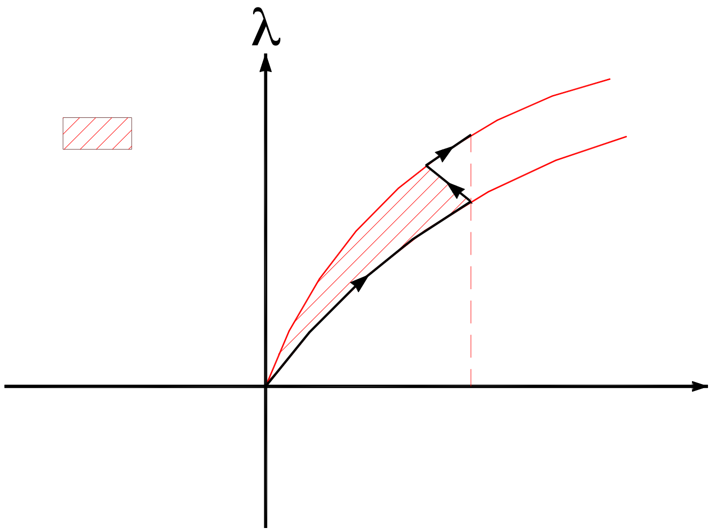
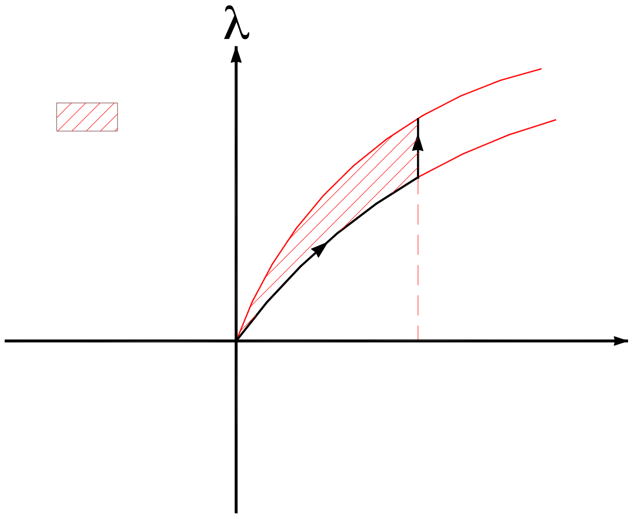
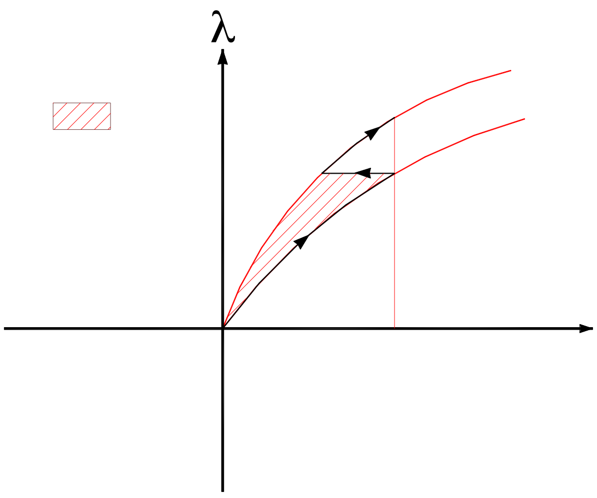


La traiettoria seguita dal flusso e dalla corrente durante lo spostamento infinitesimo dx possono essere infinite consideriamo due condizioni limite

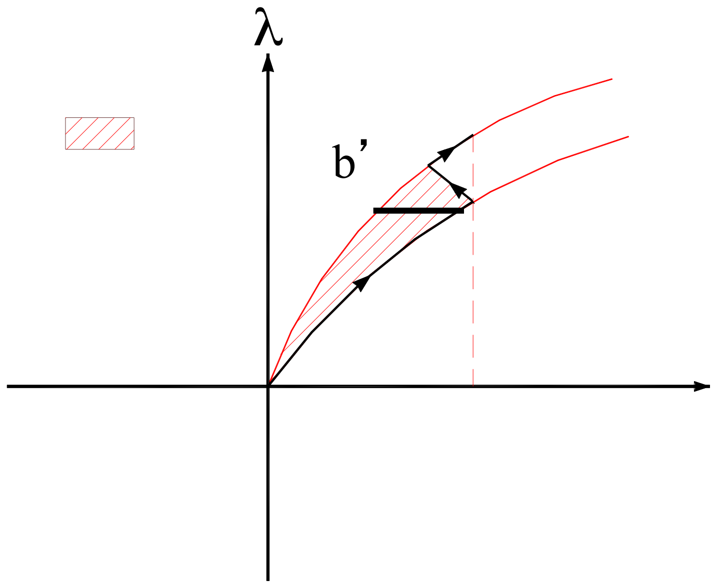
$$e = -\frac{d\phi(x,t)}{dt} = -\left(\frac{d\phi(x,t)}{dx}v + \frac{d\phi(x,t)}{dt}\right)$$

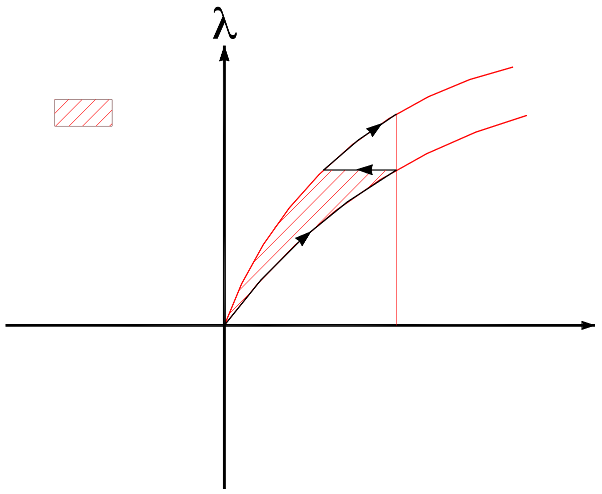


Trasformazione a corrente costante
(spostamento lento)



Trasformazione a flusso costante
(spostamento rapido)

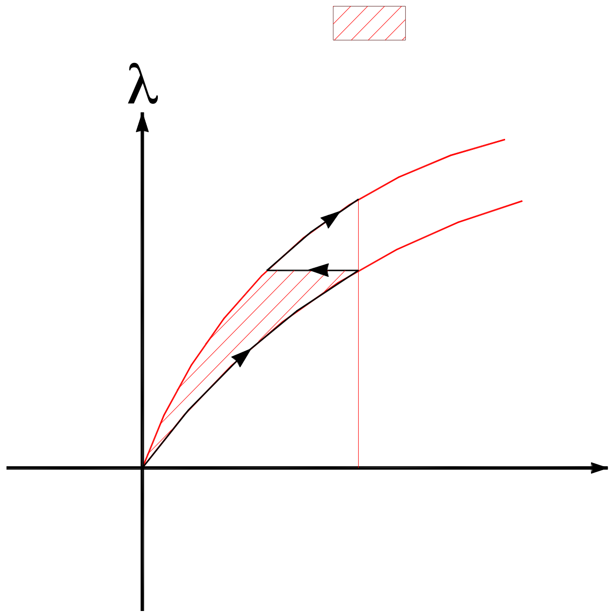




La differenza tra l'energia meccanica relativa alle due trasformazioni è pari a:

$$dW_m - dW_m\Big|_{\lambda=kost} = \frac{1}{2} di \cdot d\lambda$$

Questa quantità è un differenziale del secondo ordine pertanto al tendere dello spostamento virtuale a zero tende a zero. Le due aree nell'ottica dell'applicazione del principio dei lavori virtuali sono uguali



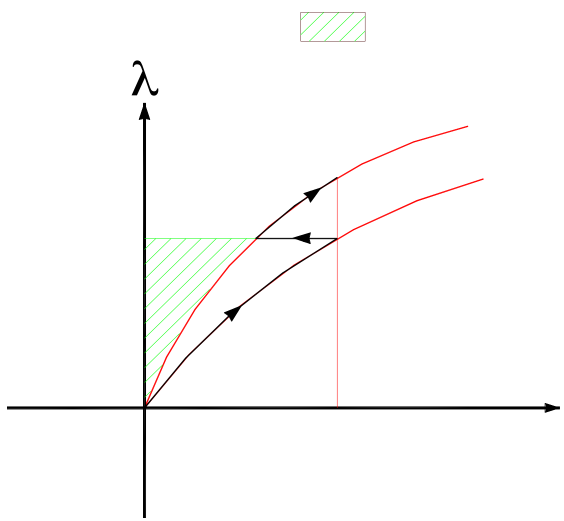
$$dW_e = dW_f + dW_m$$

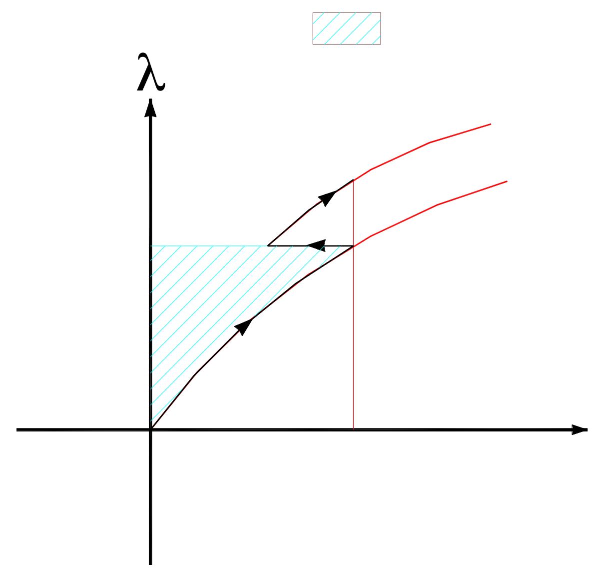
$$i d\lambda = dW_f(i,\lambda) + f \circ dx$$

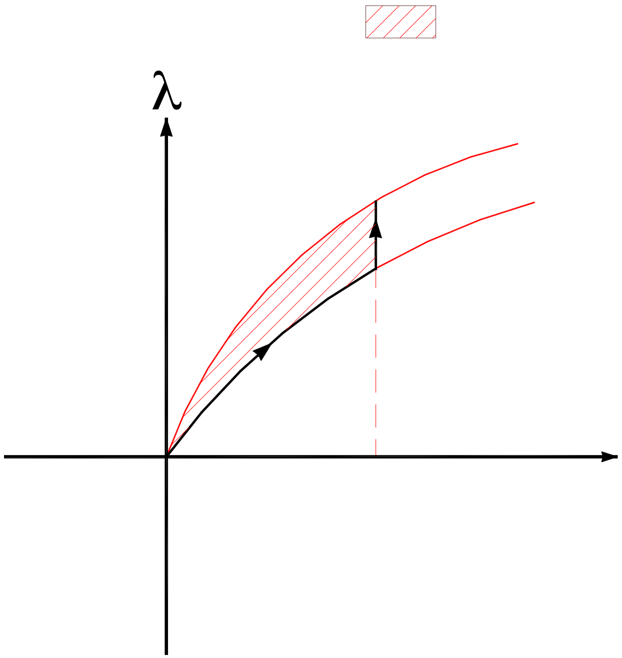
$$0 = dW_f(i,\lambda) + f \circ dx \qquad tratto\ \ a \rightarrow b$$

$$i d\lambda = dW_f(i,\lambda) \qquad tratto\ \ b \rightarrow c$$

$$f = -\left.\frac{dW_f(i,\lambda)}{dx}\right|_{\lambda=kost}$$







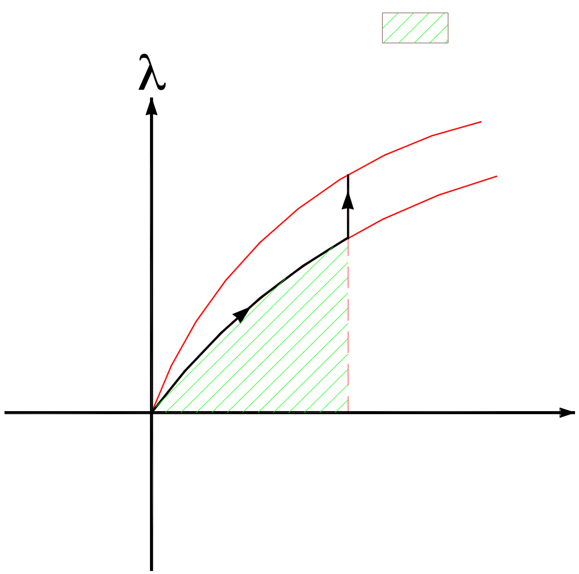
$$dW_e = dW_f + dW_m$$

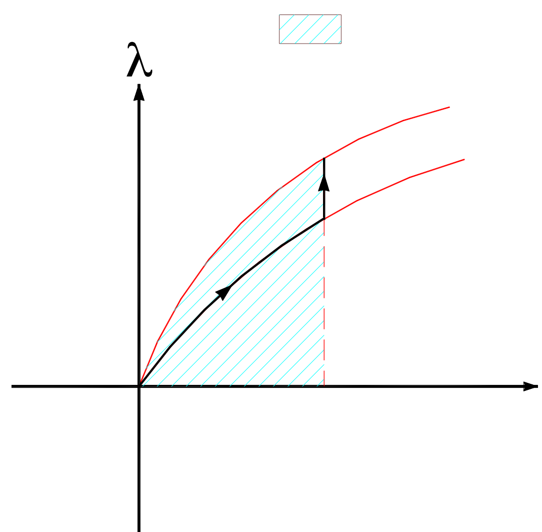
$$i d\lambda = dW_f(i,\lambda)\Big|_{i=kost} + f \circ dx$$

$$d\left(i \cdot \lambda\right) - dW_f(i,\lambda)\Big|_{i=kost} = f \circ dx$$

$$d\left(i \cdot \lambda - W_f\right)\Big|_{i=kost} = f \circ dx$$

$$f = \frac{dW_c(i,\lambda)}{dx}\Bigg|_{i=kost}$$





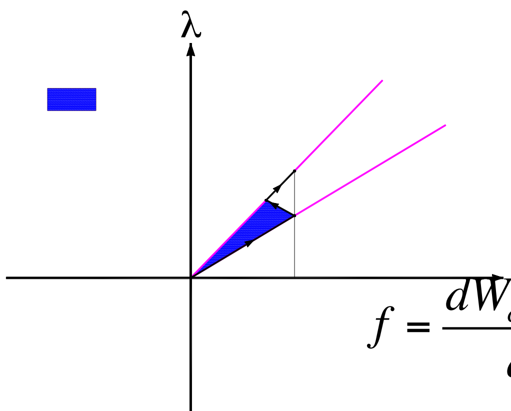
Le relazioni mettono in evidenza che la forza elettromagnetica sviluppata sull'elemento mobile risulta funzione della posizione assunta dall'elemento mobile rispetto a quello fisso e dall'entità del campo magnetico indipendentemente da come il campo varia. Infatti essa può essere determinata sia considerando un percorso a corrente costante sia un percorso a flusso costante.

Es: Caso Lineare

$$f = -\left.\frac{dW_f(i,\lambda)}{dx}\right|_{\lambda=kost}$$

$$W_f = \frac{1}{2}L(x)i^2 = \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{L(x)} = \frac{1}{2}\Re(x)\phi^2;$$

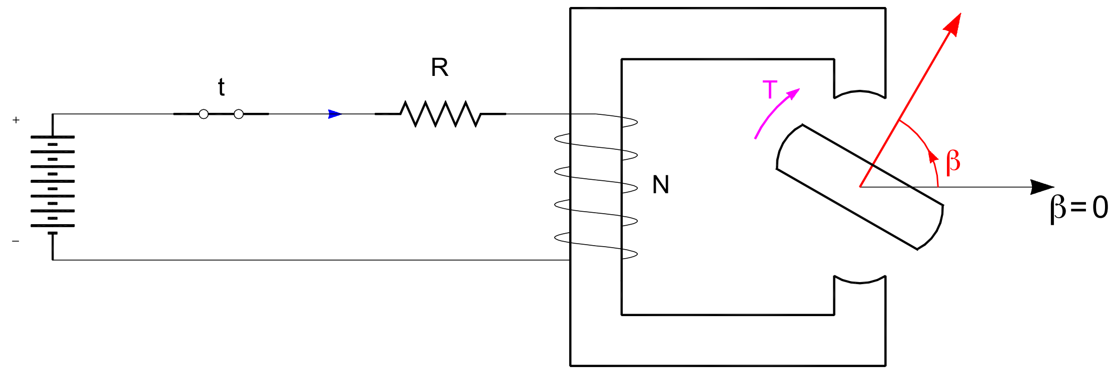
$$\boxed{f = -\frac{1}{2}\phi^2\frac{d\Re(x)}{dx}}$$

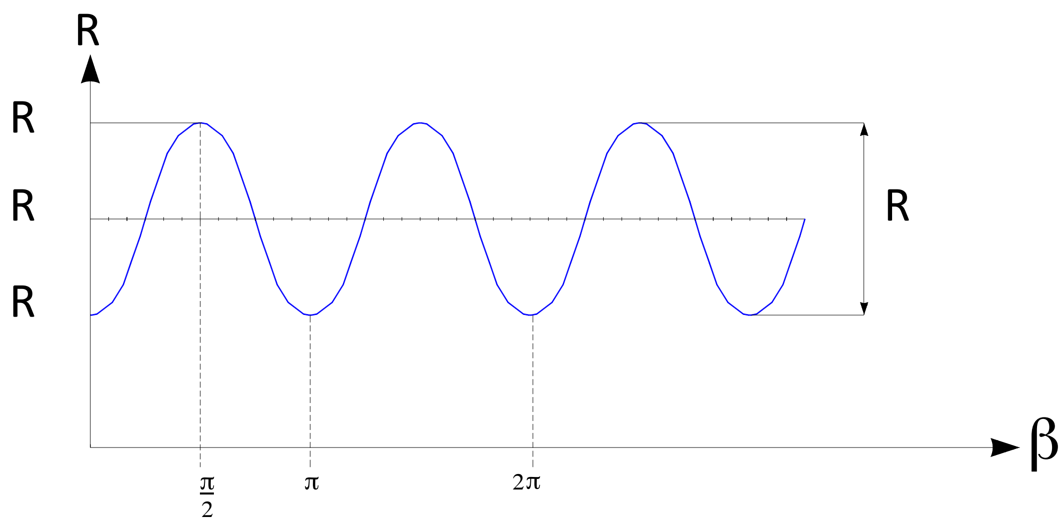


$$f = \left.\frac{dW_c(i,\lambda)}{dx}\right|_{i=kost}$$

$$W_c = \frac{1}{2}L(x)i^2$$

$$f = \frac{1}{2}i^2\frac{dL(x)}{dx} = \frac{1}{2}i^2N^2\frac{d\Gamma(x)}{dx} = \frac{1}{2}\varphi^2\frac{1}{\Gamma(x)^2}\frac{d\Gamma(x)}{dx} = \boxed{-\frac{1}{2}\varphi^2\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\Gamma(x)}\right)}$$

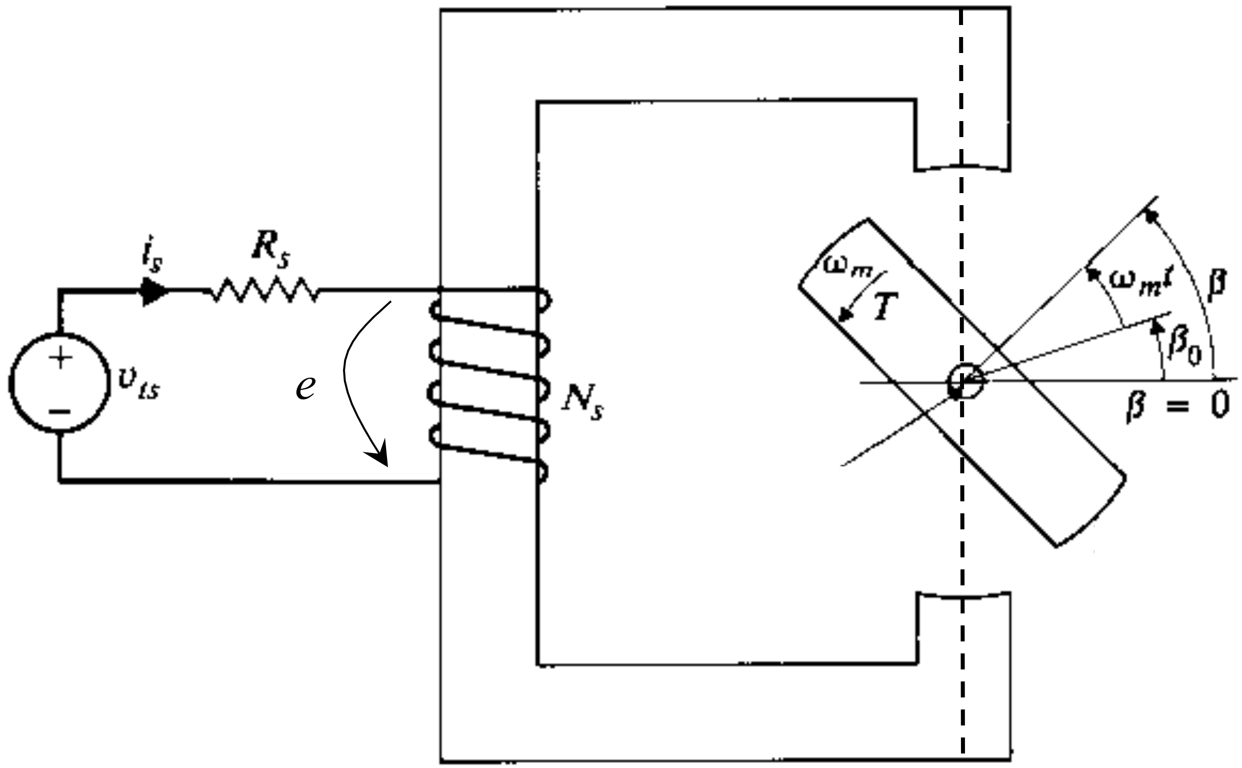


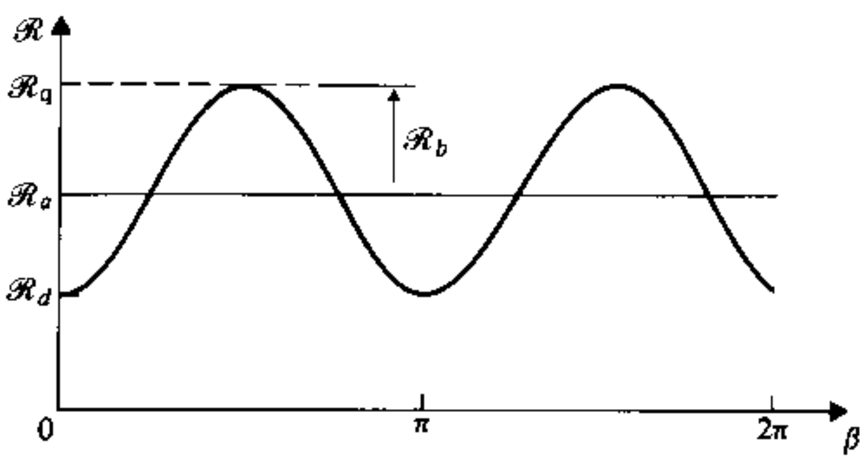


$$\Re(\beta) = \Re_{med} - \frac{\Re_{pp}}{2} \cdot \cos 2\beta$$

$$\Re_{med} = \frac{\Re_{max} + \Re_{min}}{2}$$

$$\Re_{pp} = \Re_{max} - \Re_{min}$$

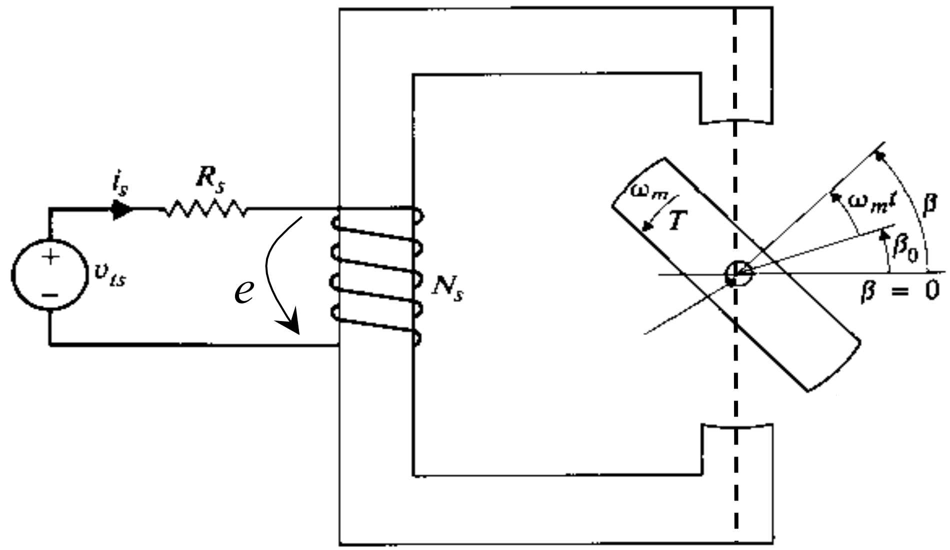




$$\Re(\beta) = \Re_a - \Re_b \cos 2\beta$$

$$\Re_a = \frac{\Re_q + \Re_d}{2}; \quad \Re_b = \frac{\Re_q - \Re_d}{2};$$

$$\boxed{\frac{d\Re}{d\beta} = 2\Re_b \sin 2\beta}$$

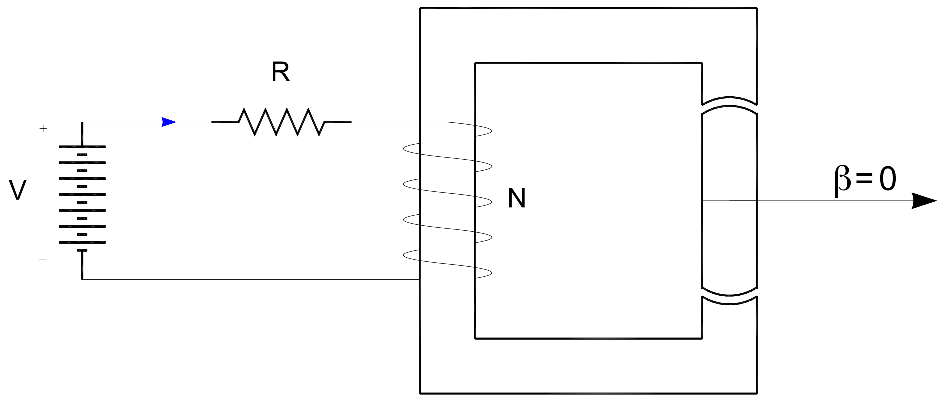


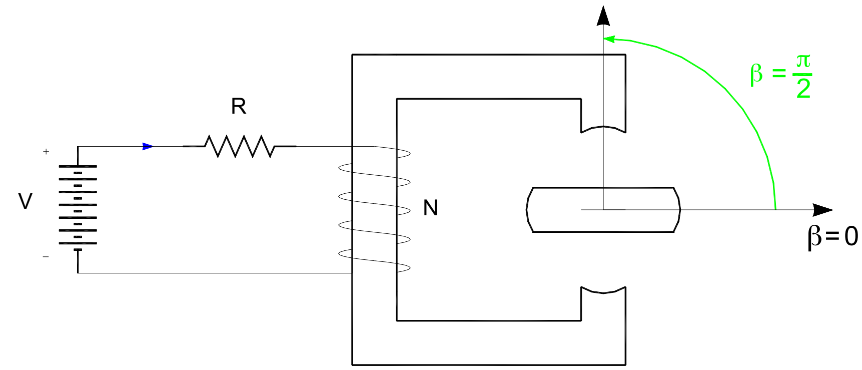
$$dW_m = Td\beta \qquad \lambda = Li; \qquad L = N^2\Gamma;$$

$$T = -\left.\frac{dW_M}{d\beta}\right|_{\lambda=\text{cos}t} = -\frac{1}{2}\frac{d}{d\beta}\left(\frac{\lambda^2}{L(\beta)}\right) = -\frac{1}{2}\phi\frac{d}{d\beta}\left[\Re(\beta)\right]$$

$$\boxed{T = -\frac{1}{2}\phi^2\frac{d\Re(\beta)}{d\beta}}$$

$$T = \left.\frac{dW_c}{d\beta}\right|_{i=\text{cos}t} = \frac{1}{2}i^2\frac{dL(\beta)}{d\beta}$$





$$T = -\frac{1}{2}\phi^2 \frac{d\Re}{d\beta} = -\phi^2 \Re_b \sin 2\beta$$

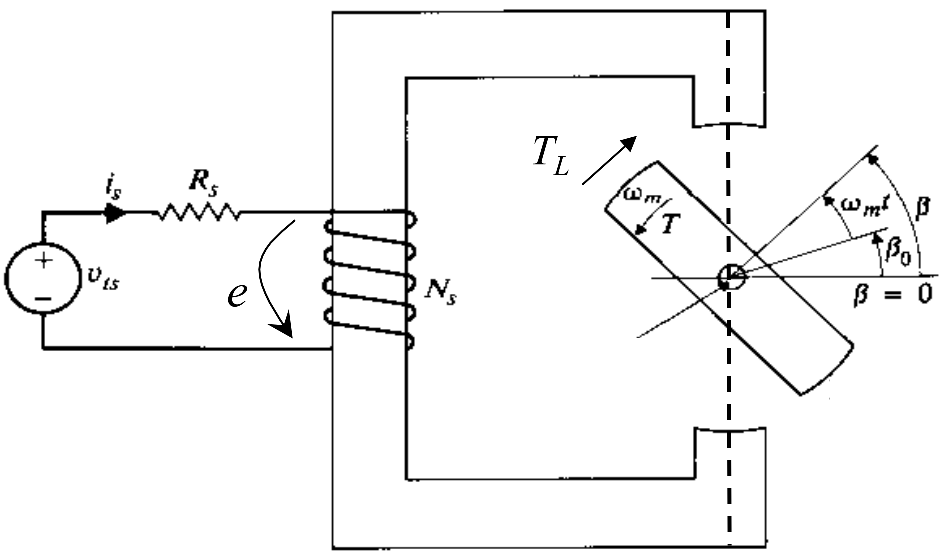
$$se\ \ T_L = 0 \quad T = 0 \quad \sin 2\beta = 0$$

$$2\beta = k\pi$$

β=0 equilibrio stabile

β=π/2 equilibrio instabile

Ipotesi:
comportamento lineare del sistema magnetico
Tensione di alimentazione costante
Coppia di carico applicata T_L costante



$$v_{st} = R_s i_s - e;$$

$$T + T_L = J\,\frac{d\omega_m}{dt};$$

Analisi del funzionamento a regime

$$i_s = I_s = \frac{v_{ts}}{R_s}$$

$$T = T_L = \frac{1}{2} I_s^2 \frac{dL}{d\beta}$$

Il sistema tenderà ad assumere una configurazione di equilibrio stabile per l'angolo β per il quale la coppia di carico è perfettamente equilibrata dalla coppia sviluppata dal sistema .

Ipotesi:
comportamento lineare del sistema magnetico
Tensione di alimentazione sinusoidale
Coppia di carico applicata T_L costante

$$v_{ts} = \sqrt{2}V\cos\omega t$$

$$v_{ts} = -e = N_s \frac{d\phi}{dt}$$

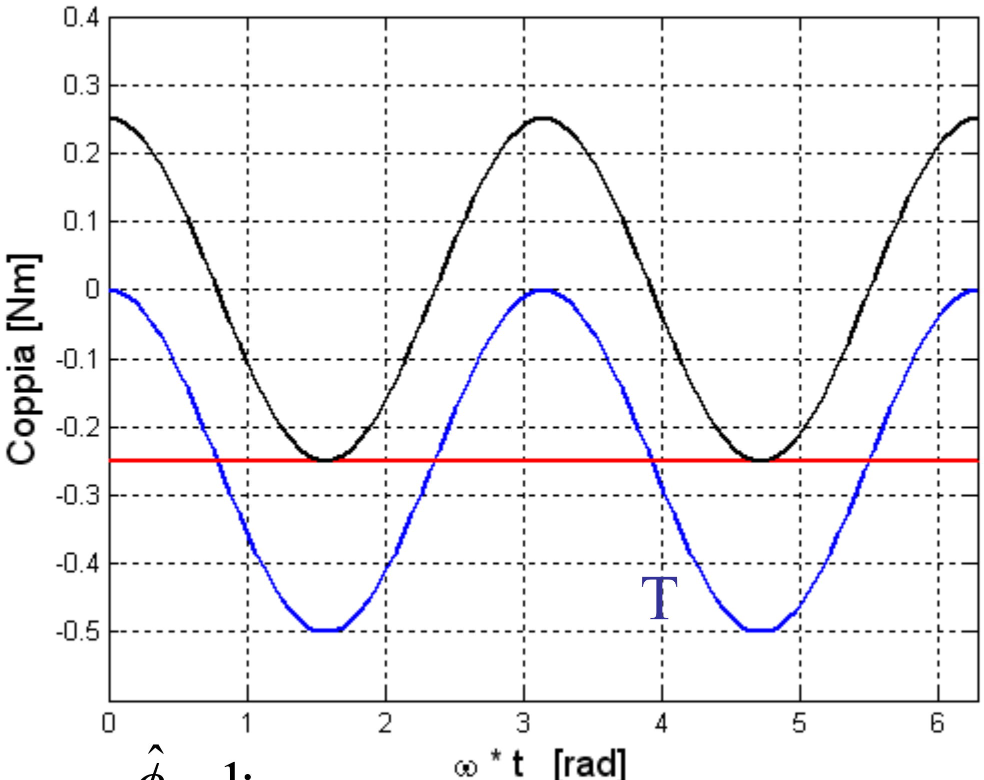
$$\phi = -\frac{\sqrt{2}V}{N_s\omega}\sin\omega t = -\hat{\phi}\sin\omega t$$

$$T = -\frac{1}{2}\phi^2\frac{d\Re}{d\beta} = -\frac{1}{4}\hat{\phi}^2\left[1-\cos 2\omega t\right]\frac{d\Re}{d\beta}$$

$$T = \bar{T} + \tilde{T}$$

$$\tilde{T}(t,\beta) = \frac{1}{4}\hat{\phi}^2\cos 2\omega t\ \frac{d\Re}{d\beta}$$

$$\bar{T}(\beta) = -\frac{1}{4}\hat{\phi}^2\frac{d\Re}{d\beta}$$

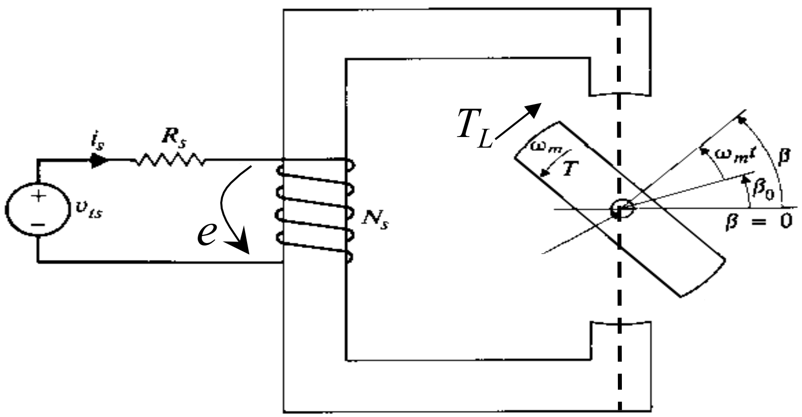


$$\hat{\phi} = 1;$$

$$\beta = \cos t$$

$$\boxed{T_{media} = -\frac{1}{4}\hat{\phi}^2\frac{d\Re}{d\beta} = T_L}$$

Ipotesi:
comportamento lineare del sistema magnetico
Tensione di alimentazione sinusoidale
Rotore in moto ad una velocità costante ω_m



$$\omega_m = \frac{d\beta}{dt} \qquad \beta = \omega_m t + \beta_0$$

$$e_s = -N_s \frac{d\phi}{dt} \cong -v_{ts} \quad v_{ts} = \sqrt{2}V \cos\omega_s t$$

$$\phi = -\hat{\phi}\sin\omega_s t$$

$$T = -\frac{1}{2}\phi^2 \frac{d\Re}{d\beta} = -\frac{1}{4}\hat{\phi}^2\left[1-\cos 2\omega_s t\right]\frac{d\Re}{d\beta}$$

$$T = -\frac{1}{2}\hat{\phi}^2\left[1-\cos 2\omega_s t\right]\Re_b \sin 2\beta$$

$$T = -\frac{1}{2}\hat{\phi}^2\left[1-\cos 2\omega_s t\right]\Re_b \sin 2(\omega_m t + \beta_0)$$

Applicando Werner

$$T = -\frac{1}{2}\hat{\phi}^2\Re_b\left[\sin 2(\omega_m t + \beta_0) - \frac{1}{2}\sin 2(\omega_m t + \omega_s t + \beta_0) - \frac{1}{2}\sin 2(\omega_s t - \omega_m t - \beta_0)\right]$$

In questa situazione la coppia è mediamente diversa da zero solo se

$$\omega_m = \omega_s$$

$$T = -\frac{1}{2}\hat{\phi}^2\Re_b\left[\sin 2(\omega_s t + \beta_0) - \frac{1}{2}\sin 2(2\omega_s t + \beta_0) + \frac{1}{2}\sin 2\beta_0\right]$$

$$T_{media} = -\frac{1}{4}\hat{\phi}^2\Re_b \sin 2\beta_0$$

La macchina fornisce una coppia mediamente diversa da zero solo quando sono verificate le condizioni di sincronismo tra alimentazione e sistema meccanico. In particolare la macchina converte energia elettrica in energia meccanica quando T_{media}>0, mentre eroga potenza elettrica quando T_{media} <0.

Valutazione della corrente

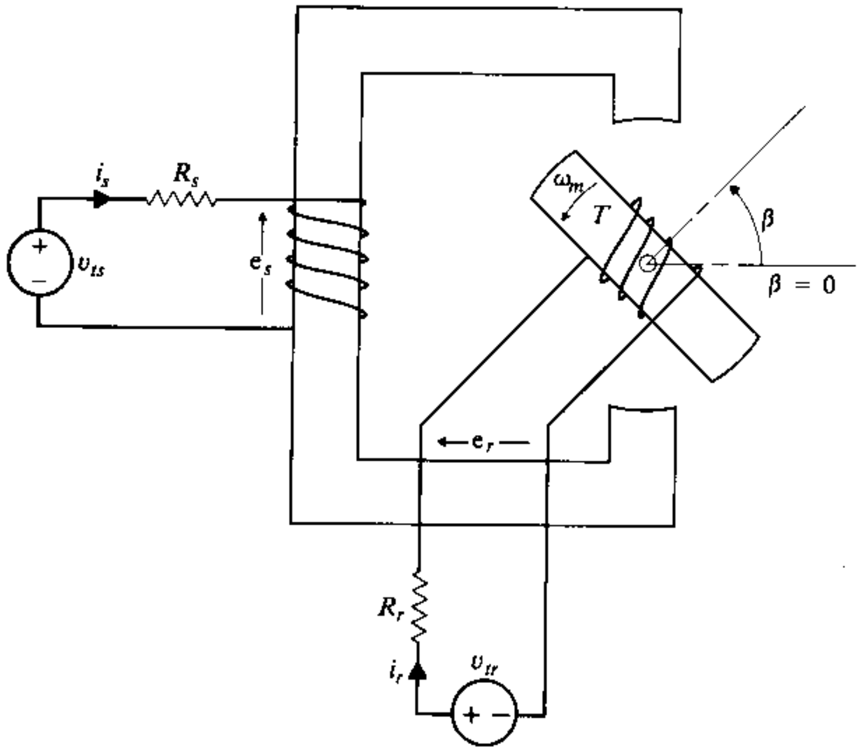
La corrente può essere determinata tramite la legge di Ohm magnetica

$$fmm = \Re\phi \quad \Rightarrow i = \frac{\Re}{N_s}\phi = -\frac{\hat{\phi}}{N_s}\sin\omega_s t\left[\Re_a - \Re_b\cos 2\beta\right]$$

$$i = -\frac{\hat{\phi}}{N_s}\sin\omega_s t\left[\Re_a - \Re_b\cos 2\left(\omega_m t + \beta_0\right)\right]$$

$$i = -\frac{\hat{\phi}\Re_a}{N_s}\sin\omega_s t + \frac{\hat{\phi}\Re_b}{2N_s}\sin\left(\omega_s t + 2\beta_0\right) + \frac{\hat{\phi}\Re_b}{2N_s}\sin\left(3\omega_s t + 2\beta_0\right)$$

La corrente circolante nella macchina contiene una terza armonica. Questa non è una condizione desiderabile nelle macchine elettriche generatrici, per tal ragione questo tipo di macchina viene utilizzato solo per applicazioni da motore



$$dW_e = dW_m + dW_M$$

$$dW_e = -\left(e_s i_s dt + e_r i_r dt\right)$$

Valutazione dell'energia magnetica

$$dW_m = 0$$

$$dW_e = dW_M$$

$$dW_e = -e_s i_s dt - e_r i_r dt = dW_M$$

Ipotizziamo che la magnetizzazione della macchina avvenga in due fasi
Prima fase i_r =0 i_s da zero a i_s
Seconda fase $i_s = i_s$ i_r da zero a i_r

$$\lambda_s = L_{ss} i_s + L_{sr} i_r \qquad e_s = -\frac{d\lambda_s}{dt}$$

$$\lambda_r = L_{rs} i_s + L_{rr} i_r \qquad e_r = -\frac{d\lambda_r}{dt}$$

$$dW_{e1} = -e_s i_s dt = L_{ss} i_s di_s$$

$$W_{e1} = \int_0^{i_s} L_{ss} i_s di_s = \frac{1}{2} L_{ss} i_s^2$$

$$e_s = -\frac{d\left(L_{ss} i_s + L_{sr} i_r\right)}{dt}; \; e_r = \frac{d\left(L_{rs} i_s + L_{rr} i_r\right)}{dt}$$

$$dW_{e2} = -e_s i_s dt - e_r i_r dt = L_{sr} i_s di_r + L_{rr} i_r di_r$$

$$W_{e2} = \int_0^{i_r} L_{sr} i_s di_r + L_{rr} i_r di_r = L_{sr} i_s i_r + \frac{1}{2} L_{rr} i_r^2$$

$$W_M = \frac{1}{2} L_{ss} i_s^2 + L_{sr} i_s i_r + \frac{1}{2} L_{rr} i_r^2$$

Potenza elettrica istantanea assorbita

$$v_{ts} = R_s i_s + \frac{d\lambda_s}{dt} = R_s i_s + \frac{d\left(L_{ss} i_s + L_{sr} i_r\right)}{dt}$$

$$v_{tr} = R_r i_r + \frac{d\lambda_r}{dt} = R_r i_r + \frac{d\left(L_{rs} i_s + L_{rr} i_r\right)}{dt}$$

$$p_{es} = i_s \frac{d\left(L_{ss} i_s + L_{sr} i_r\right)}{dt}$$

$$p_{er} = i_r \frac{d\left(L_{rs} i_s + L_{rr} i_r\right)}{dt}$$

Potenza magnetica istantanea

$$p_M = \frac{dW_M}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L_{ss} i_s^2 + L_{sr} i_s i_r + \frac{1}{2} L_{rr} i_r^2\right)$$

Potenza meccanica istantanea

$$dW_e = dW_m + dW_M$$

$$p_e = p_m + p_M$$

$$p_m = \frac{i_s^2}{2}\frac{dL_{ss}}{dt} + i_s i_r \frac{dL_{sr}}{dt} + \frac{i_r^2}{2}\frac{dL_{rr}}{dt}$$

$$p_m = T\omega_m = T\frac{d\beta}{dt} \Rightarrow T = p_m \frac{dt}{d\beta}$$

$$\boxed{T = \frac{i_s^2}{2}\frac{dL_{ss}}{d\beta} + i_s i_r \frac{dL_{sr}}{d\beta} + \frac{i_r^2}{2}\frac{dL_{rr}}{d\beta}}$$

Coppia di riluttanza