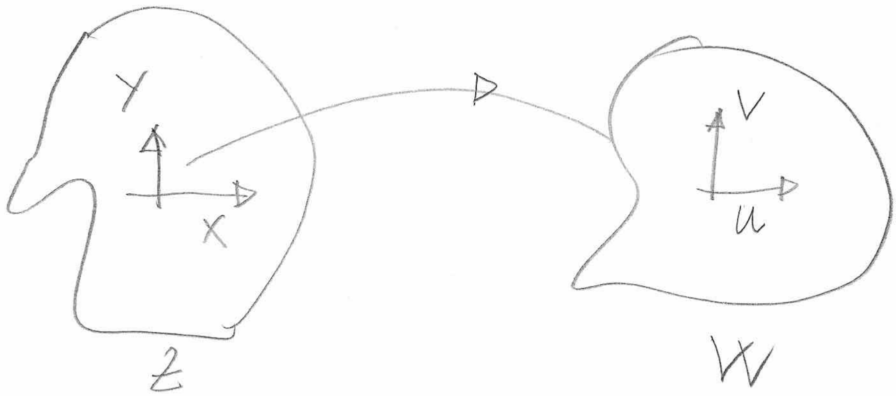
FUNZIONI DI VARIABILE COMPLESSA

$W = f(z)$ $\qquad$ $W, z \in \mathbb{C}$ $\qquad$ $\begin{cases} z = x + iy \\ W = u + iv \end{cases}$



$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

ESEMPIO $\qquad$ $W = z^2$ $\qquad$ $u + iv = (x+iy)^2 =$

$= x^2 - y^2 + 2ixy$

$u = x^2 - y^2 \qquad v = 2xy$

GENERALIZZAZIONE DI FUNZIONI

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $y = f(x)$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $z = f(x,y)$

$f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $z = f(x_1, x_2 - x_N)$

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\qquad$ $\begin{cases} V_x = V_x(x,y,z) \\ V_y = V_y(x,y,z) \\ V_z = V_z(x,y,z) \end{cases}$ $\qquad$ CAMPO VETTORIALE

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $\qquad$ $f \in L^2(a,b)$

$\boxed{NB}$ $W = f(z)$ NON È SEMPLICEMENTE RICONDUCIBILE A $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$

CAMPO VETTORIALE SU $\mathbb{R}^2$

ABBIAMO IN PIÙ UNA **STRUTTURA COMPLESSA**

X, Y E U, V APPAIONO NELLA COMBINAZIONE

$$Z = x + i y \qquad W = u + i v$$

LA DIFFERENZA SI VEDRÀ CHIARAMENTE QUANDO SI CERCHERÀ DI DEFINIRE LA DERIVATA

- LA STRUTTURA COMPLESSA VINCOLA LA FORMA IN CUI X, Y POSSONO ENTRARE IN f

$$W = f(z) \neq f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

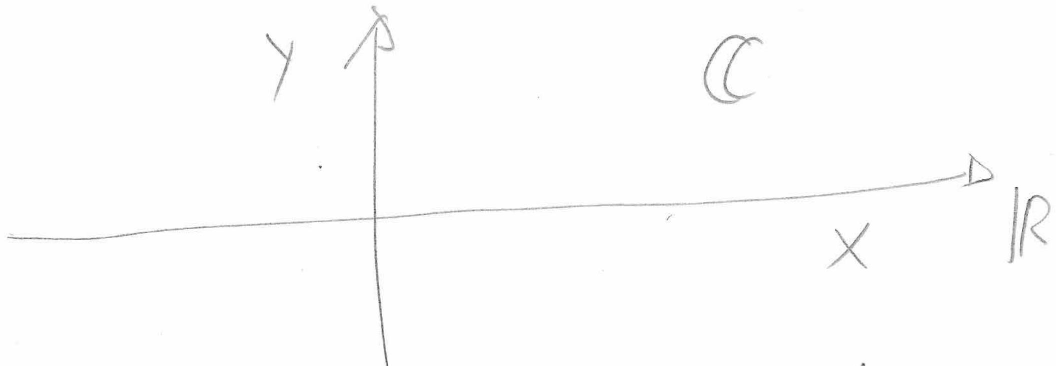
- FUNZIONI DI VARIABILE COMPLESSA SONO PIÙ SEMPLICI DELLE GENERICHE $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$w = f(z)$ HA MOLTO IN COMUNE CON
$y = f(x)$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ MA A CAUSA DELLA
SUA ORIGINE 2D È PIÙ VINCOLATA

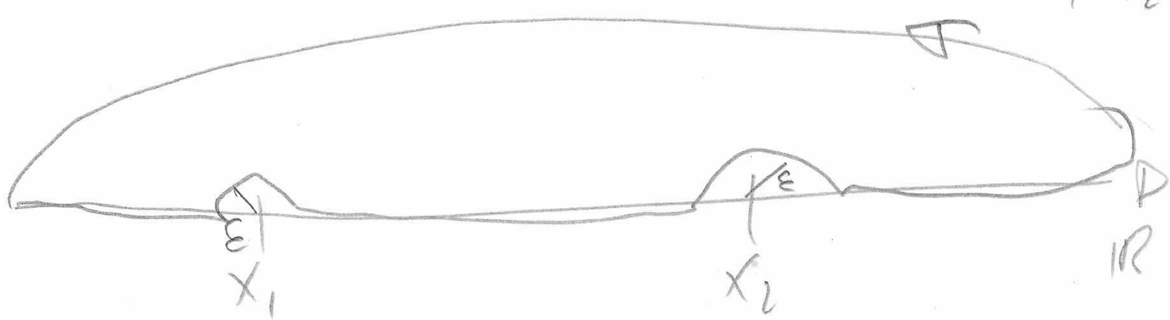
ESEMPIO

$\boxed{\text{CONTINUAZIONE ANALITICA}}$

ABBIAMO UNA FUNZIONE $y = f(x)$
DEFINITA SU $\mathbb{R}$ POSSIAMO ESTENDERLA
A TUTTO IL PIANO DI GAUSS $\Rightarrow \mathbb{C}$



DIVENTA COSÌ $w = f(z)$
LA SI USA SU TUTTO $\mathbb{C}$ E
POI EVENTUALMENTE SI PUÒ TORNARE
SU $\mathbb{R}$ CALCOLO DI UN' INTEGRALE
DIVERGENTE IN X_1, X_2



SU $\mathbb{C}$ L'INTEGRALE NON È PIÙ DIVERGENTE (GRADO DI LIBERTÀ IN PIÙ)

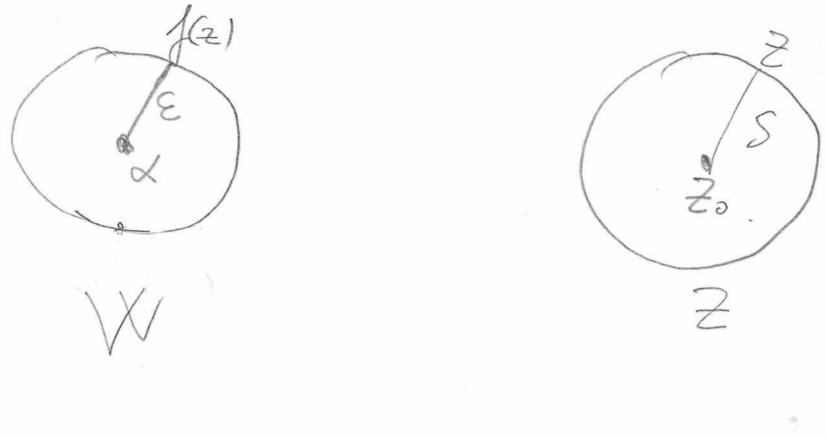
$\boxed{\lim_{\varepsilon \to 0} \text{ SI TORNA SU } \mathbb{R}}$

USO DELLA TEORIA DELLE FUNZIONI COMPLESSE

- ANALISI SEGNALI
- TEORIA DEI CAMPI
- TEORIA DEI CAMPI QUANTISTICI

LIMITE $\lim_{z \to z_0} f(z) = \alpha$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ $\exists\, \delta > 0$ TALE CHE PER OGNI
$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - \alpha| < \varepsilon$



PROBLEMA UNICITÀ

CONTINUITÀ

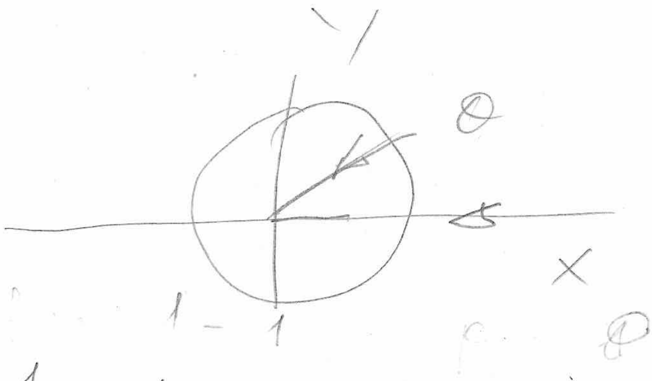
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0$$

ESEMPIO $f(z) = z^2$ CONTINUA $\forall z \neq 0$

$f(z, z^*) = \frac{z}{z^*}$ CONTINUA TRANNE $z = 0$

$z = r e^{i\theta}$ $f = \frac{\cancel{r} e^{i\theta}}{\cancel{r} e^{-i\theta}} = e^{2i\theta}$

$\lim_{z \to 0} f(z, z^*) = \lim_{r \to 0} e^{2i\theta}$ = DIPENDE DA θ



$\lim_{r \to 0} f = 1$ PER $\theta = 0$

$\lim_{r \to 0} f(\theta) = 1$ $\theta = \frac{\pi}{2}$

$\boxed{z = x+iy}$ 5

$$\lim_{z\to 0} e^{-\frac{1}{z^2}} = e^{-\frac{1}{x+iy}} = e^{-\frac{x-iy}{x^2+y^2}}$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} e^{-\frac{x-iy}{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0} e^{-\frac{x}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0^{\pm}} e^{-\frac{1}{x}} = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} e^{-\frac{x-iy}{x^2+y^2}} = \lim_{y\to 0} e^{\frac{i}{y}}$$

$$= \lim_{y\to 0} \cos\frac{1}{y} + i\sin\frac{1}{y} = \text{OSCILLANTE}$$

$f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$ NON È CONTINUA

IN $z = 0$

DERIVATA

$z \in A \subseteq \mathbb{C}$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

CONDIZIONE ESISTENZA (UNICITÀ LIMITE) MOLTO PIÙ FORTE DELL'ESISTENZA DELLE DERIVATE PARZIALI

u_x, u_y, v_x, v_y

ESEMPIO $f(z) = \mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + z^*) \Rightarrow \begin{cases} u = x \\ v = 0 \end{cases}$

ESISTONO $u_x = 1$ $u_y = 0$

$v_x = 0$ $v_y = 0$

MA LA FUNZIONE $f(z)$ NON È DERIVABILE IN NESSUN PUNTO SUC

$$f'(z_0) = \frac{1}{2} \lim_{z \to z_0} \frac{z + z^* - z_0 - z_0^*}{z - z_0} =$$

$$\frac{1}{2} \lim_{z \to z_0} \left(\frac{z - z_0}{z - z_0} + \frac{z^* - z_0^*}{z - z_0} \right) = \frac{1}{2} +$$

$$+ \lim_{z \to z_0} \frac{z^* - z_0^*}{z - z_0} = \lim_{r \to 0} e^{-2i\theta} = \quad \boxed{z - z_0 = e^{i\theta} r}$$

$=$ NON ESISTE

UNA FUNZIONE $f(z)$ SI DICE $\boxed{\text{ANALITICA}}$ O $\boxed{\text{OLOMORFA}}$ IN z_0 SE $\exists\, f'(z_0)$

CONDIZIONI DI CAUCHY-RIEMANN

CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE AFFINCHE $f(z)$ SIA ANALITICA IN UN DOMINIO A È CHE ESISTANO IN A u_x, u_y, v_x, v_y E CHE INOLTRE RISULTI

$$f_x = -i f_y$$

EQUIVALENTE A $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$

$\boxed{\text{CN}}$ PER IPOTESI

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$ $\exists$ ED È UNICO

MA $$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta x + i\Delta y}$$

PER L'UNICITÀ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = f_x = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{i\Delta y}$$

$$= \frac{1}{i} f_y = -i f_y$$

NB $\begin{cases} f_x = u_x + i v_x \\ f_y = u_y + i v_y \end{cases}$

$\boxed{CS}$ L' ESISTENZA DI u_x, u_y, v_x, v_y ASSICURA

$$f(z+\Delta z) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y) + f_x \Delta x + f_y \Delta y + o((\Delta x, \Delta y)^2)$$

SEGUE

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f_x \Delta x + f_y \Delta y}{\Delta x + i \Delta y}$$

DA $f_x = -i f_y$ SEGUE QUINDI

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(\Delta x + i \Delta y) f_x}{\Delta x + i \Delta y} = f_x$$

O ANCHE

$$\lim_{\Delta z \to 0} -i \frac{(\Delta x + i \Delta y)}{\Delta x + i \Delta y} f_y = -i f_y$$

CHE PROVA L' ESISTENZA DI $f'(z)$ IN A

ESEMPIO

- $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2-y^2+2ixy = u+iv$

$u = x^2-y^2 \qquad v = 2xy$

$u_x = 2x$

$u_y = -2y$

$v_x = 2y$

$v_y = 2x$

$\Rightarrow \begin{matrix} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{matrix}$

ANALITICA SU TUTTO $\mathbb{C}$

$\boxed{x, y \neq \infty}$

- $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{x}{x^2+y^2} \\ v = -\frac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$

$u_x = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \exists\ (x,y) \neq (0,0)$

$u_y = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)} \quad \exists\ (x,y) \neq (0,0)$

$v_x = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad v_y = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)} \qquad \exists\ (x,y) \neq (0,0)$

$u_x = v_y \qquad u_y = -v_x \qquad z \neq 0$

OLOMORFA SU TUTTO $\mathbb{C}$

TRANNE $z = 0$

- $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$

$u = x^2 + y^2$

$v = 0$

$u_x = 2x \qquad u_y = 2y$

$u_x \neq v_y$

$u_y \neq -v_x$

$\boxed{\text{TRANNE } x = y = 0}$

SEMPRE NON OLOMORFA TRANNE IN $z = 0$

- UNA FUNZIONE $f(z, z^*)$ È ANALITICA IN D SE

$$\begin{cases} \exists \; u_x, u_y, v_x, v_y \\ f \Rightarrow \text{FUNZIONE DELLA SOLA } z \quad f(z) \end{cases}$$

FUNZIONE OLOMORFA

ESEMPI

- $f(z) = z^n$
- $f(z) = \sin z$
- ...

$f \Rightarrow$ FUNZIONE DELLA SOLA z^*

$f(z^*)$

FUNZIONE ANTIOLOMORFA

DIM.

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z^*}\frac{\partial z^*}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z^*}$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z^*}\frac{\partial z^*}{\partial y} = i\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z^*}\right)$$

$$f_x = -i f_y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z^*} = -\frac{\partial f}{\partial z^*} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial z^*} = 0}$$

ANALOGAMENTE PER $z^* = x - iy$

PUNTI DI NON ANALITICITÀ PER $f(z)$:

NON ESISTE ALMENO UNA TRA u_x, u_y, v_x, v_y

ANALOGIA ONDE VIAGGIANTI

EQUAZIONE DI D'ALEMBERT $v=1$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \psi = F(x+t) + G(x-t)$$

ROTAZIONE IMMAGINARIA DEL TEMPO

$t = iy$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \psi = F(x+iy) + G(x-iy)$$

$$\psi = F(z) + G(z^*)$$

$F(z) \Rightarrow$ OLOMORFA $\qquad G(z^*) \rightarrow$ ANTIOLOMORFA

ESTENSIONE (O CONTINUAZIONE) ANALITICA

SI CONSIDERI UNA FUNZIONE $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$y = f(x)$ DEFINITA PER $x \in \mathbb{R}$ $y \in \mathbb{R}$

SI DEFINISCE LA SUA CONTINUAZIONE ANALITICA $w = f(z)$ LA FUNZIONE

OTTENUTA DALLE SOSTITUZIONI

$$x \to z \qquad w = f(z)$$

$$y \to w$$

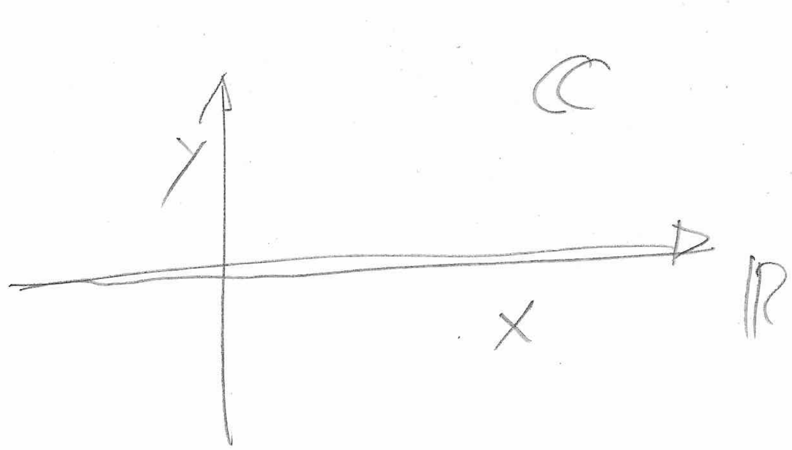
E TALE CHE $f(z) = f(x)$ PER $z \in \mathbb{R}$

<u>ESEMPIO</u> $y = \sin x \implies w = \sin z$

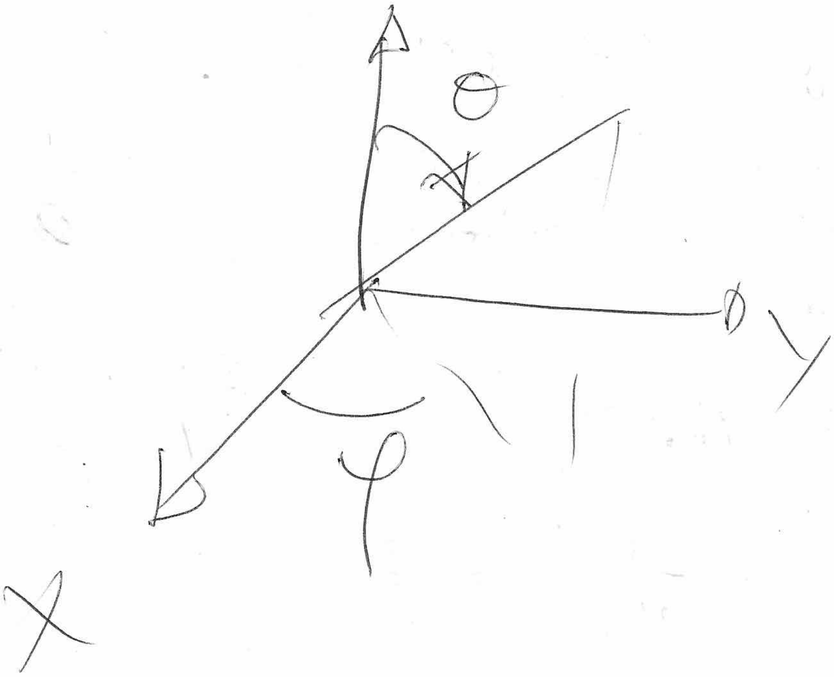
$$y = e^x \implies w = e^z$$

LA FUNZIONE VIENE CIOÈ $\boxed{\text{ESTESA}}$

DA $\mathbb{R}$ A TUTTO $\mathbb{C}$



UNICITÀ DELLA CONTINUAZIONE ANALITICA ??


θ
φ
X
Y

VARIETÀ COMPLESSE

- COSÌ COME NEL CASO REALE UNO PUÒ DEFINIRE VARIETÀ REALI CON COORDINATE $(z_1, \bar{z}_n)$.
- LE VARIETÀ COMPLESSE HANNO A PARTE LA STRUTTURA METRICA (DIFF. METRICHE) ANCHE UNA STRUTTURA COMPLESSA (POSSIBILITÀ DI RAGGRUPPARE COORDINATE IN z, E $\bar{z}$
- NON TUTTE LE VARIETÀ REALI AMMETTONO QUESTA POSSIBILITÀ
- ESEMPIO PIANO DI GAUSS $ds^2 = dz\, d\bar{z}$
- ESEMPIO SFERA

$$z = x + iy$$
$$\bar{z} = x - iy$$
$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$ds^2 = g_{z\bar{z}}\, dz\, d\bar{z}$$

$$ds^2 = \left(\frac{2}{1+z\bar{z}}\right)^2 dz\, d\bar{z}$$

FORME CHIUSE E FORME ESATTE 2D

FORME ESATTE (CAMPO CONSERVATIVO)

$$\bar{V} = \bar{\nabla} \varphi \qquad V = d\varphi \qquad V = (V_x, V_Y)$$

$$d\varphi = V_x dx + V_y dy = \partial_x \varphi \, dx + \partial_y \varphi \, dy$$

FORME CHIUSE (CAMO IRROTAZIONALE)

$$\bar{\nabla} \times \bar{V} = 0 \qquad \partial_y V_x - \partial_x V_y = 0 \qquad dV = 0$$

- SE UNA FORMA È ESATTA $\Rightarrow$ CHIUSA

$$V = d\varphi \quad \Rightarrow \quad dV = d^2 \varphi = 0$$

$$\bar{V} = \bar{\nabla} \varphi \qquad \bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \varphi = 0$$

- UNA FORMA CHIUSA È ANCHE ESATTA SE $\bar{V}$ È DEFINITO SU UN DOMINIO SEMPLIC. CONNESSO (LEMMA DI POINCARÈ)

DEFINIZIONE GLOBALE

CONSERVATIVO

$$\oint_\Gamma \bar{V} \cdot d\bar{s} = 0$$

IRROTAZIONALE

$$\oint_\Sigma \bar{\nabla} \times \bar{V} \cdot d\bar{\sigma} = 0$$

SE $\bar{V}$ CONSERVATIVO $\Rightarrow \oint_\Gamma \bar{V} \cdot ds = 0$

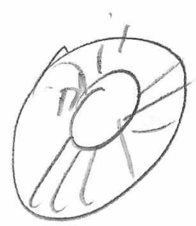
$\Rightarrow \int_\Sigma \bar{\nabla} \times \bar{V} \cdot ds = 0$

SE $\bar{V}$ È IRROTAZIONALE $\bar{V}$ È CONSERVATIVO SOLO SE DEFINITO SU D SEMPLICEMENTE CONNESSO

PER IL TEOREMA DI STOKES

$$\int_\Sigma \bar{\nabla} \times \bar{V} \cdot d\bar{s} = \oint_\Gamma \bar{V} \cdot d\bar{s}$$

Γ



$$\int_\Sigma \bar{\nabla} \times \bar{V} \cdot d\bar{s} \neq \oint_\Gamma \bar{V} \cdot d\bar{s}$$

Γ

COHOMOLOGIA DI DE RHAM

$$\int_\Sigma dV = \int_{\partial\Sigma} V$$

V CHIUSO MA NON ESATTO

$dV = 0$ $\quad V \neq d\Lambda \Leftrightarrow \partial\Sigma = 0, \ \Sigma \neq \partial K$

FUNZIONI ANALITICHE E DIFF. ESATTI 14

$u + iv = f(z) = f(x+iy)$

C.R $\qquad u_x = v_y \qquad u_y = -v_x$

CONSIDERIAMO FORME LINEARI

$d\omega = v\,dx + u\,dy \qquad u_x = v_y \Rightarrow d\omega = 0$

$d\sigma = u\,dx \cancel{+} v\,dy \qquad u_y = -v_y \quad d\sigma = 0$

ω, σ SONO <u>CHIUSE</u>

ω, σ SONO <u>ESATTE</u> SE DEFINITE

SU UN DOMINIO SEMPLICEMENTE CONNESSO

FUNZIONI ANALITICHE E FUNZIONI ARMONICHE

HESSIANO
$\begin{vmatrix} u_{xx} & \cancel{u_{xy}} \\ u_{xx} & -u_{xx} \end{vmatrix} = -v_{xy}^2 - u_{xx}^2 < 0$

DA $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$ ABBIAMO

$u_{xx} = v_{yx} \qquad u_{yy} = -v_{xy}$

$u_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow \nabla^2 u = 0 \qquad \nabla^2 v = 0$

$u \Rightarrow$ FUNZIONE ARMONICA

NB FUNZIONI ANALITICHE POSSONO AVERE SOLO PUNTI A SELLA MAI MASSIMI/MINIMI RELATIVI INFATTI $u_x = u_y = 0$ MA

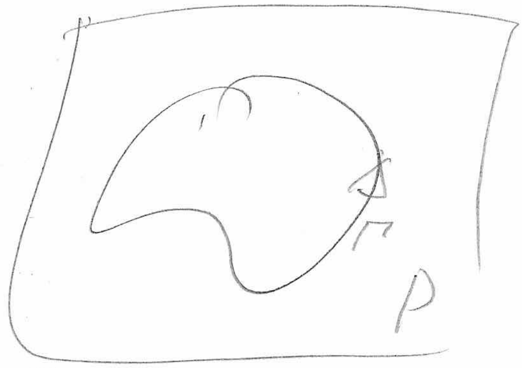
Per le funz. $u(x,y)$, $v(x,y)$ $\quad \left\{ u_{xy} = v_{yx} = u_{xx} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{xx} = -u_{yy} \\ v_{xx} = -v_{yy} \end{array} \right. \Rightarrow \mathrm{Tr}\,H = 0$

INTEGRAZIONE

SIA $f(z)$ CONTINUA SU D. γ CURVA REGOLARE A TRATTI SU D ORIENTATA

SI DEFINISCE

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma f(x,y)\,dx + i\,f(x,y)\,dy$$



SE Γ CURVA CHIUSA

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz$$

VERSO CONVENZIONALMENTE POSITIVO: ANTIORARIO

- LEMMA DI DARBOUX

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| < ML$$

$M = \max_\gamma |f(z)|$

$L = \int_\gamma ds = \int_\gamma \sqrt{dx^2+dy^2}$

$\Downarrow$

LUNGHEZZA DI γ

EQUAZIONI PARAMETRICHE DI γ

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t_0 < t < t_1$$

$$dx = x'(t)\,dt \qquad dy = y'(t)\,dt$$

$$dz = [x'(t) + i\,y'(t)]\,dt$$

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_{t_0}^{t}\left[f(x(t),y(t))\right]\left(x'(t)+iy'(t)\right)dt\right|$$

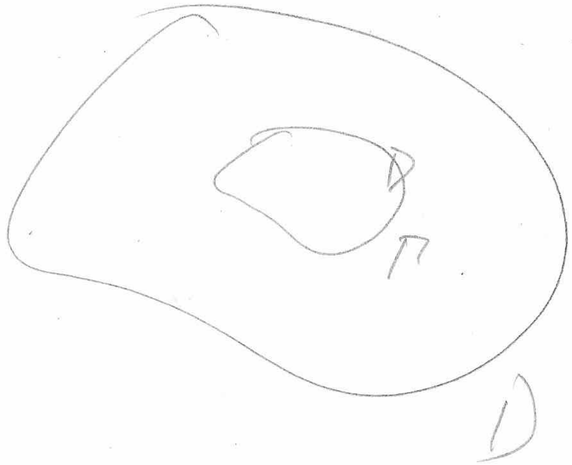
$$\leq \int_{t_0}^{t}|f|\,|dz| = \int_{t_0}^{t}|f|\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

$$\leq M\int_{t_0}^{t}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt = ML$$

PRIMO TEOREMA DI CAUCHY

SIA $f(z)$ UNA FUNZIONE OLOMORFA IN UN DOMINIO (CAMPO) $D \subset \mathbb{C}$ SEMPLICEMENTE CONNESSO ALLORA PER OGNI CURVA CHIUSA $\Gamma \in D$

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 0$$



DIMOSTRAZIONE

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = \oint_\Gamma (u+iv)(dx+idy)$$

$$= \oint_\Gamma u\,dx - v\,dy + i\oint_\Gamma v\,dx + u\,dy$$

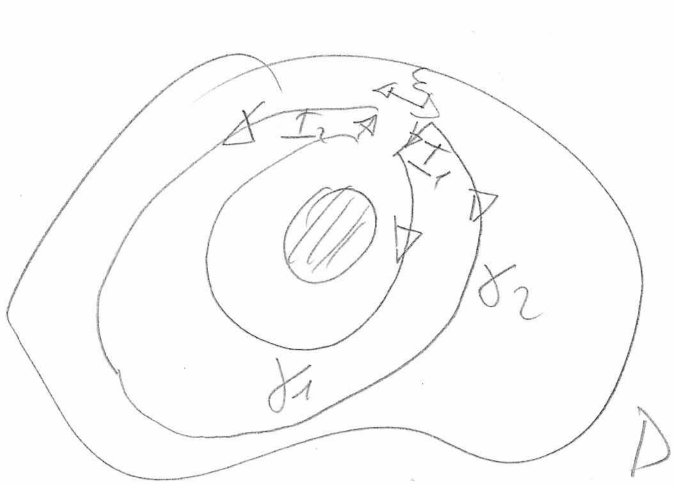
LE CONDIZIONI DI CAUCHY RIEMANN CI DICONO CHE $u\,dx - v\,dy$ E $v\,dx + u\,dy$

SONO FORME $\boxed{\text{CHIUSE}}$! IL TEOREMA DI POINCARÈ CI DICE CHE SU D SEMPLICEMENTE CONNESSO SONO ANCHE ESATTE $\Rightarrow$ $\oint_\Gamma u\,dx - v\,dy = 0$

$$\oint_\Gamma v\,dx + u\,dy = 0$$

- SE D NON È SEMPLICEMENTE CONNESSO $\oint_\Gamma f(z)dz \neq 0$

SI PUÒ PERÒ DIMOSTRARE CHE NON DIPENDE DAL PERCORSO DI INTEGRAZIONE



$$\oint_\Gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{I_1} f(z)dz + \int_{I_2} f(z)dz = 0$$

$\Gamma = \{\gamma_1 \oplus \gamma_2 + I_1 + I_2\}$

PER IL PRIMO TEOREMA DI CAUCHY

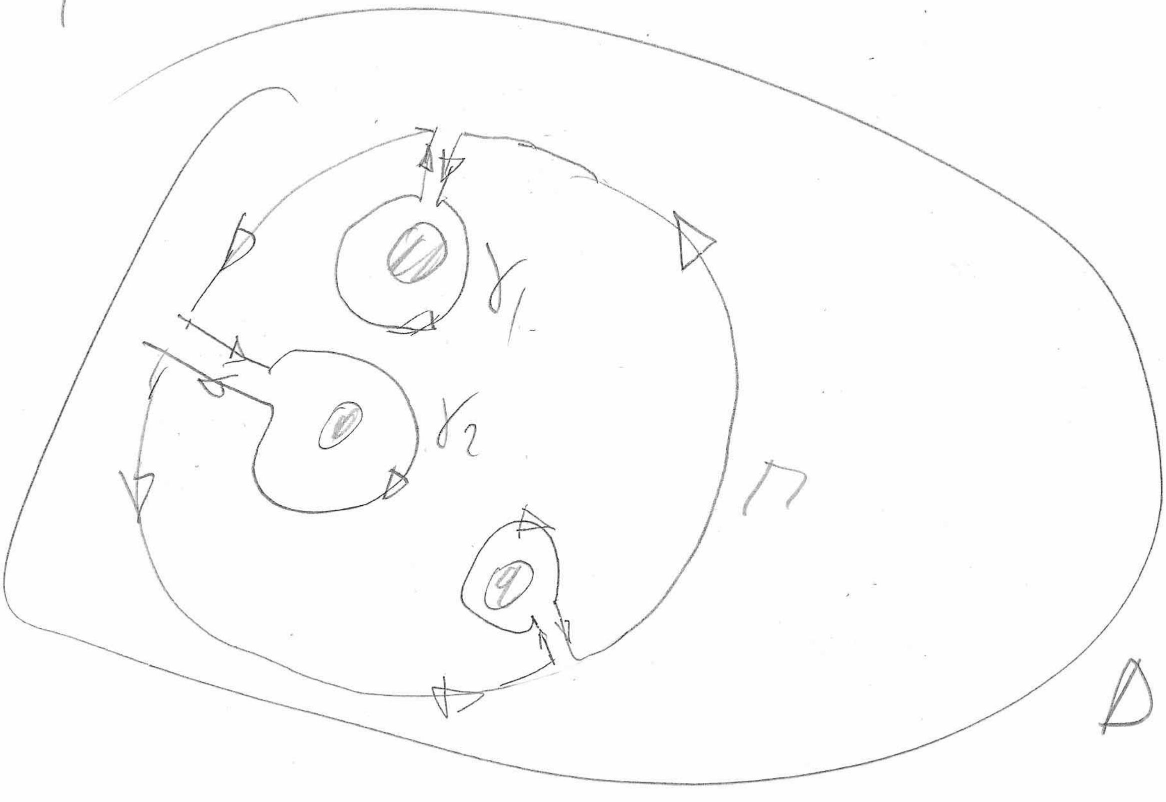
$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = -\int_{\gamma_2} f(z)\,dz \qquad \boxed{\varepsilon \to 0} \quad \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = -\oint_{\gamma_1} f(z)\,dz$$

$\boxed{\varepsilon \to 0}$

SEGUE $$\oint_{\gamma_2} f(z)\,dz = \oint_{\gamma_1} f(z)\,dz$$

CON LO STESSO METODO SI DIMOSTRA

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = \sum_{n=1}^{p} \oint_{\gamma_n} f(z)\,dz$$



SECONDO TEOREMA DI CAUCHY (FORMULA INTEGRALE)

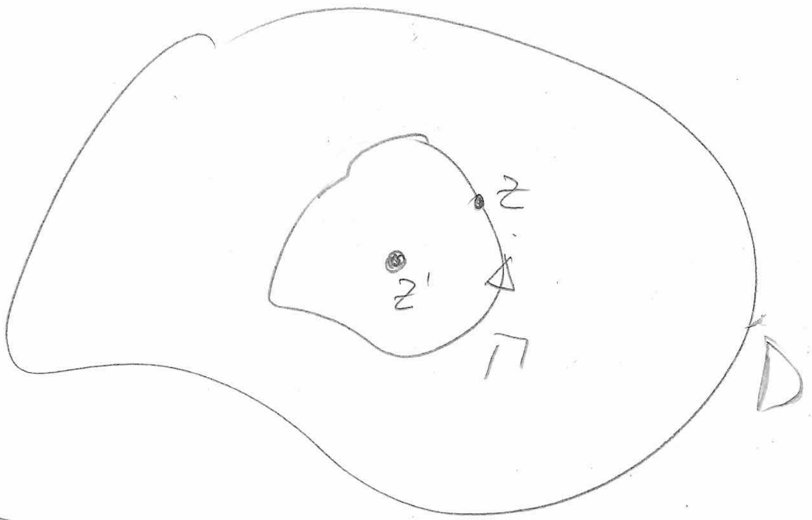
SIA $f(z)$ OLOMORFA IN D E $z' \in D$

E Γ CURVA CHIUSA $\in D$ CON

D SEMPLICEMENTE CONNESSO E z' INTERNO A Γ

ALLORA

$$f(z') = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-z'}\, dz$$



$f(z)$ È OLOMORFA IN D MA $g(z) = \frac{f(z)}{z-z'}$

NON LO È $z=z'$ NON È PUNTO DI ANALITICITÀ

$\oint_\Gamma g(z)\, dz$ NON DIPENDE

DAL PERCORSO DI INTEGRAZIONE $\Rightarrow$

SCELGO Γ = CIRCONFERENZA CENTRATA IN z' $\Gamma = C$

PONGO $z = z' + re^{i\theta}$ $dz = re^{i\theta} i\, d\theta$

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-z'}\,dz = \oint_{C} \frac{f(z)}{z-z'}\,dz = i\int_0^{2\pi} \frac{f(z'+re^{i\theta})}{\cancel{re^{i\theta}}}\,\cancel{re^{i\theta}}\,d\theta$$

$$= i\int_0^{2\pi} f(z'+re^{i\theta})\,d\theta \overset{r\to 0}{=} i f(z')\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= 2\pi i\, f(z')$$

NB: RAPPRESENTAZIONE INTEGRALE

$f(z')$ DATA COME INTEGRALE IN UNA CURVA (NO ANALOGIA FUNZIONI REALI)

$\boxed{\text{COROLLARIO}}$ DATO CHE INTEGRANDO FUNZIONE CONTINUA POSSIAMO DERIVARE SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE

$$\frac{d f(z')}{dz'} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z')}\,dz \qquad m \text{ VOLTE}$$

$$\frac{d^m f(z')}{dz'^m} := f^{(m)}(z') = \frac{m!}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{(z-z')^{m+1}}\,dz$$

FORMULA DELLE DERIVATE (CAUCHY GENERALIZZATA)

CONSEGUENZA IMPORTANTE:
OGNI FUNZIONE ANALITICA È DERIVABILE UN NUMERO ∞ DI VOLTE

- DIVERSAMENTE DALLE FUNZIONI $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ DOVE $f \in C^0 \not\Rightarrow f \in C^\infty$

PER $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ SE f È DERIVABILE IN UN PUNTO ESISTONO TUTTE LE DERIVATE SUCCESSIVE.

$\boxed{\text{ESISTENZA DI TUTTE LE DERIVATE PER LE FUNZIONI OLOMORFE}}$

ESEMPI

$$\oint_\gamma \frac{1}{(z-z_0)^m} = 2\pi i \delta_{m1} \begin{cases} 2\pi i & m=1 \\ 0 & m \neq 1 \end{cases}$$

$$\oint_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^m} = \frac{2\pi i}{(m-1)!} f^{(m)}(z_0) = \quad m \neq 1 \text{ CON } f(z)=1$$

$= 0$ PER $m=1$ CON $f(z_0)=1$

$$\int \frac{f(z)}{z-z_0} = 2\pi i f(z_0) = 2\pi i$$

RAGGIO DI CONVERGENZA

$z = r e^{i\theta}$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}$$

Totalmente quindi ASSOLUTAMENTE ed uniformemente convergente se $|z| \leq \rho < r$

$$f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n \quad \text{converge}$$

- CRITERIO DI CAUCHY

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \to \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

converge per $r = |z| < R$

DIVERGE se $r = |z| > R$

- CRITERIO DEL RAPPORTO $\lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |z| < 1$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

ESEMPIO $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \to \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

$$R = \infty$$

ESEMPIO 2

$$I=\oint_\gamma \frac{e^z}{z^2}\,dz \qquad \frac{n!}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = f^{(n)}(z_0)$$

PONIAMO $f(z)=e^z$ $\quad n=1 \quad z_0=0$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{e^z}{z^2} = \frac{d}{dz}\left(e^z\right)\Big|_{z=0} = 1$$

$$I = 2\pi i$$

SERIE DI POTENZE

SERIE DI POTENZE NEL CAMPO COMPLESSO

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

RAGGIO DI CONVERGENZA R

CERCHIO $|z-z_0|<R$

$\Rightarrow$ SERIE CONVERGE TOTALMENTE (UNIFORMEMENTE)

PER $C:\{|z-z_0|\le \rho < r\}$

ALL'INTERNO DI C LA FUNZIONE $F(z)$ È OLOMORFA

(DIPENDE SOLO DA z INOLTRE NON CI SONO SINGOLARITÀ)

SERIE BILATERE

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^{-n} = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$a_{-n} = b_n$$

REGIONE DI CONVERGENZA

LA PRIMA SERIE CONVERGE PER $|z-z_0| < R$

NELLA SECONDA SERIE PONIAMO

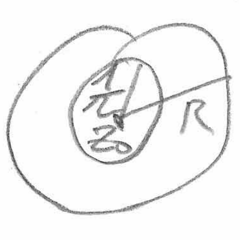
$$w = \frac{1}{z-z_0} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n$$

SIA r RAGGIO DI CONVERGENZA

$$\Rightarrow |w| < r \Rightarrow \left|\frac{1}{z-z_0}\right| < r \Rightarrow |z-z_0| > \frac{1}{r}$$

SE $\frac{1}{r} < R$ REGIONE CONVERGENZA

$$R < |z-z_0| < \frac{1}{r}$$ CORONA CIRCOLARE



ESEMPI

SERIE GEOMETRICA

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad R = 1$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad R = \infty \qquad \text{ESPONENZIALE}$$

USANDO FORMULA EULERO ANCHE $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ HANNO $R = \infty$

SVILUPPO IN SERIE DI TAYLOR — LAURENT

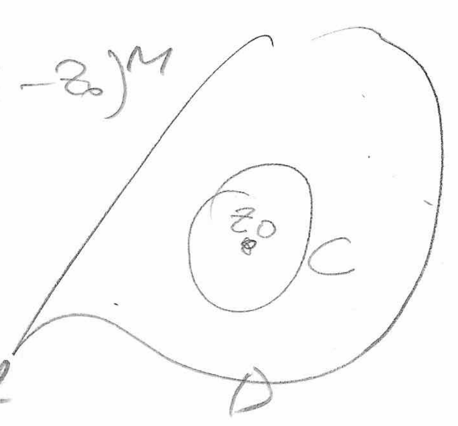
NELL'ANALISI REALE POSSIAMO SVILUPPARE UNA FUNZIONE NELL'INTORNO DI x_0 SE IN x_0 $f(x) \in C^\infty$ (SERIE DI TAYLOR)

NELL'ANALISI COMPLESSA $x_0 \to z_0$ <u>PUNTO DI OLOMORFIA</u> DI $f(z)$

SEGUE

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$



D → DOMINIO OLOMORFIA DI f

DALLA FORMULA INTEGRALE GENERALIZZATA DI CAUCHY SEGUE

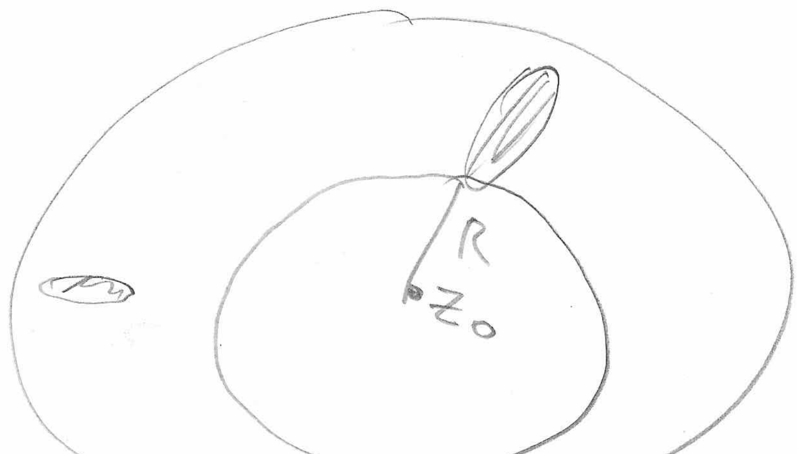
$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

RAGGIO DI CONVERGENZA?

POSSIAMO SEMPRE PRENDERE UN PUNTO $z_0' \in \mathbb{C}$ E SVILUPPARE ULTERIORMENTE E CONTINUARE LA PROCEDURA

FINO A QUANTO POSSIAMO ESTENDERE?

FINO AD ARRIVARE AD UN PUNTO IN CUI $f(z)$ NON È ANALITICA



R = DISTANZA MINIMA DI z_0 DA UN PUNTO DI NON ANALITICITÀ

ESEMPIO $f(x) \in \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

TAYLOR $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ INTORNO A $x=0$

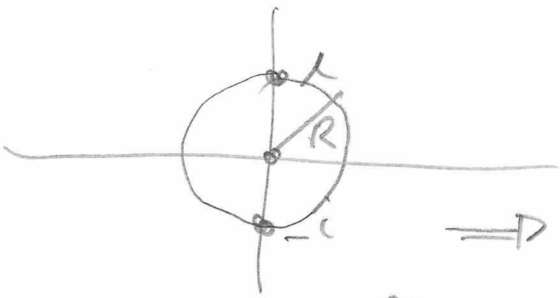
$R=1$ USANDO CRITERIO DEL RAPPORTO

PERCHÉ? $f(x) \in C^\infty$ SU TUTTO $\mathbb{R}$

$f(z) \in \mathbb{C}$ $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ $z^2=-1$

PUNTI DI NON ANALITICITÀ

$z = \pm i$



$\Longrightarrow$ $\boxed{R=1}$

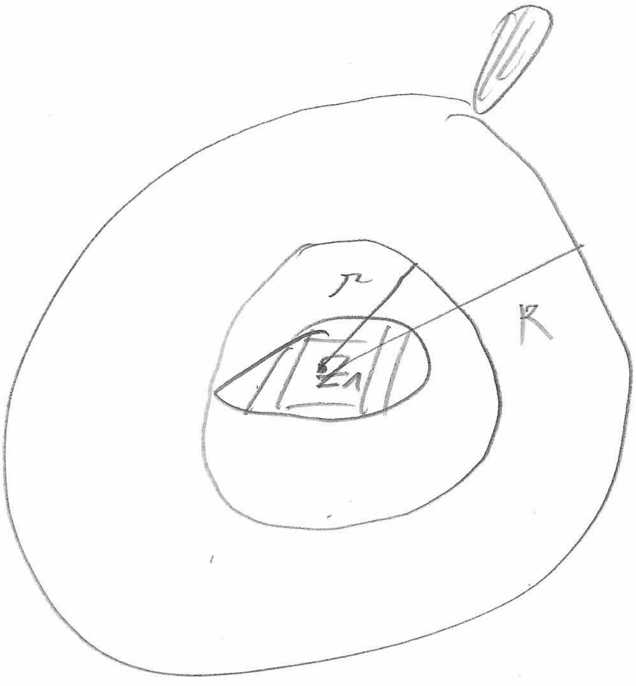
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$$

CI SONO COSE CHE L'ANALISI REALE NON VEDE

SVILUPPO DI LAURENT INTORNO AD UN PUNTO DI NON ANALITICITÀ z_1

NELL'ANALISI REALE NON È POSSIBILE SVILUPPARE IN SERIE IN UN INTORNO DI UN PUNTO $z_1 \notin C^\infty$

NELL'ANALISI COMPLESSA SI



$$\boxed{\text{PER } r < |z - z_1| < R}$$

ABBIAMO

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_1)^n$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_1)^{n+1}} \, dz$$

DIMOSTRAZIONE

ASSUMIAMO CONVERGENZA E DIVIDIAMO PER $(z - z_1)^{n+1}$

$$\frac{f(z)}{(z - z_1)^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_N (z - z_1)^{N-n-1}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{dz}{(z - z_0)^m} = \delta_{m,1}$$

INTEGRANDO

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_1)^{n+1}} \, dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_N \oint_\Gamma \frac{dz}{(z - z_1)^{n+1-N}}$$

$\neq 0$ SOLO SE $N = n$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_N \, \delta_{n+1-N,1}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_1)^{n+1}} \, dz}$$

SEGUE : SVILUPPO GENERICO DI TAYLOR-LAURENT

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$ VALE SIA

PER z_0 PUNTO DI ANALITICITÀ CHE

// // // DI NON ANALITICITÀ

- CERCHIO DI CONVERGENZA

  R = DISTANZA MASSIMA DA PUNTO DI NON ANALITICITÀ PER z_0 ANALITIC

$r < |z - z_0| < R$ r - DISTANZA MINIMA
R - // MASSIMA

- PER z_0 ANALITICO $a_n = 0$ PER $n < 0$

$\boxed{\text{ESEMPI}}$ $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$

NEL CASO REALE $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ PUR ESSENDO C^{∞} IN $x=0$ NON È SVILUPPABILE IN SERIE DI TAYLOR $f^{(n)}(0) = 0$

• NEL CASO COMPLESSO ABBIAMO VISTO CHE $z=0$ NON È PUNTO DI ANALITICITÀ $\Rightarrow$ SERIE DI TAYLOR - LAURENT

• USIAMO UN TRUCCO MOLTO SPESSO UTILE PER CALCOLARE a_n SENZA SVOLGERE GLI INTEGRALI!

CAMBIAMENTO VARIABILE

PONIAMO $z = \frac{1}{y}$

$$f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}} \to e^{-y^2}$$

SVILUPPIAMO INTORNO A $y=0$ TAYLOR.

$$e^{-y^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} y^{2n}$$

RAGGIO CONV. $|y| < \infty$

SEGUE

$$e^{-\frac{1}{z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} z^{-2n} = \sum_{n=0}^{-\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} z^{2n}$$

$\boxed{|z| > 0}$ RAGGIO CONV.

ESEMPIO 2 ISOLARE PARTE DI TAYLOR

$$f(z) = \frac{1}{z^3+z^2} = \frac{1}{z^2(z+1)} =$$

PUNTI DI NON ANALITICITÀ $z=0$, $z=-1$

SVILUPPO INTORNO A $z=0$

$$\frac{1}{z^2(z+1)} = \frac{1}{z^2}\left[\frac{1}{z+1}\right] = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$$

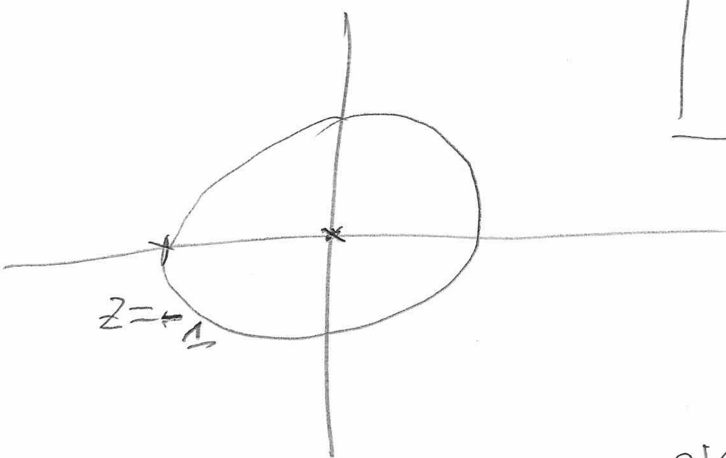
$\Downarrow$

TAYLOR

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{n-2} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + \dots$$

DOMINIO CONVERGENZA

$$\boxed{0<|z|<1}$$



ANALOGAMENTE SVILUPPO INTORNO A $z=-1$

$$\frac{1}{z^2(z+1)} = \left(\frac{1}{z+1}\right)\frac{1}{z^2} = \frac{1}{z+1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (z+1)^n$$

$\Downarrow$

TAYLOR

CONVERGENZA SU CORONA CIRCOLARE

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (z+1)^{n-1}$$

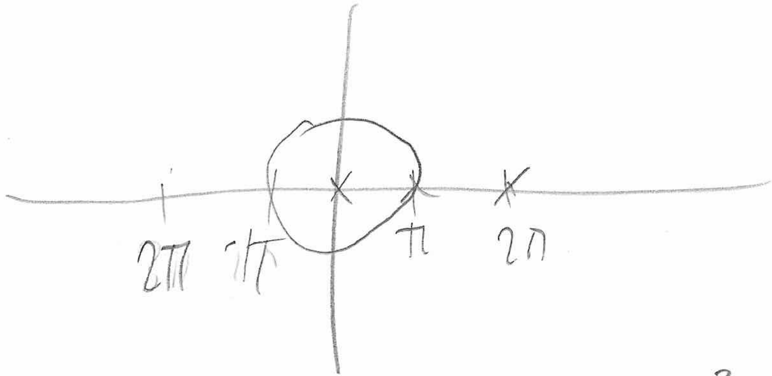
$$\boxed{0<|z+1|<1}$$

ESEMPIO 3

$f(z) = \frac{1}{\sin z}$

PUNTI DI NON ANALITICITÀ

$z = m\pi \qquad m \in \{N + 0\}$



INTORNO A $z = 0$

SVILUPPIAMO $\sin z = z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 + o(z^7)$

$$f(z) = \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 + o(z^7)} = \frac{1}{z}\left[\frac{1}{1 - \frac{1}{3!}z^2 + \frac{1}{5!}z^4 + o(z^6)}\right]$$

$\Downarrow$ TAYLOR

$$= \frac{1}{z}\left[1 + \frac{1}{3!}z^2 + o(z^4)\right]$$

$$= \frac{1}{z} + \frac{1}{3!} z + o(z^3)$$

DOMINIO CONV.

$$\boxed{0 < |z| < \pi}$$

$\Rightarrow$ IN QUESTI DUE ULTIMI ESEMPI ABBIAMO MESSO IN EVIDENZA PARTE DIVERGENTE

ESEMPIO

$$f(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z+2}\right)$$

SVILUPPO DI TAYLOR-LAURENT INTORNO A $z=-2$

SVILUPPIAMO $\sin\left(\frac{1}{z+2}\right)$

PONIAMO $w = \frac{1}{z+2}$

$$\sin w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} w^{2n+1}$$

$|w| < \infty$

$\Downarrow$

$$\boxed{|z+2| > 0}$$

$$\sin\frac{1}{z+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{z+2}\right)^{2n+1}$$

$$z^2 = [(z+2)-2]^2$$

$$= (z+2)^2 - 4(z+2) + 4$$

$$f(z) = [(z+2)^2 - 4(z+2) + 4] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z+2)^{-2n}$$

ALTRO METODO DI CALCOLO

CALCOLO DEGLI INTEGRALI

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

$\Longrightarrow$ VEDIAMO PIÙ AVANTI $\Longrightarrow$ $\boxed{\text{RESIDUI}}$

ALTRO ESEMPIO SEPARAZIONE PARTE DIVERGENTE

$$f(z) = \frac{1}{\sin^2 z}$$

SVILUPPO T.L INTORNO A $z=0$

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \frac{1}{z^2}\left[\frac{z}{\sin z}\right]^2$$

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 + o(z^7)}{z} =$$

$$= 1 - \frac{1}{3!}z^2 + \frac{1}{5!}z^4 + o(z^6)$$

$$\left(\frac{\sin z}{z}\right)^{-2} = 1 + \frac{2}{3!}z^2 + o(z^4)$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\left(\frac{z}{\sin z}\right)^2 = \frac{1}{z^2} + \frac{2}{3!} + o(z^2)$$