ZERI DI UNA FUNZIONE OLOMORFA

SIA $f(z)$ OLOMORFA IN D SEMPLICEMENTE CONNESSO SE RISULTA IN PUNTO z_0

$$\forall m \quad f(z_0) = f'(z_0) \dots f^m(z_0) = 0$$

ALLORA $f(z) = 0$ $\boxed{\text{SU TUTTO } D}$

IDENTICAMENTE

DIM. SI CONSIDERA LO SVILUPPO DI TAYLOR INTORNO A z_0 $\quad f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z - z_0)^m$

ESSENDO $a_m = 0$ $\exists$ I_{x_0} IN CUI $f(z) = 0$

PRENDENDO $z_0' \in I_{x_0}$ E CONTINUANDO LO SVILUPPO SI ESTENDE $f(z) = 0$ A TUTTO D

DEFINIZIONE DI ZERO DI ORDINE m

z_0 È UNO ZERO DI ORDINE m PER $f(z)$ SE RISULTA

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots f^{(m-1)}(z_0) = 0$$

$$f^{(m)}(z_0) \neq 0$$

ESEMPIO $\quad f(z) = e^{2z} - 2e^{z} + 1$

$z = 0$ ZERO DI ORDINE 2

$f(0) = 0 \quad f'(z) = 2(e^{2z} - e^{z}) \quad f'(0) = 0 \quad f''(0) \neq 0$

L'INSIEME DEGLI ZERI DI UNA FUNZIONE ANALITICA $f(z)$ NON IDENTICAMENTE NULLA IN UN CAMPO D È COSTITUITO DA PUNTI ISOLATI.

EVENTUALI PUNTI DI ACCUMULAZIONE DI ZERI NON SONO PUNTI DI OLOMORFIA PER $f(z)$

IMPORTANTE CONSEGUENZA:

OGNI IDENTITÀ VALIDA SU $\mathbb{R}$ $f(x) = g(x)$ (PER ESEMPIO $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$) VIENE SEMPRE ESTESA A TUTTO $\mathbb{C}$:

DIM.

SI CONSIDERI $F(z) = f(z) - g(z)$

QUANDO $x \in \mathbb{R}$ $F(x) = 0$ IDENTICAMENTE

PER IL TEOREMA DEGLI ZERI QUESTO NON È POSSIBILE ($F(z)$ NON SI ANNULLA IN UN PUNTO ISOLATO MA SU TUTTO $\mathbb{R}$)

$\Rightarrow$ $F(z) = 0$ IDENTICAMENTE SU TUTTO $\mathbb{C}$

UNICITÀ DELLA CONTINUAZIONE ANALITICA

SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE

$y = f(x)$ $\quad y, x \in \mathbb{R}$ AMMETTA

DUE DIVERSE C. A. $f_1(z)$ $f_2(z)$

E SI CONSIDERI LA FUNZIONE

$$F(z) = f_1(z) - f_2(z)$$

DATO CHE QUANDO $z = x$ (ASSE REALE)

$$f_1(\cancel{z}) = f_2(z) = f(x)$$

$F(z = x) = 0$ $\Rightarrow$ GLI ZERI DI

$F(z)$ NON SONO PUNTI ISOLATI

$\Rightarrow$ $F(z) = 0$ IDENTICAMENTE SU TUTTO

$\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $f_1(z) = f_2(z)$

$\Rightarrow$ UNICITÀ DELLA

CONTINUAZIONE ANALITICA

PUNTI DI SINGOLARITÀ DI UNA FUNZIONE ANALITICA

- PUNTI IN CUI $f(z)$ NON È DERIVABILE
  NON VALGONO CIOÈ LE CONDIZIONI DI CAUCHY - RIEMANN

  ESEMPIO $f(z) = \frac{1}{z}$ $z=0$ PUNTO DI SINGOLARITÀ

  $\nexists \; u_x, u_y, v_x, v_y$

- CONSIDERIAMO SOLO FUNZIONI CHE HANNO PUNTI DI SINGOLARITÀ ISOLATI
  ($\boxed{\text{FUNZIONI MEROMORFE}}$)

- IN GENERE LA CONTINUAZIONE ANALITICA DI FUNZIONI REALI $y = f(x)$ CI CONSENTE DI ESTENDERE $f(x) \to f(z)$ SU TUTTO $\mathbb{C}$ A PARTE PUNTI DI SINGOLARITÀ ISOLATI

ESEMPI $y = \ln x$ $\quad x \in \mathbb{R}^+$

$w = \ln z$ $\quad \forall z \in \mathbb{C} \quad z \neq 0$

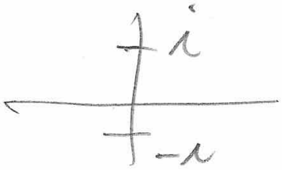
INFATTI $e^y = x \Rightarrow x > 0$

$e^{u+iv} = z \Rightarrow z \neq 0$

ALTRO ESEMPIO : $y = \frac{1}{1+x^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$w = \frac{1}{1+z^2}$ $\forall z \in \mathbb{C}$

$z \neq \pm i$



$\Downarrow$

SING. ISOLATE

CLASSIFICAZIONE PUNTI DI SINGOLARITÀ ISOLATI

- REMOVIBILI
- POLARI
- ESSENZIALI
- DIRAMAZIONE

SINGOLARITÀ REMOVIBILI

z_0 È SINGOLARITÀ REMOVIBILE SE $\nexists\, f(z_0)$ MA $\exists \lim_{z \to z_0} f(z) = \alpha$

ESEMPIO $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ IN $z = 0$

$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$ SI PONE $f(z_0) = \alpha$

- $\boxed{\text{SINGOLARITÀ POLARI}}$

SE LO SVILUPPO IN SERIE DI LAURENT INTORNO A z_0 PARTE DA $-N$ FINITO, CIOÈ

$a_{-N} \neq 0$ e $a_{-m} = 0$ PER OGNI $m < -N$

ALLORA z_0 È UN $\boxed{\text{POLO DI ORDINE } N}$ PER $f(z)$

$$f(z) = \sum_{m=-N}^{\infty} a_m (z-z_0)^m$$

ESEMPIO $f(z) = \frac{1}{z^2}$ POLO DI ORDINE 2 IN $z=0$

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^3} = \frac{1}{z^2}\left[\frac{\sin z}{z}\right] = \frac{1}{z^2} + o(1)$$

POLO DI ORDINE 2 IN $z=0$

SINGOLARITÀ ESSENZIALI

SE LA PARTE DI LAURENT CONTIENE INFINITI TERMINI

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_m (z-z_0)^m$$

LA SINGOLARITÀ SI DICE

$\boxed{\text{ESSENZIALE}}$

ESEMPIO $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$

$z=0$ SINGOLARITÀ ESSENZIALE

CRITERI

(1) CNS PERCHE z_0 SIA POLO DI ORDINE N È CHE ESISTA E SIA $\neq 0$ IL LIMITE

$$\lim_{z \to z_0} (z-z_0)^N f(z) = l \neq 0$$

(2) CNS AFFINCHE z_0 SIA POLO DI ORDINE N È CHE z_0 SIA ZERO DI ORDINE N PER

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}$$

(3) CNS AFFINCHE z_0 SIA POLO DI ORDINE N È CHE

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$$ (ESISTA E SIA INFINITO)

DIM. DELLA (1)

SE PER IPOTESI z_0 POLO DI ORDINE N

ALLORA

$$f(z) = \underbrace{T(z-z_0)}_{\text{PARTE DI TAYLOR}} + a_{-1}(z-z_0)^{-1} + a_{-2}(z-z_0)^{-2} + \dots \, a_{-N}(z-z_0)^{N}$$

$$(z-z_0)^N f(z) = (z-z_0)^N T(z-z_0) + a_{-1}(z-z_0)^{N-1} + \dots a_{-N}$$

$$\lim_{z \to z_0} (z-z_0)^N f(z) = a_{-N} = l \neq 0$$

AL CONTRARIO SE

$$\lim_{z \to z_0} f(z)(z-z_0)^N = l \Rightarrow$$

CHE NELL' INTORNO DI z_0

$$f(z) = \frac{a_{-N}}{(z-z_0)^N} + \dots$$

$\Rightarrow$ z_0 POLO DI ORDINE N

SI TRALASCIANO LE DIMOSTRAZIONI PER (2) e (3)

ESEMPIO $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ TROVIAMO ZERI DEL DENOMINATORE

$z^2+1=0 \Rightarrow z = \pm i$

$f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$ $z = \pm i$ POLI ORDINE 1

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2}$$ $z = \pm i$

POLI ORDINE 2

$$f(z) = \frac{1}{\sin z}$$ $\sin z = 0$ $z = n\pi$

NELL'INTORNO DI $z = n\pi$

$$f(z) \sim \frac{1}{(z-n\pi)} + \dots$$ $\Downarrow$ POLI ORDINE 1

SINGOLARITÀ ESSENZIALE

SE z_0 SINGOLARITÀ ESSENZIALE

$\lim_{z \to z_0} f(z)$ NON ESISTE NÉ INFINITO
NÉ FINITO

ESEMPIO $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}$ $z = 0$

$z = 0$ SINGOLARITÀ ESSENZIALE

ESEMPIO

$f(z) = \sin \frac{1}{z+2}$ $z = -2$

SINGOLARITÀ ESSENZIALE

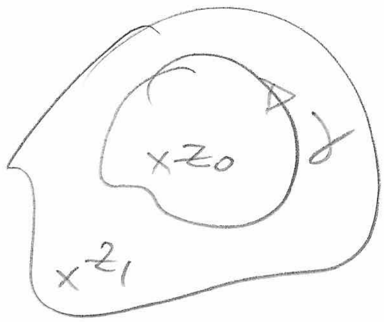
RESIDUI

SIA z_0 PUNTO DI SINGOLARITÀ ISOLATO DI $f(z)$

SI DEFINISCE RESIDUO DI $f(z)$ IN z_0 $\mathcal{R}_f(z_0)$ OPPURE $\mathrm{Res}_f(z_0)$

$$\boxed{\mathcal{R}_f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)\,dz}$$

DOVE γ CURVA CHE INCLUDE **SOLO** LA SINGOLARITÀ z_0



- PER IL PRIMO TEOREMA DI CAUCHY IL RESIDUO **NON DIPENDE** DA γ

- DALLA DEFINIZIONE DEI COEFFICIENTI DI LAURENT ABBIAMO

$$\boxed{a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)\,dz = \mathcal{R}_f(z_0)}$$

CALCOLO DEI RESIDUI

POLO ORDINE N

$$f(z) = T(z-z_0) + a_{-1}(z-z_0)^{-1} + \dots a_{-N}(z-z_0)^{-N}$$

$\Downarrow$ TAYLOR

SEGUE

$$(z-z_0)^N f(z) = (z-z_0)^N T(z-z_0) + a_{-1}(z-z_0)^{N-1}$$

$$+ \dots a_{-N}$$

DERIVANDO N-1 VOLTE

$$\frac{d}{dz^{N-1}}(z-z_0)^N f(z) = \frac{d}{dz^{N-1}}\left[(z-z_0)^N T(z-z_0)\right]$$

$$+ a_{-1}(N-1)!$$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz^{N-1}}(z-z_0)^N f(z) = a_{-1}(N-1)!$$

SEGUE

$$\boxed{a_{-1} = R_f(z_0) = \frac{1}{(N-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[\frac{d}{dz^{N-1}}(z-z_0)^N f(z)\right]}$$

SINGOLARITÀ GENERICA

- SI SVILUPPA $f(z)$ IN SERIE DI LAURENT E SI LEGGE a_{-1}

ESEMPIO $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$

$R_f(z=0) = 0$

- SI CALCOLA L'INTEGRALE

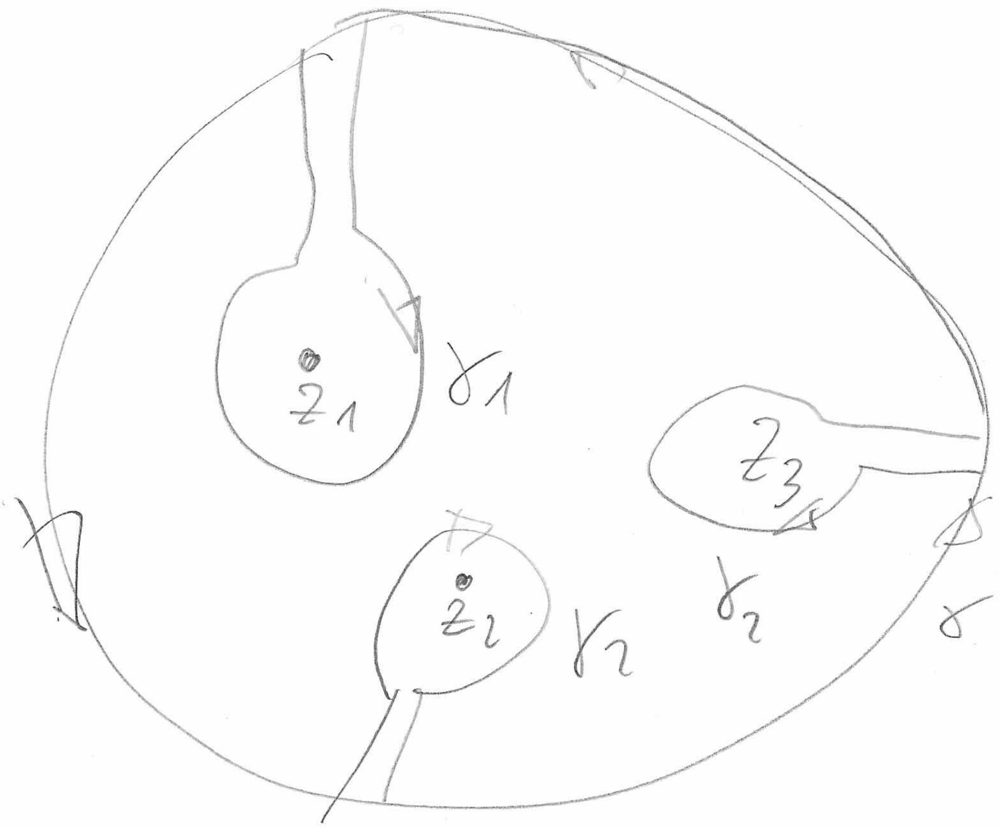
$$\oint_\gamma f(z)\,dz$$

TEOREMA DEI RESIDUI

SIA $f(z)$ FUNZIONE OLOMORFA IN D E γ CURVA CHIUSA GENERALMENTE REGOLARE $\in D$ CHE CONTIENE AL SUO INTERNO SOLO PUNTI DI OLOMORFIA ESCLUSO UN NUMERO FINITO z_k $k=1 \dots N$ DI SINGOLARITÀ ISOLATE E NESSUN PUNTO DI SINGOLARITÀ SI TROVA SULLA CURVA

ALLORA SI HA

$$\boxed{\oint_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{i\ (\text{INTERNI})} R_f(z_i)}$$



$$-\sum_i \oint_{\gamma_i} f(z)\,dz + \oint_{\gamma} f(z)\,dz = 0$$

$$\oint f(z)\,dz = \sum_i \oint_{\gamma_i} f(z)\,dz =$$

$$2\pi i \sum_i R_f(z_i)$$

USO DEI RESIDUI

CALCOLO DEI COEFFICIENTI DI LAURENT a_{-n} PER SINGOLARITÀ POLARI

ABBIAMO $\quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$

$$a_{-1} = R_f(z_0)$$

$$a_{-2} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)(z-z_0) = \text{Res}\left[f \cdot (z-z_0)\right]$$

$$a_{-3} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z-z_0)^2 = \text{Res}\left[f \cdot (z-z_0)^2\right.$$

— — — — —

$$a_{-n} = \text{Res}\left[f \cdot (z-z_0)^{n-1}\right]$$

ESEMPIO $\quad f(z) = \frac{1}{\sin^2 z} \quad z=0$

INTORNO A $z=0$ $\quad \sin z \sim z \quad \frac{1}{\sin^2 z} \sim \frac{1}{z^2}$

$\Rightarrow z=0$ POLO ORDINE 2

SERIE DI LAURENT PARTE CON a_{-2}

$a_{-n} = 0$ PER $n > 2$

$$a_{-1} = R_f(z=0) = \frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{\sin^2 z}\right]_{z=0}$$

NON C'È BISOGNO DI FARE IL CALCOLO

$\frac{z^2}{\sin^2 z}$ = FUNZIONE PARI $\sim 1 + C_2 z^2 + O(z^4)$

NON C'È IL TERMINE $C_1 z$

$\Rightarrow a_{-1} = 0$

$$a_{-2} = \text{Res}\left[f \cdot z\right]_{z=0} = \text{Res}\left[\frac{z}{\sin^2 z}\right]_{z=0}$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{z^2}{\sin^2 z} = 1$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + T(z)$$

I

CALCOLO DI SERIE DI LAURENT

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ $\quad n \geq 0$ Taylor

POLI ORDINE n $\quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

$\boxed{n<0}$

$a_{-1} = \text{Res}\, f(z) \qquad a_{-2} = \frac{1}{2\pi i} \oint (z-z_0)\, f(z)$

$= \text{Res}\,[(z-z_0)\, f(z)] \quad \ldots \quad a_{-n} = \text{Res}\,[f(z)\,(z-z_0)^{n-1}]$

ESEMPIO

$f(z) = \frac{1}{\cos z - 1}$ $\qquad z=0$ POLO ORDINE 2

$a_{-1} = \text{Res}\left[\frac{1}{\cos z-1}\right] = \frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{\cos z-1}\right)\Big|_0 =$

$\lim_{z\to 0} \frac{2z(\cos z-1) + z^2 \sin z}{(\cos z-1)^2} = \lim_{z\to 0} \frac{-z^3+o(z^5)+z^3+o(z^5)}{\frac{1}{4}z^4}$

$\cos z = 1 - \frac{1}{2}z^2 + o(z^4)$ $\qquad = \lim_{z\to 0} \frac{z^5}{z^4} = 0$

$\sin z = z + o(z^3)$

$a_{-2} = \text{Res}\, \frac{z}{\cos z-1} = \lim_{z\to 0} \frac{z^2}{-\frac{1}{2}z^2} = -2$

$a_{-3} = \frac{1}{2\pi i}\oint (z-z_0)^2 f(z) = 0$

$\boxed{n>0}$

$a_0 = \text{Res}\, \frac{f(z)}{(z-z_0)} \quad \ldots \quad a_n = \text{Res}\, \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$

MOLTO COMPLICATO $\qquad$ PIÙ SEMPLICEMENTE

$\cancel{\frac{2}{z^2}\left[\frac{z^2}{2(\cos z-1)}\right]}$ $\qquad \frac{2}{z^2}\left[\frac{z^2}{2(\cos z-1)}\right]$

$$\frac{1 \cdot z^2}{2\cos z - 1} = \frac{1 \cdot z^2}{2 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{4!}z^4} = -\frac{z^2}{2z^2}\left[\frac{1}{1 - \frac{2}{4!}z^2 + \frac{2}{6!}z^4}\right]$$

$$= -\left[1 + \frac{2}{4!}z^2 + \frac{z^4}{6!} \cdots\right.$$

$$\frac{1}{\cos z - 1} = -\frac{2}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6} + \ldots O(z^2)$$

$$\boxed{\Gamma \quad 1}$$

ALTRO ESEMPIO

$$f(z) = \frac{1}{z^3 + z^2} = \frac{1}{z^2(z+1)} \qquad z = 0$$

$$\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{z+1}\right) \qquad \frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{n-2} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^5} \cdots$$

CALCOLO DI INTEGRALI DEFINITI SU $\mathbb{R}$

$$I=\int_a^b f(x)\,dx$$

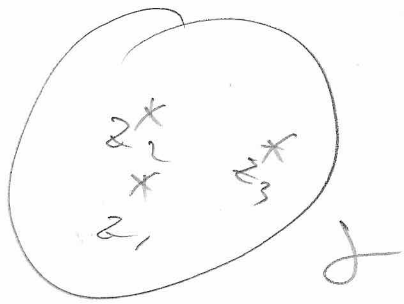
STRATEGIA GENERALE

- SI FA L'ESTENSIONE ANALITICA DI $f(x)$ SU TUTTO $\mathbb{C}$ $\quad f(x) \to f(z)$

- SI CERCA UNA OPPORTUNA CURVA CHIUSA γ CHE COMPRENDE $[a,b] \subset \mathbb{R}$

- SI CALCOLA $\oint_\gamma f(z)\,dz$ USANDO IL TEOREMA DEI RESIDUI

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_n R_f(z_n)$$



- SI DIMOSTRA CHE L'INTEGRALE SUI PEZZI DI $\gamma \neq [a,b]$ SI ANNULLANO

INTEGRALI DI FUNZIONI RAZIONALI

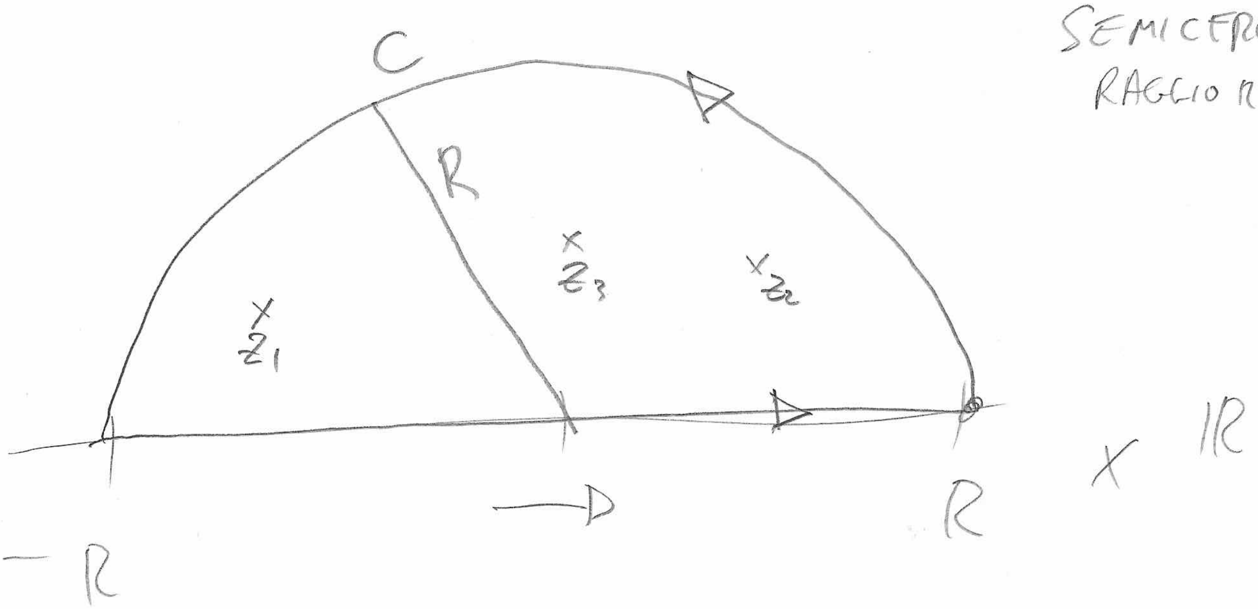
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

- CON $f(x) \to 0$ ALMENO COME $\frac{1}{z^2}$ PER $x \to \pm\infty$

- SI SCEGLIE γ NEL MODO SEGUENTE

$$\gamma = \{ [-R, R] + C \}$$

$\rhd$ SEMICERCHIO RAGGIO R



$$\oint_\gamma f(z)\, dz = \int_{-R}^{R} f(x)\, dx + \int_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_n R_f(z_n)$$

PRENDIAMO IL $\lim_{R \to \infty}$

PER IL LEMMA DI DARBOUX

$$\left| \int_C f(z)\,dz \right| \leq \left| \max_{z \in C} f(z) \right| R$$

MA $f(z) \sim \frac{1}{z^2}$ PER $z \to \infty$
$(R \to \infty)$

QUINDI $|f(z)| \sim \frac{1}{R^2}$

SEGUE $\left| \int_C f(z)\,dz \right| \leq \frac{1}{R}$

NEL LIMITE $R \to \infty$

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_n R_f(z_n)}$$

PER IL LEMMA DI DARBOUX

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leq \left|\max_{z\in C} f(z)\right| R$$

MA $f(z) \sim \frac{1}{z^2}$ PER $z \to \infty$ $(R \to \infty)$

QUINDI $|f(z)| \sim \frac{1}{R^2}$

SEGUE $\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leq \frac{1}{R}$

NEL LIMITE $R \to \infty$

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_n R_f(z_n)}$$

INTEGRALI DEL TIPO $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$I = \int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta$$

CON f FUNZIONE RAZIONALE

SI RIDUCO ALL'INTEGRALE NEL PIANO DI GAUSS SU γ = CIRCONF. DI RAGGIO 1 MEDIANTE IL CAMBIAMENTO DI VARIABILE

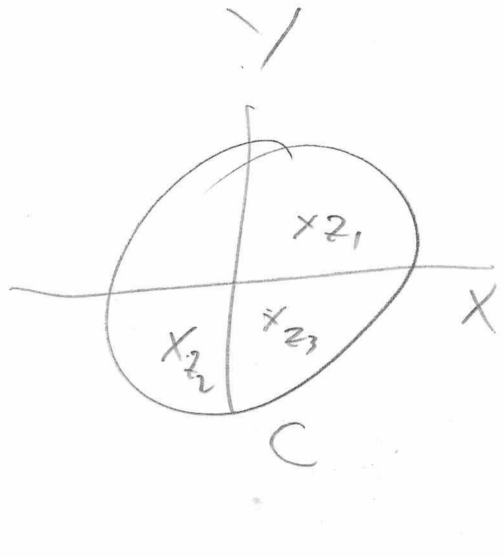
$$z = e^{i\theta} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \Rightarrow z \in C$$

$$dz = i e^{i\theta} d\theta \Rightarrow d\theta = -i \frac{dz}{z}$$

$$\cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}$$

$$I = \oint_C f(z)\,(-i)\,\frac{dz}{z} := \oint_C g(z)\, dz$$

$$= 2\pi i \sum_n R_g(z_n)$$



CALCOLO DI RESIDUI

$$f(z) = \frac{z}{z^2+1} = \frac{z}{(z+i)(z-i)} \qquad z = \pm i \text{ poli semplici}$$

$$\operatorname{Res} f(i) = \lim_{z\to i} (z-i) f(z) = \lim_{z\to i} \frac{z}{z+i} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Res} f(-i) = \lim_{z\to -i} (z+i) f(z) = \lim_{z\to -i} \frac{z}{z-i} = \frac{1}{2}$$

$$f(z) = \frac{z+1}{e^z-1} \qquad z=0$$

$$\operatorname{Res} f(0) = \lim_{z\to 0} \frac{(z+1)z}{e^z-1} = \lim_{z\to 0} \frac{z(z+1)}{z} = 1$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \oint_\gamma \frac{1}{z^2+1} = 2\pi i \operatorname{Res}(i)$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to i} \cancel{(z-i)} \frac{1}{(z+i)\cancel{(z-i)}} = \frac{1}{2i} 2\pi i = \pi$$

$$= \operatorname{arctg} \infty - \operatorname{arctg} -\infty = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+5x^2+4}\,dx = \oint_\gamma \frac{1}{(z^2+4)(z^2+1)} = \oint_\gamma \frac{1}{(z+i)(z-i)(z+2i)(z-2i)}$$

$$= 2\pi i \left[\operatorname{Res} f(i) + \operatorname{Res} f(2i)\right]$$

$$= 2\pi i \left.\frac{1}{(z+i)(z^2+4)}\right|_{z=i} + 2\pi i \left.\frac{1}{(z+2i)(z^2+1)}\right|_{z=2i}$$

$$= 2\pi i \left[\frac{1}{2i} - \frac{1}{12i}\right] = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$$

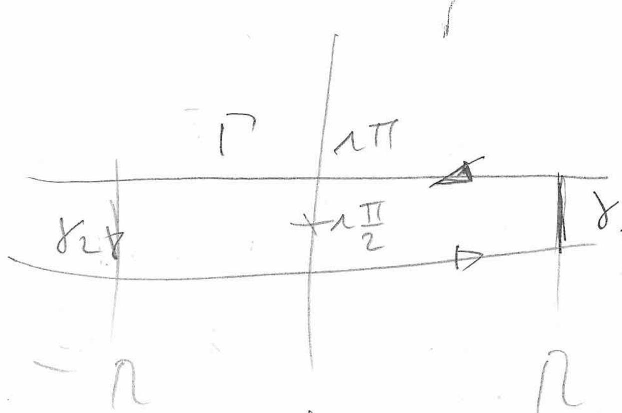
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5-4\cos\theta} = \oint_C \frac{-i}{z}\,\frac{dz}{5-4\frac{(z+z^{-1})}{2}} = \frac{-2i}{2}\oint \frac{dz}{10z-4z^2-4}$$

$$= \frac{1}{2}\oint \frac{dz}{(z-2)(z-\frac{1}{2})} = 2\pi i\left(\frac{1}{2}\right) \operatorname{Res}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \cancel{\pi} -\pi \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{1}{(z-2)} = -\pi\,\frac{1}{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\pi$$

$$\boxed{4\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} x}\,dx$$



$\sinh iy = i\sin y$
$\cosh iy = \cos y$

$$\lim_{R\to\infty}\oint \frac{dz}{\operatorname{ch} z} = \int_{-R}^{R} \frac{1}{\operatorname{ch} x}\,dx + \int_{\gamma_1} \frac{1}{\operatorname{ch} z} + \int_{\Gamma} \frac{1}{\operatorname{ch} z}$$

$$+ \int_{\gamma} \frac{1}{\operatorname{ch} z}$$

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{\operatorname{ch} z} = \int_{-R}^{R} \frac{1}{\operatorname{ch} x}$$

$z = x + iy$

$\cos z = \cos(x+iy)$

$= \cosh x \cosh iy + \sinh x \sinh iy$

$= \cosh x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y$

$y = \pi$

$\cosh(x + i\pi) = -\cosh x$

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{\cosh z} = \int \frac{dy}{\operatorname{ch} R \cos y + i \operatorname{sh} R \sin y}$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{\operatorname{ch} z} = -\int_{\gamma_2} \frac{dy}{\operatorname{ch} R \cos y - i \operatorname{sh} R \sin y}$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} \frac{dy}{\operatorname{ch} R \cos y + i \operatorname{sh} R \sin y} =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int \frac{dy}{e^{R}(\cos y + i \sin y)} = e^{-R} \int \frac{1}{\cos y + i \sin y} = 0$$

$$\lim_{R\to\infty} \oint \frac{dz}{\operatorname{ch} z} = 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} x} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\operatorname{ch} z}\right)\Big|_{z=\frac{\pi}{2} i}$$

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{2} i} \frac{\left(z-\frac{\pi}{2} i\right)}{\operatorname{ch} z} = \lim_{z\to\frac{\pi}{2} i} \frac{1}{\operatorname{sh} z} = \lim_{z\to\frac{\pi}{2} i} \frac{1}{i \sin \ldots}$$

$$= \frac{1}{i \sin\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{i}$$

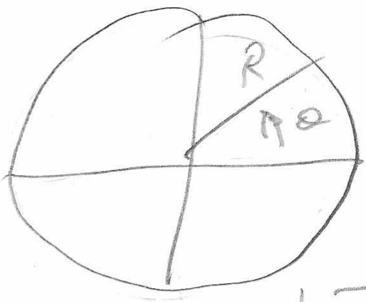
$$\cancel{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{2\pi \cancel{i}}{\cancel{i}} = \pi$$

PUNTO ALL' INFINITO

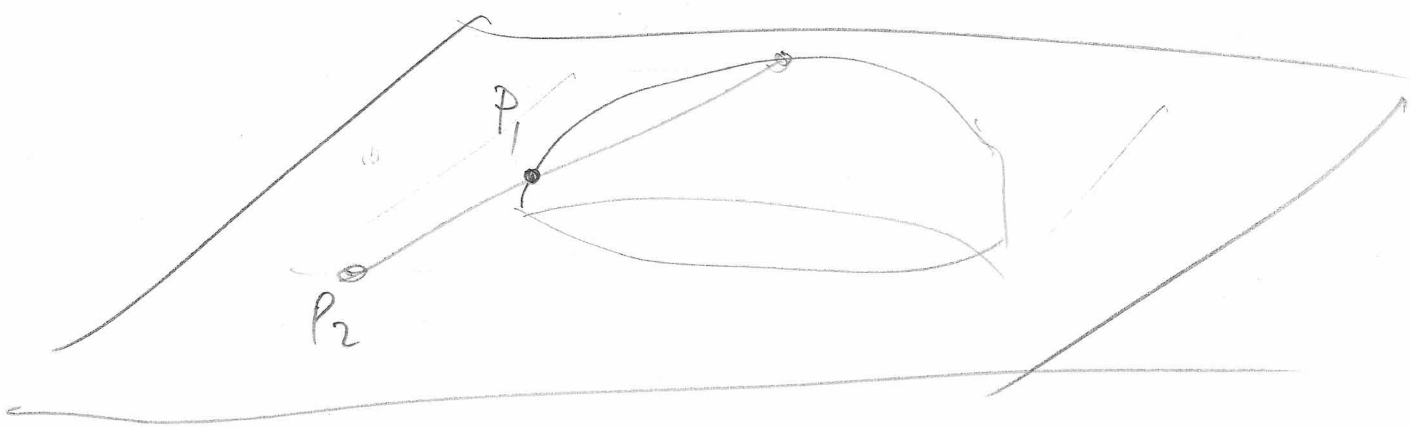
NEL PIANO DI GAUSS L' INFINITO PUÒ ESSERE CONSIDERATO COME $\lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} x+iy$ $\quad z = x+iy$

OPPURE IN COORDINATE POLARI $z = Re^{i\theta}$

$$\lim_{R \to \infty} Re^{i\theta}$$



- È COMODO PERÒ AVERE UN $\boxed{\text{SOLO}}$ PUNTO ALL' INFINITO
- QUESTO PUÒ ESSERE FATTO TRAMITE PROIEZIONE STEREOGRAFICA TRA SFERA E PIANO



DESCRITTA DALLA MAPPA

$$z' = \frac{1}{z}$$

$z = \infty$ VIENE MAPPATO IN $z' = 0$

UN INTORNO CIRCOLARE DI z' : $|z'| < \delta$

VIENE MAPPATO IN UN "INTORNO" ALL'INFINITO

DI z $\quad |z| > \frac{1}{\delta}$

- IL PUNTO ALL'INFINITO VIENE QUINDI STUDIATO SEMPLICEMENTE USANDO LA TRASFORMAZIONE

$$z = \frac{1}{z'}$$

E STUDIANDO $z' = 0$.

ESEMPIO $\quad f(z) = z^2$

$f(z') = \frac{1}{z'^2}$ $\quad z' = 0$ POLO ORDINE 2

$\Rightarrow$ $\boxed{z = \infty}$ POLO ORDINE 2

• LO SVILUPPO DI TAYLOR LAURENT PUÒ ESSERE FATTO INTORNO A $z = \infty$

USANDO $z = \frac{1}{z'}$ E SVILUPPANDO

INTORNO A $z' = 0$ E POI

FACENDO LA TRASFORMAZIONE INVERSA

$z' = \frac{1}{z}$

SI STUDIA CIOÈ

$g(z') = f\left(\frac{1}{z}\right)$ INTORNO A $z' = 0$

$$g(z') = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n z'^n + \sum_{n=1}^{\infty} a'_{-n} (z')^{-n}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n z^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} a'_{-n} z^n$$

NOTARE LO SCAMBIO TRA

PARTE DI TAYLOR

E PARTE DI LAURENT

TEOREMA DI LIOUVILLE

UNA FUNZIONE OLOMORFA SU TUTTI I PUNTI DEL PIANO COMPRESO IL PUNTO ALL'INFINITO È NECESSARIAMENTE COSTANTE

$\boxed{\text{DIM.}}$

- $z=0$ PUNTO DI OLOMORFIA PER IPOTESI

$\forall z \in I_{z=0} \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $\boxed{\text{TAYLOR}}$

- NON ESSENDOCI PUNTI DI SINGOLARITÀ AL FINITO POSSIAMO ESTENDERE LO SVILUPPO DI TAYLOR SU TUTTO $\mathbb{C}$

$|z| < \infty$

- ESSENDO $f(z)$ OLOMORFA IN $z=\infty$ NELLO SVILUPPO INTORNO ALL'INFINITO NON CI POSSONO ESSERE I TERMINI $a_n z^n$ (SAREBBERO MAPPATI IN POLI DI ORDINE n) DA $z \to \frac{1}{z}$ $\Rightarrow a_n = 0 \quad n > 0$

SOLO $a_0 \neq 0 \Rightarrow f(z) = a_0 = \text{COST.}$

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA COME COROLLARIO DEL TEOREMA DI LIOUVILLE

OGNI POLINOMIO

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots a_0$$

POSSIEDE ALMENO UNA RADICE $z = z_0$

$$P(z_0) = 0$$

DIM. PER ASSURDO

CONSIDERIAMO LA FUNZIONE

$f(z) = \frac{1}{P(z)}$ SE $P(z)$ NON HA RADICI FINITE $P(z_1) = 0$

$f(z)$ È ANALITICA SU TUTTO $\mathbb{C}$ AL FINITO

DEL RESTO USANDO $z \to \frac{1}{z}$

SI TROVA CHE $z = \infty$ È ANALITICO PER $f(z)$ $\Rightarrow$ $f(z) = \text{cost}$ PER

IL TEOREMA DI LIOUVILLE

CLASSIFICAZIONE FUNZIONI ANALITICHE

$\boxed{\text{INTERE}}$

OLOMORFE IN TUTTI I PUNTI FINITI DI C

$\boxed{\text{POLINOMI}}$ $z = \infty$ POLO ORDINE n

$\boxed{\text{TRASCENDENTI}}$ $z = \infty$ SINGOLARITÀ ESSENZIALE

ES. $f(z) = e^{z}$

PUNTI DI DIRAMAZIONE

- NELL' ANALISI REALI LE FUNZIONI INVERSE DI FUNZIONI NON MONOTONE NON SONO FUNZIONI **MONODROME** (SOL VALORE) MA **POLIDROME**
PIÙ VALORI

ESEMPIO $y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$

IN $\mathbb{R}$ IL PROBLEMA SI RISOLVE FACILMENTE LIMITANDO IL DOMINIO DELLA $f(x)$ ($x \in \mathbb{R}^+$ PER $y = x^2$)

- NELL' ANALISI COMPLESSA IL PROBLEMA NON PUÒ ESSERE RISOLTO COSÌ FACILMENTE (ABBIAMO UNA DIREZIONE IN PIÙ!!!)

PRENDIAMO LA FUNZIONE

$$f(z) = \sqrt{z} \qquad \text{E} \qquad z = r e^{i\theta} \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

ABBIAMO VISTO CHE $\sqrt{z}$ HA DUE DETERMINAZIONI

$$f_1(z) = \sqrt{r}\, e^{\frac{i\theta}{2}}$$

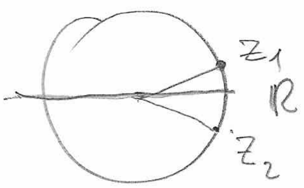
$$f_2(z) = \sqrt{r}\, e^{\frac{i\theta}{2} + i\pi}$$

ANCHE QUI POSSIAMO SCEGLIERE UNA DETERMINAZIONE

$$f(z) = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$$

MA GENERIAMO UNA DISCONTINUITÀ

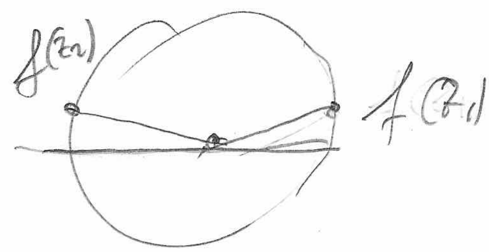
SE PRENDIAMO DUE PUNTI z VICINI



$$z_1 = r\, e^{i\varepsilon}$$
$$z_2 = r\, e^{i(2\pi - \varepsilon)}$$

VENGONO MAPPATI IN PUNTI LONTANI

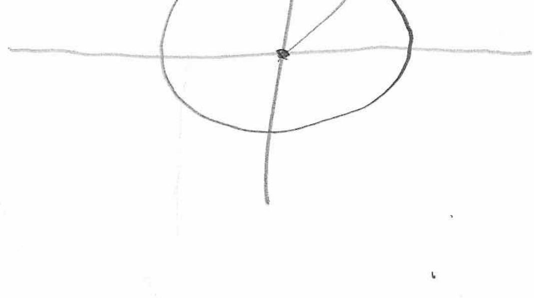
$$f(z_1) = \sqrt{z_1} = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\varepsilon}{2}}$$
$$f(z_2) = \sqrt{z_2} = \sqrt{r}\, e^{-i\frac{\varepsilon}{2} + \pi}$$



GENERIAMO CIOÈ UNA DISCONTINUITÀ LUNGO L'ASSE $\mathbb{R}$

- ANCHE USANDO DIVERSE DETERMINAZIONI NON SI PUÒ ELIMINARE LA DISCONTINUITÀ

$\boxed{\text{ALTERNATIVAMENTE}}$



PRENDIAMO UN PUNTO

$$z_1 = r\, e^{i\theta_1} \neq 0$$

E MUOVIAMOCI LUNGO UNA CIRCONFERENZA CENTRATA NELL'ORIGINE IN SENSO ANTIORARIO

- DOPO AVER PERCORSO UN GIRO DI 2π

$f(z) = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$ CAMBIA SEGNO

$\theta \to \theta + 2\pi \qquad f(z) \to \sqrt{r}\, e^{\frac{i\theta}{2}}\, e^{i\pi} = -f(z)$

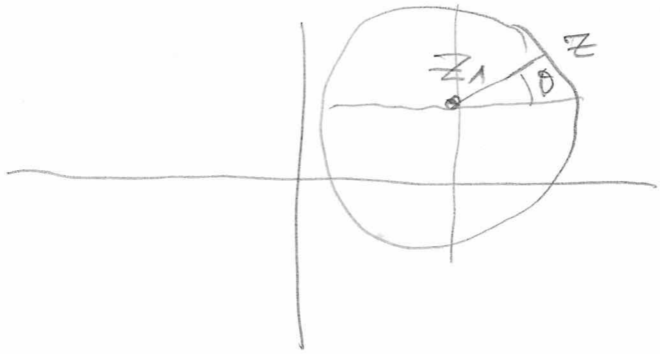
PUNTI z_0 TALI CHE QUANDO SI RUOTA INTORNO A ESSI DI 2π UNA FUNZIONE $f(z)$ CAMBIA DETERMINAZIONE SI CHIAMANO $\boxed{\text{PUNTI DI DIRAMAZIONE}}$ PER $f(z)$

E $f(z)$ SI CHIAMA $\boxed{\text{POLIDROMA}}$ A M VALORI

$z = 0$ È PUNTO DI DIRAMAZIONE PER $\sqrt{z}$ CHE È FUNZIONE POLIDROMA A DUE VALORI

NB UN GENERICO ALTRO PUNTO $z_1 \in \mathbb{C} \neq 0$

NON È DI DIRAMAZIONE PER $\sqrt{z}$



$$z = z_1 + (z - z_1)$$

$$= z_1 + r e^{i\theta}$$

$$z - z_1 = r e^{i\theta}$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{z_1 + r e^{i\theta}} \qquad \theta \to \theta + 2\pi$$

$$\sqrt{z} \to \sqrt{z}$$

ALTRI ESEMPI

$z = 0$ È PUNTO DI DIRAMAZIONE PER

$f(z) = z^{\frac{1}{n}}$ $\quad f(z) \to$ POLIDROMA n VALORI

$z = 0$ È PUNTO DI DIRAMAZIONE

PER $f(z) = \ln z = \ln r e^{i\theta} = \ln r + i\theta$

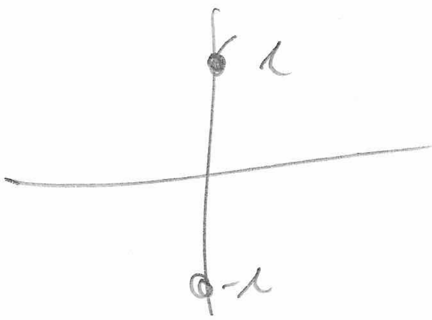
$\theta \to \theta + 2\pi k \qquad f(z) \to f(z) + 2\pi k i$

POLIDROMA A INFINITI VALORI

$f(z) = \sqrt{z^2+1}$

PUNTI DI DIRAMAZIONE

$z^2+1=0 \Rightarrow z = \pm i$



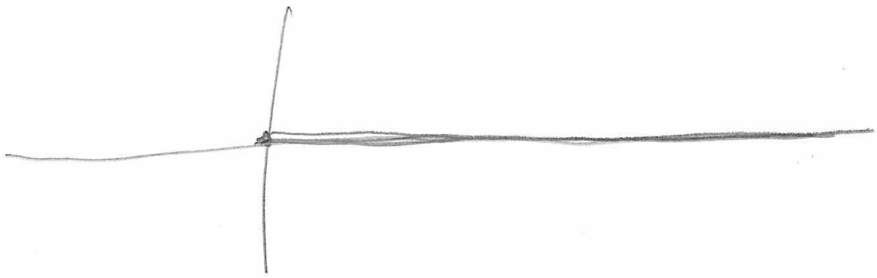
RISOLUZIONE PROBLEMA DELLA POLIDROMIA

- TAGLI (CUTS)
- FOGLI DI RIEMANN

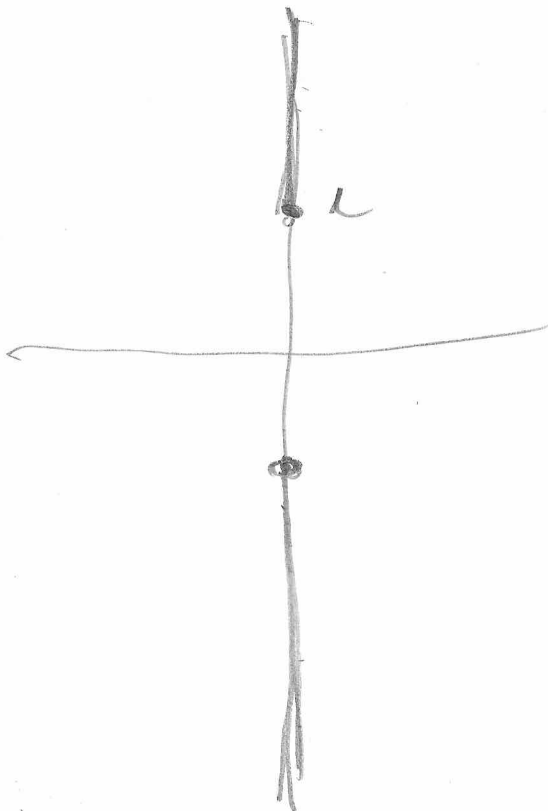
TAGLI

SI TAGLIA (SI TOGLIE DAL DOMINIO DI DEFIZIONE) UNA LINEA SU $\mathbb{C}$ IN MODO DA IMPEDIRE DI RUOTARE INTORNO AL PUNTO DI DIRAMAZIONE

• $f(z) = \sqrt{z}$



OPPURE ANCHE ALTRE LINEE ORIGINANTI DA $z=0$

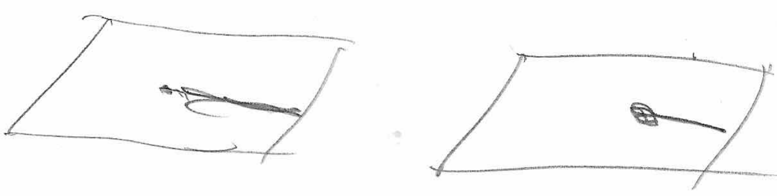


• $f(z) = \sqrt{z^2+1}$

FOGLI DI RIEMANN

PER UNA FUNZIONE A N VALORI SI USANO N-COPIE DEL PIANO DI GAUSS IN CUI LA FUNZIONE ASSUME LE VARIE DETERMINAZIONI

$f(z) = \sqrt{z}$ DUE FOGLI DI RIEMANN



SI TAGLIA LUNGO IL SEMIASSE POSITIVO DELLA X POI SI RIATTACCA

- **STUDIO DEL PUNTO ALL' INFINITO**

$z' = \frac{1}{z}$ E SI STUDIA IN $z' = 0$

ESEMPIO

$$f(z) = \sqrt{z} \to f\left(\frac{1}{z'}\right) = \frac{1}{\sqrt{z'}}$$

$z' = 0$ PUNTO DI DIRAMAZIONE

$\Rightarrow z = \infty$ PUNTO DI DIRAMAZIONE

TAGLIO DEVE TAGLIARE TRA $z = 0$ E $z = \infty$

LEMMA DI JORDAN

IN MOLTE APPLICAZIONI (SOPRATUTTO TRASFORMATE DI FOURIER)

SI DEVONO CALCOLARE INTEGRALI DEL TIPO SU $\mathbb{R}$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i\alpha x}\, dx \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

PER QUESTO CALCOLO SI USA IL

$\boxed{\text{LEMMA DI JORDAN}}$

SE LA CONTINUAZIONE ANALITICA $f(z)$ DELLA $f(x)$ È ANALITICA SU TUTTO $\mathbb{C}$ A PARTE UN NUMERO FINITO DI PUNTI, E SE $\alpha > 0$ (RISPETT. $\alpha < 0$) E SE RISULTA

$$\lim_{|z| \to \infty} \left(\max_{z \in \Gamma} |f(z)| \right) = 0$$

DOVE Γ È UNA SEMICIRCONFERENZA Γ CENTRATA SULL'ORIGINE E

POSTA NEL SEMIPIANO POSITIVO PER $\alpha > 0$

(NEL SEMIPIANO NEGATIVO PER $\alpha < 0$)

ALLORA RISULTA

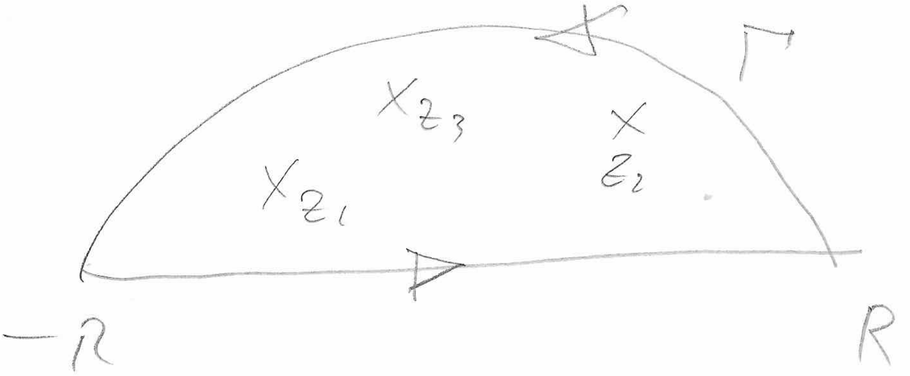
$$\boxed{\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} f(z)\, e^{i\alpha x}\, dz = 0}$$

APPLICANDO QUESTO RISULTATO SI TROVA

PER $\alpha > 0$

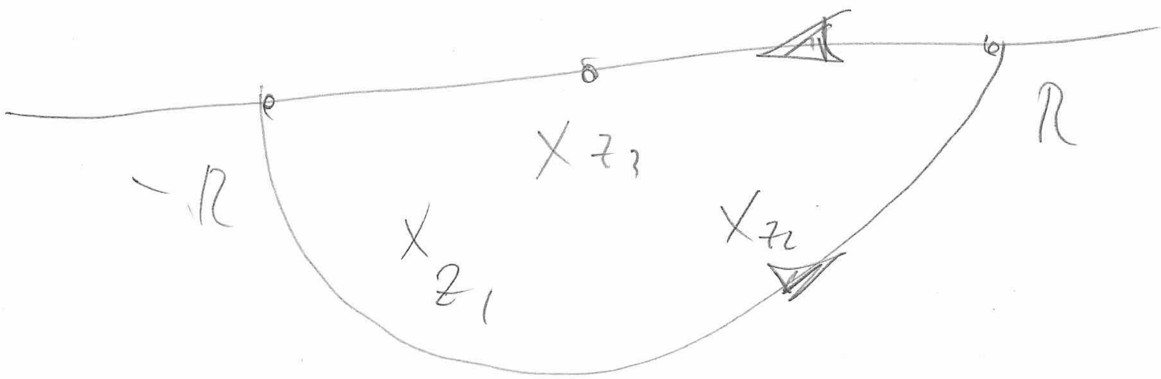
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} f(x)\, dy = 2\pi i \sum_i R_F(z_i)$$

$F = e^{i\alpha x} \cdot f(x)$



PER $\alpha < 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} f(x)\,dx = -2\pi i \sum_{i} R_F(z_i)$$



ESEMPIO

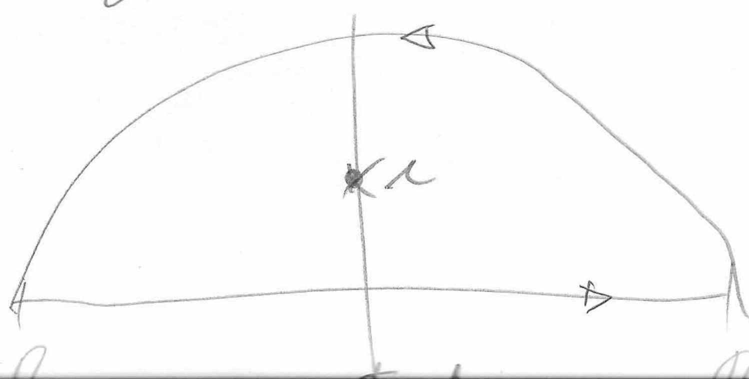
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx \qquad J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$$

CONSIDERO

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\,dx$$

SONO SODDISFATTE LE CONDIZIONI DEL LEMMA DI JORDAN NEL SEMIPIANO POSITIVO

$$F(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}$$



SINGOLARITÀ

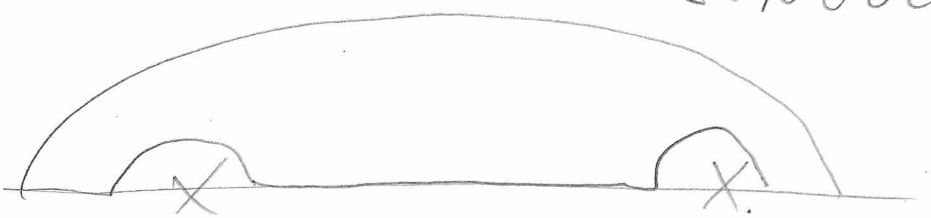
$$I_1 = 2\pi i \, R_F(z=i) = 2\pi i \lim_{z \to i} \frac{\cancel{(z-i)}\, e^{ix}}{(z+i)\cancel{(z-i)}}$$

$$= 2\pi i \, \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}$$

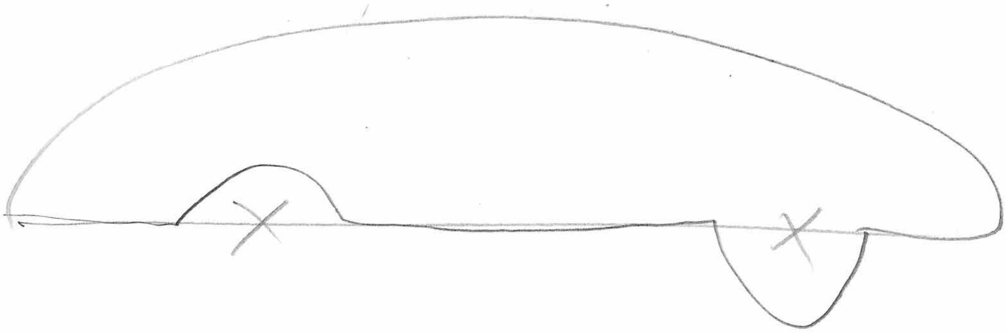
$$I = \mathrm{Im}\, I_1 = 0 \qquad J = \mathrm{Re}\, I_1 = \frac{\pi}{e}$$

$\boxed{\text{SINGOLARITÀ LUNGO IL PERCORSO DI INTEGRAZIONE}}$

(1) SI AGGIRA LA SINGOLARITÀ



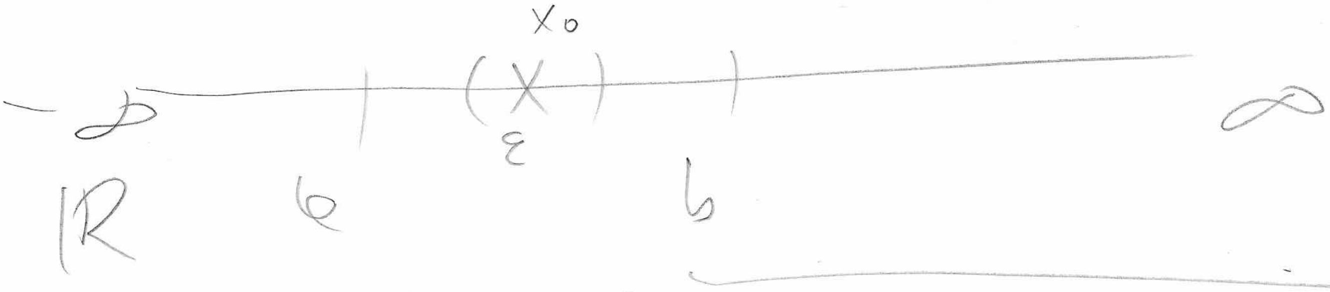
OPPURE



CONDIZIONI AL CONTORNO

② PARTE PRINCIPALE DI UN INTEGRALE

SUPPONIAMO CHE $f(x)$ NON SIA INTEGRABILE IN $[a,b]$ PERCHÉ DIVERGE IN x_0



SI DEFINISCE LA $\boxed{\text{PARTE PRINCIPALE DI UN'INTEGRALE}}$

$$P\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+}\left[\int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_0+\varepsilon}^b f(x)\right]$$

NB: NELL' INTEGRAZIONE SECONDO RIEMANN

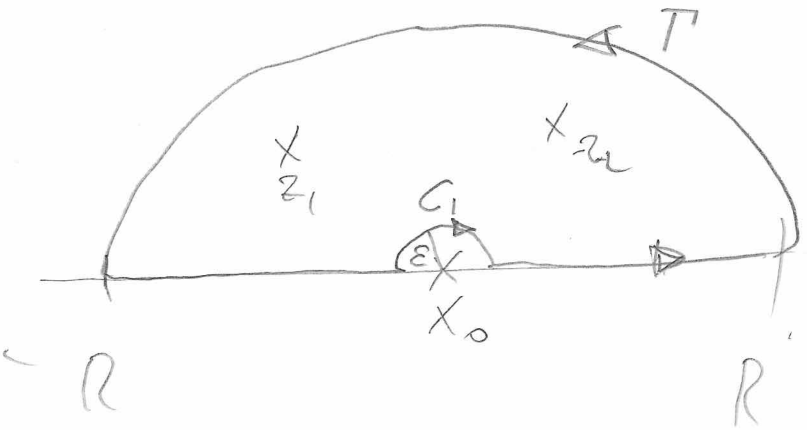
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon' \to 0}} \int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_0+\varepsilon'}^b f(x)\,dx$$

ESEMPIO $x_0 = 0$

$$P\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \ln|x|\Big|_{\varepsilon}^{1} =$$

$$\ln|\varepsilon| - \ln|\varepsilon| = 0$$

$P\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ SI PUÒ CALCOLARE USANDO



SE $\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$

ABBIAMO

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}} P\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \overset{0}{\overset{\parallel}{\int_\Gamma f(x)\,dx}} + \int_{C_1} f(z)\,dz =$$

$$= 2\pi i \sum_i R_f(z_i)$$

SI TROVA FACILMENTE PRENDENDO C_1

SEMICIRCONFERENZA

$$\int_C f(z)\,dz = \pi i\, R_f(x_0)$$

SEGUE

$$P\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{l=1} R_f(z_l) + \pi i \sum_{k} R_f(z_k)$$

$\{\text{INTERNI}\}$ $\{\text{PER C. INTEGRAZIONE}\}$

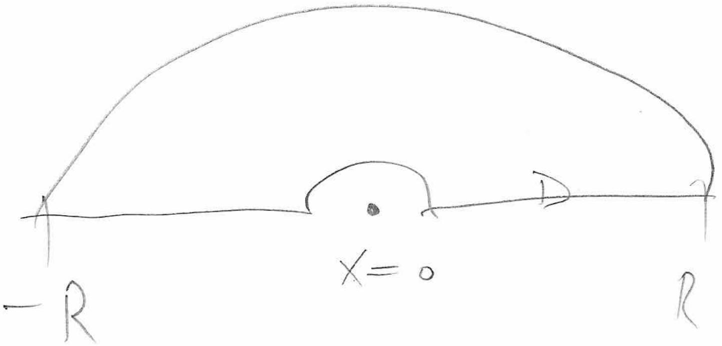
ESEMPIO

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx$$

LEMMA DI JORDAN



$$I = \pi i\, R_F(z=0) = \pi i \lim_{z\to 0} \frac{e^{iz}}{z} z$$

$$= \pi i$$

$I_1 = \operatorname{Re} I = 0 \qquad I_2 = \operatorname{Im} I = \pi$