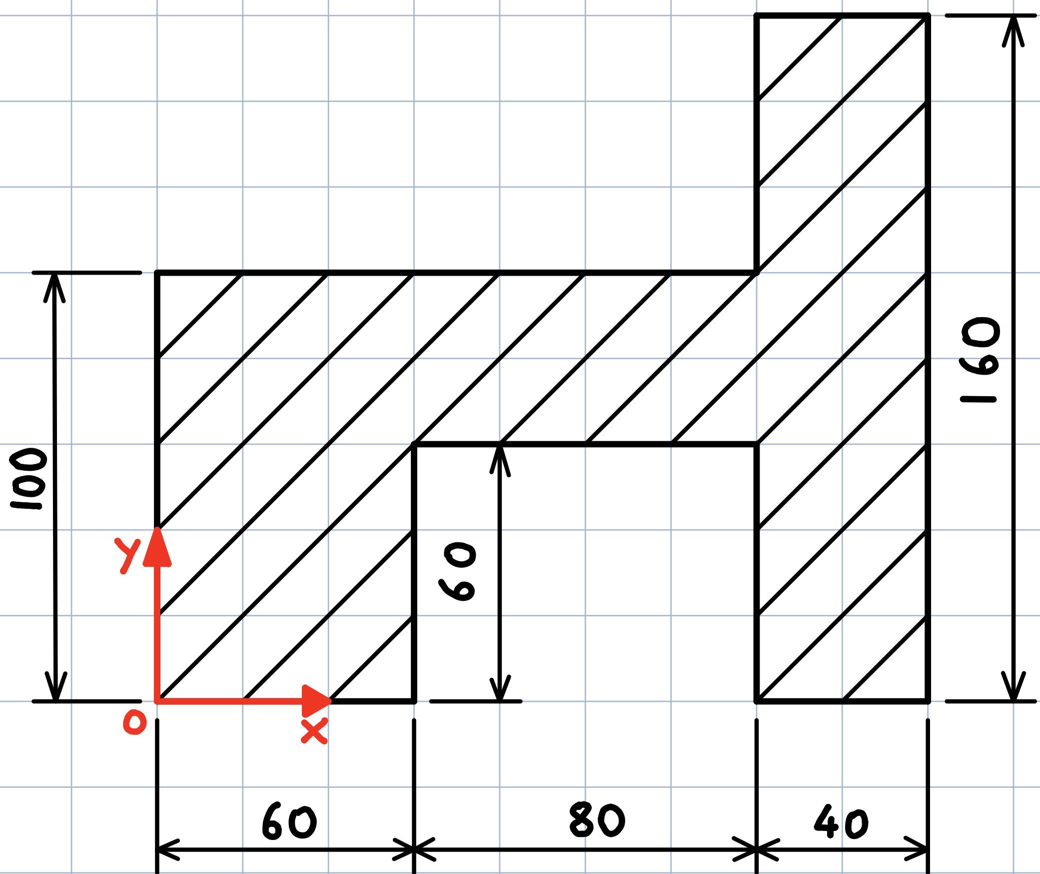
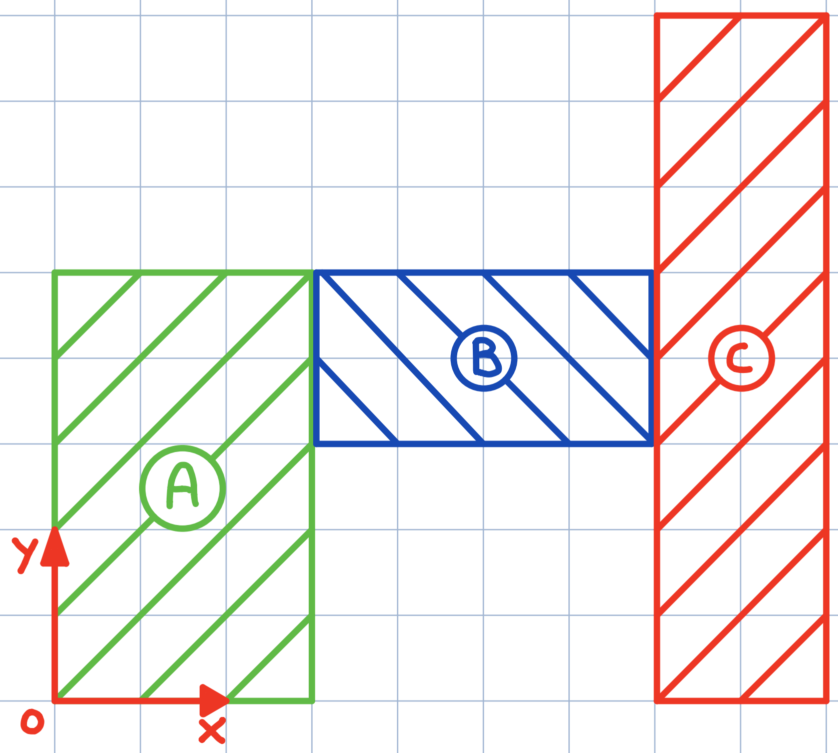


Si chiede di:

- calcolare la posizione del baricentro rispetto al sistema OXY.
- Calcolare i momenti di inerzia rispetto al sistema baricentrico Gxy (ottenuto mediante la traslazione PURA di OXY).
- Calcolare gli eventuali momenti d'inerzia principali e le direzioni (principali) ad essi associate.

- CALCOLO DEL BARICENTRO



È conveniente suddividere la sezione in 3 rettangoli.

A
$$\begin{cases} b_A = 60 \text{ mm} \\ h_A = 100 \text{ mm} \\ A_A = 6000 \text{ mm}^2 \\ x_G^A = 30 \text{ mm} \\ y_G^A = 50 \text{ mm} \end{cases}$$

B
$$\begin{cases} b_B = 80 \text{ mm} \\ h_B = 40 \text{ mm} \\ A_B = 3200 \text{ mm}^2 \\ x_G^B = 100 \text{ mm} \\ y_G^B = 80 \text{ mm} \end{cases}$$

C
$$\begin{cases} b_c = 40 \text{ mm} \\ h_c = 160 \text{ mm} \\ A_c = 6400 \text{ mm}^2 \\ x_G^c = 160 \text{ mm} \\ y_G^c = 80 \text{ mm} \end{cases}$$

Calcolo dei momenti statici rispetto a OXY

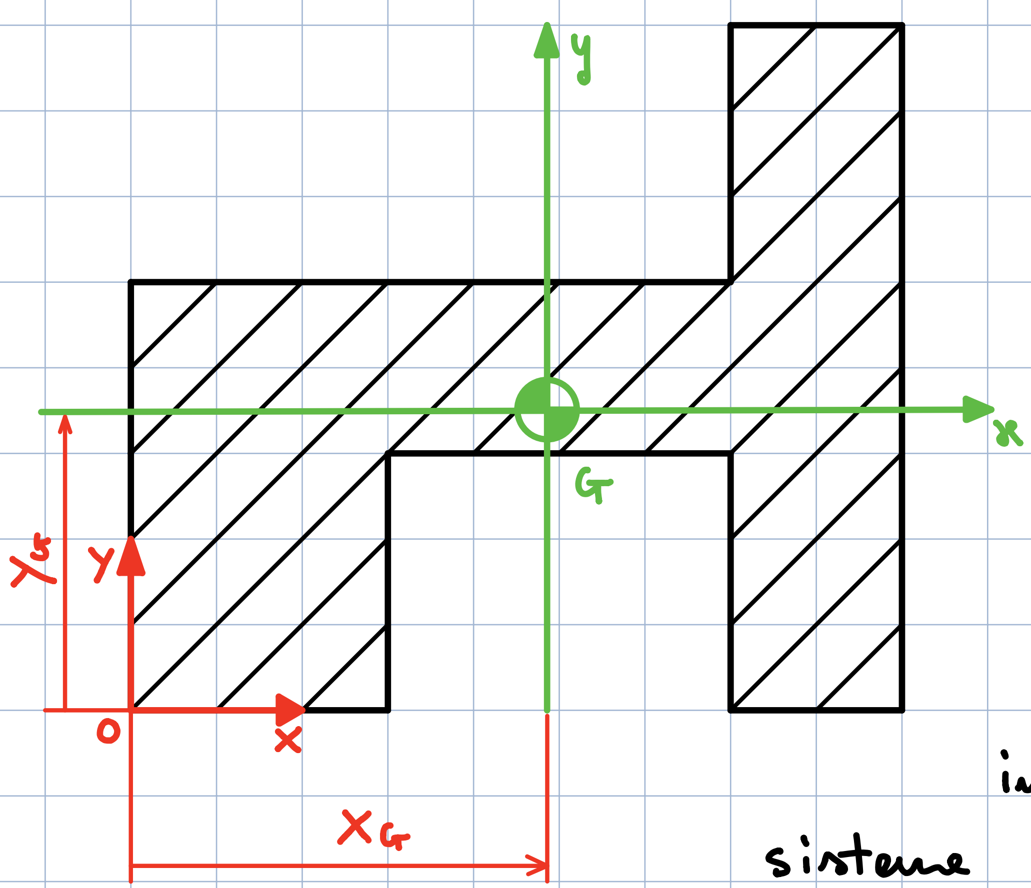
$$S_x = A_A y_G^A + A_B y_G^B + A_c y_G^c =$$
$$= (6000)(50) + (3200)(80) + (6400)(80) = 1068000 \text{ mm}^3$$

$$S_y = A_A x_G^A + A_B x_G^B + A_c x_G^c =$$
$$= (6000)(30) + (3200)(100) + (6400)(160) = 1524000 \text{ mm}^3$$

Le coordinate del baricentro dell'intera sezione si determinano immediatamente.

$$X_G = \frac{S_y}{A_{TOT}} = \frac{1524000}{15600} = 97.692 \text{ mm}$$

$$Y_G = \frac{S_x}{A_{TOT}} = \frac{1068000}{15600} = 68.462 \text{ mm}$$



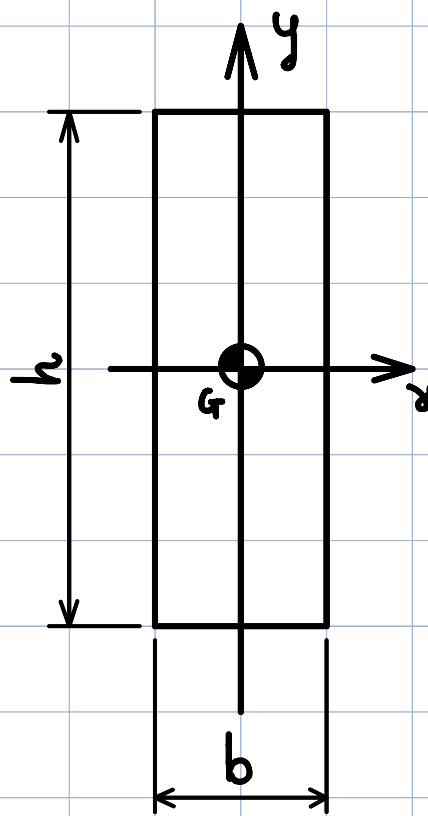
Note le coordinate del baricentro G è comodo esprimere le coordinate dei baricentri di ciascun rettangolo in funzione del sistema centrale $G x y$.

Ⓐ
$$\begin{cases} x_G^A = X_G^A - X_G = 30 - 97.692 = -67.692 \text{ mm} \\ y_G^A = Y_G^A - Y_G = 50 - 68.462 = -18.462 \text{ mm} \end{cases}$$

Ⓑ
$$\begin{cases} x_G^B = X_G^B - X_G = 2.308 \text{ mm} \\ y_G^B = Y_G^B - Y_G = 11.539 \text{ mm} \end{cases}$$

C
$$\begin{cases} x_G^C = X_G^C - X_G = 62.308 \text{ mm} \\ y_G^C = Y_G^C - Y_G = 11.539 \text{ mm} \end{cases}$$

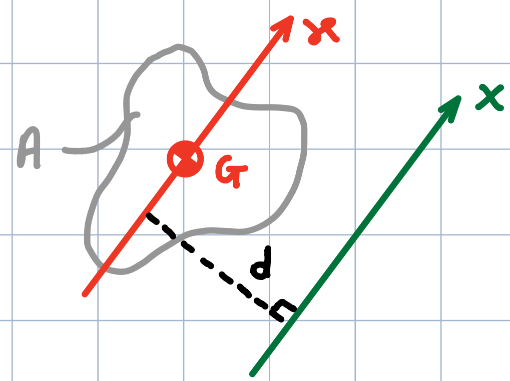
- CALCOLO DEI MOMENTI D'INERZIA



$$\begin{cases} I_x = \dfrac{b h^3}{12} \\ I_y = \dfrac{h b^3}{12} \\ I_{xy} = \emptyset \end{cases}$$

TEOREMA DI HUYGENS-STEINER

$$I = I_G + A d^2$$



$$I_x = I_x^G + A d^2$$

A
$$\begin{cases} I^A_{x,G} = \dfrac{60\,(100)^3}{12} = 5E6 \text{ mm}^4 \\ I^A_{y,G} = \dfrac{100\,(60)^3}{12} = 1.8E6 \text{ mm}^4 \end{cases}$$

B
$$\begin{cases} I^B_{x,G} = \dfrac{80\,(40)^3}{12} = 426667 \text{ mm}^4 \\ I^B_{y,G} = \dfrac{40\,(80)^3}{12} = 1.707E6 \text{ mm}^4 \end{cases}$$

C
$$\begin{cases} I^C_{x,G} = \dfrac{40\,(160)^3}{12} = 1.36533E7 \text{ mm}^4 \\ I^C_{y,G} = \dfrac{160\,(40)^3}{12} = 853333 \text{ mm}^4 \end{cases}$$

$$I_x = \underbrace{I^A_{x,G} + A_A (y^A_G)^2}_{A} + \underbrace{I^B_{x,G} + A_B (y^B_G)^2}_{B} + \underbrace{I^C_{x,G} + A_C (y^C_G)^2}_{C} =$$

$$= I^A_{x,G} + (6000)(-18.462)^2 + I^B_{x,G} + (3200)(11.539)^2 + I^C_{x,G} + (6400)(11.539)^2 =$$

$$= 2.24031\,E7\ mm^4$$

$$I_y = \underbrace{I^A_{y,G} + A_A (x^A_G)^2}_{A} + \underbrace{I^B_{y,G} + A_B (x^B_G)^2}_{B} + \underbrace{I^C_{y,G} + A_C (x^C_G)^2}_{C} =$$

$$= I^A_{y,G} + (6000)(-67.692)^2 + I^B_{y,G} + (3200)(2.308)^2 + I^C_{y,G} + (6400)(62.308)^2 =$$

$$= 5.67169\,E7\ mm^4$$

$$I_{xy} = \underbrace{\cancelto{\emptyset}{I^A_{xy,G}} + A_A x^A_G y^A_G}_{A} + \underbrace{\cancelto{\emptyset}{I^B_{x,G}} + A_B x^B_G y^B_G}_{B} + \underbrace{\cancelto{\emptyset}{I^C_{x,G}} + A_c x^c_G y^c_G}_{C} =$$

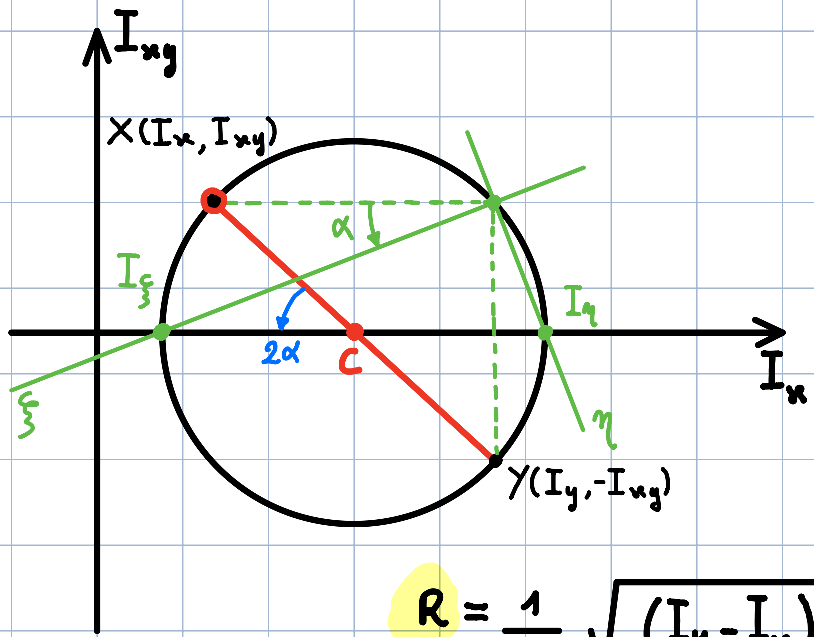
$$= (6000)(-67.692)(-18.462) + (3200)(2.308)(11.539) + (6400)(62.308)(11.539) =$$

$$= 1.21846\,E7\ mm^4$$

Il momento centrifugo I_{xy} non è nullo quindi I_x e I_y sono i momenti d'inerzia CENTRALI ma NON PRINCIPALI.

È necessario calcolare i momenti e le direzioni principali.

CERCHIO DI MOHR DELLE INERZIE



CASO $I_y > I_x$

$I_{xy} > \emptyset$

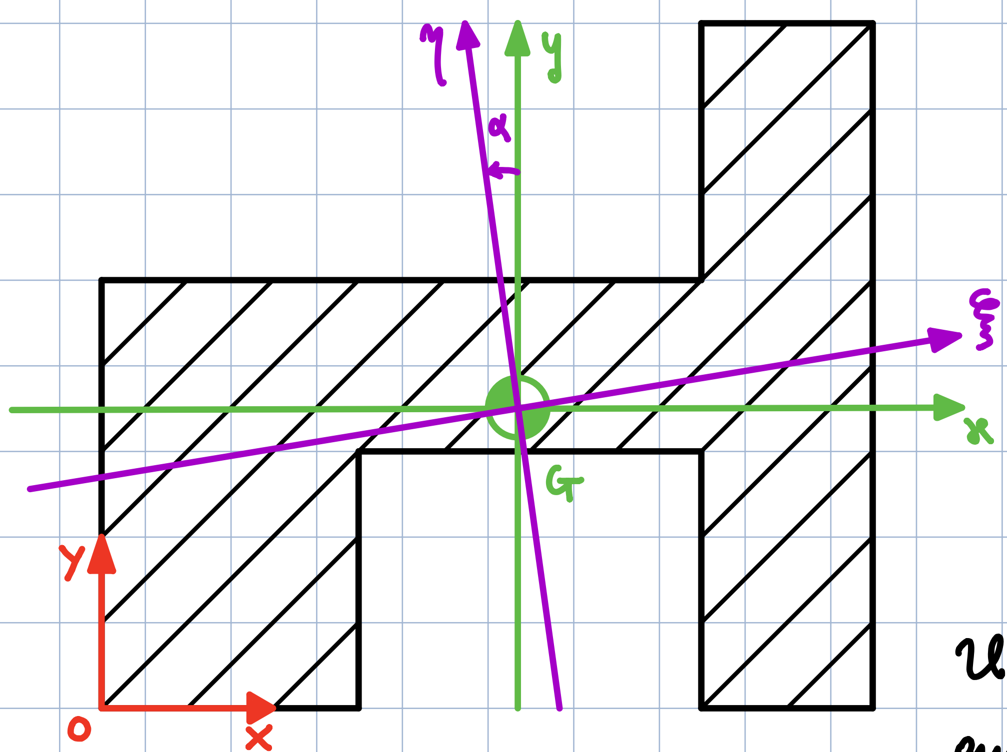
$$C = \frac{I_x + I_y}{2} = 3.956\,E7 \text{ mm}^4$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{(I_y - I_x)^2 + (2I_{xy})^2} = 2.10434E7 \text{ mm}^4$$

$$\left.\begin{matrix} I_\xi \\ I_\eta \end{matrix}\right\} = C \mp R = \begin{cases} \text{MIN } (-): & 1.85166\,E7 \text{ mm}^4 \\ \text{MAX } (+): & 6.06034\,E7 \text{ mm}^4 \end{cases}$$

Momenti d'inerzia PRINCIPALI

$$\alpha = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}\right) = 17.691°$$



Ruotando il sistema Gxy di α in senso CCW si ottiene la configurazione G$\xi\eta$, associata ai momenti principali I_ξ e I_η.

Il sistema G$\xi\eta$ è quindi PRINCIPALE