Università di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Geometria 1

17 Gennaio 2017

Esercizio 1

Provare che i polinomi

$$1 + x, \quad x^2, \quad x - x^2$$

costituiscono una base dello spazio vettoriale $\mathbb{R}_2[x]$ dei polinomi nella variabile x aventi grado minore o uguale a 2. Detta inoltre

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$$

l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$ e alla base $(1+x, x^2, x-x^2)$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

a) dire a cosa è uguale $f(x_1, x_2)$, dove $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$;
b) determinare una base del nucleo e dell'immagine di f
c) stabilire se f è iniettiva e suriettiva;
d) determinare la matrice associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$ e alla base $(1, x, x^2)$ di $\mathbb{R}_2[x]$.

Esercizio 2

Utilizzando il Teorema di Rouché-Capelli, discutere e risolvere al variare di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x + ky + kz = 2k - 1 \\ x + ky + z = k \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$$

Esercizio 3

Trovare gli autovalori e i rispettivi autospazi dell'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 - x_2 - x_3, x_2, x_3, x_3 + 2x_4)$. Stabilire se f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di f.