SFORZI DI FLESSIONE IN TRAVI A FORTE CURVATURA

La teoria della flessione che conduce alla formula di Navier ($\sigma = \frac{M \cdot y}{J}$) è limitata a travi ad asse rettilineo o con piccola curvatura (cioè con grande raggio di curvatura). Se, al contrario, la curvatura della trave è grande, la formula di Navier non è più adatta a descrivere l'andamento degli sforzi σ lungo la sezione della trave.

Come regola di massima si può assumere che una trave debba essere considerata a forte curvatura per rapporti $R_0/h < 5$, dove R_0 è il raggio di curvatura della trave (valutato in corrispondenza dell'asse neutro) e h è l'altezza della sezione.

Nella trattazione seguente verrà ricavata la relazione tra gli sforzi ed il momento applicato in una trave a forte curvatura; la trattazione illustrata è valida in campo elastico per travi aventi sezione simmetrica di qualunque forma.

Consideriamo la deformazione di un elemento infinitesimo di una trave curva (fig. 1). Analogamente a quanto assunto nella teoria delle travi rettilinee o a piccola curvatura, si considera valida l'ipotesi che le sezioni rimangano piane durante la deformazione della trave.

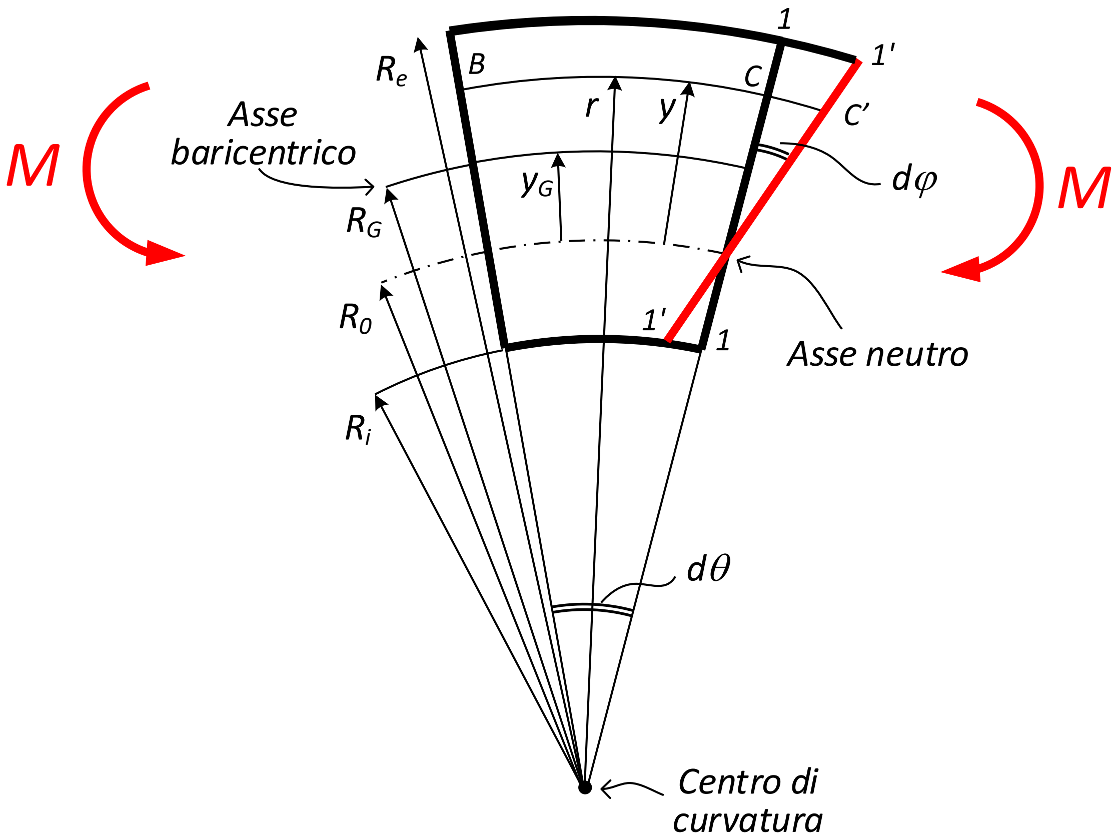

Figura 1: Elemento infinitesimo di una trave curva

Nella fig. 1:

$d\vartheta =$ angolo infinitesimo che definisce la dimensione dell'elementino esaminato

I raggi sono definiti come distanze dal centro di curvatura

R_e = raggio in corrispondenza delle fibre esterne della sezione

R_G = raggio in corrispondenza del baricentro della sezione

R_O = Raggio in corrispondenza dell'asse neutro della sezione

R_i = raggio in corrispondenza delle fibre interne della sezione

r = raggio in corrispondenza di una fibra generica ($R_i < r < R_e$)

Le distanze y sono definite come distanze dall'asse neutro:

$y_G = R_G - R_O$ = distanza della fibra baricentrica dall'asse neutro

$y = r - R_O$ = distanza della fibra generica dall'asse neutro

$d\varphi =$ rotazione subita dalla sezione in seguito all'applicazione del momento M

Quando viene applicato il momento M, la faccia *1-1* ruota attorno all'asse neutro portandosi nella posizione *1'-1'*.

La fibra generica posta ad una distanza r dal centro di curvatura, avente lunghezza BC, si allungherà della quantità C-C'. La deformazione di tale fibra sarà quindi

$$\epsilon = \frac{\text{allungamento}}{\text{lunghezza iniziale}} = \frac{CC'}{BC}$$

Poichè (vedi fig. 1)

$CC' = y \cdot d\varphi$

e

$BC = r \cdot d\theta$,

risulta

$$\epsilon = \frac{y \cdot d\varphi}{r \cdot d\theta} \qquad (1)$$

Nell'ipotesi di comportamento elastico del materiale, lo sforzo normale (ortogonale alla sezione) vale dunque

$$\sigma = E \cdot \epsilon = E \cdot \frac{y}{r} \cdot \frac{d\varphi}{d\theta}$$

Imponiamo ora le condizioni di equilibrio alla traslazione in direzione ortogonale alla sezione ed alla rotazione attorno all'asse neutro. La prima condizione ci consentirà di individuare la posizione dell'asse neutro; la seconda condizione ci consentirà di ricavare la relazione tra sforzi σ e momento applicato *M*.

Nel seguito si indicherà con *A* l'area della sezione della trave e con *dA* un elemento infinitesimo di tale area.

- Equazione di equilibrio alla traslazione:

$$N = 0 \;\; \Rightarrow \;\; N = \int_A \sigma \cdot dA = \int_A E \cdot \frac{y}{r} \cdot \frac{d\varphi}{d\theta} \cdot dA = E \cdot \frac{d\varphi}{d\theta} \int_A \frac{y}{r} \cdot dA = 0$$

da cui

$$\int_A \frac{y}{r} \cdot dA = 0 \,.$$

Poichè $y = r - R_0$

si avrà

$$\int_A \frac{r - R_0}{r} \cdot dA = \int_A \left(1 - \frac{R_0}{r}\right) \cdot dA = \int_A dA - \int_A \frac{R_0}{r} \cdot dA = 0$$

da cui

$$A - R_0 \int_A \frac{dA}{r} = 0$$

e quindi

$$A = R_0 \int_A \frac{dA}{r} \tag{2}$$

ed infine

$$R_0 = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{r}} \qquad \text{(posizione dell'asse neutro)} \tag{2'}$$

- Equazione di equilibrio alla rotazione:

$$M = \int_A \sigma \cdot y \cdot dA = \int_A E \cdot \frac{y}{r} \cdot \frac{d\varphi}{d\theta} \cdot y \cdot dA = E \cdot \frac{d\varphi}{d\theta} \int_A \frac{y^2}{r} \cdot dA$$

Ricordando ancora che $y = r - R_0$

$$M = E \cdot \frac{d\varphi}{d\theta} \int_A \frac{r^2 + R_0^2 - 2rR_0}{r} \cdot dA = E \cdot \frac{d\varphi}{d\theta} \left\{ \int_A r \cdot dA + \int_A \frac{R_0^2}{r} \cdot dA - 2 \int_A R_0 \cdot dA \right\}$$

Calcoliamo separatamente i tre integrali:

$\int_A r \cdot dA = \int_A (y + R_0) \cdot dA = \int_A y \cdot dA + \int_A R_0 \cdot dA = \int_A y \cdot dA + R_0 \cdot A$.

$\int_A \frac{R_0^2}{r} \cdot dA = R_0 \cdot \int_A \frac{R_0}{r} \cdot dA = R_0 \cdot A$ (ricordando l'eq. (2)).

$-2 \int_A R_0 \cdot dA = -2 \cdot R_0 \cdot A$.

In definitiva, si ricava l'espressione seguente per il momento M:

$$M = E \cdot \frac{d\varphi}{d\theta} \left\{ \int_A y \cdot dA + \cdot R_0 \cdot A + \cdot R_0 \cdot A - 2 \cdot R_0 \cdot A \right\} = E \cdot \frac{d\varphi}{d\theta} \int_A y \cdot dA$$

L'integrale $\int_A y \cdot dA$ è il momento statico S dell'area A della sezione rispetto all'asse neutro; esso pertanto può essere espresso come $S = A \cdot y_G$, da cui

$$M = E \cdot \frac{d\varphi}{d\theta} \cdot A \cdot y_G$$

e quindi

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{M}{E \cdot A \cdot y_G} \qquad (3)$$

Ricordando che $\epsilon = \frac{y}{r} \cdot \frac{d\varphi}{d\theta}$ (eq. 1), si ottiene infine la relazione che esprime l'andamento dello sforzo σ nella sezione:

$$\sigma = E \cdot \epsilon = E \cdot \frac{y}{r} \cdot \frac{d\varphi}{d\theta} = E \cdot \frac{y}{r} \cdot \frac{M}{E \cdot A \cdot y_G} = \frac{y}{r} \cdot \frac{M}{A \cdot y_G}$$

Poichè $y = r - R_0$, la relazione può essere scritta anche nella seguente forma

$$\sigma = \frac{r - R_0}{r} \cdot \frac{M}{A \cdot y_G} = \left(1 - \frac{R_0}{r}\right) \cdot \frac{M}{A \cdot y_G}$$

L'andamento degli sforzi sulla sezione è riportato nella figura 2. Contrariamente al caso della flessione in travi ad asse rettilineo:

- l'andamento degli sforzi non è lineare lungo l'altezza della sezione;
- l'asse neutro non passa per il baricentro della sezione.

In particolare, si può notare come, rispetto alla distribuzione di sforzi calcolata con la formula di Navier valida per travi ad asse rettilineo, gli sforzi siano (in valore assoluto) più alti nelle fibre esterne più vicine al centro di curvatura e più bassi nelle fibre esterne più lontane dal centro di curvatura.

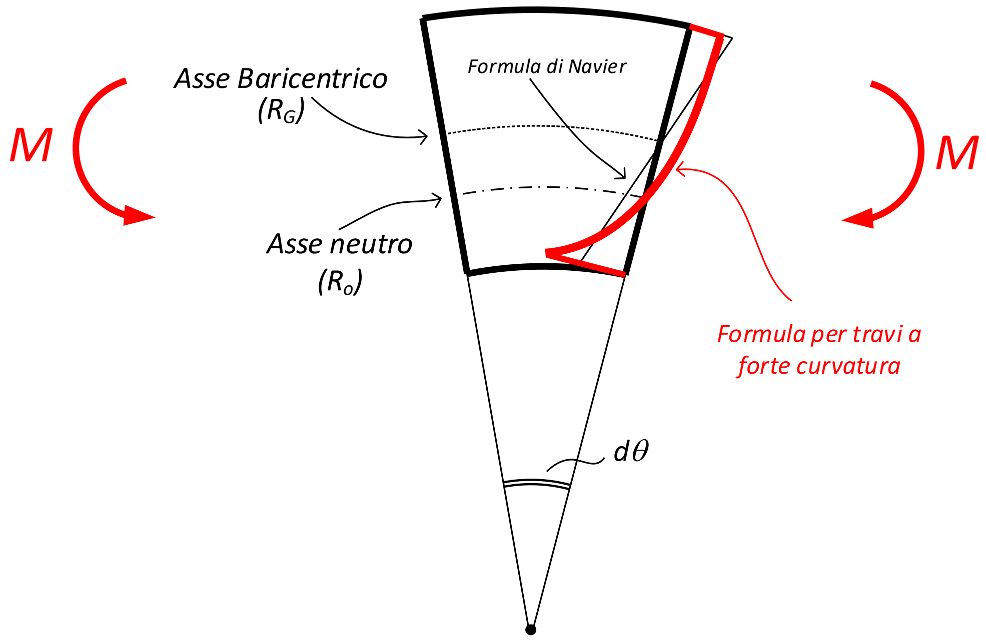

Fig. 2: Distribuzione degli sforzi in una trave a forte curvatura soggetta a momento flettente

La procedura per il calcolo degli sforzi in una trave a forte curvatura può essere schematizzata nei seguenti passi:

1) Determinazione della posizione del baricentro della sezione (calcolo del raggio R_G)

2) Determinazione della posizione dell'asse neutro (calcolo di $R_0 = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{r}}$)

3) Calcolo degli sforzi con l'equazione $\sigma = \left(1 - \frac{R_0}{r}\right) \cdot \frac{M}{A \cdot y_G}$ (oppure $\sigma = \frac{y}{r} \cdot \frac{M}{A \cdot y_G}$)

Per la verifica a snervamento è sufficiente calcolare gli sforzi nelle fibre interne ed esterne.

Si può infine notare come l'equazione 3 consenta di esprimere la rotazione relativa $d\varphi$ tra due sezioni poste a distanza angolare infinitesima $d\theta$ generata dall'applicazione del momento M come:

$$d\varphi = \frac{M}{E \cdot A \cdot y_G} d\theta$$