DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI FISCHER-RIESZ

Rivediamo innanzitutto l'enunciato del teorema, in una delle sue principali formulazioni:

Lo spazio L^2 è completo.

Ciò significa che, se non si conosce il limite di una data successione di funzioni $f_n \in L^2$, ma almeno è possibile stabilire che

$$\lim_{n,k\to+\infty} \|f_n - f_k\| = 0, \tag{1}$$

allora si può asserire che la successione considerata ammette limite in media quadratica.

Il punto di forza della condizione (1) sta nel fatto che la verifica di tale condizione non presuppone la conoscenza del limite della successione (f_n).

Si intende che nella (1) il simbolo $\| \ \|$ denota la norma di L^2, e cioè la quantità

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}$$

ed il dominio delle funzioni considerate è un intervallo (a, b), eventualmente illimitato.

Per dimostrare il teorema, supponiamo che una data successione di funzioni (f_n) sia fondamentale in L^2, o "di Cauchy" che dir si voglia, e cioè che valga la condizione (1).

Vogliamo dimostrare che esiste un'opportuna funzione f alla quale f_n converge in media quadratica.

Purtroppo, può benissimo accadere che $f_n(x)$ non converga per nessun x, dunque ogni tentativo di dimostrare la convergenza puntuale è destinato al fallimento.

Tuttavia, con il presente metodo si dimostra che, se non altro, esiste una sottosuccessione (f_{n_k}) della successione data (f_n) che converge puntualmente.

Per la precisione, può anche darsi che la sottosuccessione (f_{n_k}) appresso costruita non converga in alcuni punti, ma essi costituiscono comunque un insieme di misura nulla.

PASSO 1. Individuazione di una sottosuccessione "esponenzialmente" fondamentale.

Per la definizione di limite, e per l'ipotesi (1), esiste un indice n_0 tale che, per ogni $k > n_0$, risulta

$$\|f_{n_0} - f_k\| < 1.$$

Per le stesse ragioni, esiste un indice $n_1 > n_0$ tale che, per ogni $k > n_1$, risulta $\|f_{n_1} - f_k\| < \frac{1}{2}$. Esiste poi un $n_2 > n_1$ tale che, per ogni $k > n_2$, risulta $\|f_{n_2} - f_k\| < \frac{1}{4}$, eccetera. In definitiva, esiste una sottosuccessione (f_{n_k}) tale che

$$\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\| < \frac{1}{2^k}. \tag{2}$$

PASSO 2. Mettere la sottosuccessione nella forma di una serie.

Per ragioni algebriche, le funzioni f_{n_k} si possono considerare come le somme ridotte di una serie opportuna. Basta infatti porre

$g_k(x) = f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)$ per $k = 1, 2, \ldots$

e possiamo scrivere

$$f_{n_k}(x) = f_{n_0}(x) + \sum_{i=1}^{k} g_i(x). \qquad (3)$$

Il prossimo passo della dimostrazione è volto a dimostrare che la serie di funzioni

$$\sum_{i=1}^{+\infty} g_i(x) \qquad (4)$$

converge assolutamente, cioè

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |g_i(x)| < +\infty. \qquad (5)$$

Ciò vale per quasi ogni x, cioè i punti dove la serie (4) non converge assolutamente costituiscono un insieme di misura nulla (eventualmente vuoto).

La convergenza assoluta, a sua volta, implica la convergenza semplice: questa è una conseguenza della completezza dell'insieme di numeri reali, proprietà alla base di tutta la dimostrazione.

Infine, per la definizione di somma di una serie, e per la (3), la convergenza semplice della serie (4) implica la convergenza puntuale quasi ovunque della successione (f_{n_k}).

PASSO 3. Assoluta convergenza.

Osserviamo innanzitutto che le somme ridotte

$$S_k(x) = \sum_{i=1}^{k} |g_i(x)| \qquad (6)$$

costituiscono una successione di funzioni monotona non decrescente rispetto all'indice k in quanto i termini della serie sono tutti non negativi. A loro volta, gli integrali

$$\int_a^b S_k^2(x)\,dx$$

costituiscono una successione monotona non decrescente di numeri reali. Per la completezza, esistono, finiti o infiniti, i limiti

$$S(x) = \lim_{k\to+\infty} S_k(x)$$

e

$$\lim_{k\to+\infty} \int_a^b S_k^2(x)\,dx.$$

A questo punto utilizziamo un risultato fondamentale della teoria dell'integrazione secondo Lebesgue, il teorema della convergenza monotona, il quale asserisce che

$$\int_a^b S^2(x)\,dx = \lim_{k\to+\infty} \int_a^b S_k^2(x)\,dx. \qquad (7)$$

Tramite il significato geometrico dell'integrale, il teorema della convergenza monotona è intimamente legato alla proprietà più importante della misura di Lebesgue, la numerabile additività, detta anche continuità della misura.

Il teorema della convergenza monotona è intitolato alla memoria di Beppo Levi, insigne matematico italiano emigrato in Argentina a causa delle leggi razziali, e fratello di Eugenio Elia Levi, anch'egli matematico, morto in battaglia durante la prima guerra mondiale.

Possiamo stimare il secondo membro della (7) in quanto, applicando la disuguaglianza triangolare alla (6), si ha

$$\begin{aligned} \|S_k\| &\le \sum_{i=1}^{k} \|g_i\| \\ &\le \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} < 1. \end{aligned}$$

È in quest'ultimo passaggio che si utilizza la proprietà (2), di essere (f_{n_k}) "esponenzialmente" fondamentale.

Dunque il limite al secondo membro della (7) è finito (e per giunta ≤ 1), e quindi

$$\int_a^b S^2(x)\,dx \le 1. \tag{8}$$

Questa condizione ci assicura che $S(x) < +\infty$ per quasi ogni x: infatti, se per assurdo risultasse $S(x) = +\infty$ su di un insieme di misura positiva, anche l'integrale precedente sarebbe infinito.

Dunque la (5) sussiste quasi ovunque, come volevasi dimostrare.

PASSO 4. (f_{n_k}) converge in L^2.

La convergenza assoluta della serie (4) implica la sua convergenza semplice. Ma allora, per la (3), la successione (f_{n_k}) converge puntualmente quasi ovunque: indicheremo con $f(x)$ la funzione limite.

Ancora per la (3), e poiché $(a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2$, otteniamo

$$|f_{n_k}(x)|^2 \le 2\,|f_{n_0}(x)|^2 + 2\,S^2(x). \tag{9}$$

Il secondo membro non dipende dall'indice k, dunque passando al limite per $k \to +\infty$ si trova

$$|f(x)|^2 \le 2\,|f_{n_0}(x)|^2 + 2\,S^2(x). \tag{10}$$

Il secondo membro è sommabile (cioè ha integrale finito) perché $f_{n_0} \in L^2$ per ipotesi, e perché vale la (8). La (10) implica quindi che $f \in L^2$.

Sfruttando la disuguaglianza $(a-b)^2 \le 2a^2 + 2b^2$, e sommando la (9) con la (10), possiamo scrivere

$$(f_{n_k}(x) - f(x))^2 \le 8\,|f_{n_0}(x)|^2 + 8\,S^2(x).$$

Ciò mostra che il secondo membro è una maggiorante sommabile per la successione $((f_{n_k} - f)^2)$.

Poiché $(f_{n_k}(x) - f(x))^2 \to 0$ quasi ovunque, e poiché esiste una maggiorante sommabile, il teorema di Lebesgue (un altro fondamentale risultato della teoria) asserisce che

$$\lim_{k\to+\infty} \int_a^b (f_{n_k}(x) - f(x))^2\,dx = 0,$$

dunque $f_{n_k} \to f$ in L^2, come volevasi dimostrare.

PASSO 5. (f_n) converge in L^2.

Poiché la successione data è di Cauchy in L^2 per ipotesi, e poiché ha una sottosuccessione convergente il L^2 per il passo 4, essa stessa converge in L^2.

Ciò segue dal fatto che

$$\begin{aligned} \|f_n - f\| &= \|f_n - f_{n_k} + f_{n_k} - f\| \\ &\le \|f_n - f_{n_k}\| + \|f_{n_k} - f\|. \end{aligned} \tag{11}$$

Più precisamente, preso un $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere, esiste un indice $n(\varepsilon)$ tale che $\|f_n - f_{n_k}\| < \varepsilon/2$ per ogni $n, n_k > n(\varepsilon)$. Questo per la (1).

Esiste inoltre un indice $k(\varepsilon)$ tale che $\|f_{n_k} - f\| < \varepsilon/2$ per ogni $k > k(\varepsilon)$. Questo perché $f_{n_k} \to f$ in L^2.

Poiché $n_k \to +\infty$ per $k \to +\infty$, esiste, infine, un indice $k_0 > k(\varepsilon)$ tale che $n_{k_0} > n(\varepsilon)$.

Ponendo $k = k_0$ nella (11), troviamo $\|f_n - f\| < \varepsilon$ per ogni $n > n(\varepsilon)$, dunque la definizione di limite è soddisfatta, e possiamo scrivere

$$f_n \to f \text{ in } L^2,$$

come volevasi dimostrare.

OSSERVAZIONI CONCLUSIVE

Il teorema di Fischer-Riesz continua a valere anche se si considerano funzioni $f_n(x)$ con x che varia in un sottoinsieme misurabile E dello spazio N-dimensionale $\mathbb{R}^N$, con $N \ge 1$.

Il teorema di Fischer-Riesz continua a valere anche se si sostituisce lo spazio L^2 con lo spazio L^p, dove l'esponente p è un qualunque numero reale $p \ge 1$, ed eventualmente anche $p = +\infty$.

INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE

Questa dispensa riprende la dimostrazione che si trova sui principali testi in circolazione, e in particolare su Brézis, Analisi funzionale, Liguori.

Per le origini storiche del teorema (stabilito nel 1907) si veda Kline, Storia del pensiero matematico, Einaudi, vol. 2, pagine 1249–1251.

Per avere un'idea della diffusione del teorema nei corsi universitari italiani, si tenga presente che Trìcomi, pur famoso a livello internazionale, ne citava l'enunciato senza darne la dimostrazione nel suo testo del 1961.

Ulteriori informazioni si possono trovare su Horváth, On the Riesz-Fischer theorem, http://www.univie.ac.at/NuHAG/FEICOURS/ws0506/Riesz-Fisher.pdf