressione:

$$u_c = \sqrt{2g \frac{\zeta_s}{3}} ,$$

costante sulla sezione di area  $\Omega_c = bY_c$ . L'espressione della portata è data pertanto da:

$$Q = bY_c \sqrt{2g \frac{\zeta_s}{3}} = b \frac{2}{3} \zeta_s \sqrt{2g \frac{\zeta_s}{3}} = b \frac{2}{3\sqrt{3}} \zeta_s \sqrt{2g\zeta_s} ,$$

da cui infine la legge di efflusso, formalmente identica a quella dello stramazzo Bazin:

$$Q = \mu b \zeta_s \sqrt{2g\zeta_s} ,$$

ma caratterizzata da un valore del coefficiente di deflusso  $\mu = 2/(3\sqrt{3}) = 0,385$ , inferiore al valore relativo allo stramazzo Bazin,  $\mu = 0,4$ .

Anche in questo caso, la misura della portata richiede la misura del livello a monte della soglia mediante una stadia. Va osservato come la transizione della corrente per lo stato critico sia essenziale perché la portata dipenda unicamente dal livello a monte della soglia. Identica osservazione vale per lo stramazzo in parete sottile, che richiede di non essere rigurgitato. In caso contrario, la portata dipende dai livelli sia a monte che a valle ed è misurabile, oltre che in modo meno agevole, con scarsa precisione.