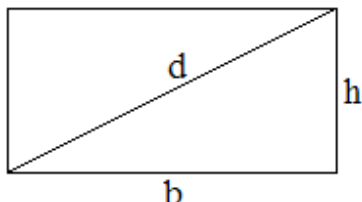


# 11. Geometria piana

## 1. Formule fondamentali

### Rettangolo



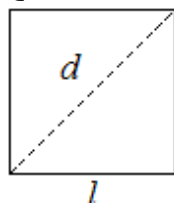
$$A = b \cdot h \quad b = \frac{A}{h} \quad h = \frac{A}{b}$$

$$2p = 2 \cdot (b + h) \quad p = b + h \quad h = p - b \quad b = p - h$$

$$d = \sqrt{b^2 + h^2} \quad b = \sqrt{d^2 - h^2} \quad h = \sqrt{d^2 - b^2}$$

b = base                      h = altezza  
d = diagonale                A = area  
2p = perimetro                p = semiperimetro

### Quadrato

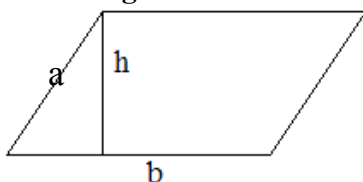


$$A = l^2 \quad l = \sqrt{A}$$

$$d = l\sqrt{2} \quad l = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

l = lato                      d = diagonale  
A = area                      2p = perimetro                p = semiperimetro

### Parallelogramma



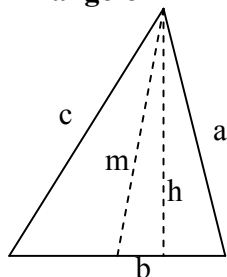
$$A = b \cdot h \quad b = \frac{A}{h} \quad h = \frac{A}{b}$$

$$2p = 2 \cdot (b + a) \quad b = p - a \quad a = p - b$$

b = base                      h = altezza  
a = lato obliquo  
A = area                      2p = perimetro

I lati opposti sono paralleli e uguali.  
Gli angoli opposti sono uguali.  
Gli angoli adiacenti sono supplementari.  
Le diagonali si tagliano reciprocamente a metà.

### Triangolo



$$A = \frac{b \cdot h}{2} \quad b = \frac{2 \cdot A}{h} \quad h = \frac{2 \cdot A}{b}$$

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ formula di Erone}$$

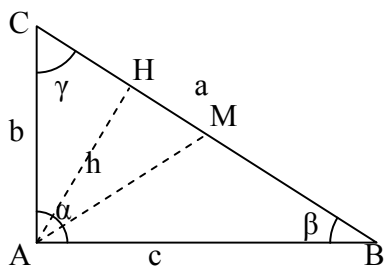
$$2p = a + b + c \quad p = \frac{a + b + c}{2}$$

Mediana relativa al lato a è  $m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$

Bisettrice relativa al lato a è  $l_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)}$

a, b, c = lati                      h = altezza  
A = area                      2p = perimetro  
p = semiperimetro

### Triangolo rettangolo



a = ipotenusa    b = cateto    c = cateto  
h = altezza relativa all'ipotenusa  
AM = mediana relativa all'ipotenusa  
A = area    2p = perimetro

$$A = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{c \cdot b}{2} \quad h = \frac{c \cdot b}{a} \quad 2p = a + b + c$$

Teorema di Pitagora

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

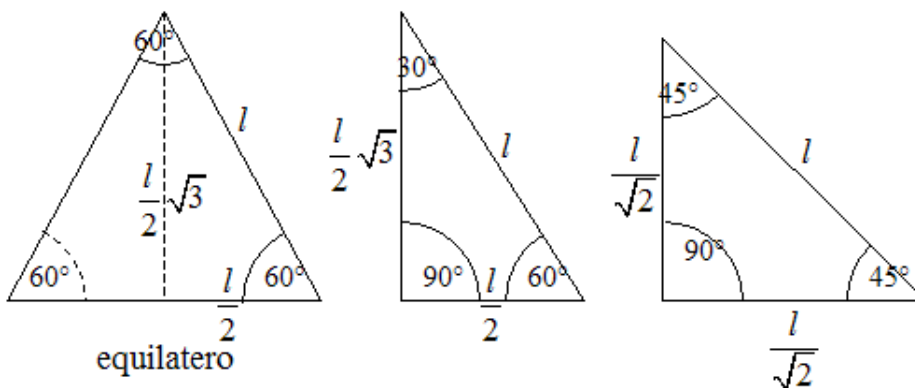
1° teorema di Euclide  $\overline{AB^2} = \overline{BC} \cdot \overline{HB}$ ,  $\overline{AC^2} = \overline{BC} \cdot \overline{HC}$

2° teorema di Euclide  $\overline{AH^2} = \overline{BH} \cdot \overline{HC}$

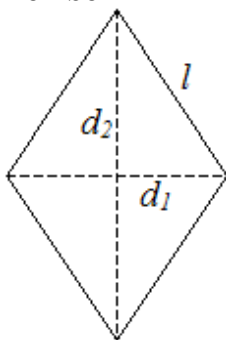
Il triangolo rettangolo è sempre inscritto in una semicirconferenza di diametro l'ipotenusa e raggio AM.

$$\overline{AM} = \frac{a}{2}$$

### Triangoli particolari



### Rombo

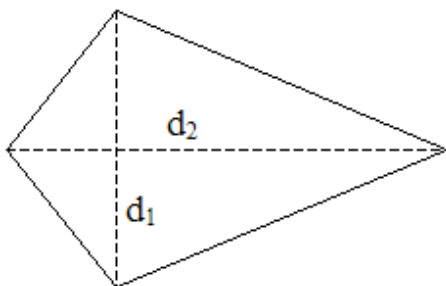


$$2p = 4 \cdot l \quad A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \quad d_1 = \frac{2A}{d_2} \quad d_2 = \frac{2A}{d_1}$$

$$l = \sqrt{\frac{d_1^2}{4} + \frac{d_2^2}{4}} \quad r = \frac{d_1 \cdot d_2}{4l}$$

l = lato    d1, d2 = diagonali  
A = area    2p = perimetro  
r = raggio del cerchio inscritto

### Deltoide

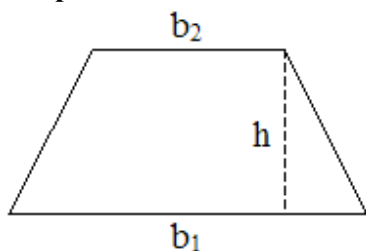


d1, d2 = diagonali, A=area

$$A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \quad d_1 = \frac{2A}{d_2} \quad d_2 = \frac{2A}{d_1}$$

Il deltoide ha le diagonali perpendicolari e i lati uguali a due a due.

**Trapezio**

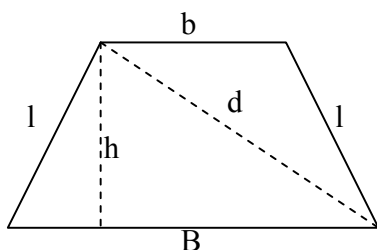


$b_1$  = base maggiore     $b_2$  = base minore     $A$  = area

$$A = \frac{(b_1 + b_2) \cdot h}{2} \quad h = \frac{2A}{b_1 + b_2} \quad b_1 = \frac{2A}{h} - b_2$$

$$b_2 = \frac{2A}{h} - b_1$$

**Trapezio isoscele**

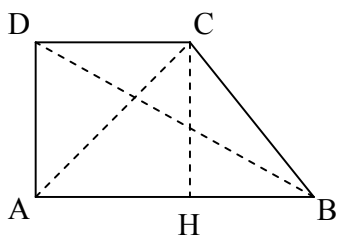


$B$  = base maggiore,  $b$  = base minore,  $l$  = lato,  $h$  = altezza  
 $d$  = diagonale,  $A$  = area,  $2p$  = perimetro

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2} \quad 2p = 2l + b + B \quad l = \sqrt{h^2 + \left(\frac{B - b}{2}\right)^2}$$

$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{B - b}{2}\right)^2} \quad d = \sqrt{h^2 + \left(\frac{B + b}{2}\right)^2}$$

**Trapezio rettangolo**



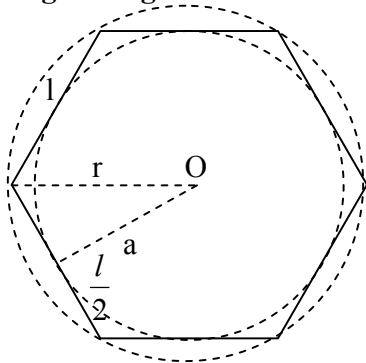
$DC$  = base minore,  $AB$  = base maggiore,  $CB$  = lato obliquo,  $DA = CH$  = altezza,  $AC$  e  $DB$  diagonali

$$HB = AB - DC \quad \overline{CB} = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{HB}^2}$$

$$\overline{DB} = \sqrt{\overline{DA}^2 + \overline{AB}^2} \quad \overline{AC} = \sqrt{\overline{DC}^2 + \overline{AD}^2}$$

$$\overline{CH} = \sqrt{\overline{CB}^2 - \overline{HB}^2}$$

**Poligono regolare**



lato triangolo equilatero  $l_3 = r\sqrt{3}$ , lato quadrato  $l_4 = r\sqrt{2}$

lato pentagono regolare  $l_5 = r \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2}$

lato decagono regolare  $l_{10} = r \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

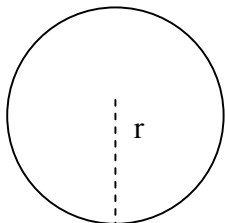
$$A = p \cdot a = \frac{1}{2} n \cdot l \cdot a = l^2 \cdot f$$

$$a = l \cdot N = \frac{A}{p} \quad 2p = n \cdot l \quad r = \sqrt{a^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

Ha tutti gli angoli e tutti i lati uguali.  
 $l$  = lato del poligono,  $n$  = numero di lati  
 $r$  = raggio del cerchio circoscritto,  
 $a$  = apotema = raggio del cerchio inscritto,  
 $2p$  = perimetro,  $p$  = semiperimetro,  
 $A$  = area,  $f$  = numero fisso area,  
 $N$  = numero fisso apotema

	$N$ numero fisso apotema	$f$ numero fisso area
Triangolo	0.289	0.433
Quadrato	0.5	1
pentagono	0.688	1.72
esagono	0.866	2.598
ettagono	1.038	3.634
ottagono	1.207	4.828
ennagono	1.374	6.182
decagono	1.539	7.694

**Circonferenza e cerchio**

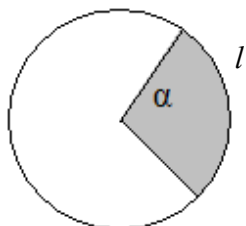


$C =$  Circonferenza     $A =$  area     $d =$  diametro  
 $\pi \approx 3.14159265359\dots$

$$C = 2\pi r \quad r = \frac{C}{2\pi} \quad C = \pi d \quad \frac{C}{d} = \pi$$

$$A = \pi r^2 \quad r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

**Settore circolare**

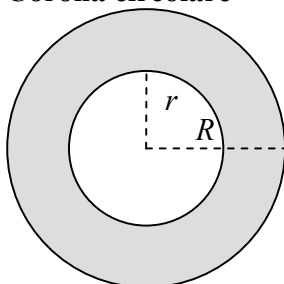


$\alpha =$  angolo del settore,  $l =$  lunghezza dell'arco

$$l = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180^\circ} \quad r = \frac{l \cdot 180^\circ}{\pi \cdot \alpha} \quad \alpha = \frac{l \cdot 180^\circ}{\pi \cdot r}$$

$$A = \frac{\pi \cdot r^2}{360^\circ} \cdot \alpha \quad \alpha = \frac{A \cdot 360^\circ}{\pi \cdot r^2} \quad r = \sqrt{\frac{A \cdot 360^\circ}{\pi \cdot \alpha}}$$

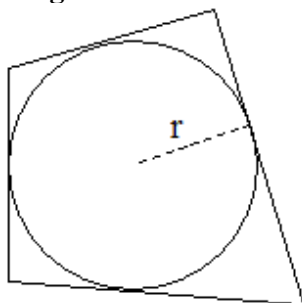
**Corona circolare**



$r =$  raggio del cerchio interno,  
 $R =$  raggio del cerchio esterno,  
 $A =$  area

$$A = \pi(R^2 - r^2)$$

**Poligono circoscritto a una circonferenza**



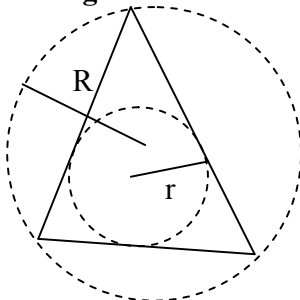
$2p =$  perimetro del poligono,  $p =$  semiperimetro

$A =$  area del poligono

$r =$  raggio del cerchio inscritto

$$A = p \cdot r \quad r = \frac{A}{p} \quad 2p = \frac{2A}{r}$$

**Triangolo inscritto e circoscritto a una circonferenza**



$A =$  area del triangolo     $a, b, c =$  lati del triangolo

$R =$  raggio del cerchio circoscritto

$r =$  raggio del cerchio inscritto

$p =$  semiperimetro

$$A = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R} \quad R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot A} \quad r = \frac{A}{p}$$

## 2. Prime definizioni di geometria razionale

**Enti primitivi.** Gli enti primitivi della geometria sono punto, retta, piano.

**Semiretta.** Si chiama semiretta la parte di retta costituita da un punto di essa, detto origine della semiretta, e da tutti i punti che stanno dalla stessa parte rispetto all'origine.

**Semipiano.** Si dice semipiano di origine la retta  $r$  e la figura formata dalla retta  $r$  e da una delle due parti in cui essa divide il piano.

**Segmento.** Si chiama segmento  $AB$  l'insieme dei punti  $A$  e  $B$  e di tutti quelli che stanno tra  $A$  e  $B$ .

**Segmenti consecutivi.** Due segmenti si dicono consecutivi se hanno in comune soltanto un estremo.

**Segmenti adiacenti.** Due segmenti si dicono adiacenti se sono consecutivi ed appartengono alla stessa retta.

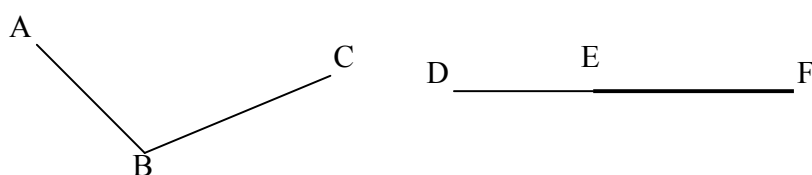


Figura 1.  $AB$  e  $BC$  sono segmenti consecutivi;  $DE$  e  $EF$  sono segmenti adiacenti.

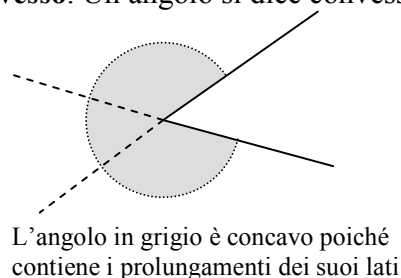
**Punto medio.** Si chiama punto medio di un segmento il punto interno al segmento che lo divide in due parti congruenti.

### Angolo

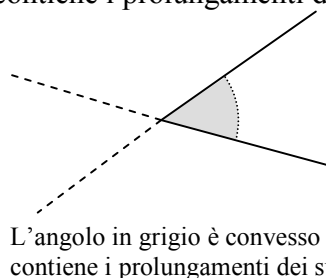
Si dice angolo ciascuna delle due parti in cui un piano è diviso da due semirette aventi l'origine in comune; le semirette si dicono lati dell'angolo; l'origine comune alle due semirette si dice vertice dell'angolo.

**Angolo concavo.** Un angolo si dice concavo se contiene i prolungamenti dei suoi lati.

**Angolo convesso.** Un angolo si dice convesso se non contiene i prolungamenti dei suoi lati.



L'angolo in grigio è concavo poiché contiene i prolungamenti dei suoi lati



L'angolo in grigio è convesso poiché non contiene i prolungamenti dei suoi lati

**Angolo piatto** è quello che ha i lati che sono uno il prolungamento dell'altro.

**Angolo nullo** è quello costituito solo da due semirette sovrapposte.

**Angolo giro** è quello che ha per lati due semirette sovrapposte e che contiene tutti i punti del piano.

**Angolo retto** è l'angolo metà dell'angolo piatto.

**Angoli consecutivi.** Due angoli si dicono angoli consecutivi se hanno il vertice e un lato comune e giacciono da parte opposta rispetto al lato comune.

**Angoli adiacenti.** Due angoli si dicono angoli adiacenti se sono consecutivi e se i lati non comuni giacciono sulla stessa retta.

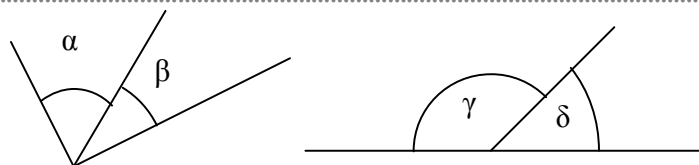


Figura 2. Gli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  sono consecutivi; gli angoli  $\gamma$  e  $\delta$  sono adiacenti

**Angoli opposti al vertice.** Due angoli convessi si dicono angoli opposti al vertice se i lati del primo sono i prolungamenti dei lati dell'altro.

**Bisettrice.** Si dice bisettrice di un angolo la semiretta che ha origine nel vertice dell'angolo e divide l'angolo in due angoli congruenti.

**Angoli complementari.** Due angoli si dicono complementari se la loro somma è un angolo retto.

**Angoli supplementari.** Due angoli si dicono supplementari se la loro somma è un angolo piatto.

**Angoli esplementari.** Due angoli si dicono esplementari se la loro somma è un angolo giro.

**Angolo acuto.** Un angolo si dice acuto se è minore di un angolo retto.

**Angolo ottuso.** Un angolo si dice ottuso se è maggiore di un angolo retto.

### Misura degli angoli

**Sistema sessagesimale (DEG).** L'unità di misura per gli angoli è il **grado**, definito come la  $360^a$  parte dell'angolo giro. I sottomultipli del grado sono il **primo** che è la sessantesima parte di un grado ( $60' = 1^\circ$ ) e il **secondo** che è la sessantesima parte del primo ( $60'' = 1'$ ).

**Sistema sessadecimale (GRAD).** Nel sistema sessadecimale l'unità è sempre il grado ma i suoi sottomultipli sono il decimo di grado, il centesimo di grado, ecc.

*Esempio.* Passare da gradi sessadecimali a sessagesimali:

$$35,12^\circ = 35^\circ 0,12 \cdot 60' = 35^\circ 7,2' = 35^\circ 7' 0,2 \cdot 60'' = 35^\circ 7' 12''$$

**Radiani (RAD).** Un'altra unità di misura per i gradi è il radiante, definito come angolo al centro di una circonferenza tale che la misura dell'arco da esso individuato è uguale alla misura del raggio della circonferenza.

Per passare da gradi a radianti e viceversa si usa questa proporzione

$$180 : gr = \pi : rad$$

Dove  $gr$  è la misura in gradi dell'angolo,  $rad$  è la misura in radianti dello stesso angolo.

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57,29578^\circ = 57^\circ 17' 45''$$

*Esempio.* Trasformare  $135^\circ$  in radianti.  $180 : 135 = \pi : rad \rightarrow rad = \frac{135 \cdot \pi}{180} = \frac{3}{4} \pi$

**Rette complanari.** Due rette si dicono complanari se appartengono a uno stesso piano.

**Rette sghembe.** Due rette si dicono sghembe se non appartengono a uno stesso piano.

**Rette incidenti.** Due rette complanari si dicono incidenti se hanno uno, e uno solo, punto in comune.

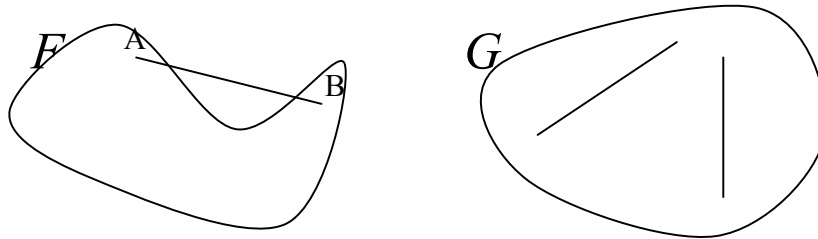
**Rette parallele.** Due rette complanari che non hanno nessun punto in comune si dicono parallele.

**Rette perpendicolari.** Due rette si dicono perpendicolari se incontrandosi formano quattro angoli retti.

**Distanza punto-retta.** La distanza di un punto P da una retta r è il segmento di perpendicolare condotta dal punto alla retta.

**Asse di un segmento.** Si dice asse di un segmento la retta perpendicolare al segmento e passante per il punto medio.

**Figura concava o convessa.** Una figura si dice convessa se, considerati due qualsiasi suoi punti, il segmento che li unisce è contenuto nella figura. Si dice concava se esistono almeno due punti per i quali il segmento che li unisce non è interamente contenuto nella figura.

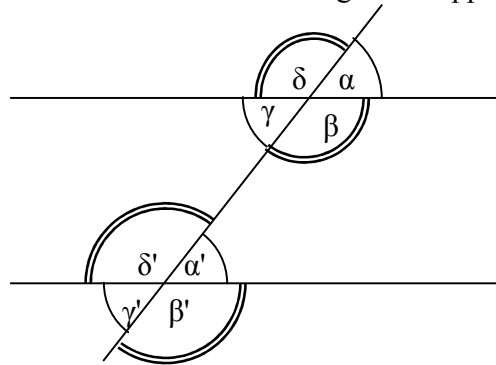


**Figura 2.** La figura F è concava perché il segmento che unisce i suoi punti A e B cade in parte esternamente a F; G è convessa perché tutti i suoi punti sono uniti da segmenti che cadono sempre internamente a G

**Figure congruenti.** Due figure si dicono congruenti quando esiste un movimento rigido che le sovrappone perfettamente.

**Rette parallele tagliate da un trasversale.**

Due rette parallele tagliate da una trasversale formano le seguenti coppie di angoli



- alterni interni congruenti:  $\gamma = \alpha'$ ;  $\beta = \delta'$
- alterni esterni congruenti:  $\gamma' = \alpha$ ;  $\beta' = \delta$
- corrispondenti congruenti:  $\alpha = \alpha'$ ;  $\beta = \beta'$ ;  $\gamma = \gamma'$ ;  $\delta = \delta'$
- coniugati interni supplementari:  $\gamma + \delta' = 180^\circ$ ;  $\alpha' + \beta = 180^\circ$
- coniugati esterni supplementari:  $\gamma' + \delta = 180^\circ$ ;  $\alpha + \beta' = 180^\circ$

### 3. Triangoli

Si dice **altezza** relativa a un lato il segmento di perpendicolare al lato condotta dal vertice opposto.

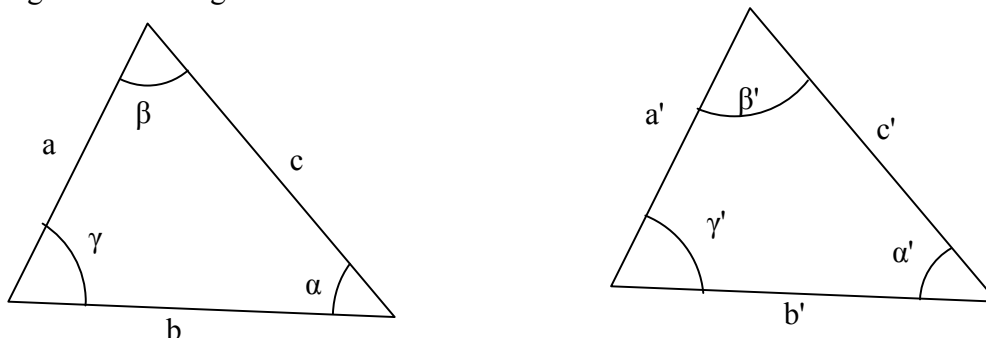
Si dice **mediana** relativa a un lato il segmento che unisce il punto medio del lato con il vertice opposto.

Si dice **bisettrice** di un angolo la semiretta uscente dal vertice dell'angolo e che divide a metà l'angolo stesso.

Si dice **asse** di un lato la retta perpendicolare al lato e passante per il suo punto medio.

#### Criteri di congruenza dei triangoli

Dati due triangoli come in figura



1° criterio: i due triangoli sono congruenti se hanno congruenti due lati e l'angolo compreso  
 $a=a'$ ;  $b=b'$ ;  $\gamma=\gamma'$

2° criterio: i due triangoli sono congruenti se hanno congruenti un lato e i due angoli a esso adiacenti  
 $\alpha=\alpha'$ ;  $\beta=\beta'$ ;  $c=c'$

3° criterio: i due triangoli sono congruenti se hanno congruenti rispettivamente i tre lati  
 $a=a'$ ;  $b=b'$ ;  $c=c'$

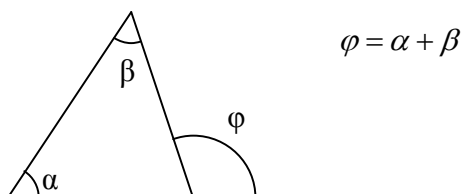
#### Criteri di congruenza dei triangoli rettangoli

Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti:

- due cateti;
- un cateto e un angolo acuto;
- l'ipotenusa e un angolo acuto;
- l'ipotenusa e un cateto.

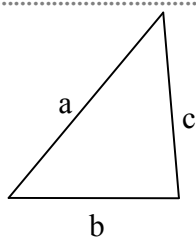
#### Proprietà di angoli e lati di un triangolo

- In un triangolo ogni angolo esterno è maggiore di ciascuno degli angoli interni ad esso non adiacenti.
- In un triangolo un angolo esterno è congruente alla somma dei due angoli interni a esso non adiacenti.



- In un triangolo la somma degli angoli interni è un angolo piatto.
- In un triangolo la somma degli angoli esterni vale  $360^\circ$ .
- In un triangolo con due lati disuguali, a lato maggiore è opposto angolo maggiore.
- In un triangolo con due angoli disuguali, all'angolo maggiore è opposto il lato maggiore.
- In un triangolo ciascun lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza.





$$a < b + c, \quad b < a + c, \quad c < a + b$$

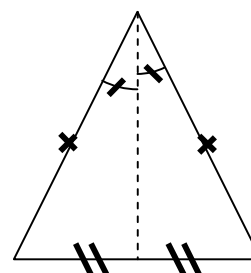
$$a > |b - c|, \quad b > |a - c|, \quad c > |b - a|$$

- In un triangolo rettangolo gli angoli acuti sono complementari.
- Se per il punto medio di un lato si traccia la parallela ad un altro lato, essa taglia il terzo lato nel suo punto medio.
- Congiungendo due punti medi di due lati di un triangolo si ottiene un segmento parallelo al terzo lato e congruente alla sua metà.

### Proprietà del triangolo isoscele

*Definizione.* Un triangolo che ha due lati congruenti si dice isoscele.

- In un triangolo isoscele gli angoli adiacenti alla base sono congruenti.
- In un triangolo isoscele la bisettrice dell'angolo al vertice è mediana e altezza.



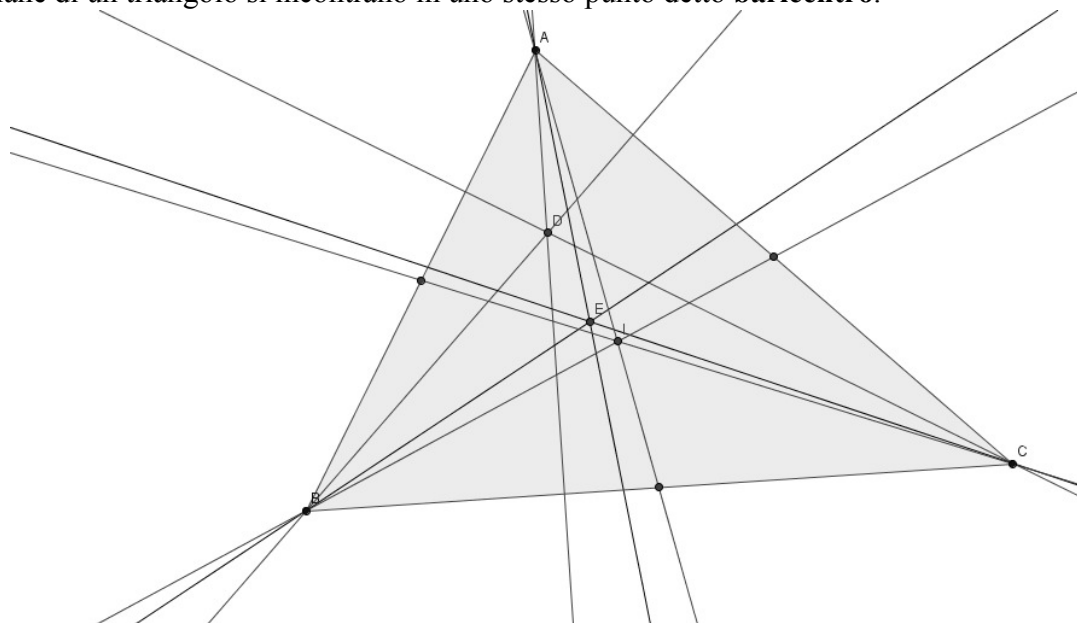
### Punti notevoli di un triangolo

Gli assi dei lati di un triangolo si incontrano in uno stesso punto detto **circocentro**.

Le bisettrici degli angoli interni di un triangolo passano per uno stesso punto detto **incentro**.

Le altezze di un triangolo si incontrano in uno stesso punto detto **ortocentro**.

Le mediane di un triangolo si incontrano in uno stesso punto detto **baricentro**.



**Figura 2.** Il punto D è l'intersezione delle altezze, quindi è l'ortocentro. Il punto E è l'incontro delle bisettrici, quindi è l'incentro. Il punto I è l'intersezione delle mediane, quindi il baricentro.

### Teoremi sul triangolo rettangolo

**Teorema di Pitagora.** In un triangolo rettangolo la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa.

**1° teorema di Euclide.** In un triangolo rettangolo il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo avente per lati l'ipotenusa e la proiezione di quel cateto sull'ipotenusa.

**2° teorema di Euclide.** In ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo avente per lati le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

**Teorema di Talete.** Un fascio di rette parallele tagliate da due trasversali determina su di esse due insiemi di segmenti direttamente proporzionali.

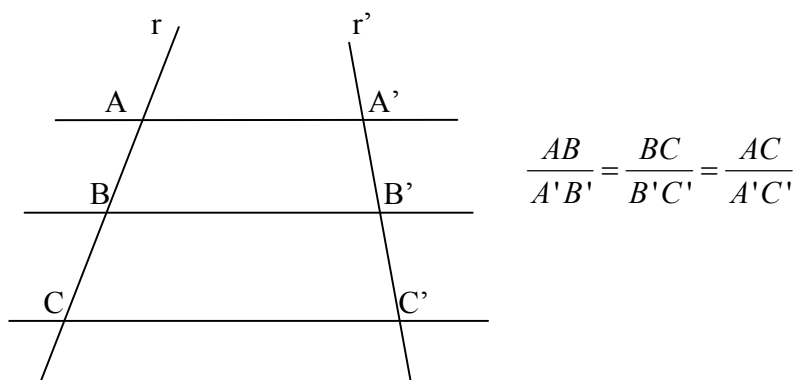
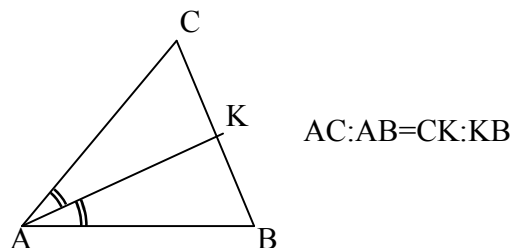
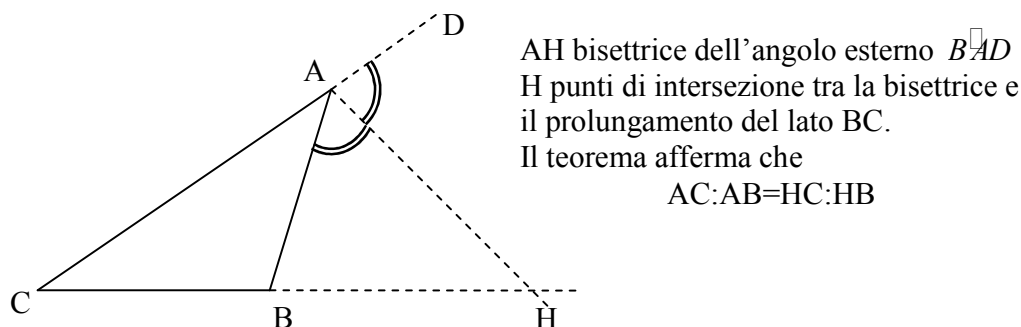


Figura 3. Teorema di Talete

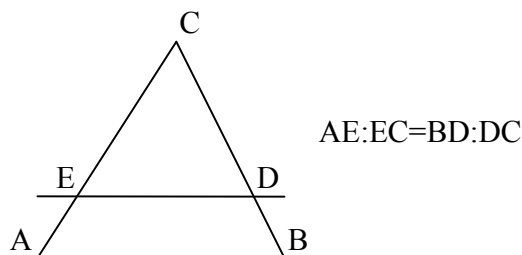
**Teorema della bisettrice dell'angolo interno.** La bisettrice di un angolo interno di un triangolo divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati.



**Teorema della bisettrice dell'angolo esterno.** La bisettrice di un angolo esterno di un triangolo, se non è parallela al lato opposto, incontra il prolungamento del lato opposto in un punto le cui distanze dagli estremi del lato stanno fra loro come i lati adiacenti.



**Teorema della parallela a un lato.** In un triangolo una qualsiasi parallela a un lato che interseca gli altri due lati determina su di essi segmenti in proporzione.



**Criteri di similitudine dei triangoli**

**1° criterio.** Due triangoli sono simili se hanno due angoli ordinatamente congruenti, cioè disposti allo stesso modo rispetto all'angolo tra essi compreso.

**2° criterio.** Due triangoli sono simili se hanno due lati proporzionali e l'angolo tra essi compreso congruente.

**3° criterio.** Due triangoli sono simili se hanno i tre lati proporzionali.

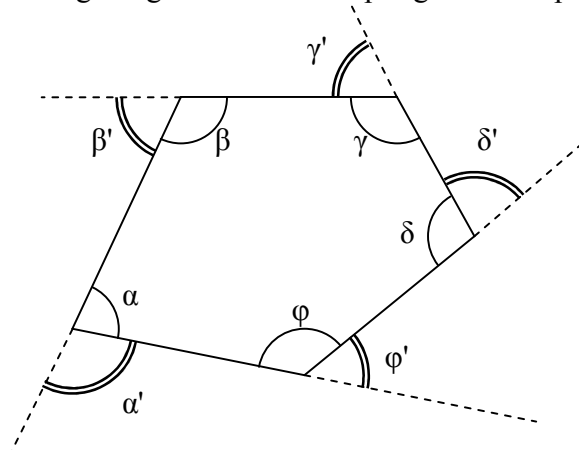
**Proprietà dei triangoli simili**

- In due triangoli simili le altezze, le mediane e le bisettrici che si corrispondono sono proporzionali ad una coppia di lati omologhi, il loro rapporto è uguale al rapporto di similitudine.
- In due triangoli simili i perimetri sono proporzionali a una coppia di lati omologhi, il loro rapporto è uguale al rapporto di similitudine.
- In due triangoli simili le aree sono proporzionali al quadrato di una coppia di lati omologhi, cioè il loro rapporto è uguale al quadrato del rapporto di similitudine.
- Due triangoli equilateri sono sempre simili.
- Due triangoli rettangoli, con un angolo acuto congruente, sono simili.
- Due triangoli isosceli, con gli angoli al vertice congruenti, sono simili.

**4. Poligoni**

**Proprietà degli angoli di un poligono**

- La somma degli angoli interni di un poligono convesso di n lati è congruente a n-2 angoli piatti.
- La somma degli angoli esterni di un poligono è sempre congruente a due angoli piatti.

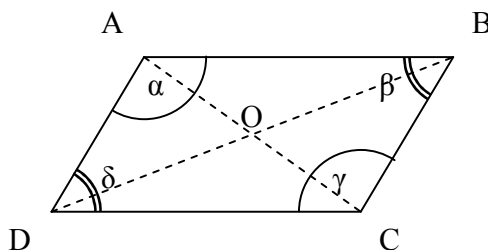


Somma degli angoli interni  
 $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \phi = (n-2)180^\circ$

Somma degli angoli esterni  
 $\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' + \phi' = 360^\circ$

### Proprietà del parallelogramma

*Definizione.* Si dice parallelogramma un quadrilatero convesso che ha i lati opposti paralleli tra di loro.



Il parallelogramma ha

- Lati opposti congruenti:  $AB=DC$ ;  $AD=BC$
- Angoli opposti congruenti:  $\alpha=\gamma$ ;  $\beta=\delta$
- Angoli adiacenti allo stesso lato sono supplementari:  $\alpha+\delta = 180^\circ$ ;  $\gamma+\beta=180^\circ$
- Le diagonali si incontrano nel loro punto medio  $AO=OC$ ;  $DO=OB$
- Il punto di incontro delle diagonali è il centro di simmetria

### Proprietà del rettangolo

*Definizione.* Si dice rettangolo un parallelogramma che ha tutti gli angoli congruenti.

Il rettangolo ha le diagonali congruenti.

### Proprietà del rombo

*Definizione.* Si chiama rombo il parallelogramma che ha tutti i lati congruenti

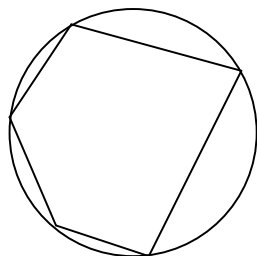
Il rombo ha:

- le diagonali perpendicolari;
- le diagonali sono bisettrici degli angoli opposti.

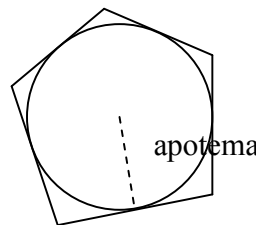
### Poligoni inscritti e circoscritti a una circonferenza

Un poligono si dice **inscritto** in una circonferenza se tutti i suoi vertici sono punti della circonferenza; la circonferenza si dice circoscritta al poligono; il raggio della circonferenza si dice anche raggio del poligono.

Un poligono si dice **circoscritto** a una circonferenza se tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza; la circonferenza si dice inscritta nel poligono, il raggio della circonferenza si dice apotema del poligono.



Poligono inscritto

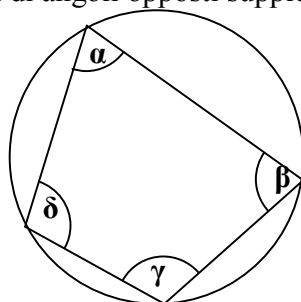


Poligono circoscritto

**Teorema.** Un poligono è inscrittibile in una circonferenza se gli assi dei suoi lati si incontrano tutti nello stesso punto.

**Teorema.** Un poligono è circoscrivibile ad una circonferenza se le bisettrici dei suoi angoli interni si incontrano tutte nello stesso punto.

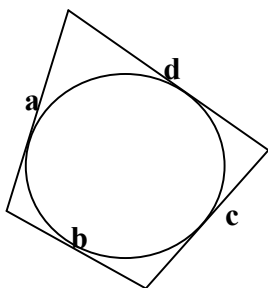
**Teorema.** Un quadrilatero inscritto in una circonferenza ha gli angoli opposti supplementari; viceversa un quadrilatero con una coppia di angoli opposti supplementari è inscrittibile in una circonferenza.



$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

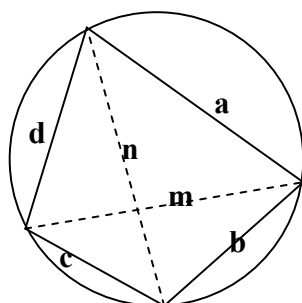
$$\beta + \delta = 180^\circ$$

**Teorema.** In un quadrilatero circoscritto a una circonferenza la somma di due lati opposti è congruente alla somma degli altri due lati; viceversa se in un quadrilatero la somma di due lati opposti è congruente alla somma degli altri due lati esso è circoscrittibile a una circonferenza.



$$a + c = b + d$$

**Teorema di Tolomeo.** In un quadrilatero inscritto in una circonferenza risulta che: il rettangolo che ha per dimensioni le diagonali del quadrilatero è equivalente alla somma dei rettangoli che hanno per lati i lati opposti del quadrilatero.



$$m \cdot n = a \cdot c + b \cdot d$$

**Definizione.** Un poligono si dice **poligono regolare** se ha tutti i lati congruenti e tutti gli angoli congruenti.

**Teorema.** Ogni poligono regolare è sia inscrittibile sia circoscrittibile a una circonferenza e le due circonferenze hanno lo stesso centro.

### Similitudine tra poligoni

Due poligoni di uguale numero di lati sono simili se hanno i lati omologhi in proporzione e gli angoli ordinatamente congruenti.

## 5. Circonferenza e cerchio

### Definizioni

Si chiama **circonferenza** il luogo dei punti del piano che hanno distanza costante da un punto fisso detto centro.

Si chiama **cerchio** l'insieme dei punti di una circonferenza e dei suoi punti interni.

Si chiama **corda** un qualsiasi segmento i cui estremi sono punti della circonferenza.

Si chiama **segmento circolare** di base una corda AB ciascuna delle due parti in cui la corda divide il cerchio.

Si chiama **segmento circolare a due basi** la parte di cerchio delimitata da due corde.

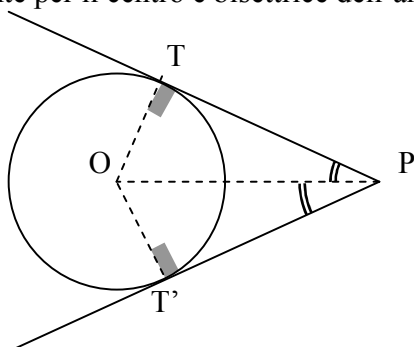
Si chiama **arco di circonferenza** la parte di circonferenza delimitata da due suoi punti.

Si chiama **angolo al centro** un angolo che ha il vertice nel centro della circonferenza.

Si chiama **angolo alla circonferenza** un angolo che ha il vertice sulla circonferenza e i lati entrambi secanti o uno secante e l'altro tangente alla circonferenza.

Si chiama **settore circolare** una parte di cerchio delimitata da due raggi.

**Teorema della tangente.** Se da un punto esterno a una circonferenza si mandano le tangenti alla circonferenza stessa, i segmenti di tangente sono congruenti e la semiretta di origine il punto esterno e passante per il centro è bisettrice dell'angolo formato dalle tangenti.

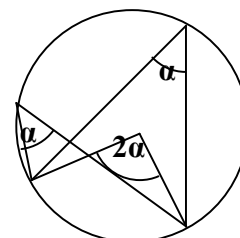


PT e PT' sono tangenti

$$PT = PT'$$

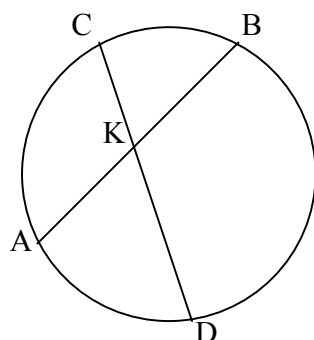
$$\angle TPO = \angle OPT'$$

$$\angle OTP = \angle OT'P = 90^\circ$$



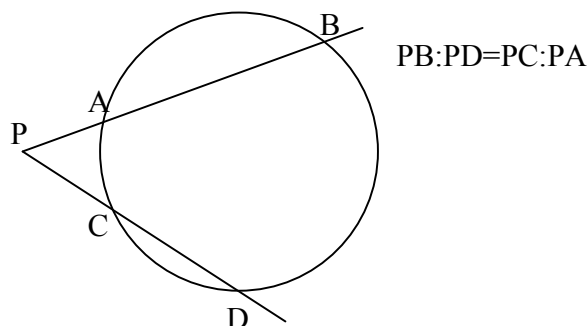
**Teorema dell'angolo al centro.** Ogni angolo alla circonferenza è la metà del corrispondente angolo al centro.

**Teorema delle corde.** Se due corde di una circonferenza si intersecano, i segmenti dell'una sono i medi e i segmenti dell'altra sono gli estremi di una proporzione.

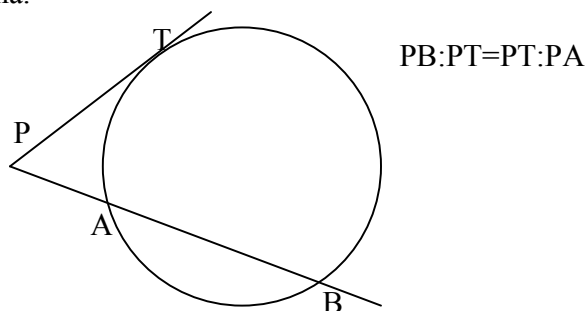


$$DK : AK = BK : CK$$

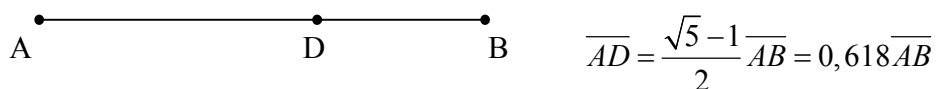
**Teorema delle secanti.** Se da un punto esterno a una circonferenza si tracciano due secanti, una secante e la sua parte esterna sono i medi, l'altra secante e la sua parte esterna sono gli estremi di una proporzione.



**Teorema della secante e della tangente.** Se da un punto esterno a una circonferenza si conducono una secante e una tangente alla circonferenza, il segmento di tangente è medio proporzionale fra l'intera secante e la sua parte esterna.



**Sezione aurea.** La parte aurea di un segmento AB è il segmento AD che è medio proporzionale tra l'intero segmento e la parte rimanente BD, quindi  $AB:AD=AD:DB$ .



**Rapporto aureo.** Si chiama rapporto aureo il rapporto tra un segmento e la sua parte aurea, questo rapporto vale  $\varphi = \frac{AB}{AD} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$ .

**Rettangolo aureo.** Si dice rettangolo aureo un rettangolo nel quale il rapporto tra la base e l'altezza è il rapporto aureo.