

---

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA,  
ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

# Superfícies Mínimas no Grupo de Heisenberg

Dissertação de Mestrado

Paula Olga Gneri

Orientador: Francesco Mercuri

Co-orientadora: Irene Ignazia Onnis

Campinas  
fevereiro de 2007

---

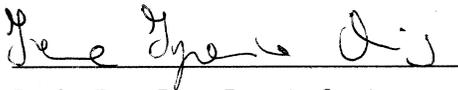
# Superfícies Mínimas no Grupo de Heisenberg

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Paula Olga Gneri e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 26 de fevereiro de 2007



Prof. Dr. Francesco Mercuri  
Orientador



Profa. Dra. Irene Ignazia Onnis  
Co-orientadora

Banca Examinadora

1. Profa. Dra. Irene Ignazia Onnis
2. Prof. Dr. Antonio Carlos Asperti
3. Prof. Dr. Renato Hyuda de Luna Pedrosa

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

*Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8a / 5094*

Gneri, Paula Olga

G533s Superfícies mínimas no grupo de Heisenberg /Paula Olga Gneri --  
Campinas, [S.P. :s.n.], 2007.

Orientador : Francesco Mercuri

Co-orientadora: Irene Ignazia Onnis

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Superfícies mínimas. 2. Lie, Grupos de. 3. Geometria  
diferencial. I. Mercuri, Francesco. II. Onnis, Irene Ignazia. III.  
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,  
Estatística e Computação Científica. IV. Título.

(mca/imecc)

Título em inglês: Minimal surfaces on Heisenberg groups.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Minimal surfaces. 2. Lie groups. 3. Differential  
geometry.

Área de concentração: Geometria diferencial

Titulação: Mestre em Matemática

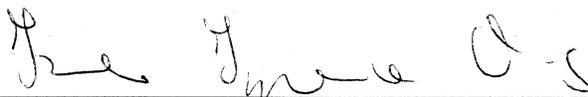
Banca examinadora: Profa. Dra. Irene Ignazia Onnis (ICMC – USP)  
Prof. Dr. Antonio Carlos Asperti (IME-USP)  
Prof. Dr. Renato Hyuda de Luna Pedrosa (IMECC-Unicamp)

Data da defesa: 26/02/2007

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática

**Dissertação de Mestrado defendida em 26 de fevereiro de 2007 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



---

**Prof. (a). Dr (a). IRENE IGNAZIA ONNIS**



---

**Prof. (a). Dr (a). ANTONIO CARLOS ASPERTI**



---

**Prof. (a). Dr (a). RENATO HYUDA DE LUNA PEDROSA**

# DEDICATÓRIA



Dedico este trabalho aos seqüestrados e desaparecidos pelos governos militares da América Latina e a “las Madres de Plaza Mayo”:

## LOS ENEMIGOS

Ellos aquí trajeron los fusiles  
repletos de pólvora,  
ellos mandaron el acerbo exterminio,  
ellos aquí encontraron  
un pueblo que cantaba,  
un pueblo por deber  
y por amor reunido,  
y la delgada niña cayó  
con su bandera,  
y el joven sonriente rodó  
a su lado herido,  
y el estupor del pueblo  
vio caer a los muertos  
con furia y con dolor.  
Entonces, en el sitio  
donde cayeron los asesinados,  
bajaron las banderas  
a empaparse de sangre  
para alzarse de nuevo frente  
a los asesinos.

Por esos muertos, nuestros muertos,  
pido castigo.

Para los que de sangre salpicaron la patria,  
pido castigo.

Para el verdugo que mandó esta muerte,  
pido castigo.

Para el traidor que ascendió sobre el  
crimen, pido castigo.

Para el que dio la orden de agonía,  
pido castigo.

Para los que defendieron este crimen,  
pido castigo.

No quiero que me den la mano  
empapada con nuestra sangre.  
Pido castigo.

No los quiero de embajadores,  
tampoco en su casa tranquilos,  
los quiero ver aquí juzgados  
en esta plaza, en este sitio.

Quiero castigo.

*Pablo Neruda*

# AGRADECIMENTOS

Ao meu futuro marido, Rodolfo, pelo amor, enorme paciência e dedicação.

Aos meus pais, Maria Rosa e Mario, pelo amor e carinho, principalmente por me ensinar a lutar pelos meus direitos e nunca desistir de um mundo melhor.

Aos professores, funcionários do IMECC e da cantina do Marcão, em especial aos meus orientadores Franco e Irene, pela dedicação, pelo aprendizado, quase paternal, proporcionado.

Aos meus familiares, que sempre me incentivaram a continuar, tanto aqueles que estão perto quanto os que estão distantes.

A minha nova família Lia, Wado, Mauro e João, que me acolheu com carinho e aguardou pacientemente os poucos fins de semana lhes pude dedicar.

Aos meus colegas de curso e grandes amigos André Gal, Gláucia, Humberto, Ivan, Jessica, Pedro, Renata, Ricardo pelo apoio e horas de estudo a meu lado, além dos bons momentos que me proporcionaram.

A meus amigos, em especial, André Mineiro, Cidinha, Cíntia, Chayene, Clóvis, Cristina, Daniela, Débora, Janaína, Léa, Marte e Nádia pelos momentos de diversão e muita alegria.

Agradeço a meus cachorros pela companhia e pelo carinho incondicional.

A CAPES pelo apoio financeiro.

# RESUMO

O objetivo deste trabalho é o estudo dos gráficos mínimos no grupo de Heisenberg de dimensão três. Primeiramente fizemos uma descrição deste grupo como grupo de Lie e sua álgebra de Lie. Verificamos que a aplicação exponencial é um difeomorfismo global entre a álgebra de Lie e o grupo de Heisenberg. Seguindo o ciclo natural, passamos a estudar a geometria Riemanniana do grupo de Heisenberg com métrica invariante à esquerda, calculando os campos invariantes à esquerda, as curvaturas, as geodésicas, os campos de Killing e o grupo de isometrias deste espaço. Subseqüentemente, estudamos a aplicação normal de Gauss para gráficos no grupo de Heisenberg, concluindo, entre outras propriedades, a não existência de superfícies totalmente umbílicas neste grupo. Classificamos todas as superfícies mínimas cujo posto da aplicação de Gauss é zero ou um e concluindo que tais superfícies são regradas. Finalizando, analisamos alguns exemplos de gráficos mínimos completos cuja aplicação de Gauss tem posto dois. A classificação de gráficos mínimos com aplicação de Gauss de posto dois é ainda um problema em aberto.

# ABSTRACT

The purpose of this work is study minimal surfaces in tri-dimensional Heisenberg group. Firstly, we made a description of Heisenberg group as Lie group and its Lie algebra. We examined that the exponential application is a global diffeomorphism between Lie algebra and Heisenberg group. Thereafter, we investigate Riemann Geometry of left invariant metric Heisenberg group, we consider left invariant fields, curvatures, geodesics, Killing fields and isometry group of this space. Subsequently, we examined the Gauss normal application to surfaces in Heisenberg group and we conclude a series of peculiarity as, for example, the not existence of umbilic surfaces in this group. We classified all minimal surfaces with rank-zero Gauss application or rank-one Gauss application and we conclude that these surfaces are ruled. To put an end, we analyzed some examples of complete minimal surfaces with rank-two Gauss application. The classification of minimal surfaces with rank-two Gauss application is a open problem.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>ix</b>
<b>1 Conceitos básicos de Geometria Riemanniana</b>	<b>3</b>
1.1 Variedades diferenciáveis e grupos de Lie: Fatos básicos . . . . .	3
1.2 Métricas Riemannianas e conexão de Levi-Civita . . . . .	7
1.3 Transporte paralelo e geodésicas . . . . .	8
1.4 Geodésicas de um ponto de vista variacional . . . . .	11
1.5 Curvatura . . . . .	16
1.6 Isometrias e campos de Killing . . . . .	18
1.7 Imersões isométricas: Conceitos básicos . . . . .	21
<b>2 Geometria do grupo de Heisenberg <math>\mathcal{H}_3</math></b>	<b>26</b>
2.1 A geometria Riemanniana básica dos grupos de Lie . . . . .	26
2.2 O grupo de Heisenberg $\mathcal{H}_3$ . . . . .	27
2.3 A conexão de Levi-Civita em $\mathcal{H}_3$ . . . . .	30
2.4 Geodésicas do espaço $\mathcal{H}_3$ . . . . .	31
2.5 Calculando a curvatura de $\mathcal{H}_3$ . . . . .	34
2.6 O grupo de isometrias . . . . .	34
2.7 Superfícies em $\mathcal{H}_3$ : Fatos básicos. . . . .	37
<b>3 Superfícies mínimas de <math>\mathcal{H}_3</math></b>	<b>45</b>
3.1 A equação dos gráficos mínimos . . . . .	45
3.2 Superfícies cuja aplicação de Gauss tem posto 0 . . . . .	51
3.3 Gráficos mínimos com aplicação normal de posto 1 . . . . .	54
3.4 Superfícies mínimas regradas. . . . .	61
3.5 Gráficos mínimos completos . . . . .	66
<b>Bibliografia</b>	<b>69</b>

# Introdução

A teoria das superfícies mínimas em  $\mathbb{R}^3$  começa em 1760 com o trabalho do matemático italiano Lagrange ([La]). Ele se propôs a estudar o seguinte problema:

*Dado um aberto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  e uma função<sup>1</sup>  $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , achar as funções  $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $f|_{\partial\Omega} = g$  e o gráfico de  $f$  tem área mínima em relação ao gráfico de qualquer outra função com o mesmo valor em  $\partial\Omega$ .*

Ele determinou a equação diferencial parcial que a (eventual) solução do problema tem que verificar. Esta equação é conhecida como a *equação dos gráficos mínimos*.

Vale ressaltar que satisfazer a equação dos gráficos mínimos é uma condição necessária, para que o gráfico seja um mínimo da área, mas não suficiente. Em geral uma solução da equação será um ponto crítico da função área.

Alguns anos depois, o matemático francês Meusnier, deu uma interpretação da equação dos gráficos mínimos em termos das curvaturas principais. Este avanço foi significativo pois, além de permitir estender o conceito de superfície mínima ao caso de superfícies que não são necessariamente gráficos, permite também estender o conceito para subvariedades de uma variedade Riemanniana arbitrária. E este é o ponto que nos interessa neste trabalho.

Um famoso teorema, devido ao matemático russo Bernstein, garante que uma solução da equação dos gráficos mínimos, definida em  $\Omega = \mathbb{R}^2$ , tem que ser afim, isto é, seu gráfico tem que ser um plano.

Este teorema tem motivado grande parte das pesquisas sobre superfícies mínimas em  $\mathbb{R}^3$  ou, para um caso mais geral, sobre hipersuperfícies mínimas em  $\mathbb{R}^n$ .

Nosso objetivo neste trabalho é estudar o problema análogo no grupo de Heisenberg  $\mathcal{H}_3$ . Este grupo é o grupo das matrizes  $3 \times 3$  dadas por:

$$\mathcal{H}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\},$$

que será identificado com  $\mathbb{R}^3$  através da bijeção:

---

<sup>1</sup>todas as funções consideradas serão “suficientemente diferenciáveis”.

$$\varphi(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & x & z + \frac{1}{2}xy \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta identificação é essencialmente a aplicação exponencial da álgebra de Lie  $\mathfrak{h}_3$  do grupo de Heisenberg, com  $\mathcal{H}_3$ .

Com esta identificação temos um plano privilegiado, o plano  $\{z = 0\}$ , por ser ortogonal ao centro de  $\mathfrak{h}_3$ .

Portanto, é relevante estender o problema de Lagrange para gráficos sobre este plano. A situação interessante é que o Teorema de Bernstein não vale neste contexto. Portanto um problema atraente é tentar classificar os gráficos mínimos completos de  $\mathcal{H}_3$ . Neste trabalho tentaremos entender melhor este problema.

A linha que seguiremos é a seguinte: para superfícies em um grupo de Lie tridimensional temos, em analogia ao caso das superfícies em  $\mathbb{R}^3$ , o conceito de *aplicação normal de Gauss*. São, portanto, nossos objetivos neste trabalho:

- Classificar as superfícies mínimas “verticais”, isto é, as superfícies mínimas cuja aplicação normal de Gauss é constante.
- Classificar os gráficos mínimos cuja aplicação normal de Gauss tem posto um.
- Produzir exemplos de gráficos mínimos completos, isto é, definidos em todo  $\{z = 0\}$ , cuja aplicação normal de Gauss tem posto dois.

Vamos descrever a estrutura e os pré-requisitos do trabalho:

- Suporemos que o leitor esteja familiarizado com os conceitos e resultados básicos da teoria das variedades diferenciáveis. Na primeira seção do primeiro capítulo, iremos enunciar os resultados que precisaremos, principalmente para fixar as notações.
- Iremos discutir os fatos básicos de geometria Riemanniana, ora demonstrando-os, ora somente dando as idéias das demonstrações, ou às vezes dando apenas referências, ao longo do restante do primeiro capítulo.
- No segundo capítulo discutiremos a geometria Riemanniana (conexão, geodésicas, curvatura) do grupo de Heisenberg  $\mathcal{H}_3$  e as propriedades básicas das superfícies deste espaço mostrando, em particular, a não existência de superfícies umbílicas.
- No terceiro capítulo discutiremos a equação dos gráficos mínimos e classificaremos as superfícies mínimas de posto um (nossa demonstração se baseia na tese de doutorado de C. Figueroa Serrudo).

Finalizaremos esta introdução observando que a classificação dos gráficos mínimos completos de  $\mathcal{H}_3$  é ainda um problema em aberto.

# Capítulo 1

## Conceitos básicos de Geometria Riemanniana

Neste primeiro capítulo apresentaremos uma introdução a alguns conceitos básicos de Geometria Riemanniana. Assumiremos que o leitor seja familiarizado com os conceitos básicos da teoria das variedades diferenciáveis. Suporemos todas as variedades diferenciáveis *Hausdorff* e com *base enumerável*. As duas hipóteses são condições necessárias e suficientes para a existência de uma partição da unidade.<sup>1</sup>

### 1.1 Variedades diferenciáveis e grupos de Lie: Fatos básicos

Nesta primeira sessão vamos lembrar, essencialmente para fixar as notações, as definições e os fatos básicos da teoria. A referência básica será ([W]).

Considerando  $\mathcal{M}$  uma variedade diferenciável, usaremos as seguintes notações:

- $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$  é o espaço das funções diferenciáveis em  $\mathcal{M}$  a valores reais.
- $T_p\mathcal{M}$  é o espaço tangente a  $\mathcal{M}$  em  $p$ , isto é, as aplicações  $\mathbb{R}$ -lineares  $X(p) : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$  tais que:

$$X(p)(fg) = X(p)(f)g(p) + X(p)(g)f(p).$$

- $T\mathcal{M} := \bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p\mathcal{M}$  é o fibrado tangente a  $\mathcal{M}$  e  $\pi : T\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  é a projeção natural.

O fibrado tangente tem uma estrutura natural de variedade diferenciável cuja dimensão é o dobro da dimensão da variedade e, além disso, torna  $\pi$  uma aplicação diferenciável.

---

<sup>1</sup>A existência de uma partição da unidade permite provar a existência de uma métrica Riemanniana na variedade (ver [C], pg. 47)

- $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$  é o *espaço dos campos de vetores tangentes diferenciáveis*, isto é, as funções diferenciáveis  $X : \mathcal{M} \longrightarrow T\mathcal{M}$  tais que  $\pi \circ X = \mathbb{1}_{\mathcal{M}}$ . Este espaço será identificado com o espaço das aplicações  $\mathbb{R}$ -lineares  $X : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$  tais que:

$$X(fg) = X(f)g + X(g)f.$$

- Observamos que a composição de dois campos em  $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$  não é, em geral, um campo. Porém o comutador é, novamente, um campo. Definimos portanto o produto:

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M}), \quad [X, Y] = X \circ Y - Y \circ X.$$

Com este produto, chamado de *produto de Lie ou colchete de Lie* dos campos,  $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$  adquire uma estrutura de *álgebra de Lie*, isto é, de espaço vetorial com produto que verifica as duas seguintes condições:

1.  $[X, Y] = -[Y, X]$ ,
2.  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$  (identidade de Jacobi).

- Se  $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}$  é uma curva diferenciável, um *campo ao longo de  $\gamma$*  é uma função diferenciável  $X : I \longrightarrow T\mathcal{M}$  tal que  $\pi \circ X = \gamma$ . Os campos ao longo de  $\gamma$  tem uma estrutura natural de espaço vetorial real e de módulo sobre a álgebra das funções  $\mathcal{C}^\infty$  de  $I$  em  $\mathbb{R}$ . Tal espaço será denotado por  $\mathfrak{X}(\gamma)$ . Generalizando, se  $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}$  é uma aplicação diferenciável, um *campo ao longo de  $f$*  é uma função diferenciável  $X : \mathcal{N} \longrightarrow T\mathcal{M}$  tal que  $\pi \circ X = f$ . Este espaço será denotado com  $\mathfrak{X}(f)$ .

- Se  $\psi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{M}$  é uma carta local,  $\frac{\partial}{\partial x_i}(p)$  será o vetor tangente e:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(p)(f) = \frac{\partial(f \circ \psi)}{\partial x_i}(\psi^{-1}(p)).$$

Tais notações são análogas para campos de vetores em  $\mathfrak{X}(\psi(\Omega))$ .

- Se  $\gamma : (a, b) \longrightarrow \mathcal{M}$  é uma curva diferenciável, o vetor tangente em  $t_0 \in (a, b)$  é definido como:

$$\dot{\gamma}(t_0)(f) := \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)_{t=t_0}.$$

- Se  $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ , o problema de valor inicial:

$$\dot{\gamma}_x(t) = X(\gamma_x(t)), \quad \gamma_x(0) = x \in \mathcal{M},$$

tem uma solução em um intervalo suficientemente pequeno, contendo  $0 \in \mathbb{R}$ , e é única se fixarmos o intervalo. Tal curva será chamada de *curva integral do campo  $X$* .

- A aplicação  $\Phi(x, t) := \gamma_x(t)$ , definida em um determinado aberto de  $\mathcal{M} \times \mathbb{R}$ , é chamada de *fluxo* de  $X$ . Se fixarmos  $x \in \mathcal{M}$ ,  $\Phi(x, t)$  é uma curva integral do campo, se ao invés disso, fixarmos  $t$ , fornece uma aplicação  $\phi_t$ , definida em um determinado aberto

de  $\mathcal{M}$  em  $\mathcal{M}$ , que é localmente inversível. De fato, se fixarmos  $x \in \mathcal{M}$ ,  $\phi_t \circ \phi_s$  e  $\phi_{t+s}$  são duas curvas integrais com a mesma condição inicial e portanto, pela unicidade das curvas integrais, coincidem. Em particular  $(\phi_t)^{-1} = \phi_{-t}$ .

- O fluxo é uma aplicação diferenciável definida em um determinado aberto de  $\mathcal{M} \times \mathbb{R}$ , pois as soluções de uma equação diferencial ordinária, com coeficientes diferenciáveis, dependem diferenciavelmente das condições iniciais.

- O campo  $X$  é dito *completo* se as suas curvas integrais são definidas para todo valor de  $t \in \mathbb{R}$  ou, equivalentemente, o fluxo é definido em todo  $\mathcal{M} \times \mathbb{R}$ . Por exemplo, se  $\mathcal{M}$  é compacta, todos os campos são completos. Neste caso, o fluxo pode ser visto como uma aplicação:

$$\tilde{\Phi} : \mathbb{R} \longrightarrow \text{Diff}(\mathcal{M}), \quad \tilde{\Phi}(t)(x) := \Phi(x, t),$$

onde  $\text{Diff}(\mathcal{M})$  é o grupo dos difeomorfismos de  $\mathcal{M}$  (onde a operação é a composição). Além disso  $\tilde{\Phi}$  é um homomorfismo do grupo aditivo  $\mathbb{R}$  em  $\text{Diff}(\mathcal{M})$ , pois  $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$ , como observado anteriormente.

Uma classe extremamente importante de variedades diferenciáveis é a classe dos grupos de Lie.

**Definição 1.1.1.** *Um grupo de Lie é um grupo  $G$  com uma estrutura diferenciável tal que para todo  $g, h \in G$ , temos que a aplicação:*

$$G \times G \longrightarrow G, \quad (g, h) \longrightarrow gh^{-1},$$

*é diferenciável.*

Desta definição é imediato que, dado  $g \in G$ , as translações à esquerda e à direita dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} L_g : G &\longrightarrow G, & L_g(h) &:= gh, \\ R_g : G &\longrightarrow G, & R_g(h) &:= hg, \end{aligned} \tag{1.1}$$

são aplicações diferenciáveis. E mais, são difeomorfismos, visto que  $L_g \circ L_{g^{-1}} = R_g \circ R_{g^{-1}} = \mathbb{1}_G$ .

**Definição 1.1.2.** *Um campo de vetores  $X$  em  $G$  é dito invariante à esquerda se*

$$(dL_h)_k(X(k)) = X(hk), \quad \forall k, h \in G.$$

*Analogamente podemos definir os campos de vetores invariantes à direita.*

Os campos invariantes à esquerda ficam inteiramente determinados pelos seus valores na identidade  $e \in G$  do grupo, pois para todo  $h \in G$  temos  $X(h) = (dL_h)_e(X(e))$ . Em particular o espaço dos campos invariantes à esquerda pode ser identificado com  $T_e G$ .

Um fato básico é o seguinte:

- Se  $X$  e  $Y$  são campos invariantes à esquerda, então  $[X, Y]$  é invariante à esquerda. O mesmo acontece com campos invariantes à direita.

Podemos então definir um produto:

$$[\cdot, \cdot] : T_e G \times T_e G \longrightarrow T_e G,$$

da seguinte maneira. Se  $X, Y \in T_e G$ , estendemos  $X, Y$  a campos invariantes à esquerda, tomamos o produto de Lie, e calculamos o mesmo em  $e \in G$ .

Com este produto,  $T_e G$  torna-se uma álgebra de Lie que será chamada de *álgebra de Lie de  $G$*  e será denotada com  $\mathfrak{g}$ .

Podemos também definir a representação adjunta na estrutura de álgebra de Lie como:

$$ad(X) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}, \quad ad(X)(Z) = [X, Z]. \quad (1.2)$$

Pode-se mostrar que os campos invariantes à esquerda são completos. Em particular as curvas integrais são definidas para todos os valores do parâmetro  $t \in \mathbb{R}$ . Isso permite definir a *aplicação exponencial*:

$$e : \mathfrak{g} \longrightarrow G, \quad e(X) := e^X := \gamma_X(1),$$

onde  $\gamma_X$  é a curva integral do campo invariante à esquerda, determinado por  $X \in \mathfrak{g}$ . O argumento usado anteriormente para o fluxo de um campo de vetores mostra que, fixado  $X \in \mathfrak{g}$ , a aplicação:

$$t \ni \mathbb{R} \longrightarrow e^{tX} \in G,$$

é um homomorfismo do grupo aditivo dos reais em  $G$ . A imagem de tal homomorfismo é chamada de *subgrupo a um parâmetro* determinado por  $X$ . Em particular, a aplicação exponencial leva as retas  $tX$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $X \in \mathfrak{g}$ , em subgrupos a um parâmetro.

**Observação 1.1.1.** *O caso mais interessante de grupos de Lie é o caso de subgrupos do grupo  $GL(n, \mathbb{R})$  das matrizes  $n \times n$  com entradas reais, e determinante não nulo.<sup>2</sup>*

*Neste caso temos que:*

- *A álgebra de Lie é uma álgebra de matrizes e o produto de Lie é o comutador de matrizes.*
- *A aplicação exponencial é a usual exponencial de matrizes:*

$$e^A = \sum_0^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

*Esta aplicação não deve ser confundida, em geral, com a aplicação exponencial Riemanniana, que introduziremos nas próximas seções.*

---

<sup>2</sup>De fato é possível mostrar que, pelo menos localmente, todo grupo de Lie é subgrupo de  $GL(n, \mathbb{R})$  (Teorema de Ado).

## 1.2 Métricas Riemannianas e conexão de Levi-Civita

**Definição 1.2.1.** *Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável  $\mathcal{M}$  é uma correspondência que associa a cada ponto  $p$  de  $\mathcal{M}$  um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  no espaço tangente  $T_p\mathcal{M}$ , que varia diferenciavelmente com  $p$ . Isto significa que se  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  são campos diferenciáveis, a função que associa ao ponto  $p \in \mathcal{M}$  o número real  $\langle X(p), Y(p) \rangle_p$ , é uma função diferenciável.*

*Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana é chamada de variedade Riemanniana.*

Seja  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$  uma subvariedade diferenciável e  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ . Se  $\gamma$  é uma curva integral de  $Y$  podemos considerar a derivada direcional:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} X(\gamma(t)).$$

Porém,  $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} X(\gamma(t))$  em geral não é tangente a  $\mathcal{M}$ . Logo, se quisermos derivar campos, devemos introduzir uma estrutura que permita fazê-lo.

**Definição 1.2.2.** *Uma conexão afim em uma variedade diferenciável  $\mathcal{M}$  é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M}), \quad (X, Y) \longrightarrow \nabla_X Y,$$

*que satisfaz as seguintes propriedades:*

1.  $\nabla_{fX+hY} Z = f\nabla_X Z + h\nabla_Y Z$ ,
2.  $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ ,
3.  $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$ ,

onde  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ ,  $f, h \in C^\infty(\mathcal{M})$ .

Além disso:

- A conexão é dita simétrica se, para todo  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ , tivermos

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]. \tag{1.3}$$

- Se  $\mathcal{M}$  for uma variedade Riemanniana, a conexão é dita compatível com a métrica se:

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}).$$

*Uma conexão simétrica e compatível com a métrica Riemanniana é chamada de conexão de Levi-Civita ou conexão Riemanniana.*

**Teorema 1.2.1** (Levi-Civita). *Dada uma variedade Riemanniana  $(\mathcal{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  existe uma única conexão de Levi-Civita associada à métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  dada pela seguinte fórmula, dita a fórmula de Kozul:*

$$2\langle \nabla_X Y, Z \rangle = X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}). \quad (1.4)$$

*Demonstração.* Seja  $\nabla$  uma conexão de Levi-Civita e  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ . Pela condição de compatibilidade temos as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \\ Y\langle Z, X \rangle &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle, \\ Z\langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle. \end{aligned}$$

Somando as primeiras duas, subtraindo a terceira e usando a simetria temos a fórmula de Kozul. Portanto, se a conexão de Levi-Civita existir, é única.

Por outro lado, definindo  $\nabla$  pela fórmula de Kozul, verifica-se facilmente que  $\nabla$  é uma conexão de Levi-Civita. Portanto a conexão de Levi-Civita existe e é única.  $\square$

É fácil ver que uma conexão (não necessariamente simétrica ou compatível com uma métrica Riemanniana) é um operador *local*, isto é, o valor de  $\nabla_Y X$  em  $p \in \mathcal{M}$ , depende somente do valor de  $X, Y$  em uma vizinhança de  $p$ . Na realidade  $\nabla_Y X$  em  $p \in \mathcal{M}$  depende somente dos valores de  $Y(p)$  e dos valores de  $X$  ao longo de uma curva  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{M}$ ,  $\gamma(0) = p$ , tal que  $\dot{\gamma}(0) = Y(p)$ . Isso permite “derivar” campos definidos em abertos de  $\mathcal{M}$ .

Em particular, se  $\psi : \Omega \rightarrow \mathcal{M}$  é uma carta local, podemos considerar os *campos coordenados*  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ . Definimos:

- $g_{ij}(x) := \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle_{\psi(x)}$ , a expressão local da métrica.
- $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} := \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$ , a expressão local da conexão.

As funções  $\Gamma_{ij}^k$  são chamadas de *símbolos de Christoffel* da conexão.

Observamos que os símbolos de Christoffel são definidos para qualquer conexão.

### 1.3 Transporte paralelo e geodésicas

Podemos definir, usando o conceito de conexão, a derivada covariante de um campo ao longo de uma curva diferenciável. Mais precisamente temos:

**Proposição 1.3.1.** *Dada uma curva diferenciável  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}$  em uma variedade com uma conexão  $\nabla$ , existe um único operador  $\mathbb{R}$ -linear:*

$$\frac{\nabla}{dt} : \mathfrak{X}(\gamma) \longrightarrow \mathfrak{X}(\gamma),$$

tal que:

1. Se  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável e  $\xi \in \mathfrak{X}(\gamma)$ , temos:

$$\frac{\nabla}{dt}(f\xi) = \frac{df}{dt}\xi + f\frac{\nabla}{dt}\xi.$$

2.  $\frac{d}{dt}\langle \xi, \eta \rangle = \langle \frac{\nabla}{dt}\xi, \eta \rangle + \langle \xi, \frac{\nabla}{dt}\eta \rangle$ ,  $\forall \xi, \eta \in \mathfrak{X}(\gamma)$ .

3. Se  $\xi$  é a restrição a  $\gamma$  de um campo de  $\mathcal{M}$ , então:

$$\frac{\nabla}{dt}\xi = \nabla_{\dot{\gamma}}\xi.$$

*Demonstração.* Observamos novamente que a primeira propriedade implica que, se um tal operador existe, é local, isto é, em um ponto  $\gamma(t)$ ,  $\frac{\nabla}{dt}\xi$  depende somente dos valores de  $\gamma$  e  $\xi$  em uma vizinhança de  $t$ . Podemos então supor a imagem de  $\gamma$  contida em uma vizinhança coordenada.

Suponha que tal operador exista. Escrevendo  $\xi(t) = \sum_i \xi_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma(t))$ , as propriedades implicam:

$$\frac{\nabla}{dt}\xi = \sum \frac{d\xi_i}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i} + \xi_i \nabla_{\dot{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (1.5)$$

Portanto o operador é, se existir, univocamente determinado.

Além disso, a fórmula acima define um operador que goza das propriedades que queremos. □

Usaremos também a notação  $\xi'(t)$  ou  $\dot{\xi}$  para indicar  $\frac{\nabla}{dt}\xi(t)$ .

**Definição 1.3.1.** *Seja  $\gamma : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}$  uma curva diferenciável.*

- *Um campo  $\xi \in \mathfrak{X}(\gamma)$  é paralelo ao longo de  $\gamma$  se  $\dot{\xi} := \frac{\nabla}{dt}\xi = 0$ .*
- *Uma curva  $\gamma : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}$  é uma geodésica se  $\dot{\gamma}$  é paralelo ao longo de  $\gamma$  ou, equivalentemente, se  $\ddot{\gamma} := \frac{\nabla}{dt}\dot{\gamma} = 0$ .*

As propriedades fundamentais relacionadas aos conceitos introduzidos são as seguintes:

- A equação  $\dot{\xi} = 0$  é uma equação diferencial *linear*<sup>3</sup> de primeira ordem. Portanto, dada uma curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$  e  $\xi_0 \in T_{\gamma(0)}\mathcal{M}$  existe um único campo paralelo  $\xi \in \mathfrak{X}(\gamma)$  tal que  $\xi(0) = \xi_0$ . Este fato permite definir uma aplicação:

$$P_\gamma : T_{\gamma(0)}\mathcal{M} \rightarrow T_{\gamma(1)}\mathcal{M}, \quad P_\gamma(\xi_0) = \xi(1),$$

chamada de *transporte paralelo ao longo de  $\gamma$* . Tal aplicação é linear, pois a equação o é, e, no caso em que a conexão é compatível com uma métrica Riemanniana, a aplicação é uma isometria linear.<sup>4</sup>

É conveniente ter uma expressão da equação do paralelismo em coordenadas locais. Seja  $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  a expressão da curva  $\gamma$  em um sistema de coordenadas locais e  $\xi(t) = \sum \xi_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}$  a expressão de  $\xi \in \mathfrak{X}(\gamma)$  na base dos campos coordenados. Então a equação pode ser escrita como:

$$\dot{\xi} = \sum_k [\dot{\xi}_k + \sum_{ij} x_i \xi_j \Gamma_{ij}^k] = 0. \quad (1.6)$$

- Se  $\gamma$  é uma geodésica,  $\dot{\gamma}$  é paralelo ao longo de  $\gamma$ . Se a conexão é compatível com uma métrica Riemanniana, a norma de  $\dot{\gamma}$  é constante. Portanto, neste caso, as geodésicas são parametrizadas proporcionalmente ao comprimento de arco, isto é, o vetor tangente tem norma constante.

- A equação  $\ddot{\gamma} := \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$  é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem (não linear) e portanto, dados  $p \in \mathcal{M}$  e  $\xi_0 \in T_p\mathcal{M}$ , existe  $\epsilon > 0$  e uma única geodésica  $\gamma_{\xi_0} : [0, \epsilon] \rightarrow \mathcal{M}$  com  $\gamma(0) = p$ ,  $\dot{\gamma}(0) = \xi_0$ .

Em uma vizinhança coordenada, com coordenadas locais  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , se  $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ , a equação  $\ddot{\gamma} = 0$  se escreve na forma:

$$\ddot{x}_k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \dot{x}_i \dot{x}_j = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.7)$$

Observamos explicitamente que em (1.6) as funções  $x_i(t)$  são dadas e portanto a equação do transporte paralelo é uma equação linear diferencial de primeira ordem. Em (1.7), as funções  $x_i(t)$  são incógnitas e portanto a equação é diferencial de segunda ordem e não linear.

De agora em diante vamos assumir, por simplicidade, que  $\mathcal{M}$  seja uma variedade Riemanniana e  $\nabla$  seja a conexão de Levi-Civita.

<sup>3</sup>isto é, se  $\xi, \eta$  são soluções e  $a, b \in \mathbb{R}$ , então  $a\xi + b\eta$  é também solução.

<sup>4</sup>Se use a propriedade:  $\frac{d}{dt} \langle \xi(t), \eta(t) \rangle = \langle \xi'(t), \eta(t) \rangle + \langle \xi(t), \eta'(t) \rangle$ .

Seja  $\gamma$  uma geodésica. De (1.7) segue que, fixado  $s \in \mathbb{R}$ , a curva  $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(st)$  é, onde definida, uma geodésica e  $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = s\dot{\gamma}(0)$ . Em particular, se  $\|\xi_0\|$  é suficientemente pequena,  $\epsilon > 1$  e  $\gamma(1)$  é definido. Esta observação permite definir uma aplicação:

$$\exp_p : V \longrightarrow \mathcal{M}, \quad \exp_p(\xi) = \gamma_\xi(1),$$

de uma vizinhança  $V$  de  $0 \in T_p\mathcal{M}$  in  $\mathcal{M}$ . Tal aplicação é chamada de *aplicação exponencial*. Usando esta aplicação podemos escrever a geodésica  $\gamma_{\xi_0}$  na forma:

$$\gamma_{\xi_0}(t) = \exp_p(t\xi).$$

A aplicação exponencial é diferenciável, pois as soluções de uma equação diferencial ordinária, com coeficientes diferenciáveis, dependem diferenciavelmente das condições iniciais.

Um cálculo simples mostra que, módulo a usual identificação  $T_0(T_p\mathcal{M}) = T_p\mathcal{M}$ , temos  $d\exp_p(0) = \mathbb{1}$  e portanto  $\exp_p$  é um difeomorfismo de uma vizinhança de  $0 \in T_p\mathcal{M}$  de raio  $\epsilon(p)$ , sobre sua imagem. O extremo superior de tais  $\epsilon(p)$  se chama o *raio de injetividade em  $p$*  e será denotado por  $r(p)$ . O extremo inferior de tais  $r(p)$  é chamado o *raio de injetividade de  $\mathcal{M}$*  e será denotado com  $r(\mathcal{M})$ .

Uma vizinhança de  $p$ , contida na imagem via  $\exp_p$  do disco aberto de raio  $r_p$ , chama-se de *vizinhança normal*.

## 1.4 Geodésicas de um ponto de vista variacional

A estrutura Riemanniana permite definir comprimento de curvas. Se  $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathcal{M}$  é uma curva diferenciável, o comprimento de  $\gamma$  é:

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

É fácil ver, pela fórmula de mudança de variáveis nas integrais, que o comprimento é invariante por reparametrizações, isto é, se  $\phi : [c, d] \longrightarrow [a, b]$  é um difeomorfismo,  $L(\gamma) = L(\gamma \circ \phi)$ . Além disso, o conceito de comprimento se estende de maneira óbvia ao caso de curvas diferenciáveis por partes.<sup>5</sup>

Dada uma variedade Riemanniana  $\mathcal{M}$  e pontos  $p, q \in \mathcal{M}$ , denotaremos por  $\Omega(\mathcal{M}, p, q)$  (ou simplesmente  $\Omega$ , quando claro do contexto) o conjunto das curvas  $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathcal{M}$ , diferenciáveis por partes, e tais que  $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$ . Podemos então definir:

$$d_{\mathcal{M}}(p, q) := \inf\{L(\gamma) : \gamma \in \Omega\}. \quad (1.8)$$

É claro que  $d_{\mathcal{M}}$  é uma função não-negativa, simétrica e verifica a propriedade triangular. Além disso, como consequência do Lema de Gauss (1.4.1), temos que  $d_{\mathcal{M}}(p, q) = 0$

---

<sup>5</sup>Uma curva  $\gamma$  é diferenciável por parte se é contínua e existe uma subdivisão  $t_0 = a < t_1 < \dots < t_k = b$  do intervalo de definição  $[a, b]$ , tal que  $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$  é diferenciável,  $\forall i = 0, \dots, k$ .

se, e somente se,  $p = q$ . Portanto  $d_{\mathcal{M}}$  é uma métrica e esta métrica induz a topologia de  $\mathcal{M}$ .

Classicamente, as geodésicas foram introduzidas como "curvas de menor comprimento entre dois pontos", isto é, como mínimos da função  $L : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Vamos agora explorar este ponto de vista.

É oportuno, por motivos que não explicaremos aqui, considerar, ao invés da função  $L$ , a função energia:

$$E : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad E(\gamma) := \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt.$$

Observamos que, ao contrário de  $L$ , a função  $E$  não é invariante por reparametrizações. Módulo este fato, as duas funções tem os mesmos mínimos. Mais precisamente:

**Proposição 1.4.1.** *Se  $\gamma \in \Omega$  é um mínimo de  $E$ , então é um mínimo de  $L$ . Se é um mínimo de  $L$  e é parametrizada proporcionalmente ao comprimento de arco (isto é,  $\|\dot{\gamma}\|$  é constante), então é um mínimo de  $E$ .*

*Demonstração.* Lembramos a desigualdade de Schwarz para funções de  $[0, 1]$  em  $\mathbb{R}$ :

$$\int_0^1 f(t)g(t)dt \leq \left( \int_0^1 f(t)^2 dt \right)^{1/2} \left( \int_0^1 g(t)^2 dt \right)^{1/2},$$

onde a igualdade vale se, e somente se,  $g$  é um múltiplo de  $f$ . Em particular, tomando  $g(t) = 1$  e  $f(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|$  temos:

$$[L(\gamma)]^2 \leq E(\gamma),$$

e vale a igualdade se, e somente se,  $\|\dot{\gamma}(t)\|$  é constante, isto é,  $\gamma$  é parametrizada proporcionalmente ao comprimento de arco. Suponhamos que  $\gamma$  seja um mínimo de  $E$  e  $\sigma \in \Omega$ . Seja  $\tilde{\sigma}$  uma reparametrização proporcional ao comprimento de arco de  $\sigma$ . Temos então:

$$L(\gamma)^2 \leq E(\gamma) \leq E(\tilde{\sigma}) = L(\tilde{\sigma})^2 = L(\sigma)^2.$$

Portanto  $\gamma$  é um mínimo de  $L$ .

Por outro lado, supondo que  $\gamma$  seja mínimo de  $L$  e seja parametrizada proporcionalmente ao comprimento de arco, temos:

$$E(\gamma) = L(\gamma)^2 \leq L(\sigma)^2 \leq E(\sigma).$$

Portanto  $\gamma$  é um mínimo de  $E$ . □

A pesquisa dos mínimos ou, mais geralmente, dos pontos críticos de uma função é, geralmente, feita olhando os zeros da diferencial da função. No nosso contexto isso pode ser feito definindo em  $\Omega$  uma *estrutura de variedade de dimensão infinita*. Não seguiremos aqui este caminho e teremos uma postura mais direta.

Dado um "ponto"  $\gamma \in \Omega$ , definiremos curvas em  $\Omega$  passando por  $\gamma$  ao tempo  $s = 0$ , calcularemos a função ao longo destas curvas e sua derivada no tempo  $s = 0$ .

**Definição 1.4.1.** Uma variação (própria) de  $\gamma$  em  $\Omega$  é uma função:

$$\Gamma : [0, 1] \times (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathcal{M},$$

tal que:

1.  $\Gamma(t, 0) = \gamma(t), \quad \forall t \in [0, 1].$
2.  $\Gamma(0, s) = p, \quad \Gamma(1, s) = q, \quad \forall s \in (-\epsilon, \epsilon).$
3.  $\Gamma$  é contínua e existe uma subdivisão  $t_0 = 0 < \dots < t_k = 1$  do intervalo  $[0, 1]$ , tal que  $\Gamma|_{[t_i, t_{i+1}]} \times (-\epsilon, \epsilon)$  é diferenciável.

O campo variacional associado a  $\Gamma$  é o campo ao longo de  $\gamma$  dado por:

$$W(t) = d\Gamma_{(t,0)} \left( \frac{d}{ds} \right),$$

por  $t \neq t_i$ . Este campo será denotado também como  $\frac{\partial \Gamma}{\partial s}$ .

**Observação 1.4.1.** Podemos considerar  $\Gamma$  como a função que associa a  $s \in (-\epsilon, \epsilon)$  a curva  $\gamma_s(t) = \Gamma(t, s)$  em  $\Omega$ . Neste sentido  $\Gamma$  é uma "curva de curvas" isto é, uma curva em  $\Omega$  (pela segunda condição), que passa por  $\gamma$  no tempo  $s = 0$  (pela primeira condição) e é "diferenciável por partes" (pela terceira condição), cujo "vetor tangente em  $s = 0$ " é o campo variacional.

No caso clássico de variedades diferenciáveis, um vetor tangente em um ponto é o vetor tangente a várias curvas que passam pelo ponto. No nosso caso temos a mesma situação. Se  $W \in \mathfrak{X}(\gamma)$  com  $W(0) = 0 = W(1)$  e valem certas hipóteses de regularidade, temos várias variações que tem  $W$  como campo variacional. Uma delas é dada por  $\Gamma(t, s) = \exp_{\gamma(t)} sW(t)$ .

Seja  $\gamma \in \Omega$  e  $\Gamma$  uma variação fixada. Consideramos a função:

$$E(s) = E(\gamma_s) = \int_0^1 \left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right\rangle dt.$$

Temos então:

$$E'(0) = 2 \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right\rangle |_{s=0} dt = 2 \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial \Gamma}{\partial s}, \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right\rangle |_{s=0} dt.$$

Usando a relação  $\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial s}, \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial \Gamma}{\partial s}, \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial s}, \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right\rangle$ , conseqüência da compatibilidade da conexão com a métrica, e calculando para  $s = 0$ :

$$E'(0) = 2 \sum_i \langle W(t), \dot{\gamma}(t) \rangle |_{t_i}^{t_{i+1}} - 2 \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle W(t), \ddot{\gamma}(t) \rangle dt. \quad (1.9)$$

A fórmula (1.9) é chamada de *fórmula da primeira variação da energia*.

**Teorema 1.4.1.** *Se, para qualquer variação  $\Gamma$  de  $\gamma$ , temos  $E'(0) = 0$ , então  $\gamma$  é uma geodésica.*

*Em particular se  $\gamma$  é um mínimo de  $E$ , então  $\gamma$  é uma geodésica.*

*Demonstração.* Primeiramente provaremos que  $\gamma$  é uma geodésica por partes, isto é,  $\ddot{\gamma}(t) = 0$ ,  $t \neq t_i$ . Suponhamos que, para algum  $t \neq t_i$  temos  $\ddot{\gamma}(t) \neq 0$ . Então  $\ddot{\gamma}(s) \neq 0$ ,  $s \in (t - \epsilon, t + \epsilon)$  para algum  $\epsilon > 0$ , e podemos assumir  $t_i \notin (t - \epsilon, t + \epsilon)$ . Seja  $\phi(t)$  uma função diferenciável não negativa que vale 1 em  $(t - \epsilon/2, t + \epsilon/2)$  e zero fora de  $(t - \epsilon, t + \epsilon)$ . Seja  $W(t) = \phi(t)\ddot{\gamma}(t)$ . Claramente  $W$  é um campo diferenciável em  $[0, 1]$  que se anula nos extremos e portanto é o campo variacional de uma variação  $\Gamma$  de  $\gamma$  (veja (1.4.1)). Para esta variação temos, pela fórmula (1.9):

$$0 = E'(0) = \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} \phi(t) \|\ddot{\gamma}(t)\|^2 dt > 0,$$

ou seja, uma contradição.

Vamos agora mostrar que  $\dot{\gamma}$  é contínuo. Sejam  $\dot{\gamma}(t^-), \dot{\gamma}(t^+)$  os limite esquerdo e direito de  $\dot{\gamma}(s)$ ,  $s \rightarrow t$ , e  $\delta_t = \dot{\gamma}(t^-) - \dot{\gamma}(t^+)$ . Escolhemos um campo  $W$  tal que  $W(t_i) = \delta_{t_i}$ . Por uma variação que tem  $W$  como vetor variacional temos, pela fórmula (1.9) que:

$$0 = E'(0) = \sum_i \|\delta_{t_i}\|^2.$$

Portanto  $\gamma$  é uma geodésica por partes com vetor tangente contínuo. Pela unicidade da geodésica com dado vetor tangente inicial segue que  $\gamma$  é uma geodésica.  $\square$

O Teorema (1.4.1) nos diz, entre outras coisas, que podemos restringir nossas considerações às curvas diferenciáveis. É útil ter também uma descrição da fórmula da primeira variação em coordenadas locais.

Seja  $\phi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}$  uma carta local. Se  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , consideramos sua expressão nos campos coordenados:

$$X = \sum_1^n \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

O vetor  $X$  é então determinado pelas  $2n$  coordenadas  $\{x_i, \dot{x}_j\}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ . Usando a notação compacta  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ , definimos a função:

$$\mathcal{E}(x, \dot{x}) := \sum g_{ij}(x) \dot{x}_i \dot{x}_j.$$

Se  $\gamma(t) = x(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , é uma curva diferenciável em  $\Omega$  e  $\Gamma(t, s) = x(t, s)$  é uma variação própria diferenciável de  $\gamma$ , a função  $E(s)$  correspondente é dada por:

$$E(s) = \int_0^1 \mathcal{E}(x(t, s), \dot{x}(t, s)) dt.$$

A derivada de  $E(s)$ , calculada em  $s = 0$ , após cálculos similares aos de (1.4.1), é dada por:

$$\frac{d}{dt}E|_{s=0} = \int_0^1 \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{x}} \right) \frac{\partial x}{\partial s} dt,$$

onde tudo é calculado em  $s = 0$ .

Raciocinando de novo como anteriormente, temos que:

**Teorema 1.4.2.**  $\gamma(t)$  é uma geodésica se, e somente se:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t)) = 0.$$

O Teorema (1.4.1) nos diz, na realidade, que geodésicas são pontos críticos de  $E$ , não necessariamente mínimos. O resultado a seguir, conhecido como Lemma de Gauss, nos diz que se  $\gamma$  é uma geodésica e  $\gamma(0), \gamma(t_0)$  são suficientemente próximos, então  $\gamma|_{[0, t_0]}$  é um mínimo de  $E$ .

Seja  $p \in \mathcal{M}$  e  $\epsilon < r(p)$ , onde  $r(p)$  é o raio de injetividade em  $p$ . Seja  $\tilde{U} = \{X \in T_p \mathcal{M} : \|X\| < \epsilon\}$  e  $U = \exp_p(\tilde{U})$ . Então  $\exp_p : \tilde{U} \rightarrow U$  é um difeomorfismo. Seja  $\omega : [a, b] \rightarrow U \setminus \{p\}$  uma curva diferenciável por partes. Então a curva pode ser escrita, de modo único, como:

$$\omega(t) = \exp_p(r(t)V(t)), \quad r(t) = \|\exp^{-1} \omega(t)\|, \quad V(t) = \frac{\exp^{-1} \omega(t)}{\|\exp^{-1} \omega(t)\|}.$$

**Lema 1.4.1.** (Lema de Gauss)  $L(\omega) \leq |r(b) - r(a)|$  e a igualdade vale se, e somente se,  $r(t)$  é monótona e  $V(t)$  é constante.

Uma demonstração do Lema de Gauss pode ser encontrada em [C].

**Definição 1.4.2.** Uma geodésica entre  $p, q$  que é um mínimo de  $E$ , e portanto de  $L$ , é dita uma geodésica minimal.

Seguindo as mesmas notações temos:

**Corolário 1.4.1.** Se  $q \in U$ , a geodésica  $\exp_p(tV(q)), 0 \leq t \leq r(q)$ , é uma geodésica minimal entre  $p$  e  $q$ .

O corolário anterior garante a existência de uma geodésica minimal unindo "pontos próximos". A questão que aparece naturalmente é: quando dois pontos, não necessariamente próximos, podem ser unidos por uma geodésica minimal?

Esta questão conduz ao conceito de completude.

**Definição 1.4.3.** Uma variedade Riemanniana é dita completa se a métrica definida em (2.4) é completa.

**Teorema 1.4.3.** Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade Riemanniana. As condições abaixo são equivalentes:

1.  $\mathcal{M}$  é completa.
2. Existe um ponto  $p \in \mathcal{M}$  tal que  $\exp_p$  é definida em todo  $T_p\mathcal{M}$  (isto é, as geodésicas que saem de  $p$  são definidas em todo  $\mathbb{R}$ ).
3.  $\forall p \in \mathcal{M}$ ,  $\exp_p$  é definida em todo  $T_p\mathcal{M}$  (isto é, todas as geodésicas são definidas em todo  $\mathbb{R}$ ).
4. Um conjunto  $K \subseteq \mathcal{M}$  é compacto se e somente se é fechado e limitado.

Além disso, se  $\mathcal{M}$  é completa, todo par de pontos pode ser unidos por uma geodésica minimal.

O Teorema (1.4.3) é conhecido como o Teorema de Hopf e Rinow. A parte não trivial da demonstração é a afirmação que dois pontos quaisquer de uma variedade completa podem ser unidos por uma geodésica minimal. Para outras propriedades das variedades completas e para uma demonstração de (1.4.3), pode-se usar a referência [C].

## 1.5 Curvatura

A noção de curvatura para superfícies em  $\mathbb{R}^3$  foi introduzida por Gauss, em seu trabalho publicado em 1827 ([Ga]). Ele definiu a curvatura como uma forma de medir o quanto uma superfície  $\mathcal{M}$  se afasta, em cada ponto  $p \in \mathcal{M}$ , do seu plano tangente em  $p$ ,  $T_p\mathcal{M}$ . Mais tarde a definição de curvatura foi generalizada para variedades Riemannianas. Este conceito mede, intuitivamente, o quanto a métrica difere da métrica euclidiana  $g_{ij} = \delta_{ij}$ .

**Definição 1.5.1.** A curvatura  $R$  de uma variedade Riemanniana  $\mathcal{M}$  é a correspondência que associa a cada par  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  a aplicação

$$R(X, Y) : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M}), \quad R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z,$$

onde  $Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  e  $\nabla$  é a conexão de Levi-Civita.

Seja  $\psi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}$  um sistema de coordenadas locais. Então, podemos escrever:

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_l R_{ijkl} \frac{\partial}{\partial x_l}.$$

As funções  $R_{ijkl}$  são as *componentes da curvatura*  $R$  na parametrização  $(U, \psi)$ .

Claramente  $R$  é um operador local e  $\mathbb{R}$ -linear em cada uma das três variáveis, pois a conexão o é. Cabe-nos destacar o seguinte resultado:

**Proposição 1.5.1.**  $R$  é  $C^\infty(\mathcal{M})$  linear em cada variável, isto é,  $R$  é um tensor. Em particular,  $R(X, Y)Z(p)$  depende somente dos valores de  $X, Y, Z$  em  $p \in \mathcal{M}$ .

*Demonstração.* Seja  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ . Substituindo  $fX$  em  $X$  na definição, temos que os termos na soma à direita são substituídos por:

1.  $Y(f)\nabla_X Z + f\nabla_Y \nabla_X Z$ ,
2.  $-f\nabla_X \nabla_Y Z$ ,
3.  $-Y(f)\nabla_X Z + f\nabla_{[X,Y]} Z$ .

Somando estes termos teremos  $R(fX, Y)Z = fR(X, Y)Z$ .

Cálculos similares mostram a  $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ -linearidade nas outras variáveis. □

Além disso, o tensor curvatura tem as propriedades de simetria listadas na proposição abaixo.

**Proposição 1.5.2.** *A curvatura  $R$  de uma variedade Riemanniana possui as seguintes propriedades:*

1.  $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$  (*primeira identidade de Bianchi*),
2.  $R(X, Y) = -R(Y, X)$ ,
3.  $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle R(X, Y)W, Z \rangle$ ,
4.  $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(Z, W)X, Y \rangle$ .

*Demonstração.* (Idéia) A primeira afirmação segue expandindo o termo a esquerda, segundo a definição, e usando a simetria da conexão e a identidade de Jacobi. Em particular vale para qualquer conexão simétrica.

A segunda segue diretamente da definição.

A terceira é equivalente a mostrar que  $\langle R(X, Y)Z, Z \rangle = 0$ ,  $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ . De novo expandindo a expressão e usando as propriedades da conexão de Levi-Civita, chegamos à demonstração.

Para a quarta, escrevemos a identidade de Bianchi para as quatro permutações cíclica dos argumentos  $X, Y, Z, W$ . Somando as quatro chega-se ao resultado. □

A partir do tensor curvatura, podemos definir várias medidas de curvatura. Uma das mais importante é a *curvatura seccional*.

Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade Riemanniana,  $p \in \mathcal{M}$  e  $X, Y \in T_p\mathcal{M}$  vetores linearmente independentes. Definimos:

$$K(X, Y) = \frac{\langle R(X, Y)X, Y \rangle}{\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2}. \quad (1.10)$$

Seja  $\sigma \subseteq T_p\mathcal{M}$  o subespaço 2-dimensional gerado por  $X$  e  $Y$ . Não é difícil ver que se  $\{X', Y'\}$  é também base de  $\sigma$ ,  $K(X, Y) = K(X', Y')$ . Portanto  $K(X, Y)$  depende somente de  $\sigma$  e é chamada de *curvatura seccional de  $\sigma$* .

Se  $n = 2$  a curvatura seccional coincide com a curvatura Gaussiana.

A importância da curvatura seccional vem de vários fatos; destacaremos, aqui, dois deles:

- A curvatura seccional determina o tensor de curvatura, isto é, se duas métricas Riemannianas em  $\mathcal{M}$  tem as mesmas curvaturas seccionais, elas tem o mesmo tensor curvatura.
- A curvatura seccional aparece naturalmente, e de maneira decisiva, na *fórmula da segunda variação da energia*, isto é, na derivada segunda do funcional da energia. Logo, é decisiva em decidir se uma geodésica é um mínimo (local) da energia, e, portanto do comprimento.

Veja ([C]) para mais detalhes. Também podemos dizer que espaços de curvatura seccional constante são aquele que têm mais "simetrias", isto é, grupo de isometrias de dimensão maior (veja a próxima seção). Tais espaços são classificados, em oportunas hipóteses:

**Teorema 1.5.1.** *Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa e de curvatura seccional constante  $c$ . Então:*

1. *Se  $c > 0$ ,  $\mathcal{M}$  é isométrica à esfera.*
2. *Se  $c = 0$ ,  $\mathcal{M}$  é isométrica ao espaço Euclideo.*
3. *Se  $c < 0$ ,  $\mathcal{M}$  é isométrica ao espaço hiperbólico.*

**Observação 1.5.1.** *Para o conceito de isometria, veja a próxima seção.*

## 1.6 Isometrias e campos de Killing

O conceito natural de equivalência entre variedades Riemannianas é o conceito de *isometria*.

**Definição 1.6.1.** *Dadas duas variedades Riemannianas,  $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ , diremos que um difeomorfismo  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  é uma isometria se:*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \quad (1.11)$$

para todo  $p \in \mathcal{M}$ ,  $u, v \in T_p\mathcal{M}$ .

As vezes é útil considerar também o conceito de *isometria local*.

**Definição 1.6.2.** *Uma função  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  é uma isometria local se, para todo  $p \in \mathcal{M}$ , existe uma vizinhança aberta  $U_p$  de  $p$  tal que  $f|_{U_p}$  é uma isometria sobre um aberto  $f(U_p) \subseteq \mathcal{N}$ .*

Uma isometria (local)  $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$  preserva todas as propriedades geométricas (locais) da variedade Riemanniana, em particular:

- $df(\nabla_Y X) = \nabla_{df(Y)} df(X)$ .
- $df(R(X, Y)Z) = R(df(X), df(Y))df(Z)$ .
- $K(\sigma) = K(df(\sigma))$ .
- Se  $\gamma$  é uma geodésica de  $\mathcal{M}$ , então  $f \circ \gamma$  é uma geodésica de  $\mathcal{N}$ .

Se  $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ , denotaremos com  $\text{Iso}(\mathcal{M})$  o conjunto das isometrias de  $\mathcal{M}$ .  $\text{Iso}(\mathcal{M})$  é claramente um subgrupo do grupo dos difeomorfismos de  $\mathcal{M}$  e pode-se demonstrar que é um grupo de Lie. Indicaremos com  $\text{Iso}_0(\mathcal{M})$  a componente conexa de  $\text{Iso}(\mathcal{M})$  que contém a identidade  $\mathbb{1}_{\mathcal{M}}$ .

Vamos agora dar uma interpretação geométrica do grupo  $\text{Iso}_0(\mathcal{M})$ . Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade Riemanniana conexa de dimensão  $n$ . Consideramos a variedade dos referenciais ortonormais de  $\mathcal{M}$ :

$$O(\mathcal{M}) := \{(p, e_1, \dots, e_n) : p \in \mathcal{M}, \{e_1, \dots, e_n\}, \text{base ortonormal de } T_p\mathcal{M}\}.$$

Caso  $\mathcal{M}$  seja uma subvariedade de  $\mathbb{R}^n$ , fato não restritivo pelo Teorema de Nash,  $O(\mathcal{M})$  é uma subvariedade de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  e herda naturalmente uma estrutura de variedade Riemanniana.

Fixamos agora um elemento  $(p, e_1, \dots, e_n) \in O(\mathcal{M})$  e consideramos a aplicação:

$$\Phi : \text{Iso}_0(\mathcal{M}) \longrightarrow O(\mathcal{M}), \quad \Phi(f) = (f(p), df_p(e_1), \dots, df_p(e_n)).$$

**Proposição 1.6.1.**  $\Phi$  é injetiva.

*Demonstração.* Temos que mostrar que se  $f$  e  $g$  são isometrias tais que  $f(p) = g(p)$  e  $df_p = dg_p$ , então  $f = g$ . Por isso é suficiente mostrar que se  $h$  é uma isometria tal que  $h(p) = p, dh_p = \mathbb{1}_{T_p\mathcal{M}}$ , então  $h = \mathbb{1}_{\mathcal{M}}$ <sup>6</sup>. Consideremos então:

$$U = \{q \in \mathcal{M} : h(q) = q, dh_q = \mathbb{1}_{T_q\mathcal{M}}\}.$$

Pela continuidade de  $h$  e  $dh$ ,  $U$  é um conjunto fechado em  $\mathcal{M}$  e não vazio pois  $p \in U$ . Vamos mostrar que  $U$  é aberto. Seja  $q \in U$  e  $V \subseteq \mathcal{M}$  uma vizinhança aberta de  $q$  tal que por qualquer  $q' \in V$  existe uma única geodésica  $\gamma : [0, 1] \longrightarrow V$  unindo  $q$  e  $q'$  (por exemplo uma vizinhança normal de  $q$ ). Consideramos  $h(q')$  e  $h \circ \gamma$ . Esta última é uma geodésica entre  $h(q) = q$  e  $h(q')$  e, pela nossas hipóteses, o vetor tangente inicial é  $dh_q(\dot{\gamma}(0)) = \dot{\gamma}(0)$ . Portanto  $\gamma = h \circ \gamma$  e, em particular,  $h(q') = q'$ . Segue que  $h|_V = \mathbb{1}_V$  e, portanto,  $V \subseteq U$ . Segue então que  $U$  é aberto e, sendo  $\mathcal{M}$  conexa,  $U = \mathcal{M}$ .  $\square$

---

<sup>6</sup>Considerando  $h = f \circ g^{-1}$ .

Com um pouco mais de trabalho é possível mostrar que  $\Phi$  é uma imersão e, em particular,  $\text{Iso}_0(\mathcal{M})$  é uma subvariedade de  $O(\mathcal{M})$ .

Observamos que a dimensão de  $O(\mathcal{M})$  é  $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ . Portanto a dimensão de  $\text{Iso}_0(\mathcal{M})$  é menor ou igual a  $\frac{n(n+1)}{2}$ . Além disso, é simples verificar que se a dimensão de  $\text{Iso}_0(\mathcal{M})$  é igual a  $\frac{n(n+1)}{2}$ ,  $\mathcal{M}$  tem curvatura seccional constante.

Um fato interessante, que não demonstraremos neste trabalho, é o seguinte Teorema de Fubini (veja [?]):

**Teorema 1.6.1.** *Não existe variedade Riemanniana  $n$ -dimensional,  $n \geq 2$ , com grupo de isometrias de dimensão  $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ .*

Uma maneira de achar isometrias de uma variedade riemanniana é através do conceito de *campo de Killing*. Dado um campo  $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ , consideremos o fluxo associado, em particular as funções  $\phi_t$  definidas na seção 1.1.

**Definição 1.6.3.**  *$X$  é um campo de Killing se  $\phi_t$  é, onde definida, uma isometria.*

Antes de caracterizar os campos de Killing, vamos recordar o conceito de *derivada de Lie*, que usaremos a seguir e também mais adiante. Seja  $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ . A derivada de Lie na direção  $X$ ,  $L_X$ , é o operador definido a seguir:

- Se  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ ,  $L_X f := Xf$ .
- Se  $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ ,  $L_X Y := [X, Y]$ .
- Se  $\omega \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^*$  (o dual de  $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ ),  $L_X(\omega)(Y) := X(\omega(Y)) - \omega([X, Y])$ .

Podemos estender a terceira definição ao caso de  $p$ -formas, isto é, aplicações  $p$ -multilineares de  $\mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \cdots \times \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ ,  $p$ -vezes, em  $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ , exigindo que a derivada de Lie seja uma derivação em relação ao produto exterior:

- Se  $\theta$  é uma  $p$ -forma e  $X_1, \dots, X_p \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ ,

$$\begin{aligned} (L_X \theta)(X_1, \dots, X_p) &= L_X(\theta(X_1, \dots, X_p)) - \sum_{i=1}^p \theta(X_1, \dots, L_X X_i, \dots, X_p) \\ &= X(\theta(X_1, \dots, X_p)) - \sum_{i=1}^p \theta(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_p). \end{aligned}$$

Estamos mais interessados no caso de métrica Riemanniana  $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ , onde a definição anterior, para  $p = 2$ , e as propriedades da conexão Riemanniana, nos dá:

$$L_X g(Y, Z) = \langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X \rangle. \quad (1.12)$$

**Observação 1.6.1.** *Em termos do fluxo  $\phi_t$  do campo  $X$ , a derivada de Lie de uma  $p$ -forma  $\theta$  é dada por:*

$$L_X\theta = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}((\phi_t)^*\theta - \theta). \quad (1.13)$$

Vamos agora caracterizar os campos de Killing:

**Proposição 1.6.2.**  *$X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  é um campo de Killing se, e somente se:*

$$\langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle = 0.$$

*Demonstração.* Se  $X$  é um campo de Killing, a métrica é constante ao longo do fluxo de  $X$ , isto é,  $\phi_t^*g = g$ . Portanto, por (1.13) e (1.12), temos:

$$0 = L_X g(Y, Z) = \langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X \rangle.$$

Por outro lado, se vale a equação acima,  $g$  é constante ao longo do fluxo de  $X$  e portanto  $\phi_t$  é uma isometria (onde definida).  $\square$

Consideramos  $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$  como álgebra de Lie com o produto dado pelo comutador. Um cálculo simples mostra que:

**Proposição 1.6.3.** *Os campos de Killing são uma sub-álgebra de  $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ .*

Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade Riemanniana e  $\xi$  um campo de Killing *completo*. Então  $\xi$  gera um *subgrupo a um parâmetro* do grupo de Lie  $\text{Iso}(\mathcal{M})$ , isto é, um homomorfismo diferenciável do grupo aditivo dos reais em  $\text{Iso}(\mathcal{M})$ ,  $\phi_\xi(t) := \phi_t$ , onde  $\phi_t$  é o fluxo de  $\xi$ . Em particular, podemos identificar a álgebra de Lie de  $\text{Iso}(\mathcal{M})$  com a sub-álgebra de Lie de  $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$  dos campos de Killing *completos*.

## 1.7 Imersões isométricas: Conceitos básicos

**Definição 1.7.1.** *Sejam  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{N}$  variedades Riemannianas. Uma aplicação diferenciável  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  é uma imersão isométrica se*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)},$$

para todo  $p \in \mathcal{M}$ ,  $u, v \in T_p\mathcal{M}$ .

Se  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  é uma imersão isométrica então,  $f$  é uma imersão no sentido da teoria das variedades diferenciáveis, isto é,  $df_q : T_q\mathcal{M} \rightarrow T_{f(q)}\mathcal{N}$  é 1-1. Segue da teoria geral das variedades diferenciáveis que, dado  $p \in \mathcal{M}$ , existe uma vizinhança  $U \ni p$  tal que  $f(U)$  é uma subvariedade de  $\mathcal{N}$  e  $f|_U$  é um difeomorfismo sobre  $f(U)$ .

Para todas as considerações de *caracter local*, identificaremos  $U \subseteq \mathcal{M}$  com a subvariedade  $f(U) \subseteq \mathcal{N}$ .

Se a dimensão de  $\mathcal{M}$  é  $n$ , a dimensão de  $\mathcal{N}$  é  $n + k$ ,  $k \geq 0$ . O inteiro  $k$  é chamado de *codimensão de  $\mathcal{M}$  em  $\mathcal{N}$* .

Um ponto de vista essencialmente equivalente, e muito útil, é o que segue.

Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade diferenciável,  $\mathcal{N}$  uma variedade Riemanniana e  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  uma imersão, isto é,  $df_q : T_q\mathcal{M} \rightarrow T_{f(q)}\mathcal{N}$  é injetora. Definimos um produto escalar em  $T_p\mathcal{M}$  colocando

$$\langle X, Y \rangle_p = \langle df_p(X), df_p(Y) \rangle_{f(p)}, \quad p \in \mathcal{M}, \quad X, Y \in T_p\mathcal{M}.$$

Este produto escalar define uma métrica Riemanniana em  $\mathcal{M}$  tal que  $f$  é uma imersão isométrica. A métrica assim definida em  $\mathcal{M}$  é chamada de *métrica induzida por  $f$* .

Para cada ponto  $p \in \mathcal{M}$ , considerando a identificação natural  $T_p\mathcal{M} \cong df_p(T_p\mathcal{M})$ , temos uma decomposição ortogonal:

$$T_{f(p)}\mathcal{N} = T_p\mathcal{M} \oplus \nu_p\mathcal{M}, \quad \nu_p\mathcal{M} := (T_p\mathcal{M})^\perp \quad (\text{em } T_{f(p)}\mathcal{N}). \quad (1.14)$$

Se  $X \in T_{f(p)}\mathcal{N}$ , indicaremos com  $X^\top, X^\perp$  as projeções ortogonais de  $X$  em  $T_p\mathcal{M}$  e  $\nu_p\mathcal{M}$  (respectivamente).

Lembramos que um campo de vetores diferenciável ao longo de  $f$  é uma aplicação diferenciável

$$X : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{N}, \quad X(p) \in T_{f(p)}\mathcal{N}.$$

Quando não der confusão, em particular para todas as considerações locais, indicaremos com  $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$  o espaço dos campos ao longo de  $f$ , isto é, as aplicações diferenciáveis  $X : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{N}$  tais que  $X(p) \in df_p(T_p\mathcal{M}), \forall p \in \mathcal{M}$ , e com  $\mathfrak{X}(\mathcal{M})^\perp$  os campos para os quais  $X(p) \in \nu_p\mathcal{M}, \forall p \in \mathcal{M}$ .

O espaço  $\nu_p\mathcal{M}$  será chamado de *espaço normal a  $\mathcal{M}$  em  $p$*  e o espaço  $\nu\mathcal{M} := \bigcup_{p \in \mathcal{M}} \nu_p\mathcal{M}$  de *fibrado normal de  $\mathcal{M}$* .

Denotamos por  $\nabla, \bar{\nabla}$  as conexões Riemannianas de  $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ , respectivamente. Sejam  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}), \xi \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^\perp$ , podemos estender, localmente, estes campos a campos em  $\mathcal{N}$ . As derivadas covariantes são operadores locais, e portanto podemos derivar um em relação ao outro. Decompondo de acordo com equação (1.14), temos:

$$\begin{cases} \bar{\nabla}_X Y = (\bar{\nabla}_X Y)^\top + (\bar{\nabla}_X Y)^\perp, \\ \bar{\nabla}_X \xi = (\bar{\nabla}_X \xi)^\top + (\bar{\nabla}_X \xi)^\perp. \end{cases}$$

É fácil ver que:

- A aplicação  $(X, Y) \rightarrow (\bar{\nabla}_X Y)^\top$  verifica as propriedades da conexão de Levi-Civita de  $\mathcal{M}$ , portanto  $(\bar{\nabla}_X Y)^\top = \nabla_X Y$ .
- A aplicação  $(X, Y) \rightarrow (\bar{\nabla}_X Y)^\perp$  é  $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ -bilinear e simétrica. Portanto é um tensor que denotaremos com  $B(X, Y)$  e chamaremos de *segunda forma fundamental*.

- A aplicação  $(X, \xi) \longrightarrow (\overline{\nabla}_X \xi)^\top$  é  $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ -bilinear. O operador  $A_\xi X := -(\overline{\nabla}_X \xi)^\top$  será chamado de *operador de Weingarten, ou operador de forma, na direção  $\xi$* .
- A aplicação  $(X, \xi) \longrightarrow (\overline{\nabla}_X \xi)^\perp$  verifica as propriedades de uma conexão em  $\nu\mathcal{M}$  que é compatível com a métrica. O operador  $\nabla_X^\perp \xi := (\overline{\nabla}_X \xi)^\perp$  será chamado de *conexão normal*.

Resumindo, temos as chamadas fórmulas de Gauss e Weingarten:

$$\begin{cases} \overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y), \\ \overline{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla_X^\perp \xi. \end{cases} \quad (1.15)$$

Os operadores  $B$  e  $A$  são ligados pela relação abaixo (que também justifica a escolha do sinal menos na definição de operador de Weingarten).

**Proposição 1.7.1.**  $\langle B(X, Y), \xi \rangle = \langle A_\xi X, Y \rangle$ .

*Demonstração.*  $\langle B(X, Y), \xi \rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y, \xi \rangle = -\langle Y, \overline{\nabla}_X \xi \rangle = \langle A_\xi X, Y \rangle$ . □

Observamos que, pela Proposição 1.7.1, a simetria de  $B$  implica na simetria de  $A_\xi$ . Em particular  $A_\xi$  é diagonalizável.

**Definição 1.7.2.** *Os autovalores de  $A_\xi$  são chamados de curvaturas principais na direção  $\xi$ . Os autovetores são chamados de direções principais na direção  $\xi$ .*

Usando a conexão normal  $\nabla^\perp$ , podemos definir a *curvatura normal*:

$$R^\perp(X, Y)\xi = \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi - \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi + \nabla_{[X, Y]}^\perp \xi,$$

onde  $X, Y \in T\mathcal{M}$  e  $\xi \in T\mathcal{M}^\perp$ .

Dada uma imersão isométrica  $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ , indicamos por  $R$  e  $\overline{R}$  os tensores curvaturas de  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{N}$  respectivamente. Estes tensores, e o tensor curvatura normal, são relacionados por três equações fundamentais, as *equações de Gauss, Codazzi e Ricci*. Antes de enunciar estas relações, vamos definir a derivada covariante da segunda forma fundamental<sup>7</sup> como sendo:

$$(\nabla_X B)(Y, Z) := \nabla_X^\perp(B(Y, Z)) - B(\nabla_X Y, Z) - B(Y, \nabla_X Z).$$

**Teorema 1.7.1.** *Temos as seguintes relações:*

- *Equação de Gauss:*

$$\langle \overline{R}(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle B(X, W), B(Y, Z) \rangle - \langle B(X, Z), B(Y, W) \rangle, \quad (1.16)$$

---

<sup>7</sup>Em geral, uma conexão em um fibrado vetorial induz uma derivada covariante, na direção de um vetor tangente à variedade, de campos tensoriais do fibrado.

• *Equação de Codazzi:*

$$(\bar{\mathbf{R}}(X, Y)Z)^\perp = (\nabla_X^\perp B)(Y, Z) - (\nabla_Y^\perp B)(X, Z), \quad (1.17)$$

• *Equação de Ricci:*

$$\langle \bar{\mathbf{R}}(X, Y)\xi, \eta \rangle = \langle \mathbf{R}^\perp(X, Y)\xi, \eta \rangle - \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y \rangle, \quad (1.18)$$

onde  $X, Y, Z, W \in T\mathcal{M}$ ,  $\xi, \eta \in T\mathcal{M}^\perp$  e  $[A_\xi, A_\eta] := A_\xi \circ A_\eta - A_\eta \circ A_\xi$  é o comutador usual de operadores.

*Demonstração.*

$$\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z = \bar{\nabla}_X (\nabla_Y Z + B(Y, Z)) = \nabla_X \nabla_Y Z + B(X, \nabla_Y Z) - A_{B(Y, Z)}X + \nabla_X^\perp B(Y, Z).$$

Analogamente:

$$\bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z = \nabla_Y \nabla_X Z + B(Y, \nabla_X Z) - A_{B(X, Z)}Y + \nabla_Y^\perp B(X, Z),$$

e

$$\bar{\nabla}_{[X, Y]} Z = \nabla_{[X, Y]} Z + B([X, Y], Z).$$

Somando com os sinais oportunos, e fazendo o produto escalar com um vetor  $W$  tangente a  $\mathcal{M}$ , temos a equação de Gauss. Fazendo o produto escalar com um vetor  $\xi$ , normal a  $\mathcal{M}$ , temos a equação de Codazzi.

Um cálculo similar prova a equação de Ricci.  $\square$

**Observação 1.7.1.** *Caso  $\mathcal{N}$  seja uma variedade de curvatura seccional constante, também conhecidas como formas espaciais, as equações de Codazzi e Ricci se simplificam bastante pois os termos contendo o tensor de curvatura de  $\mathcal{N}$  se anulam.*

No caso de hipersuperfícies, isto é, no caso de codimensão um, cabe observar que, se  $\xi$  é um campo unitário normal, temos que  $\forall X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  resulta:

$$0 = X \langle \xi, \xi \rangle = 2 \langle \bar{\nabla}_X \xi, \xi \rangle.$$

Em particular  $\bar{\nabla}_X \xi$  é tangente a  $\mathcal{M}$  e  $\nabla_X^\perp \xi = 0$ .

Neste caso a equação de Ricci é a identidade trivial e a equação de Codazzi pode ser escrita como:

$$(\mathbf{R}'(X, Y)\xi)^T = \nabla_Y(A_\xi X) - \nabla_X(A_\xi Y) + A_\xi[X, Y]. \quad (1.19)$$

No nosso trabalho estaremos interessados essencialmente no caso de superfícies em variedades tridimensionais. Neste caso vamos introduzir algumas notações clássicas.

Seja  $\psi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{N}$  uma parametrização local e seja  $\{\psi_x, \psi_y\}$  a base de  $T_p\mathcal{M}$  dos campos coordenados.

O produto escalar, classicamente chamado de *primeira forma fundamental*, pode ser escrito, na base dos campos coordenados  $\{\psi_x, \psi_y\}$ , da seguinte forma:

$$E := \langle \psi_x, \psi_x \rangle, \quad F := \langle \psi_x, \psi_y \rangle, \quad G := \langle \psi_y, \psi_y \rangle. \quad (1.20)$$

Logo temos a métrica dada, nas mesmas coordenadas locais, pela matriz:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

ou, equivalentemente pela expressão:

$$g = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2.$$

Tomando um vetor normal unitário:

$$\xi = \frac{\psi_x \wedge \psi_y}{\|\psi_x \wedge \psi_y\|}.$$

Os coeficientes da segunda forma fundamental são definidos como:

$$l = -\langle \nabla_{\psi_x} \xi, \psi_x \rangle, \quad m = -\langle \nabla_{\psi_x} \xi, \psi_y \rangle, \quad n = -\langle \nabla_{\psi_y} \xi, \psi_y \rangle. \quad (1.21)$$

E, por fim, a expressão da segunda forma fundamental, na base  $\{\psi_x, \psi_y\}$  é dada por:

$$B = l(dx)^2 + 2m(dx)(dy) + n(dy)^2.$$

# Capítulo 2

## Geometria do grupo de Heisenberg $\mathcal{H}_3$

Neste capítulo estudaremos a geometria Riemanniana básica do grupo de Heisenberg uma das variedades Riemannianas 3-dimensionais mais interessante, depois dos espaços de curvatura constante. De fato, de um ponto de vista algébrico é 2-nilpotente (ou quase-abeliano), a situação mais perto de ser abeliano, isto é, isomorfo a  $\mathbb{R}^3$ , e de um ponto de vista geométrico o grupo das isometrias tem dimensão 4, o que, tendo em vista o Teorema de Fubini (1.6.1) é a dimensão máxima possível para o grupo de isometrias de uma variedade Riemanniana tridimensional de curvatura seccional não constante.

Após a primeira seção, na qual discutiremos generalidades sobre a geometria Riemanniana dos grupos de Lie, vamos estudar o caso particular do grupo de Heisenberg e determinar a conexão, as geodésicas, a curvatura e o grupo das isometrias. A seguir, apresentaremos as propriedades básicas das superfícies neste grupo demonstrando, em particular, a não existência de superfícies umbílicas. Neste capítulo usaremos novamente a notação  $G$  para denotar um grupo de Lie.

### 2.1 A geometria Riemanniana básica dos grupos de Lie

**Definição 2.1.1.** *Uma métrica Riemanniana em  $G$  é dita invariante à esquerda (respectivamente invariante à direita), se as translações à esquerda (respectivamente à direita) são isometrias.*

Uma métrica invariante à esquerda em  $G$  é univocamente determinada pelo seus valores na sua álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . De fato, se  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é uma tal métrica, temos:

$$\langle X, Y \rangle_g := \langle dL_g^{-1}X, dL_g^{-1}Y \rangle_e. \quad (2.1)$$

Reciprocamente, se  $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$  é um produto escalar em  $\mathfrak{g}$ , podemos estende-lo a uma métrica Riemanniana invariante à esquerda, usando a equação (2.1).

**Observação 2.1.1.** *Observamos explicitamente que para uma métrica invariante à esquerda, o grupo das isometria contém um subgrupo isomorfo a  $G$ , pois as translações à esquerda são isometrias.*

*Também, temos que as geodésicas passando por  $p \in G$  são imagem, por  $L_p$ , das geodésicas passando por  $e \in G$  e a curvatura  $R(X, Y)Z$  em um ponto  $p \in G$  é a curvatura dos campos invariantes à esquerda determinados por  $X, Y, Z$ , (sendo tudo calculado em  $e \in G$ ). Portanto a geometria de  $G$  é completamente determinada pela geometria em  $e \in G$ .*

Um caso particularmente interessante é o caso das métricas bi-invariantes, isto é, métricas para as quais translações à direita e à esquerda são isometrias. Neste caso as estruturas algébricas e Riemannianas são intimamente ligadas:

**Teorema 2.1.1.** *Seja  $G$  um grupo de Lie com uma métrica bi-invariante e  $X, Y, Z$  campos invariantes à esquerda. Então:*

1. *As geodésicas que passam pelo elemento neutro  $e \in G$  são os subgrupos a um parâmetro. Em particular, a aplicação exponencial grupal coincide com a Riemanniana.*
2.  $\langle [X, Y], Z \rangle = \langle X, [Y, Z] \rangle$ ,
3.  $2\nabla_X Y = [X, Y]$ ,
4.  $4R(X, Y)Z = [[X, Y], Z]$ . *Em particular, a curvatura seccional é sempre não negativa.*

Não demonstraremos este teorema. No caso que estudaremos, o grupo de Heisenberg, a métrica invariante à esquerda que consideraremos, não é bi-invariante. De fato, como veremos, as geodésicas não são todas subgrupos a um parâmetro e a curvatura seccional muda de sinal.

## 2.2 O grupo de Heisenberg $\mathcal{H}_3$

Consideramos o espaço vetorial  $M(n, \mathbb{R})$ , das matrizes  $n \times n$  a entradas reais. Identificaremos este espaço, de maneira óbvia, com  $\mathbb{R}^{n^2}$ . O subconjunto  $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$  é um aberto de  $\mathbb{R}^{n^2}$ , pois  $\det : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua e, portanto, tem uma estrutura natural de variedade diferenciável e é um grupo em relação ao produto de matrizes. Este produto tem uma expressão polinomial nas entradas das matrizes e, então, é uma função diferenciável. Também a aplicação inversão tem uma expressão polinomial nas entradas de uma matriz em  $GL(n, \mathbb{R})$  e é, também, diferenciável. Portanto  $GL(n, \mathbb{R})$  é um grupo de Lie.

**Definição 2.2.1.** O grupo de Heisenberg  $\mathcal{H}_3$  é o subgrupo de  $GL(3, \mathbb{R})$  dado por:

$$\mathcal{H}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

A identificação natural de  $\mathcal{H}_3$  com  $\mathbb{R}^3$  fornece uma estrutura diferenciável natural em  $\mathcal{H}_3$ . Esta estrutura e o produto de matrizes, definem uma estrutura de grupo de Lie em  $\mathcal{H}_3$ , tal que ele se torna um subgrupo de Lie de  $GL(3, \mathbb{R})$ .

Seja  $\gamma(t)$  a curva diferenciável em  $\mathcal{H}_3$ :

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 & x(t) & z(t) \\ 0 & 1 & y(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Então o vetor tangente em  $t = 0$  é dado por:

$$\dot{\gamma}(0) = \begin{pmatrix} 0 & \dot{x}(0) & \dot{z}(0) \\ 0 & 0 & \dot{y}(0) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a álgebra de Lie  $\mathfrak{h}_3$  de  $\mathcal{H}_3$  é a álgebra das matrizes do tipo:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R},$$

e o produto de Lie é o comutador de matrizes.

É simples ver que  $\mathcal{H}_3$  é um grupo 2-nilpotente (ou quase abeliano), isto é, o produto de Lie de três elementos de  $\mathfrak{h}_3$  se anula.

A aplicação exponencial é dada por:

$$e^A = \mathbb{1} + A + \frac{1}{2}A^2,$$

pois  $A^n = 0, n \geq 3$ . Identificando o elemento  $(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3$  com a matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}_3,$$

temos que a aplicação exponencial é dada por:

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{H}_3, \quad \varphi(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & x & z + \frac{1}{2}xy \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A operação grupal de  $\mathcal{H}_3$  induz, via  $\varphi$ , o seguinte produto em  $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \varphi^{-1} \left( \varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \varphi \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' + \frac{1}{2}(xy' - x'y) \end{pmatrix},$$

ou seja, dados  $\nu = (x, y, z)^t$  e  $\omega = (x', y', z')^t$  em  $\mathbb{R}^3$ , temos:

$$\nu * \omega = \nu + \omega + \frac{1}{2}ad(\nu)\omega,$$

onde

$$ad(\nu) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$$

é a matriz da representação adjunta definida em (1.2).

Em resumo, o grupo de Heisenberg  $\mathcal{H}_3$  é isomorfo, como grupo de Lie, a  $\mathbb{R}^3$  munido do produto

$$(x, y, z)^t * (x', y', z')^t = \left( x + x', y + y', z + z' + \frac{xy'}{2} - \frac{x'y}{2} \right)^t.$$

Também, sendo a parametrização  $\varphi$  a aplicação exponencial (grupal), os subgrupos a um parâmetro são as retas que passam pela origem.

Vamos agora construir uma métrica Riemanniana invariante à esquerda em  $\mathcal{H}_3$ . Para isso, como vimos na seção anterior, usamos os diferenciais das translações à esquerda de  $\mathcal{H}_3$ , que são os difeomorfismos dados por:

$$(dL_p)_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}y & \frac{1}{2}x & 1 \end{pmatrix}, \quad p = (x, y, z) \in \mathcal{H}_3.$$

Com respeito à escolha da parametrização global  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{H}_3$ , uma base do espaço tangente  $T_e\mathcal{H}_3$  à identidade  $e = (0, 0, 0)$  do grupo é dada por:

$$X_1 = \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)_e, \quad X_2 = \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)_e, \quad X_3 = \left( \frac{\partial}{\partial z} \right)_e.$$

Estendendo os vetores  $X_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , a campos invariantes à esquerda pela fórmula:

$$E_i(p) = (dL_p)_e X_i, \quad p \in \mathcal{H}_3, \quad i \in \{1, 2, 3\},$$

temos:

$$\begin{cases} E_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}y \frac{\partial}{\partial z} \\ E_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}x \frac{\partial}{\partial z} \\ E_3 = \frac{\partial}{\partial z}, \end{cases}$$

ou também:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = E_1 + \frac{1}{2}yE_3 \\ \frac{\partial}{\partial y} = E_2 - \frac{1}{2}xE_3 \\ \frac{\partial}{\partial z} = E_3. \end{cases} \quad (2.2)$$

É fácil verificar que

$$[E_1, E_2] = E_3 \quad \text{e} \quad [E_1, E_3] = 0 = [E_2, E_3]. \quad (2.3)$$

Em particular, o centro<sup>1</sup> de  $\mathfrak{h}_3$  é a reta  $tE_3, t \in \mathbb{R}$ .

Podemos introduzir uma métrica Riemanniana invariante à esquerda requerendo que os campos invariantes  $\{E_i\}$  sejam, em cada ponto  $p \in \mathcal{H}_3$ , uma base ortonormal de  $T_p\mathcal{H}_3$ .

Em termos dos campos coordenados, a métrica é dada pela matriz:

$$g(p) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{4}y^2 & -\frac{1}{4}xy & \frac{1}{2}y \\ -\frac{1}{4}xy & 1 + \frac{1}{4}x^2 & -\frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}y & -\frac{1}{2}x & 1 \end{pmatrix}, \quad p = (x, y, z)^t \in \mathcal{H}_3.$$

Logo, a métrica invariante à esquerda é:

$$\begin{aligned} g &= \left(1 + \frac{1}{4}y^2\right)dx^2 + \left(1 + \frac{1}{4}x^2\right)dy^2 + dz^2 - \frac{1}{2}xy \, dx dy + y \, dx dz - x \, dy dz \\ &= dx^2 + dy^2 + \left(\frac{y}{2}dx - \frac{x}{2}dy + dz\right)^2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Observe que  $\det(g) = 1$  e portanto as formas volume de  $\mathcal{H}_3$  e de  $\mathbb{R}^3$  (com a métrica  $g_{ij} = \delta_{ij}$ ) coincidem.

No decorrer deste trabalho consideraremos sempre  $\mathcal{H}_3$  com a métrica que acabamos de definir.

## 2.3 A conexão de Levi-Civita em $\mathcal{H}_3$

Vamos agora determinar a conexão de Levi-Civita associada à métrica  $g$ . Observamos que se  $X, Y, Z$  são campos invariantes à esquerda, a fórmula (1.4) pode ser escrita como:

$$2\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \langle [Y, X], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle. \quad (2.5)$$

---

<sup>1</sup>O centro de uma álgebra de Lie é o subespaço dos vetores que tem produto de Lie nulo com qualquer outro vetor da álgebra.

De fato, os produtos escalares dos campos são constante, pois a métrica é invariante à esquerda e, portanto, suas derivadas se anulam.

Temos então:

$$\nabla_{E_1} E_2 = \langle \nabla_{E_1} E_2, E_1 \rangle E_1 + \langle \nabla_{E_1} E_2, E_2 \rangle E_2 + \langle \nabla_{E_1} E_2, E_3 \rangle E_3,$$

portanto, usando as equações (1.4) e (2.3), teremos:

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_{E_1} E_2, E_1 \rangle &= \langle [E_1, E_2], E_1 \rangle - \langle [E_2, E_1], E_1 \rangle + \langle [E_1, E_1], E_2 \rangle \\ &= \langle [E_1, E_2], E_1 \rangle - \langle -[E_1, E_2], E_1 \rangle \\ &= 2\langle E_3, E_1 \rangle = 0, \\ 2\langle \nabla_{E_1} E_2, E_2 \rangle &= \langle [E_1, E_2], E_2 \rangle - \langle [E_2, E_2], E_1 \rangle + \langle [E_2, E_1], E_2 \rangle \\ &= \langle [E_1, E_2], E_2 \rangle + \langle -[E_1, E_2], E_2 \rangle = 0, \\ 2\langle \nabla_{E_1} E_2, E_3 \rangle &= \langle [E_1, E_2], E_3 \rangle - \langle [E_2, E_3], E_1 \rangle + \langle [E_3, E_1], E_2 \rangle = 1, \end{aligned}$$

e

$$\nabla_{E_1} E_2 = \frac{1}{2} E_3.$$

Além disso, usando a equação (1.1), segue que

$$\nabla_{E_2} E_1 = -\frac{1}{2} E_3.$$

Analogamente, chegamos a:

$$\begin{aligned} \nabla_{E_1} E_3 &= -\frac{1}{2} E_2 = \nabla_{E_3} E_1, \\ \nabla_{E_2} E_3 &= \frac{1}{2} E_1 = \nabla_{E_3} E_2, \\ \nabla_{E_i} E_i &= 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

## 2.4 Geodésicas do espaço $\mathcal{H}_3$

Dada a métrica Riemanniana invariante à esquerda  $g$ , definida em (2.4), e a conexão de Levi-Civita a ela associada iremos, nesta seção, caracterizar as geodésicas do espaço  $(\mathcal{H}_3, g)$ .

Dada uma curva  $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathcal{H}_3$ ,  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , tal que  $\gamma(0) = (0, 0, 0)$  e  $\dot{\gamma}(0) = (\dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{z}(0)) = (a, b, c)$ , queremos saber quando ela é uma geodésica. Usando o Teorema (1.4.2), temos:

$$\dot{\gamma} = \dot{x}E_1 + \dot{y}E_2 + \left[ \dot{z} + \frac{1}{2}(\dot{x}y - \dot{y}x) \right] E_3,$$

e chamando de  $\omega = \dot{z} + \frac{1}{2}(\dot{x}y - \dot{y}x)$ , escrevemos:

$$\mathcal{E} = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \omega^2.$$

Assim,

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{z}} = -\frac{d}{dt} 2\omega = 0 \implies \dot{\omega} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{x}} &= -\omega \dot{y} - \frac{d}{dt} (2\dot{x} + \omega y) = -\omega \dot{y} - 2\ddot{x} - \dot{\omega} y - \dot{y} \omega \\ &= 2\ddot{x} + 2\dot{y} \omega = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{y}} &= -\omega \dot{x} - \frac{d}{dt} (2\dot{y} + x\omega) = \omega \dot{x} - 2\ddot{y} + \dot{x} \omega - x \dot{\omega} \\ &= 2\ddot{y} - 2\dot{x} \omega = 0. \end{aligned}$$

Da primeira equação resulta  $\omega = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , e também:

$$\begin{cases} \dot{z} + \frac{1}{2}(\dot{x}y - \dot{y}x) = c \\ \ddot{x} + c\dot{y} = 0 \\ \ddot{y} - c\dot{x} = 0. \end{cases}$$

Então,

$$\begin{cases} \dot{x} + cy = a \\ \dot{y} - cx = b, \end{cases}$$

onde  $a, b \in \mathbb{R}$ . Se  $c = 0$  temos que

$$\begin{cases} x(t) = at \\ y(t) = bt, \end{cases}$$

ou seja, a geodésica  $\gamma(t)$  é uma reta do plano  $z = 0$ , que é um subgrupo a um parâmetro.

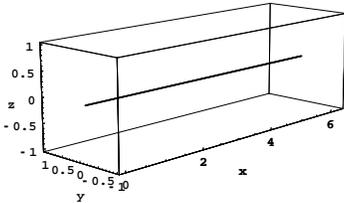


Figura 2.1: Geodésica do espaço  $\mathcal{H}_3$  para  $a = 1$  e  $b = c = 0$

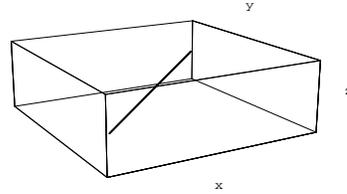


Figura 2.2: Geodésica do espaço  $\mathcal{H}_3$  para  $a = b = 1$  e  $c = 0$ .

Supondo  $c \neq 0$  e integrando o sistema:

$$\begin{cases} \ddot{x} + c^2 x + cb = 0 \\ \ddot{y} - c^2 y - ca = 0, \end{cases}$$

temos a seguinte parametrização da geodésica  $\gamma(t)$  (que *não* é um subgrupo a um parâmetro):

$$\begin{cases} x(t) = \frac{b}{c} \cos(ct) + \frac{a}{c} \sin(ct) - \frac{b}{c} \\ y(t) = \frac{b}{c} \sin(ct) - \frac{a}{c} \cos(ct) + \frac{a}{c} \\ z(t) = \left[ c - \frac{a^2 + b^2}{2c} \right] t + \left( \frac{a^2 + b^2}{2c^2} \right) \sin(ct). \end{cases}$$

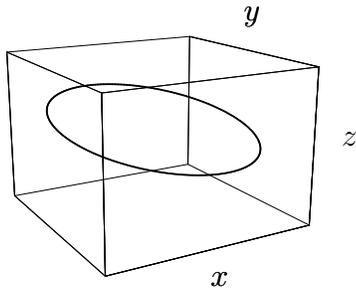


Figura 2.3: Geodésica do espaço  $\mathcal{H}_3$  para  $a = b = c = 1$ .

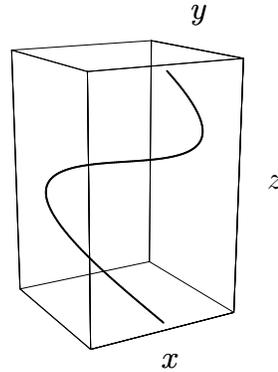


Figura 2.4: Geodésica do espaço  $\mathcal{H}_3$  para  $a = c = 1$  e  $b = 0$ .

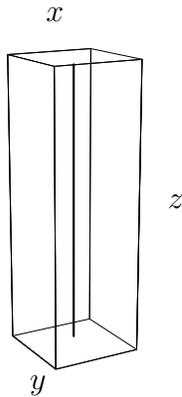


Figura 2.5: Geodésica do espaço  $\mathcal{H}_3$  para  $a = b = 0$  e  $c = 1$ .

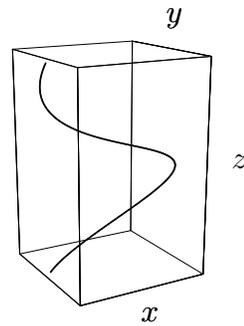


Figura 2.6: Geodésica do espaço  $\mathcal{H}_3$  para  $a = 0$  e  $b = c = 1$ .

## 2.5 Calculando a curvatura de $\mathcal{H}_3$

Nesta seção vamos calcular a curvatura do grupo de Heisenberg. Definindo:

$$R_{ijkl} = \langle R(E_i, E_j)E_k, E_l \rangle,$$

(que não são os  $R_{ijkl}$  definidos anteriormente!), temos:

$$\begin{aligned} R(E_1, E_2)E_1 &= \nabla_{E_1}\nabla_{E_2}E_1 - \nabla_{E_2}\nabla_{E_1}E_1 + \nabla_{E_3}E_1 \\ &= -\frac{1}{2}\nabla_{E_1}E_3 - \nabla_{E_3}E_1 \\ &= \frac{3}{4}E_2, \end{aligned} \tag{2.6}$$

e, portanto:

$$\begin{aligned} R_{1211} &= 0, \\ R_{1212} &= \frac{3}{4}, \\ R_{1213} &= 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Um cálculo similar mostra que as outras  $R_{ijkl}$  não nulas são:

$$\begin{aligned} R_{1212} &= R_{2121} = \frac{3}{4}, \\ R_{1221} &= R_{2112} = -\frac{3}{4}, \\ R_{1313} &= R_{2323} = R_{3131} = R_{3232} = -\frac{1}{4}, \\ R_{1331} &= R_{2332} = R_{3113} = R_{3223} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

A partir de (1.10) temos, para as curvaturas seccionais:

$$K(E_1, E_2) = \frac{3}{4}, \quad K(E_1, E_3) = -\frac{1}{4} = K(E_2, E_3),$$

de onde deduzimos que  $\mathcal{H}_3$  é um espaço de curvatura seccional não constante.

## 2.6 O grupo de isometrias

Nosso objetivo nesta seção é determinar a forma explícita da componente conexa de  $\text{Iso}(\mathcal{H}_3, g)$  que contém a identidade  $\mathbb{1}_{\mathcal{H}_3}$ ,  $\text{Iso}_0(\mathcal{H}_3, g)$ .

A proposição a seguir caracteriza este grupo (veja também ([B])):

**Proposição 2.6.1.** *Os elementos  $\phi \in \text{Iso}_0(\mathcal{H}_3, g)$  são dados por*

$$\phi(p) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta & 0 \\ \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ -\frac{b}{2} & \frac{a}{2} & 1 \end{pmatrix} (p) + \begin{pmatrix} C \\ D \\ \frac{ef}{2} + g \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

onde  $p \in \mathcal{H}_3$ ,  $C = a \cos \theta - b \sin \theta$  e  $D = a \sin \theta + b \cos \theta$ , com  $a, b, c, \theta \in \mathbb{R}$ .

*Demonstração.* Seja

$$X = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(x, y, z) \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i = E_i(e),$$

um campo de Killing genérico na variedade  $(\mathcal{H}_3, g)$ . Temos que

$$\begin{aligned} L_X g(\varepsilon_j, \varepsilon_k) &= X(g(\varepsilon_j, \varepsilon_k)) - g([X, \varepsilon_j], \varepsilon_k) - g([X, \varepsilon_k], \varepsilon_j) \\ &= X(g_{jk}) + \sum_{i=1}^3 g_{ik} \partial_j \alpha_i + \sum_{i=1}^3 g_{ji} \partial_k \alpha_i = 0, \quad j, k = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde  $g_{jk} = g(\varepsilon_j, \varepsilon_k)$ . Portanto, integrando esta equação, obtemos a seguinte solução da equação de Killing:

$$X = (ay + b) \frac{\partial}{\partial x} + (d - ax) \frac{\partial}{\partial y} + \left( c + \frac{by - dx}{2} \right) \frac{\partial}{\partial z}, \quad \text{onde } a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

que pode ser escrita como:

$$X = a \left( y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) + b \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) + c \frac{\partial}{\partial z} + d \left( \frac{\partial}{\partial y} - \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (2.10)$$

Da equação (2.10) chegamos a uma base para o espaço dos campos de Killing dada por:

$$\begin{aligned} X_1 &= y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_2 &= \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \\ X_3 &= \frac{\partial}{\partial y} - \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \\ X_4 &= \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Calculemos agora o fluxo de cada campo da base, integrando cada uma das equações de (2.11).

Seja  $\phi_1(t, p) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t))$ , o fluxo do campo  $X_1 = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$ . Para integrar este campo basta resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \phi_1(t, p) = X_1(\phi(t, p)) \\ \phi_1(0, p) = p = (x, y, z). \end{cases} \quad (2.12)$$

Assim,  $(x'_1(t), y'_1(t), z'_1(t)) = (y_1(t), -x_1(t), 0)$ , de onde:

$$\begin{cases} x'_1(t) = y_1(t) & \implies & x''_1(t) = y'_1(t) = -x_1(t) \\ y'_1(t) = -x_1(t) \\ z'_1(t) = 0, \end{cases}$$

ou ainda:

$$\begin{cases} x_1''(t) + x_1(t) = 0 \\ y_1''(t) + y_1(t) = 0 \\ z_1(t) = c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A \cos t + B \sin t, \\ y_1(t) &= A' \cos t + B' \sin t, \\ x_1'(t) &= -A \sin t + B \cos t, \\ y_1'(t) &= -A' \sin t + B' \cos t, \\ x_1''(t) &= -A \cos t - B \sin t, \\ y_1''(t) &= -A' \cos t - B' \sin t. \end{aligned}$$

Usando a condição inicial  $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (x, y, z)$ , temos:

$$(A, A', c) = (x, y, z),$$

de onde:

$$\begin{cases} x_1(t) = x \cos t + B \sin t \\ y_1(t) = y \cos t + B' \sin t, \end{cases}$$

mas também  $x_1'(t) = y_1'(t)$  e daí:

$$-x \sin t + B \cos t = -y \cos t - B' \sin t$$

logo,  $B = y$  e  $B' = -x$ . O que nos dá:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x \cos t + y \sin t, \\ y_1(t) &= y \cos t - x \sin t, \\ z_1(t) &= z. \end{aligned}$$

Mais especificamente:

$$\phi_1(t, p) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Com cálculos análogos podemos encontrar os fluxos  $\phi_2, \phi_3, \phi_4$ , respectivamente dos campos  $X_2, X_3, X_4$ , que são dados por:

$$\phi_2(t, p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{t}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\phi_3(t, p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{t}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\phi_4(t, p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

Para encontrar a forma geral das isometrias de  $\mathcal{H}_3$  basta então fixar  $t$  em cada  $\phi_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , e compor as isometrias resultantes, visto que cada  $\phi_i$  é fluxo de um campo de Killing e, portanto, fixando  $t$ , temos uma isometria local. Assim desta composição obtemos a equação (2.8), o que conclui a nossa demonstração.  $\square$

Observamos que o grupo  $\text{Iso}(\mathcal{H}_3, g)$  tem dimensão quatro. Pelo Teorema de Fubini (1.6.1), esta é a máxima dimensão possível para o grupo de isometrias de uma variedade Riemanniana tridimensional com curvatura seccional não constante (como no caso de  $\mathcal{H}_3$ ).

## 2.7 Superfícies em $\mathcal{H}_3$ : Fatos básicos.

Sejam  $G$  um grupo de Lie de dimensão  $(n + 1)$  com uma métrica  $g$  invariante à esquerda,  $\mathcal{M}$  uma hipersuperfície orientável de  $G$  e  $\xi$  um campo unitário normal a  $\mathcal{M}$ . Para simplificar as notações denotaremos com  $\nabla$  a conexão de Levi-Civita do espaço ambiente.

Em analogia ao caso de hipersuperfícies de  $\mathbb{R}^n$ , definimos a *aplicação normal de Gauss*:

$$\gamma : \mathcal{M} \longrightarrow S^n = \{v \in T_e G = \mathfrak{g} : \|v\| = 1\},$$

transladando, no sentido do grupo, o vetor  $\xi(p) \in T_p G$ ,  $p \in \mathcal{M}$ , para a álgebra de Lie. Mais precisamente:

$$\gamma(p) = (dL_{p^{-1}})_p(\xi(p)), \quad p \in \mathcal{M}.$$

Note que

$$\begin{aligned} d\gamma_p(T_p \mathcal{M}) &\subseteq T_{\gamma(p)} S^n \\ &= \{\gamma(p)\}^\perp = (dL_{p^{-1}})_p(\xi(p)^\perp) \\ &= (dL_{p^{-1}})_p(T_p \mathcal{M}). \end{aligned}$$

Logo  $(dL_p)_e(d\gamma_p(T_p \mathcal{M})) \subseteq T_p \mathcal{M}$  e, portanto,  $(dL_{(\cdot)})_e \circ d\gamma$  é um tensor em  $T\mathcal{M}$ . O teorema a seguir, devido a Ripoll, (ver [R]), fornece uma relação entre a aplicação normal de Gauss e a geometria extrínseca da hipersuperfície  $\mathcal{M}$ .

**Teorema 2.7.1.** *Seja  $\mathcal{M}$  uma hipersuperfície do grupo de Lie  $G$ , então*

$$(dL_p)_e \circ d\gamma_p(v) = -(A_\xi(v) + \alpha_{\bar{\xi}}(v)), \quad v \in T_p \mathcal{M},$$

onde  $A_\xi$  é o operador de Weingarten e  $\alpha_{\bar{\xi}}(v) = \nabla_v \bar{\xi}$ , sendo  $\bar{\xi}$  um campo invariante à esquerda tal que  $\xi(p) = \bar{\xi}(p)$ .

*Demonstração.* Sejam  $\xi = \sum_{i=1}^3 n_i E_i$  um campo unitário normal a  $\mathcal{M}$ , onde  $\{E_1, E_2, E_3\}$  é uma base ortonormal de campos invariantes à esquerda e  $v \in T_p \mathcal{M}$ , então

$$\gamma(p) = (dL_{p^{-1}})_p(\xi(p)) = \sum_{i=1}^3 n_i(p) E_i(e),$$

logo

$$d\gamma_p(v) = \sum_{i=1}^3 v(n_i)(p) E_i(e)$$

e

$$(dL_p)_e \circ (d\gamma)_p(v) = \sum_{i=1}^3 v(n_i)(p) E_i(p).$$

Temos também

$$\begin{aligned} \nabla_v \xi|_p &= \sum_{i=1}^3 \left( v(n_i)(p) E_i(p) + n_i(p) \nabla_v E_i|_p \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 v(n_i)(p) E_i(p) + \nabla_v \sum_{i=1}^3 n_i(p) E_i|_p \\ &= (dL_p)_e \circ d\gamma_p(v) + \nabla_v \bar{\xi}|_p. \end{aligned}$$

Portanto

$$-A_\xi(v) = (dL_p)_e \circ d\gamma_p(v) + \alpha_{\bar{\xi}}(v)$$

e o teorema fica demonstrado.  $\square$

Vamos agora considerar o caso de superfícies do grupo de Heisenberg, de tipo gráfico, isto é:

$$\begin{cases} G = \mathcal{H}_3, \\ g = dx^2 + dy^2 + \left( \frac{y}{2} dx - \frac{x}{2} dy + dz \right)^2, \\ \mathcal{M}^2 \text{ é o gráfico } X(x, y) = (x, y, f(x, y)), \end{cases} \quad (2.13)$$

onde  $f$  é uma função diferenciável definida para  $x, y \in U \subset \mathbb{R}^2 = \{z = 0\}$ .

Veamos agora, como determinar as matrizes que representam  $(dL_p)_e \circ d\gamma_p$ ,  $A_\xi$  e  $\alpha_{\bar{\xi}}$ . Uma base do espaço tangente  $T_p \mathcal{M}$  é

$$\begin{cases} X_x = E_1 + f_1 E_3, \\ X_y = E_2 + f_2 E_3, \end{cases} \quad (2.14)$$

e o campo normal unitário é dado por

$$\xi = -\frac{1}{w}(f_1 E_1 + f_2 E_2 - E_3),$$

onde

$$\begin{cases} f_1 = f_x + \frac{y}{2} \\ f_2 = f_y - \frac{x}{2} \\ w = \sqrt{1 + f_1^2 + f_2^2}. \end{cases} \quad (2.15)$$

Assim, com esta parametrização, temos a seguinte representação:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{\gamma} & S^2 \\ X \uparrow & & \downarrow Y \\ U & \xrightarrow{Y \circ \gamma \circ X} & V \end{array}$$

onde  $Y$  é a projeção normal sobre o plano  $xy$ . Já vimos que:

$$\gamma(p) = (dL_{p^{-1}})_p(\xi(p)), \quad p \in T_p \mathcal{M},$$

logo, usando a parametrização  $X$  temos:

$$\gamma(p) = \frac{1}{w} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}y & \frac{1}{2}x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -f_1 \\ -f_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{w} \begin{pmatrix} -f_1 \\ -f_2 \\ \frac{y}{2}f_1 - \frac{x}{2}f_2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Agora, fazendo a projeção, temos a representação da aplicação de Gauss dada por:

$$Y \circ \gamma \circ X(x, y) = - \left( \frac{f_1}{w}, \frac{f_2}{w} \right) = - \left( \frac{f_x + \frac{y}{2}}{w}, \frac{f_y - \frac{x}{2}}{w} \right).$$

Assim a matriz que representa  $dL_p \circ d\gamma_p$  na base  $\{X_x, X_y\}$  é

$$(dL_p)_e \circ d\gamma_p = \begin{pmatrix} - \left( \frac{f_x + \frac{y}{2}}{w} \right)_x & - \left( \frac{f_x + \frac{y}{2}}{w} \right)_y \\ - \left( \frac{f_y - \frac{x}{2}}{w} \right)_x & - \left( \frac{f_y - \frac{x}{2}}{w} \right)_y \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Para encontrar  $A_\xi$  para a mesma base  $\{X_x, X_y\}$  precisamos calcular  $\nabla_{X_x} \xi$  e  $\nabla_{X_y} \xi$  em termos desta base, isto é:

$$\begin{aligned} \nabla_{X_x} \xi &= aX_x + bX_y \\ \nabla_{X_y} \xi &= cX_x + dX_y, \end{aligned} \quad (2.17)$$

então teremos a matriz  $A_\xi$  dada por:

$$A_\xi = - \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Temos:

$$\begin{aligned} \nabla_{X_x} \xi &= \nabla_{X_x} \left[ - \left( \frac{f_y - \frac{x}{2}}{w} \right) E_1 - \left( \frac{f_y - \frac{x}{2}}{w} \right) E_2 + \frac{1}{w} E_3 \right] \\ &= - \left( \left( \frac{f_x + \frac{y}{2}}{w} \right)_x + \frac{1}{2w} \left( f_y - \frac{x}{2} \right) \left( f_x + \frac{y}{2} \right) \right) E_1 \\ &\quad - \left( \left( \frac{f_y - \frac{x}{2}}{w} \right)_x - \frac{1}{2w} \left( \left( f_x + \frac{y}{2} \right)^2 - 1 \right) \right) E_2 \\ &\quad + \left( - \frac{1}{2w} \left( f_y - \frac{x}{2} \right) + \left( \frac{1}{w} \right)_x \right) E_3. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Usando a equação (2.17) resulta que:

$$\nabla_{X_x} \xi = a E_1 + b E_2 + \left( a \left( f_x + \frac{y}{2} \right) + b \left( f_y - \frac{x}{2} \right) \right) E_3,$$

logo

$$\begin{aligned} a &= - \left( \frac{f_x + \frac{y}{2}}{w} \right)_x - \frac{1}{2w} \left( f_y - \frac{x}{2} \right) \left( f_x + \frac{y}{2} \right), \\ b &= - \left( \frac{f_y - \frac{x}{2}}{w} \right)_x + \frac{1}{2w} \left( \left( f_x + \frac{y}{2} \right)^2 - 1 \right). \end{aligned}$$

Por outro lado, para achar as entradas  $c$  e  $d$  calculamos:

$$\begin{aligned} \nabla_{X_y} \xi &= \nabla_{X_y} \left[ - \left( \frac{f_y - \frac{x}{2}}{w} \right) E_1 - \left( \frac{f_y - \frac{x}{2}}{w} \right) E_2 + \frac{1}{w} E_3 \right] \\ &= - \left( \left( \frac{f_x + \frac{y}{2}}{w} \right)_y + \frac{1}{2w} \left( \left( f_y - \frac{x}{2} \right)^2 - 1 \right) \right) E_1 \\ &\quad - \left( \left( \frac{f_y - \frac{x}{2}}{w} \right)_y - \frac{1}{2w} \left( f_x + \frac{y}{2} \right) \left( f_y - \frac{x}{2} \right) \right) E_2 \\ &\quad + \left( \frac{1}{2w} \left( f_x + \frac{y}{2} \right) + \left( \frac{1}{w} \right)_y \right) E_3. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Novamente por (2.17):

$$\nabla_{X_y} \xi = c E_1 + d E_2 + \left( c \left( f_x + \frac{y}{2} \right) + d \left( f_y - \frac{x}{2} \right) \right) E_3,$$

então

$$c = - \left( \frac{f_x + \frac{y}{2}}{w} \right)_y - \frac{1}{2w} \left( \left( f_y - \frac{x}{2} \right)^2 - 1 \right),$$

$$d = - \left( \frac{f_y - \frac{x}{2}}{w} \right)_y + \frac{1}{2w} \left( f_x + \frac{y}{2} \right) \left( f_y - \frac{x}{2} \right).$$

Portanto, a matriz  $A_\xi$  é dada por

$$A_\xi = \begin{pmatrix} \left( \frac{f_x + \frac{y}{2}}{w} \right)_x + \frac{1}{2w} \left( f_y - \frac{x}{2} \right) \left( f_x + \frac{y}{2} \right) & \left( \frac{f_x + \frac{y}{2}}{w} \right)_y + \frac{1}{2w} \left( \left( f_y - \frac{x}{2} \right)^2 - 1 \right) \\ \left( \frac{f_y - \frac{x}{2}}{w} \right)_x - \frac{1}{2w} \left( \left( f_x + \frac{y}{2} \right)^2 - 1 \right) & \left( \frac{f_y - \frac{x}{2}}{w} \right)_y - \frac{1}{2w} \left( f_x + \frac{y}{2} \right) \left( f_y - \frac{x}{2} \right) \end{pmatrix}.$$

Usando o Teorema 2.7.1 determinamos a matriz que representa  $\alpha_{\bar{\xi}}$  fazendo  $\alpha_{\bar{\xi}} = -(dL_p \circ d\gamma_p + A_\xi)$ , ou seja:

$$\alpha_{\bar{\xi}} = \frac{1}{2w} \begin{pmatrix} - \left( f_y - \frac{x}{2} \right) \left( f_x + \frac{y}{2} \right) & - \left( f_y - \frac{x}{2} \right)^2 + 1 \\ \left( f_x + \frac{y}{2} \right)^2 - 1 & \left( f_x + \frac{y}{2} \right) \left( f_y - \frac{x}{2} \right) \end{pmatrix}.$$

Lembramos que uma hipersuperfície  $\mathcal{M}$  de uma variedade Riemanniana é *umbílica* se:

$$A_\xi = \lambda \mathbb{1}_{T\mathcal{M}},$$

onde  $\xi$  é um dos dois possíveis campos normais unitários. Se  $\lambda = 0$  temos, em particular, que  $\mathcal{M}$  é *totalmente geodésica*, isto é, as geodésicas de  $\mathcal{M}$  são geodésicas do espaço ambiente.

No caso do ambiente ser o espaço  $\mathbb{R}^n$ , com a métrica plana, as hipersuperfícies umbílicas são abertos de esferas ( $\lambda \neq 0$ ) ou de hiperplanos (caso totalmente geodésico,  $\lambda = 0$ )<sup>2</sup>.

Vamos agora usar os cálculos anteriores para mostrar o resultado a seguir, devido a vários autores, entre os quais Sanini e Piu.

**Teorema 2.7.2.** *Não existem, em  $\mathcal{H}_3$ , superfícies umbílicas (em particular não existem superfícies totalmente geodésicas).*

*Demonstração.* Vamos dividir nosso estudo em duas partes. Primeiramente consideraremos o caso em que a superfície é parametrizada como gráfico de uma função diferenciável  $f$ , ou seja

$$X(x, y) = (x, y, f(x, y)), \quad (x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2. \quad (2.20)$$

---

<sup>2</sup> $\lambda$  é constante nas componentes conexas de  $\mathcal{M}$ .

Depois analisaremos o caso em que a superfície é vertical, podendo considerá-la como uma superfície regrada por retas verticais, que são geodésicas em  $\mathcal{H}_3$ , e que pode-se parametrizar por:

$$X(t, s) = (t, a(t), s), \quad (t, s) \in U \subset \mathbb{R}^2. \quad (2.21)$$

Vamos então iniciar o estudo do primeiro caso, para isso precisamos da equação de Codazzi para hipersuperfícies já apresentada pela equação (1.19), que é dada por

$$(\mathbf{R}(X_x, X_y)\xi)^T = (\nabla_{X_y} A_\xi)X_x - (\nabla_{X_x} A_\xi)X_y.$$

Para o caso umbílico temos

$$\begin{aligned} (\nabla_{X_x} A_\xi)X_y &= \nabla_{X_x} A_\xi(X_y) - A_\xi(\nabla_{X_x} X_y) \\ &= \nabla_{X_x}(\lambda X_y) - \lambda \nabla_{X_x} X_y \\ &= X_x(\lambda)X_y + \lambda \nabla_{X_x} X_y - \lambda \nabla_{X_x} X_y \\ &= X_x(\lambda)X_y, \end{aligned}$$

segue então, a equação de Codazzi para hipersuperfícies umbílicas:

$$\mathbf{R}(X_x, X_y)\xi = X_y(\lambda)X_x - X_x(\lambda)X_y, \quad (2.22)$$

onde a função  $\lambda = \lambda(x, y)$  é tal que  $A_\xi = \lambda Id$ . Usando as propriedades de curvatura dadas no primeiro capítulo e as equações (2.14) temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(X_x, X_y)\xi &= -\frac{1}{w} \mathbf{R}(E_1 + f_1 E_3, E_2 + f_2 E_3)(f_1 E_1 + f_2 E_2 + E_3) \\ &= -\frac{1}{w} (f_1 R_{121} + f_1 f_2 R_{131} + f_1^2 R_{321} + f_2 R_{122} + f_2^2 R_{132} + f_1 f_2 R_{322} - R_{123} \\ &\quad - f_2 R_{133} - f_1 R_{323}) \\ &= -\frac{1}{w} \left( \frac{3}{4} f_1 E_2 - \frac{1}{4} f_1 f_2 E_3 - \frac{3}{4} f_2 E_1 + \frac{f_1 f_2}{4} E_3 - \frac{3}{4} E_1 - \frac{1}{4} f_2 E_1 + \frac{f_1}{4} E_2 \right) \\ &= -\frac{1}{w} (f_1 E_2 - f_2 E_1). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$X_y(\lambda)X_x - X_x(\lambda)X_y = \lambda_y(E_1 + f_1 E_3) - \lambda_x(E_2 + f_2 E_3) = \lambda_y E_1 - \lambda_x E_2 + (f_1 \lambda_y - \lambda_x f_2) E_3.$$

Assim, visto que (2.22) é válida, concluímos que:

$$-\frac{1}{w} (f_1 E_2 - f_2 E_1) = \lambda_y E_1 - \lambda_x E_2 + (f_1 \lambda_y - \lambda_x f_2) E_3.$$

Conseqüentemente

$$\begin{aligned} \lambda_x &= -\left( \frac{f_x + \frac{y}{2}}{w} \right), \\ \lambda_y &= -\left( \frac{f_y - \frac{x}{2}}{w} \right). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Portanto  $(dL_p)_e \circ d\gamma_p$  é uma matriz simétrica na base  $\{X_x, X_y\}$ , visto que  $\lambda_{xy} = \lambda_{yx}$ . Assim temos que  $\alpha_{\bar{\xi}}$  é também simétrica, então

$$-\frac{1}{2w} \left( \left( f_y - \frac{x}{2} \right)^2 - 1 \right) = \frac{1}{2w} \left( \left( f_x + \frac{y}{2} \right)^2 - 1 \right),$$

e, portanto,

$$\left( \left( f_y - \frac{x}{2} \right)^2 - 1 \right) + \left( \left( f_x + \frac{y}{2} \right)^2 - 1 \right) = 0.$$

Lembrando que

$$w = \sqrt{1 + \left( f_x + \frac{y}{2} \right)^2 + \left( f_y - \frac{x}{2} \right)^2},$$

podemos obter:

$$\left( f_x + \frac{y}{2} \right)^2 + \left( f_y - \frac{x}{2} \right)^2 = w^2 - 1,$$

o que nos dá:

$$w^2 - 3 = 0 \quad \implies \quad w = \sqrt{3}.$$

Mas, visto que  $\lambda_{xy} = \lambda_{yx}$ , teríamos:

$$\left( f_x + \frac{y}{2} \right)_y = \left( f_y - \frac{x}{2} \right)_x,$$

ou seja, uma contradição.

Para o segundo caso, quando tratamos de superfícies verticais parametrizadas pela equação (2.21), usamos a seguinte base do espaço tangente  $T_p\mathcal{M}$ :

$$\begin{aligned} X_t &= E_1 + \dot{a}E_2 + \frac{1}{2}(a - t\dot{a})E_3, \\ X_s &= E_3, \end{aligned} \tag{2.24}$$

e a normal unitária à superfície  $\mathcal{M}$  é

$$\xi = \frac{X_t \wedge X_s}{\|X_t \wedge X_s\|} = \frac{\dot{a}}{\sqrt{1 + \dot{a}^2}} E_1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{a}^2}} E_2.$$

Usando a fórmula (1.20) calculamos os coeficientes da primeira forma fundamental para estas superfícies:

$$\begin{aligned} E &= 1 + \dot{a}^2 + \frac{1}{4}(a - t\dot{a})^2, \\ F &= \frac{1}{2}(a - t\dot{a}), \\ G &= 1. \end{aligned}$$

Para calcular os coeficientes da segunda forma precisaremos calcular inicialmente  $\nabla_{X_t}\xi$  e  $\nabla_{X_s}\xi$ , logo se  $\bar{w} = \sqrt{1 + \dot{a}^2}$  temos:

$$\begin{aligned}\nabla_{X_t}\xi &= \nabla_{X_t}\left(\frac{\dot{a}}{\bar{w}}E_1 - \frac{1}{\bar{w}}E_2\right) \\ &= \frac{\ddot{a}\bar{w} - \dot{a}\dot{\bar{w}}}{\bar{w}^2}E_1 + \frac{\dot{a}}{\bar{w}}\nabla_{X_t}E_1 + \frac{\dot{\bar{w}}}{\bar{w}^2}E_2 - \frac{1}{\bar{w}}\nabla_{X_t}E_2 \\ &= \left(\frac{\ddot{a}\bar{w} - \dot{a}\dot{\bar{w}}}{\bar{w}^2} + \frac{t\dot{a} - a}{4\bar{w}}\right)E_1 + \left(\frac{t\dot{a}^2 - \dot{a}a}{4\bar{w}} + \frac{\dot{\bar{w}}}{\bar{w}^2}\right)E_2 + \left(\frac{-1 - \dot{a}^2}{2\bar{w}}\right)E_3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla_{X_s}\xi &= \nabla_{X_s}\left(\frac{\dot{a}}{\bar{w}}E_1 - \frac{1}{\bar{w}}E_2\right) \\ &= \frac{\dot{a}}{\bar{w}}\nabla_{X_s}E_1 - \frac{1}{\bar{w}}\nabla_{X_s}E_2 \\ &= -\frac{1}{2\bar{w}}E_1 - \frac{\dot{a}}{2\bar{w}}E_2.\end{aligned}$$

Logo, usando as equações (1.21), os coeficientes da segunda forma fundamental são dados por:

$$\begin{aligned}l &= \frac{a - t\dot{a} - t\dot{a}^3 + a\dot{a}^2 - 2\ddot{a}}{2\bar{w}}, \\ m &= \frac{\bar{w}}{2}, \\ n &= 0.\end{aligned}\tag{2.25}$$

Mas, visto que a superfície é umbílica, as entradas 12 e 21 de  $A_\xi$  são nulas em qualquer base, em particular na base  $\{X_t, X_s\}$ . Sendo que nesta base a matriz  $A_\xi$  é dada por:

$$A_\xi = \begin{pmatrix} \frac{-\ddot{a}\bar{w} + \dot{a}\dot{\bar{w}}}{\bar{w}^2} - \frac{t\dot{a} - a}{4\bar{w}} & \frac{1}{2\bar{w}} \\ \frac{\bar{w}}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

temos uma contradição.

□

# Capítulo 3

## Superfícies mínimas de $\mathcal{H}_3$

Neste capítulo estudaremos alguns aspectos da teoria das superfícies mínimas do grupo de Heisenberg, em particular o caso das superfícies de tipo gráficos, e seus aspectos relacionados com o problema de Bernstein, que discutimos na introdução.

### 3.1 A equação dos gráficos mínimos

Nesta seção vamos determinar a equação dos gráficos mínimos no espaço de Heisenberg  $(\mathcal{H}_3, g)$  e demonstremos que eles são *estáveis*.

Consideramos um aberto  $D \subseteq \mathbb{R}^2 = \{(x, y, z) \in \mathcal{H}_3 : z = 0\}$ , uma função diferenciável  $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  e seu gráfico  $\Gamma(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathcal{H}_3 : (x, y) \in D\}$ .

O conceito de minimalidade para  $\Gamma(f)$  pode ser introduzido, como vimos na introdução, de duas maneiras equivalentes:

- O ponto de vista variacional (Lagrange):  $\Gamma(f)$  é uma superfície mínima se é um ponto crítico da função área, isto é, dada uma qualquer função diferenciável  $\eta : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  com  $\eta|_{\partial D} = 0$ , e definindo  $A(t) = \text{área}(\Gamma(f + t\eta))$ , temos:

$$\frac{d}{dt}A(t)|_{t=0} = 0.$$

- O ponto de vista geométrico (Meusnier) : A superfície  $\Gamma(f)$  tem curvatura média nula, i.e.:

$$\frac{1}{2}\text{Traço}(A_\xi) = 0,$$

onde  $\xi$  é um vetor normal a  $\Gamma(f)$  e  $A_\xi$  é o operador de Weingarten na direção  $\xi$  (o termo  $\frac{1}{2}$  obviamente irrelevante, aparece somente para enfatizar que se trata da média das curvaturas principais).

Vamos determinar a equação que  $f$  tem que satisfazer, para que seu gráfico seja uma superfície mínima, segundo os dois ponto de vista. Isso também mostrará a equivalência entre os ponto de vista, pois a equação resultante é a mesma nos dois casos.

### 1. O ponto de vista variacional.

Seja  $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}_3$  uma superfície mínima dada como gráfico de uma função diferenciável  $f$ , definida no fecho de um aberto limitado  $D \subset \mathbb{R}^2$ , ou seja

$$\mathcal{M} := \Gamma(f) := X(x, y) = (x, y, f(x, y)), \quad (x, y) \in D.$$

Uma base do espaço tangente  $T_p\mathcal{M}$ , associada a esta parametrização, é dada por:

$$\begin{cases} X_x = \frac{\partial}{\partial x} + f_x \frac{\partial}{\partial z} = E_1 + \frac{1}{2}yE_2 + f_x E_3, \\ X_y = \frac{\partial}{\partial y} + f_y \frac{\partial}{\partial z} = E_1 - \frac{1}{2}xE_2 + f_y E_3. \end{cases} \quad (3.1)$$

Se

$$w = \|X_x \wedge X_y\| = \left[ \frac{1}{4}(x^2 + y^2) + (f_x^2 + f_y^2) + (yf_x - xf_y) + 1 \right]^{\frac{1}{2}}$$

for a área do paralelogramo gerado por  $X_x$  e  $X_y$ , então a área sobre  $\bar{D}$  de  $\mathcal{M}$  é:

$$\iint_{\bar{D}} w \, dx \, dy.$$

Consideramos a variação de  $\mathcal{M}$  dada por:

$$\varphi_t(x, y) = (x, y, f(x, y) + t\eta(x, y)), \quad (x, y) \in D,$$

onde  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , com  $\varepsilon > 0$ ,  $\eta \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$  e  $\eta|_{\partial D} = 0$ . A última condição nos garante que as superfícies  $\mathcal{M}_t$  obtidas ao variar  $t$ , como gráfico das funções  $f(x, y) + t\eta(x, y)$ , têm todas o mesmo bordo. A área de  $\mathcal{M}_t$  sobre  $\bar{D}$  é

$$A(t) = \iint_{\bar{D}} w(t) \, dx \, dy,$$

onde

$$\begin{aligned} w(t) &= \|(X_t)_x \wedge (X_t)_y\| \\ &= \left[ \frac{1}{4}(x^2 + y^2) + (f_x + t\eta_x)^2 + (f_y + t\eta_y)^2 + y(f_x + t\eta_x) - x(f_y + t\eta_y) + 1 \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Derivando com respeito a  $t$  e calculando para  $t = 0$  temos:

$$\begin{aligned} A'(0) &= \frac{1}{2} \iint_{\bar{D}} \left[ \eta_x \left( \frac{2f_x + y}{w} \right) + \eta_y \left( \frac{2f_y - x}{w} \right) \right] dx dy \\ &= -\frac{1}{2} \iint_{\bar{D}} \eta \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{2f_x + y}{w} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{2f_y - x}{w} \right) \right] dx dy. \end{aligned}$$

Como  $\eta$  é uma função arbitrária, temos

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{2f_x + y}{w} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{2f_y - x}{w} \right) = 0. \quad (3.2)$$

A equação (3.2) é dita *equação dos gráficos mínimos* e pode ser também escrita na seguinte forma

$$\left( 1 + \left( f_y - \frac{x}{2} \right)^2 \right) f_{xx} - 2 \left( f_y - \frac{x}{2} \right) \left( f_x + \frac{y}{2} \right) f_{xy} + \left( 1 + \left( f_x + \frac{y}{2} \right)^2 \right) f_{yy} = 0. \quad (3.3)$$

## 2. O ponto de vista geométrico.

Usando as notações do final do primeiro capítulo, temos que a curvatura média é dada por:

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{lG - 2mF + nE}{EG - F^2} \right), \quad (3.4)$$

onde  $E, F, G$  são os coeficientes da primeira forma fundamental e  $l, m, n$  são os coeficientes da segunda forma fundamental.

No caso do gráfico de  $\mathcal{H}_3$  dado por  $X(x, y) = (x, y, f(x, y))$ , e da base (3.1) segue que o campo normal unitário é dado por:

$$\xi = \frac{X_x \wedge X_y}{\|X_x \wedge X_y\|} = - \left( \frac{f_x + \frac{y}{2}}{w} \right) E_1 - \left( \frac{f_y - \frac{x}{2}}{w} \right) E_2 + \frac{1}{w} E_3, \quad (3.5)$$

onde  $w = \sqrt{1 + \left( f_x + \frac{y}{2} \right)^2 + \left( f_y - \frac{x}{2} \right)^2}$ . Usando as equações de (1.20) resulta que os coeficientes da primeira forma fundamental são dados por

$$\begin{aligned} E &= 1 + \left( f_x + \frac{y}{2} \right)^2, \\ F &= \left( f_x + \frac{y}{2} \right) \left( f_y - \frac{x}{2} \right), \\ G &= 1 + \left( f_y - \frac{x}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Para calcular os coeficientes da segunda forma precisamos primeiramente calcular  $\nabla_{X_x} \xi$  e  $\nabla_{X_y} \xi$ , assim:

$$\begin{aligned} \nabla_{X_x} \xi &= \nabla_{X_x} - \left( \frac{f_y - \frac{x}{2}}{w} \right) E_1 - \left( \frac{f_y - \frac{x}{2}}{w} \right) E_2 + \frac{1}{w} E_3 \\ &= \left( - \left( \frac{f_x + \frac{y}{2}}{w} \right)_x - \frac{1}{2w} \left( f_y - \frac{x}{2} \right) \left( f_x + \frac{y}{2} \right) \right) E_1 + \\ &+ \left( - \left( \frac{f_y - \frac{x}{2}}{w} \right)_x + \frac{1}{2w} \left( \left( f_x + \frac{y}{2} \right)^2 - 1 \right) \right) E_2 \\ &+ \left( - \frac{1}{2w} \left( f_y - \frac{x}{2} \right) + \left( \frac{1}{w} \right)_x \right) E_3. \end{aligned} \quad (3.6)$$

e

$$\begin{aligned}
\nabla_{X_y}\xi &= \nabla_{X_y} - \left(\frac{f_y - \frac{x}{2}}{w}\right) E_1 - \left(\frac{f_y - \frac{x}{2}}{w}\right) E_2 + \frac{1}{w} E_3 \\
&= \left(-\left(\frac{f_x + \frac{y}{2}}{w}\right)_y - \frac{1}{2w} \left(\left(f_y - \frac{x}{2}\right)^2 - 1\right)\right) E_1 + \\
&+ \left(-\left(\frac{f_y - \frac{x}{2}}{w}\right)_y + \frac{1}{2w} \left(f_x + \frac{y}{2}\right) \left(f_y - \frac{x}{2}\right)\right) E_2 \\
&+ \left(\frac{1}{2w} \left(f_x + \frac{y}{2}\right) + \left(\frac{1}{w}\right)_y\right) E_3.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Usando as equações (1.21) podemos então calcular os coeficientes da segunda forma fundamental:

$$\begin{aligned}
l &= \frac{f_{xx} + (f_y - \frac{x}{2})(f_x + \frac{y}{2})}{w}, \\
m &= \frac{f_{xy} + \frac{1}{2}(f_y - \frac{x}{2})^2 - \frac{1}{2}(f_x + \frac{y}{2})^2}{w}, \\
n &= \frac{f_{yy} - (f_y - \frac{x}{2})(f_x + \frac{y}{2})}{w}.
\end{aligned}$$

Agora substituindo os coeficientes da primeira e segunda forma achados obtemos:

$$\begin{aligned}
lG &= \left[\frac{f_{xx} + (f_y - \frac{x}{2})(f_x + \frac{y}{2})}{w}\right] \cdot \left[1 + \left(f_y - \frac{x}{2}\right)^2\right] \\
&= \frac{f_{xx} + (f_y - \frac{x}{2})(f_x + \frac{y}{2})}{w} + \frac{f_{xx} (f_y - \frac{x}{2})^2}{w} + \frac{(f_y - \frac{x}{2})^3 (f_x + \frac{y}{2})}{w},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2mF &= 2 \left[\frac{f_{xy} + \frac{1}{2}(f_y - \frac{x}{2})^2 - \frac{1}{2}(f_x + \frac{y}{2})^2}{w}\right] \cdot \left[\left(f_x + \frac{y}{2}\right) \left(f_y - \frac{x}{2}\right)\right] \\
&= \frac{2f_{xy} (f_x + \frac{y}{2}) (f_y - \frac{x}{2})}{w} + \frac{(f_y - \frac{x}{2})^3 (f_x + \frac{y}{2})}{w} - \frac{(f_y - \frac{x}{2})(f_x + \frac{y}{2})^3}{w},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
nE &= \left[\frac{f_{yy} - (f_y - \frac{x}{2})(f_x + \frac{y}{2})}{w}\right] \cdot \left[1 + \left(f_x + \frac{y}{2}\right)^2\right] \\
&= \frac{f_{yy} - (f_y - \frac{x}{2})(f_x + \frac{y}{2})}{w} + \frac{f_{yy} (f_x + \frac{y}{2})^2}{w} - \frac{(f_y - \frac{x}{2})(f_x + \frac{y}{2})^3}{w},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
EG - F^2 &= \left[1 + \left(f_x + \frac{y}{2}\right)^2\right] \cdot \left[1 + \left(f_y - \frac{x}{2}\right)^2\right] - \left[\left(f_x + \frac{y}{2}\right) \left(f_y - \frac{x}{2}\right)\right]^2 \\
&= \left(f_x + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(f_y - \frac{x}{2}\right)^2 + 1.
\end{aligned}$$

Substituindo tais expressões na equação (3.4) e igualando-a a zero obtemos novamente a equação dos gráficos mínimos:

$$\left(1 + \left(f_y - \frac{x}{2}\right)^2\right) f_{xx} - 2\left(f_y - \frac{x}{2}\right)\left(f_x + \frac{y}{2}\right) f_{xy} + \left(1 + \left(f_x + \frac{y}{2}\right)^2\right) f_{yy} = 0. \quad (3.8)$$

Um primeiro exemplo de gráfico mínimo é dado pelos planos

$$f(x, y) = ax + by + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Um outro exemplo é a superfícies tipo sela

$$f(x, y) = \frac{1}{2}xy,$$

cujo gráfico é dado na Figura 3.1. Observamos explicitamente que o coeficiente  $\frac{1}{2}$  não é irrelevante. De fato,  $f(x, y) = kxy$  é uma superfície mínima se, e somente se,  $k = 0$  ou  $k = \pm\frac{1}{2}$ .

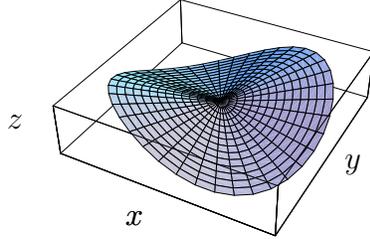


Figura 3.1: Sela.

Diremos que uma superfície é *estável* se  $A''(0) > 0$ , para toda variação não constante de  $\mathcal{M}$  que fixa a fronteira  $\partial\mathcal{M}$  de  $\mathcal{M}$ . Temos o seguinte resultado:

**Proposição 3.1.1.** *Todo gráfico mínimo em  $\mathcal{H}_3$  é estável.*

*Demonstração.* Derivando novamente a função área e avaliando em  $t = 0$  temos

$$A''(0) = \frac{1}{2} \int w(0)^{-\frac{1}{2}} [2(\eta_x^2 + \eta_y^2)] \geq 0.$$

Note que  $A''(0) = 0$  se, e somente se,  $\eta_x = \eta_y = 0$ , o que equivale dizer que  $\eta = 0$ , pois  $\eta|_{\partial D} = 0$ . □

Estabilidade significa que a superfície é um mínimo local da área, isto é, tem área menor ou igual à área de qualquer superfície, com mesma fronteira, suficientemente próxima. Para finalizar esta seção vamos demonstrar um teorema que garante que uma superfície mínima de  $\mathcal{H}_3$ , dada como um gráfico, é um mínimo absoluto para a função área, entre as superfícies que são gráficos com mesma fronteira.

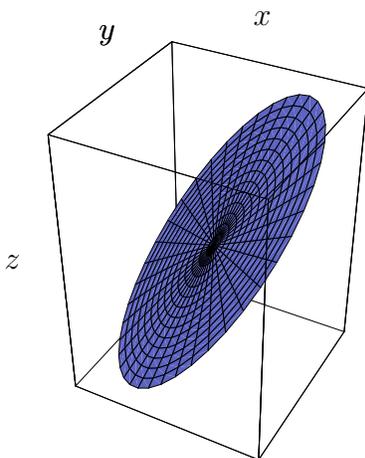


Figura 3.2: Plano.

**Teorema 3.1.1.** *Seja  $\mathcal{M}$  uma superfície de  $\mathcal{H}_3$  definida como gráfico de uma função  $f(x, y)$  com  $x, y \in \Omega$ , domínio de  $\mathbb{R}^2$ , que se estende continuamente ao fecho  $\bar{\Omega}$ . Então, a área de  $\mathcal{M}$  é menor que a área de qualquer outra superfície  $\tilde{\mathcal{M}}$  definida como gráfico de uma função  $\tilde{f}(x, y)$  em  $\Omega$  que assuma os mesmos valores que  $f$  na fronteira  $\partial\Omega$ .*

*Demonstração.* Para fazer esta demonstração seguimos a idéia usada por R. Osserman para provar este teorema para o caso de  $\mathbb{R}^3$  (referência [Os]).

Consideremos o campo vetorial unitário  $V(x, y, z)$  no domínio  $\Omega \times \mathbb{R}$  de  $\mathcal{H}_3$  dado por:

$$\begin{aligned} V = (V_1, V_2, V_3) &= - \left( \frac{f_x + \frac{y}{2}}{w} \right) E_1 - \left( \frac{f_y - \frac{x}{2}}{w} \right) E_2 + \frac{1}{w} E_3 \\ &= - \left( \frac{f_x + \frac{y}{2}}{w} \right) \frac{\partial}{\partial x} - \left( \frac{f_y - \frac{x}{2}}{w} \right) \frac{\partial}{\partial y} + \left( \frac{(f_x + \frac{y}{2})\frac{y}{2} - (f_y - \frac{x}{2})\frac{x}{2} + 1}{w} \right) \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned}$$

onde

$$w = \sqrt{1 + \left( f_x + \frac{y}{2} \right)^2 + \left( f_y - \frac{x}{2} \right)^2}.$$

Temos então que

$$\begin{aligned} (V_1)_x + (V_2)_y &= - \left( \frac{f_x + \frac{y}{2}}{w} \right)_x - \left( \frac{f_y - \frac{x}{2}}{w} \right)_y \\ &= \frac{- \left( 1 + \left( f_y - \frac{x}{2} \right)^2 \right) f_{xx} + 2 \left( f_y - \frac{x}{2} \right) \left( f_x + \frac{y}{2} \right) f_{xy} - \left( 1 + \left( f_x + \frac{y}{2} \right)^2 \right) f_{yy}}{w^3}. \end{aligned}$$

Dado que  $f$  satisfaz a equação dos gráficos mínimos (3.8) teremos  $(V_1)_x + (V_2)_y = 0$ .

Sabemos que

$$\operatorname{div} V = \sum \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{\det g} V_i),$$

como  $\det(g) = 1$ , esta equação se reduz a

$$\begin{aligned} \operatorname{div} V &= \sum \frac{\partial}{\partial x_i} (V_i) \\ &= (V_1)_x + (V_2)_y + (V_3)_z. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Visto que  $V$  não depende de  $z$  e que  $(V_1)_x + (V_2)_y = 0$  obtemos:

$$\operatorname{div} V \equiv 0, \quad \text{em } \Omega \times \mathbb{R}.$$

As superfícies  $\mathcal{M}$  e  $\widetilde{\mathcal{M}}$  têm o mesmo bordo e portanto  $\mathcal{M} \cup \widetilde{\mathcal{M}}$  pode ser considerado como o bordo orientado de um conjunto aberto  $\Delta$  em  $\Omega \times \mathbb{R}$ . Usando o Teorema da Divergência, temos que:

$$0 = \int_{\Delta} \operatorname{div} V = \int_{\mathcal{M} \cup \widetilde{\mathcal{M}}} g(V, \xi) dA, \quad (3.10)$$

onde  $\xi$  é o campo normal unitário correspondente à orientação positiva de  $\mathcal{M} \cup \widetilde{\mathcal{M}}$ . Mas  $V = \xi$  em  $\mathcal{M}$  então  $g(V, \xi) = 1$ , além disso, pela equação (3.10) vale que

$$\int_{\mathcal{M}} g(V, \xi) dA = \int_{\widetilde{\mathcal{M}}} g(V, -\xi) dA,$$

logo temos

$$A(\mathcal{M}) = \int_{\mathcal{M}} dA = \int_{\widetilde{\mathcal{M}}} g(V, -\xi) dA = \int_{\mathcal{M}} \|V\|_g \|\xi\|_g \cos \theta dA \leq \int_{\widetilde{\mathcal{M}}} dA = A(\widetilde{\mathcal{M}}),$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre  $V$  e  $\xi$ . O que completa a demonstração.  $\square$

Vamos classificar os gráficos mínimo cuja aplicação de Gauss tem posto zero ou um.

## 3.2 Superfícies cuja aplicação de Gauss tem posto 0

**Definição 3.2.1.** *Seja  $\mathcal{M}^n$  uma hipersuperfície orientável de um grupo de Lie  $G$ . Diremos que um ponto  $p \in \mathcal{M}$  é degenerado se  $d\gamma_p \equiv 0$ .*

**Lema 3.2.1** ([R]). *Seja  $\mathcal{M}$  uma hipersuperfície orientável de dimensão  $n$  de um grupo de Lie  $G$ . Se  $p \in \mathcal{M}$  é degenerado então  $(dL_{-p})_p(T_p\mathcal{M})$  é uma sub-álgebra de Lie de codimensão 1.*

*Demonstração.* Seja  $p \in \mathcal{M}$  um ponto degenerado, tome  $\{X_1, \dots, X_n\}$  uma base de  $T_p\mathcal{M}$  e  $E_i = (dL_p)_p^{-1}(X_i)$ , para  $1 \leq i \leq n$ . Como  $p \in \mathcal{M}$  é um ponto degenerado, segue da Proposição 2.7.1 que  $\alpha_{\bar{\xi}} = -A_\xi$ . Assim, como  $A_\xi$  é um operador simétrico temos que  $\alpha_{\bar{\xi}}$  também é. Logo temos

$$\langle \nabla_{E_i} X, E_j \rangle = \langle \nabla_{E_j} X, E_i \rangle, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

onde  $X = (dL_{-p})_p(\xi(p))$ . Usando a fórmula (2.5) obtemos as seguintes equações

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_{E_i} X, E_j \rangle &= \langle [E_i, X], E_j \rangle - \langle [X, E_j], E_i \rangle + \langle [E_j, E_i], X \rangle, \\ 2\langle \nabla_{E_j} X, E_i \rangle &= \langle [E_j, X], E_i \rangle - \langle [X, E_i], E_j \rangle + \langle [E_i, E_j], X \rangle, \end{aligned}$$

logo, pela simetria, temos

$$\langle [E_i, E_j], X \rangle = -\langle [E_i, E_j], X \rangle$$

então

$$\langle [E_i, E_j], X \rangle = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Portanto podemos concluir que

$$[E_i, E_j] \in \text{span}\{E_1, \dots, E_n\}.$$

Logo  $(dL_p^{-1})_p(T_p\mathcal{M}) = \text{span}\{E_1, \dots, E_n\}$  é uma sub-álgebra de  $\mathfrak{g}$  de codimensão 1.  $\square$

**Teorema 3.2.1.** [S] *As únicas superfícies mínima conexas de  $\mathcal{H}_3$  cuja aplicação de Gauss é de posto 0 são os planos verticais.*

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{M}$  uma superfície de  $\mathcal{H}_3$  localmente parametrizada como um gráfico de uma função  $f(x, y)$ . A base do espaço  $T_p\mathcal{M}$  associada a esta parametrização é dada pelas equações (2.14).

Suponhamos que existe  $p \in \mathcal{M}$  degenerado, e portanto o posto da aplicação de Gauss é 0, então pelo Lema 3.2.1 teríamos que  $dL_p^{-1}(T_p\mathcal{M})$  é uma sub-álgebra de  $\mathfrak{h}_3$ . Por outro lado temos que

$$\begin{aligned} [(dL_p)_p^{-1}(X_x), dL_p^{-1}(X_y)] &= \left[ e_1 + \left( f_x + \frac{y}{2} \right) e_3, e_2 + \left( f_y - \frac{x}{2} \right) e_3 \right] \\ &= \left[ \frac{\partial}{\partial x} + \left( f_x + \frac{y}{2} \right) \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} + \left( f_y - \frac{x}{2} \right) \frac{\partial}{\partial z} \right] \\ &= f_{xy} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} - f_{xy} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \\ &= -\frac{\partial}{\partial z} \\ &= -e_3, \end{aligned}$$

onde  $e_i = E_i(e)$ , para  $i = 1, 2, 3$ . Mas  $e_3 \notin T_p\mathcal{M}$ , de fato:

Suponhamos por contradição que  $e_3 \in dL_p^{-1}(T_p\mathcal{M})$ , então existe  $v \in T_p\mathcal{M}$  tal que

$$(dL_p)_p^{-1}(v) = -e_3. \quad (3.11)$$

Se  $v = aX_x + bX_y$  então

$$v = aE_1 + bE_2 + \left[ a \left( f_x + \frac{y}{2} \right) + b \left( f_y - \frac{x}{2} \right) \right] E_3,$$

portanto

$$(dL_p)_p^{-1}(v) = ae_1 + be_2 + \left[ a \left( f_x + \frac{y}{2} \right) + b \left( f_y - \frac{x}{2} \right) \right] e_3,$$

logo, pela equação (3.11) teríamos  $a = b = 0$ , de onde temos uma contradição.

No caso em que a superfície  $\mathcal{M}$  é vertical, como já foi dito anteriormente, podemos considera-la como uma superfície regrada por retas verticais, parametrizada pela fórmula (2.21) e tomar como base do espaço tangente  $T_p\mathcal{M}$  a esta parametrização  $\{X_t, X_s\}$  dada por (2.21). Para termos que a aplicação de Gauss desta superfície é de posto 0, precisaríamos que a normal unitária

$$\xi = \frac{\dot{a}}{\sqrt{1 + \dot{a}^2}} E_1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{a}^2}} E_2$$

seja constante, para garantir que  $\gamma$  é constante e portanto ter  $d\gamma \equiv 0$ . Mas  $\xi$  é constante se, e somente se,  $\dot{a}$  é constante, de onde concluímos que  $a(t)$  é linear.

Falta provar que o plano vertical é mínimo. Basta então parametriza-lo como

$$X(t, s) = (t, at + b, s), \quad a, b \in \mathbb{R},$$

assim teríamos a base do espaço tangente dada por:

$$\begin{aligned} X_t &= E_1 + aE_2 \\ X_s &= E_3, \end{aligned}$$

e portanto a primeira e a segunda forma fundamental são respectivamente:

$$\begin{aligned} E &= 1 + a^2, \\ F &= 0, \\ G &= 1, \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} l &= \frac{b}{2} \sqrt{1 + a^2}, \\ m &= \frac{\sqrt{1 + a^2}}{2}, \\ n &= 0, \end{aligned}$$

de onde, temos

$$H = \frac{b}{4\sqrt{1+a^2}}.$$

Logo o plano vertical é mínimo se, e somente se,  $b = 0$ .

Concluimos assim que a única superfície mínima conexa cuja aplicação de Gauss tem posto nulo é dada por

$$X(t, s) = (t, at, s), \quad a \in \mathbb{R}.$$

□

### 3.3 Gráficos mínimos com aplicação normal de posto 1

Para analisar os gráficos mínimos  $(x, y, f(x, y))$  com aplicação de Gauss de posto 1 consideramos os gráficos que satisfazem

$$\det((dL_p)_e \circ d\gamma_p) = 0,$$

onde a matriz  $(dL_p)_e \circ d\gamma_p$  é dada em 2.16. Vamos então calcular este determinante:

$$\det((dL_p)_e \circ d\gamma_p) = \left(\frac{f_x + \frac{y}{2}}{w}\right)_x \cdot \left(\frac{f_y - \frac{x}{2}}{w}\right)_y - \left(\frac{f_y - \frac{x}{2}}{w}\right)_x \cdot \left(\frac{f_x + \frac{y}{2}}{w}\right)_y$$

isto é,

$$\begin{aligned} \det((dL_p)_e \circ d\gamma_p) &= \frac{1}{w^2} \left[ f_{xx}w - \frac{1}{w} \left( f_{xx} \left( f_x + \frac{y}{2} \right)^2 + \left( f_{xy} - \frac{1}{2} \right) \left( f_y - \frac{x}{2} \right) \left( f_x + \frac{y}{2} \right) \right) \right] \\ &\quad \cdot \frac{1}{w^2} \left[ f_{yy}w - \frac{1}{w} \left( \left( f_{xy} + \frac{1}{2} \right) \left( f_x + \frac{y}{2} \right) \left( f_y - \frac{x}{2} \right) + f_{yy} \left( f_y - \frac{x}{2} \right) \right) \right] \\ &\quad - \frac{1}{w^2} \left[ \left( f_{xy} + \frac{1}{2} \right) w - \frac{1}{w} \left( \left( f_{xy} + \frac{1}{2} \right) \left( f_x + \frac{y}{2} \right)^2 + f_{yy} \left( f_y - \frac{x}{2} \right) \left( f_x + \frac{y}{2} \right) \right) \right] \\ &\quad \cdot \frac{1}{w^2} \left[ \left( f_{xy} - \frac{1}{2} \right) w - \frac{1}{w} \left( f_{xx} \left( f_x + \frac{y}{2} \right) \left( f_y - \frac{x}{2} \right) + \left( f_{xy} - \frac{1}{2} \right) \left( f_y - \frac{x}{2} \right)^2 \right) \right] \\ &= \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 + \frac{1}{4}}{w^4} \cdot w^2 - f_{xx}f_{yy} \cdot \left( \left( f_y - \frac{x}{2} \right)^2 + \left( f_x + \frac{y}{2} \right)^2 \right) \\ &\quad + \left( f_{xy}^2 - \frac{1}{4} \right) \cdot \left( \left( f_y - \frac{x}{2} \right)^2 + \left( f_x + \frac{y}{2} \right)^2 \right) \\ &\quad \left( f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 + \frac{1}{4} \right) \cdot \left( w^2 - \left( \left( f_y - \frac{x}{2} \right)^2 + \left( f_x + \frac{y}{2} \right)^2 \right) \right) \\ &= \frac{\quad}{w^4}, \end{aligned}$$

de onde temos

$$\det((dL_p)_e \circ d\gamma_p) = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 + \frac{1}{4}}{w^4}.$$

Vamos agora demonstrar o resultado principal deste capítulo. Para fazer esta demonstração usamos como referência a tese de doutorado de C.F.Serrudo ([S]):

**Teorema 3.3.1.** *Seja  $\mathcal{M}$  uma superfície mínima em  $\mathcal{H}_3$  com aplicação de Gauss de posto  $\leq 1$ . Então  $\mathcal{M}$  é regrada.*

**Observação 3.3.1.** *Na próxima seção demonstraremos que as superfícies mínimas regradas com aplicação de Gauss de posto um são, a menos de isometrias do ambiente, gráficos de funções do tipo:*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{2} + k[\ln(y + \sqrt{1+y^2}) + y\sqrt{1+y^2}] \\ \text{ou} \\ 2ky - \frac{xy}{2}. \end{cases}$$

*Isso descreve completamente tais superfícies.*

Para a demonstração seguiremo a seguinte estratégia: Depois de ter “normalizado” o problema, demonstraremos o teorema em dois lemas, que juntos nos dão a demonstração final.

Vamos então “normalizar” o problema.

Seja  $\mathcal{M}$  uma superfície mínima em  $\mathcal{H}_3$  com aplicação de Gauss de posto  $\leq 1$ . Suponhamos que  $\mathcal{M}$  não seja um plano vertical. Então, pelo menos ao redor de algum ponto,  $\mathcal{M}$  é o gráfico de uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Então  $f$  é solução das duas equações:

$$\left(1 + \left(f_y - \frac{x}{2}\right)^2\right) f_{xx} - 2\left(f_y - \frac{x}{2}\right)\left(f_x + \frac{y}{2}\right) f_{xy} + \left(1 + \left(f_x + \frac{y}{2}\right)^2\right) f_{yy} = 0 \quad (3.12)$$

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 + \frac{1}{4} = 0. \quad (3.13)$$

A menos de translações e rotações ao redor do eixo  $z^1$ , podemos supor que:

$$0 \in D, \quad f(0) = 0, \quad \xi(0) = (1 + 4k^2)^{-\frac{1}{2}}(0, -2k, 1), \quad (3.14)$$

onde:

$$\xi = -\left(\frac{f_x + \frac{y}{2}}{w}\right) E_1 - \left(\frac{f_y - \frac{x}{2}}{w}\right) E_2 + \frac{1}{w} E_3 \quad (3.15)$$

é o vetor normal a  $\mathcal{M}$ .

Também observamos que a equação 3.12 é uma equação elíptica (não linear) com coeficientes constantes. Da teoria das equações elípticas sabemos que as soluções de tais equações são analíticas. Vamos então analisar o desenvolvimento de  $f$  em série de Taylor.

O primeiro lema é o seguinte:

---

<sup>1</sup>Que são isometrias de  $\mathcal{H}_3$ .

**Lema 3.3.1.** *Nas hipóteses acima, se  $f_{yy}(0) = 0$ , então:*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{2} + k[\ln(y + \sqrt{1 + y^2}) + y\sqrt{1 + y^2}] \\ \text{ou} \\ 2ky - \frac{xy}{2}. \end{cases}$$

*Também os gráficos das funções acima são soluções de (3.12) e (3.13).*

*Demonstração.* Para  $(x, y) = (0, 0)$ , temos, de (3.15) e (3.14):

$$w(0) = (1 + 4k^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad f_x(0) = 0, \quad f_y(0) = 2k. \quad (3.16)$$

Usando (3.12) e (3.13), e a hipótese  $f_{yy} = 0$ , temos:

$$f_{xx}(0) = 0, \quad f_{xy}(0) = \pm \frac{1}{2} \quad (3.17)$$

Então a série de Taylor de  $f$  é da forma:

$$f(x, y) = 2ky \pm \frac{xy}{2} + \Psi(x, y), \quad (3.18)$$

onde  $\Psi(x, y)$  é uma série de grau mínimo  $\geq 3$  e

$$f_x = \pm \frac{y}{2} + \Psi_x, \quad f_y = 2k \pm \frac{x}{2} + \Psi_y, \quad f_{xx} = \Psi_{xx}, \quad f_{xy} = \pm \frac{1}{2} + \Psi_{xy}, \quad f_{yy} = \Psi_{yy}. \quad (3.19)$$

Vamos calcular agora as derivadas terceiras na origem. Derivando (3.12) e (3.13), temos:

$$\begin{cases} f_{xxx}(0)(1 + 4k^2) + f_{yyx}(0) = 0 \\ f_{xxy}(0)(1 + 4k^2) - 4k(\pm \frac{1}{2})(\pm \frac{1}{2} + \frac{1}{2}) + f_{yyy}(0) = 0 \\ -2(\pm \frac{1}{2})f_{xxy}(0) = 0 \\ -2(\pm \frac{1}{2})f_{xyy}(0) = 0. \end{cases} \quad (3.20)$$

Portanto:

$$f_{xxy}(0) = f_{xyy}(0) = 0 \quad (3.21)$$

Vamos considerar os dois casos,  $f_{xy} = \pm \frac{1}{2}$  separadamente:

- $f_{xy} = \frac{1}{2}$ .

Neste caso temos:

$$f(x, y) = 2ky + \frac{1}{2}xy + g(y) + \bar{\Psi}(x, y), \quad (3.22)$$

Seja  $n$  o grau mínimo dos polinômios homogêneos não nulos da série de Taylor de  $\bar{\Psi}$ . A equação (3.13), escrita em termos de  $\bar{\Psi}$ , é:

$$\bar{\Psi}_{xx}(g_{yy} + \bar{\Psi}_{yy}) - \bar{\Psi}_{xy}^2 = \bar{\Psi}_{x,y}. \quad (3.23)$$

Comparando os termos de grau mais baixo em (3.23), temos  $\bar{\Psi}_{xy} = 0$ . Portanto o termo de grau menor de  $\bar{\Psi}$  é  $ax^n + by^n$ . Logo:

$$f(x, y) = 2ky + \frac{1}{2}xy + g(y) + ax^n + by^n + \tilde{\Psi}(x, y). \quad (3.24)$$

onde o grau de  $g$  é  $\geq 3$  e  $\leq n - 1$ ,  $n \geq 4$ . Derivando e substituindo em (3.12), temos:

$$\begin{aligned} & \left(1 + (2k + \psi_y + nby^{n-1} + \bar{\Psi}_y)^2\right) \cdot (n(n-1)ax^{n-2} + \bar{\Psi}_{xx}) \\ & - 2 \cdot (2k + \psi_y + nby^{n-1} + \bar{\Psi}_y) (y + nax^{n-1} + \bar{\Psi}_x) \left(\frac{1}{2} + \bar{\Psi}_{xy}\right) \\ & + \left(1 + (y + nax^{n-1} + \bar{\Psi}_x)^2\right) \cdot (\psi_{yy} + n(n-1)by^{n-2} + \bar{\Psi}_{yy}) = 0. \end{aligned}$$

Analisando o coeficiente de  $x^{n-2}$  temos:

$$(1 + 4k^2)an(n-1)x^{n-2} = 0,$$

e portanto  $a = 0$ .

Uma simples indução mostra que  $\Psi$  depende somente de  $y$ . Portanto:

$$f(x, y) = \frac{xy}{2} + g(y).$$

Uma tal superfície é invariante por translações do tipo  $L_{(b,0,0)}$ . De fato, seja  $(x, y, \frac{1}{2}xy + g(y))$  um ponto da superfície. Temos então:

$$\begin{aligned} L_{(b,0,0)}(p) &= (b, 0, 0) * \left(x, y, \frac{xy}{2} + g(y)\right) \\ &= \left(x + b, y, \frac{xy}{2} + g(y) + \frac{by}{2}\right) \\ &= \left(x + b, y, \frac{(x+b)y}{2} + g(y)\right). \end{aligned}$$

Portanto  $L_{(b,0,0)}(p)$  é também um ponto da superfície.

Pela classificação das superfícies mínimas invariantes pelas translações do tipo acima (veja [MSP]), temos:

$$f(x, y) = \frac{xy}{2} + c \left[ \ln(y + \sqrt{1+y^2}) + y\sqrt{1+y^2} \right].$$

Mas  $f_y(0) = 2c = 2k$ , e então temos que  $f$  é dada por:

$$f(x, y) = \frac{xy}{2} + k \left[ \ln(y + \sqrt{1+y^2}) + y\sqrt{1+y^2} \right].$$

- $f_{xy}(0) = -\frac{1}{2}$ .

Neste caso temos de (3.20), que as derivadas de ordem 3 de  $f$  em 0 são nulas. De novo, por (3.13), o termo de grau mínimo de  $\Psi$  é  $ax^n + by^n$ , e portanto:

$$f(x, y) = 2ky - \frac{xy}{2} + ax^n + by^n + \bar{\Psi}(x, y),$$

com  $n \geq 4$ .

Derivando e substituindo em (3.12), temos:

$$\begin{aligned} & \left(1 + (2k - x + nby^{n-1} + \bar{\Psi}_y)^2\right) \cdot (n(n-1)ax^{n-2} + \bar{\Psi}_{xx}) \\ & - 2 \cdot (2k - x + nby^{n-1} + \bar{\Psi}_y) (nax^{n-1} + \bar{\Psi}_x) \left(\bar{\Psi}_{xy} - \frac{1}{2}\right) \\ & + \left(1 + (nax^{n-1} + \bar{\Psi}_x)^2\right) \cdot (n(n-1)by^{n-2} + \bar{\Psi}_{yy}) = 0. \end{aligned}$$

Para os termos em  $x^{n-2}$  e  $y^{n-2}$  temos:

$$\begin{aligned} n(n-1)ax^{n-2} &= 0 \\ n(n-1)by^{n-2} &= 0. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Portanto  $a = 0$  e  $b = 0$ .

Novamente uma simples indução implica:

$$f(x, y) = 2ky - \frac{xy}{2}.$$

Um cálculo direto mostra também que as funções acima são soluções de (3.12) e (3.13).  $\square$

**Observação 3.3.2.** *Observamos explicitamente que os gráficos acima nos dão superfícies regradas e portanto a tese do teorema, quando  $f_{yy}(0) = 0$ .*

O Lema a seguir conclui a demonstração do teorema:

**Lema 3.3.2.** *Se  $f_{yy}(0) \neq 0$  então  $\mathcal{M}$  é regrada.*

*Demonstração.* Pela condição sobre o posto da aplicação de Gauss temos que existe uma curva  $(t, \gamma(t))$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  com  $\gamma(0) = 0$ , tal que a normal a  $\mathcal{M}$  é constante ao longo da curva  $\Gamma(t) = (t, \gamma(t), f(t, \gamma(t)))$ .

A normal na origem é dada por  $\xi(0) = \frac{1}{\sqrt{1+4k^2}}(0, -2k, 1)$  então, usando a equação (3.15), temos ao longo de  $\Gamma$  que:

$$\begin{cases} f_x(t, \gamma(t)) + \frac{\gamma(t)}{2} = 0 \\ f_y(t, \gamma(t)) - \frac{t}{2} = 2k \end{cases} \tag{3.26}$$

para  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , e derivando em relação a  $t$ :

$$\begin{cases} f_{xx}(t, \gamma(t)) + \gamma'(t)f_{xy}(t, \gamma(t)) + \frac{\gamma'(t)}{2} = 0 \\ f_{yx}(t, \gamma(t)) + \gamma'f_{yy}(t, \gamma(t)) - \frac{1}{2} = 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

Gostaríamos de calcular agora as segundas e terceiras derivadas de  $f$  ao longo da curva  $\Gamma$ . Substituindo (3.26) em (3.3) temos, ao longo da curva:

$$(1 + 4k^2)f_{xx} + f_{yy} = 0. \quad (3.28)$$

Da equação 3.13 temos:

$$4f_{xy}^2 - 4f_{xx}f_{yy} = 1,$$

assim podemos escrever:

$$\begin{aligned} 4f_{xy}^2 &= \cos^2 \theta, \\ -4f_{xx}f_{yy} &= \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Observamos explicitamente que  $f_{xx}f_{yy} \leq 0$  e, portanto, a última equação tem o sinal certo.

Também, a menos da troca de  $\theta$  por  $\pi - \theta$ , temos:

$$\begin{aligned} f_{xy} &= \frac{\cos \theta}{2}, \\ f_{yy} &= -\frac{\sin^2 \theta}{4f_{xx}}. \end{aligned}$$

Voltando a equação (3.28) finalmente chegamos a

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{\sin \theta}{2\sqrt{1 + 4k^2}}, \\ f_{yy} &= -\frac{\sin \theta}{2}\sqrt{1 + 4k^2}, \\ f_{xy} &= \frac{\cos \theta}{2}. \end{aligned}$$

Gostaríamos de achar as derivadas de terceira ordem. Para isso, primeiramente derivamos a equação (3.3) em relação a  $x$  e  $y$ , avaliamos em  $(t, \gamma(t))$  e temos:

$$(1 + 4k^2)f_{xxx} + f_{xyy} = \frac{k \sin \theta}{\sqrt{1 + 4k^2}},$$

$$(1 + 4k^2)f_{xxy} + f_{yyy} = 1 + \cos \theta.$$

Derivamos também (3.13) em relação a  $x$  e  $y$  que ao avaliarmos em  $(t, \gamma(t))$ , verificamos:

$$-\frac{\sqrt{1 + 4k^2} \sin \theta}{2} f_{xxx} + \frac{\sin \theta}{2\sqrt{1 + 4k^2}} f_{xyy} - \cos \theta f_{xxy} = 0,$$

$$-\frac{\sqrt{1+4k^2}\sin\theta}{2}f_{xxy} + \frac{\sin\theta}{2\sqrt{1+4k^2}}f_{yyy} - \cos\theta f_{xyy} = 0.$$

Com estas quatro equações podemos escrever o sistema como:

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{1+4k^2}\sin\theta}{2} & -\cos\theta & \frac{\sin\theta}{2\sqrt{1+4k^2}} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{1+4k^2}\sin\theta}{2} & -\cos\theta & \frac{\sin\theta}{2\sqrt{1+4k^2}} \\ (1+4k^2) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & (1+4k^2) & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{xxx} \\ f_{xxy} \\ f_{xyy} \\ f_{yyy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k\sin\theta}{\sqrt{1+4k^2}} \\ k(1+\cos\theta) \end{pmatrix}.$$

Para resolver este sistema fazemos inicialmente um escalonamento:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2\cos\theta}{\sqrt{1+4k^2}\sin\theta} & -\frac{1}{1+4k^2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2\cos\theta}{\sqrt{1+4k^2}\sin\theta} & -\frac{1}{1+4k^2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1+4k^2}(1+\cos^2\theta)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{1+\cos^2\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{xxx} \\ f_{xxy} \\ f_{xyy} \\ f_{yyy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k\sin^3\theta}{2\sqrt{1+4k^2}(1+\cos^2\theta)} \\ \frac{k(1+\cos\theta)(1+\cos^2\theta)+k\sin^2\theta\cos\theta}{(1+\cos^2\theta)} \end{pmatrix}.$$

e assim chegamos a:

$$\begin{aligned} f_{xxx}(t, \gamma(t)) &= \frac{k\sin\theta(1-\cos\theta)}{2(1+4k^2)^{3/2}}, \\ f_{xxy}(t, \gamma(t)) &= \frac{k\sin^2\theta}{2(1+4k^2)}, \\ f_{xyy}(t, \gamma(t)) &= \frac{k(1+\cos\theta)^2}{2}, \\ f_{yyy}(t, \gamma(t)) &= \frac{k\sin\theta(1+\cos\theta)}{2\sqrt{1+4k^2}}, \end{aligned} \tag{3.29}$$

Para mostrar que  $\mathcal{M}$  é regrada, é suficiente mostrar que a curva  $\Gamma$  é uma reta (podendo-se repetir o argumento, para qualquer outro ponto, por uma translação).

Vamos então mostrar que  $\Gamma$  é uma reta. Para isto derivamos a terceira componente  $z(t) = f(t, \gamma(t))$  da curva  $\Gamma$ ,

$$\frac{dz}{dt} = f_x(t, \gamma(t)) + \gamma'(t)f_y(t, \gamma(t)),$$

de onde Obtemos a segunda derivada:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = f_{xx}(t, \gamma(t)) + \gamma'(t)f_{xy}(t, \gamma(t)) + \gamma''(t)f_y(t, \gamma(t)) + \gamma'(t)(f_{yx}(t, \gamma(t)) + \gamma'(t)f_{yy}(t, \gamma(t))).$$

usando (3.27) temos que:

$$\begin{aligned} f_{xx}(t, \gamma(t)) + \gamma'(t)f_{xy}(t, \gamma(t)) &= -\frac{\gamma'(t)}{2}, \\ f_{yx}(t, \gamma(t)) + \gamma'(t)f_{yy}(t, \gamma(t)) &= \frac{1}{2}, \end{aligned} \tag{3.30}$$

assim,

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \gamma''(t)f_y(t, \gamma(t)).$$

E derivando a segunda equação de (3.27) em relação a  $t$  chegamos a:

$$f_{xxy}(t\gamma(t)) + 2\gamma'(t)f_{xyy}(t\gamma(t)) + (\gamma')^2f_{yyy}(t\gamma(t)) + \gamma''f_{yy}(t\gamma(t)) = 0. \quad (3.31)$$

Agora, se  $f_{yy}(0, \gamma(0)) = 0$  estamos nas condições do lema anterior e podemos assumir que  $f_{yy}(0, \gamma(0)) \neq 0$  e, portanto,  $f_{yy}(t, \gamma(t)) \neq 0$ , para todo  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Da segunda equação de (3.27) e das equações (3.29) temos:

$$\gamma'(t) = \frac{\cos \theta - 1}{\sin \theta \sqrt{4k^2 + 1}}, \quad (3.32)$$

substituindo  $\gamma'(t)$  e as equações (3.29) em (3.31), obtemos facilmente que

$$\gamma''(t)f_{yy}(t, \gamma(t)) = 0, \quad \text{para todo } t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

Portanto  $\gamma'(t)$  é constante, suponhamos  $\gamma'(t) = b$ , de onde temos  $\gamma(t) = bt + c$ , onde  $c$  também é constante. Usando (3.26) temos que

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{\gamma(t)}{2} + b(2k + \frac{t}{2}),$$

logo

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= -\frac{bt + c}{2} + b2k + \frac{bt}{2} \\ &= 2bk - c. \end{aligned}$$

Assim  $f(t, bt + c) = (2bk - c)t + d$ . O que implica que a superfície é regrada. □

### 3.4 Superfícies mínimas regradas.

Recordamos a classificação das superfícies mínimas regradas de  $\mathcal{H}_3$  obtida em [B]:

**Teorema 3.4.1** ([B]). *As superfícies mínimas de  $\mathcal{H}_3$  regradas por retas, a menos de isometrias, são:*

1. *Os planos;*
2. *O parabolóide hiperbólico,  $z = \frac{xy}{2}$ ;*
3. *O helicóide parametrizado por*

$$\begin{cases} x(t, s) = s \sin t \\ y(t, s) = s \cos t \\ z(t, s) = rt, \quad r \in \mathbb{R} - \{0\}; \end{cases}$$

4. As superfícies de equação:

$$z = \frac{xy}{2} + \frac{\lambda}{2} \left[ \ln(y + \sqrt{1+y^2}) + y\sqrt{1+y^2} \right], \lambda \in \mathbb{R} - \{0\};$$

5. As superfícies que localmente são gráficos da função  $z = \frac{1}{2}y(R(x) + x)$  onde  $R$  é a solução da equação

$$R''(4 + R^2) - 2R(R' + 1)(R' + 2) = 0; \quad (3.33)$$

6. As superfícies que localmente são parametrizadas por

$$\begin{cases} x(t, s) = t + su(t) \\ y(t, s) = s \\ z(t, s) = a(t) - \frac{st}{2}, \end{cases}$$

onde  $a$  e  $u$  são soluções do seguinte sistema:

$$\begin{cases} (1 + u^2 + t^2)u'' - (1 + 2u'a')tu' = 0 \\ (1 + u^2 + t^2)a'' - (1 + 2u'a')(ta' - u) = 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

Nosso interesse é nas superfícies mínimas regradas com aplicação de Gauss de posto um.

**Teorema 3.4.2.** *As superfícies mínimas regradas com aplicação de Gauss de posto um são as de tipo 2 e 4 na classificação acima.*

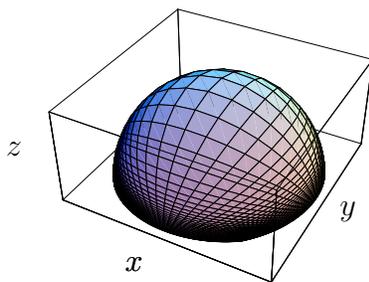


Figura 3.3: meia casca da esfera.

*Demonstração.* Para os casos das superfícies dos tipos 2 e 4 já demonstramos no lema 3.3.1 que a aplicação de Gauss tem posto 1.

Para as superfícies do tipo 1, os planos, teremos que, ou o plano é vertical, e neste caso a aplicação de Gauss tem posto zero, ou pode ser parametrizado pelo gráfico:

$$X(x, y) = (x, y, ax + by + c), \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Substituindo em (3.15)

$$\xi(x, y) = - \left( \frac{a + \frac{y}{2}}{w} \right) E_1 - \left( \frac{b - \frac{x}{2}}{w} \right) E_2 + \frac{1}{w} E_3,$$

onde

$$w = \sqrt{\left( a + \frac{y}{2} \right)^2 + \left( b - \frac{x}{2} \right)^2 + 1},$$

logo  $\xi(x, y)$  depende dos dois parâmetros  $x$  e  $y$  e portanto a aplicação de Gauss tem posto 2. Temos na figura 3.3 o gráfico da aplicação de Gauss quando a superfície é um plano.

Quando a superfície é do tipo 3, podemos reparametrizá-la fazendo

$$\frac{x}{y} = \frac{\text{sen } t}{\text{cos } t} = \text{tg } t,$$

logo  $t = \text{arctg} \left( \frac{x}{y} \right)$ . Assim a nova parametrização fica:

$$X(x, y) = \left( x, y, \rho \text{arctg} \left( \frac{x}{y} \right) \right),$$

e calculando a normal:

$$\xi(x, y) = - \left( \frac{\frac{\rho y}{x^2 + y^2} + \frac{y}{2}}{w} \right) E_1 - \left( \frac{\frac{\frac{\rho}{x}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}} - \frac{x}{2}}{w} \right) E_2 + \frac{1}{w} E_3,$$

onde

$$w = \sqrt{\left( \frac{\rho y}{x^2 + y^2} + \frac{y}{2} \right)^2 + \left( \frac{\frac{\rho}{x}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}} - \frac{x}{2} \right)^2 + 1}.$$

E neste caso também podemos concluir que a aplicação de Gauss para este tipo de superfície tem posto 2.

Vejamos o que ocorre para as superfícies do tipo 5, para as quais vale que

$$f(x, y) = \frac{y}{2}(R(x) + x),$$

de onde

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{y}{2} R'', \\ f_{xy} &= \frac{1}{2} (R' + 1), \\ f_{yy} &= 0. \end{aligned}$$

Usando a equação (3.13) obtemos

$$(R' + 1)^2 = 1,$$

e resolvendo esta equação ocorrem dois casos:

1. Se  $R' = 0$  então  $R(x) = cte$  e substituindo na equação (3.33) teríamos  $R(x) = 0$ . Logo

$$f(x, y) = \frac{xy}{2},$$

superfície que já analisamos.

2. Se  $R' = -2$  então  $R(x) = a - 2x$  de onde

$$f(x, y) = \frac{y}{2}(a - x),$$

aplicando a isometria  $L_{(a,0,0)}$  temos novamente

$$f(x, y) = \frac{xy}{2}.$$

Resta apenas verificar as superfícies de tipo 6. Podemos escrever

$$x(t, y) = t + yu(t), \tag{3.35}$$

e portanto, usando o teorema da aplicação implícita, localmente podemos escrever tais superfícies como:  $X(x, y) = (x, y, f(x, y))$ , onde

$$f(x, y) = a(t(x, y)) + \frac{1}{2}yt(x, y).$$

Derivando, iremos obter:

$$\begin{aligned} f_x &= a'(t)t_x + \frac{y}{2}t_x \\ f_y &= a'(t)t_y + \frac{y}{2}t_y + \frac{1}{2}t \\ f_{xx} &= a''(t)t_x^2 + \left(a'(t) + \frac{y}{2}\right)t_{xx} \\ f_{xy} &= a''(t)t_x t_y + \left(a'(t) + \frac{y}{2}\right)t_{xy} + \frac{1}{2}t_x \\ f_{yy} &= a''(t)t_y^2 + \left(a'(t) + \frac{y}{2}\right)t_{yy} + t_y. \end{aligned}$$

Ainda falta determinar  $t_x$ ,  $t_y$ ,  $t_{xx}$ ,  $t_{xy}$  e  $t_{yy}$ . Para calcular  $t_x$  basta derivar (3.35) em relação a  $x$ :

$$\begin{aligned} 1 &= t_x + yu_t t_x \\ 1 &= t_x(1 + yu') \\ t_x &= \frac{1}{1 + yu'}. \end{aligned}$$

Analogamente, derivando (3.35) em relação  $y$ :

$$t_y = \frac{-u}{1 + yu'},$$

de onde

$$\begin{aligned} t_{xx} &= -\frac{yu''}{r^3}, \\ t_{xy} &= -\frac{yuu''}{r^3} - \frac{u'}{r^2}, \\ t_{yy} &= \frac{2uu'}{r^2} - \frac{yu^2u''}{r^3}. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Substituindo em  $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 + \frac{1}{4} = 0$  temos

$$\begin{aligned} &a'' \left( a' + \frac{y}{2} \right) (t_{yy}t_x^2 + t_{xx}t_y^2 - 2t_{xy}t_x t_y) \\ &+ \left( a' + \frac{y}{2} \right) (t_{xx}t_y + t_{xy}t_x) \\ &+ \left( a' + \frac{y}{2} \right)^2 (t_{xx}t_{yy} - t_{xy}^2) - \frac{1}{4}t_x^2 + \frac{1}{4} = 0, \end{aligned}$$

então

$$\frac{1}{4}t_x^2 - \left( a' + \frac{y}{2} \right) u't_x^3 + \left( a' + \frac{y}{2} \right)^2 (u')^2 t_x^4 = \frac{1}{4},$$

que pode ser reescrito como

$$t_x^2 \left( \frac{1}{2} - \left( a' + \frac{y}{2} \right) u't_x \right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Assim temos a igualdade

$$\frac{1}{2} - \left( a' + \frac{y}{2} \right) u't_x = \frac{1}{4t_x^2},$$

e portanto, substituindo  $t_x$ :

$$(u')^2 y^2 + 2u'y + 2u'a'a = 0.$$

Podemos observar que o primeiro membro da equação acima é um polinômio de ordem 2 em  $y$ , logo seus coeficientes se anulam, de onde concluímos que  $u' = 0$  e portanto  $u = cte$ . Mediante uma rotação ao redor do eixo  $z$  podemos considerar que  $u = 0$ . Então, da segunda equação de (3.34), temos:

$$(1 + t^2)a'' - ta' = 0.$$

Vamos encontrar a solução desta equação. Seja  $v = a'$  então

$$(1 + t^2)v' - tv = 0,$$

ou

$$(1 + t^2)\frac{dv}{dt} - tv = 0.$$

Decorre daí que

$$\int \frac{1}{v} dv = \int \frac{t}{t + t^2} dt,$$

logo

$$\ln |v| = \frac{1}{2} \ln(1 + t^2) + \ln C,$$

ou, equivalentemente:

$$e^{\ln |a'|} = e^{\frac{1}{2} \ln(1+t^2) + \ln C},$$

Assim a nova equação diferencial fica:

$$a' = (1 + t^2)^{\frac{1}{2}} C,$$

e, integrando, temos:

$$a = C \left( \frac{t}{2} \sqrt{1 + t^2} + \frac{1}{2} \ln(t + \sqrt{1 + t^2} + k) \right).$$

Portanto a superfície é de tipo 4 e isso completa a demonstração.  $\square$

### 3.5 Gráficos mínimos completos

Um Teorema clássico de Bernstein, garante que, uma função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , solução da equação dos gráficos mínimos em  $\mathbb{R}^3$ :

$$\operatorname{div} \frac{\nabla f}{[1 + \|\nabla f\|^2]^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

é afim, i.e  $f = ax + by + c$ .

**Observação 3.5.1.** *O Teorema de Bernstein vale para funções  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \leq 7$ , mas é falso em dimensões maiores que 7. No entanto vale em qualquer dimensão com condições adicionais sobre o gradiente de  $f$ .*

Assim como enunciado, o Teorema de Bernstein não vale para gráficos mínimos em  $\mathcal{H}_3$ , como vimos na seção anterior. Nesta seção vamos demonstrar um resultado, do tipo Bernstein, em  $\mathcal{H}_3$ , com condições adicionais sobre  $\nabla f$ , no espírito de (3.5.1).

Vamos começar com o seguinte:

**Lema 3.5.1.** *Seja  $f$  uma solução de 3.12. Então:*

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \leq 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

e a desigualdade é estrita onde  $f_{yy} \neq 0$ .

*Demonstração.* Sejam:

$$a = 1 + (f_y - \frac{x}{2})^2, \quad b = (f_x + \frac{y}{2})(f_y - \frac{x}{2}), \quad c = 1 + (f_x + \frac{y}{2})^2.$$

A equação dos gráficos mínimos (3.12) fica:

$$af_{xx} - 2bf_{xy} + cf_{yy} = 0.$$

Multiplicando por  $f_{yy}$  e dividindo por  $a$  ( $\neq 0$ ), temos:

$$f_{xx}f_{yy} - 2\frac{b}{a}f_{xy}f_{yy} + \frac{c}{a}f_{yy}^2 = 0,$$

de onde

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -f_{xy}^2 + 2\frac{b}{a}f_{xy}f_{yy} - \frac{c}{a}f_{yy}^2 = -\frac{1}{a}(af_{xy}^2 - 2bf_{xy}f_{yy} + cf_{yy}^2).$$

Consideramos a expressão  $af_{xy}^2 - 2bf_{xy}f_{yy} + cf_{yy}^2$  como um polinômio de segundo grau em  $f_{xy}$ , temos que o discriminante  $\Delta$  é dado por:

$$\Delta = 4b^2f_{yy}^2 - 4acf_{yy}^2 = 4f_{yy}^2(b^2 - ac) = -4f_{yy}[1 + (f_x + \frac{y}{2})^2 + (f_y - \frac{x}{2})^2] \leq 0,$$

e é estritamente negativo onde  $f_{yy} \neq 0$ . Portanto:

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -\frac{1}{a}(af_{xy}^2 - 2bf_{xy}f_{yy} + cf_{yy}^2) \leq 0.$$

e a desigualdade é estrita onde  $f_{yy} \neq 0$ .

□

**Observação 3.5.2.** *Por um Teorema de Hopf (veja [H] e [M]), temos que (3.5.1) implica que, se  $f$  for uma solução inteira de (3.12), com  $f_{yy} \neq 0$ , então  $f$  não é limitada.*

Antes de provar o resultado prometido, lembramos o seguinte:

**Teorema 3.5.1.** (Liouville) *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma solução da equação:*

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = 0,$$

satisfazendo a condição  $v|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j$ ,  $v > 0$ . Suponha  $f(x) \geq a$  em  $\mathbb{R}^n$ . então  $f$  é constante.

*Demonstração.* Veja ( $[G]$ ). □

**Observação 3.5.3.** *O fato da equação não ter termos constante é essencial como mostra o exemplo  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum x_i^2$ .*

O resultado prometido é o seguinte:

**Teorema 3.5.2.** *Seja  $(x, y, f(x, y))$  um gráfico mínimo completo em  $\mathcal{H}_3$ . Então  $w$  não pode ser limitada.*

*Demonstração.* Suponhamos por absurdo que  $w$  é limitado, então existe constante  $k > 0$  talque  $1 \leq w(x, y) < k$ , para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Usando a equação de gráficos mínimos (3.3) verificamos que  $v_1 = f_x + \frac{y}{2}$  e  $v_2 = f_y - \frac{x}{2}$  são soluções da equação

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = 0,$$

onde

$$(a_{ij}) = \frac{1}{w^3} \begin{pmatrix} 1 + (f_y - \frac{x}{2})^2 & -(f_x + \frac{y}{2})(f_y - \frac{x}{2}) \\ -(f_x + \frac{y}{2})(f_y - \frac{x}{2}) & 1 + (f_x + \frac{y}{2})^2 \end{pmatrix}.$$

Vejamos que  $(a_{ij})$  satisfaz a condição do teorema de Liouville:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \xi_i \xi_j &= \frac{(1 + (f_y - \frac{x}{2})^2) \xi_1^2 - 2(f_x + \frac{y}{2})(f_y - \frac{x}{2}) \xi_1 \xi_2 + (1 + (f_x + \frac{y}{2})^2) \xi_2^2}{w^3} \\ &= \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{w^3} + \frac{(f_y - \frac{x}{2})^2 \xi_1^2 + (f_x + \frac{y}{2})^2 \xi_2^2}{w^3} - \frac{2(f_y - \frac{x}{2})(f_x + \frac{y}{2}) \xi_1 \xi_2}{w^3} \\ &= \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{w^3} + \frac{((f_y - \frac{x}{2}) \xi_1 - (f_x + \frac{y}{2}) \xi_2)^2}{w^3} \end{aligned}$$

mas

$$\frac{((f_y - \frac{x}{2}) \xi_1 - (f_x + \frac{y}{2}) \xi_2)^2}{w^3} > 0$$

logo, visto que  $w$  é limitado

$$\sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \xi_i \xi_j > \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{w^3} \geq \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{k^3}.$$

Dado que  $v_1$  e  $v_2$  são limitados, estamos sob as condições do teorema de Liouville, então  $v_1$  e  $v_2$  são constante, isto significa que a aplicação de Gauss é constante, o que é uma contradição. □

# Referências Bibliográficas

- [A] U. Abresch, H. Rosenberg, A Hopf differential for constante mean curvature surfaces in  $S^2 \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , *Acta Math.*, 193(2): 141-174, 2004.
- [AN] K.Akutagawa, S.Nishikawa, The Gauss map and spacelike surfacs with prescribed mean curvature in Minkowski 3-space, *Tohoku Math. J.(2)*, 42(1): 67-82,1990.
- [AR] U. Abresch, H. Rosenberg, Generalized Hopf differential, *Mat. Contemp.*, vol 28, 1-28, 2005.
- [B] M.Bekkar, T.Sari, Surfaces minimales regléé dans l'espace de Heisemberg  $\mathcal{H}_{33}$ , *Rend. Sem. Sci. Univ. Pol. Torino*, vol. 50, no. 3, 243-254, 1992.
- [BD] W.E. Boyce, R.C. Diprima *Equações diferenciais elementares e problemas de valor de contorno*, sexta edição, LTC Editora, 1997.
- [Ca] M. do Carmo, *Geometria diferencial de curvas e superfícies*, SBM, 2005.
- [C] M. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, IMPA, 2005.
- [CG] R. Caddeo, A. Gray, *Lezioni di geometria differenziale su curve e superfici*, volume 1, C.U.E.C., 2001.
- [CT] H.I. Choi, A. Treibergs, Gauss Maps of spacelike constant mean curvature hypersurfaces of Minkowski space, *J.Differential Geom.*, 32(3):775-817, 1990.
- [D] D. Benoît, The Gauss map of minimal surfaces in the Heisenberg grup, *arXiv:math.DG/0606299 v1*, 2006.
- [FM] I. Fernández, P.Mira, Harmonic maps and constant mean curvature serfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , *ArXiv:math.DG/057386*, 2005.
- [Fu] G. Fubini, Sugli spazi che ammettono un gruppo continuo di movimenti, *Ann di Mat.*, Tomo 8, série III, 1903.
- [Ga] K.F. Gauss, *General Investigations of Curved Surface*, Raven Press, New York, 1965.

- [G] E. Giusti, Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation, Monographs in Mathematics, Birkhäuser, 1984.
- [H] E. Hopf, On S. Bernstein's theorem on surface  $z(x, y)$  of nonpositive curvature, Proc. of the Am. Math Society, vol. 1, numb. 1, Feb., 1950.
- [HTTW] Z.C.Han, L.F. Tam, A. Treibergs, T. Wam Harmonic maps from the complex plane into surfaces with nonpositive curvature, Comm. Anal. Geom., 3(1-2): 85-114, 1995.
- [K] K.Kenmotsu, Weierstrass formula for surfaces of prescribed mean curvature, Math. Ann., 245(2): 89-99, 1979.
- [La] J.L.Lagrange, Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima e les minima des formules intégrales indéfinies, Miscellanea Taurinensia 2, 173-195, 1760.
- [L] E. L. Lima, Curso de análise, volume 2, Projeto Euclides, IMPA, 1981.
- [M] E. Mickle, A remark on a theorem of S. Bernstein, Proc. of the Am. Math Society, vol. 1, numb. 1, Feb., 1950.
- [MSP] F. Mercuri, C.F. Serrudo, R. Pedrosa, Invariant surfaces of the Heisenberg group, Annali di Matematica Pura ed Applicata, Italia, v. CLXXVI, n. IV, p. 173-194, 1999.
- [On] I. I. Onnis, Bolle di sapone, minimalità e dintorni, Tesi di Laurea, Università degli Studi di Cagliari 1999-2000.
- [O] I. I. Onnis, Supecífies em certos espaços homogêneos tridimensionais, Tese de Doutorado, UNICAMP, 2005.
- [Os] R.Osserman, Minimal surfaces in  $\mathbb{R}^3$ , Global Differential Geometry, vol. 27, 1989.
- [P] Grazia Pirino, Classificazione secondo Bianchi delle metriche riemanniane tridimensionali in base alla dimensione del gruppo delle isometrie, Tesi di Laurea, Università degli Studi di Cagliari, 1989-90.
- [R] J. Ripoll, On Hipersurfaces of Lie group, Illinois Journal of Mathematics, vol. 35 , no. 1, 47-55, 1991.
- [Ri] B. Riemann, Sur les hypotheses qui servent de fondement a la géométrie, Oeuvres Mathématiques de Riemann,traduites par L.Langel, Librairie Albert Blanchard, 280-299, Paris, 1965.

- [S] C.F. Serrudo, Geometria das subvariedades do grupo de Heisenberg, Tese de doutorado, UNICAMP, 1996.
- [T] W.P. Thurston, The geometry and topology of 3-manifold, Mimeographed Notes, Princeton University, Princeton, NJ, 1978.
- [Th] W.P. Thurston, Three-dimensional geometry and topology of 3-manifold, Mimeographed Notes, Princeton University, Princeton, NJ, 1978.
- [W] T.Y.H. Wan, Constant mean curvature surface, harmonic maps, and universal Teichmüller space, *J.Differential Geom.*, 35(3):643-657, 1992.
- [X] Y.L.Xin, On the Gauss image of a spacelike hypersurface with constant mean curvature in Minkowski space, *Comment. Math. Helv.*, 66(4):590-598, 1991.