Geometria Analitica del piano

(1) Determinare un'equazione parametrica e un'equazione cartesiana delle seguenti rette: r: passante per i punti $P_1 = (0,2)$ e $P_2 = (-1,0)$, s: parallela alla retta r e passante per il punto $O = (0,0)$.

(2) Determinare un'equazione parametrica e un'equazione cartesiana della retta passante per il punto $P = (1,2)$ e di vettore direttore $v = (2,-1)$.

(3) Determinare i valori del parametro reale k per i quali le rette $r : x + ky - 2 = 0$ $s : 2x - ky + k = 0$ sono incidenti, parallele o coincidenti

(4) Consideriamo nel piano i punti $A = (1,1)$ e $B = (1,3)$ e la retta r di equazione $x + y = 0$.
   a) determinare le equazioni delle circonferenze passanti per i punti A e B e tangenti alla retta r;
   b) verificare che il luogo dei punti P che sono centro di una circonferenza passante per A e tangente a r è una parabola, e scriverne l'equazione.

(5) Di un triangolo ABC sono noti il punto $A(-1,4)$, il punto medio $M(0,2)$ di AB ed il baricentro $G(2,2)$. Trovare:
   a) le coordinate di B e C,
   b) le equazioni della circonferenza circoscritta.

(6) Siano $A(-3,1), B(1,-1)$ e $D(-1,5)$ i vertici di un trapezio rettangolo$ABCD$, tale che A e B siano gli estremi della base maggiore e la diagonale minore AC é ortogonale al vettore $u(3,-4)$.
   - Determinare le coordinate del vertice C.
   - Detto C' il punto simmetrico di C rispetto alla retta AB, calcolare l'area del triangolo OAC' dove O è l'origine del riferimento.
   - Determinare e studiare la conica passante per i punti A, B, C, D, C'.

(7) Dati i punti $A(5,-1)$ e $B(-1,7)$ determinare l'equazione del luogo dei punti P del piano tali che le rette PA e PB siano ortogonali. Studiare il luogo trovato.

(8) Scrivere l'equazione della circonferenza con centro nel punto $C(1,0)$ tangente alla retta di equazione $3x - 2y = 0$.

(9) Consideriamo il fascio di coniche

$$F(t) \equiv tx^2 + 2y^2 - 2txy - 4tx + 8y = 0$$

   a) Verificare che il punto $D = (0,-2)$ è un centro per tutte le coniche del fascio;
   b) è possibile che qualche conica $F(t)$ sia:
      – una parabola?

- una coppia di rette incidenti?
- un punto?
- una coppia di rette parallele?

Se non possibile, spiegare perché; se è possibile, dire per quali valori di t ciò avviene.

c) Dare un esempio di un valore t per cui $F(t)$ è un'ellisse e di un altro per cui $F(t)$ è un'iperbole.

(10) Consideriamo nel piano i punti $A = (1, 1)$ e $B = (1, 3)$ e la retta r di equazione $x + y = 0$.

a) determinare le equazioni delle circonferenze passanti per i punti A e B e tangenti alla retta r;

b) verificare che il luogo dei punti P che sono centro di una circonferenza passante per A e tangente a r è una parabola, e scriverne l'equazione.

(11) Dato il fascio di coniche F

$$\lambda(x + y - 2)(4x + y - 4) + \mu xy = 0$$

Determinare:

a) L'equazione della conica C che passa per il punto $P(2, 2)$.

b) L'equazione del luogo geometrico descritto dai centri delle coniche del fascio.

c) Le equazioni delle parabole e delle coniche degeneri.

d) Le equazioni delle coniche di F aventi il centro sulla retta di equazione $x + y = 1$.

e) L'equazione della conica di F avente per direzione asintotica $v(2, -3)$.

f) L'equazione della conica di F per la quale i due vettori $u(3, 2)$ e $w(2, -2)$ rappresentino direzioni coniugate.