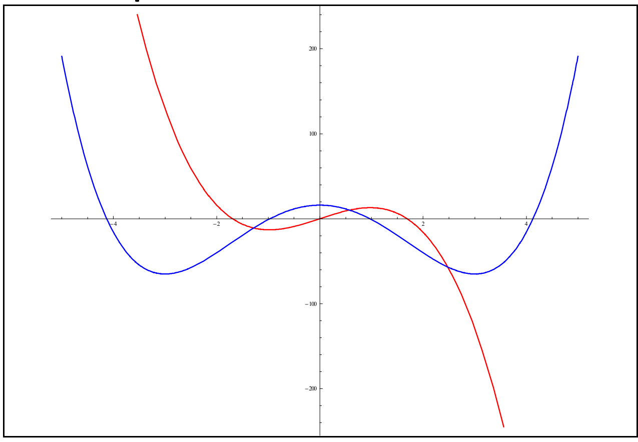
Università di Cagliari

CONTENUTO

GRAFICI DI ALCUNE FUNZIONI ELEMENTARI

Funzioni polinomiali



- In rosso: $p(x) = -7x^3 + 20x$; si tratta di una funzione dispari tale che $\lim_{x \to \mp\infty} p(x) = \pm\infty$. Funzione infinita (divergente) in infinito. Si ha, inoltre, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- In azzurro: $q(x) = x^4 - 18x^2 + 16$; si tratta di una funzione pari tale che $\lim_{x \to \mp\infty} q(x) = +\infty$. Funzione infinita (divergente) in infinito. Si ha, inoltre, $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Funzione polinomiale fratta

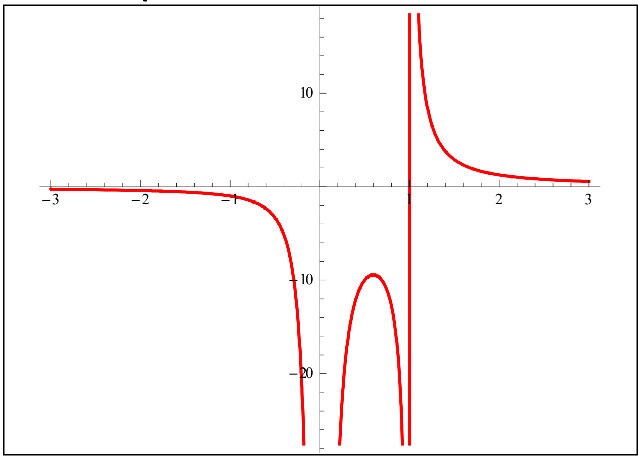


Grafico della funzione $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 - x^2}$; si tratta di una funzione né pari né dispari tale che $\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 1^\pm} f(x) = \pm\infty$. Per tanto $y = 0$ è un asintoto orizzontale, mentre $x = 0$ e $x = 1$ sono asintoti verticali. Questa funzione è infinitesima (convergente) in infinito, mentre è infinita in 0 ed 1. Si ha, inoltre, $f : \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Funzione irrazionale

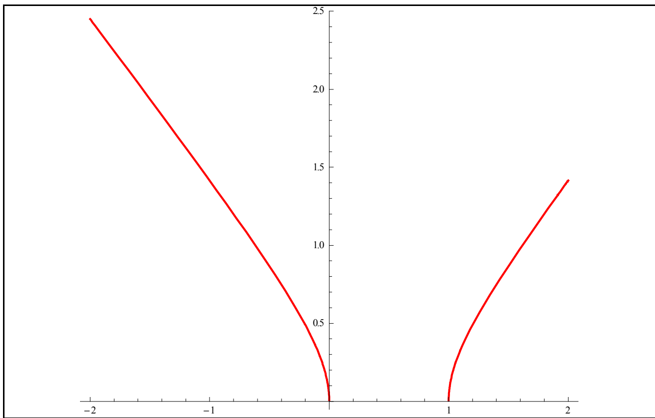
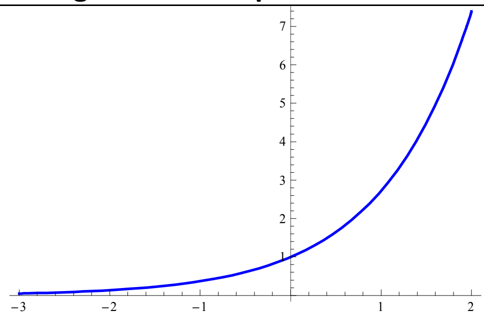
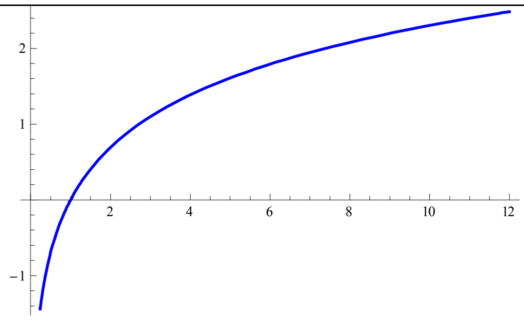


Grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$; si tratta di una funzione né pari né dispari tale che $\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$. Questa funzione è infinita (divergente) in infinito, mentre è infinitesima (convergente) in 0 ed 1. Si ha, inoltre, $f : \mathbb{R} \setminus [0,1] \to \mathbb{R}_0^+$, dove $\mathbb{R}_0^+$ indica l'insieme dei numeri reali positivi incluso lo zero.

Prof. Giuseppe Viglialoro
Dipartimento di Matematica e Informatica
E-mail: giuseppe.viglialoro@unica.it

Funzione logaritmo ed esponenziale



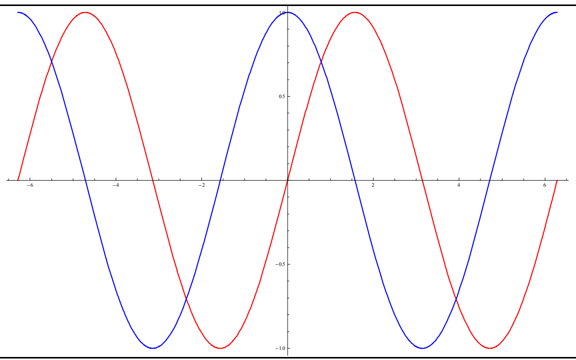


La funzione $y = e^x$ è crescente; inoltre $\lim_{x\to\mp\infty} e^x = \begin{cases} 0 \\ +\infty \end{cases}$

Questa funzione è infinita a più infinito e infinitesima a meno infinito, illimitata superiormente e limitata inferiormente. Si ha, inoltre, $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$.

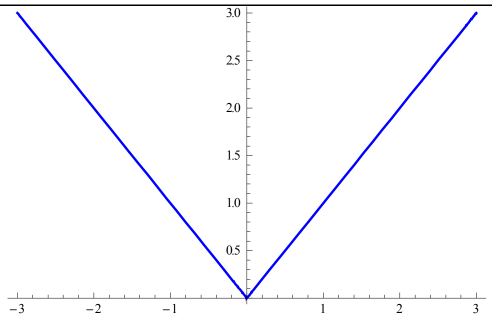
La funzione $y = \ln(x)$ è crescente; inoltre $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ Questa funzione è infinita tanto a più infinito come a zero, ed illimitata (superiormente ed inferiormente). Si ha, inoltre, $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

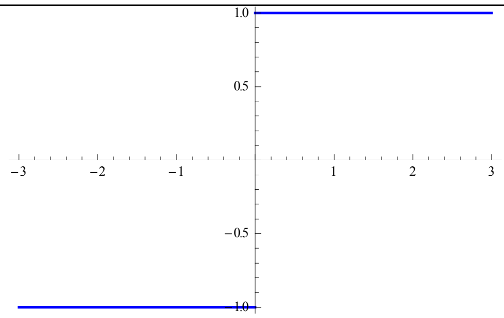
Funzione seno e coseno



- In azzurro: $f(x) = \cos(x)$; si tratta di una funzione pari (simmetria rispetto l'asse y), periodica (periodo 2π) e limitata nell'intervallo $[-1,1]$. Si ha, inoltre, $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$.
- In rosso: $f(x) = \sin(x)$; si tratta di una funzione dispari (simmetria rispetto l'origine), periodica (periodo 2π) e limitata nell'intervallo $[-1,1]$. Si ha, inoltre, $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$.

Funzione modulo o valore assoluto



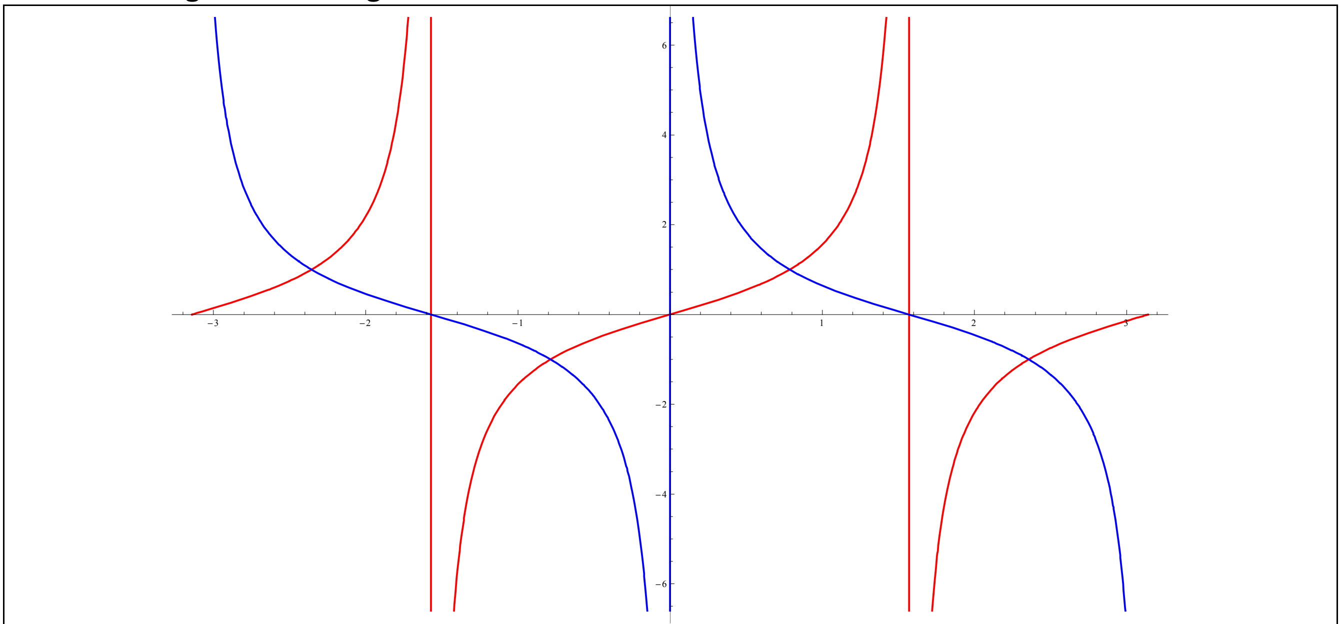


La funzione $y = |x|$ è continua in tutto $\mathbb{R}$. La sua espressione esplicita è $y = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

La funzione $y = \frac{|x|}{x}$, chiamata "segno", non ammette limite in 0. Infatti $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \neq -1 = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$; in questo caso $x_0 = 0$ è una discontinuità di salto (il salto vale 2).

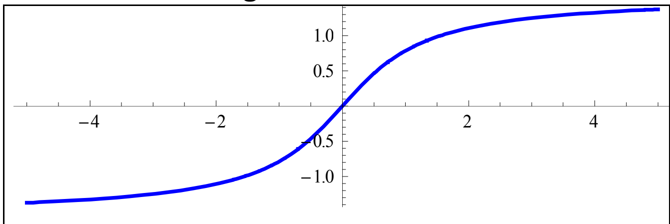
Prof. Giuseppe Viglialoro
Dipartimento di Matematica e Informatica
E-mail: giuseppe.viglialoro@unica.it

Funzione tangente e cotangente



- In azzurro: $f(x) = \cot(x)$; si tratta di una funzione dispari (simmetria rispetto l'origine), periodica (periodo π), illimitata e decrescente. Più esattamente, per esempio, $\lim\limits_{x \to 0^{\pm}} \ln(x) = \pm\infty$. Si ha, inoltre, $\mathrm{cotan} :]0, \pi[\to \mathrm{R}$.
- In rosso: $f(x) = \tan(x)$; si tratta di una funzione dispari (simmetria rispetto l'origine), periodica (periodo π), illimitata e crescente. Più esattamente, per esempio, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^{\pm}} \ln(x) = \mp\infty$. Si ha, inoltre, $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathrm{R}$.

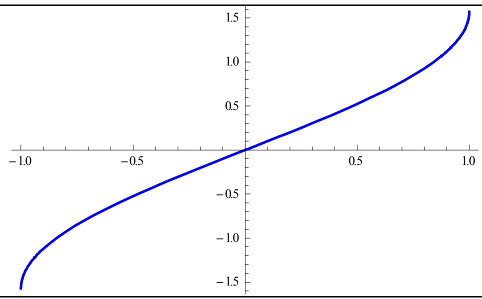
Funzione arcotangente



La funzione $y = \arctan(x)$ è una funzione dispari (simmetria rispetto l'origine), limitata e crescente. Più esattamente, si ha $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \ln(x) = \pm\frac{\pi}{2}$. L'estremo superiore di questa funzione vale $\frac{\pi}{2}$ mentre l'inferiore $-\frac{\pi}{2}$. Si ha, inoltre, $\arctan : \mathrm{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

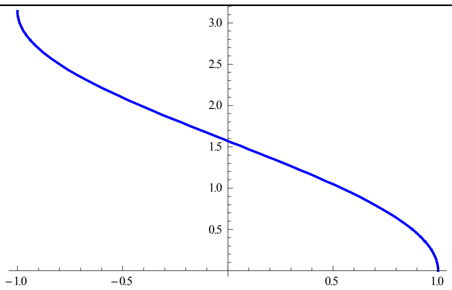
Prof. Giuseppe Viglialoro
Dipartimento di Matematica e Informatica
E-mail: giuseppe.viglialoro@unica.it

Funzione arcoseno



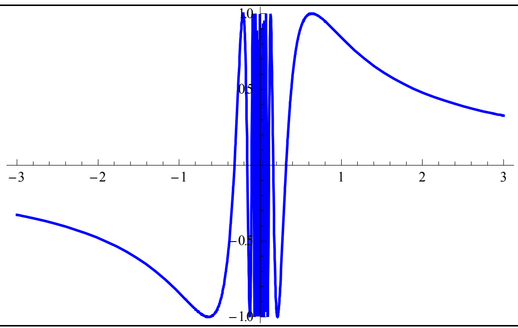
La funzione $y = \arcsin(x)$ è una funzione dispari (simmetria rispetto l'origine), limitata e crescente. Più esattamente, si ha $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Il massimo di tale funzione è $\frac{\pi}{2}$ mentre il minimo $-\frac{\pi}{2}$

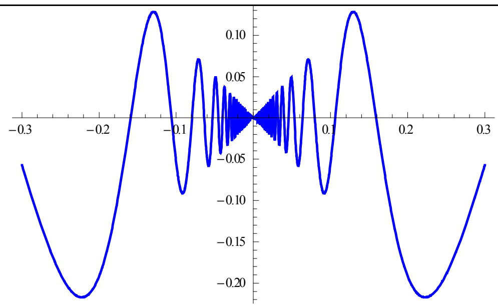
Funzione arcocoseno



La funzione $y = \arccos(x)$ è una funzione né pari né dispari, limitata e decrescente. Più esattamente, si ha $\arccos : [-1,1] \to [0, \pi]$. Il massimo di tale funzione è π mentre il minimo 0

Funzioni $y = \sin(1/x)$ e $y = x\sin(1/x)$





La funzione $y = \sin(1/x)$ non ammette limite in 0 (oscilla tra -1 ed 1); al contrario $\lim_{x \to \mp\infty} \sin(1/x) = 0$.

La funzione $y = x\sin(1/x)$ non ammette limite in $\mp\infty$ (oscilla e cresce indefinitamente); al contrario $\lim_{x \to 0} x\sin(1/x) = 0$.

CONFRONTO TRA INFINITI E LIMITI NOTEVOLI

I polinomi $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ (con n numero naturale) sono infiniti per $x \to \infty$. La funzione esponenziale $y = e^x$ è infinita per $x \to +\infty$, mentre il logaritmo naturale ($y = \ln(x)$) è infinito per $x \to +\infty$ e per $x \to 0^+$; inoltre la funzione potenza $y = x^\alpha$, con α reale positivo è infinita per $x \to +\infty$.

Prof. Giuseppe Viglialoro
Dipartimento di Matematica e Informatica
E-mail: giuseppe.viglialoro@unica.it

Si può dimostrare che valgono i seguenti limiti (gerarchia di infiniti):

$$e^x > x^\alpha > \ln(x), \quad \text{per } x \text{ sufficientemente grande } (x \to +\infty).$$

In particolare si ha:

Confronto tra infiniti (Forma ind. $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$)	**Generalizzazione**
$\lim_{x\to\mp\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m} = \begin{cases} 0 & \text{se } m > n \\ \infty & \text{se } m < n \\ a_0/b_0 & \text{se } m = n \end{cases}$	Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, allora $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{a_0(f(x))^n + a_1(f(x))^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0(f(x))^m + b_1(f(x))^{m-1} + \ldots + b_m} = \begin{cases} 0 & \text{se } m > n \\ \infty & \text{se } m < n \\ a_0/b_0 & \text{se } m = n \end{cases}$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{e^x} = 0$	Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, allora $\lim_{x\to+\infty} \frac{a_0(f(x))^n + a_1(f(x))^{n-1} + \ldots + a_n}{e^{f(x)}} = 0$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} = 0$	Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, allora $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(f(x))}{e^{f(x)}} = 0$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0$	Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, allora $\lim_{x\to+\infty} \frac{(f(x))^\alpha}{e^{f(x)}} = 0$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$	Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, allora $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(f(x))}{f(x)^\alpha} = 0$

Per ciò che riguarda alcuni limiti notevoli, ricordiamo

Limite notevole	**Generalizzazione**
$\lim_{x\to0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$	Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} = 1$
$\lim_{x\to0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$	Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{1-\cos(f(x))}{(f(x))^2} = \frac{1}{2}$
$\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{\ln(1+f(x))}{f(x)} = 1$
$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$	Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, allora $\lim_{x\to x_0} \left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$

Prof. Giuseppe Viglialoro
Dipartimento di Matematica e Informatica
E-mail: giuseppe.viglialoro@unica.it