Geometria Analitica dello spazio

(1) Determinare un'equazione parametrica e un'equazione cartesiana delle seguenti rette: r: passante per i punti $P_1 = (1, 0, 2)$ e $P_2 = (-1, 2, 0)$, s: parallela alla retta r e passante per il punto $O = (0, 0, 0)$.

(2) Determinare un'equazione parametrica della retta di equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} 2x - z + 4 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

(3) Sia π il piano che contiene la retta

$$r : \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

e passante per il punto $P = (-4, 1, 2)$.

(4) Determinare un'equazione parametrica e un'equazione cartesiana della retta passante per il punto $P = (0, 1, 2)$ e di vettore direttore $v = (2, 2, -1)$.

(5) Determinare un'equazione (parametrica o cartesiana) del piano passante per i tre punti $P_1 = (0, 1, 0)$, $P_2 = (-1, 1, 0)$ e $P_3 = (0, 0, 2)$.

(6) Determinare un'equazione parametrica e un'equazione cartesiana dei seguenti piani:

π_1: passante per $P_1 = (1, 1, 1)$ e contenente la retta

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -t \end{cases}$$

π_2: passante per i tre punti $P_1 = (1, 0, 0)$, $P_2 = (2, -1, -3)$ e $P_3 = (0, 2, 1)$

(7) Dati i tre punti $P_1 = (1, 0, 2)$, $P_2 = (2, 1, -1)$ e $P_3 = (0, 1, 1)$ e la retta

$$r : \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

Determinare:

- un'equazione cartesiana e l'equazione parametrica del piano π passante per P_1, P_2 e P_3.
- se r e π sono incidenti, e in tale caso trovare il loro punto di intersezione.

(8) Dato il piano $\pi : -y + z + 3 = 0$ determinare la retta parallela all'asse x e giacente su π.

(9) Determinare i valori del parametro reale k per i quali la retta r di equazioni: $r : \begin{cases} x = kt \\ y = -kt + 2 \\ z = 1 + 3k \end{cases}$

ortogonale o parallela al piano, π, di equazione $\pi :\ 3x - y + z + 1 = 0$.

(10) Fra tutti i piani passanti per la retta r di equazioni: $r : \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ determinare quelli ortogonali al piano $\gamma :\ x + y + z - 4 = 0$ e verificare se esiste un piano ortogonale all'asse y.

(11) Determinare gli angoli formati dalle rette di equazioni parametriche:

$$r: \begin{cases} x = -3t \\ y = -t - 1 \\ z = t + 1 \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x = 2 \\ y = 2s - 2 \\ z = s + 1. \end{cases}$$

(12) Determinare, al variare del parametro reale k, la posizione reciproca delle rette:

$$r: \begin{cases} x + ky - 2z = 0 \\ x + y + z - k = 0 \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -x + ky - 2 = 0. \end{cases}$$

(13) Date le rette

$$r: \begin{cases} x + 2y + 5z = 5 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x + 2z = 3 \\ y + z = 3. \end{cases}$$

calcolare la distanza tra r ed s

(14) Determinare la proiezione ortogonale s della retta di equazioni $r: \begin{cases} -x - y + z + 1 = 0 \\ 2x - z - 2 = 0 \end{cases}$ sul piano π di equazione $3x + y - z - 1 = 0$

(15) Siano r_1, r_2 le rette in $\mathbb{R}^3$ di equazione

$$r_1: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 - t \\ z = 2 \end{cases}$$

Trovare il piano parallelo a r_1 ed r_2 ed equidistante da r_1 e r_2.

(16) Date le due rette

$$r: \begin{cases} x - 2y - z = -k \\ ky + z = -1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x - 2y - kz = -1 \\ 2x - 3ky - z = -k - 1 \end{cases}$$

Determinare, in funzione del parametro k la loro posizione reciproca e, nel caso siano incidenti, calcolarne il punto di intersezione.

(17) Sia r la retta passante per $P = (5, 3, -1)$ e $Q = (3, 2, -1)$; s la retta perpendicolare a

$$\pi: \quad 3x - y - 2z = 1$$

e passante per $(0, 0, 0)$. Si calcoli la distanza di r ed s.

(18) Sia r la retta passante per $P = (1, 1, -1)$ e $Q = (3, 2, -1)$; s la retta perpendicolare al piano

$$\pi: \quad 3x - y - 2z = 1$$

e passante per $(3, -1, -2)$. Si calcoli la distanza di r ed s.

(19) Siano r una retta parallela ad un piano π ed s una retta incidente il piano π. Le rette r ed s sono:

- sghembe
- incidenti
- possono verificarsi entrambi i casi

(20) Siano π e π' due piani paralleli e distinti. Sia π'' un piano incidente π e π' e siano $r : \pi \cap \pi''$ e $t : \pi' \cap \pi''$. Le rette$r$ e t sono:

- parallele
- sghembe

- incidenti

(21) Siano s la retta perpendicolare a π passante per $Q = (1, 0, 1)$ e t la retta parallela ad r passante per $R = (4, 2, 3)$. Si dica se r, s e t sono a due a due complanari, motivando la risposta.

(22) Siano π un piano in R^3, r e s due rette tali che $d(r, \pi) = 2 = d(s, \pi)$. Quale delle seguenti affermazioni vera:
- Le rette r e s sono incidenti.
- Le rette r e s sono parallele.
- Le rette r e s sono sghembe.
- Possono verificarsi tutti e tre i casi.

(23) Siano r, s, t tre rette in R^3 tali che r ed s sono complanari e s e t sono complanari. Allora:
- Le rette r e t sono complanari.
- Le rette r e t sono parallele.
- Le rette r e t sono sghembe.
- Possono verificarsi tutti e tre i casi.

(24) Siano π e π' due piani incidenti e sia $r : \pi \cap \pi'$. Siaπ'' un piano ortogonale a π e π'. La retta r è :
- ortogonale a π''
- parallela a π''
- contenuta in π''

(25) Siano π e π' due piani ortogonali e sia $r : \pi \cap \pi'$. Sia s una retta in π ortogonale ad r e sia t una retta in π' distinta da$r$. Le rette s e t sono:
- ortogonali
- parallele
- complanari

(26) Siano r e s due rette parallele ad un piano π. Le rette r ed s sono:
- sghembe
- parallele
- possono verificarsi entrambi i casi

(27) Dati una retta r e un punto P nello spazio, quante rette esistono passanti per P e ortogonali ad r?
- infinite
- una
- nessuna

(28) Fissato il riferimento ortonormale $R(O, i, j, k)$ nello spazio euclideo sia S il cono di vertice l'origine, di equazione

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Dare una rappresentazione parametrica di S .

(29) Sia γ la retta di equazioni parametriche

$$x = 1 \qquad y = -t \qquad z = t$$

e sia S la superficie ottenuta ruotando γ intorno all'asse z.

a) Determinare una rappresentazione parametrica di S.

b) Verificare che la retta γ è sghemba rispetto all'asse z.

c) Studiare le intersezioni di S con i piani $z = costante$, $y = costante$, $x = costante$.

d) Trovare una retta r, diversa da γ, ma come γ passante r per il punto $P(1, 0, 0)$ e tutta contenuta sulla superficie S.

e) Verificare che ruotando la retta r intorno all'asse z si ottiene di nuovo la superficie S.

(30) Fissato nello spazio un riferimento metrico $Oxyz$, si consideri la conica C di equazioni

$$\begin{cases} z^2 + y^2 - 2yz + 2z = 0 \\ x = 0 \end{cases} .$$

Determinata l'equazione del cilindro proiettante la suddetta conica secondo la direzione della retta di equazioni

$$x - z = y = 0,$$

si scriva l'equazione della conica C_1 intersezione del cilindro con il piano $[xy]$.

(31) Fissato il riferimento ortonormale $R(O, i, j, k)$ nello spazio euclideo si consideri la retta r per il punto $P(1, 2, -2)$ e vettore direttore $u = 3i + j + k$. Determinare.

a) L'equazione della sfera S tangente in P alla retta r e avente centro sulla retta s di equazioni

$$x = 2z + 8 \qquad y = 3z + 9$$

b) L'equazione del piano tangente in P a S.

c) L'equazione del cono di vertice $V(2, -3, -2)$ circoscritto alla sfera S.

d) L'equazione del cilindro circoscritto alla sfera S con generatrici parallele al vettore u.